1.2 n 阶行列式的性质

定义 设 $D=\left|a_{ij}\right|_n$，称

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 D 的转置行列式.

性质1（**转置**）行列互换值不变, 即 $D=D^{\mathrm{T}}$

例如 $D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=D^{\mathrm{T}}$

性质1表明关于行的性质对列也成立.

性质2 （换法）换行（列）换号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 两行(列)同值为零,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

性质3 （倍法）把行列式的某一行（列）的所有元素同乘以数k，等于用数k乘以这个行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD$$

即:如果行列式某一行(列)有公因子k时,

则k 可以提到行列式符号的外面.

例如 $$\begin{vmatrix} -15 & 45 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15\times 3\times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 45(-1-2) = -135$$

推论 两行(列)成比例,值为零.

性质4 (分拆)如果行列式某行(列)的所有元素都是两数之和,则该行列式为两个行列式之和,即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
$$

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

例如 $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 202 & -99 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 200+2 & -100+1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 200 & -100 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -200 + 6 = -194$$

性质5（消法）将行列式的某一行(列)的各元素乘以常数加到另一行(列)的对应元素上去，则行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

总结行列式性质

性质1 (转置) $D^T = D$.

性质2 (换法) 换行(列)变号.

推论 两行(列)同，值为零.

性质3 (倍法) 某行(列)乘数 k=kD.

推论 两行(列)成比例，值为零.

性质4 D可按某行(列)分拆成两行列式之和.

性质5 (消法)D某行(列)乘数 k 加至另行(列)，行列式值不变.

●行列式的**性质**是有关行列式计算和推理的基础, 必须熟练掌握, 会灵活运用.

注 行列式变换的表示符号

	行变换	列变换
换法	$r_i \leftrightarrow r_j$	$c_i \leftrightarrow c_j$
倍法	kr_i	kc_i
消法	$kr_j + r_i$	$kc_j + c_i$

例7 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & 5 & -8 \\ 1 & 3 & -5 & 10 \end{vmatrix}$

解 通过行变换将D化为上三角行列式

$$D \xlongequal[(-2)\times r_1 + r_2]{\substack{r_1 + r_3 \\ -r_1 + r_4}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_4}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -10$$

例8 设有四阶行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & x & 2x \\ 1 & 1 & x & -1 \\ 0 & x & 2 & 0 \\ x & 0 & -1 & -x \end{vmatrix}$$

则展开式中x^4的系数是(　　　).

$\boxed{\text{(A)}}$ 2;　(B) -2;　(C) 1;　(D) -1.

解 含x^4的项只有一项

$$(-1)^{\tau(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=2x^4$$

例9 已知

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a, \quad \begin{vmatrix} a_1' & c_1 & b_1 \\ a_2' & c_2 & b_2 \\ a_3' & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = b$$

计算 $D = \begin{vmatrix} a_1 + 2a_1' & a_2 + 2a_2' & a_3 + 2a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + 3b_1 & c_2 + 3b_2 & c_3 + 3b_3 \end{vmatrix}$

解 由性质4 $D=$

$$\begin{vmatrix} a_1+2a_1' & a_2+2a_2' & a_3+2a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1+2a_1' & a_2+2a_2' & a_3+2a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1+2a_1' & a_2+2a_2' & a_3+2a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a_1' & 2a_2' & 2a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} -2\begin{vmatrix} a_1' & c_1 & b_1 \\ a_2' & c_2 & b_2 \\ a_3' & c_3 & b_3 \end{vmatrix}
$$

$$
= a - 2b
$$

二、 行列式的计算

性质 3 为我们提供了使用矩阵初等变换计算行列式的简便方法，这种方法的计算工作量要比按定义展开的方法小得多。

利用初等变换计算行列式的一个基本程序：
通过适当的初等变换把行列化为三角行列式。

行列式的“消元法”或“化零运算”。

例4. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 7\\ 2 & 4 & -3\\ -3 & 7 & 2\end{pmatrix}$，求 $\det A$.

