概率论与数理统计 默写题

nkid00 2024 年 7 月 3 日

本作品采用 "CC BY-SA 4.0"许可协议进行许可. 欢迎传播.



1 随机事件及其概率



2 随机变量及其分布

$$F\left(x\right)=P\left(\begin{array}{c} \mathbf{9} \\ \end{array}\right)=\int \begin{array}{c} \mathbf{10} \\ \\ F\left(+\infty\right)=\int \begin{array}{c} \mathbf{11} \\ \end{array}$$

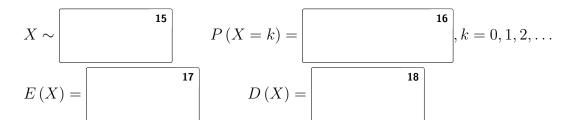
0-1 分布

$$P(X = 0) = 1 - p$$
 $P(X = 1) = p$

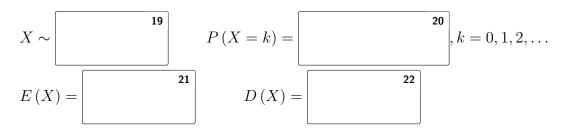
$$E\left(X\right) = \boxed{ }$$

$$D\left(X\right) = \boxed{ 14}$$

二项分布



泊松分布

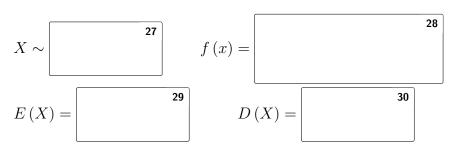


几何分布

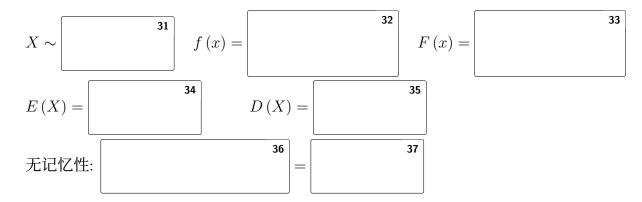
$$X \sim \boxed{ 23 } \qquad P\left(X=k\right) = \boxed{ 24 }, k=1,2,\dots$$

