第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

习 题 课

主 要 内 容

x+y=　典 型 例 题

测　验　题

初 等 变 换

等 价 矩 阵

初 等 矩 阵

矩阵的秩

秩 的 定 义

相关定理及性质

相 关 定 理

矩阵的初等变换

线性方程组

有解判别定理

方程组的解法

行阶梯形矩阵

行最简形矩阵

矩阵的标准形

1　初等变换的定义

换法变换

对调矩阵的两行(列), 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$ $(c_i \leftrightarrow c_j)$;

倍法变换

以数 $k \neq 0$ 乘某一行(列)中的所有元素, 记作 $r_i \times k$ $(c_i \times k)$;

消法变换

把某一行(列)所有元素的 k 倍加到另一行(列)对应的元素上去, 记作 $r_i + k r_j$ $(c_i + k c_j)$.

上页　下页　返回

三种初等变换都是可逆的，且其逆变换是同一类型的初等变换.

初　等　变　换	逆　变　换
$r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$	$r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$
$r_i \times k (c_i \times k)$	$r_i \times \frac{1}{k} (c_i \times \frac{1}{k})$
$r_i + k r_j (c_i + k c_j)$	$r_i + (-k) r_j (c_i + (-k) c_j)$

上页 下页 返回

2　矩阵的等价

如果矩阵A经有限次初等变换变成矩阵B,就称矩阵A与B等价,记作$A \sim B$.

反身性　$A \sim A$;

对称性　若$A \sim B$,则$B \sim A$;

传递性　若$A \sim B, B \sim C$,则$A \sim C$.

３　初等矩阵

由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

三种初等变换对应着三种初等矩阵.

（1）换法变换：对调两行（列），得初等矩阵 $E(i,j)$.

用m阶初等矩阵$E_m(i,j)$左乘$A=(a_{ij})_{m\times n}$,相当于对矩阵A施行第一种初等行变换:把A的第i行与第j行对调$(r_i \leftrightarrow r_j)$.

类似地,用n阶初等矩阵$E_n(i,j)$右乘矩阵A,相当于对矩阵A施行第一种初等列变换:把A的第i列与第j列对调$(c_i \leftrightarrow c_j)$.

（２）倍法变换：以数 k（非零）乘某行（列），得初等矩阵$E(i(k))$.

以$E_m(i(k))$左乘矩阵A,相当于以数k乘A的第i行$(r_i \times k)$;

以$E_n(i(k))$右乘矩阵A,相当于以数k乘A的第i列$(c_i \times k)$.

（３）消法变换：以数 k 乘某行（列）加到另一行（列）上去，得初等矩阵 $E(ij(k))$.

以 $E_m(ij(k))$左乘矩阵A,相当于把A的第j行乘以k加到第i行上$(r_i + k r_j)$;

以 $E_n(ij(k))$右乘矩阵A,相当于把A的第i列乘以k加到第j列上$(c_j + k c_i)$.

4　行阶梯形矩阵

经过初等行变换，可把矩阵化为行阶梯形矩阵，其特点是：可画出一条阶梯线，线的下方全为0；每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线（每段竖线的长度为一行）后面的第一个元素为非零元，也就是非零行的第一个非零元.

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

上页　下页　返回

5 行最简形矩阵

经过初等行变换，行阶梯形矩阵还可以进一步化为行最简形矩阵，其特点是：非零行的第一个非零元为1，且这些非零元所在列的其它元素都为0.

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

6　矩阵的标准形

对行阶梯形矩阵再进行初等列变换，可得到矩阵的标准形，其特点是：左上角是一个单位矩阵，其余元素都为0.

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_5-4c_1-3c_2+3c_3}{\overset{\substack{c_3\leftrightarrow c_4 \\ c_4+c_1+c_2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

任何一个$m\times n$矩阵,总可以经过初等变换(行变换和列变换),化为标准形

$$F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

此标准形由m,n,r三个数完全确定,其中r就是行阶梯形矩阵中非零行的行数.

所有与A等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类，标准形 F是这个等价类中形状最简单的矩阵.

7 矩阵的秩

定义 在$m \times n$矩阵A中,任取k行和k列,位于这些行列交叉处的k^2个元素,不改变它们在A中所处的位置次序而得到的k阶行列式,称为矩阵A的k阶子式.

定义 设在矩阵A中有一个不等于0的r阶子式D,且所有$r+1$阶子式(如果存在的话)全等于0,那么D称为矩阵A的最高阶非零子式,数r称为矩阵A的秩,记作$R(A)$.并规定零矩阵的秩等于0.

8　矩阵秩的性质及定理

如果A中有一个非零的r阶子式，则$R(A) \geq r$;

如果A中所有$r+1$阶子式都为零，则$R(A) \leq r$;

$R(A^T) = R(A)$;

定理　若$A \sim B$，则$R(A) = R(B)$;

行阶梯形矩阵的秩等于非零行的行数.

若A为n阶可逆矩阵,则

(1) A的最高阶非零子式为$|A|$;

(2) $R(A)=n$;

(3) A的标准形为单位矩阵E;

(4) $A \sim E$.

