第七章　二次型

7.1　二次型

7.2　二次型的标准形

7.3　正定二次型

8.1-8.2　实二次型及其标准形

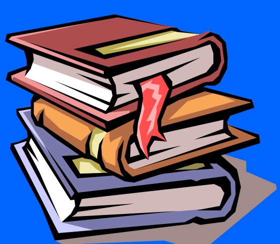
一、二次型及其矩阵

二、合同变换

三、用正交变换化二次型为标准形

四、用配方法化二次型为标准形

五、一般二次曲面的化简



一、二次型及其矩阵

引例1　计算

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+\underbrace{2a_{12}}_{(a_{12}+a_{21})}x_1x_2+\underbrace{2a_{13}}_{(a_{13}+a_{31})}x_1x_3+\underbrace{2a_{23}}_{(a_{23}+a_{32})}x_2x_3$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

一、二次型及其矩阵

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\begin{aligned}= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ + \cdots\cdots \\ + a_{nn}x_n^2\end{aligned}$$

称为 n 元二次型.

若a_{ij}为实数，则称为实二次型.

若a_{ij}为复数，则称为复二次型.

返回

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$

$$a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$+ a_{nn}x_n^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

二次型的矩阵表示

$$= (x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

$$= x^{\mathrm{T}}Ax, \quad (A^{\mathrm{T}} = A)$$

二次型的矩阵表示:

$$f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax, \quad (A^{\mathrm{T}} = A)$$

其中 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $a_{ij} = a_{ji}$,

对称矩阵 A 称为二次型 $f(x_1, \dots, x_n)$ 的矩阵;

对称矩阵 A 的秩称为二次型 $f(x_1, \dots, x_n)$ 的秩.

例1

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 3x_2x_3$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x^{\mathrm{T}} A x$$

因 $R(A) = 3$,

故 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的秩为 3 .

二、 二次型的标准形

1、二次型的标准形、规范形

只含平方项的二次型

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\dots+d_r y_r^2 \quad (d_i \neq 0)$$

称为 **标准形 (或法式)**.

形如

$$z_1^2+\dots+z_p^2-z_{p+1}^2-\dots-z_r^2$$

的二次型称为 **规范形**.

返回

二次型 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ ·········· $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

正交变换 $C^{\mathrm{T}}AC=C^{-1}AC=\Lambda$

标准形 $g(y)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\ldots+d_ny_n^2$

·········· $\Lambda=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$

可逆变换 $C^{\mathrm{T}}AC=S$

规范形 $h(z)=z_1^2+\ldots+z_p^2-z_{p+1}^2-\ldots-z_r^2$

·········· $S=\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$

返回

2. 线性变换

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \qquad (1)$$

(1)式称为从 $y_1, \ldots, y_n$ 到 $x_1, \ldots, x_n$ 的线性变换.

令 $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

则(1)式可记为

$$x = C y \qquad (2)$$

若C为满秩矩阵，则(2)式称为满秩变换(可逆变换)；

若C为正交矩阵，则(2)式称为正交变换.

当C可逆时，(2)式又可记为

$$y = C^{-1} x \qquad (3)$$

对于二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$，若令$x=Cy$ (C可逆),则

$$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax \overset{x=Cy}{=\!=\!=\!=\!=\!=} y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)y=g(y)$$

定理 1 对于任意一个实二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 经过一个可逆线性变换 $x=Cy$ 后仍是一个二次型, 并且它的秩不变.

$$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax=y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)y=g(y)$$

$$R(C^{\mathrm{T}}AC)=R(A)$$

返回

2. 矩阵合同

定义 对n阶矩阵A, B, 若存在可逆矩阵C, 使

$$C^{\mathrm{T}}AC = B,$$

则称 A与 B合同.

矩阵合同具有以下性质：

(1) 反身性； (2) 对称性； (3) 传递性.

A与B等价：$PAQ = B$,　P, Q 可逆；

A与B相似：$P^{-1}AP = B$，　P 可逆；

A与B合同：$P^{\mathrm{T}}AP = B$，　P 可逆；

请思考：矩阵合同与等价、相似有何关系？

对于二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$，若令$x=Cy$ (C可逆),则

$$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax \xlongequal{x=Cy} y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)y=g(y)$$

$$\xlongequal{?} \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2 \quad \boxed{\text{标准形}}$$

即：对一个实对称矩阵A，能否找到可逆矩阵C,使得

$C^{\mathrm{T}}AC=\mathrm{diag}$（$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$）?