$$E\left(X\right) = \boxed{ D\left(X\right) = \boxed{ 26 } }$$

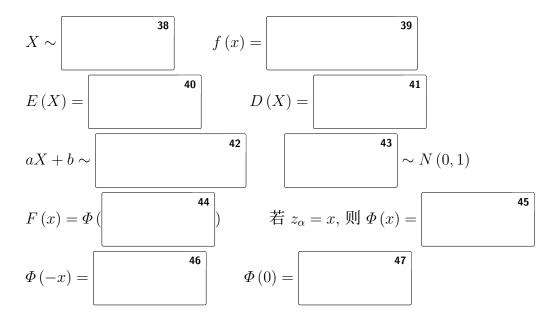
均匀分布



指数分布

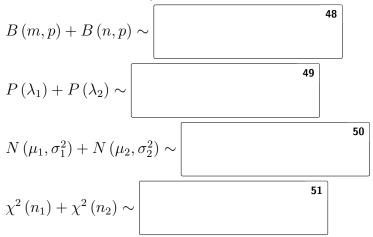


正态分布

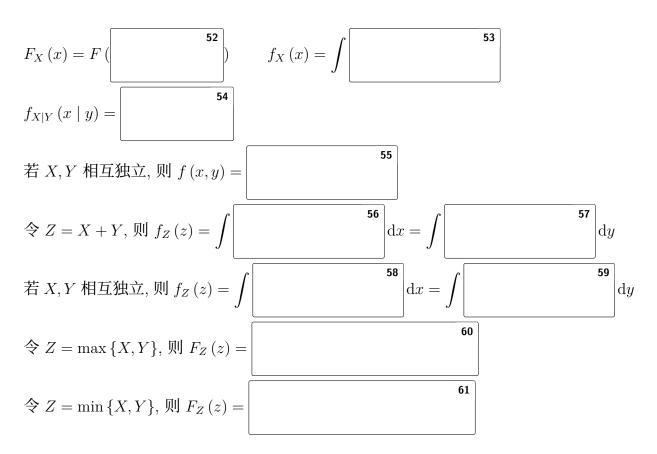


可加性

若两个分布相互独立,则



3 多维随机变量及其分布

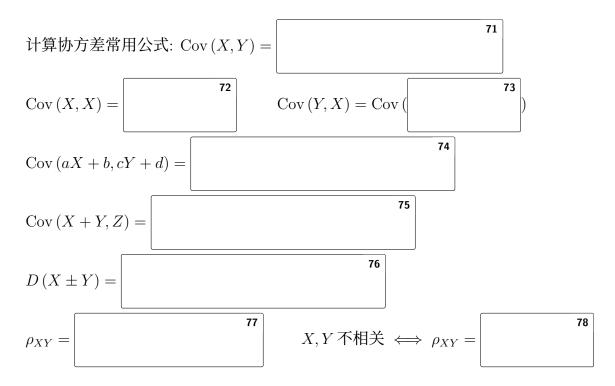


4 随机变量的数字特征

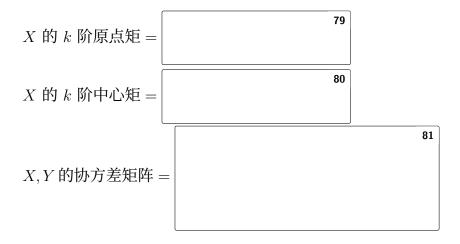
数学期望

方差

协方差与相关系数



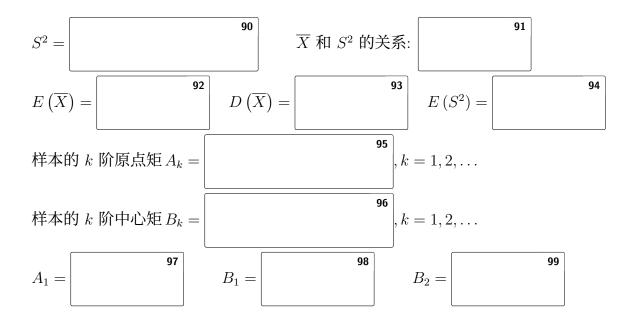
矩与协方差矩阵



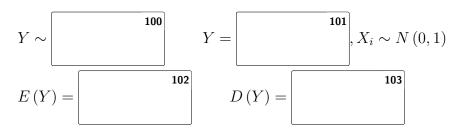
5 大数定律与中心极限定理

83 切比雪夫不等式: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 有 P($) \leqslant$ 84 大数定律: 对于期望均为 μ 的 X_i 和任意 $\varepsilon > 0$, 有 = 1,85 86 即 独立同分布中心极限定理: 对于独立同分布, 期望为 μ , 方差为 σ^2 的 X_i , 87 88 近似 有 89 棣莫弗-拉普拉斯定理: 当 n 充分大时, 有 $B\left(n,p\right)\overset{\text{LO}}{\sim}$

