4.4 空间直线

一、一般式方程

二、点向式方程

三、参数式方程

四、直线与直线的位置关系

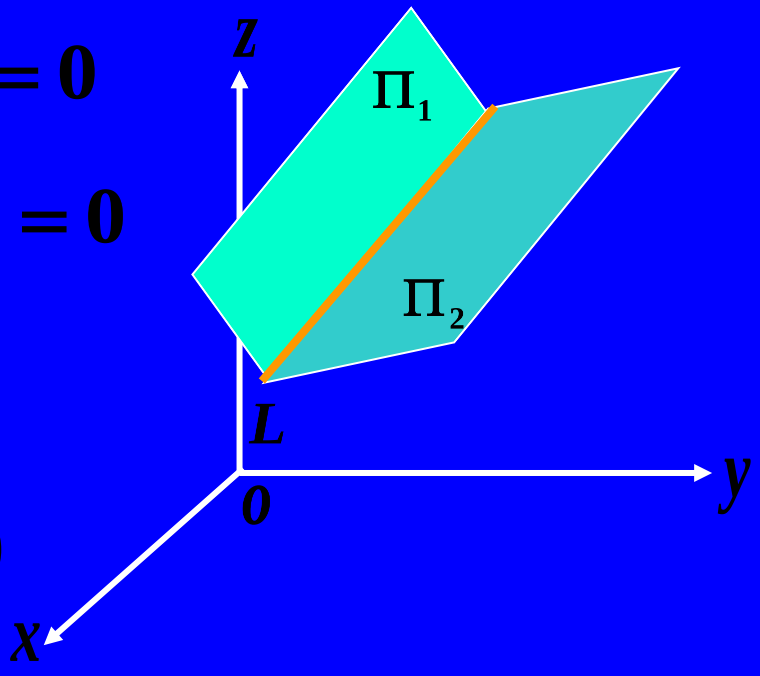
五、直线与平面的位置关系

一、一般式方程

空间直线可看成两平面的交线.

$$\Pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



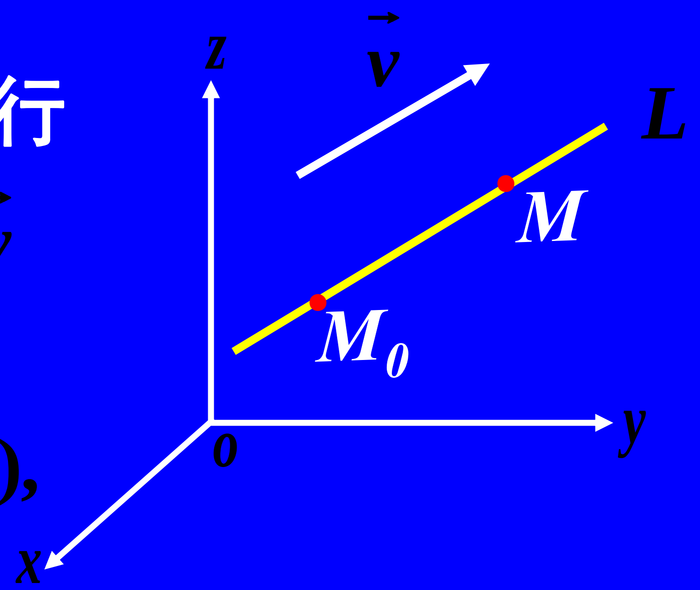
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

空间直线的一般式（交面式）方程

二、点向式(标准式、对称式)方程

方向向量的定义：

如果一非零向量 $\vec{v}$ 平行于一条已知直线L，向量 $\vec{v}$ 称为直线L的**方向向量**.



$$M_0(x_0, y_0, z_0), \qquad M(x, y, z),$$

$$\forall\ M \in L, \qquad \overrightarrow{M_0M} \,/\!/\, \vec{v}$$

$$\vec{v} = (m, n, p), \qquad \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

返回

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

直线的点向式方程

(标准式、对称式)

直线的一组**方向数**

方向向量的余弦称为直线的**方向余弦**.