定理2 任一 n 元实二次型 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$ 都可用正交变换 $x = Cy$ 化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 A 的特征值.

证 因A 为n 阶实对称矩阵,

故存在正交矩阵C, 使

$$C^{\mathrm{T}}AC = C^{-1}AC = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

令 $x = Cy$, 则

$$f(x) = y^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}}ACy = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

对于二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$，若令 $x=Cy$（C可逆），则

$$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax \overset{x=Cy}{=\!=\!=\!=} y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)y=g(y)$$

$$\overset{\text{正交变换}}{=\!=\!=\!=} \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2 \quad \boxed{\text{标准形}}$$

$$\overset{\text{可逆变换}}{=\!=\!=\!=} y_1^2+\dots+y_p^2-y_{p+1}^2-\dots-y_r^2$$

$$\boxed{\text{规范形}}$$

即：对一个实对称矩阵A，能否找到可逆矩阵C，使得

$$C^{\mathrm{T}}AC=\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}?$$

惯性定理 设有实二次型 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$，它的秩为 r，有两个实可逆变换 $x = Cy$ 及 $x = Pz$，使

$$f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \ldots + k_ry_r^2 \quad (k_i \neq 0,\ i = 1,\ldots r)$$

及 $$f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 \quad (\lambda_i \neq 0,\ i = 1,\ldots,r)$$

则 $k_1, k_2, \ldots, k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ 中正数的个数相等。（§8.3 定理 4）

二次型的标准形显然不是唯一的，只是标准形中所含项数是确定的（即二次型的秩）；不仅如此，在限定变换为实满秩线性变换时，标准形中正系数的个数是不变的(从而负系数的个数也不变).

◀ ▶ 返回

惯性定理　对于任意一个实二次型, 总可以经过一个适当的**可逆线性变换** $x = Cy$ 化成**规范形**:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2$$

且规范形是唯一的.

r: 二次型的秩

p: 正惯性指数

$r - p$: 负正惯性指数

$|r - 2p|$: 符号差

惯性定理　对于任意一个实二次型, 总可以经过一个适当的**可逆线性变换** $x = Cy$ 化成**规范形**:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2$$

且规范形是唯一的.

定理2　任一 n 元实二次型 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$ 都可用**正交变换** $x = Cy$ 化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 A 的特征值.

三、用正交变换化二次型为标准形

例2 用正交变换化二次型为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

解： $f(x_1, x_2, x_3)$的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+7)$$

特征值：$\lambda_1 = 2$（二重特征值），$\lambda_2 = -7$,

返回

求$\lambda_1 = 2$的特征向量：

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$

特征向量：$\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T$， $\alpha_2 = (2, 0, 1)^T$

将α_1, α_2正交化：

$$\beta_1 = \alpha_1 = (-2, 1, 0)^T,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \text{L} = \frac{1}{5}(2, 4, 5)^T$$

◀ ▶ 返回

求λ_1= -7 的特征向量：

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 4 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，\text{即} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} x_3, \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

特征向量： $\alpha_3 = (1, 2, 2)^{\mathrm{T}}$，

将 β_1, β_2，α_3 单位化：

$$\gamma_1 = \frac{1}{|\beta_1|}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T,$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{|\beta_2|}\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}(2, 4, 5)^{\mathrm{T}}$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{|\alpha_3|}\alpha_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)^T$$

令 $C=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3\sqrt{5}} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{4}{3\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{5}{3\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$

$x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, $y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$

则 $x=Cy$ 为正交变换，且

$$f = 2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$$

用正交变换化二次型为标准形的具体步骤

1. 将二次型表成矩阵形式$f = x^T Ax$,求出A;

2. 求出A的所有特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$;

3. 求出对应于特征值的特征向量$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$;

4. 将特征向量$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$正交化,单位化,得 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$,记$C = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$;

5. 作正交变换$x = Cy$,则得f的标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

上页 下页 返回

例2 将二次型

$$f=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

通过正交变换 $x=Py$,化成标准形.

