

Обобщённая формула Гассерта-Шора как комбинаторная теорема Стокса

Г. Г. Ильюта

АННОТАЦИЯ. Мы обобщим формулу Гассерта-Шора для числовых полугрупп.

We generalize Gassert-Shor formula for numerical semigroups.

1. Введение. Множество $S \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ называется числовой полугруппой, если оно содержит 0, замкнуто относительно сложения и имеет конечное дополнение в $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ [5], [6]. Далее предполагаем, что $S \neq \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Пусть

$$C(S) := \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus S = \{c_1, \dots, c_n | c_1 < \dots < c_n\},$$

$F(S) := \max C(S) = c_n$ — число Фробениуса полугруппы S . Для всей статьи мы фиксируем ненулевое $m \in S$ и для $i \in I_m := \{0, 1, \dots, m-1\}$ обозначим через A_i количество элементов множества $C(S)$, которые сравнимы с i по $\text{mod } m$. Множество Апери $S^{(m)}$ определяется следующим образом:

$$S^{(m)} := \{s \in S : s - m \notin S\}.$$

Другими словами, $S^{(m)}$ состоит из минимальных элементов в пересечениях полугруппы S с классами вычетов по $\text{mod } m$ — для каждого $i \in I_m$

$$\{i, i+m, \dots, i+m(A_i-1)\} \subset C(S), \quad (1)$$

если $A_i > 0$. В частности, $S^{(m)}$ образует содержащую 0 полную систему вычетов по $\text{mod } m$. Эти факты записаны в [5] в виде равенства

$$S = S^{(m)} + m\mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (2)$$

Приведём пример множества Апери: $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{(m)} = I_m$. Полагая

$$S^{(m)} = \{0 = a_0, a_1, \dots, a_{m-1} : a_i \equiv i \pmod{m}, i \in I_m\},$$

Работа поддержана грантом РФФИ-20-01-00579.

имеем равенство $a_i = mA_i + i$ для всех $i \in I_m$.

Дополнение $C(S)$ в $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ и множество Аперы $S^{(m)}$ являются двумя способами описания числовой полугруппы S . В [1] доказано равенство, связывающее эти два определения – своего рода формула перехода от одного базиса к другому: для произвольной функции f на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\sum_{i \in C(S)} (f(i+m) - f(i)) = \sum_{i=0}^{m-1} (f(a_i) - f(i)). \quad (3)$$

Из равенства (2) следует более короткое, чем в [1], доказательство формулы (3): суммируем в пересечении множества $C(S)$ с классом вычетов (1)

$$\begin{aligned} & (f(i+m) - f(i)) + (f(i+2m) - f(i+m)) + \dots + (f(i+A_i m) - f(i+(A_i-1)m)) \\ &= f(i+A_i m) - f(i) = f(a_i) - f(i) \end{aligned}$$

и затем суммируем по классам вычетов. Доказательство более общих фактов в п. 3 отличается только порядком суммирования.

Мы получим некоторые обобщения формулы (3) (будем называть её формулой Гассерта-Шора), отвечающие путям в дереве числовых полугрупп, а точнее простым разностным соотношениям для произвольной функции $H(S)$ на вершинах пути. Для числовой полугруппы S множество $\bar{S} := S \cup F(S)$ также является числовой полугруппой [6], р. 33. Дерево числовых полугрупп определяется в [6], р. 92, как граф, вершины которого отвечают числовым полугруппам, а рёбра – парам (S, \bar{S}) . Простейшее разностное соотношение – это представление разности значений функции H на концах пути в виде суммы разностей значений функции H на концах входящих в путь рёбер. Формула (3) является частным случаем этого соотношения (см. п. 2) для канонического (кратчайшего) пути в дереве числовых полугрупп, соединяющего отвечающую полугруппе S вершину с корнем дерева, отвечающим полугруппе $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Вершины этого пути (кроме корня) взаимно однозначно отвечают элементам множества $C(S)$ – числам Фробениуса отвечающих вершинам числовых полугрупп. В п. 2 приводятся более общие разностные соотношения, в которых наборам последовательных вершин пути сопоставлены некоторые определители, но для краткости и наглядности примеры в п. 3 и п. 4 мы приведём только для простейшего разностного соотношения и его мультипликативного варианта. Представление формулы (3) как разностного соотношения подсказывает аналогию с теоремой Стокса (или Ньютона-Лейбница): интеграл по границе области равен интегралу от дифференциала по