9　线性方程组有解判别定理

定理　n元齐次线性方程组$A_{m\times n}x=0$有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩$R(A)<n$.

定理　n元非齐次线性方程组$A_{m\times n}x=b$有解的充分必要条件是系数矩阵A的秩等于增广矩阵$B=(A,b)$的秩.

10 线性方程组的解法

齐次线性方程组：把系数矩阵化成行最简形矩阵，写出通解.

非齐次线性方程组：把增广矩阵化成行阶梯形矩阵，根据有解判别定理判断是否有解，若有解，把增广矩阵进一步化成行最简形矩阵，写出通解.

11 初等矩阵与初等变换的关系

定理 设 A是一个 $m\times n$矩阵,对A施行一次初等行变换,相当于在A左边乘以相应的m阶初等矩阵;对A施行一次初等列变换,相当于在A的右边乘以相应的n阶初等矩阵.

定理 设A为可逆矩阵,则存在有限个初等矩阵P_1, $P_2,\cdots,P_l$,使$A=P_1P_2\cdots P_l$.

推论 $m\times n$矩阵$A\sim B$的充分必要条件是:存在m阶可逆矩阵P及n阶可逆矩阵Q,使得$PAQ=B$.

上页 下页 返回

典　型　例　题

- 一、求矩阵的秩
- 二、求解线性方程组
- 三、求逆矩阵的初等变换法
- 四、解矩阵方程的初等变换法

一、求矩阵的秩

求矩阵的秩有下列基本方法

（1）计算矩阵的各阶子式，从阶数最高的子式开始，找到不等于零的子式中阶数最大的一个子式，则这个子式的阶数就是矩阵的秩.

上页 下页 返回

（２）用初等变换．即用矩阵的初等行（或列）变换，把所给矩阵化为阶梯形矩阵，由于阶梯形矩阵的秩就是其非零行（或列）的个数，而初等变换不改变矩阵的秩，所以化得的阶梯形矩阵中非零行（或列）的个数就是原矩阵的秩．

第一种方法当矩阵的行数与列数较高时，计算量很大，第二种方法则较为简单实用.

例 1　求下列矩阵的秩

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 10 \\ 1 & 11 & 3 & 6 & 16 \\ 1 & -19 & -7 & -14 & -34 \end{pmatrix}.$$

解　对 A 施行初等行变换化为阶梯形矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 10 \\ 1 & 11 & 3 & 6 & 16 \\ 1 & -19 & -7 & -14 & -34 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 9 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & -21 & -7 & -14 & -35 \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

因此, $R(A) = R(B) = 2.$

注意 在求矩阵的秩时，初等行、列变换可以同时兼用，但一般多用初等行变换把矩阵化成阶梯形.

上页 下页 返回

二、求解线性方程组

当方程的个数与未知数的个数不相同时，一般用初等行变换求方程的解.

当方程的个数与未知数的个数相同时，求线性方程组的解，一般都有两种方法：初等行变换法和克莱姆法则.

例２　求非齐次线性方程组的通解.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \qquad = 2. \end{cases} \qquad (1)$$

解　对方程组的增广矩阵 B 进行初等行变换，使其成为行最简单形.

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3&-1&1\\3&2&1&-1&1\\2&3&1&1&1\\2&2&2&-1&1\\5&5&2&0&2\end{pmatrix}\underset{\substack{r_4+r_3\\r_5-r_2}}{\overset{\substack{r_1+r_3\\r_2+r_3}}{\sim}}\begin{pmatrix}3&5&4&0&2\\5&5&2&0&2\\2&3&1&1&1\\4&5&3&0&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4-r_2}{\overset{r_1-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}-2&0&2&0&0\\5&5&2&0&2\\2&3&1&1&1\\-1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{r_4-r_1}{\overset{\substack{r_1\div 2\\r_2-2r_3}}{\sim}}\begin{pmatrix}-1&0&1&0&0\\1&-1&0&-2&0\\2&3&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2+r_1}{\underset{r_3+2r_1+3r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} r_1\div(-1)-\frac{r_3}{6} \\ r_2\div(-1)-\frac{r_3}{6} \\ \sim \\ r_3\div 6 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 7/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

由此可知$R(A)=R(B)=3$，而方程组(1)中未知量的个数是$n=4$，故有一个自由未知量.

令自由未知量$x_4=k$,可得方程组(1)的通解是

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 5/6 \\ -7/6 \\ 5/6 \\ 1 \end{pmatrix},$$

k取任意常数.

例３　当 a 取何值时，下述齐次线性方程组有非零解，并且求出它的通解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + a x_3 - x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + a x_4 = 0. \end{cases}$$

解法一　系数矩阵 A 的行列式为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ -3 & 2 & 3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & a+1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & a+3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = (a+1)(a-2)$$

当$a=-1$或者$a=2$时，$|A|=0$,方程组有非零解.

当$a=-1$时,把系数矩阵A化成最简形：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

从而得到方程组的通解 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, k为任意常数.

上页 下页 返回

当$a=2$时,由计算$|A|$之变换可把A化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而得到方程组的通解为

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

k为任意常数.

