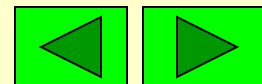


**例3** 证明  $\begin{vmatrix} A & C \\ D & B \end{vmatrix} = |A| |B - DA^{-1}C|$   
(行列式第一降阶定理)

其中  $A$  为  $n$  阶可逆矩阵,  $B$  为  $m$  阶方阵.

**证**

$$\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B - DA^{-1}C \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} A & C \\ D & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B - DA^{-1}C \end{vmatrix}$$
$$= |A| |B - DA^{-1}C|$$



**例4** 证明  $|E_m - AB| = |E_n - BA|$ , 其中  
 $A$  为  $m \times n$  阶矩阵,  $B$  为  $n \times m$  阶阵.

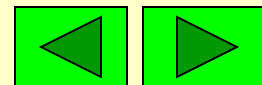
**证**

$$\begin{bmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n - BA \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{vmatrix} = |E_n - BA|$$

$$\begin{bmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} E_m - AB & A \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{vmatrix} = |E_m - AB|$$



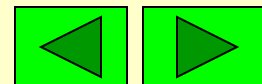
$$\therefore |E_m - AB| = |E_n - BA|$$

利用上式可得

$$|\lambda E_m - AB| = \lambda^{m-n} |\lambda E_n - BA|, \quad m > n, \lambda \text{ 为任意数.}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\lambda E_m - AB| &= \lambda^m \left| E_m - \frac{1}{\lambda} AB \right| \quad (\lambda \neq 0) \\ &= \lambda^m \left| E_n - \frac{1}{\lambda} BA \right| \\ &= \lambda^{m-n} |\lambda E_n - BA| \end{aligned}$$

$\lambda = 0$  时可见书上的说明.



**注** 本例的结果可以把 $m$ 阶的行列式转化为 $n$ 阶的行列式计算, 此时可称为  
(降阶公式).

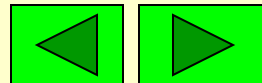
尤其是当 $n = 1$ 时, 即 $A$ 为1列 $B$ 为1行时,  
等式的右端即为1个数.

## 例5 计算

解

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} = E_n + \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{vmatrix}$$

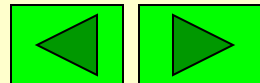


$$= \left| E_n + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| E_1 + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right|$$

$$= | \mathbf{1} + x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n |$$

$$= \mathbf{1} + x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$



## 复习 秩的运算性质 (1)

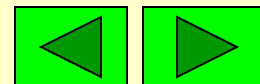
若 $A$  是 $m \times n$  矩阵, 则

$$1. \quad 0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$$

$$2. \quad r(A^T) = r(A)$$

$$3. \quad r(kA) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ r(A) & k \neq 0 \end{cases}$$

$$4. \quad r(A_1) \leq r(A), \quad (A_1 \text{ 为 } A \text{ 的子阵})$$



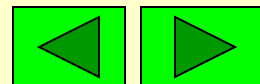
## 2.8.3 秩的运算性质 (2)

$$5. \quad r \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$$

**证** 设  $r(A) = r_1, r(B) = r_2$

则存在可逆阵  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$ , 使

$$P_1 A Q_1 = \begin{bmatrix} E_{r_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, P_2 B Q_2 = \begin{bmatrix} E_{r_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$



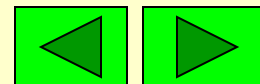


$$\text{令} \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow P \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_1 A Q_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 B Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{r_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{r_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\therefore r \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} = r_1 + r_2 = r(A) + r(B)$$



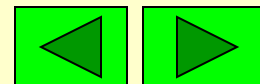
$$6. \quad r \begin{bmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} \geq r(A) + r(B)$$

**证** 设  $r(A) = r_1, r(B) = r_2$

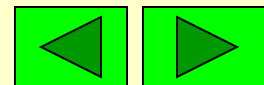
则存在可逆阵  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$ , 使

$$P_1 A Q_1 = \begin{bmatrix} E_{r_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad P_2 B Q_2 = \begin{bmatrix} E_{r_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\text{令} \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{bmatrix}$$



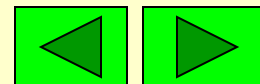
$$\begin{aligned}
 \Rightarrow P \begin{bmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} Q &= \begin{bmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_1 A Q_1 & P_1 C Q_2 \\ \mathbf{0} & P_2 B Q_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} E_{r_1} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_1 C Q_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{r_2} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
 \therefore r \begin{bmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} &\geq r(A) + r(B)
 \end{aligned}$$



**例1**  $r \left[ \begin{array}{c|ccc} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \hline 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{array} \right] = 4 > r(A) + r(B) = 2$