самой области. Считаем множество $C(S)$ областью, по которой идёт дискретное интегрирование, множество Апери $S^{(m)}$ – границей этой области, а разность значений функции H на отвечающих вершинам ребра числовых полугруппах (в частности, разность $f(i+m) - f(i)$ в формуле (3)) – дискретным дифференциалом.

Связь дерева числовых полугрупп с множествами Апери основана на следующем замечании: множества Апери $S^{(m)}$ и $\bar{S}^{(m)}$ отличаются одним элементом (см. п. 2). В п. 3 мы рассмотрим примеры функций $H(S)$, которые являются функциями от $S^{(m)}$ и для которых соответствующие разностные соотношения наиболее близки к формуле (3), в частности, каждое слагаемое в левых частях этих соотношений имеет множитель вида $f(i+m) - f(i)$, где $i \in C(S)$. Эти множители интерпретированы как разности переменных в хорошо известных рекуррентных соотношениях для элементарных и полных симметрических функций (или их производящих функций), а также для разделённых разностей Ньютона. Эти рекуррентные соотношения имеют одно общее свойство – в них присутствуют пары наборов переменных, отличающиеся одним элементом. Также в п. 3 рассматривается пример функции $f(i)$, связанный с обобщениями классических многочленов Бернулли. Разностные соотношения для этих обобщений [3] хорошо согласованы с нашим дискретным дифференциалом.

Наш подход к обобщению формулы Гассерта-Шора (3) аналогичен подходу И. Макдональда к формуле Соломона для многочлена Пуанкаре $G(q)$ конечной группы G , порождённой отражениями, [4]. Эта аналогия прослеживается в п. 5. Там же приводятся ещё два равенства из [2] и [7], которые, на наш взгляд, похожи на теорему Стокса и на формулу Гассерта-Шора (3).

2. Дерево числовых полугрупп и множества Апери. При добавлении к полугруппе S её числа Фробениуса $F(S)$ меняется пересечение полугруппы S только с одним классом вычетов по $\text{mod } m$, а значит в множестве $S^{(m)}$ меняется только один элемент. Из сказанного в первом абзаце Введения следует, что

$$\bar{S}^{(m)} \setminus \{F(S)\} = S^{(m)} \setminus \{F(S) + m\},$$

другими словами, множество Апери $\bar{S}^{(m)}$ получается из множества Апери $S^{(m)}$ заменой числа $F(S) + m$ на число $F(S)$. Действительно, $F(S) + m \in S^{(m)}$, так как $F(S) := \max C(S) \notin S$, а следующее рассуждение показывает, что $F(S) \in \bar{S}^{(m)}$: $F(S) - m \notin \bar{S}$, так как в противном случае $F(S) - m \in S$, а значит $m + (F(S) - m) = F(S) \in S$.

Имея для $l > 0$ конечную последовательность числовых полугрупп, в которой соседние полугруппы отличаются одна от другой добавлением числа Фробениуса (путь в дереве числовых полугрупп)

$$V_0 - V_1 - \dots - V_{l-1} - V_l,$$

и функцию $H(V)$ на множестве $\{V_0, \dots, V_l\}$, напомним для $0 < p \leq l$ равенство для суммы определителей, отличающихся одной строкой,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{l-p} D(H(V_{i+1}) - H(V_i), \dots, H(V_{i+p}) - H(V_{i+p-1})) \\ = D(H(V_{l-p+1}) - H(V_0), \dots, H(V_l) - H(V_{p-1})), \end{aligned}$$

