练习册第7页行列式的计算　解答

(5)

$$
\begin{vmatrix}
1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\
2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\
2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\
2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n
\end{vmatrix}
\overset{r_i - r_2}{\underset{i=3,\mathrm{L}\ ,\ n}{=\!=\!=\!=}}
\begin{vmatrix}
1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\
2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2
\end{vmatrix}
$$

$$
\overset{r_2 - 2r_1}{=\!=\!=\!=}
\begin{vmatrix}
1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\
0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2
\end{vmatrix}
= -2(n-2)!
$$

返回

(5)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,3,\cdots,n]{r_i - r_2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 + 2r_1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

(6) $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2-c_1]{\substack{c_4-c_3 \\ c_3-c_2}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \\ 9 & 7 & 9 & 11 \\ 16 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[c_3-c_2]{c_4-c_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 7 & 2 & 2 \\ 16 & 9 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

(6) $$D=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_3-r_2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 15 & 21 & 27 & 33 \end{vmatrix} = 0$$

两行对应成比列

返回

推广 $$D=\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 & (a+4)^2 \\ (a+2)^2 & (a+3)^2 & (a+4)^2 & (a+5)^2 \\ (a+3)^2 & (a+4)^2 & (a+5)^2 & (a+6)^2 \end{vmatrix}$$

$$=0$$

第四章　空间解析几何与向量运算

4.1 空间直角坐标系与向量

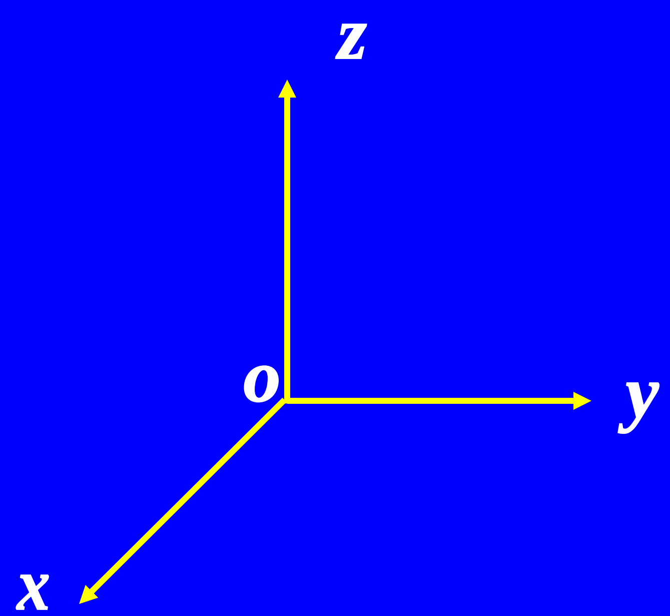
一、 空间直角坐标系

二、 向量及其线性运算

三、 向量的分解与向量的坐标

一、空间直角坐标系

三个坐标轴的正方向符合右手系.

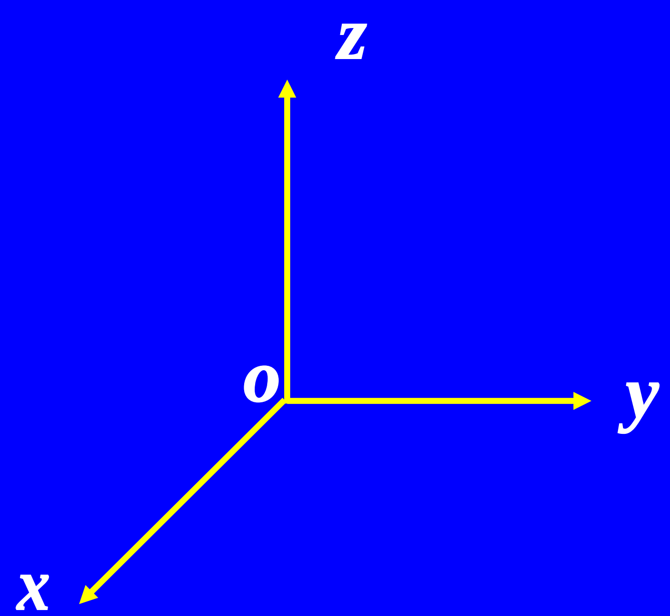


即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向.

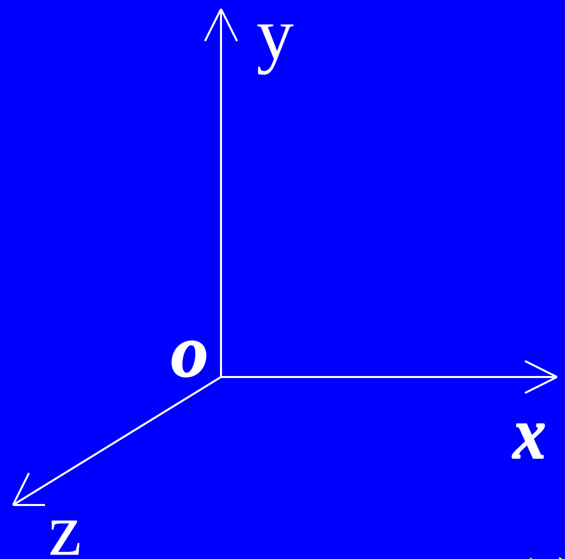
一、空间直角坐标系

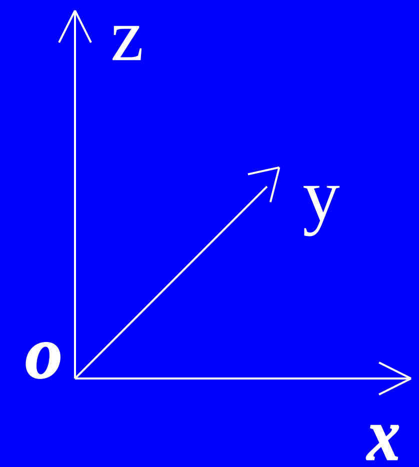
三个坐标轴的正方向符合右手系.

