# 《线性代数与空间解析几何》

## 第二章　矩阵

# 本章的主要内容

- 矩阵的概念及运算
- 矩阵的行列式与可逆矩阵*
- 分块矩阵
- 矩阵的初等变换与初等阵*
- 矩阵的秩
- Gauss消元法及线性方程组有解判别法
- 矩阵应用举例

# 2.1 矩阵的概念

## 2.1.1. 矩阵的概念

### 1 矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数排成的$m$行、$n$列的矩形数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵.

简记为 $\mathbf{A}_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$

当 $m=n$ 时称为$n$ 阶方阵.

- 矩阵同形⇔它们行数和列数相同.
- 矩阵相等⇔它们同形且对应元素相等.
- 方阵的行列式: $|A| = |a_{ij}|_{n\times n}$ 或 $\det A$.

## 2. 特殊矩阵

- 零矩阵: $\mathbf{0}_{m\times n}$, $\mathbf{0}$

- 对角矩阵: $\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

- 单位矩阵: $\boldsymbol{E}$ , $\boldsymbol{I}$ 或 $\quad \boldsymbol{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

- 数(标)量矩阵: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix}$

- 上三角矩阵: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

- 下三角矩阵: $\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- 行矩阵: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$
- 列矩阵: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

# 2.2 矩阵运算

- 矩阵的线性运算
- 矩阵的乘法运算
- 方阵的幂及

  行列式的乘法公式
- 矩阵的转置

## 2.2.1 矩阵的加法：($A$与$B$要同形).

- 加 法：$A=(a_{ij})_{m\times n}$ $B=(b_{ij})_{m\times n}$

$$A+B=C=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

负矩阵：$-A=-(a_{ij})_{m\times n}=(-a_{ij})_{m\times n}$

减 法：$A-B=A+(-B)$

- 运算性质：

$$A+B=B+A,\ (A+B)+C=A+(B+C)$$

$$A+0=A,\quad A+(-A)=0$$

说明 只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

**说明** 只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

例如
$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

## 2.2.2 数乘

$$kA = k(a_{ij})_{m\times n} = (ka_{ij})_{m\times n}$$

- **运算性质:**

$$k(lA) = (kl)A$$

$$k(A+B) = kA + kB$$

$$(k+l)A = kA + lA$$

$$1A = A, \quad 0A = \mathbf{0}$$

**矩阵相加与数乘矩阵合起来, 统称为矩阵的线性运算.**

# 2.2.3 矩阵乘法

- $A=(a_{ij})_{m\times s}$, $B=(b_{ij})_{s\times n}$,,则 $C = AB=(c_{ij})_{m\times n}$

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$

$$=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},\ i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n.$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boxed{a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{sj} & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

## 总结如下:

- **可乘原则:** 前列数=后行数.
- **乘积元素:** $c_{ij}$ 是 $A$ 的第 $i$ 行的元素与 $B$ 的第 $j$ 列对应元素乘积之和.
- **乘积阶数:** $AB$ 阶数为前行数×后列数.

- 运算性质: ($A$是$m\times n$的矩阵)

$$(1)\mathbf{0}_{p\times m}A=\mathbf{0}_{p\times n},\ A\mathbf{0}_{n\times q}=\mathbf{0}_{m\times q}$$

$$(2)E_mA=A,\ AE_n=A$$

$$(3)A(BC)=(AB)C$$

$$(4)A(B+C)=AB+AC$$

$$(B+C)A=BA+CA$$

- 学习矩阵运算, 尤其要注意其不具备什么熟知的运算规律. 特别是乘法运算.

**例1** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&-1\\0&3&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

求 $\boldsymbol{AB}$.

**解** $\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&-1\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times1+3\times0+1\times2\\1\times1+2\times0+(-1)\times2\\0\times1+3\times0+1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$

**注意:** 在这个例子中 $\boldsymbol{BA}$ 无意义.

**例2** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$

则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{BA}=(b_1a_1+b_2a_2)$

**注意:** 在这个例子中, 虽然 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 均有意义,但是$\boldsymbol{AB}$ 是 $2\times2$ 矩阵, 而$\boldsymbol{BA}$是 $1\times1$ 矩阵.

**例3** 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

则 $AB=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

**注意:** (1) $AB$与$BA$是同阶方阵，但$AB$不等于$BA$. (2) 虽然$A$, $B$都是非零矩阵, 但是 $AB=0$.

**例4** 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-7 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$,

求 $AB$ 及 $AC$.