где $D(y_1, \dots, y_p)$ – определитель, первая строка которого совпадает с $y_1 \dots y_p$, а остальные элементы (комплексные числа или коммутирующие переменные) фиксированы. Этот определитель можно считать формальной линейной комбинацией элементов первой строки и поэтому в качестве функции $H(V)$ допускать функцию с произвольной областью значений. Для $p = 1$ имеем равенство

$$\sum_{i=0}^{l-1} (H(V_{i+1}) - H(V_i)) = H(V_l) - H(V_0) \quad (4)$$

или же в мультипликативном варианте (если дроби определены)

$$\prod_{i=0}^{l-1} \frac{H(V_{i+1})}{H(V_i)} = \frac{H(V_l)}{H(V_0)}.$$

В оставшейся части статьи мы будем рассматривать для произвольной числовой полугруппы S только её канонический путь в дереве числовых полугрупп

$$S = S_n - S_{n-1} - \dots - S_1 - S_0 = \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

где $S_i := \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{c_1, \dots, c_i\}$, $i = 1, \dots, n$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ $\tilde{S}_i = S_{i-1}$, $F(S_i) = c_i$ и

$$T_i := S_i^{(m)} \setminus \{c_i + m\} = S_{i-1}^{(m)} \setminus \{c_i\},$$

другими словами, множество Апери $S_{i-1}^{(m)}$ получается из множества Апери $S_i^{(m)}$ заменой числа $c_i + m$ на число c_i . Для канонического пути равенство (4) имеет вид

$$\sum_{i=0}^{n-1} (H(S_{i+1}) - H(S_i)) = H(S) - H(\mathbb{Z}_{\geq 0}). \quad (5)$$

Полагая в этом равенстве $H(S_i) = \sum_{a \in S_i^{(m)}} a$, получим формулу (3). В п. 4 приведён пример специализации для мультипликативного варианта этого разностного соотношения.

3. Примеры функций на вершинах канонического пути. Введём обозначение для множества значений функции f на элементах множества A

$$f\{A\} := \{f(a) : a \in A\}.$$

Для $0 < p \leq m$ и симметрической функции $F(x_1, \dots, x_p)$ пусть

$$H(S_i) := \sum_{I \subset S_i^{(m)}, |I|=p} F(f\{I\}).$$

Для такой функции $H(S_i)$ формула (5) примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{J \subset T_i, |J|=p-1} F(f\{J\}, f(c_i + m)) - \sum_{J \subset T_i, |J|=p-1} F(f\{J\}, f(c_i)) \right) \\ = \sum_{I \subset S^{(m)}, |I|=p} F(f\{I\}) - \sum_{I \subset I_m, |I|=p} F(f\{I\}), \end{aligned} \quad (6)$$

в частности, для $p = m$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (F(f\{T_i\}, f(c_i + m)) - F(f\{T_i\}, f(c_i))) \\ = F(f\{S^{(m)}\}) - F(f\{I_m\}). \end{aligned}$$

Полагая в формуле (6) $F(x_1, \dots, x_p) = (z + x_1) \dots (z + x_p)$, получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (f(c_i + m) - f(c_i)) \left(\sum_{J \subset T_i, |J|=p-1} \prod_{a \in J} (z + f(a)) \right) \\ = \sum_{I \subset S^{(m)}, |I|=p} \prod_{a \in I} (z + f(a)) - \sum_{I \subset I_m, |I|=p} \prod_{a \in I} (z + f(a)), \end{aligned} \quad (7)$$

в частности, для $p = m$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (f(c_i + m) - f(c_i)) \prod_{a \in T_i} (z + f(a)) \\ = \prod_{a \in S^{(m)}} (z + f(a)) - \prod_{a \in I_m} (z + f(a)). \end{aligned}$$