解一：化为“三角行列式”

$$\det A \underset{r_3+3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix}1 & -3 & 7\\ 0 & 10 & -17\\ 0 & -2 & 23\end{vmatrix} \overset{r_3+r_2\div 5}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix}1 & -3 & 7\\ 0 & 10 & -17\\ 0 & 0 & \frac{196}{10}\end{vmatrix} = 196$$

返回

利用初等变换计算行列式的另一个基本程序：
把行列式的某一行(列)的元素尽可能化为零，然后按该行(列)展开，降阶后再计算行列式的值。

解二：

$$\det A \xlongequal[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 10 & -17 \\ 0 & -2 & 23 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按}c_1\text{展开}} \begin{vmatrix} 10 & -17 \\ -2 & 23 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+\frac{1}{5}r_1} \begin{vmatrix} 10 & -17 \\ 0 & \frac{196}{10} \end{vmatrix}$$

$$=196$$

返回

例5 计算 $D=\begin{vmatrix}1 & 4 & -1 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\\ 4 & 2 & 3 & 11\\ 3 & 0 & 9 & 2\end{vmatrix}$

解

$$D\xlongequal[r_3-2r_2]{r_1-4r_2}\begin{vmatrix}-7 & 0 & -17 & -8\\ 2 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & -5 & 5\\ 3 & 0 & 9 & 2\end{vmatrix}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-7 & -17 & -8\\ 0 & -5 & 5\\ 3 & 9 & 2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+c_3}\begin{vmatrix}-7 & -25 & -8\\ 0 & 0 & 5\\ 3 & 11 & 2\end{vmatrix}=-5\cdot\begin{vmatrix}-7 & -25\\ 3 & 11\end{vmatrix}=10$$

例6 计算 $D_n = \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y \\ y & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$

解

$$D_n \xlongequal[j=2,\cdots,n]{c_1+c_j} \begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & \cdots & y \\ x+(n-1)y & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x+(n-1)y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

返回

$$\xlongequal{\text{提取公因子}} (x+(n-1)y)\begin{vmatrix} 1 & y & \cdots & y \\ 1 & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} (x+(n-1)y)\begin{vmatrix} 1 & y & \cdots & y \\ 0 & x-y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$$

例7 证明范德蒙行列式$(n\geq 2)$

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j),$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\ldots(x_n-x_1)$$

$$(x_3-x_2)\ldots(x_n-x_2)$$

$$\vdots$$

$$(x_n-x_{n-1})$$

返回

例7 证明范德蒙行列式($n \geq 2$)

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j),$$

证 $n=2$:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1,$$ 结论成立。

设对于n-1阶结论成立，对于n阶：

返回

$$V_n \xlongequal[i=n,\, n-1,\cdots,2]{r_i - x_1 r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{按c_1展} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$
=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}
$$

n-1阶范德蒙行列式

$$
V_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\le j<i\le n}(x_i-x_j)
$$

$$
=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)
$$

返回

例8

$$D=\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ c & c^2 & c^3 & c^4 \\ d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}=abcd\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$=abcd\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$=abcd\,(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$$

例9 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

解 加边法

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n+1]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,\cdots,n+1]{c_1+c_j}\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1+\sum_{i=1}^{n}a_i$$

（考虑：其他解法？）

（再考虑例6？）

返回

解二

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,\cdots,n]{c_1+c_j}\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & \cdots & a_n\\ 1+\sum_{i=1}^{n}a_i & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

$$
= \left(1+\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} \left(1+\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= 1+\sum_{i=1}^{n} a_i
$$

返回

计算行列式的方法归纳及综合运用：

1、依定义计算行列式

2、用对角线法则计算行列式，它只适用二阶、三阶行列式

3、用一些简单的、已知的行列式来计算行列式

三角行列式；
一行(列)元素全为零的行列式；
两行(列)元素对应成比例的行列式；
范德蒙行列式；
……

4、用行列式性质对行列式进行变形，化成已知的或容易计算的行列式

5、利用行列式按行(列)展开的性质对行列式进行降阶来计算行列式

6、用数学归纳法证明行列式

7、综合运用上述方法计算行列式

例10　计算4阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}\quad (\text{已知 } abcd=1)$$