**7.**  $r(A \vdots B) \leq r(A) + r(B)$

**证**  $r(A) + r(B) = r \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$   
 $= r \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & B \end{bmatrix} \geq r(A \vdots B)$



$$8. \quad r(A+B) \leq r(A) + r(B)$$

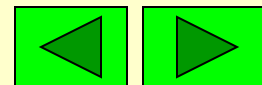
**证**  $r(A) + r(B) = r \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} A & A+B \\ 0 & B \end{bmatrix} \geq r(A+B)$

**例2**  $r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 > r \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = r(A+B) = 2$

$$9. \quad r(AB) \leq \min \{r(A), r(B)\}$$

**证**  $r(A) = r(A \ 0) = r(A \ AB) \geq r(AB)$

$$r(B) = r \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} B \\ AB \end{bmatrix} \geq r(AB)$$



10.  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times p$  矩阵,

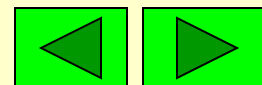
$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$$

且  $AB = 0$  时,  $r(A) + r(B) \leq n$

**证**  $r(A) + r(B) \leq r \begin{bmatrix} A & 0 \\ E & B \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 0 & -AB \\ E & B \end{bmatrix}$

$$= r \begin{bmatrix} 0 & -AB \\ E & 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & AB \end{bmatrix} = n + r(AB)$$

且  $AB = 0$  时, 有  $r(A) + r(B) \leq n$ .



## 秩的运算性质 (2)

$$5. \ r \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$$

$$6. \ r \begin{bmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} \geq r(A) + r(B)$$

$$7. \ r(A:B) \leq r(A) + r(B)$$

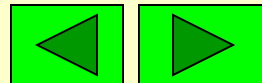
$$8. \ r(A+B) \leq r(A) + r(B)$$

$$9. \ r(AB) \leq \min \{r(A), r(B)\}$$

10.  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times p$  矩阵, 则

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$$

且  $AB = \mathbf{0}$  时,  $r(A) + r(B) \leq n$



# 矩 阵

## 基本运算

线性运算(加法、数乘)

乘法→方幂(求方幂的方法)

行列式乘法公式

转 置

## 逆 矩 阵

定义及运算性质

定义法

求 法

伴随矩阵法

判 别7条

初等变换法

## 初等变换

初等阵

等秩、等价，行阶梯、标准形

## 秩

定 义

性 质10条

应用：线性方程组

## 分块矩阵

求 法：初等(行)变换



加, 数乘, 乘, 幂, 转置, 逆, 初等变换



# 可逆的判别(7条)

$$A_{n \times n} \text{可逆} \iff \exists B_{n \times n} \text{使 } AB = E$$

$$\iff |A| \neq 0$$

$$\iff r(A) = n$$

$$\iff A \text{与} E \text{ 等价, } PAQ = E, A \xrightarrow{\text{行列初}} E$$

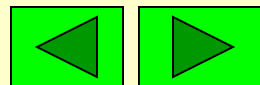
$$\iff A = P_1 P_2 \cdots P_s, P_i \text{ 为初等阵}$$

$$\iff AX = 0 \text{ 只有零解}$$

$$\iff AX = b \text{ 只有唯一解}$$

可逆

行列初



# 伴随矩阵

1. 基本公式:  $AA^* = A^*A = |A|E$

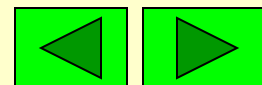
2. 求逆: 若  $A$  可逆,  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ ,  $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|} A$

$$A^* = |A| A^{-1}, (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

3. 性质: (1)  $|A^*| = |A|^{n-1}$ , (2)  $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$  ( $n > 2$ )

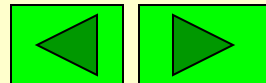
$$(3) (kA)^* = k^{n-1} A^*, (4) r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$$

$$(5) r(A^*)^* = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 0, & r(A) < n \end{cases} \quad (n > 2)$$



## 第二章常见的题型

1. **求方幂**: 4, 5, 11, 22, 23 (注意秩为1的矩阵).
2. **求逆**: 8 (矩阵多项式方程  $f(A) = \mathbf{0}$ ) 14, 16.
3. **解矩阵方程**: (考查矩阵运算及性质)  
9, 10, 13, 15 (先化简).
4. **初等变换初等阵**: 21, 32. 补充题.
5. **涉及伴随矩阵**: 25, 26, 34.
6. **求秩: 证明秩的等式**: 19, 20.
7. **分块阵**: 21, 27, 30, 31, 32, 33.
8. **证明题**: 17, 18, 28, 29.