Полагая в формуле (6) $F(x_1, \dots, x_p) = (z - x_1)^{-1} \dots (z - x_p)^{-1}$, получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{f(c_i + m) - f(c_i)}{(z - f(c_i))(z - f(c_i + m))} \left(\sum_{J \subset T_i, |J|=p-1} \prod_{a \in J} (z - f(a))^{-1} \right) \\ &= \sum_{I \subset S^{(m)}, |I|=p} \prod_{a \in I} (z - f(a))^{-1} - \sum_{I \subset I_m, |I|=p} \prod_{a \in I} (z - f(a))^{-1}, \quad (8) \end{aligned}$$

в частности, для $p = m$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{f(c_i + m) - f(c_i)}{(z - f(c_i))(z - f(c_i + m))} \prod_{a \in T_i} (z - f(a))^{-1} \\ &= \prod_{a \in S^{(m)}} (z - f(a))^{-1} - \prod_{a \in I_m} (z - f(a))^{-1}. \end{aligned}$$

Элементарные и полные симметрические функции определяются равенствами

$$\begin{aligned} e_k(x_1, \dots, x_p) &:= \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}, \\ h_k(x_1, \dots, x_p) &:= \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}, \end{aligned}$$

в частности,

$$\begin{aligned} e_0(x_1, \dots, x_p) &= h_0(x_1, \dots, x_p) = 1, \\ e_1(x_1, \dots, x_p) &= h_1(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^p x_i. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для $k = 1, \dots, p$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (f(c_i + m) - f(c_i)) \left(\sum_{J \subset T_i, |J|=p-1} e_{k-1}(f\{J\}) \right) \\ &= \sum_{I \subset S^{(m)}, |I|=p} e_k(f\{I\}) - \sum_{I \subset I_m, |I|=p} e_k(f\{I\}). \end{aligned}$$

В частности, для $p = m$

$$\sum_{i=1}^n (f(c_i + m) - f(c_i)) e_{k-1}(f\{T_i\}) = e_k(f\{S^{(m)}\}) - e_k(f\{I_m\}),$$

для $k = 1$ получаем формулу (3).

Доказательство. Полагаем в формуле (6) $F(x_1, \dots, x_p) = e_k(x_1, \dots, x_p)$ и используем соотношение

$$e_k(x_2, \dots, x_p) - e_k(x_1, \dots, x_{p-1}) = (x_p - x_1)e_k(x_2, \dots, x_{p-1}).$$

Также можно использовать равенство

$$(z + x_1) \dots (z + x_p) = \sum_{k=0}^p e_k(x_1, \dots, x_p) z^{p-k}$$

в формуле (7) и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях переменной z .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (f(c_i + m) - f(c_i)) \left(\sum_{J \subset T_i, |J|=p-1} h_{k-1}(f\{J\}, f(c_i), f(c_i + m)) \right) \\ = \sum_{I \subset S^{(m)}, |I|=p} h_k(f\{I\}) - \sum_{I \subset I_m, |I|=p} h_k(f\{I\}). \end{aligned}$$

В частности, для $p = m$

$$\sum_{i=1}^n (f(c_i + m) - f(c_i)) h_{k-1}(f\{T_i\}, f(c_i), f(c_i + m)) = h_k(f\{S^{(m)}\}) - h_k(f\{I_m\}),$$

для $k = 1$ получаем формулу (3).

Доказательство. Полагаем в формуле (6) $F(x_1, \dots, x_p) = h_k(x_1, \dots, x_p)$ и используем соотношение

$$h_k(x_2, \dots, x_p) - h_k(x_1, \dots, x_{p-1}) = (x_p - x_1)h_{k-1}(x_1, \dots, x_p).$$

Также можно использовать равенство

$$z^p (z - x_1)^{-1} \dots (z - x_p)^{-1} = \sum_{k \geq 0} h_k(x_1, \dots, x_p) z^{-k}$$

в формуле (8) и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях переменной z .

