第六章　向量空间的正交性

6.3　向量空间的内积

6.4 实对称矩阵的对角化

返回

6.3 向量空间的内积

一、内积

二、向量的正交性

三、施密特正交化方法

四、正交矩阵

一、内积

1. 定义 设 $\alpha=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)^{\mathrm{T}},\ \beta=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)^{\mathrm{T}}$,

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha^{\mathrm{T}}\beta$$

称为 α 与 β 的<u>内积</u>.

2. 性质

(1) 对称性: $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

(2) 线性性: $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$,

$$(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta);$$

$$(\alpha,\beta+\gamma)=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma),\ (\alpha,l\beta)=l(\alpha,\beta),l\in\mathrm{R};$$

(3) 正定性: $(\alpha,\alpha)\geq 0$, 当且仅当 $\alpha=0$ 时等号成立.

返回

3. 长度

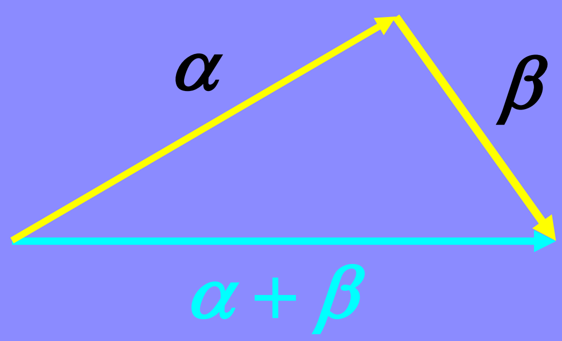
(1) 定义 $|\alpha| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$

(2) 性质

1^o 非负性 $|\alpha| \geq 0$;

2^o 齐次性 $|k\alpha| = |k||\alpha|$;

3^o 三角不等式 $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.



证明：考虑两边平方，后用 Cauchy-Schwarz 不等式

返回

(3) 单位向量: $|\alpha| = 1$.

设 $\alpha \neq 0$, 令 $\alpha_e = \dfrac{1}{|\alpha|}\alpha$, 向量的单位化

$$|\alpha_e| = \sqrt{(\alpha_e, \alpha_e)} = \sqrt{\frac{1}{|\alpha|^2}(\alpha, \alpha)} = 1.$$

4. 夹角

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}$$: α 与 β 的夹角.

问题: $\left| \dfrac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|} \right| \leq 1$?

返回

- Cauchy--Schwarz不等式：$|(\alpha,\beta)| \le |\alpha||\beta|$，

其中等号成立，当且仅当α与β线性相关.

证 (1) α,β线性无关：$\forall t\in \mathbf{R}$，$t\alpha+\beta\neq \mathbf{0}$，

$$(t\alpha+\beta, t\alpha+\beta)=t^2(\alpha,\alpha)+2t(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)>0,$$

$$\therefore\quad [2(\alpha,\beta)]^2-4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)<0,$$

$$(\alpha,\beta)^2 < |\alpha|^2|\beta|^2,\qquad |(\alpha,\beta)| < |\alpha||\beta|.$$

(2) α,β线性相关：设$\beta=k\alpha$，则

$$(\alpha,\beta)^2=(\alpha,k\alpha)^2=k^2(\alpha,\alpha)^2=(\alpha,\alpha)(k\alpha,k\alpha)$$

$$=|\alpha|^2|\beta|^2,$$

$$|(\alpha,\beta)|=|\alpha||\beta|.$$

二、 向量的正交性

1. 正交向量组

α与β正交：$(\alpha, \beta) = 0$，即$\langle \alpha, \beta \rangle = \dfrac{\pi}{2}$.

规定零向量与任意向量正交.

正交向量组：两两正交且不含零向量 .

标准(规范)正交向量组：单位向量组成的正交向量组.

如：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_3)=(\alpha_2,\alpha_3)=0$$

$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 为正交向量组 .

$\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|},\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|},\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}$为标准正交向量组.

