南京邮电大学 2012/2013 学年第一学期

《线性代数与解析几何》期末试卷（A）参考答案

院(系)________________ 班级____________ 学号____________ 姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-A-2I=0$，则矩阵 A 可逆，且 $A^{-1}=\underline{\frac{1}{2}(A-I)}$

2. 设 $\alpha=(1\ \ 0\ \ -1\ \ 2)^T$，$\beta=(0\ \ 1\ \ 0\ \ 2)$，矩阵 $A=\alpha\beta$，则 $r(A)=\underline{\ \ 1\ \ }$.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 都是三维向量空间 R^3 的一组基，且 $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3$，则由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵是 $\underline{\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&3\\-1&1&2\end{pmatrix}}$.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$B$ 是三阶非零矩阵，且 $AB=0$，则 $t=\underline{\ -3\ }$.

5. 过两个曲面 $x^2+y^2+4z=1$ 和 $x^2=y^2+z^2$ 的交线，母线平行于 z 轴的柱面方程是 $\underline{x^2-y^2-\frac{1}{16}(1-x^2-y^2)^2=0}$.

得 分

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1.已知行列式 $\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=a$，则 $\begin{vmatrix}6x_1&2z_1&-2y_1\\3x_2&z_2&-y_2\\3x_3&z_3&-y_3\end{vmatrix}=$ （ C ）

（A）$-a$　　（B）$-6a$　　（C）$6a$　　（D）$-3a$

2. 设 A, B 与 C 都是 n 阶矩阵，则下列结论正确的是 （ D ）

（A）若 $AB=0$，则 $A=0$ 或 $B=0$　　（B）若 $AB=AC$，且 $A\neq 0$，则 $B=C$

（C）$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$　　（D）若 $\det AB=0$，则 $\det A=0$ 或 $\det B=0$

3. 设α_1,α_2是非齐次线性方程组$Ax=b$的两个解，则 （ B ）

（A）$\alpha_1+\alpha_2$是$Ax=0$的解 （B）$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2(k_1+k_2=1)$是$Ax=b$的解

（C）$\alpha_1-\alpha_2$是$Ax=b$的解 （D）$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2(k_1+k_2=1)$是$Ax=0$的解

4. 设 3 阶矩阵 A 有特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应的特征向量分别为 $\alpha_1=(1,-1,2)^T$，$\alpha_2=(1,0,-1)^T$，$\alpha_3=(1,2,-4)^T$，则$A^{100}=$ （ C ）

（A）$-A$ （B）$-I$ （C）I （D）$100A$

5.若二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+8x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2$是正定的，则$a$的取值范围是（$A$）

（A）$-4<a<4$ （B）$a>4$ （C）$a<-4$ （D）$a<8$

得 分

三、（8 分）设$A=\begin{pmatrix}1&3&5\\3&4&7\\1&2&2\end{pmatrix}$，且满足$AX=A-X$，求$X$.

解 $(A+I)X=A$, 且$|A+I|=1$，所以$X=(A+I)^{-1}A$ ………3 分

$$(A+I\vdots A)=\begin{pmatrix}2&3&5&1&3&5\\3&5&7&3&4&7\\1&2&3&1&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-1&-1&-1&-1&1\\0&-1&-2&0&-2&1\\1&2&3&1&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1&4\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&-1&1&0\end{pmatrix}\text{…4 分}$$

$$X=(A+I)^{-1}A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\2&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\text{…………1 分}$$

得 分

四、（10 分）设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1&2&-1&0\end{pmatrix}^T$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1&1&0&2\end{pmatrix}^T$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2&1&1&a\end{pmatrix}^T$的秩为 2，(1)求$a$的值；(2)求向量组的一个极大线性无关组，并把其余向量用极大线性无关组表示出来.

解

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&1&3\\0&2&a\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&a-6\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&a-6\end{pmatrix}\text{..4}$$

$\because R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，$\therefore a=6$， …………2

且α_1,α_2是一个极大线性无关组，$\alpha_3=-\alpha_1+3\alpha_2$…………4

得 分

五、（12 分）当 a，b 是何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+a-1=0 \\ x_1+4x_2-3x_3-a-1=0 \\ 3x_1-3x_2+(b-1)x_3+9=0 \end{cases}$$

（1）有唯一解，（2）无解，（3）有无穷多解，并求出其通解。

解 对增广矩阵进行初等行变换

$$(A\mid B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1-a \\ 1 & 4 & -3 & 1+a \\ 3 & -3 & b-1 & -9 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -a \\ 0 & 5 & -5 & 1+2a \\ 0 & 0 & b-7 & 3a-9 \end{array}\right) \quad \cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