Определим разделённые разности Ньютона $\Delta(w(z); x_1, \dots, x_p)$ функции $w(z)$ как контурный интеграл (мы пропускаем общеизвестные детали)

$$\Delta(w(z); x_1, \dots, x_p) := \frac{1}{2\pi i} \int \frac{w(z) dz}{(z - x_1) \dots (z - x_p)}.$$

Умножая равенства в Предложении 2 на $w(z)/2\pi i$ и интегрируя, получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (f(c_i + m) - f(c_i)) \sum_{J \subset T_i, |J|=p-1} \Delta(w(z); f\{J\}, f(c_i), f(c_i + m)) \\ &= \sum_{I \subset S^{(m)}, |I|=p} \Delta(w(z); f\{I\}) - \sum_{I \subset I_m, |I|=p} \Delta(w(z); f\{I\}), \end{aligned}$$

в частности, для $p = m$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (f(c_i + m) - f(c_i)) \Delta(w(z); f\{T_i\}, f(c_i), f(c_i + m)) \\ &= \Delta(w(z); f\{S^{(m)}\}) - \Delta(w(z); f\{I_m\}), \end{aligned}$$

для $w(z) = z^m$ получаем формулу (3).

Приведём пример функции $f(i)$ в формуле (3) и в формулах из Предложений 1-5. Несколько обобщений многочленов Бернулли $B_n(t)$ объединены в следующем определении [3], р. 337: пусть для $[l]_q := (q^l - 1)/(q - 1)$

$$B_{n;q^l;y}^{(\alpha)}(t + 1; \lambda) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{l(k-\alpha+1)y} [l]_q^k B_{k;q^l}^{(\alpha)}(t; \lambda),$$

а $B_{k;q}^{(\alpha)}(t; \lambda)$ определяются производящей функцией

$$(-z)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\alpha]_q [\alpha + 1]_q \cdots [\alpha + n - 1]_q}{[1]_q [2]_q \cdots [n]_q} \lambda^n q^{n+t} e^{[n+t]_q z} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{k;q}^{(\alpha)}(t; \lambda) \frac{z^n}{n!}.$$

Для $n \geq 1$ имеем разностное соотношение [3], р. 338,

$$\lambda q^{l(\alpha-1)} B_{n;q^l;y}^{(\alpha)}(t + 1; \lambda) - B_{n;q^l;y}^{(\alpha)}(t; \lambda) = n[l]_q B_{n-1;q^l;y}^{(\alpha-1)}(t; \lambda). \quad (9)$$

Обозначим через $[x]$ целую часть $x \in \mathbb{R}$. Полагая

$$f(i) = (\lambda q^{l(\alpha-1)})^{\left[\frac{x+i}{m}\right]} B_{n;q^l;y}^{(\alpha)}\left(\frac{i}{m}; \lambda\right),$$

и используя разностное соотношение (9), получим равенство

$$f(i + m) - f(i) = (\lambda q^{l(\alpha-1)})^{\left[\frac{x+i}{m}\right]} n[l]_q B_{n-1;q^l;y}^{(\alpha-1)}\left(\frac{i}{m}; \lambda\right),$$

Поэтому формула (3) принимает вид

$$n[l]_q \sum_{i \in C(S)} (\lambda q^{l(\alpha-1)})^{\left[\frac{x+i}{m}\right]} B_{n-1;q^l;y}^{(\alpha-1)}\left(\frac{i}{m}; \lambda\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \left((\lambda q^{l(\alpha-1)})^{\lfloor \frac{x+a_i}{m} \rfloor} B_{n;q^l;y}^{(\alpha)} \left(\frac{a_i}{m}; \lambda \right) - (\lambda q^{l(\alpha-1)})^{\lfloor \frac{x+i}{m} \rfloor} B_{n;q^l;y}^{(\alpha)} \left(\frac{i}{m}; \lambda \right) \right).$$

Аналогично преобразуются формулы из Предложений 1-5.