注意: 规定直线方向向量 $\vec{v}=(m,n,p)$为非零向量, 即 m,n,p 不全为零. 如果有一个或两个为零, 则相应的分子理解为零.

例1 求过空间两点$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$的直线方程

解 $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,

$$l: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

直线的两点式方程

返回

三、参数式方程

设直线 l 的方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

则

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

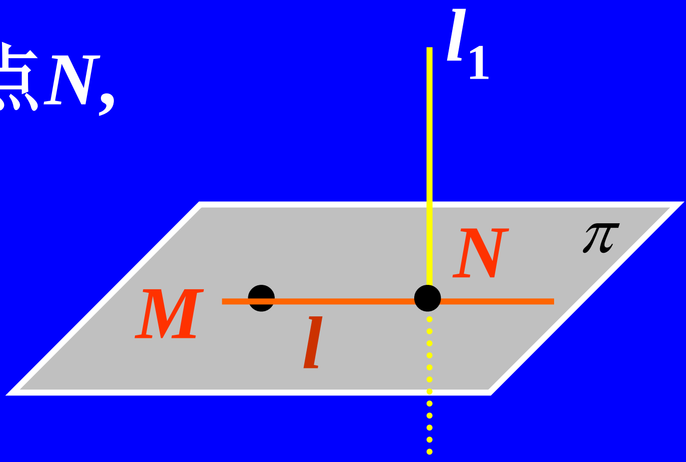
上式称为直线l 的参数方程，t 称为参数，不同的 t 对应于直线l 上不同的点.

例 2 求过点$M(2,1,3)$且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.

解一 先作一过点M且与已知直线垂直的平面Π

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与该平面的交点N,



令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=3t-1,\\ y=2t+1,\\ z=-t.\end{cases}$$

代入平面方程得 $t=\frac{3}{7}$，　交点 $N(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$

取所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}$，

$$\overrightarrow{MN}=(\frac{2}{7}-2,\ \frac{13}{7}-1,\ -\frac{3}{7}-3)=(-\frac{12}{7},\ \frac{6}{7},\ -\frac{24}{7}),$$

所求直线方程为 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$.

例 2 求过点$M(2,1,3)$且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.

解二 令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t \quad \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1, \\ y=2t+1, \\ z=-t. \end{cases}$

故可设两直线垂直相交的交点为$N(3t-1,2t+1,-t)$,

$$\overrightarrow{MN}=(3t-3,2t,-t-3)$$

$$\vec{v}=(3,2,-1)$$

则 $\overrightarrow{MN}\cdot\vec{v}=3(3t-3)+2\cdot 2t-(-t-3)=0$

返回

解得 $t=\frac{3}{7}$，交点 $N(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$

取所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}$,

$$\overrightarrow{MN}=(\frac{2}{7}-2,\ \frac{13}{7}-1,\ -\frac{3}{7}-3)=(-\frac{12}{7},\ \frac{6}{7},\ -\frac{24}{7}),$$

所求直线方程为 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$.

返回

例3 用点向式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$$

解一 在直线上任取一点$M_0\ (x_0, y_0, z_0)$

取 $x_0=1 \Rightarrow \begin{cases} y_0+z_0+2=0\ , \\ y_0-3z_0-6=0\ . \end{cases}$

解得 $y_0=0,\quad z_0=-2$

M_0点的坐标 $(1,\ 0,\ -2)$,

◀ ▶ 返回

因所求直线与两平面的法向量都垂直

取 $$\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=(4,-1,-3),$$

点向式方程 $$\frac{x-1}{4}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z+2}{-3},$$

参数方程 $$\begin{cases}x=1+4t\\ y=-t\\ z=-2-3t\end{cases}.$$

返回

解二 由解法一已得直线上点M_0的坐标(1, 0, -2),

取 x_1 =0, 则

$$\begin{cases} y_1 + z_1 + 1 = 0 \\ -y_1 + 3z_1 + 4 = 0 \end{cases}$$

解得 $y_1 = \frac{1}{4}, z_1 = -\frac{5}{4}$,得点$M_1$的坐标$(0, \frac{1}{4}, -\frac{5}{4})$

