《线性代数与空间解析几何》

第四章 n维向量

4.3 向量组的秩

复习线性相关性的判定理论

- 单个向量组成的向量组α：

(1)若$\alpha = \mathbf{0}$, 则线性相关;

(2)若$\alpha \neq \mathbf{0}$, 则线性无关.

- 两个向量组成的向量组α, β：

(1)若对应分量成比例, 则线性相关;

(2)若对应分量不成比例, 则线性无关.

- 设有n维向量组成的向量组:$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ $(m\geq 2)$

(1)包含$\mathbf{0}$向量$\Rightarrow$线性相关.

(2)包含成比例的向量$\Rightarrow$线性相关.

(3)线性相关$\Leftrightarrow$存在一个向量可由其余的向量线性表示.

(4)线性无关$\Leftrightarrow$任何向量都不能由其余的向量线性表示.

(5) 增加(减少)个数不改变相(无)关性.

(6) 增加(减少)维数不改变无(相)关性.

(7) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性相关性

$\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_m\alpha_m=0$有非零解

$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$AX=0$有非零解

其中$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_m)$, $X=(x_1,x_2,\ldots,x_m)^T$

(8)设有n个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$:

- $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性相关$\Leftrightarrow|\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n|=0$;
- $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关$\Leftrightarrow|\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n|\neq 0$.

(9) R^n中$\forall n+1$个向量一定线性相关.

(10)矩阵判别法.

4.3 向量组的秩

本节 主要内容

1. 向量组的等价;

2. 极大线性无关组与秩;

3. 向量组的秩与矩阵的秩的关系.

4.3.1 向量组的等价

定义2 设有两个 n 维向量组

$$\text{(I)}\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r;\quad \text{(II)}\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$$

- 若(I)中每个向量都可由(II)线性表示，则称向量组(I)可由向量组(II)**线性表示**.
- 若向量组(I)和(II)可以互相线性表示，则称向量组(I)与(II)**等价**.记作：

等价的性质 自反性、对称性、传递性

定理9 已知向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$可由$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$线性表出．如果 $r > s$, 则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性相关.

等价地，若$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性无关，则 $r \le s$.

证明 为便于书写，不妨设向量均为列向量，设

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r),\ B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s),$$

因$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$可由$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$线性表出,所以存在

$$K = (k_{ij})_{s\times r} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r),$$ 使得 $A = BK$.

考虑方程组 $Kx = 0$ 及方程组 $Ax = 0$.

如果 $r > s$，则方程 $Kx = 0$ 中方程个数 < 未知量个数,

所以方程 $Kx = 0$ 有非零解，

从而 $Ax = BKx = 0$ 有非零解,

所以$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性相关.

定理4.3 设有n维向量组:

$$(\text{I})\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r;\ (\text{II})\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$$

若(1)线性无关, 且(I)可由(II)线性表示, 则 $r \le s$.

证 因为向量组(I)可由(II)线性表示，故有

$$\begin{cases} \alpha_1 = k_{11}\beta_1 + k_{21}\beta_2 + \cdots + k_{s1}\beta_s \\ \cdots\cdots \\ \alpha_r = k_{1r}\beta_1 + k_{2r}\beta_2 + \cdots + k_{sr}\beta_s \end{cases}$$

$$\underset{\text{(I)}}{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)} = \underset{\text{(II)}}{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr} \end{pmatrix}$$

$$r = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = r(BK) \le r(K) \le s$$

$\because \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关，由矩阵判别法知

故 $r \le s.$

推论1 如果向量组(I)可由(II)线性表示，且$r > s$，则(I)线性相关.

推论2 若(I)、(II)都线性无关，且(I)与(II)等价，则 $r = s$.

等价的无关向量组必然等秩

向量组的∀两个极大无关组所含向量个数相等

推论3 若(I)可由(II)线性表示，则

秩(I)≤秩(II).

证 设$r(\mathrm{I})=r$, $r(\mathrm{II})=s$, (I'), (II')分别是(I), (II)的极大无关组, 显然(I'), (II')含向量的个数分别是r与s.

因为(I')可由(I)线性表示, (I)可由(II)线性表示, 而(II)可由(II')线性表示, 所以(I')可由(II')线性表示. 由定理4.3有$r \le s$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{等价的向量组等秩}}$

例2 设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2, \beta_2=\alpha_2+\alpha_3, \beta_3=\alpha_3+\alpha_1.$ 若向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性无关, 证明向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$也线性无关.