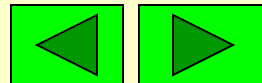
## 求方幂

**例1** 设  $\alpha = (1, 2, 3, 4)^T$ ,  $\beta = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)^T$

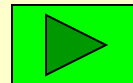
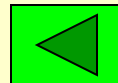
$A = \alpha\beta^T$ , 求  $A^n$ .

**解** 可知  $r(A) = 1$

$$\begin{aligned}\text{所以 } A^n &= (\beta^T \alpha)^{n-1} A \\ &= 4^{n-1} A = 4^{n-1} \alpha\beta^T\end{aligned}$$



$$= 4^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = 4^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{4} \\ 4 & 2 & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}$$



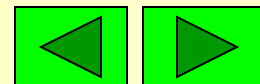
## 初等变换与初等阵

**例2**  $A$ 可逆, 将 $A$ 的 $i, j$ 两行互换得 $B$ ,  
求  $AB^{-1}$ .

**解**

$$E(i, j)A = B$$

$$AB^{-1} = A(E(i, j)A)^{-1} = E^{-1}(i, j) = E(i, j)$$



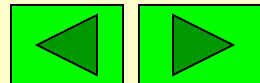
**例3**  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中  $A$  可逆, 则  $B^{-1} =$

(A)  $A^{-1}P_1P_2, \quad (B) P_1A^{-1}P_2$

(C)  $P_1P_2A^{-1}, \quad (D) P_2A^{-1}P_1$



解

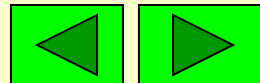
$$B = AP_2P_1$$

$$B^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1} = P_1P_2A^{-1}$$

$$AP_1P_2 = B$$

$$B^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1}A^{-1} = P_2P_1A^{-1}$$

应选择( C ).





## 解矩阵方程、求逆的问题

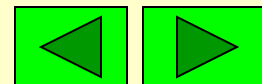
**例4** 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $X$  满足  
 $A^* X = A^{-1} + 2X$ , 求  $X$ .

**解** 因为  $A^* X = A^{-1} + 2X$

所以  $AA^* X = AA^{-1} + 2AX$

即  $|A| X = E + 2AX$ ,  $(|A|E - 2A)X = E$

所以  $X = (|A|E - 2A)^{-1}$

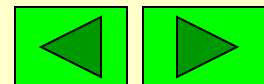


$$|A| = 4, \quad ||A|E - 2A| = 32 \neq 0$$

所以  $|A|E - 2A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  可逆.

用初等变换可求出逆为

$$X = (|A|E - 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$



## 关于秩的问题

**例5** 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B$  为3阶非零矩阵,  
且  $AB = 0$ , 求  $t$ .

**解**

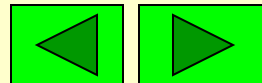
$$AB = 0 \quad r(A) + r(B) \leq n$$

$$B \neq 0, \quad r(B) \geq 1$$

$$r(A) \leq n - r(B) \leq n - 1 = 2$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7(3+t) = 0$$

$$\therefore t = -3$$



**例6** 设 $A$ 与 $B$ 是两个 $n$ 阶非零方阵，满足  
 $AB = 0$ ，则 $A$ 与 $B$ 的秩为

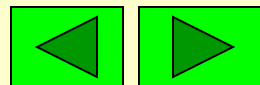
(A) 都等于 $n$ . (B) 必有一个为零.

(C) 都小于 $n$ . (D) 若其中一个等于 $n$ ,  
则另一个必小于 $n$ .

**解** 因为 $A \neq 0, B \neq 0, r(A) \geq 1, r(B) \geq 1$ ,

$$AB = 0 \quad r(A) + r(B) \leq n$$

所以 $A$ 与 $B$ 的秩都小于 $n$ .



**例7** 设 $A$ 为 $4 \times 3$ 阶矩阵, 且 $r(A)=2$ , 而

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ 则 } r(AB) = \underline{2}$$

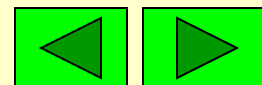
**解1**  $B$ 为可逆阵, 则可写成初等阵之积,  
 $AB$ 即相当于对 $A$ 进行初等列变换,  
初等变换不变秩, 故 $r(AB)=r(A)=2$ .