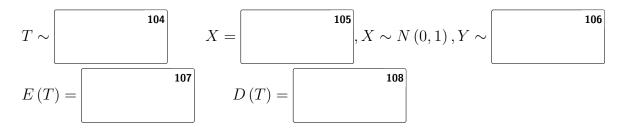
6 样本及抽样分布



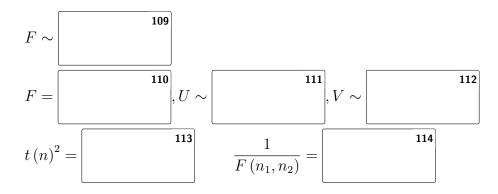
χ^2 分布



t 分布

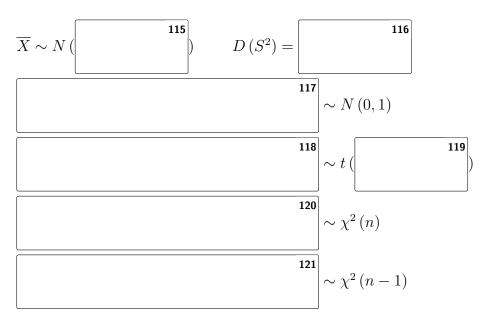


F 分布



正态总体的抽样分布

对于 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$,



7 参数估计

题意	枢轴量	双侧置信区间	单侧置信限
估 μ , 已知 σ^2	122	123	124
估 μ, 未知 σ²	125	126	127
估 σ^2 , 已知 μ	128	129	130
估 σ ² , 未知 μ	131	132	133

8 假设检验

原假设 H ₀	题意	检验统计量	拒绝域
$\mu = \mu_0$		134	135
$\mu \leqslant \mu_0$	已知 σ^2		136
$\mu \geqslant \mu_0$			137
$\mu = \mu_0$		138	139
$\mu \leqslant \mu_0$	未知 σ²		140
$\mu \geqslant \mu_0$			141

原假设 H ₀	题意	检验统计量	拒绝域
$\sigma^2 = \sigma_0^2$		142	143
$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$	- 已知 μ		144
$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$			145
$\sigma^2 = \sigma_0^2$		146	147
$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$	未知 μ		148
$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$			149

概率论与数理统计 默写题 答案

nkid00 2024 年 7 月 3 日

本作品采用 "CC BY-SA 4.0"许可协议进行许可. 欢迎传播.



1 随机事件及其概率

对立事件的概率
$$P(\overline{A}) = \begin{bmatrix} 1 - P(A) \end{bmatrix}$$
 若 A, B 独立, 则 $P(AB) = \begin{bmatrix} P(A)P(B) \end{bmatrix}$ 已知 $P(A), P(B), P(AB)$, 则 $P(A \cup B) = \begin{bmatrix} P(A) + P(B) - P(AB) \end{bmatrix}$ 日知 $P(A), P(AB)$, 则 $P(A - B) = \begin{bmatrix} P(A) - P(AB) \end{bmatrix}$ 5 日知 $P(A), P(AB)$, 则 $P(AB) = \begin{bmatrix} P(A) - P(AB) \end{bmatrix}$ 6 日知 $P(A), P(B \mid A)$, 则 $P(AB) = \begin{bmatrix} P(A)P(B \mid A) \end{bmatrix}$ 6 日知 $P(B), P(AB)$, 则 $P(A \mid B) = \begin{bmatrix} P(AB) & 7 \\ P(B) & P(A) \end{bmatrix}$ 6 日知 $P(A), P(B), P(A \mid B)$, 则 $P(A \mid B) = \begin{bmatrix} P(B)P(A \mid B) & 7 \\ P(A) & P(A) \end{bmatrix}$ 7

2 随机变量及其分布

$$F(x) = P\left(\begin{array}{c} X \leqslant x \end{array}\right) = \int_{-\infty}^{x} f(x) dx$$

$$F(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \begin{bmatrix} 11 \\ -\infty \end{bmatrix}$$

0 - 1 分布

$$P(X = 0) = 1 - p$$
 $P(X = 1) = p$

$$E\left(X\right) = \boxed{ \qquad p \qquad \qquad} D\left(X\right) = \boxed{ \qquad p\left(1-p\right)}$$

$$D\left(X\right) = p\left(1-p\right)$$

二项分布

$$X \sim \begin{bmatrix} B(n,p) & \mathbf{15} \\ B(n,p) & P(X=k) = \begin{bmatrix} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \mathbf{16} \\ D(X) = \begin{bmatrix} \mathbf{17} & \mathbf{18} \\ np & D(X) = \end{bmatrix}, k = 0, 1, 2, \dots$$