返回

例1 设 A 是 n 阶反对称矩阵，x 是 n 维列向量，且 $Ax=y$，证明：x 与 y 正交．

证 $$(x,y)=x^{\mathrm{T}}y=x^{\mathrm{T}}Ax$$

$$(y,x)=y^{\mathrm{T}}x=(Ax)^{\mathrm{T}}x=x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}x=-x^{\mathrm{T}}Ax,$$

由 $(x,y)=(y,x)$ 可知：

$$(x,y)=0.$$

定理1　正交向量组线性无关．

证　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\ \alpha_s$ 为正交向量组，且

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

则 $\left(\alpha_1,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\right)$

$$=k_1(\alpha_1,\alpha_1)+k_2(\alpha_1,\alpha_2)+\cdots+k_s(\alpha_1,\alpha_s)$$

$$=k_1(\alpha_1,\alpha_1)=0,$$

$\because\ \ (\alpha_1,\alpha_1)>0,\quad \therefore\ \ k_1=0,$

同理：$k_2=k_3=\cdots=k_s=0,$

$\therefore\ \ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关．

注意： 线性无关向量组未必是正交向量组.

例2 已知 $\alpha_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_2 = (1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，求 α_3, 使 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为正交向量组.

解 设 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, 则

$$\begin{cases} (\alpha_1, \alpha_3) = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ (\alpha_2, \alpha_3) = x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

可取 $\alpha_3 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$.

2. 标准正交基

定义 在维数为 r 的向量空间 V 中，如果 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 是正交向量组(必线性无关)，则构成向量空间 V 的一组基，称为 V 的一个正交基.

如果 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 为标准正交向量组，称之为 V 的一个标准(规范)正交基.

正交基：正交向量组构成的一组基

标准(规范)正交基：标准正交向量组构成的一组基

如 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$

是 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基．

又如 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \alpha_3 == \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

是 $\mathbf{R}^3$ 的标准正交基．

三、施密特正交化方法

任一线性无关向量组都可标准正交化．

例　设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，试确定与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等价的正交向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$．

令 $\beta_1 = \alpha_1$，$\beta_2 = \alpha_2 + k\beta_1$，选择适当的 k，使 $(\beta_1, \beta_2) = 0$，即

$$(\alpha_2 + k\beta_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_1) + k(\beta_1, \beta_1) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad k = -\frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)},$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 .$$

返回

令 $\beta_3=\alpha_3+k_1\beta_1+k_2\beta_2$,

由 $(\beta_1,\beta_3)=(\beta_2,\beta_3)=0$, 则可推出

$$k_1=-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)},\quad k_2=-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)},$$

于是 $\beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$,

β_1,β_2,β_3 是与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价的正交向量组 .

$\dfrac{\beta_1}{|\beta_1|},\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|},\dfrac{\beta_3}{|\beta_3|}$ 是与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价的标准正交向量组

施密特正交化过程的“几何理解”

把线性无关向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$标准正交化.

先正交化

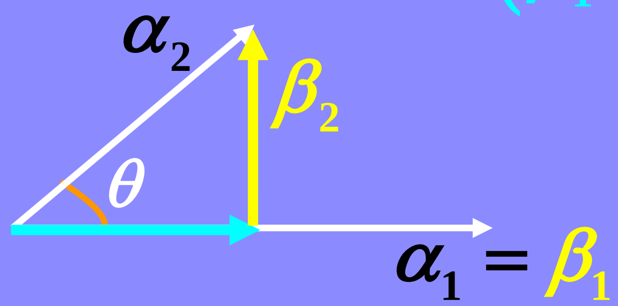
$$\beta_1=\alpha_1;$$

$$\beta_2=\alpha_2-\boxed{\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1};\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

后单位化

$$\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{|\beta_1|}\cdot\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1$$

$$=\mathbf{Prj}_{\beta_1}\alpha_2\cdot\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1$$



返回

施密特正交化过程：

把线性无关向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 标准正交化.

