练习册27页2（2）$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2 \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4=1 \end{cases}$

解

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2\times(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1\div 2]{r_1-r_2}$$

$$\xrightarrow[r_2 \div 2]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

得同解方程组 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} x_2 + \dfrac{1}{2} x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} + (-\dfrac{1}{2}) x_2 + \dfrac{1}{2} x_3 \\ x_2 = 0 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \\ x_3 = 0 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ x_4 = 0 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \end{cases}$

故 $Ax = b$ 的通解为:

$$\eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in R.$$

第六章　特征值与特征向量

6.1　特征值与特征向量

6.2　相似矩阵与矩阵的对角化

6.2 相似矩阵与矩阵的对角化

一、矩阵相似的概念及性质

二、矩阵的相似对角化

返回

引例 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

求 A^{10}.

解 $A = P\Lambda P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = P\Lambda P^{-1} P\Lambda P^{-1} \cdots P\Lambda P^{-1} P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^{10} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^{10} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

问题： 1. 什么样的矩阵有这样的 P 与 Λ？

2. $P = ?$ $\quad \Lambda = ?$

一、 矩阵相似的定义与性质

定义 设A与B都是n阶矩阵，如果存在可逆矩阵P,使

$$P^{-1}AP = B$$

则称A与B相似.可逆矩阵P称为相似变换矩阵.

简单性质：

(1)反身性；(2)对称性；(3)传递性.

证 (3): $A = PBP^{-1}$ $B = QCQ^{-1}$

$$A = PQCQ^{-1}P^{-1} = DCD^{-1} \quad (D = PQ).$$

注意：矩阵相似与矩阵等价两个概念的区别！

性质1 相似矩阵的行列式相等.

证 设 $P^{-1}AP = B$，两边取行列式即得.

性质2 如果两个可逆的矩阵相似, 那么他们的逆矩阵也相似.

证 设 $P^{-1}AP = B \Rightarrow P^{-1}A^{-1}P = B^{-1}$，即证.

性质3 相似矩阵具有相同的特征多项式，因而具有相同的特征值.

证 设 $P^{-1}AP = B$,

$$|\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P|$$

$$= |P^{-1}||\lambda I - A||P| = |\lambda I - A|$$

返回

推论1　相似矩阵具有相同的迹和相同的行列式.

推论2　相似矩阵具有相同的秩.

矩阵相似 $\Rightarrow$ 矩阵等价

推论3　若n阶矩阵A与对角矩阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

相似，则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 就是矩阵 A 的 n 个特征值.

返回

注意:

1. 这些命题的逆命题不成立，即具有相同特征多项式或相同特征值，或行列式相等的两个同阶方阵不一定相似.

反例?

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2. 虽然相似矩阵具有相同的特征值, 但每个特征值所对应的特征向量不一定相同.

例如: 设 $P^{-1}AP=B,\ Ax=\lambda x \Rightarrow A=PBP^{-1}$

$$\Rightarrow Ax=(PBP^{-1})x=\lambda x$$

$$\Rightarrow B(P^{-1}x)=\lambda(P^{-1}x)$$

返回

性质4 设A与B相似, 则 kA 与 kB 相似, **A^m与B^m也相似**$(k\in R, m\in Z^+)$.

证 设 $P^{-1}AP=B$, 显然有

$$P^{-1}(kA)P=kB,\quad B^m=(P^{-1}AP)^m=P^{-1}A^mP.$$

性质5 设 A 与 B 相似, $f(x)$ 为一多项式, 则 $f(A)$ 与 $f(B)$ 也相似.

证 设 $P^{-1}AP=B$, $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,

$$\begin{aligned} f(B) &= a_0I+a_1B+\cdots+a_nB^n \\ &= P^{-1}(a_0I)P+P^{-1}(a_1A)P+\cdots+P^{-1}(a_nA^n)P \\ &= P^{-1}(a_0I+a_1A+\cdots+a_nA^n)P \\ &= P^{-1}f(A)P \end{aligned}$$

返回

特别地, 若可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵,

$$A=P\Lambda P^{-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} A^k=P\Lambda^k P^{-1} \\ f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1} \end{array}}$$

$$\Lambda^k=\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}, f(\Lambda)=\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix},$$

利用此结论可以很方便地计算矩阵 A 的多项式 $f(A)$.

返回

补充结论

定理 设 $f(\lambda)$ 是矩阵A的特征多项式, 则 $f(A)=O$.