证1 由已知可以解得用$\beta_1, \beta_2, \beta_3$来表示$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的表达式: $\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2+\beta_3)$

$\alpha_2=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2-\beta_3)$, $\alpha_3=\frac{1}{2}(-\beta_1+\beta_2+\beta_3)$

故两向量组等价, 等秩, $r(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=3$

$\Rightarrow r(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=3 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

证2 $(\beta_1\,\beta_2\,\beta_3)=(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

$$\because \begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$$

$$\therefore (\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)=(\beta_1\,\beta_2\,\beta_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

故两向量组等价, 等秩,

$$\therefore r(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)=r(\beta_1\,\beta_2\,\beta_3)=3.$$

则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

4.3.1 向量组的极大无关组与秩

定义1 设S是n维向量构成的向量组, 在S中选取r个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$, 如果满足

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关

(2) 任取$\alpha\in S$, 总有$\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关.

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为向量组S的一个**极大线性无关组**(简称**极大无关组**).

数 r 称为该向量组的**秩**,记为

$r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)= r$ 或秩$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)= r$

例1 设有向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$,

$\beta_2 = (2,1, 0)^T$, $\beta_3 = (3,2,1)^T$,

求向量组的秩和极大无关组.

解 因 β_1, β_2 线性无关 ,且

$$\beta_3 = \beta_1 + \beta_2$$

所以β_1, β_2为极大无关组,

故 秩$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2$.

可知β_1, β_3和β_2, β_3也都是极大无关组.

二、极大无关组的性质

结论1 向量组与其任一极大无关组等价；(定理5)

结论2 一向量组的任两个极大无关组等价；

(等价性质)

结论3 一向量组的任两个极大无关组所含向量个数相等，其个数都等于向量组的秩.

结论4 向量组线性无关（相关）

$\Leftrightarrow$ 其极大无关组就是它本身

$\Leftrightarrow$ 向量组的秩 = 向量组所含向量个数.

（<）

向量组极大无关组的几个问题：

- 极大无关组与原向量组的关系?
- 极大无关组之间的关系?

这都要用到两个向量组之间的关系.

性质1 向量组与它的极大无关组等价.

证 设(I) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_m$ 的秩为r,

不妨设(II) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是(I)的一个

极大无关组.

(1) $\forall \alpha_i\,(i=1,2,\ldots,r)\in$ (II), 由

$$\alpha_i = 0\alpha_1 + \cdots + 1\alpha_i + \cdots + 0\alpha_r + 0\alpha_{r+1} + \cdots + 0\alpha_m$$

即(II) 可由(I) 线性表示.

(2) 由定义1知, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$中任意r+1个向量都线性相关. $\forall\ \alpha_j \in$ (I) 如果j=1,…,r, α_j 显然可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性表示;如果j=r+1,…,m, 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_j$ 一定线性相关, 所以 $\alpha_j\,(j=r+1,\ldots,m)$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性表示 $\Rightarrow$ (I)可由(II)线性表示.

故 (I)与(II) 等价.

性质2 向量组的任意两个极大无关组等价.

证 设 (I), (II)是向量组S 的两个极大无关组, 由性质1知, (I)与S等价, (II)与S等价 ,由传递性(I)与(II)等价.

性质3 一个向量组线性无关的充要条件是它的极大无关组就是其自身

性质4 向量组A中任一个向量都可由它的极大无关组线性表出

已知$\alpha 1=(1,2，-1)$, $\alpha 2=(2,-3，1)$, $\alpha 3=(4,1，-1)$,
可以验证$\alpha 1$和$\alpha 2$，$\alpha 1$和$\alpha 3$，*$\alpha 2$和$\alpha 3$都是原向量组*
的极大线性无关组.

由例题可知：

（1）最大无关组不唯一;

（2）一个向量组只要有非零向量，则一定存在极大无关组

则同一个向量组的不同的极大无关组中含有向量的个数有什么关系？相等！！！

传递性+无关性即可证明

两向量组秩的关系：

推论1 若向量组A可由组B线性表出, 则 $R(A) \le R(B)$.

特别的，若向量组A与组B等价, 则 $R(A) = R(B)$.