解 1．写出对应的二次型矩阵，并求其特征值

$$A=\begin{pmatrix}17 & -2 & -2\\ -2 & 14 & -4\\ -2 & -4 & 14\end{pmatrix}$$

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{pmatrix}17-\lambda & -2 & -2\\ -2 & 14-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 14-\lambda\end{pmatrix}=(\lambda-18)^2(\lambda-9)$$

从而得特征值 $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 18.$

2．求特征向量

将 $\lambda_1 = 9$ 代入 $(A - \lambda E)x = 0$，得基础解系

$$\xi_1 = (1/2,1,1)^T.$$

将 $\lambda_2 = \lambda_3 = 18$ 代入 $(A - \lambda E)x = 0$，得基础解系

$$\xi_2 = (-2,1,0)^T,\ \xi_3 = (-2,0,1)^T.$$

3．将特征向量正交化

取 $\alpha_1 = \xi_1, \alpha_2 = \xi_2, \alpha_3 = \xi_3 - \dfrac{[\alpha_2,\xi_3]}{[\alpha_2,\alpha_2]}\alpha_2,$

得正交向量组

$$\alpha_1 = (1/2,1,1)^T,\quad \alpha_2 = (-2,1,0)^T,$$

$$\alpha_3 = (-2/5,-4/5,1)^T.$$

4．将正交向量组单位化，得正交矩阵 P

令 $\eta_i = \dfrac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}, \quad (i = 1,2,3),$

得 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{45} \\ -4/\sqrt{45} \\ 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$

所以 $P = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$

于是所求正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

且有 $f = 9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2.$

例3 求一个正交变换$x = Py$，把二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

化为标准形.

解

二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

它的特征多项式为

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

计算特征多项式：把二,三,四列都加到第一列上,有

$$|A-\lambda E| = (-\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix},$$

把二,三,四行分别减去第一行,有

$$\left|A-\lambda E\right| = (-\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -\lambda-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda+1)^2\begin{vmatrix} -\lambda-1 & -2 \\ -2 & -\lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda+1)^2(\lambda^2+2\lambda-3) = (\lambda+3)(\lambda-1)^3.$$

于是A的特征值为$\lambda_1=-3, \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1.$

当$\lambda_1=-3$时,解方程$(A+3E)x=0,$

上页 下页 返回

得基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, 单位化即得$p_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

当$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$时,解方程$(A-E)x=0$,

可得正交的基础解系

$$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

单位化即得$p_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, p_4=\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2\\-1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2\\-1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2\\1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

且有 $f=-3y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2.$

用正交变换化二次型为标准形的步骤:

(1) 写出实对称矩阵A，使得 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$;

(2) 求出A的特征值、特征向量、正交对角化的正交矩阵 C ;

(3) $$f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax \overset{x=Cy}{=\!=\!=\!=} f(y) = y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)y = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2$$

正交变换的应用——二次曲面的化简

1. 正交变换 $x = Cy$ (C 为正交阵)，具有保持长度、内积、夹角不变等特点，从而具有保持几何形状不变的优点，故在实际应用中由广泛应用。

2. 正交变换是不唯一的，但正交变换所得到的标准形是唯一的（若不考虑对角元的次序的话）。

例3 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+kx_2^2+x_3^2+2x_2x_3$，

(1) 当 k 满足什么条件时, $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示椭球面?

(1) 当 k 满足什么条件时, $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示柱面?

解 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&1\\0&1&1\end{pmatrix}$,

$$|\lambda I-A|=(\lambda-1)\left[\lambda^2-(k+1)\lambda+(k-1)\right],$$

$$\Rightarrow\quad \lambda_1=1,\quad \lambda_2+\lambda_3=k+1,\quad \lambda_2\lambda_3=k-1$$

知存在正交变换 $x=Cy$, 使得

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$$

返回

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示椭球面

$\Leftrightarrow \lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2=1$ 表椭球面

$\Leftrightarrow A$ 的特征根全为正

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 > 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 = k+1 > 0, \\ \lambda_2\lambda_3 = k-1 > 0 \end{cases}$$

即 $k>1$.

注：此题无需求特征向量和正交矩阵.

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示柱面

$\Leftrightarrow \lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2=1$ 表柱面

$\Leftrightarrow A$ 的特征根有且仅有一个特征根为零

$\Leftrightarrow k-1=0$ 即 $k=1$.