先使右手的大拇指、食指、中指互相垂直，若大拇指和食指分别指向x轴和y轴正向，则中指的指向即为z轴正向

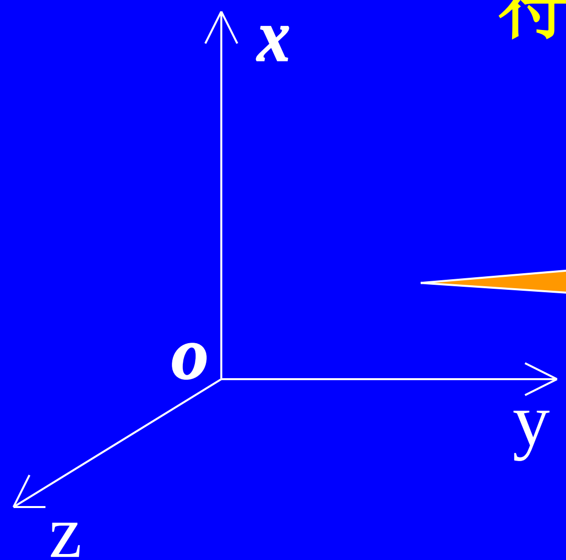


返回

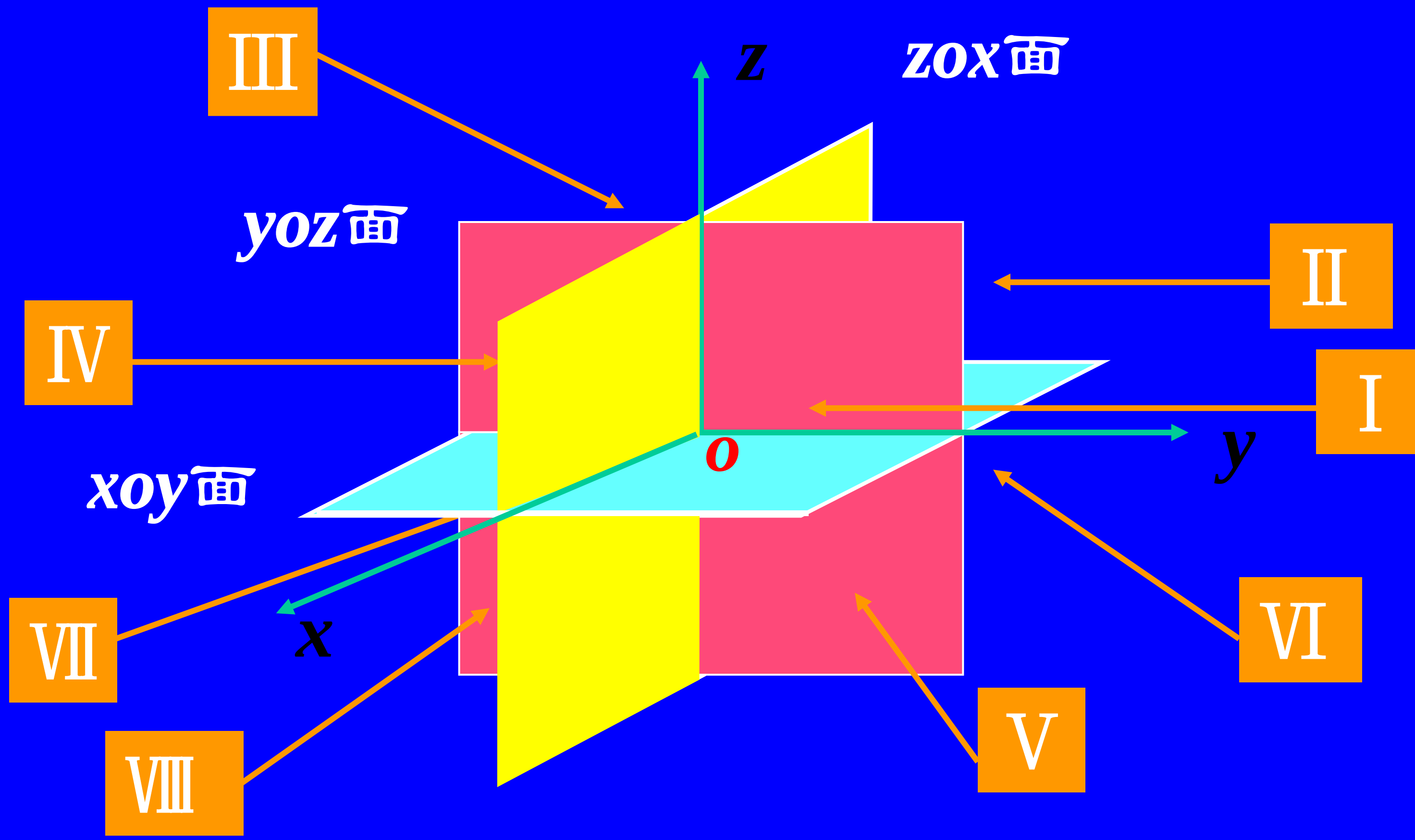




符合右手系.