(1) 当 $b\neq 7$，方程组有唯一解. ………2 分

(2) 当 $b=7, a\neq 3$ 时, 方程组无解. ………2 分

(3) 当 $b=7$，且 $a=3$ 时，方程组有无穷多解，………2 分

$$(A\mid B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -8/5 \\ 0 & 1 & -1 & 7/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

通解为 $x=(-1.6,1.4,0)^T+k(-1,1,1)^T$ ，k 为任意常数. ………4 分

得 分

六、（12 分）求一个正交变换，将二次型 $f=5x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_2x_3$ 化为标准形，并指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示什么曲面？

解： 二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$， ………1

特征多项式 $|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)$,

特征值为 $\lambda_1=1$， $\lambda_2=3$, $\lambda_3=5$ ………2

对 $\lambda_1=1$，由 $(\lambda_1 I-A)x=0$ 得 $\xi_1=(0,-1,1)^T$，单位化得 $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)^T$

对 $\lambda_2=3$，由 $(\lambda_2 I-A)x=0$ 得 $\xi_2=\left(0,1,1\right)^T$，单位化得 $e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(0,1,1\right)^T$，

对 $\lambda_3=5$，由 $(\lambda_3 I-A)x=0$ 得 $\xi_3=\left(1,0,0\right)^T$，单位化得 $e_3=\left(1,0,0\right)^T$ ………6

取正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，得 $f=y_1^2+3y_2^2+5y_3^2$

方程 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+3y_2^2+5y_3^2=1$ 所表示椭球面. ………3

得 分

七、(12 分)求过点 $M_1(2,-1,1)$，$M_2(1,1,2)$ 且垂直于平面 $x+y+z=1$ 的平面 π 的方程.

解(法一：点法式) $\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1,2,1\}$，已知平面法向量 $\overrightarrow{n_1}=\{1,1,1\}$

所求平面法向量 $\overrightarrow{n}\parallel\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{n_1}=\{1,2,-3\}$，取 $\overrightarrow{n}=\{1,2,-3\}$ ………9

所求平面方程为 $(x-1)+2(y-1)-3(z-2)=0$，即 $x+2y-3z+3=0$ ………3

法二：(利用平面束方程)过两点 $M_1(2,-1,1)$，$M_2(1,1,2)$ 的直线方程

$$L:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{-1}$$

改写成一般式：$L:\begin{cases}2x+y+3=0\\x+z-3=0\end{cases}$，

过 L 的平面束方程为 $(2x+y+3)+\lambda(x+z-3)=0$

由题设，所求平面与已知平面垂直，有 $\{2+\lambda,1,\lambda\}\cdot\{1,1,1\}=0$，得 $\lambda=-\frac{3}{2}$

所求平面方程为 $2(2x+y+3)-3(x+z-3)=0$，即 $x+2y-3z+3=0$

法三：(利用一般式方程) 因为平面 π 过点 $M_2(1,1,2)$，设其方程为

$$\pi:A(x-1)+B(y-1)+C(z-2)=0$$

因为平面 π 过点 $M_1(2,-1,1)$，且与已知平面垂直，所以

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

$$\begin{cases} A(2-1)+B(-1-1)+C(1-2)=0 \\ \{A,B,C\}\cdot\{1,1,1\}=0 \end{cases}$$ 解得 $A:B:C=1:2:(-3)$

所求平面方程为 $x+2y-3z+3=0$

得 分

八、(6 分)设 A 是 $n\times m$ 矩阵, B 是 $m\times n$ 矩阵, 其中 $m>n$, I 是 n 阶单位矩阵,若 $AB=I$,证明 B 的列向量组线性无关.

证(法一:用定义)设 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$,作线性组合

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n=0 \text{ ………2}$$

即 $Bx=0$ 其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

左乘矩阵 A 得 $ABx=Ix=0$,从而 $x=0$ ………3

即 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$,所以 B 的列向量组线性无关.

法二:(用矩阵的秩证明)

因为 $r(B)\le\min\{n,m\}\le n$, ………2

又因 $r(B)\ge r(AB)=r(I)=n$, ………2

所以 $r(B)=n$,即矩阵满秩,从而可知 B 的列向量组线性无关. ………2

法三: (用反证法)

设 B 的列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性相关, 则 $r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)<n$, $\Rightarrow r(B)<n$ …2

于是 $r(I)=r(AB)\le r(B)<n$, ………2

所以不可逆,矛盾!所以 B 的列向量组线性无关. ………2