证明 （只证明A与对角矩阵相似的情形）

若A与对角矩阵相似,则有可逆矩阵P,使

$$P^{-1}AP=\Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),$$

其中λ_i为A的特征值, $f(\lambda_i)=0.$ 由$A=P\Lambda P^{-1}$,有

$$f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1}=P\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=POP^{-1}=O$$

返回

二、 矩阵的相似对角化

定义 如果一个矩阵与对角矩阵相似, 就称该矩阵可对角化（**diagonalizable**），或称该矩阵为可对角化矩阵（**diagonalization matrix**）.

问题:

(1) 是否所有方阵都可对角化?

思考: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 能否与对角矩阵相似?

(2) 矩阵可对角化的条件是什么?

对可对角化矩阵A, 即$P^{-1}AP=\Lambda$, 则 $P=?\ \Lambda=?$

定理 n 阶矩阵 A 可对角化的**充分必要条件**是 **A 恰有 n 个线性无关的特征向量．**

证 “必要性”

设 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 则 $AP = P\Lambda$,

设 $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$,

则 $\begin{pmatrix} Ap_1 & Ap_2 & \cdots & Ap_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_1 & \lambda_2 p_2 & \cdots & \lambda_n p_n \end{pmatrix}$

即 $\left(i = 1, 2, \cdots, n\right).$

故 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是 A 的 n 个线性无关的特征向量.

返回

"充分性"　设A有n个线性无关的特征向量:

$$p_1, p_2, \cdots, p_n, \text{且 } Ap_i = \lambda_i p_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

令 p_2　p_n，　λ_2　，　λ_n

则 $AP = P\Lambda,\ P^{-1}AP = \Lambda.$

故 A 与 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，即A 可对角化.

例1 判断下列矩阵能否相似对角化，并说明理由.

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$　　(2) $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

解： (1) A有特征值：$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2.$

故A 可相似对角化.

(2) B有特征值$\lambda=1$(二重根),

又因为 $R(1\cdot I-B)=1,$

故 $(1\cdot I-B)x=0$ 的基础解系只有一个线性无关的特征向量.

故 B不能相似对角化.

◀ ▶ 返回

推论1 如果矩阵 A 的特征值都是单特征根，则 A 可对角化．

证 不同特征值对应的特征向量线性无关.

返回

推论2 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 是 n 阶矩阵 A 的全部互异特征值，它们相应的重数为 $n_1,\cdots,n_r\ (n_1+\cdots+n_r=n)$.

则　A 可对角化

$\Leftrightarrow$　n_i 重特征值 λ_i 恰有 n_i 个线性无关的特征向量

（对每个重根 λ_i，$(\lambda_i I-A)x=0$ 的基础解系恰由 n_i 个解向量组成）

$\Leftrightarrow$　$n-R(\lambda_i I-A)=n_i$ 或 $R(\lambda_i I-A)=n-n_i$.

求解相似变换矩阵 P 及对角矩阵 Λ 步骤：

(1) 求矩阵 A 的全部特征值；

(2) 对每个特征值 λ_i，求解齐次方程组 $(\lambda_i I - A)x = 0$ 的基础解系；

(3) 如果对每个特征根，其基础解系所含解向量个数等于它的重数，那么 A 可对角化 (否则 不可对角化)；

$$\boxed{n - R(\lambda_i I - A) = n_i\ ?}$$

(4) 以各基础解系中的向量作为列向量构作方阵 P：

返回

例2 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&a&1\end{pmatrix}$可相似对角化, 求 a 的值, 并求相似变换矩阵P与对角矩阵Λ.

解: 易知A有特征值: $\lambda_1=1$(二重), $\lambda_2=2$.

A可相似对角化 $\Leftrightarrow \lambda_1=1$有两个线性无关的特征向量

$$\Leftrightarrow\ 3-R(\lambda_1 I-A)=2$$

$$\Leftrightarrow\ R(I-A)=1$$

$$I-A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&0&0\\-1&-a&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-a&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 故 $a=0$.

返回

例2 已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$可相似对角化，求 a 的值，并求相似变换矩阵P与对角矩阵Λ.

解：易知A有特征值：$\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=2$． $a=0$

求得$\lambda_1=1$对应的两个线性无关的特征向量为：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\ \alpha_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

求得$\lambda_2=2$对应的特征向量为：　　　　　　　.

取$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$.