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}),$$

取直线的方向向量为$\vec{v}$ =(4, -1, -3),

得直线方程为 $$\frac{x-1}{4} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+2}{-3},$$

返回

解三 由直线方程 $\begin{cases} x+y+z+1=0 & (1) \\ 2x-y+3z+4=0 & (2) \end{cases}$

(1)+(2): $3x+4z+5=0 \Longrightarrow z=\dfrac{-3x-5}{4}$,

(1)×2-(2): $3y-z-2=0 \Longrightarrow z=3y-2$

$$\frac{-3x-5}{4}=\frac{3y-2}{1}=\frac{z}{1}, \quad \text{即} \quad \frac{x+\frac{5}{3}}{4}=\frac{y-\frac{2}{3}}{-1}=\frac{z}{-3}. \qquad (3)$$

方程(3)的方向向量(-4,1,3)与(4,-1,-3)平行，且点 $(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},0)$ 在解法一、二所确定的直线上，故方程(3)与解法一、二所得的方程表示的为同一直线.

返回

解四（用高斯消元法——行初等变换）

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\therefore \begin{cases} x=1-4y \\ z=-2+3y \end{cases}$$

参数式: $$\begin{cases} x=1-4t \\ y=t \\ z=-2-3t \end{cases}.$$

点向式: $$\frac{x-1}{-4}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{3}.$$

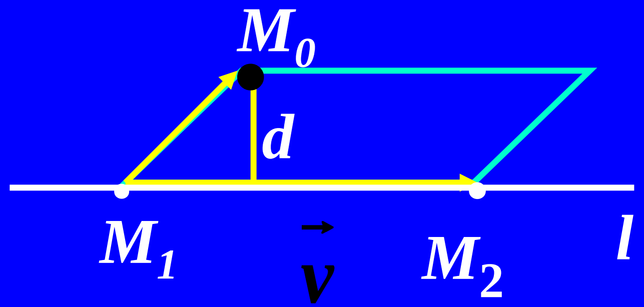
例4 确定直线l 外一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$到l 的距离,其中

直线l 的方程为 $$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

解: 设点$M_1(x_1, y_1, z_1)$是直线l 上的点,

设 M_2是l 上另一点，且

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{v}=(m, n, p),$$



如图所示平行四边形面积

$$S=|\overrightarrow{M_1M_0}\times\overrightarrow{M_1M_2}|=|\vec{v}\times\overrightarrow{M_1M_0}|=d\,|\vec{v}|$$

$$d=\frac{|\vec{v}\times\overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{v}|}.$$

例5 求点$M_0(1,2,1)$到直线

$$l:\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$$

的距离.

解 取 $z=0$, 得 $x=1$, $y=1$, $M_1(1,-1,0)\in l$.

$$\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k},$$

$$\overrightarrow{M_1M_0}=(0,3,1).$$

$$d=\frac{|\vec{v}\times\overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{v}|}=\cdots=\sqrt{\frac{35}{6}}.$$

返回

四、直线与直线的位置关系

1. 两直线的夹角

两直线L_1与L_2的方向向量$\vec{v}_1$与$\vec{v}_2$的夹角称（通常指锐角）称为L_1与L_2的夹角.

$$\text{直线 } L_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\quad M_1(x_1,y_1,z_1)$$

$$\text{直线 } L_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},\quad M_2(x_2,y_2,z_2)$$

$$\cos\theta=\frac{|\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

由此公式可计算两条直线的夹角.

返回

2. 两直线的位置关系:

(1) $L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$

(2) $L_1 // L_2$ (不重合) $\Longleftrightarrow \vec{v_1} // \vec{v_2} \not\parallel \overrightarrow{M_1 M_2}$

(3) L_1 与 L_2 重合 $\Longleftrightarrow \vec{v_1} // \vec{v_2} // \overrightarrow{M_1 M_2}$

(4) L_1 与 L_2 相交 $\Longleftrightarrow (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{M_1 M_2}) = 0$ 且 $\vec{v_1} \not\parallel \vec{v_2}$

(5) L_1 与 L_2 异面 $\Longleftrightarrow (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{M_1 M_2}) \neq 0$

例 6 求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程.

