南京邮电大学 2015/2016 学年第一学期

《线性代数与解析几何》期末试卷(A)参考答案

院(系)________________ 班级____________ 学号____________ 姓名____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总 分
得分										

得 分

一.填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1．设行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\4&5&6\end{vmatrix}$，则第三行元素的代数余子式之和

$A_{31}+A_{32}+A_{33}=\underline{\ 0\ }$.

2. 设 A 和 B 是 3 阶矩阵，$A=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$，且秩 $r(AB)<r(B)$，则 λ 应满足 $\underline{\lambda=1}$ 或 $\underline{\lambda=-2}$

3. 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 是 R^2 的一组基，则向量 $\beta=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ 在基 α_1,α_2 下的坐标为 $\underline{(1,1)^T}$.

4．母线平行于 z 轴且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=1\\x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程为 $\underline{x^2+2y^2=1}$.

5. 已知二阶实对称矩阵 A 的特征值是 0 和 1，若 $B=(kI+A)^2$ 是正定阵，其中 I 是单位矩阵，则 k 应满足 $\underline{k\neq 0,-1}$.

二.选择题（每小题 4 分，20 分）

1. 设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得 B,交换 B 的第 2，3 行得单位阵 I, 记

$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 A= （ D ）

(A) P_1P_2 (B) $P_1^{-1}P_2$ (C) P_2P_1 (D) $P_2P_1^{-1}$

2．设 A 是 3 阶矩阵，秩 $r(A)=2$，且 α_1,α_2 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的两个不同的解向量，则 $AX=0$ 的一个基础解系是 （ D ）

(A) α_1 (B) α_2 (C) $\alpha_1+\alpha_2$ (D) $\alpha_1-\alpha_2$

3．直线 $L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 和 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$ 的夹角为 （ B ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{6}$

4．若向量组 α,β,γ 线性无关，α,β,δ 线性相关，则 （ C ）

(A) α 必可由 β,γ,δ 线性表示 (B) α 必不可由 β,γ,δ 线性表示

(C) δ 必可由 α,β,γ 线性表示 (D) δ 必不可由 α,β,γ 线性表示

5．n 阶实对称矩阵 A 和 B 相似的充分必要条件是 （ D ）

（A）A 与 B 都有 n 个线性无关的特征向量 （B）A 与 B 的秩相等

（C）A 与 B 的主对角线上的元素的和相等 （D）A 与 B 的 n 个特征值均相等

得 分

三、(本题 10 分) 设 n 阶矩阵 A 和 B 满足 $A+2B=AB$，(1)证明：$A-2I$ 可逆，其中 I 为单位阵；(2)已知 $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求矩阵 A.

(1)证 $\because A+2B=AB,\therefore AB-2B-A+2I=2I$，$(A-2I)(B-I)=2I$

$\therefore (A-2I)\cdot\dfrac{B-I}{2}=I$，所以 $A-2I$ 可逆. ……..4 分

(2) $\because A+2B=AB$，$\therefore A(B-I)=2B$，

$\because |B-I|=\begin{vmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$，$\therefore B-I$ 可逆，且 $A=2B(B-I)^{-1}$……3 分

$$(B-I\vdots I)=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&0\\-1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\therefore A=2B(B-I)^{-1}=2\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&0\\2&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$ ……3 分

得 分

四、(本题 10 分) 设向量组 $\alpha_1=(1,3,1,-1)^T,\alpha_2=(-1,-1,1,-3)^T$，$\alpha_3=(5,8,-2,9)^T$，$\alpha_4=(-1,1,3,1)^T$, (1) 求向量组的秩；(2) 求它的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组表示其余向量.

解 $$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\3&-1&8&1\\1&1&-2&3\\-1&-3&9&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&0&0&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&3/2&0\\0&1&-7/2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是一个极大线性无关组，$\alpha_3=\dfrac{3}{2}\alpha_1-\dfrac{7}{2}\alpha_2$

得 分

五、(本题 10 分) 求过点 $M(1,-1,2)$ 与平面 $\pi:3x+2y-2z-1=0$ 平行，且与直线 $L:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{3}$ 相交的直线方程.