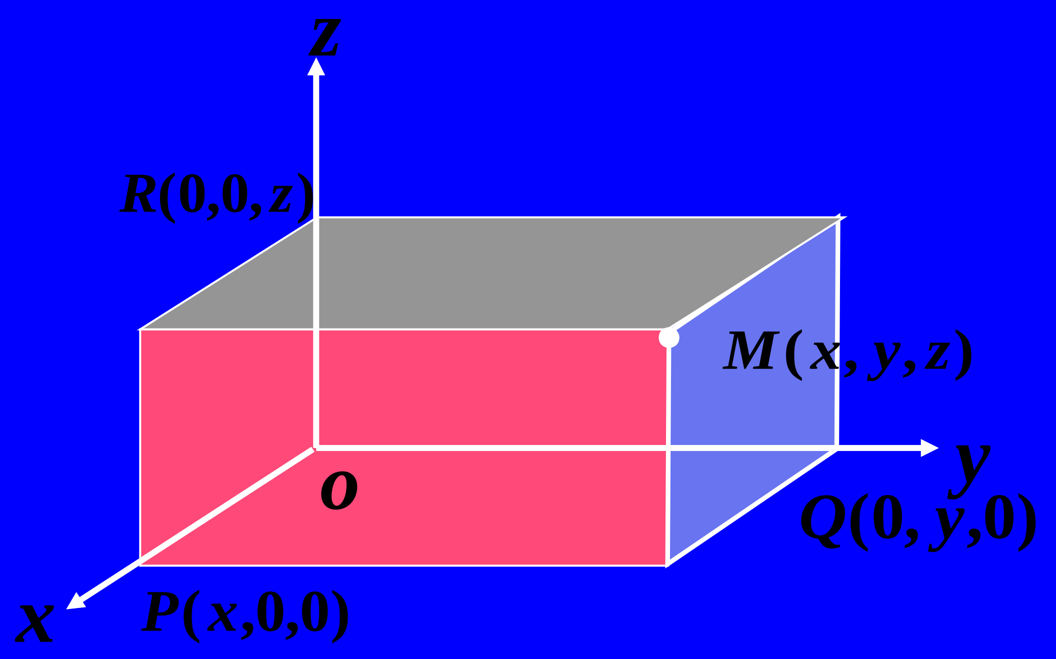
不符合右手系



空间直角坐标系共有八个卦限

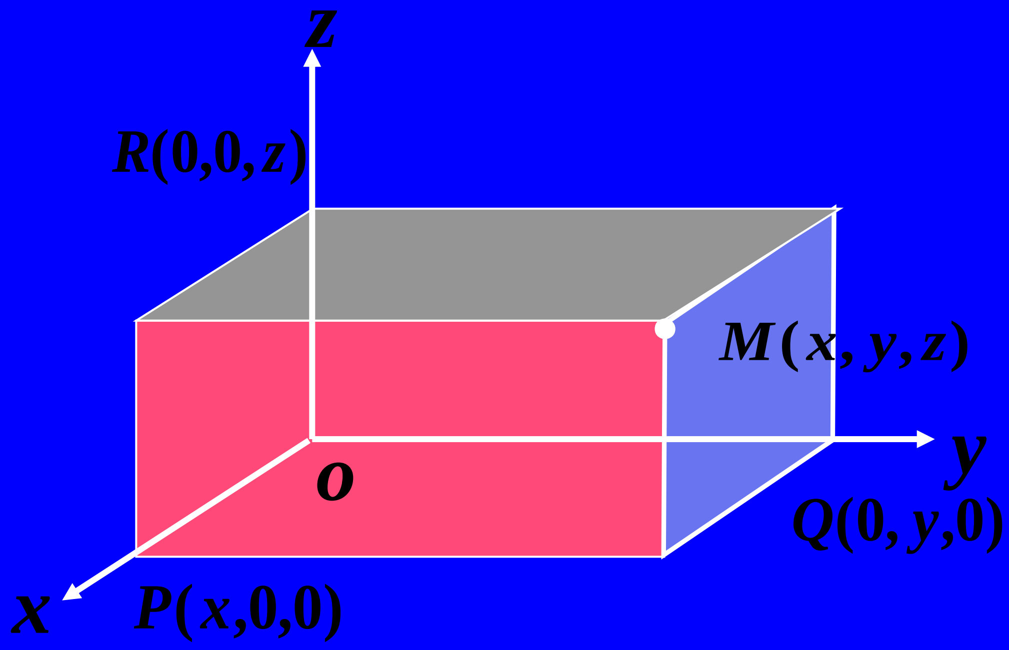
返回

空间的点M $\longrightarrow$ 有序数组(x, y, z)



空间的点M $\xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组(x, y, z)

(x, y, z)称为点 M 的坐标.



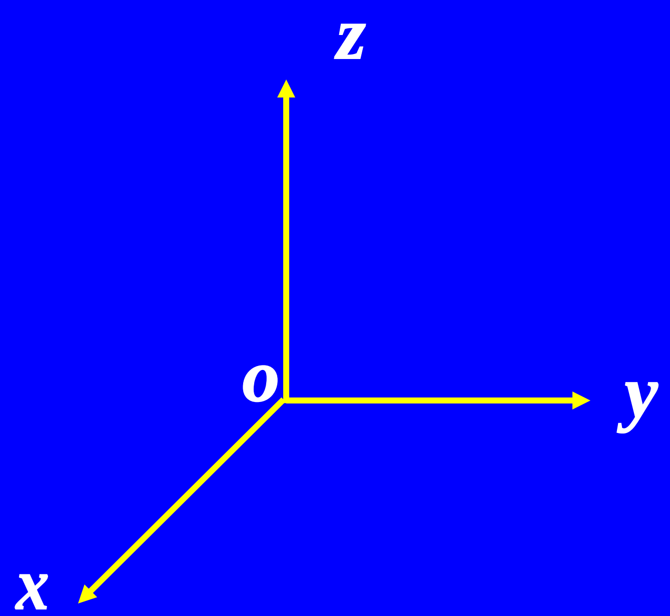
返回

特殊点的坐标

坐标轴上的点：$(x,0,0),(0,y,0),(0,0,z)$

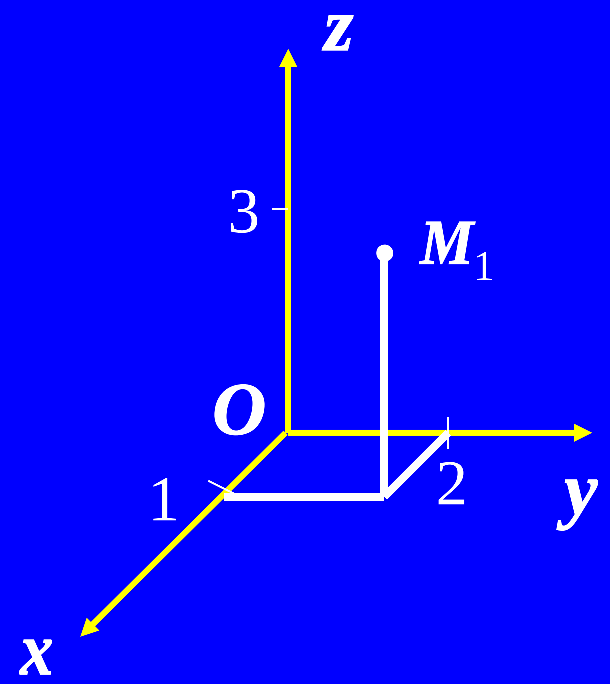
坐标面上的点：$(x,y,0),(0,y,z),(x,0,z)$

原点：$(0,0,0)$

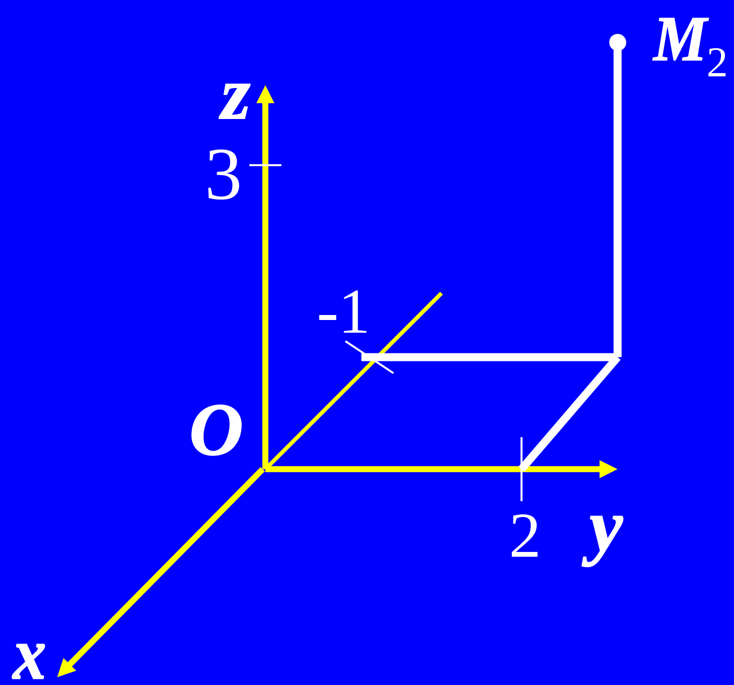


例 在O—xyz坐标系中表示以下三个点：

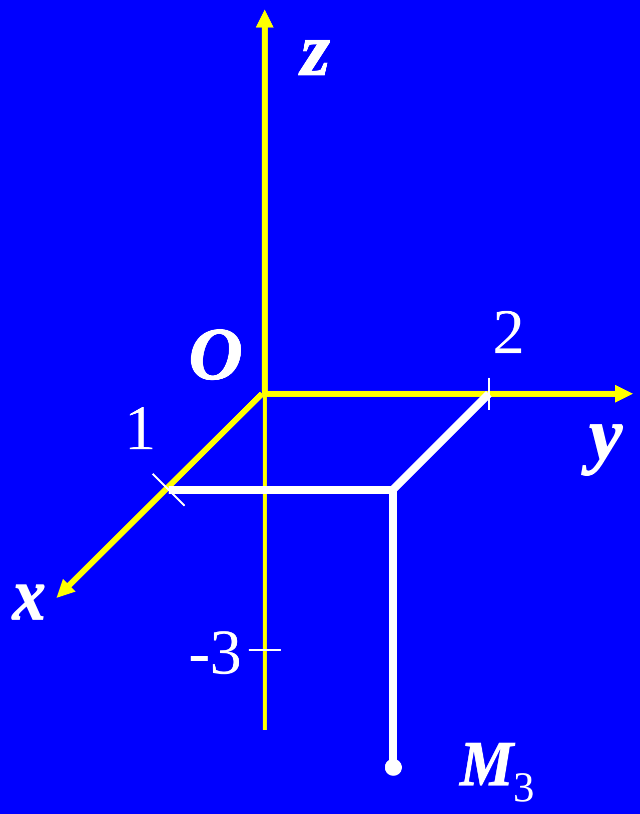
$M_1(1, 2, 3)$, $M_2(-1, 2, 3)$, $M_3(1, 2, -3)$.



