第三章　几何向量

习题课

内容总结—知识网络图

- 几何向量
  - 向量表示
    - 几何表示
    - 坐标表示←空间直角坐标系
  - 向量运算
    - 加　法、数乘（伸缩）
    - 数量积：两向量垂直数量积为0
    - 向量积：两向量平行 向量积为**0**
    - 混合积：三向量共面 混合积为0
- 直线方程 → 两点式、标准式、参数式、一般式
- 平面方程 → 点法式、三点式、截距式、一般式、平面束
- 位置关系
  - 平面与平面 → 夹角
  - 直线与平面 → 夹角
    - 平行(距离？)→共面
    - 相交→垂直
- 距离
  - 直线与直线 → 夹角
    - 平行(距离？)→共线
    - 相交→垂直
    - 异面→公垂线(距离？)
  - 点-点、点-线、点-面

典 型 题

例1 判断下列等式何时成立

(1) $|\alpha+\beta| = |\alpha-\beta|$, (2) $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$

(3) $|\alpha+\beta| = |\alpha| - |\beta|$, (4) $\dfrac{\alpha}{|\alpha|} = \dfrac{\beta}{|\beta|}$

解 (1) $\alpha \perp \beta$, (2) α与β 同向

(3) α与β 反向, 且 $|\alpha| \geq |\beta|$

(4) α与β 同向, 且 $\alpha \neq \mathbf{0}, \beta \neq \mathbf{0}$

例2 $\alpha\times\beta=\gamma\times\delta,\alpha\times\gamma=\beta\times\delta$

证明 $\alpha-\delta$ 与 $\beta-\gamma$ 共线.

证 $(\alpha-\delta)\times(\beta-\gamma)$

$$=\alpha\times\beta-\alpha\times\gamma-\delta\times\beta+\delta\times\gamma$$

$$=\gamma\times\delta-\beta\times\delta-\delta\times\beta+\delta\times\gamma$$

$$=\gamma\times\delta-\beta\times\delta+\beta\times\delta-\gamma\times\delta=0$$

所以 $\alpha-\delta$ 与 $\beta-\gamma$ 共线.

例3 求直线 $L: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$，在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程.

解

$$L: \begin{cases} x-y-1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$$

过L的平面束为 $x-y-1+\lambda(y+z-1)=0$

$$x+(\lambda-1)y+\lambda z-(\lambda+1)=0$$

$$\pi_1 \perp \pi, \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1=0, 1\cdot 1+(-1)\cdot(\lambda-1)+2\lambda=0, \lambda=-2$$

$$\therefore \pi_1: x-3y-2z+1=0$$

$$L_0: \begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases}$$

异面直线公垂线方程

- 如何求两条异面直线L_1, L_2公垂线方程?

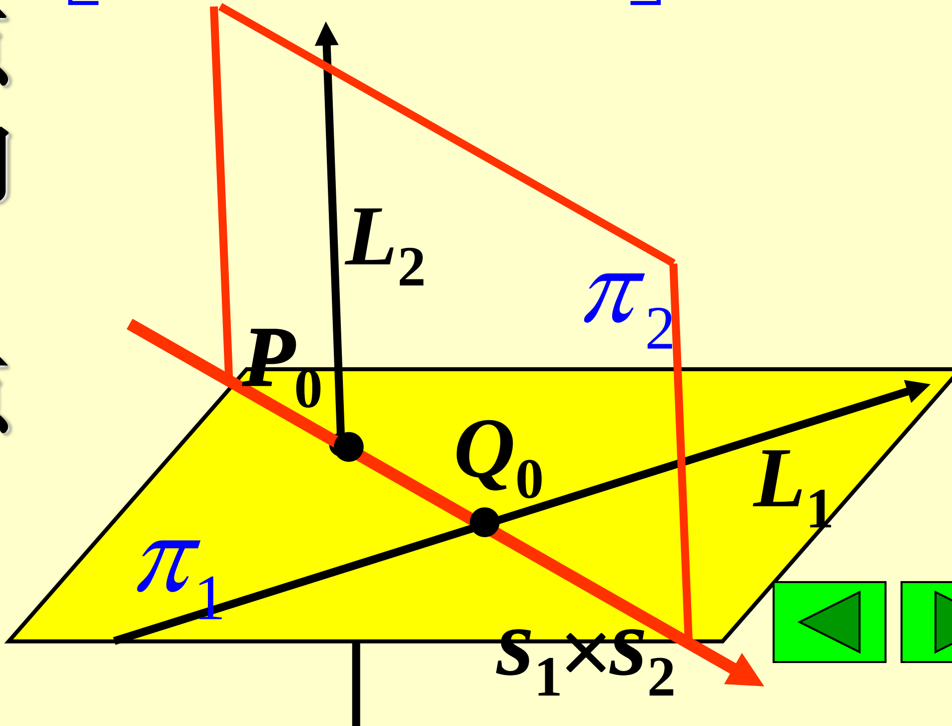
(1)公垂线是下面两个平面的交线

$$\pi_1: \forall M \in \pi_1, M_1 \in L_1, \quad \left[\overrightarrow{M_1M}\ \ s_1\ \ s_1 \times s_2\right] = 0$$

$$\pi_2: \forall M \in \pi_2, M_2 \in L_2, \quad \left[\overrightarrow{M_2M}\ \ s_2\ \ s_1 \times s_2\right] = 0$$

(2) 过π_1与L_2的交点P_0, 以$s_1 \times s_2$为方向向量.