**解**

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 5\\ -10 & 10\end{bmatrix},$$

$$AC=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 5\\ -10 & 10\end{bmatrix}.$$

**注意:** 虽然$A$不是零矩阵, 而且$AB=AC$, 但是$B$不等于$C$.这说明消去律不成立!

总结一下矩阵乘法的一些**反常性质**:

- 未必满足交换律: $AB \neq BA$
- 未必满足消去律: $AB = AC \neq> B = C$
- 可能有零因子: $AB = 0 \neq> A = 0$ 或 $B = 0$

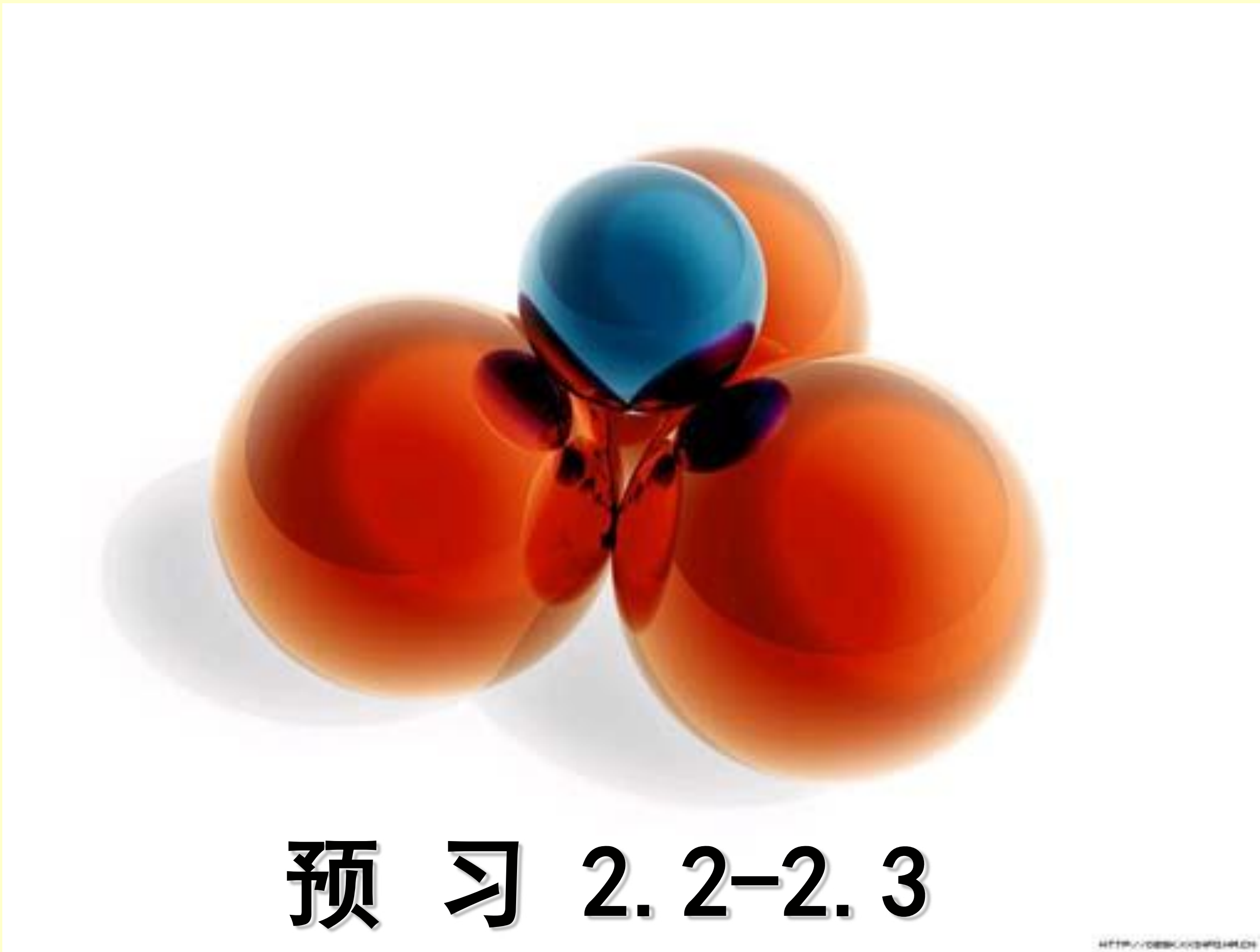
$A \neq 0$ 且 $B \neq 0 \neq> AB \neq 0$

如果 $AB=BA$, 则称 $A$ 与 $B$ 可交换.

学习矩阵理论, 尤其要注意**反常性质**!

**预 习2.2---- 2.3**

!


预 习 2.2-2.3

# 矩阵理论引言

- **历史**
  - ★ 矩阵思想源于求解线性方程组
  - ★ 矩阵思想产生于中国（朱世杰等）
  - ★ **Matrix**概念产生于英国 **(Sylvester)**
- **应用**
  - ★ 数学(计算数学)各分支
  - ★ 信息处理•系统控制•工程技术等