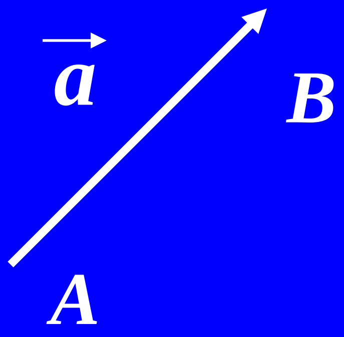
$M_2(-1, 2, 3)$



$M_3(1, 2, -3)$



二、 向量及其线性运算



向量： 既有大小又有方向的量.

向量的表示： $\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{AB}$

以A为起点，B为终点的有向线段.

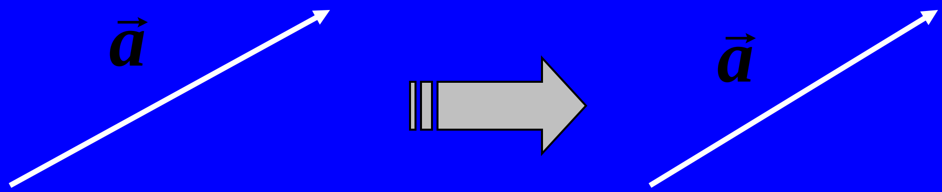
向量的模： 向量的大小. $|\vec{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$

（模又称为长度或范数）.

单位向量： 模为 1 的向量.

零向量： 模为 0 的向量. $\vec{0}$

自由向量： 不考虑起点位置的向量.



相等向量： 大小相等且方向相同的向量.

负向量： 大小相等但方向相反的向量. $-\vec{a}$

向量平行： 两个非零向量相同或相反.

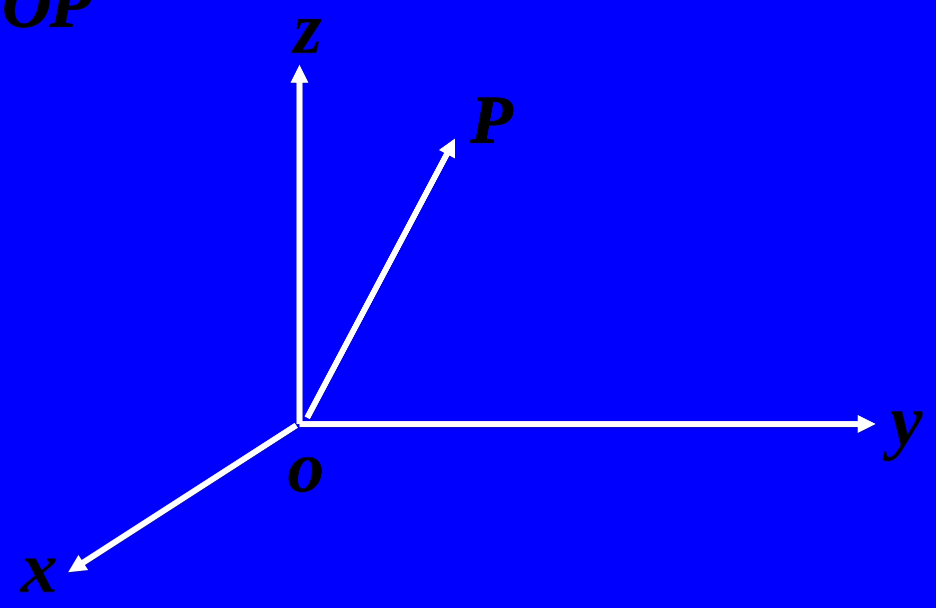
$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行 记作 $\vec{a} \,//\, \vec{b}$

零向量与任意向量平行.

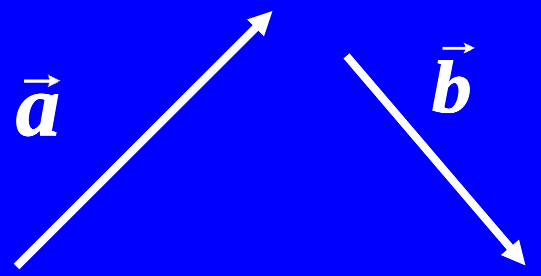
共线向量： 平行于同一直线的向量称为共线向量.

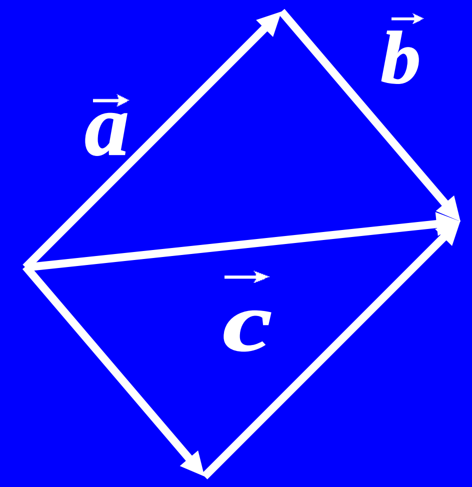
返回

向径： 空间直角坐标系中任一点 P 与原点构成的向量. $\overrightarrow{OP}$



向量的加法：$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$





三角形法则(平行四边形法则)

(多边形法则)

向量的减法：$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

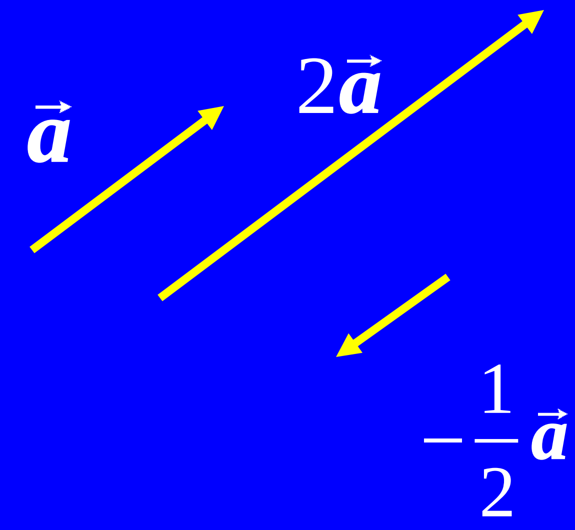
返回

向量的数乘： $\vec{b} = \lambda \vec{a}$

(1) $\lambda > 0$, $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向；

(2) $\lambda = 0$, $\vec{b} = \vec{0}$;

(3) $\lambda < 0$, $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向.