4. Пример специализации для мультипликативного варианта разностного соотношения (5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для $k \geq 1$, $1 \leq p < m$

$$\prod_{i=1}^n \prod_{J \subset T_i \setminus \{0\}, |J|=p-1} \left(1 + \frac{\sum_{j=1}^k \binom{k}{j} c_i^{k-j} m^j}{\sum_{a \in J} a^k + c_i^k} \right) = \frac{\prod_{I \subset S^{(m)} \setminus \{0\}, |I|=p} \sum_{a \in I} a^k}{\prod_{I \subset I_m \setminus \{0\}, |I|=p} \sum_{a \in I} a^k}.$$

в частности, для $p = m - 1$

$$\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\sum_{j=1}^k \binom{k}{j} c_i^{k-j} m^j}{\sum_{a \in T_i} a^k + c_i^k} \right) = \frac{\sum_{a \in S^{(m)}} a^k}{\sum_{a \in I_m} a^k},$$

для $p = 1$

$$\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{m}{c_i} \right) = \frac{\prod_{a \in S^{(m)} \setminus \{0\}} a}{(m-1)!}.$$

Доказательство. В мультипликативном варианте разностного соотношения (5)

$$\prod_{i=1}^n \frac{H(S_i)}{H(S_{i-1})} = \frac{H(S)}{H(\mathbb{Z}_{\geq 0})}.$$

полагаем

$$H(S_i) := \prod_{I \subset S_i^{(m)} \setminus \{0\}, |I|=p} \sum_{a \in I} a^k$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{H(S_i)}{H(S_{i-1})} &= \prod_{J \subset T_i \setminus \{0\}, |J|=p-1} \frac{\sum_{a \in J} a^k + (c_i + m)^k}{\sum_{a \in J} a^k + c_i^k} \\ &= \prod_{J \subset T_i \setminus \{0\}, |J|=p-1} \frac{\sum_{a \in J} a^k + c_i^k + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} c_i^{k-j} m^j}{\sum_{a \in J} a^k + c_i^k} \\ &= \prod_{J \subset T_i \setminus \{0\}, |J|=p-1} \left(1 + \frac{\sum_{j=1}^k \binom{k}{j} c_i^{k-j} m^j}{\sum_{a \in J} a^k + c_i^k} \right). \end{aligned}$$

5. Аналогия между формулой Макдональда и формулой Гассерта-Шора. Формулы Соломона и Макдональда для многочлена Пуанкаре $G(q)$ имеют вид

$$\begin{aligned} G(q) &= \prod_i \frac{q^{e_i+1} - 1}{q - 1} \\ &= \prod_{r \in R_+(G)} \frac{q^{ht(r)+1} - 1}{q^{ht(r)} - 1}, \end{aligned}$$

где e_i показатели Кокстера группы G , $ht(r)$ – высота (сумма координат в базисе из простых корней) корня r из системы положительных корней $R_+(G)$ группы G (одной из систем корней $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$). И. Макдональд получил второе равенство из первого с помощью мультипликативного варианта разностного соотношения

$$\frac{q^{e_i+1} - 1}{q - 1} = \prod_{j=1}^{e_i} \frac{q^{j+1} - 1}{q^j - 1}$$

и следующего известного факта: разбиение, составленное из показателей Кокстера e_i сопряжено разбиению, составленному из количеств b_i положительных корней высоты i ,

$$b_i := |\{r \in R_+(G) : ht(r) = i\}|.$$

Этот факт можно представить как аналог формулы Гассерта-Шора (3): для произвольной функции f на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\sum_{r \in R_+(G)} (f(ht(r) + 1) - f(ht(r))) = \sum_i (f(e_i + 1) - f(1)) \quad (10)$$

или же в мультипликативном варианте (если дроби определены)

$$\prod_{r \in R_+(G)} \frac{f(ht(r) + 1)}{f(ht(r))} = \prod_i \frac{f(e_i + 1)}{f(1)}.$$

Можно расширить аналогию и в обратном направлении, а именно, определим m -высоту вещественного числа x как $ht_m(x) := [x/m]$ и пусть

$$b_i(S) := |\{k \in C(S) : ht_m(k) = i\}|.$$

Из определений следует, что разбиение, составленное из чисел A_i , сопряжено разбиению, составленному из чисел $b_i(S)$.