解 设所求直线的方向向量为 $\vec{v}=(m,n,p)$,

根据题意知 $\vec{v}\perp\vec{n}_1$, $\vec{v}\perp\vec{n}_2$,

取 $\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2 =(-4,-3,-1)$,

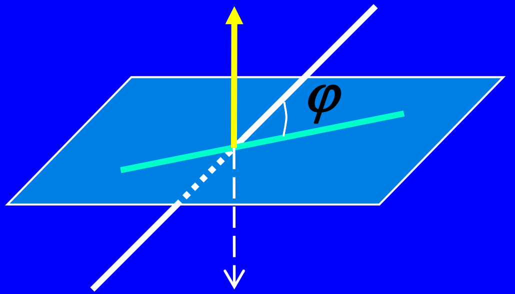
所求直线的方程 $$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

五、直线与平面的位置关系

1、直线与平面的夹角

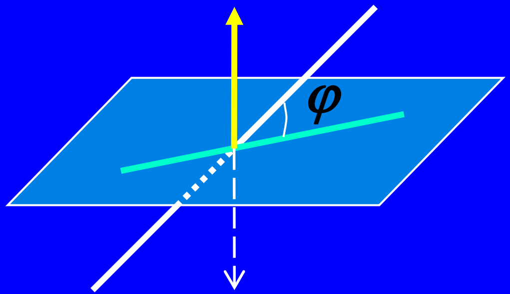
当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线的夹角 φ 称为直线与平面的夹角.

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$



当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

$$L: \quad \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$



$$\vec{v}=(m,n,p),$$

$$\Pi: \quad Ax+By+Cz+D=0, \quad \vec{n}=(A,B,C),$$

$$\left.\begin{aligned} &\angle(\vec{v},\vec{n})=\frac{\pi}{2}-\varphi, \\ \text{或}\quad &\angle(\vec{v},\vec{n})=\frac{\pi}{2}+\varphi, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi=\left|\frac{\pi}{2}-\angle(\vec{v},\vec{n})\right|$$

$$\sin\varphi=\left|\cos\angle(\vec{v},\vec{n})\right|=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

直线与平面的夹角公式

2. 直线与平面的位置关系:

(1) $L \perp \Pi \iff \vec{v} \,//\, \vec{n} \iff \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}.$

(2) $L // \Pi \ (L \notin \Pi)$

$\iff \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, 但 $M_0(x_0, y_0, z_0) \notin \Pi$

(3) $L \in \Pi \iff \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, 且 $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$

(4) L与Π相交 $\iff \vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$

例 7 设直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，平面 $\Pi: x-y+2z=3$，求直线与平面的夹角.

解 $\vec{n}=(1,-1,2)$, $\vec{v}=(2,-1,2)$,

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$$=\frac{|1\times 2+(-1)\times(-1)+2\times 2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{7}{3\sqrt{6}}.$$

$\therefore\quad \varphi=\arcsin\dfrac{7}{3\sqrt{6}}$ 为所求夹角.

3. 平面束

设直线l 的方程是

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

除方程(2)所表示的平面外，经过直线l 的所有平面都可由下式表示:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (3)$$

经过直线 l 的平面全体称为 过 l 的平面束.

方程 (3) 称为过直线 l 的平面束方程.

例8 求直线

$$l: \frac{x-4}{4}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-2}{3}$$

在平面

$$\pi: 2x + 2y + z - 11 = 0$$

上的投影直线.

解1 过直线l 作一平面π'与π 垂直，则

π'与π 的交线l'就是l 在π 上的投影.

返回

将l的方程改写为一般式

$$\begin{cases} x+4y-24=0 \\ 3y+z-17=0 \end{cases}$$

过l的平面束方程为

$$x + 4y - 24 + \lambda(3y + z - 17) = 0$$

即

$$x + (4 + 3\lambda)y + \lambda z - (24 + 17\lambda) = 0$$

其法向量为

$$\vec{n}' = (1, 4 + 3\lambda, \lambda),$$

返回

由π’ ⊥π 可得

$$\vec{n}\cdot\vec{n}'=2\cdot1+2(4+3\lambda)+1\cdot\lambda=7\lambda+10=0$$

$$\lambda=-\frac{10}{7},$$

π’的方程为

$$x+(4-\frac{30}{7})y-\frac{10}{7}z-(24-\frac{170}{7})=0,$$

即

$$7x-2y-10z+2=0$$

直线l 在π 上的投影为

$$l':\begin{cases}7x-2y-10z+2=0\\2x+2y+z-11=0\end{cases}$$

◀ ▶ 返回

解2 作过l且与π垂直的π'，则l上的点$M(4,5,2)$在π'上.