向量的伸缩变换

向量的单位化： $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0 \Longrightarrow \vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

返回

线性运算的运算规律

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) $\alpha+0=\alpha$;

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

定理1 $\vec{a}$与$\vec{b}\neq\vec{0}$,则$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow$存在唯一的数$\lambda$, 有$\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

证明： 充分性显然；

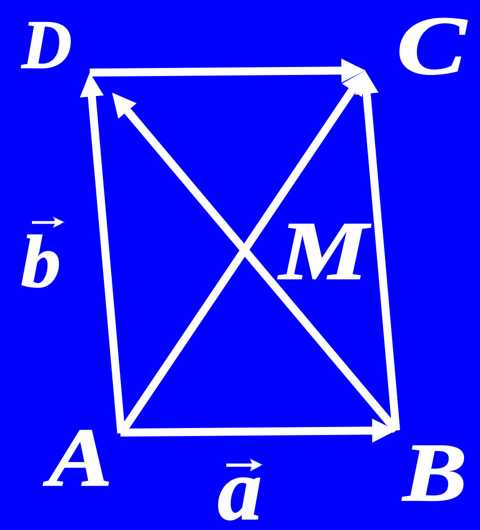
必要性：设$\vec{a}//\vec{b}$, 取$\lambda=\begin{cases}\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}, & \vec{a}\text{与}\vec{b}\text{方向相同}\\ -\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}, & \vec{a}\text{与}\vec{b}\text{方向相反}\end{cases}$

推论 向量$\vec{a}$与$\vec{b}$, 则$\vec{a},\vec{b}$共线

$\Leftrightarrow$存在不全为零的数λ,μ, 使得 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}$.

例 1 在平行四边形$ABCD$中,设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$,$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$,试用$\vec{a}$,$\vec{b}$表示向量$\overrightarrow{MA}$,$\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{MC}$,$\overrightarrow{MD}$,其中$M$为平行四边形$ABCD$的对角线交点.

解: 平行四边形两对角线互相平分



$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MC},$$

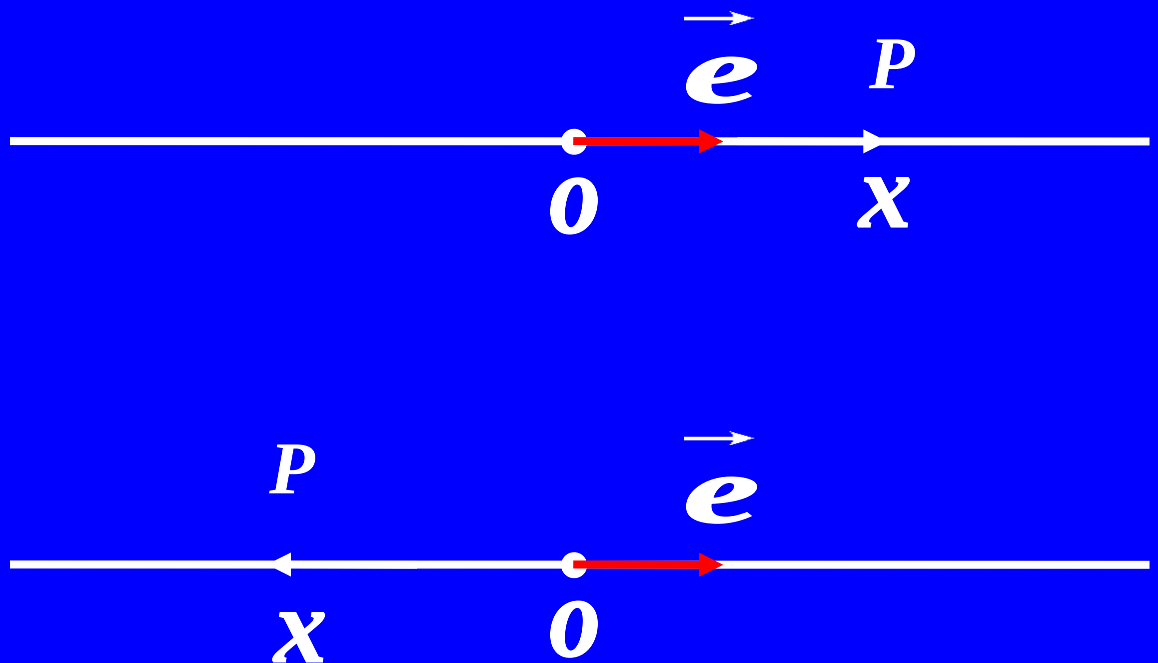
$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{MB},$$

故 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$,

$$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MC}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

$$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}),\ \overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

例 2 设数轴u上点P的坐标是x,向量$\vec{e}$是与u轴的正方向相同的单位向量,那么$\overrightarrow{OP}=x\vec{e}$.



$x>0$

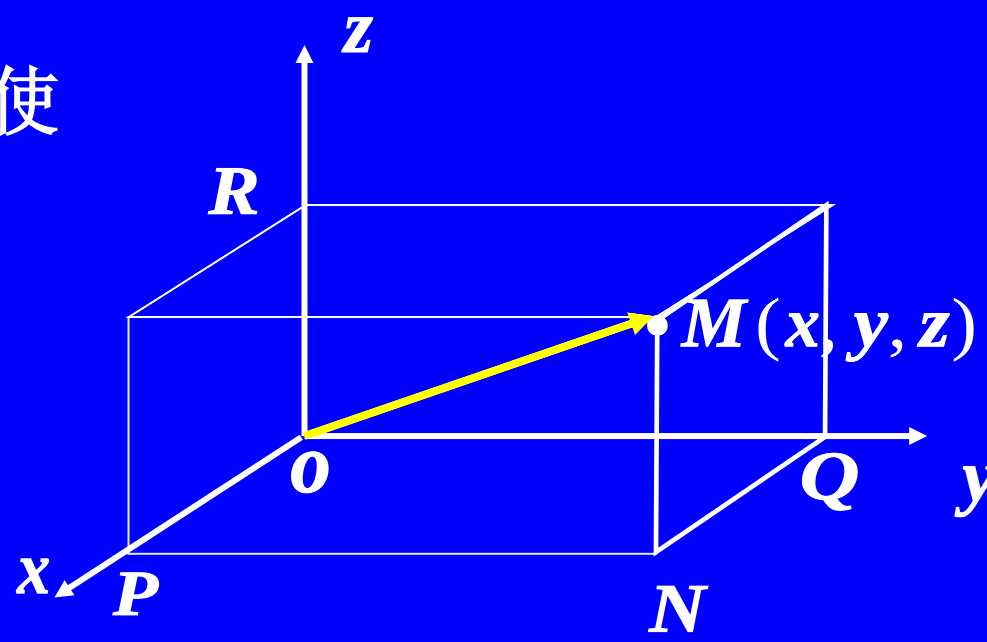
$x<0$

数 x 称为向量 $\overrightarrow{OP}$ 的值

返回

二、 向量的分解与向量的坐标

向量 $\vec{a}$ 作平行移动，使其起点与原点重合。



设 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别表示沿 x 轴, y 轴, z 轴正方向的单位向量