**解2**  $r(A) = r(A) + r(B) - 3 \leq r(AB) \leq r(A)$

**解3**  $r(A) = r(ABB^{-1}) \leq r(AB) \leq r(A)$

故

$$r(AB) = r(A) = 2.$$



## 证明秩的等式

**例8** 设 $A$ 为 $n$ 阶幂等矩阵, 即 $A^2 = A$  ,

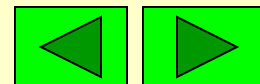
求证  $r(A) + r(A - E) = n$

**证** 由  $A^2 = A$  得  $A(A - E) = 0$

$$\therefore r(A) + r(A - E) \leq n$$

而  $n = r(E) = r(A - A + E) \leq r(A) + r(A - E)$

**故**  $r(A) + r(A - E) = n$



## 关于伴随

**例9** 设 $A$ 为 $n$ 阶矩阵( $n>2$ ),  $A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵, 则有

(A)  $(A^*)^*=|A|^{n-1}A$       (B)  $(A^*)^*=|A|^{n+1}A$

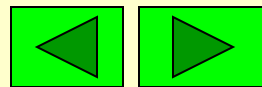
**(C)**  $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$       (D)  $(A^*)^*=|A|^{n+2}A$

**解** (1) 当 $A$ 可逆时, 知 $A^*$ 可逆

$$\begin{aligned} A^*(A^*)^* &= |A^*|E \\ (A^*)^* &= |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1} \frac{1}{|A|} A = |A|^{n-2} A \end{aligned}$$

(2) 若 $A$ 不可逆, 则 $|A|=0$ ,  $r(A)<n$ ,  $r(A^*)^*=0$ ,

所以 $(A^*)^*=0=0A=0$ . 结论成立.



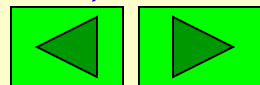
**例10** 若 $A$ 为 $n$ 阶矩阵( $n \geq 2$ ), 则

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$$

**证** (1) 如果 $r(A)=n$ , 由 $A^*A=|A|E$ 知 $A^*$ 可逆, 从而 $r(A^*)=n$ .

(2) 如果 $r(A) \leq n-2$ , 由 $A^*$ 的定义知  
 $A^* = 0 \Rightarrow r(A^*)=0$ .

(3) 如果 $r(A)=n-1$ ,  $A^* \neq 0$ ,  $\Rightarrow r(A^*) \geq 1$ .  
又 $|A|=0$ ,  $A^*A=0$ ,  $r(A) + r(A^*) \leq n$   
 $\Rightarrow r(A^*) \leq n-r(A)=1 \Rightarrow r(A^*)=1$ .





**例11** 设  $A$  为三阶非零实矩阵, 若  $A^* = A^T$   
证明  $A$  可逆, 并求  $|A|$ . ( $a_{ij} = A_{ij}$ )

**证** 由  $A^* = A^T$ , 得  $a_{ij} = A_{ij}, \forall i, j$

$A \neq 0$ , 不妨设  $\exists a_{kj} \neq 0$

将  $|A|$  按第  $k$  行展开,

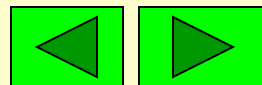
$$|A| = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + a_{k3}A_{k3}$$

$$= a_{k1}^2 + a_{k2}^2 + a_{k3}^2 \geq a_{kj}^2 > 0. \text{ 故 } A \text{ 可逆.}$$

$$\text{由已知 } A^* = A^T, \therefore AA^T = |A|E$$

$$\text{得到 } |A|^2 = |A|^3, |A|^2(|A| - 1) = 0$$

所以由  $|A| \neq 0$  知  $|A| = 1$ .



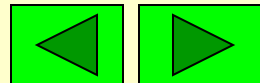
**例12** 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| |A-B|$$

**证**

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| |A-B|$$



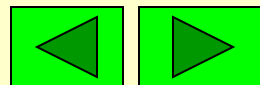
## 分块阵的行列式

**例13** 设4阶矩阵  $A=(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4)$ ,  
 $B=(\beta_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4)$ . 如果  $|A|=1, |B|=2$ ,  
那么  $|A+B|$  的值为:

- (A) 3      (B) 6      (C) 12      **(D) 24**

**解**  $|A+B| = |\alpha_1 + \beta_1 \ 2\alpha_2 \ 2\alpha_3 \ 2\alpha_4|$   
 $= 2^3 |\alpha_1 + \beta_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4|$   
 $= 2^3 (|A| + |B|) = 24$

应选**(D)**.



# 下次作习题二中的部分习题

(^\_^) Bye!

**(例11)** 设 $A=(a_{ij})$  是3阶实非零矩阵, 已知 $a_{ij}=A_{ij}$ , 求 $|A|$ .

**解** 根据已知,  $A=(a_{ij})$ . 假定 $A$ 的第一行有非零元素, 把 $|A|$ 分别按照第1行展开, 可以得到:

$$\begin{aligned}|A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0\end{aligned}$$

由已知,  $A^*=A^T$ , 所以 $AA^T=|A|I$ , 容易由得到 $|A|^2=|A|^3$  所以 $|A|=1$ .