取
$$\vec{n}' = \vec{v} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-7,2,10)$$

$$\pi': -7(x-4)+2(y-5)+10(z-2)=0$$

即
$$7x-2y-10z+2=0$$

所以l 在π 上的投影直线为 $l': \begin{cases} 7x-2y-10z+2=0 \\ 2x+2y+z-11=0 \end{cases}$

思考题 直线l 过点$M(2,5,-2)$且与直线

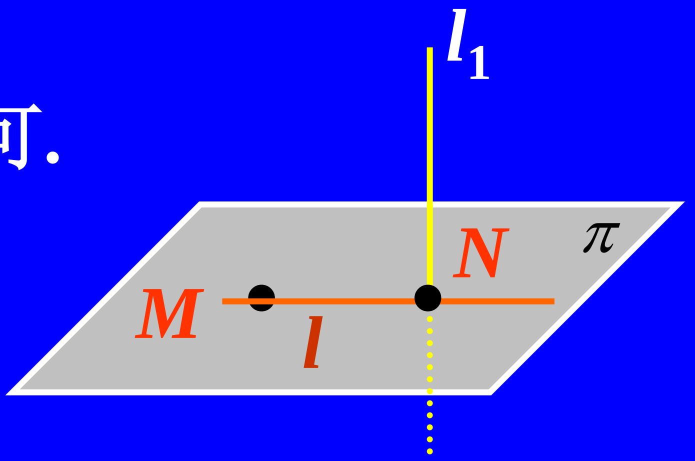
$$l_1: \begin{cases} x - y + 2z - 4 = 0 \\ 3x + 4y + z \quad = 0 \end{cases}$$

垂直相交，求l 的方程.

解 只需求出交点N的坐标即可.

过M作平面π 与l_1 垂直，

π 与l_1的交点即N.



l_1 的方向向量 $\vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}.$

返回

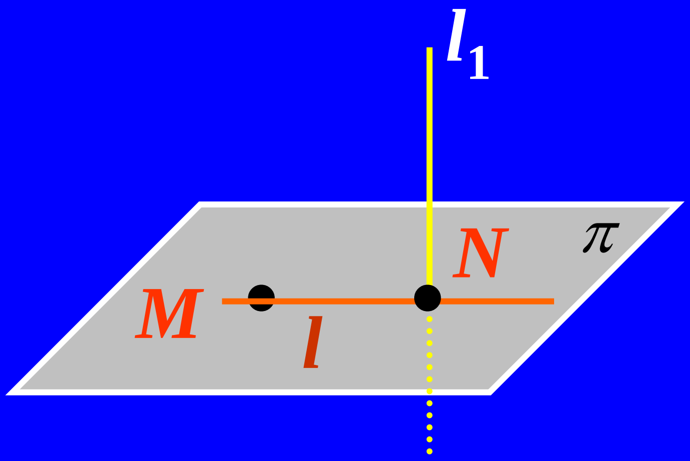
过$M(2,5,-2)$且与l 垂直的平面

π: $-9(x - 2) +5(y - 5) +7(z + 2) = 0.$

$$9x - 5y - 7z - 7 = 0.$$

将直线l_1 与π的方程联立：

$$\begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ 3x+4y+z=0 \\ 9x-y-7z-7=0 \end{cases}$$



解得：$x =1, y = -1, z =1.$

这就是l_1与π 的交点N的坐标$(1, -1, 1)$.

直线l 的方向向量

$$\vec{v} = \overrightarrow{MN} = (-1, -6, 3).$$

l 的方程

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z+2}{3}.$$