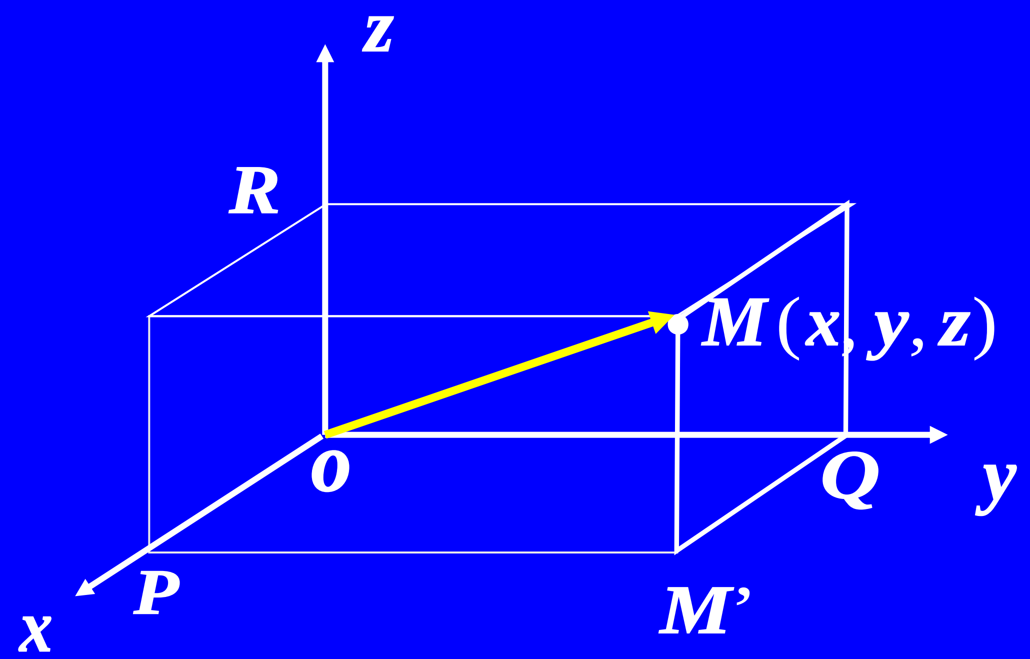
$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i},\ \overrightarrow{OQ} = y\vec{j},\ \overrightarrow{OR} = z\vec{k},$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

向量 $\vec{a}$ 关于坐标向量的分解式



向量 $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ 称为向量 $\vec{a}$ 在x轴, y轴, z轴上的分向量.

实数 x, y, z 称为向量 $\vec{a}$ 的坐标, 记作

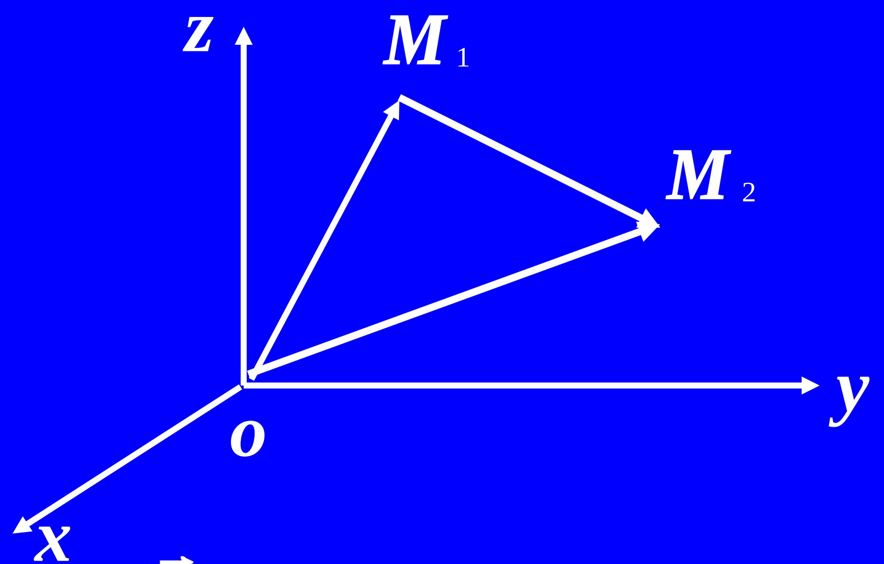
$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z) \qquad \text{(坐标表达式)}$$

$$点\ M(x, y, z) \leftrightarrow \vec{a} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\leftrightarrow \vec{a} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$$

起点为$M_1(x_1, y_1, z_1)$, 终点为$M_2(x_2, y_2, z_2)$的向量

$\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表达式



$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

$$= x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$-(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})$$

$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$ 坐标向量的分解式

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$ (坐标表达式)

返回

向量线性运算的坐标表达式

设 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, λ 为实数, 即

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

则 $$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k},$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}+(a_z-b_z)\vec{k},$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x)\vec{i}+(\lambda a_y)\vec{j}+(\lambda a_z)\vec{k},$$

即 $$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

返回

向量线性运算的坐标表达式

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, λ 为实数, 即

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

平行向量对应坐标成比例:

当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时,

$$\vec{b}//\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_x&=\lambda a_x\\ b_y&=\lambda a_y\\ b_z&=\lambda a_z\end{aligned}}$$

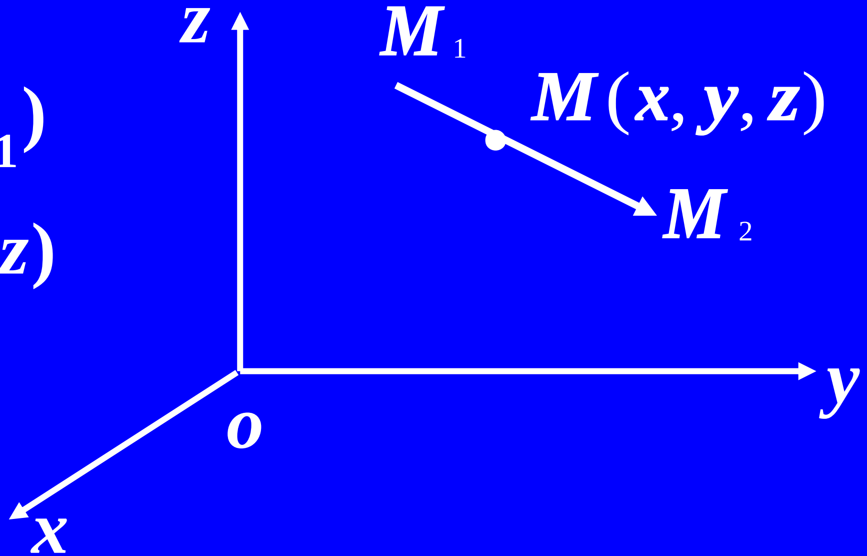
返回

例 3 设$M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间二点.

M为 $\overrightarrow{M_1M_2}$上一点，$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$, $\lambda \neq -1$,

求 M 的坐标(x, y, z).

解:



$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1)$$

$$\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z)$$

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2},$$

$$(x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1) = \lambda(x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z)$$

返回

例 3　设$M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间二点.