证明 设$\alpha_1, \dots, \alpha_{r_1}$为向量组$A$的极大无关组，$r_1 = R(A)$；

设$\beta_1, \dots, \beta_{r_2}$为向量组$B$的极大无关组，$r_2 = R(B)$.

$\because$向量组A可由向量组B线性表出

$\therefore \alpha_1, \dots, \alpha_{r_1}$可由$\beta_1, \dots, \beta_{r_2}$线性表出

且$\alpha_1, \dots, \alpha_{r_1}$线性无关

$\therefore$由定理9知 $r_1 \le r_2$.

返回

4.3.3 向量组的秩与矩阵的秩的关系

向量组的秩与矩阵的关系

——极大无关组的求解方法

矩阵A的列秩：A的列向量组的秩;

矩阵A的行秩：A的行向量组的秩;

矩阵A的秩$R(A)$：A的最高阶非零子式的阶数 r.

返回

定理7 矩阵的 行秩 = 列秩 = 矩阵的秩.

证 设 $R(A) = r$, 设某一 r 阶子式 $D_r \neq 0$.

$D_r \neq 0 \quad \Rightarrow \quad D_r$所在的 r 列构成的矩阵的秩为 r

（定理2）

$\Rightarrow \quad$ 这 r 个列向量线性无关

$D_{r+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_{r+1}$ 所在的 $r+1$ 列构成的矩阵的秩为 r

（定理2）

$\Rightarrow \quad$ 任意 $r+1$个列向量线性相关

故 D_r 所在的 r 列是 A的列向量组的一个极大无关组,

所以 A的列秩等于 r.

定理7的证明—求向量组的秩和极大无关组的方法之一

返回

定理8 矩阵的初等行变换不改变（部分或全部）列向量之间的线性关系.

矩阵的初等列变换不改变（部分或全部）行向量之间的线性关系.

由于 A^{T} 的列向量就是 A 的行向量，所以定理的两部分结论是等价的.

定理8' $A_{m\times n}\xrightarrow{\text{行初等变换}}B_{m\times n}$，则$A$的任意 k个$(1\le k\le n)$列向量与B的对应 k 个列向量有**相同的线性相关性.**

定理8' $A_{m\times n} \xrightarrow{\text{行初等变换}} B_{m\times n}$, 则$A$的任意 k个$(1\le k\le n)$ 列向量与B的**对应** k 个列向量有**相同的线性相关性.**

证明： $A_k = \left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}\right) \xrightarrow{\text{行}} B_k = \left(\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_k}\right)$,

则 $A_k x = 0$ 与 $B_k x = 0$ 同解, 其中 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)^{\mathrm{T}}$,

即：A_k 的列向量与 B_k 的列向量有相同的线性相关性.

定理8的证明—求向量组的秩和极大无关组的方法之二

返回

定理8' $A_{m\times n} \xrightarrow{\text{行初等变换}} B_{m\times n}$, 则$A$的任意 k个$(1\le k\le n)$列向量与B的**对应** k 个列向量有**相同的线性相关性.**

$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B \Rightarrow A$的行向量组与 B 的行向量组等价

$A \xrightarrow{\text{初等列变换}} B \Rightarrow A$的列向量组与 B 的列向量组等价

例3 求向量组$\alpha_1=(1,2,0,3)$, $\alpha_2=(2,-1,3,1)$, $\alpha_3=(4,-7,9,-3)$的秩和一个极大无关组，并判断线性相关性.

解

$$A=(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T)=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&-1&-7\\0&3&9\\3&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4\\0&-5&-15\\0&3&9\\0&-5&-15\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=B,$$

所以, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=2<3$,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关.

α_1, α_2为一个极大无关组.

返回

例4 求向量组$\alpha_1=(1,2,0,3)$, $\alpha_2=(2,-1,3,1)$, $\alpha_3=(4,-7,9,-3)$的一个最大无关组, 并将其余向量用最大无关组线性表出.

解 $A=(\alpha_1^{\mathrm{T}}, \alpha_2^{\mathrm{T}}, \alpha_3^{\mathrm{T}}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

所以, α_1,α_2是一个最大无关组,

$$\alpha_3 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2.$$

例5 求向量组$\alpha_1=(2,4,2),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(2,3,1),\alpha_4=(3,5,2)$的秩和一个最大无关组，并将其余向量用最大无关组线性表出.