练习 判断下列矩阵是否相似，并说明其理由.

(1) $A=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2\\-1&3\end{pmatrix}$. A 与 B 相似.

(2) $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. A 与 B 不相似.

(3) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$. A 与 B 不相似.

练习 判断下列矩阵是否相似, 并说明其理由.

(4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ A 与 B 相似.

(5) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ A 与 B 不相似.

练习：练习册第33页习题

例3 已知二阶方阵A满足$A\alpha_i = i\alpha_i,\ i=1,2,$且$\alpha_1 = (1\ \ 0)^T,$ $\alpha_2 = (3\ \ 1)^T.$ 判断方阵A是否可相似对角化, 并说明如何计算 A 及 A^{10}.

解: 由$A\alpha_i = i\alpha_i,\ i=1,2$可知, A有特征值$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,$

它们对应的特征向量分别为$\alpha_1, \alpha_2.$

故A可相似对角化.

记 $P = (\alpha_1, \alpha_2),\ \Lambda = \mathrm{diag}(1,\ 2),$ 则 $P^{-1}AP = \Lambda,$

故 $A = P\Lambda P^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$

$$A^{10} = (P\Lambda P^{-1})^{10} = P\Lambda^{10}P^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 3069 \\ 0 & 1024 \end{pmatrix}.$$

注意：矩阵可逆与可对角化没有必然的联系

- 可逆性 $\leftrightarrow$ 特征值（零 或 非零）

A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 的所有特征值 λ_i 全部不为零

- 可对角化 $\leftrightarrow$ 特征向量（多 或 少）

A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 恰有n个线性无关的特征向量

思考题 1　设 $A \sim B, C \sim D$, 证明:

矩阵相似

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

证　$\because\ A \sim B, C \sim D$

$\therefore\ \exists$ 可逆矩阵P, Q, 使

$$P^{-1}AP = B,\ Q^{-1}CQ = D$$

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

返回

思考题 2 设 A 是 3 阶矩阵且 $I+A$, $3I-A$, $I-3A$ 均不可逆. 证明:

(1) A可逆, (2) A与对角矩阵相似.

证 (1) $\because$ $I+A$不可逆, $\therefore$ $|I+A|=0$,

$$\therefore (-1)^3|-I-A|=0 \Rightarrow |-I-A|=0,$$

$\therefore$ $\lambda_1=-1$是A特征值.

由 $|3I-A|=0 \Rightarrow \lambda_2=3$是$A$的特征值.

由 $|I-3A|=3^3\left|\frac{1}{3}I-A\right|=0 \Rightarrow \left|\frac{1}{3}I-A\right|=0$,

$\therefore$ $\lambda_3=\frac{1}{3}$是A的特征值.

A的特征值均不为零, 故A可逆.

返回

(2) $\because$ A的特征值都是单特征值，

$$\therefore \quad A \text{与} \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 3 & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{相似.}$$

思考题3 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{pmatrix} \quad (a \neq 0)$

求 A 的特征值与特征向量，

并判断A能否与对角矩阵相似．

解 $$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -a & \cdots & -a \\ -a & \lambda - a & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & \cdots & \lambda - a \end{vmatrix}$$

返回

$$=\begin{vmatrix} \lambda-na & \lambda-na & \cdots & \lambda-na \\ -a & \lambda-a & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & \cdots & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-na)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a & \lambda-a & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & \cdots & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-na)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-na)\lambda^{n-1},$$

$$=(\lambda-na)\lambda^{n-1},$$

$\lambda_1=na$， $\lambda_2=0\ (n-1\text{重})$.

首先，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$，即

$$\begin{pmatrix}(n-1)a & -a & \cdots & -a\\ -a & (n-1)a & \cdots & -a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a & -a & \cdots & (n-1)a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\alpha_1=(1,\ 1,\ \cdots,1)^{\mathrm{T}}$$

λ_1 对应的特征向量为 ：$k_1\alpha_1\ (k_1\neq 0)$.

其次，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$，即

返回

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -a & -a & \cdots & -a \\ -a & -a & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & \cdots & -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

$$\alpha_2 = (1,\ -1,\ 0,\ \cdots,0,\ 0)^T,$$

$$\alpha_3 = (0,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ 0,\ 0)^T,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\alpha_n = (0,\ 0,\ 0,\ \cdots,1,\ -1)^T.$$

A **有** ***n*** **个线性无关的特征向量,能与对角矩阵相似.**

返回