M为 $\overrightarrow{M_1M_2}$上一点，$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$, $\lambda \neq -1$,

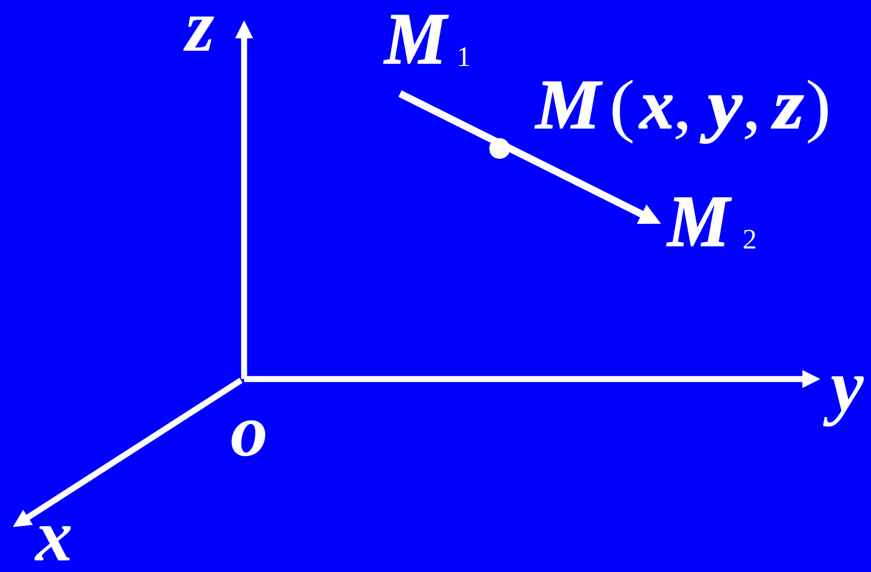
求 M 的坐标(x, y, z).

解:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$



定比分点公式

定比分点公式

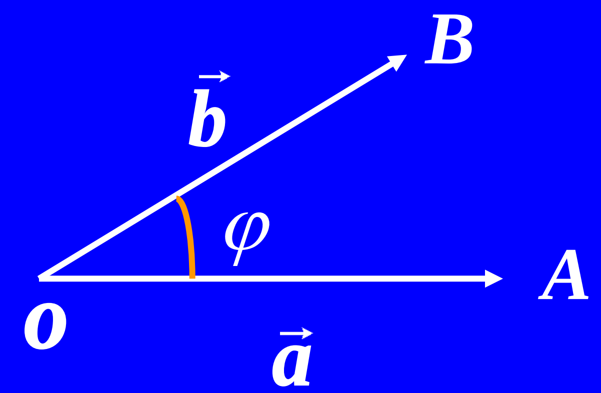
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

$\lambda=1$, 中点公式

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

两向量的夹角

向量$\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$，过空间一点$O$作$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$



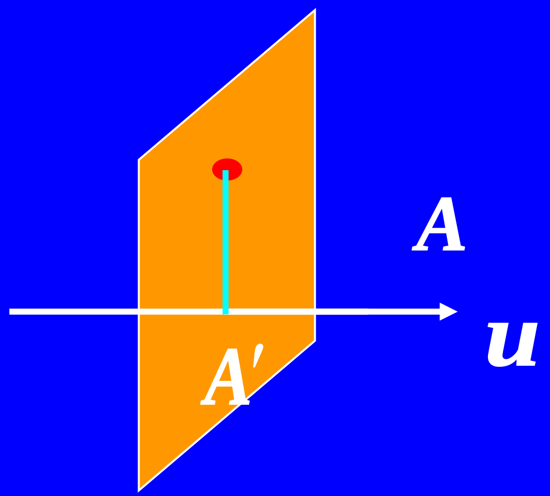
向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为:

$$\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\angle\left(\vec{b},\vec{a}\right)=\varphi \qquad (0\leq\varphi\leq\pi)$$

特殊地，当两个向量中有一个零向量时，规定它们的夹角可在0与π之间任意取值.

类似地，可定义**向量与一轴**或**空间两轴**的夹角.

空间一点在轴上的投影

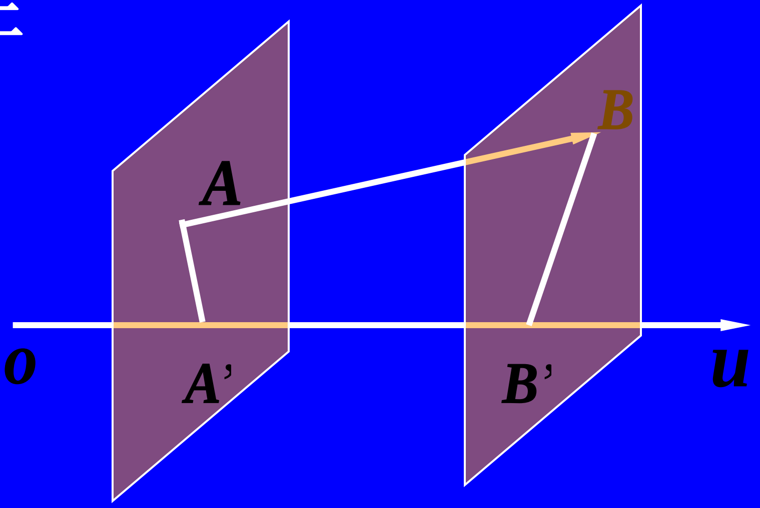


过点A作轴u的垂直平面π，平面π与轴u的交点A'叫做点A在轴u上的投影

返回

向量在轴上的投影

过空间点A,B作平面与轴 u垂直，与轴 u相交于A', B',向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影定义为



有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值

$$\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{AB}=A'B'=\begin{cases}\left|\overrightarrow{A'B'}\right|, & \overrightarrow{A'B'}\text{ 与 }u\text{ 同向}\\ -\left|\overrightarrow{A'B'}\right|, & \overrightarrow{A'B'}\text{ 与 }u\text{ 反向}\end{cases}$$

返回

向量在轴上的投影有以下三个性质：

(1)

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\varphi$$

(2)

$$\mathrm{Prj}_u \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \mathrm{Prj}_u \vec{a} + \mathrm{Prj}_u \vec{b}$$

(可推广到有限多个情形)

(3)

