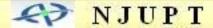
## 10.4 函数展开成幂级数

10.4.1、泰勒级数

10.4.2、函数展开成幂级数

10.4.3 函数的幂级数展开式的应用(自学)



## 10.4.1、泰勒级数

- 1. 问题的引入
- (1) 上一节主要讨论幂级数的收敛域及和函数。

反问题:给定一个函数f(x),能否找到一个幂级数,他在某区间上收敛,而其和函数恰是f(x).

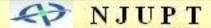
若能找到这样的幂级数,则称函数f(x)在该区间上能展开成幂级数。

(2) 第三章第三节泰勒公式中我们知道:

如果函数f(x)在含有 $x_0$ 的某开区间(a,b)内有直至(n+1)

阶的导数,则对(a,b)内任一点x,有

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^n + R_n(x)$$
 (1)



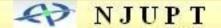
如果函数f(x)在含有 $x_0$ 的某开区间(a,b)内各阶导数都存在,则 $P_n(x)$ 的项可无限增加而得一幂级数:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$
 (2)

幂级数 (2) 称为函数f(x)的泰勒级数。

## 问题:

- 1) 此级数是否收敛? 2) 若收敛,和函数是否为f(x)?
- 3) 若f(x)能展开幂级数是否还有其它形式?



2. 定理1 设函数f(x)在点 $x_0$ 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数,则f(x)在该邻域内能展开成幂(泰勒)级数的充要条件是f(x)的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限为0,即:

 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad (x \in U(x_0))$ 

证明: 先证必要性。

设函数f(x)在 $U(x_0)$ 上能展开成泰勒级数,即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots (2)$$
对一切 $x \in U(x_0)$ 成立。

我们把f(x)的n阶泰勒公式(1)写成:

$$f(x)=s_{n+1}(x)+R_n(x)$$

其中 $s_{n+1}(x)$ 是f(x)的泰勒级数的前n+1项的和。

因为f(x)在该邻域内能展开成泰勒级数(2),所以

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1}(x) = f(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - s_{n+1}(x)] = 0$$

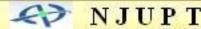
再证充分性: 设 $\lim R_n(x) = 0$ 对一切 $x \in U(x_0)$ 成立。

由f(x)的n阶泰勒公式 有:  $s_{n+1}(x) = f(x) - R_n(x)$ 

所以 
$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x)$$

即函数f(x)的泰勒级数收敛,且收敛于f(x)。

在 (2) 式中若取 $x_0=0$ ,得:



$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$
 (3)  
级数 (3) 称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数。

定理 2 如果函数 f(x) 在 $U_{\delta}(x_0)$  内具有任意阶导数,且在 $U_{\delta}(x_0)$  内能展开成 $(x-x_0)$  的幂级数,

即 
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

则其系数  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$   $(n = 0,1,2,\cdots)$  且展开式是唯一的.

证明 
$$:: \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n 在 u_{\delta}(x_0)$$
内收敛于 $f(x)$ ,即

 $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$ 逐项求导任意次,得

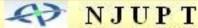
$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \dots$$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)n \dots 3 \cdot 2a_{n+1}(x - x_0) + \dots$$

$$\Leftrightarrow x = x_0$$
, 即得

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$
  $(n = 0,1,2,\cdots)$  泰勒系数

泰勒系数是唯一的,:f(x)的展开式是唯一的



## 10.4.2、函数展开成幂级数

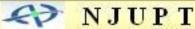
- 1 直接法: 具体步骤如下:
  - (i) 求f(x)的各阶导数。
  - (ii) 求f(x)的各阶导数在x=0 ( $x=x_0$ )处的值。
  - (iii) 写出f(x)所对应的幂级数,即麦克劳林(泰勒级数):

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

并写出其收敛半径R。

(iv) 在(-R,R) 内考察:  $\lim_{n\to\infty} R_n(x)$ 是否为零。 若为零,则在(-R,R) 内有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$



例1 将 $f(x) = e^x$ 展开成x的幂级数

解 
$$f^{(n)}(x) = e^x (n = 1, 2\cdots) \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1 (n = 1, 2\cdots)$$

得f(x)的麦克劳林级数:  $1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots \frac{1}{n!}x^n+\cdots$ 它的收敛半径为 $R=+\infty$ 

对任何有限的 $x,\xi(\xi是位于0、x之间的某个值。$ 

$$|R_{n}(x)| = \left| \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \le e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$
因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛,所以 $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ 

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} e^{|x|} \cdot \frac{|x|}{(n+1)!} = 0 \qquad \text{II} \lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0 \quad x \in (-\infty, \infty)$$

得展开式:

$$e^{x} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^{2} + \dots + \frac{1}{n!}x^{n} + \dots \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

例2 将 $f(x) = \sin x$ 展开成x的幂级数

解 
$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$
  $(n = 1, 2\cdots)$ 

得f(x)的麦克劳林级数:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$
它的收敛半径为 $R = + \infty$ 

对任何有限的x, $\xi$ ( $\xi$ 是位于 0、x之间的某个值)。

$$|R_n(x)| = \frac{\sin[\xi + \frac{(n+1)\pi}{2}]}{(n+1)!} x^{n+1} \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

得展开式: 
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

#### 2 间接法:

- (i) 利用一些已知函数的幂级数展开式。
- (ii) 利用幂级数的运算(四则,逐项求导,逐项积分)。

(iii) 变量代换。

例3 将 $f(x) = \cos x$ 展开成x的幂级数

解 
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

上式对x求导(右端逐项求导)得  $x \in (-\infty, +\infty)$ 

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$
$$x \in (-\infty, +\infty)$$

例4 将 $f(x) = \ln(1+x)$ 展开成x的幂级数

上式右端的幂级数在x = 1 收敛,而  $\ln(1+x)$ 在x = 1有 定义且连续,所以展开式对x=1也是成立的,于是收敛 域为  $-1 < x \le 1$ .