返回

四、用拉格朗日配方法化二次型为标准形

用正交变换化二次型成标准形，具有保持几何形状不变的优点。

如果不限于用正交变换，那么还可以有多种方法（对应有多个可逆的线性变换）把二次型化成标准形。这里只介绍拉格朗日配方法。下面举例说明这种方法。

拉格朗日配方法的步骤

1. 若二次型含有x_i的平方项，则先把含有x_i的乘积项集中，然后配方，再对其余的变量同样进行，直到都配成平方项为止，经过非退化线性变换，就得到标准形;

2. 若二次型中不含有平方项，但是$a_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$,则先作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ \quad x_k = y_k \end{cases} \quad (k = 1,2,\cdots,n\text{且}k \neq i,j)$$

化二次型为含有平方项的二次型，然后再按1中方法配方.

上页 下页 返回

例1 化二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

为标准形,并求所用的变换矩阵.

解

含有平方项

含有 x_1 的项配方

$$f = \boxed{x_1^2} + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2$$

去掉配方后多出来的项

$$\boxed{- x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3} + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$$

$$=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2+\left(x_2+2x_3\right)^2.$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

$$= y_1^2 + y_2^2.$$

所用变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(|C| = 1 \neq 0\right).$$

例2 化二次型

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

成标准形,并求所用的变换矩阵.

解 由于所给二次型中无平方项，所以

令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ $\left(即 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right)$

代入 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$,

得 $$f=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3.$$

再配方，得

$$f=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2.$$

令 $\begin{cases} z_1=y_1-y_3 \\ z_2=y_2-2y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1=z_1+z_3 \\ y_2=z_2+2z_3, \\ y_3=z_3 \end{cases}$ $\left(即\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right)$

得 $f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2.$

所用变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \quad \left(|C|=-2\neq 0\right).$$

小结

1. 实二次型的化简问题，在理论和实际中经常遇到，通过**在二次型和对称矩阵之间建立一一对应的关系，将二次型的化简转化为将对称矩阵化为对角矩阵**，而这是已经解决了的问题，请同学们注意这种研究问题的思想方法.

2. 实二次型的化简，并不局限于使用正交矩阵，根据二次型本身的特点，可以找到某种运算更快的可逆变换. 下一节，我们将介绍另一种方法——**拉格朗日配方法**.

小结

将一个二次型化为标准形，可以用**正交变换法**，也可以用**拉格朗日配方法**，或者其它方法，这取决于问题的要求．如果要求找出一个正交矩阵，无疑应使用正交变换法；如果只需要找出一个可逆的线性变换，那么各种方法都可以使用．正交变换法的好处是有固定的步骤，可以按部就班一步一步地求解，但计算量通常较大；如果二次型中变量个数较少，使用拉格朗日配方法反而比较简单．需要注意的是，**使用不同的方法，所得到的标准形可能不相同，但标准形中含有的项数必定相同，项数等于所给二次型的秩**．

五、二次曲面的化简

一般的三元二次方程表示什么曲面？如何判定？

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$
$$+ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0 \qquad (1)$$

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, a_{ij} = a_{ji},$

则上式可写成

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + c = 0. \qquad (2)$$

因A为实对称矩阵，故存在正交变换 $x = Cy$, 使得

$$C^{\mathrm{T}}AC = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

即 (2) 式变成

$$\underline{y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)y} + \underline{(b^{\mathrm{T}}C)y} + c = 0. \qquad (3)$$

$$\underline{\lambda_1 y_1^{\,2} + \lambda_2 y_2^{\,2} + \lambda_3 y_3^{\,2}} + \underline{d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3} + c = 0. \qquad (4)$$

因 (4) 式已不含混合项，从而可以通过配方把方程化为易于判断的标准方程.

返回

例 $z = f(x, y) = xy$ 表示什么曲面？

解 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, $|\lambda I - A| = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda + \frac{1}{2})$,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2},$$

存在正交变换 $(x, y)^{\mathrm{T}} = C(x', y')^{\mathrm{T}}$, 使得

$$z = f = \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2$$

因此，$z = xy$ 为双曲抛物面.

返回

思考题

化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$$

为标准形,并写出所作的可逆线性变换.

思考题解答

解 由于所给二次型不含平方项,故令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

有 $$f = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2,$$

再令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = z_3, \end{cases}$

得标准形

$$f=z_1^2-z_2^2-z_3^2,$$

所用可逆线性变换为

$$\begin{cases} x_1=z_1-z_2-z_3, \\ x_2=z_1+z_2-z_3, \\ x_3=z_3. \end{cases}$$