$$\mathrm{Prj}_u \left(\lambda \vec{a}\right) = \lambda \mathrm{Prj}_u \vec{a}$$

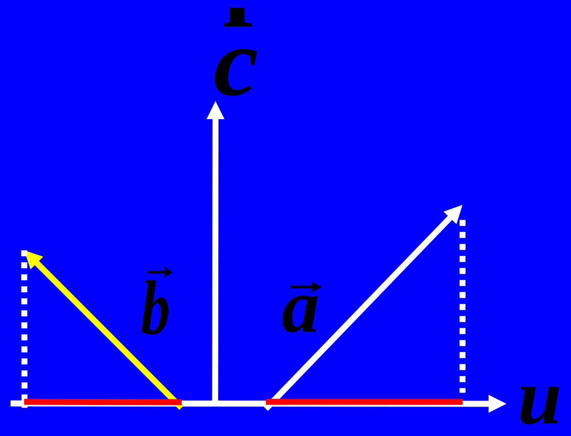
由前述性质容易看出：

(1) $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$, 投影为正；

(2) $\frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$, 投影为负；

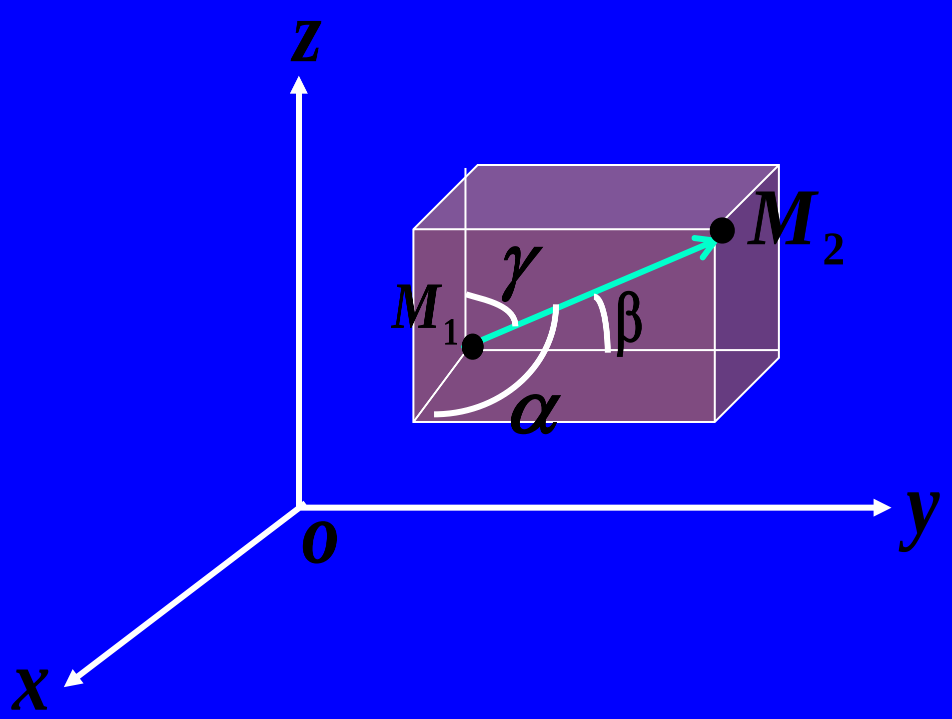
(3) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, 投影为零；

(4) 相等向量在同一轴上投影相等；



向量的模与方向余弦

非零向量 $\vec{a}$ 与三条坐标轴的正向的夹角称为方向角.



$0 \le \alpha \le \pi,$

$0 \le \beta \le \pi,$

$0 \le \gamma \le \pi.$

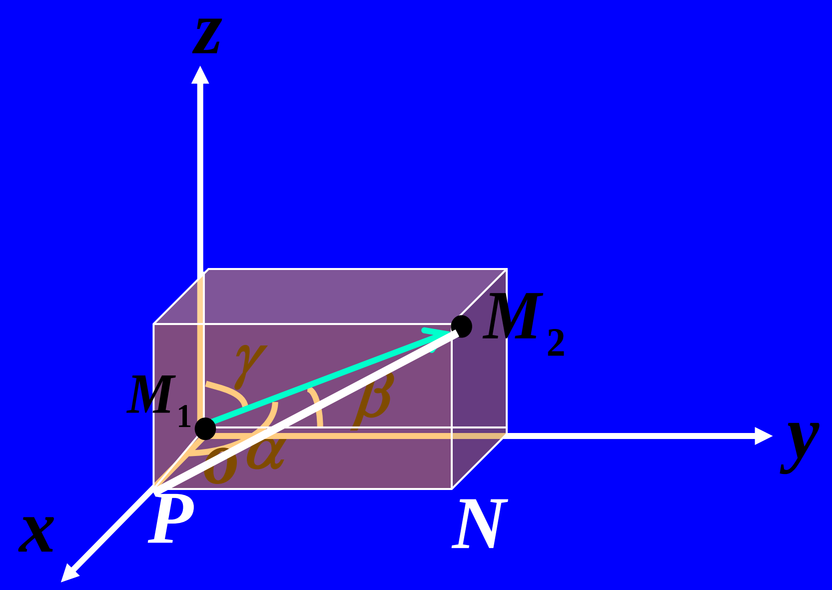
返回

由图示可知

$$x = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| \cos\alpha = \left|\vec{a}\right| \cos\alpha$$

$$y = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| \cos\beta = \left|\vec{a}\right| \cos\beta$$

$$z = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| \cos\gamma = \left|\vec{a}\right| \cos\gamma$$



$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x, y, z)$$

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

两点间距离公式

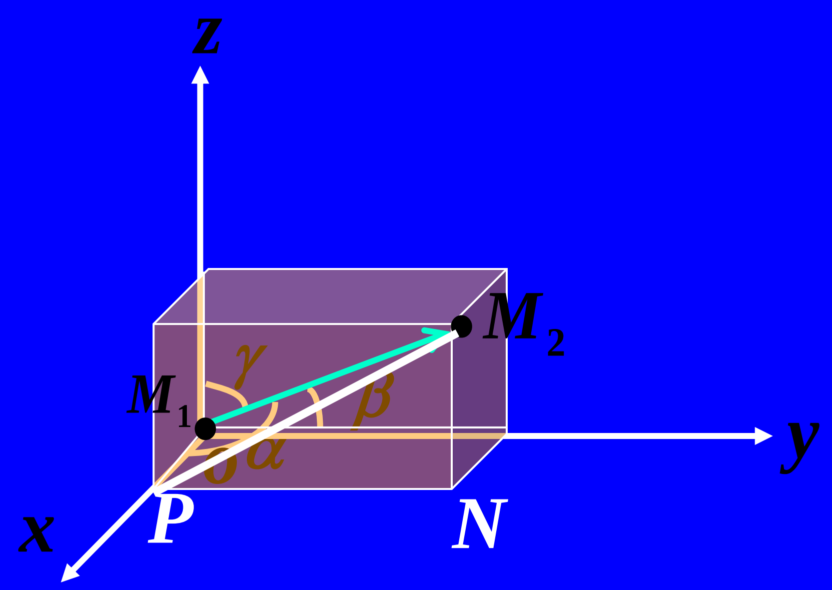
$$|M_1M_2| = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

由图示可知

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x, y, z)$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量$\vec{a}$的方向余弦.

返回

推论 1 方向余弦的特征

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

推论 2 单位向量的方向余弦表示

$$\vec{a}^o=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\cos\gamma).$$

推论 3 空间两点间距离公式

设$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间二点, 则

$$|M_1M_2|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例4 已知 $M_1(2, 2, \sqrt{2})$, $M_2(1, 3, 0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦、方向角，并求方向与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 一致的单位向量.

解:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1-2,\ 3-2,\ 0-\sqrt{2})$$

$$= (-1,\ 1,\ -\sqrt{2})$$

于是 $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$

方向一致的单位向量

$$\vec{a}^{\circ} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}\overrightarrow{M_1M_2} = \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

例4 已知 $M_1(2, 2, \sqrt{2})$, $M_2(1, 3, 0)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦、方向角，并求方向与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 一致的单位向量.

解: 方向一致的单位向量

$$\vec{a}^{\circ} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}\overrightarrow{M_1M_2} = \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

从而 $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$, $\cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\alpha = \frac{2}{3}\pi,\quad \cos\beta = \frac{1}{3}\pi,\quad \cos\gamma = \frac{3}{4}\pi$$