

南京邮电大学 2014/2015 学年第一学期

《线性代数与解析几何》期末试卷(A)

院(系)_____ 班级_____ 学号_____ 姓名_____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

得分

一.填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 均是四维列向量, 且四阶行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = m$,

$|\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n$, 则行列式 $|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| =$ _____

2. 设方阵 A 满足 $A^2 + A - 4I = 0$, 其中 I 为单位矩阵, 则 $(A - I)^{-1} =$ _____.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, B 为三阶非零矩阵, 且 $AB = 0$, 则 $t =$ _____.

4. 空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 36 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$ 在 xOz 平面上的投影曲线方程为 _____.

5. 若四阶方阵 A 与 B 相似, 矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则 $|B^{-1} - I| =$ _____.

二.选择题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 则必有 ()

(A) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(B) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(C) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

(D) $(AB)^* = A^*B^*$

2. 非齐次线性方程组 $AX = b$ 中已知未知量个数为 n , 方程个数为 m , 系数矩阵 A 的秩为 r , 则 ()

(A) $r = m$ 时方程组 $AX = b$ 有解

(B) $r = n$ 时方程组 $AX = b$ 有唯一解

(C) $m = n$ 时方程组 $AX = b$ 有唯一解

(D) $r < n$ 时方程组 $AX = b$ 有无穷多解

3. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列线性相关的向量组是 ()

(A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ (B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

(C) $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$ (D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$

4. 设直线 $L: \begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $\pi: 4x+2y+z-2=0$, 则 ()

- (A) L 与 π 平行 (B) L 与 π 垂直
(C) L 在 π 上 (D) L 与 π 斜交

5. 若二次型 $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3$ 正定, 则 a 的取值范围是 ()

(A) $(-2, 2)$ (B) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (C) $(-3, 3)$ (D) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

得 分

三、(本题 10 分) 设 $AB = A + 2B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 求矩阵 B .

解 因为 $AB = A + 2B$, $(A - 2I)B = A$, 所以 $B = (A - 2I)^{-1}A$

$$(A - 2I: I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{所以 } B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

得 分

四、(本题 10 分) 求向量组 $\alpha_1 = (6, 4, 1, -1, 2)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 2, 3, -4)^T$, $\alpha_3 = (1, 4, -9, -16, 22)^T$ 的秩和它的一个极大线性无关组, 并用该极大线性无关组表示其余向量.

得 分

五、(本题 10 分) 在平面 $\pi: x+2y-z=20$ 上作一直线 Γ ，使直线 Γ 过另

一直线 $L: \frac{x-1}{6} = \frac{y}{10} = \frac{z}{7}$ 与平面 π 的交点,且 Γ 与 L 垂直, 求直线 Γ 的方程.

得 分

六、(本题 12 分) 已知方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + k x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \end{cases}$$
 , 问 k 为何值时, 方程组有

唯一解? 无解? 有无穷多解? 并在方程组有无穷多解时写出通解.

得 分

七、(本题 12 分) 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2kx_1x_3$ 经正交变换

$x = Qy$ 可以化成标准形 $2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2$, 求参数 $k(k > 0)$ 及一个合适的正交

矩阵 Q .

得 分

八、(本题 6 分) 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, I 为 n 阶单位矩阵, 已知矩阵 $B = \lambda I + A^T A$, 试证: 当 $\lambda > 0$ 时矩阵 B 为正定矩阵.