先正交化

$$\beta_1 = \alpha_1;$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1;$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2;$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{(\alpha_s, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_s, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_s, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})}\beta_{s-1}.$$

后

单位化

再令 $\gamma_i = \frac{1}{|\beta_i|}\beta_i \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$,

则 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ 为标准正交向量组.

对任意 $k(1 \le k \le s)$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 等价.

返回

例3 将 $\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 标准正交化.

解 设 $\beta_1=\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}-\frac{4}{3}(1,1,1)^{\mathrm{T}}$$

$$=\frac{1}{3}(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$=\mathrm{L}\ =\frac{1}{2}(-1,0,1)^{\mathrm{T}},$$

返回

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}.$$

注意：将 $\beta = \frac{1}{k}\alpha$ 单位化，只需将 α 单位化即可！

例4 设$\alpha_1=(1,1,1,)^{\mathrm{T}}$，求$\alpha_2,\alpha_3$，使$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为正交向量组．

解 设与α_1正交的向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则

$$(\alpha_1,\alpha)=x_1+x_2+x_3=0$$

法一： 其基础解系为：$\xi_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$．

将ξ_1,ξ_2正交化：

$$\alpha_2=\xi_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},$$

$$\alpha_3=\xi_2-\frac{(\xi_2,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\alpha_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2}(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$$

$$=\frac{1}{2}(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}.$$

例4 设$\alpha_1=(1,1,1,)^{\mathrm{T}}$，求$\alpha_2,\alpha_3$，使$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为正交向量组.

解 设与α_1正交的向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则

$$(\alpha_1,\alpha)=x_1+x_2+x_3=0$$

法二： 可取其正交基础解系为：

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.\quad \begin{matrix}\leftarrow k_1\\ \leftarrow k_2=-(k_1+k_3)\\ \leftarrow k_3\end{matrix}$$

返回

四、正交矩阵

取例3中$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$,记 $A=(\gamma_1\ \ \gamma_2\ \ \gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}\gamma_1{}^{\mathrm{T}}\\ \gamma_2{}^{\mathrm{T}}\\ \gamma_3{}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\gamma_1\ \ \gamma_2\ \ \gamma_3)=I$$

$$AA^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=I$$

返回

定义 若实矩阵 A 满足 $AA^T=A^TA=I$，则称 A 为正交矩阵

充要条件

(1) $A^{-1}=A^T$;

(2) $|A|=\pm 1$; $|A^TA|=|A^T||A|=|A|^2=|I|=1$.

(3) 正交矩阵的乘积也是正交矩阵;

设 $A^TA=AA^T=I$, $B^TB=BB^T=I$，则

$$(AB)^T(AB)=B^TA^TAB=B^TB=I.$$

(4) A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A 的行(列)向量组是标准正交向量组;

(5) A^{-1}, A^T, A^* 都为正交矩阵.

(6) 设 $y=Ax$，则有 $|y|=\sqrt{x^TA^TAx}=|x|$. 长度不变.

(7) A 的特征值为 $\lambda=\pm 1$.

返回

证(4) 设 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$， $A^{\mathrm{T}}=\left(\alpha_1{}^{\mathrm{T}}\quad \alpha_2{}^{\mathrm{T}}\quad \cdots\quad \alpha_n{}^{\mathrm{T}}\right)$，则

$$AA^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_1{}^{\mathrm{T}} & \alpha_1\alpha_2{}^{\mathrm{T}} & \cdots & \alpha_1\alpha_n{}^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2\alpha_1{}^{\mathrm{T}} & \alpha_2\alpha_2{}^{\mathrm{T}} & \cdots & \alpha_2\alpha_n{}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n\alpha_1{}^{\mathrm{T}} & \alpha_n\alpha_2{}^{\mathrm{T}} & \cdots & \alpha_n\alpha_n{}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=I$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i\alpha_i{}^{\mathrm{T}}=1,\quad \alpha_i\alpha_j{}^{\mathrm{T}}=0\left(i\neq j\right).$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha_i,\alpha_i\right)=1,\quad \left(\alpha_i,\alpha_j\right)=0\left(i\neq j\right).$$

