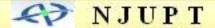
# 极限与连续习题课

- 一. 内容与要求
  - 1. 了解极限的两个存在准则并会应用
  - 2. 会用两个重要极限求极限
- 3. 掌握无穷小的比较与无穷小阶的估计,会利用等价无穷小替换求极限
- 4. 理解函数在一点连续、间断的概念,会判断间断点的类型
- 5. 了解初等函数的连续性,掌握闭区间上连续函数的性质



#### 知识要点:

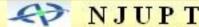
- 1. 两个准则:夹逼准则、单调有界必有极限准则
- 2. 两个重要极限(一般形式)

$$1^{0} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1; \qquad 2^{0} \lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

3.若:  $u(x) \rightarrow 1, v(x) \rightarrow \infty, (1^{\infty})$ 

$$:: \lim u(x)^{v(x)} = \lim \left[ (1 + u(x) - 1)^{\frac{1}{u(x) - 1}} \right]^{[u(x) - 1]v(x)}$$

$$\lim u(x)^{v(x)} = e^{\lim v(x)[u(x)-1]}$$



## 4. 常用的等价无穷小关系

$$x \to 0$$
 时,  
 $\sin x \sim x$  ,  $\tan x \sim x$  ,  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$  ,  $\arcsin x \sim x$  ,  $\arctan x \sim x$  ,  $\sqrt{1+x}-1\sim \frac{1}{2}x$   $\sqrt[n]{1+x}-1\sim \frac{1}{n}x$   $(n\in N^+)$   $\ln(1+x)\sim x$  ,  $\log_a(1+x)\sim \frac{x}{\ln a}$   $(a>0,\neq 1)$   $e^x-1\sim x$  ,  $a^x-1\sim x\ln a$   $(a>0,\neq 1)$ 

注: 以上各式中的x都可换成任意无穷小u(x).

### 5. 间段点的判别方法:

间断点存在:(1)函数无定义点(分母为零的点)

(2)分段函数的分段点可能是间断点

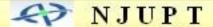
### 间断点的类型:

#### 6. 求极限,常用方法如下:

- (1) 利用极限的运算性质
- (2) 利用函数的连续性
- (3) 利用极限存在两个准则
- (4) 利用两个重要极限
- (5) 利用等价无穷小代换
- (6) 利用左右极限
- (7) 利用变量代换

#### 7.判断极限不存在的方法:

(1). 子列(数列). (2).左、右极限.(3). 函数列.



#### 二.典型例题

#### 1. 求极限

(1). 
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}} + \dots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)$$

(2). 
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n} \ (x\geq 0)$$

# 两个常用的极限

(1) 若 
$$|q| < 1$$
, 那么  $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$ ;

(2) 若
$$a > 0$$
且 $a \neq 1$ ,那么 $\lim_{x \to 0} a^x = 1 = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a}$   
例 设 $x_n = (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$ ,求 $\lim_{n \to \infty} x_n$ 

思考:设a,b,c,d均为正数,则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n + d^n} =$$

(2). 
$$\Re \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n} \ (x\geq 0)$$

解

注: 设
$$a_i > 0, (i = 1, 2, \dots, m),$$
 求  $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1}^n + a_2^n + \dots + a_m^n$ 

2 设
$$a > 0$$
,  $a_1 > 0$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n})$ ,  $n = 0,1,2,\cdots$  试证 $\{a_n\}$ 收敛,并求 $\lim_{n \to \infty} a_n$ .

#### 3. 求极限

(1). 
$$\lim_{x\to a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} (a\neq n\pi)$$

(2). 
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$$
  $(a>0,b>0,c>0)$ 

(3). 
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$$

4. 求下列极限

(1) 
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x\sqrt{1 + \sin^2 x} - x}$$

(2) 
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^x + \sin^2 x) - x}{\ln(e^{2x} + x^2) - 2x};$$

$$(3) \lim_{x \to \pi} \frac{\sin(mx)}{\sin(nx)} (m.n \in N^+)$$

$$(4)\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos\beta x}{\ln\cos\alpha x} \quad (\alpha,\beta\neq 0)$$

(5) 
$$\lim_{x\to 0} \left( \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$$
.

5. 已知 
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2$$
, 求  $\lim_{x\to 0} f(x)$ 。

6.(1).求 $x \to 1^+$ 时,  $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1 \cdot \ln x}$ 是x - 1的几阶无穷小?

 $(2)x \rightarrow 0$ 时 $f(x) = e^{x^2} - \cos x$ 是x的几阶无穷小?

设
$$f(x) = \frac{x}{1 - e^{\frac{x}{1 - x}}}$$
,讨论间断点及类型 1.10 总习题1(7).

8.(1) 讨论
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{1 + x^n}$$
 ( $x \ge 0$ )的连续性.

(2).设
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n-1} + ax + b}{1 + x^{2n}}$$
为连续函数,求 $a,b$ 

 $\forall f(x) \in C_{[a,b]}, a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ 

证明
$$\exists \xi \in (a,b)$$
 使得 $f(\xi) = \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$ 

10.设 $f(x) \in C_{[0,2a]}$ ,且f(0) = f(2a),证明:∃ $\xi \in [0,a]$ ,使得 $f(\xi) = f(a + \xi)$ .