解

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$
= abcd\begin{vmatrix} a & 1 & \dfrac{1}{a^2} & \dfrac{1}{a} \\ b & 1 & \dfrac{1}{b^2} & \dfrac{1}{b} \\ c & 1 & \dfrac{1}{c^2} & \dfrac{1}{c} \\ d & 1 & \dfrac{1}{d^2} & \dfrac{1}{d} \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1 & \dfrac{1}{a^2} & \dfrac{1}{a} \\ b & 1 & \dfrac{1}{b^2} & \dfrac{1}{b} \\ c & 1 & \dfrac{1}{c^2} & \dfrac{1}{c} \\ d & 1 & \dfrac{1}{d^2} & \dfrac{1}{d} \end{vmatrix}
$$

$$
= 0.
$$

思考题1

设n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

求第一行各元素的代数余子式之和:

$$A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n}.$$

解　第一行各元素的代数余子式之和可以表示成

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right).$$

返回

思考题2

证明 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}=(ad-bc)^n$$

证一:

(1) 当 $a=0$ 时，根据行列式的定义有

$$D_{2n}=(-1)^{n(2n-1)}(bc)^n=(-1)^n(bc)^n=(-bc)^n$$

(2) 当 $a\neq 0$ 时，利用行列式的初等变换有

$$
D_{2n} \xlongequal[i=1,\,2,\,\cdots,\,n]{c_{2n-i+1}+c_i\times\left(-\frac{b}{a}\right)}
\begin{vmatrix}
a & & & & & 0 \\
 & \ddots & & & \iddots & \\
 & & a & 0 & & \\
 & & c & d-\dfrac{bc}{a} & & \\
 & \iddots & & & \ddots & \\
c & & & & & d-\dfrac{bc}{a}
\end{vmatrix}
$$

$$
= a^n\left(d-\frac{bc}{a}\right)^n = (ad-bc)^n
$$

证二： 将行列式第 $2n$ 行依次与第$2n-1$行, …, 第2行对调(作$2n-2$次相邻对换), 再把第$2n$ 列依次与$2n$-1列 , …, 第2列对调, 得

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & b & & & & & & \\ c & d & & & & & & \\ & & a & & & & & b \\ & & & \ddots & & & \unicode{x22F0} & \\ & & & & a & b & & \\ & & & & c & d & & \\ & & & \unicode{x22F0} & & & \ddots & \\ & & c & & & & & d \end{vmatrix} = D_2 D_{2(n-1)}$$

$$= \cdots$$

$$= (D_2)^n$$

$$= (ad - bc)^n$$

思考题3 计算 $D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$

$D_n = xD_{n-1} + a_n$

解 $D_n \xlongequal{\text{按第一列展开}} x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$

$+(-1)^{n+1} a_n (-1)^{n-1}$

返回

$$D_n = xD_{n-1} + a_n$$

$$D_{n-1} = xD_{n-2} + a_{n-1}$$

$$D_{n-2} = xD_{n-3} + a_{n-2}$$

$\cdots\cdots$

$$D_2 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x + a_1 \end{vmatrix} = xD_1 + a_2$$

$$D_1 = x + a_1$$

$$\therefore D_n = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

$$(5)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix} \overset{r_i - r_2}{\underset{i=3,\cdots,n}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2 - 2r_1}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

(5)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,3,\cdots,n]{r_i - r_2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 + 2r_1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

$$(6)\quad D=\begin{vmatrix}1&4&9&16\\4&9&16&25\\9&16&25&36\\16&25&36&49\end{vmatrix}\xlongequal[c_2-c_1]{\substack{c_4-c_3\\c_3-c_2}}\begin{vmatrix}1&3&5&7\\4&5&7&9\\9&7&9&11\\16&9&11&13\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_2]{c_4-c_3}\begin{vmatrix}1&3&2&2\\4&5&2&2\\9&7&2&2\\16&9&2&2\end{vmatrix}$$

$$=0$$

返回

$$(6)\quad D=\begin{vmatrix}1&4&9&16\\4&9&16&25\\9&16&25&36\\16&25&36&49\end{vmatrix}\overset{r_3-r_2}{\underset{r_4-r_1}{=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1&4&9&16\\4&9&16&25\\5&7&9&11\\15&21&27&33\end{vmatrix}=0$$

两行对应成比列

返回

推广 $$D=\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 & (a+4)^2 \\ (a+2)^2 & (a+3)^2 & (a+4)^2 & (a+5)^2 \\ (a+3)^2 & (a+4)^2 & (a+5)^2 & (a+6)^2 \end{vmatrix}$$

$$=0$$

下面讨论将n阶行列式转化为$n-1$阶行列式计算的问题，即

1.3 行列式展开定理

定义 在给定的n阶行列式$D=\left|a_{ij}\right|_n$中，把元素a_{ij}所在的i行和j列的元素划去，剩余元素构成的$n-1$阶行列式称为元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}；而元素a_{ij}的代数余子式记作A_{ij}