证(5) A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A^TA (或 AA^T) $= I$

已知 A 为正交矩阵 $\Rightarrow A^{-1} = A^T$

$\because \quad (A^{-1})^T(A^{-1}) = (A^T)^T A^T = AA^T = I$

$\therefore \quad A^{-1}$ 为正交阵

$\because \quad (A^T)^T(A^T) = AA^T = I$

$\therefore \quad A^T$ 为正交阵

类似地，$\because \quad AA^* = |A| I \quad \Rightarrow A^* = |A| A^{-1}$

$\therefore \quad (A^*)^T A^* = \left(|A| A^{-1}\right)^T \left(|A| A^{-1}\right) = |A|^2 (A^T)^T A^T$

$= I$

$\because |A| = \pm 1$

$\therefore \quad A^*$ 为正交阵

返回

例5 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都是3维实列向量，且

$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$为正交矩阵，

$$\beta_1=\frac{1}{3}(2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3),$$

$$\beta_2=\frac{1}{3}(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3),$$

$$\beta_3=\frac{1}{3}(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3),$$

证明：$B=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$是正交矩阵.

分析：只需证明

$$(\beta_i,\beta_j)=0\,(i\neq j),\quad |\beta_i|=1,(i=1,2,3).$$

返回

证 $\because\quad A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$为正交矩阵，

$$\therefore\quad (\alpha_i,\alpha_j)=0\ (i\neq j),\quad (\alpha_i,\alpha_i)=1\ (i=1,2,3).$$

$$(\beta_1,\beta_2)=\left(\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_3,\ \frac{2}{3}\alpha_1-\frac{1}{3}\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_3\right)$$

$$=\frac{4}{9}(\alpha_1,\alpha_1)-\frac{2}{9}(\alpha_2,\alpha_2)-\frac{2}{9}(\alpha_3,\alpha_3)=0,$$

同理，$(\beta_1,\beta_3)=(\beta_2,\beta_3)=0.$

$$|\beta_1|=\sqrt{(\beta_1,\beta_1)}=\sqrt{\frac{4}{9}(\alpha_1,\alpha_1)+\frac{4}{9}(\alpha_2,\alpha_2)+\frac{1}{9}(\alpha_3,\alpha_3)}=1,$$

同理，$|\beta_2|=|\beta_3|=1.$

故 $B=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$是正交矩阵.

思考题

1. 设 A 是奇数阶正交矩阵且 $\det A=1$.

证明： 1 是 A 的特征值.

分析：(1) 是否存在向量α，使 $A\alpha = 1\alpha$?

(2) $|1I - A| = 0$?

证 $|1I - A| = |AA^{\mathrm{T}} - A| = |A||A^{\mathrm{T}} - I| = |(A - I)^{\mathrm{T}}|$

$= |A - I| = (-1)^n |I - A| = -|1I - A|$

$\therefore \quad |1I - A| = 0.$

2. 设 A 是正交矩阵, 求 A 的特征值.

解: 设 λ 为 A 的特征值, x 为对应特征向量.

即 $Ax=\lambda x$ ， $x\neq 0.$

$$\Rightarrow\ x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\lambda x^{\mathrm{T}}$$

$$\Rightarrow\ x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\cdot(Ax)=\lambda x^{\mathrm{T}}\cdot(\lambda x)$$

$$\Rightarrow\ x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)x=\lambda^{2}(x^{\mathrm{T}}x)$$

$$\Rightarrow\ x^{\mathrm{T}}x=\lambda^{2}(x^{\mathrm{T}}x)$$

$$\Rightarrow\ (\lambda^{2}-1)\cdot x^{\mathrm{T}}x=0$$

$$\Rightarrow\ \lambda^{2}-1=0\ \ (\because x^{\mathrm{T}}x=|x|^{2}\neq 0)$$

$$\Rightarrow\ \lambda=\pm 1$$