# 2.3 高阶导数

一高阶导数的概念

记作 
$$f''(x), y'', \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d^2y}{dx^2}$$
 或  $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ .   
二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x), y''', \frac{d^3y}{dx^3}$ .

三阶导数的导数称为四阶导数,  $f^{(4)}(x)$ ,  $y^{(4)}$ ,  $\frac{d^{2}y}{dx^{4}}$ .

一般地,函数f(x)的n-1阶导数的导数称为函数f(x)的n阶导数,记作

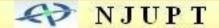
$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n} 
ot in \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数.

相应地, f(x)称为零阶导数; f'(x)称为一阶导数.

注(1) 若  $f^{(n)}(x)$  存在,则称 f(x)n 阶可导。

(2) 若  $f^{(n)}(x)$  存在,则 f(x) 在 x 的某一领域内必具有低于 n 阶的一切导数。



# 二、求函数的高阶(二、三阶)导数

方法: 由高阶导数的定义逐步求二、三阶导数.

例 1 
$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$
, 求  $y'''$ .

$$\mathbf{p}' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$y'' = ((x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y''' = -(x^{2} + 1)^{-\frac{3}{2}} - x \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (x^{2} + 1)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x$$

$$= (x^{2} + 1)^{-\frac{5}{2}} (-(x^{2} + 1) + 3x^{2}) = \frac{2x^{2} - 1}{(x^{2} + 1)^{\frac{5}{2}}}$$

例 2 设 y=lnf(x), 其中 f(x) 二阶可导, y'' 求

解

$$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$y'' = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)f'(x)}{f^{2}(x)}$$

$$=\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^{2}}{f^{2}(x)}$$

例 3 求由方程  $y=1+xe^y$  确定的隐函数 y 的二阶导数

解 两边对
$$x$$
 求导 $y$ 得 $e^{y} + xe^{y} \cdot y'$ 

$$y'=\frac{e^y}{1-xe^y}.$$

$$y'' = \frac{(1 - xe^{y})e^{y} \cdot y' - e^{y}(-e^{y} - xe^{y} \cdot y')}{(1 - xe^{y})^{2}}$$
$$= \frac{e^{y} \cdot y' + e^{2y}}{(1 - xe^{y})^{2}} = \frac{e^{2y}(2 - xe^{y})}{(1 - xe^{y})^{3}}$$

另解 直接在 $y' = e^y + xe^y \cdot y'$ 两边对x求导

$$y'' = e^{y} \cdot y' + e^{y} \cdot y' + xe^{y} \cdot (y')^{2} + xe^{y} \cdot y''$$

解得 
$$y'' = \frac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3}$$

注 (1)隐函数求导实质是在方程 F(x,y)=0 两边对x 求导时,把y 看成中间变量,利用复合函数的求导法则。

- (2) 隐函数的高阶导数(一般二阶),可直接在一阶导数的基础上两边求导,不一定要解出 y'.
  - (3)一般y', y"中可含有y.

例 4 设  $x^4 - xy + y^4 = 1$ , 求y''在点(0,1)处的值.

解

方程两边对x求导得

$$4x^{3} - y - xy' + 4y^{3}y' = 0$$
(1)  
代入  $x = 0$ ,  $y = 1$ 得  $y' \Big|_{\substack{x=0 \ y=1}} = \frac{1}{4}$ ;

将方程(1)两边再对x求导得

$$12x^2 - 2y' - xy'' + 12y^2(y')^2 + 4y^3y'' = 0$$

代入 
$$x = 0$$
,  $y = 1$ ,  $y' \Big|_{\substack{x=0 \ y=1}} = \frac{1}{4} \ \mathcal{F} \ y'' \Big|_{\substack{x=0 \ y=1}} = -\frac{1}{16}$ .