泊松分布

$$X \sim \boxed{\begin{array}{c|c} P\left(\lambda\right) & \mathbf{19} \\ P\left(X=k\right) = \boxed{\begin{array}{c|c} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} & \mathbf{20} \\ \hline \end{array}}, k=0,1,2,\dots$$

$$E\left(X\right) = \boxed{\begin{array}{c|c} \lambda & \mathbf{21} \\ \hline \end{array}}$$

几何分布

$$X \sim \boxed{\begin{array}{c} \textbf{23} \\ \textbf{G}\left(p\right) \end{array}} \qquad P\left(X=k\right) = \boxed{\begin{array}{c} (1-p)^{k-1} p \end{array}}, k=1,2,\dots$$

$$E\left(X\right) = \boxed{\begin{array}{c} \frac{1}{p} \end{array}} \qquad \textbf{25} \qquad D\left(X\right) = \boxed{\begin{array}{c} \frac{1-p}{p^2} \end{array}} \qquad \textbf{26}$$

均匀分布

$$X \sim \boxed{\begin{array}{c} U\left(a,b\right) \\ \end{array}} \qquad f\left(x\right) = \boxed{ \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & 其他 \end{cases} }$$

$$E\left(X\right) = \boxed{\begin{array}{c} \frac{a+b}{2} \\ \end{array}} \qquad D\left(X\right) = \boxed{\begin{array}{c} \frac{(b-a)^2}{12} \\ \end{array}} \qquad 30$$

指数分布

$$X \sim \begin{bmatrix} E(\lambda) \end{bmatrix} \qquad f(x) = \begin{bmatrix} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 & 32 \\ 0 & 其他 \end{bmatrix} \qquad F(x) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 & 33 \\ 0 & 其他 \end{bmatrix}$$

$$E(X) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & 34 & D(X) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 35 & 37 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} & 37 & 37 \end{bmatrix}$$
无记忆性:
$$P(X > s + t \mid X > s) = \begin{bmatrix} P(X > t) & 37 & 37 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} & 37 & 37 \end{bmatrix}$$

正态分布

可加性

若两个分布相互独立,则

$$B(m,p) + B(n,p) \sim \begin{bmatrix} & \mathbf{48} \\ B(m+n,p) & & \\ & & \\ P(\lambda_1) + P(\lambda_2) \sim \begin{bmatrix} & \mathbf{49} \\ & \\ P(\lambda_1 + \lambda_2) & & \\ & & \\ N(\mu_1, \sigma_1^2) + N(\mu_2, \sigma_2^2) \sim \begin{bmatrix} & N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \\ & & \\ \chi^2(n_1) + \chi^2(n_2) \sim \begin{bmatrix} & \mathbf{51} \\ & \chi^2(n_1 + n_2) & & \\$$

3 多维随机变量及其分布

$$F_{X}(x) = F\left(\begin{array}{c} x, +\infty \\ \end{array}\right) \qquad f_{X}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}y \qquad 53$$

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \left(\begin{array}{c} \frac{f(x, y)}{f_{Y}(y)} \\ \end{array}\right) \qquad f_{X}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}y \qquad 55$$

$$\stackrel{+\infty}{\Rightarrow} X, Y \text{ 相互独立}, \, \text{则 } f(x, y) = \left(\begin{array}{c} f(x, y) \\ f(x, y) \\ \end{array}\right) \qquad f_{X}(x) f_{Y}(y) \qquad 55$$

$$\stackrel{+\infty}{\Rightarrow} Z = X + Y, \, \text{则 } f_{Z}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y) \, \mathrm{d}y \qquad 57$$

$$\stackrel{+\infty}{\Rightarrow} X, Y \text{ 相互独立}, \, \text{则 } f_{Z}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X}(x) f_{Y}(z - x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X}(z - y) f_{Y}(y) \, \mathrm{d}y \qquad 59$$

$$\stackrel{+\infty}{\Rightarrow} Z = \max\{X, Y\}, \, \text{则 } F_{Z}(z) = \left(\begin{array}{c} F_{X}(z) F_{Y}(z) \\ \end{array}\right) \qquad 60$$

$$\stackrel{+\infty}{\Rightarrow} Z = \min\{X, Y\}, \, \text{则 } F_{Z}(z) = \left(\begin{array}{c} 1 - [1 - F_{X}(z)] [1 - F_{Y}(z)] \\ \end{array}\right) \qquad 61$$

