5、设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<-1\\ \frac{1}{2}(1-x), & -1\le x\le 1\\ x-1, & x>1\end{cases}$，求 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式。

当 $x<-1$ 时：$\int_0^x f(t)dt=\int_0^{-1}\frac{1}{2}(1-t)dt+\int_{-1}^x 1dt=x+\frac{1}{4}$

当 $-1\le x\le 1$ 时：$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\frac{1}{2}(1-t)dt=(\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}t^2)\Big|_0^x$

$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2$

当 $x>1$ 时：$\int_0^x f(t)dt=\int_0^1\frac{1}{2}(1-t)dt+\int_1^x(t-1)dt$

$=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{4}$

$\therefore F(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{4} & x<-1\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2 & -1\le x\le 1\\ \frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{4} & x>1\end{cases}$

6、设 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}dy$，求 $\int_0^1(1-x)^2 f(x)dx$。

$\int_0^1(1-x)^2\int_0^x e^{-y^2+2y}dydx=-\int_0^1\int_0^x e^{-y^2+2y}dyd\frac{1}{3}(1-x)^3$

$=-\frac{1}{3}(1-x)^3\int_0^x e^{-y^2+2y}dy\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x^2+2x}\cdot\frac{1}{3}(1-x)^3dx$

$=\frac{1}{3}\int_0^1 e^{-(x-1)^2+1}(1-x)^3dx\ \underline{\underline{令1-x=u}}\ \frac{e}{3}\int_0^1 e^{-u^2}\cdot u^3du$

$=-\frac{e}{6}\int_0^1 u^2de^{-u^2}=-\frac{e}{6}(u^2e^{-u^2}\Big|_0^1-\int_0^1 2ue^{-u^2}du)$

$=-\frac{1}{6}e(\frac{1}{e}+\int e^{-u^2}d(-u^2))=-\frac{1}{6}e(\frac{1}{e}+e^{-u^2}\Big|_0^1)=\frac{1}{6}e-\frac{1}{3}$

7、当 $x\to 0$ 时，$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f'(t)dt$ 的导数与 x^2 是等价无穷小，求 $f'(0)$。

$F(x)=\int_0^x x^2f'(t)dt-\int_0^x t^2f'(t)dt$

$=x^2\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x t^2f'(t)dt$

$F'(x)=2x\int_0^x f'(t)dt+x^2f'(x)-x^2f'(x)$

$=2x\int_0^x f'(t)dt$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f'(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2f'(x)}{1}=2f'(0)=1$

$\therefore f'(0)=\frac{1}{2}$

8、设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 可微，且满足 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx\quad(k>1)$，求证：至少存在一点 $\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)=(1-\frac{1}{\eta})f(\eta)$。

令 $F(x)=xe^{1-x}f(x)$，则 $F(1)=f(1)$

又 $\because f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}F(x)dx=k\cdot F(\xi)\cdot\frac{1}{k}=F(\xi)\quad \xi\in[0,\frac{1}{k}]$

$\therefore F(x)$ 在 $[\xi,1]$ 上满足 Rolle Th

$\therefore \exists\eta\in(\xi,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\eta)=0$

即 $xe^{1-x}f'(x)+e^{1-x}f(x)-xe^{1-x}f(x)\Big|_{x=\eta}=0$

$\because e^{1-\eta}\ne 0\quad \therefore f'(\eta)=(1-\frac{1}{\eta})f(\eta)$