利用此题可得  $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} - \frac{1}{n} + \dots$  例5 将 $f(x) = \arctan x$ 展开成x的幂级数

将上式从0到x逐项积分:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm x = \pm 1 \text{ \& black}, \text{ \& black} |x| \leq 1$$

注: 逐项积分逐项微分可能改变区间端点的收敛情况

注 应熟记下列函数的幂级数展开式:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad (|x| < 1)$$

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^{2} + \dots + \frac{1}{n!}x^{n} + \dots \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots + (-\infty < x < +\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \le 1)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots$$

$$+ \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} x^n + \dots |x| < 1$$

$$m$$
 任意 实物。

NJUPT

例6 将 $f(x) = x \ln x + \alpha x = 1$ 处展开成幂级数

则 
$$f(x) = (t+1)\ln(t+1) = g(t)$$
在 $t = 0$ 点展开。

$$g'(t) = \ln(t+1) + 1$$

$$= 1 + t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + \dots \quad (-1 < t \le 1)$$

两边从0到t积分:

$$g(t)-g(0)$$

$$= t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2 \cdot 3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^{n+1}}{n(n+1)} + \dots \quad (-1 < t \le 1)$$

$$=t+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^{n+1}}{n(n+1)}=t+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{t^{n}}{n(n-1)}$$

$$= t + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{n+1}}{n(n+1)} = t + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n(n-1)}$$

$$x \ln x = (x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} (x-1)^n \qquad (0 < x \le 2)$$

例7 将
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$$
展开成 $x - 1$ 的幂级数

解 因为
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{(x+1)(x+3)}$$

$$= \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(3+x)} = \frac{1}{4(1+\frac{x-1}{2})} - \frac{1}{8(1+\frac{x-1}{4})}$$

$$\frac{4(1+\frac{x-1}{2})}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n} \qquad |\frac{x-1}{2}|<1, ||-1< x<3$$

$$\frac{4}{n=1} = \frac{2^{n}}{1} = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(x-1)^{n}}{4^{n}}$$

$$8(1+\frac{x}{4}) = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(x-1)^{n}}{4^{n}}$$

$$|\frac{x-1}{4}| < 1,$$
 即  $-3 < x < 5$ 

$$\therefore f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}})(x-1)^n$$

收敛域为 $|\frac{x-1}{2}| < 1$ ,即 - 1 < x < 3

或令
$$y = x - 1$$
,则 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$ 

$$=\frac{1}{4(1+\frac{y}{2})}-\frac{1}{8(1+\frac{y}{4})}$$

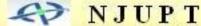
化为展开成y的幂级数。



# 内容小结

- 1. 函数的幂级数展开法
  - (1) 直接展开法
  - (2) 间接展开法
- 2. 常用函数的幂级数展开式

习题10.4



## 10.4.3 函数的幂级数展开式的应用

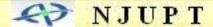
- 一、近似计算
- 1. 函数值的近似计算

有了幂级数的展开式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$
可利用它进行函数值的近似计算。

常见的两类问题:

- (1) 给定n,计算 $f(x_1)$ 的近似值( $x_1$ 位于收敛区间内),并估计误差。
- (2) 提出误差要求,计算 $f(x_1)$ 的近似值。例 P205,P206之例8,例9。



## 2. 定积分的近似计算

如果被积函数在积分区间上能展开成幂级数,则把这幂级数逐项积分,用积分后所得的级数就可算出定积分的近似值。例P207之例10。

## 二、欧拉公式

## 1 复数项级数的一般概念

考察复数项级数:

$$(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) + \dots + (u_n + iv_n) + \dots$$
 (1)

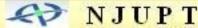
其中 $u_n, v_n$ 为实常数。如果

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$
 (2)  $\pi$   $v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$  (3)

分别收敛于u,v,则称级数(1)收敛,且和为u+iv

如果级数(1)各项的模构成的级数:

$$\sqrt{u_1^2 + v_1^2} + \sqrt{u_2^2 + v_2^2} + \dots + \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \dots$$
 (4) \(\psi\)



则称级数(1)绝对收敛。

显然,如(4)收敛,则(2),(3)也绝对收敛,从而级数(1)也收敛。

## 2 欧拉公式

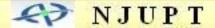
考察
$$1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots\frac{1}{n!}z^n+\cdots$$
  $(z=x+iy)$  (5)

其各项的模构成的级数:

$$1 + r + \frac{1}{2!}r^2 + \dots + \frac{1}{n!}r^n + \dots \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2})$$
 (6)

易知其处处收敛,从而级数(5)在复平面上绝对收敛。

在x轴上(即z=x),级数(5)表示指数函数 $e^x$ ,在复平面上,用它定义复变量的指数函数:



$$e^{z} = 1 + z + \frac{1}{2!}z^{2} + \dots + \frac{1}{n!}z^{n} + \dots$$
  $(|z| < +\infty)$  (7)

当
$$x=0$$
,即 $z=iy$ 时,(7)式变为:

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{1}{2!}(iy)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(iy)^n + \cdots$$

$$= 1 + iy - \frac{1}{2!}y^2 - i\frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{4!}y^4 + \frac{1}{5!}y^5 - \cdots$$

$$= (1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 + \cdots) + i(y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \cdots)$$

$$=\cos y + i\sin y$$

将y换成x,得: 
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
 (8)

将x换成-x,得: 
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$
 (9)

由(8),(9)可得:欧拉公式

$$\begin{cases} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$
 (10)