自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

南京邮电大学 2013/2014 学年第一学期

《线性代数与解析几何》期末试卷(A) 参考答案

院(系)________________ 班级____________ 学号____________ 姓名____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总 分
得分										

得 分

一.填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设有四阶矩阵 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，$B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为四维列向量，且已知行列式 $|A|=4$，$|B|=1$，则 $|A+B|=\underline{40}$.

2．设 A 是 4×3 矩阵，且 $r(A)=2$，而 $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $r(AB)=\underline{2}$.

3.空间四点 $A(1,1,1)$，$B(2,3,4)$，$C(1,2,k)$，$D(-1,4,9)$ 共面的充要条件是 $k=\underline{3}$.

4．空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=5\\ x^2+y^2=4z\end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线方程为 $\underline{\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=0\end{cases}}$.

5. 若三阶方阵 A 使得 $A-I,A-2I,A+3I$ 都不可逆，则 $|A+I|=\underline{-12}$

二.选择题（每小题 4 分，20 分）

1．设 A,B 为 n 阶矩阵，则必有　　（ D ）

(A) $|A+B|=|A|+|B|$　(B) $AB=BA$　(C) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$　(D) $|AB|=|BA|$

2．设 A,B 为 n 阶矩阵，且 $(AB)^2=I$，I 为单位矩阵，下列命题错误的是（ B ）

(A) $(BA)^2=I$　(B) $A^{-1}=B$　(C) $r(A)=r(B)$　(D) $A^{-1}=BAB$

3．已知 β_1,β_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解，α_1,α_2 是对应的齐次线性方程组的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则方程组 $Ax=b$ 的通解为　　（ B ）

$(A)\ k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　　$(B)\ k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

$(C)\ k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　　$(D)\ k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

4．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&4\\0&a&7\\0&0&3\end{pmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ 相似，则 a， b 满足　（　C　）

$(A)\ a=-1,b=3$　　$(B)\ a=1,b=-3$　　$(C)\ a=1,b=3$　$(D)\ a=-1,b=-3$

5. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 正定，则 t 的取值范围是（　C　）

（A）$-\sqrt{2}<t<0$　（B）$-2<t<2$　（C）$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$　（D）$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

得 分

三、(本题 10 分)设 $XA=2X+B$，其中 $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&2&-1\end{pmatrix}$，

求 X .

解 由 $XA=2X+B$ 得 $X=B(A-2I)^{-1}$

$$(A-2I\vdots I)=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$X=B(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$$

得 分

四、(本题 10 分) 求向量组 $\alpha_1=(1,1,-1,-1)^T$， $\alpha_2=(0,1,0,-1)^T$，

$\alpha_3=(3,2,-1,-4)^T$， $\alpha_4=(4,5,-2,-7)^T$ 的秩和它的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组表示其余向量.

解

$$\begin{pmatrix}1&0&3&4\\1&1&2&5\\-1&0&-1&-2\\-1&-1&-4&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&3&4\\0&1&-1&1\\0&0&2&2\\0&-1&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&3&4\\0&1&-1&1\\0&0&1&1\\0&0&-2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个极大线性无关组，

$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$

得 分

五、(本题 10 分)

求通过点 $P(2,0,-1)$ 且又通过直线 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ 的平面方程.

解 已知直线过点 $M(-1,0,2)$，方向向量 $\bar{s}=\{2,-1,3\}$，

所求平面的法向量 $\vec{n}\,||\,\overrightarrow{MP}\times\vec{s}=\{-3,-15,-3\}$，取 $\vec{n}=\{1,5,1\}$

所求平面方程为 $(x+1)+5(y-0)+(z-2)=0$，即 $x+5y+z-1=0$

得 分

六、(本题 12 分) λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$ 有唯一解，无解或有无穷多解？当方程组有无穷多解时求其通解.

解 $\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&\lambda&-2\\1&\lambda&1&-2\\\lambda&1&1&\lambda-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&\lambda&-2\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&3\lambda-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&\lambda&-2\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&0&-(\lambda-1)(\lambda+2)&3(\lambda-1)\end{pmatrix}$

(1) 当 $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时, 原方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda=-2$ 时，原方程组无解.

(3) 当 $\lambda=1$ 时, 原方程组有无穷多解， $\bar{A}\to\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

通解为 $x=(-2,0,0)^T+k_1(-1,1,0)^T+k_2(-1,0,1)^T$ ， k_1,k_2 为任意常数.

得 分

七、(本题 12 分)

求一个正交变换 $x=Qy$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 化成标准形，并指出 $f(x_1,x_2,x_3)=4$ 表示的曲面名称.

解 二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，

$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-2\\0&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-5)=0$ 得特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2,\lambda_3=5$

对 $\lambda_1=1$，由 $(\lambda_1 I-A)x=0$ 得 $\xi_1=\left(0,1,-1\right)^T$，单位化得 $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(0,1,-1\right)^T$

对 $\lambda_2=2$，由 $(\lambda_2 I-A)x=0$ 得 $\xi_2=\left(1,0,0\right)^T$，单位化得 $e_2=\left(1,0,0\right)^T$，

对 $\lambda_3=5$，由 $(\lambda_3 I-A)x=0$ 得 $\xi_3=\left(0,1,1\right)^T$，单位化得 $e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(0,1,1\right)^T$

取 $Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，由 $x=Qy$ 得 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$

曲面 $f(x_1,x_2,x_3)=4$ 表示椭球面.

得 分

八、（本题 6 分）

设 n 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，$\alpha$ 是 A 的对应于特征值 λ_1 的单位特征向量，矩阵 $B=A-\lambda_1\alpha\alpha^T$，证明：$B$ 的特征值为 $0,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

证明 因为 A 为 n 阶实对称矩阵，且有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

所以存在正交矩阵 $P=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，使得 $P^TAP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$

因为 α 是 A 对应于特征值 λ_1 的单位特征向量，取 $p_1=\alpha$，且 $(p_i,\alpha)=0,i=2,3,\cdots,n$

$B\alpha = A\alpha - \lambda_1 \alpha\alpha^T \alpha = \lambda_1 \alpha - \lambda_1 \alpha = 0$，所以 0 是 B 的特征值

$Bp_i = Ap_i - \lambda_1 \alpha\alpha^T p_i = \lambda_i p_i - 0 = \lambda_i p_i, i = 2,3,\cdots,n$，所以 $\lambda_i, i = 2,3,\cdots,n$ 也是 B 的特征值

综上，B 的特征值为 $0,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.