Формулу (10) также можно рассматривать как комбинаторную теорему Стокса: областью дискретного интегрирования (аналогом

дополнения $C(S)$ к числовой полугруппе S) считаем мультимножество высот корней из системы положительных корней $R_+(G)$ группы G (или же само множество $R_+(G)$), границей этой области (аналогом множества Апери) – набор чисел $d_i = e_i + 1$, совпадающий с набором степеней базисных инвариантов группы G , а дискретным дифференциалом – функцию

$$f(ht(r) + 1) - f(ht(r)) = (f(ht(r) + 1) - f(1)) - (f(ht(r)) - f(1)).$$

Полагая в формуле (10)

$$f(i) = (\lambda q^{l(\alpha-1)})^i B_{n;q^l;y}^{(\alpha)}(i; \lambda),$$

и используя разностное соотношение (9), получим для $n \geq 1$ следующее равенство

$$\begin{aligned} n[l]_q \sum_{r \in R_+(G)} (\lambda q^{l(\alpha-1)})^{ht(r)} B_{n-1;q^l;y}^{(\alpha-1)}(ht(r); \lambda) \\ = \sum_i ((\lambda q^{l(\alpha-1)})^{d_i} B_{n;q^l;y}^{(\alpha)}(d_i; \lambda) - \lambda q^{l(\alpha-1)} B_{n;q^l;y}^{(\alpha)}(1; \lambda)). \end{aligned}$$

Приведём ещё два равенства, которые, на наш взгляд, похожи на теорему Стокса и на формулу Гассерта-Шора (3). Для $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ пусть

$$M(k) := \left\{ i \in \mathbb{Z}_{>0} : \frac{k}{i} - \left\lfloor \frac{k}{i} \right\rfloor \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

В [2] появляется равенство

$$\sum_{i=1}^{2k} \left(f(i) \left\lfloor \frac{2k}{i} \right\rfloor - 2f(i) \left\lfloor \frac{k}{i} \right\rfloor \right) = \sum_{i \in M(k)} f(i),$$

вытекающее из соотношения

$$[2x] - 2[x] = \begin{cases} 0, & \text{если } x - [x] < 1/2; \\ 1, & \text{если } x - [x] \geq 1/2. \end{cases}$$

В [7] появляется равенство

$$\sum_{i \geq 1} \left(f(i) \left\lfloor \frac{k}{i} \right\rfloor - f(i) \left\lfloor \frac{k-1}{i} \right\rfloor \right) = \sum_{i|k} f(i),$$

вытекающее из соотношения

$$\left\lfloor \frac{k}{i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k-1}{i} \right\rfloor = \begin{cases} 0, & \text{если } i \nmid k; \\ 1, & \text{если } i|k. \end{cases}$$

Список литературы

- [1] T. A. Gassert, C. M. Shor, Characterizations of numerical semigroup complements via Apéry sets, *Semigroup Forum* 98 (2019), 31-47.
- [2] D. E. Knuth, A New Sum for n^2 , *Amer. Math. Monthly* 94(8) (1987), 795-797.
- [3] Q.-M. Luo, q -Extensions of some results involving the Luo-Srivastava generalizations of the Apostol-Bernoulli and Apostol Euler polynomials, *Filomat* 28(2) (2014), 329-351.
- [4] I. G. Macdonald, The Poincare series of a Coxeter group, *Math. Ann.* 199 (1972), 161-174.
- [5] J. L. Ramirez Alfonsin, O. J. Rodseth, Numerical semigroups: Apéry sets and Hilbert series, *Semigroup Forum* 79 (2009), 323-340.
- [6] J.C. Rosales, P.A. Garcia-Sanchez, Numerical Semigroups, *Developments in Mathematics*, vol.20, Springer, New York, 2009.
- [7] A. Smirnov, On exact formulas for the number of integral points, Problems in the theory of representations of algebras and groups. Part 24, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 413, POMI, St. Petersburg, 2013, 173–182; *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 202:3 (2014), 448-454.

Email address: ilgena@rambler.ru