解 设所求直线 $l(M,\vec{s})$， $\vec{s}=\{a,b,c\}$

已知平面 π 的法向量 $\vec{n}=\{3,2,-2\}$，由题意 $3a+2b-2c=0$ ………(1) ……3 分

已知直线 $L(P,\vec{s}_1)$，$P(-1,1,0)$，$\vec{s}_1=\{1,2,3\}$，由题意

$[\overrightarrow{PM},\vec{s}_1,\vec{s}]=0$，得 $-5a-2b+3c=0$ ………(2) ……3 分

由(1),(2)得 $b=\dfrac{a}{2},c=2a$，……2 分

取 $\vec{s}=\{2,1,4\}$，所求直线为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{4}$ ……2 分

另解 先求出过 M 点平行于已知平面的平面与已知直线的交点 $N(-3,-3,-6)$

得 分

六、(本题 12 分) 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知方程组 $AX=b$ 有无穷多解，(1)求 λ, a 的值；(2)求方程组 $AX=b$ 的通解.

解 (1)因为 $AX=b$ 有无穷多解，所以 $r(A,b)=r(A)<3$ ……2 分

由 $|A|=0$ 得 $(\lambda-1)(\lambda^2-1)=0$，所以 $\lambda=\pm1$ ……3 分

当 $\lambda=1$ 时，$(A,b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1-a\end{pmatrix}$，$r(A,b)\neq r(A)$，故 $\lambda\neq1$

……2 分

当 $\lambda=-1$ 时，$(A,b)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2+a\end{pmatrix}$，$\because r(A,b)=r(A)$，

$\therefore a=-2$ ……2 分

(2) $\lambda=-1$，$a=-2$ 时，$(A,b)\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 & 3/2\\ 0 & 1 & 0 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

$AX=$ l的通解为 $x=k(1,0,1)^T+(\frac{3}{2},\frac{-1}{2},0)^T$ ……3 分

得 分

七、(本题 12 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_3$，求一个正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形，并指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 代表的二次曲面的名称.

解 二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & -2\end{pmatrix}$，令 $|A-\lambda I|=0$，即

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=0$$，得 $\lambda_1=\lambda_2=2,\quad \lambda_3=-3$ ……4 分

对 $\lambda_1=\lambda_2=2$，解方程 $(A-2I)x=0$，其中 $A-2I=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

得 $\xi_1=\left(2,0,-1\right)^T$，　$\xi_2=\left(0,1,0\right)^T$，两者正交.

对 $\lambda_3=-3$，解方程 $(A+3I)x=0$，其中 $A+3I=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

得 $\xi_3=\left(1,0,2\right)^T$， ……4 分

由于 ξ_1,ξ_2,ξ_3 两两正交，取 $Q=(\xi_1^0,\xi_2^0,\xi_3^0)=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & 0 & \frac{1}{\sqrt5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt5} & 0 & \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix}$， ……2 分

则正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形 $2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$ ……1 分

$f(x_1,x_2,x_3)=1$ 代表单叶双曲面. ……1 分

得 分

八、（本题 6 分）设 λ_1,λ_2 为矩阵 A 的不同特征值，对应 λ_1,λ_2 的特征向量分别为 α_1,α_2，试证明：$\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是 $\lambda_2\neq 0$.

证 由题意 $A(\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha_1+A\alpha_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$

$\because \lambda_1\neq\lambda_2$，　$\therefore \alpha_1,\alpha_2$ 线性无关 ……2 分

$\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关 $\Leftrightarrow k_1\alpha_1+k_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$ 当且仅当 $k_1=k_2=0$ 成立

$\Leftrightarrow (k_1+k_2\lambda_1)\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0$ 当且仅当 $k_1=k_2=0$ 成立

$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1+k_2\lambda_1=0 \\ k_2\lambda_2=0 \end{cases}$ 仅有零解 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow \lambda_2\neq 0$ ……4 分