例 5 求由方程 
$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$
 表示的函数的二阶导数。

例 5 求由方程 
$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$
 表示的函数的二阶导数.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dt}{dt}}{\frac{dt}{dt}} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{3a \cos^2 t (-\sin t)} = -\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\frac{dt}{dx} = \frac{d(-\tan t)}{dt}/\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t \sin t} = \frac{\sec^4 t}{3a\sin t}$$

一般地,若函数 
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$
 二阶可导,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^{2}(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

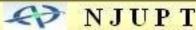
$$\mathbb{RP} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

例 6 已知
$$y(x)$$
由 
$$\begin{cases} x = \ln (1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$$
 确定, 求 
$$\frac{d^3y}{dx^3}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dt}{dt}} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{2t}} = \frac{1}{2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{1}{2t})}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{4t^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d(-\frac{1+t^2}{4t^3})}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{(1+t^2)(3+t^2)}{8t^5}$$



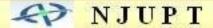
### 三、求函数的n阶导数

1. 几个基本初等函数的 n 阶导数

方法: 求n 阶导数时,求出 1-3 或 4 阶后,分析结果的规律性,写出n 阶导数.(数学归纳法证明)

例 1. 设 
$$y=e^x$$
,求  $y^{(n)}$ 

注: 
$$(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$$
  $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$ 



例 2 设 
$$y = \sin x$$
, 求 $y^{(n)}$ .

同理可得 
$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

注: 
$$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$
$$(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

例 3 设 
$$y = \ln(1+x)$$
, 求 $y^{(n)}$ .

$$\mathbf{p'} = \frac{1}{1+\mathbf{r}}$$

$$y'' = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$y''' = \frac{2!}{(1+x)^3}$$

$$y^{(4)} = -\frac{3!}{(1+x)^4}$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$(n \ge 1, 0!=1)$$

注: 
$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

一般 
$$\left(\frac{1}{x \pm a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{\left(x \pm a\right)^{n+1}}$$

例 4 设 
$$y = x^{\alpha}, \alpha \in R, \bar{x}y^{(n)}$$
.

$$y' = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$$y'' = (\alpha x^{\alpha - 1})' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha - 2}$$
$$y''' = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)x^{\alpha - 3}$$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\cdots(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n} \quad n \ge 1$$

若 $\alpha$ 为正整数,则

$$(x^n)^{(n)} = n!, \quad (x^n)^{(k)} = 0, k > n$$

### 2. 高阶导数的运算法则

设函数u和v具有n阶导数,则

$$(1) (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

$$(2) (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$$

$$(3) (u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$$
 莱布尼兹公式

例 5 设 
$$y = x^2 e^{2x}$$
, 求 $y^{(20)}$ .

解 设
$$u = e^{2x}, v = x^2$$
,则由莱布尼兹公式知  

$$y^{(20)} = (e^{2x})^{(20)} \cdot x^2 + 20(e^{2x})^{(19)} \cdot (x^2)'$$

$$+ \frac{20(20-1)}{2!} (e^{2x})^{(18)} \cdot (x^2)'' + 0$$

$$= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x$$

$$+ \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95)$$

注: 用莱布尼兹公式的一般形式:  $P_n(x) f(x)$ ,条件: n较小, f(x)的n阶高阶导数易求。

#### 3. 求函数的 n 阶导数

间接法:将函数初等变形,利用已知的高阶导数 公式和运算法则求n阶导数。

常用高阶导数公式

$$(1) (a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a > 0) \quad (e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$$

(2) 
$$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

(3) 
$$(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(4) (x^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1) x^{\alpha - n}$$

(5) 
$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

(6) 
$$\left(\frac{1}{x \pm a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x \pm a)^{n+1}}$$

NJUPT

例 6 已知
$$y = \frac{3x}{x^2 - x - 2}$$
, 求 $y^{(n)}$ .

$$y = \frac{3x}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x - 2}$$

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{(n+1)}}, \quad \left(\frac{2}{x-2}\right)^{(n)} = \frac{2(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}.$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + \frac{2 \cdot (-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$$

例7 
$$y = \sin^6 x + \cos^6 x$$

解: 
$$y = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$$

$$= \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x \qquad \sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$y^{(n)} = \frac{3}{8} \cdot 4^n \cos(4x + n\frac{\pi}{2})$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

### 内容小结

- 1、熟练掌握初等函数、隐含数、由参数方程确定的函数的一阶,二阶导数的计算。
- 2、 熟练掌握对数求导法
- 3、掌握一些函数的n阶导数的计算
- 注: 求高阶 (n) 导数的方法:
  - (1) 利用归纳法。
  - (2) 将函数初等变形,利用已知的高阶导数公式和运算法则求出 n 阶导数。
  - (3) 利用莱布尼兹公式计算。(一般乘积形式。)

作业 2-3 课后 2-3