(3) 过π_2与L_1的交点Q_0, 以$s_1 \times s_2$为方向向量.



例4 求下面两条异面直线的公垂线方程

$$L_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \qquad L_2: x-1 = y+1 = z-2$$

解

$$\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

$$\pi_1: \left[\overrightarrow{M_1M} \;\; \boldsymbol{s}_1 \;\; \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 \right] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8x - 2y + 4z = 0$$

$$\boxed{\pi_1: 4x + y - 2z = 0 \qquad (1)}$$

同理得 $\pi_2: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\boxed{\pi_2: x - z + 1 = 0 \quad (2)}$$

$$L: \begin{cases} 4x + y - 2z = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

或 $L: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$

例5 直线L过点 $M(-4,-5,3)$, 且与异面直线

$$L_1:\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1},\ L_2:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$$

相交, 求L的方程.（M不在异面直线上）

解1 $M_1(-1,-3,2)\in L_1,\quad M_2(2,-1,1)\in L_2$

$$\overrightarrow{M_1M}=(-3,-2,1)//(3,2,-1),\ \overrightarrow{M_2M}=(-6,-4,2)//(3,2,-1)$$

求过L_1与$\overrightarrow{M_1M}$确定的平面π_1：

$$n_1=\overrightarrow{M_1M}\times s_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-4i-0j-12k//i+3k$$

$$\pi_1: x+3z-5=0$$

求过 L_2 与 $\overrightarrow{M_2M}$ 确定的平面 π_2：

$$\boldsymbol{n}_2 = \overrightarrow{M_2M} \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -7\boldsymbol{i} + 13\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$$

$$\pi_2 : -7\boldsymbol{x} + 13\boldsymbol{y} + 5\boldsymbol{z} + 22 = 0$$

$$\therefore L : \begin{cases} \boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{z} - 5 = 0 \\ 7\boldsymbol{x} - 13\boldsymbol{y} - 5\boldsymbol{z} - 22 = 0 \end{cases}$$

注 此题已经认为所求的相交直线存在.

解2 L过点 $M(-4,-5,3)$,

设 $L:\dfrac{x+4}{m}=\dfrac{y+5}{n}=\dfrac{z-3}{p}$, $M_1(-1,-3,2)\in L_1$, $M_2(2,-1,1)\in L_2$

$\overrightarrow{M_1M}=(-3,-2,1)//(3,2,-1)$, $\overrightarrow{M_2M}=(-6,-4,2)//(3,2,-1)$

L与L_1, L_2都相交, $s_0=(m,n,p)$, 则有

$$\left[s_0\ s_1\ \overrightarrow{M_1M}\right]=\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=4m+12p=0$$

$$\left[s_0\ s_2\ \overrightarrow{M_2M}\right]=\begin{vmatrix} m & n & p \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=7m-13n-5p=0$$

$$\therefore \begin{cases} m+3p=0 \\ 7m-13n-5p=0 \end{cases}$$

$$\therefore m=-3p,\ n=-2p$$

故 $$L: \frac{x+4}{-3}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-3}{1}$$

解3 L 过点 $M(-4,-5,3)$,

设 $L: \dfrac{x+4}{m} = \dfrac{y+5}{n} = \dfrac{z-3}{p}$,

参数方程为 $L: \begin{cases} x = -4 + mt \\ y = -5 + nt \\ z = 3 + pt \end{cases}$

L与L_1, L_2的交点分别为 $P_1(t_1), P_2(t_2)$, $P_1(t_1) \in L_1$

$L_1: \begin{cases} -2x - 2 = 3y + 9 \\ y + 3 = 2z - 4 \end{cases}$ $\begin{cases} -2(-4 + mt_1) - 2 = 3(-5 + nt_1) + 9 \\ (-5 + nt_1) + 3 = 2(3 + pt_1) - 4 \end{cases}$

$\begin{cases} (3n + 2m)t_1 = 12 \\ (n - 2p)t_1 = 4 \end{cases}$ $\because t_1 \neq 0 \therefore \dfrac{3n + 2m}{n - 2p} = 3 \Rightarrow m = -3p$

$$L_2:\begin{cases}3x-6=2y+2\\3z-3=-5z-5\end{cases}\qquad P_2(t_2)\in L_2$$

$$\begin{cases}3(-4+mt_2)-6=2(-5+nt_2)+2\\3(3+pt_2)-3=-5(-5+nt_2)-5\end{cases}\qquad\begin{cases}(2n-3m)t_2=-10\\(3p+5n)t_2=14\end{cases}$$

$$\because t_2\neq 0\ \therefore \frac{2n-3m}{3p+5n}=-\frac{5}{7}\Rightarrow\ n=-2p$$

取 $p=1,\ \therefore m=-3, n=-2$

故 $$L:\frac{x+4}{-3}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-3}{1}$$