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例10 在行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & 5 & -8 \\ 1 & 3 & -5 & 10 \end{vmatrix}$ 中

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -5 & 10 \end{vmatrix}=11,\ A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=11$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -5 & 10 \end{vmatrix}=12,\ A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-12$$

引理 若 D 的第 i 行元素除 a_{ij} 外都是零，则 $D = a_{ij}A_{ij}$

定理3 n阶行列式 $D = \left|a_{ij}\right|_n$ 等于它的任意一行(列)的所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}\ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}\ (j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

定理4 n阶行列式 $D=\left|a_{ij}\right|_n$，则

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

证 由

$$G=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0 \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{----- 第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{----- 第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

及降阶法将 G 按 j 行展开有

$$G=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$$

总结 n行列式的计算方法

1. **定义法**——利用n阶行列式的定义计算;
2. **三角形法**——利用性质化为三角形行列式来计算;
3. **降阶法**——利用行列式的按行(列)展开性质对行列式进行降阶计算;
4. **加边法(升阶法)**;
5. **递推公式法**;
6. **归纳法**.

例1 计算 n 阶行列式(行和相同)

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解 $D_n \xlongequal{c_1+c_i(i=2,3,\cdots,n)} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ 1 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_j - r_1\,(j=2,3,\cdots,n)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

例2 计算 n 阶行列式（**两道一点**）

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

解 $D_n = a_1a_2\cdots a_n + (-1)^{n+1} b_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$

$= a_1a_2\cdots a_n + (-1)^{n+1} b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n$

例3 计算$n+1$阶行列式(爪形)

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & d_1 & & & \\ b_2 & & d_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_n & & & & d_n \end{vmatrix}$$

其中 $d_i \neq 0,\ i=1,2,\cdots,n$

解 $$D=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & d_1 & & & \\ b_2 & & d_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_n & & & & d_n \end{vmatrix}$$

当$d_1, d_2, \cdots, d_n$全不为零时

$$D \xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{c_1 - \frac{b_{j-1}}{d_{j-1}} c_j} \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{d_k} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & d_1 & & & \\ 0 & & d_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & d_n \end{vmatrix}$$

$$= (a_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{d_k}) d_1 d_2 \cdots d_n$$

例4 证明n阶(三对角)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ & & & & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$$ 其中 $\alpha\neq\beta$

证 对行列式阶数n用数学归纳法证明

1° $n=1$ 时，$D_1 = |\alpha+\beta| = \alpha+\beta = \dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}$

结论成立.

$n=2$ 时，$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$

$$= (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta = \frac{\beta^3-\alpha^3}{\beta-\alpha}$$

结论成立.

2° 设$n-1$，$n-2$时结论成立,

则对于n阶行列式 D_n 按第一行展开有

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$$

$$=(\alpha+\beta)\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}-\alpha\beta\frac{\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}}{\beta-\alpha}$$

$$=\frac{\beta^{n+1}-a^{n+1}}{\beta-\alpha}$$

例5 证明范德蒙(Vandermonde)行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

$$(n \ge 2)$$

证 用数学归纳法证明

$n=2$ 时，$V_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod\limits_{1\le j<i\le 2}(x_i-x_j)$

结论成立.

假设对$n-1$阶行列式结论成立, 下证n阶成立.

从第 n 行开始, 每一行减去前一行的x_1倍, 目的是把第一列除1以外的元素都化为零. 然后按第一列展开, 并提取各列的公因子, 可以得到:

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)V_{n-1}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{2 \le j < i \le n}(x_i - x_j)$$

$$= \prod_{1 \le j < i \le n}(x_i - x_j)$$

或者利用递推公式

$$V_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)V_{n-1}$$

$$V_{n-1}=(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)V_{n-2}$$

…… …… …… ……

$$V_3=(x_n-x_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-2})V_2$$

$$V_2=x_n-x_{n-1}$$

由上述递推结果即可得到结论.

预 习 1.4—— 2.2