4 随机变量的数字特征

数学期望

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

$$E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y) dxdy$$
令常数 C , 则 $E(C) = \begin{bmatrix} C \\ C \end{bmatrix}$

$$E(aX + bY + c) = \begin{bmatrix} aE(X) + bE(Y) + c \\ 66 \end{bmatrix}$$
若 X, Y 不相关, 则 $E(XY) = \begin{bmatrix} E(X) E(Y) \\ C \end{bmatrix}$

方差

计算方差常用公式:
$$D(X) = \begin{bmatrix} E(X^2) - E(X)^2 \end{bmatrix}$$
 令常数 C , 则 $D(C) = \begin{bmatrix} 0 & 69 \\ 0 & D(aX + b) = \end{bmatrix}$ $a^2D(X)$

协方差与相关系数

计算协方差常用公式:
$$Cov(X,Y) = \begin{bmatrix} E(XY) - E(X)E(Y) \end{bmatrix}$$

$$Cov(X,X) = \begin{bmatrix} D(X) \end{bmatrix}$$

$$Cov(Y,X) = Cov(\begin{bmatrix} X,Y \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Cov(aX + b, cY + d) = \begin{bmatrix} ac Cov(X,Y) \end{bmatrix}$$

$$Cov(X + Y,Z) = \begin{bmatrix} Cov(X,Z) + Cov(Y,Z) \end{bmatrix}$$

$$D(X \pm Y) = \begin{bmatrix} D(X) + D(Y) \pm 2 Cov(X,Y) \end{bmatrix}$$

$$\rho_{XY} = \begin{bmatrix} \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \end{bmatrix}$$

$$X,Y$$

$$X,Y$$

$$Zov(X,Y) = \begin{bmatrix} Ov(X,Y) & 77 \\ \hline 0 & 78 \\ \hline 0 &$$

矩与协方差矩阵

$$X$$
 的 k 阶原点矩 =
$$E\left(X^k\right)$$

$$X$$
 的 k 阶中心矩 =
$$E\left(\left[X - E\left(X\right)\right]^k\right)$$

$$X, Y$$
 的协方差矩阵 =
$$\begin{pmatrix}D\left(X\right) & \operatorname{Cov}\left(X,Y\right)\\\operatorname{Cov}\left(Y,X\right) & D\left(Y\right)\end{pmatrix}$$

5 大数定律与中心极限定理

切比雪夫不等式: 对于任意 $\varepsilon > 0$,有 $P\left(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon \right) \leqslant \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ 83

大数定律: 对于期望均为 μ 的 X_i 和任意 $\varepsilon > 0$, 有 $\left| \lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| < \varepsilon \right)^{84} \right| = 1$

即
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_{i}$$
 85
$$\mu$$

独立同分布中心极限定理: 对于独立同分布, 期望为 μ , 方差为 σ^2 的 X_i ,

有
$$\sum_{i=1}^{n} X_{i}$$
 87 $\sum_{i=1}^{n} W(n\mu, n\sigma^{2})$ 88

棣莫弗-拉普拉斯定理: 当 n 充分大时, 有 $B\left(n,p\right)\overset{\text{近}(0)}{\sim}$

$$N\left(np,np\left(1-p\right) \right)$$

6 样本及抽样分布

χ^2 分布

$$Y \sim \begin{bmatrix} \chi^{2}(n) & \mathbf{100} \\ \chi^{2}(n) & Y = \begin{bmatrix} X_{1}^{2} + \dots + X_{n}^{2} \\ X_{1} + \dots + X_{n} \end{bmatrix}, X_{i} \sim N(0, 1)$$

$$E(Y) = \begin{bmatrix} \mathbf{103} \\ N \end{bmatrix}$$

$$D(Y) = \begin{bmatrix} \mathbf{103} \\ 2n \end{bmatrix}$$

t 分布

$$T \sim \begin{bmatrix} & \mathbf{104} \\ & t\left(n\right) & & X = \begin{bmatrix} & X & \mathbf{105} \\ & \sqrt{Y/n} & & \end{bmatrix}, X \sim N\left(0,1\right), Y \sim \begin{bmatrix} & \mathbf{106} \\ & \chi^{2}\left(n\right) & & \\ & & & \\$$