上页 下页 返回

解法二 用初等行变换把系数矩阵A化为阶梯形

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 2\\ 1 & -1 & a & -1\\ -3 & 2 & 3 & a\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & a+1 & -2\\ 0 & 5 & 0 & a+3\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

当$a=-1$或者$a=2$时，$R(A)<4$，此时方程组有非零解，可仿照解法一求出它的解.

上页 下页 返回

三、求逆矩阵的初等变换法

要求可逆矩阵A的逆矩阵,只需对分块矩阵$(A|E)$施行初等行变换,当把A变成E时,原来的E就变成了A^{-1}.

或者对分块矩阵$\begin{pmatrix} A \\ \hline E \end{pmatrix}$施行初等列变换,当把$A$变成$E$时,原来的$E$就变成了$A^{-1}$.

上页 下页 返回

例4　求下述矩阵的逆矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

解　作分块矩阵$(A|E)$,施行初等行变换.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&2&-1&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\overset{r_3+r_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\overset{r_2+r_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\overset{r_1+(-2)\times r_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\overset{r_2\times\frac{1}{2}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\overset{r_1+(-1)\times r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -3/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & -5/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

注意 用初等行变换求逆矩阵时，必须始终用行变换，其间不能作任何列变换．同样地，用初等列变换求逆矩阵时，必须始终用列变换，其间不能作任何行变换．

四、解矩阵方程的初等变换法

(1) $AX = B$

$$(A|B) \overset{\text{初等行变换}}{\sim} (E|A^{-1}B) \Rightarrow X = A^{-1}B$$

(2) $XA = B$

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline B \end{pmatrix} \overset{\text{初等列变换}}{\sim} \begin{pmatrix} E \\ \hline BA^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow X = BA^{-1}$$ 或者

$$(A^T|B^T) \overset{\text{初等行变换}}{\sim} (E|(A^T)^{-1}B^T) \Rightarrow X^T = (A^T)^{-1}B^T$$

$$\Rightarrow X = BA^{-1}$$

例5 设 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$,且$AX=A+2X$,求矩阵$X$.

解 $\because AX=A+2X,$

$\therefore (A-2E)X=A,$

又 $A-2E=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix},$

由于$(A-2E \mid A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right),$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

上页 下页 返回

第三章　　测试题

一、填空题(每小题4分，共24分).

1．若 n 元线性方程组有解，且其系数矩阵的秩为 r，则当 ____时，方程组有唯一解；当 ____时，方程组有无穷多解.

2．齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ kx_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

只有零解，则 k 应满足的条件是________.

3. 设$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$,则$AX=0$的通解为 ______

4. 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$$

有解的充要条件是__________

5. 设A为4阶方阵,且秩$R(A)=3$,则$R(A^*)=$ ______

6. 矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的秩是 ______

二、计算题(第1题每小题8分，共16分；第2题每小题9分，共18分；第3题12分).

1.讨论λ值的范围,确定矩阵的秩.

上页 下页 返回

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2．求解下列线性方程组

$$(1)\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 8x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3-2x_4+x_5=3 \\ 2x_1+6x_2+x_3-3x_4=2 \\ x_1+3x_2-2x_3-x_4-x_5=-1 \\ 3x_1+9x_2+4x_3-5x_4+x_5=5 \end{cases}$$

3. a,b取何值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1+ax_2+x_3=3 \\ x_1+2ax_2+x_3=4 \\ x_1+x_2+bx_3=4 \end{cases}$$

有唯一解、无解或有无穷多解？在有无穷多解时,求其通解.

上页 下页 返回

三、利用矩阵的初等变换，求下列方阵的逆矩阵（每小题7分，共14分）.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

四、证明题（每小题8分，共16分）

1. A, B为两个n阶方阵,且 $ABA = B^{-1}$,证明:

$$秩(E - AB) + 秩(E + AB) = n.$$

2. 设A为$m \times n$实矩阵,证明:秩$\left(A^T A\right)=$秩(A).

上页 下页 返回

测试题答案

一、 1.$r = n, r < n$;　　2.$k \neq \frac{3}{5}$;　　3.零解;

4.$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$;　　5.1;　　6.2.

二、 1. (1)当$\lambda \neq 3$时,秩为3;当$\lambda = 3$时,秩为2;

(2)当$\lambda \neq 0$时,秩为4;当$\lambda = 0$时,秩为2.

$$2.\ (1)\ X = k_1 \begin{pmatrix} 9/4 \\ -3/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3/4 \\ 7/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -1/4 \\ -5/4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(2)\ X=\begin{pmatrix}3/5\\0\\4/5\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}7/5\\0\\1/5\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1/5\\0\\-2/5\\0\\1\end{pmatrix}.$$

3.当 $a\neq 0$ 且 $b\neq 1$ 时,方程组有唯一解;

当 $a=\dfrac{1}{2}$ 且 $b=1$ 时,方程组有无穷多解;

其余情形,方程组无解.

通解为$x=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},k\in R.$

三、 1.$A^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&-2\\-3&2&-1\end{pmatrix};$

2. $A^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}.$