解

$$A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B,$$

所以, $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$

最大无关组为：α_1,α_2.

$$B\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $$\alpha_3=\frac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2,$$

$$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2.$$

两向量组秩的关系：

推论1 若向量组A可由组B线性表出, 则 $R(A) \le R(B)$.

特别的，若向量组A与组B等价, 则 $R(A) = R(B)$.

证明 设$\alpha_1, ..., \alpha_{r_1}$为向量组$A$的极大无关组，$r_1 = R(A)$；

设$\beta_1, ..., \beta_{r_2}$为向量组$B$的极大无关组，$r_2 = R(B)$.

$\because$向量组A可由向量组B线性表出

$\therefore \alpha_1, ..., \alpha_{r_1}$可由$\beta_1, ..., \beta_{r_2}$线性表出

且$\alpha_1, ..., \alpha_{r_1}$线性无关

$\therefore$由定理9知 $r_1 \le r_2$.

返回

例6 设A, B分别为$m\times r$, $r\times n$矩阵，证明：

$$R(AB)\le\min\{R(A), R(B)\}.$$

证 设$C_{m\times n}=AB$，

$$(c_1,\cdots,c_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

$$c_k=b_{1k}\alpha_1+b_{2k}\alpha_2+\cdots+b_{rk}\alpha_r,\ (k=1,\ldots,n)$$

C(即AB)的列向量组可由A的列向量组线性表出，

故由推论1知 $R(AB)\le R(A)$.

又，$R(C)=R(C^{T})=R(B^{T}A^{T})\le R(B^{T})=R(B)$.

所以 $R(AB)\le\min\{R(A), R(B)\}$.

关于矩阵秩的结论

(1) $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$

(2) $R(AB) \ge R(A) + R(B) - k$,（思考题—难！）

其中 k 是 A 的列数或 B 的行数.

当 $AB = O$ 时，$R(A) + R(B) \le k$.

（§5.4节 第165页习题6）

(3) $R(A+B) \le R(A) + R(B)$ （第157页习题15）

例3 设$AB=0$.

- 若A的列向量组线性无关, 则$B = 0$.
- 若B的行向量组线性无关, 则$A = 0$.
- 若$B\neq 0$, 则A的列向量组线性相关.
- 若$A\neq 0$, 则B的行向量组线性相关.

分析 设$B=(B_1,B_2,\ldots,B_m)$, $AB=0\Rightarrow AB_i=0$.

A的列向量组线性无关$\Rightarrow AX=0$只有零解

$\Rightarrow B_i=0, i=1,\ldots,m\Rightarrow B=0$.

其余情况可以类似得到.

◆ 极大无关组和秩的求法

初等变换法 n维列向量组S: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$

将$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\xrightarrow{\text{行}}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)=B$

则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$

①秩等; ②极大无关组的位置对应相同;

③表示系数对应相同

$$\text{当}\beta_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}k_j\beta_j\text{时},\ \alpha_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}k_j\alpha_j$$

行初等变换不改变A的秩,不改变**列向量组**之间的**线性关系**.

例4 求矩阵A列向量组的一个极大无关组和秩，并把其余列向量用所求出的极大无关组线性表示.

$$A=\begin{bmatrix}-1&-2&1&0\\1&4&1&4\\1&3&0&2\end{bmatrix}=\left(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\right)$$

解 通过初等行变换把A化为行最简形

$$A=\begin{bmatrix}-1&-2&1&0\\1&4&1&4\\1&3&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&-2&1&0\\0&2&2&4\\0&1&1&2\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -3 & -4\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$$

$$\therefore r(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4)=2$$

α_1,α_2 为一个极大无关组

$$\alpha_3=\alpha_2-3\alpha_1$$

$$\alpha_4=2\alpha_2-4\alpha_1$$

例5 设有向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

求向量组的(1)秩;(2)极大无关组;(3)表示系数.

解法1

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&1&1&0\\1&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

由 $D=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq0$ 而 $|A|=0$ 知秩$=3$,

$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是该向量组的一个极大无关组.

解法2

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&1&1&0\\1&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$$A\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=B$$

(1) 秩$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$;

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是该向量组的一个极大无关组,
($\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 和 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 也是).

(3) $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4$