F 分布

$$F \sim \boxed{F(n_1, n_2)}^{109}$$

$$F = \boxed{\frac{U/n_1}{V/n_2}}^{110}, U \sim \boxed{\chi^2(n_1)}^{111}, V \sim \boxed{\chi^2(n_2)}^{112}$$

$$t(n)^2 = \boxed{F(1, n)}^{113} \qquad \frac{1}{F(n_1, n_2)} = \boxed{F(n_2, n_1)}^{114}$$

正态总体的抽样分布

对于
$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$
,

$$\overline{X} \sim N\left(\begin{array}{cc} \mu, \frac{\sigma^2}{n} & ^{\mathbf{115}} \end{array}\right) \qquad D\left(S^2\right) = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma^4}{n-1} & ^{\mathbf{116}} \\ \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} & ^{\mathbf{117}} \\ & \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} & ^{\mathbf{118}} \\ & \sim N\left(0,1\right) \\ \\ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \mu\right)^2 & ^{\mathbf{120}} \\ & \sim \chi^2\left(n\right) \\ \\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \quad \overline{\mathbb{R}} \quad \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2 & ^{\mathbf{121}} \\ & \sim \chi^2\left(n-1\right) \\ \end{array}$$

7 参数估计

题意	枢轴量	双侧置信区间	单侧置信限
估 μ, 已知 σ²	$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$	$\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$	$\overline{\mu} = \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}, \underline{\mu} = \overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}$
估 μ, 未知 σ²	$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t (n - 1)$	$\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} (n-1), \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} (n-1)\right)$	$\overline{\mu} = \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha} (n-1),$ $\underline{\mu} = \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha} (n-1)$
估 σ², 已知 μ	$\chi^{2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \mu)^{2}}{\sigma^{2}} \sim \chi^{2}(n)$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)}\right)$	$\overline{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n)},$ $\underline{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha}^2(n)}$
估 σ², 未知 μ	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2 (n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\right)$	$\overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2 (n-1)},$ $\underline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha}^2 (n-1)}$

8 假设检验

原假设 H ₀	题意	检验统计量	拒绝域
$\mu = \mu_0$		134	$ z \geqslant z_{\alpha/2}$
$\mu \leqslant \mu_0$	已知 σ²	$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$	$z\geqslant z_{lpha}$
$\mu \geqslant \mu_0$			$z\leqslant -z_{\alpha}$
$\mu = \mu_0$		138	$ t \geqslant t_{\alpha/2}\left(n-1\right)$
$\mu \leqslant \mu_0$	未知 σ²	$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$	$t\geqslant t_{\alpha}\left(n-1\right)$
$\mu \geqslant \mu_0$			$t \leqslant -t_{\alpha} \left(n-1 \right)$

原假设 H ₀	题意	检验统计量	拒绝域
$\sigma^2 = \sigma_0^2$		142	$\chi^{2} \geqslant \chi^{2}_{\alpha/2}(n) $ 或 $\chi^{2} \leqslant \chi^{2}_{1-\alpha/2}(n)$
$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$	已知 μ	$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$	$\chi^{2} \geqslant \chi_{\alpha}^{2} \left(n \right)$
$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$			$\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha}\left(n\right)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$		146	$\chi^{2} \geqslant \chi^{2}_{\alpha/2} (n-1) \ $
$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$	 未知 μ	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha \left(n - 1 \right)$
$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$			$\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha} \left(n - 1 \right)$