6、证明向量$\vec{a}$垂直于向量$(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\;\vec{b}$。

证明：因 $\vec{a}\cdot[(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}]$

$$=(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$=0$$

故 $\vec{a}\perp(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$

7、设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为单位向量，且满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，求$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$的值。

解：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

$$\Rightarrow (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{c})+2(\vec{b}\cdot\vec{c})+2(\vec{c}\cdot\vec{a})=0$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{1}{2}[|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2]$$

$$=-\frac{3}{2}$$

8、已知$M_1(1,-1,2), M_2(3,3,1), M_3(3,1,3)$，求与两向量$\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}$都垂直的单位向量。

解：$\overrightarrow{M_1M_2} = (2, 4, -1)$

$\overrightarrow{M_2M_3} = (0, -2, 2)$

令 $\vec{a} = (\overrightarrow{M_1M_2}) \times (\overrightarrow{M_2M_3}) = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (6, -4, -4)$

则所求单位向量为：$\vec{a^0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{17}}(3, -2, -2)$

姓名　　　　　　学号　　　　　　　　　评分

9、已知四点 $A(-1,2,4), B(6,3,2), C(1,4,-1), D(-1,-2,3)$，求

(1) ΔABC 的面积

解：$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cdot \sin\angle BAC = \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$

而 $\vec{AB} = (7, 1, -2)$，$\vec{AC} = (2, 2, -5)$

故 $\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 7 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-1, 31, 12)$

故 $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|(-1, 31, 12)| = \frac{1}{2}\sqrt{1106}$

(2) 四面体 $ABCD$ 的体积。

解: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|$

而 $\overrightarrow{AD}=(0,-4,-1)$

故 $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix}=-136$

故 $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\times|-136|=\frac{68}{3}$

返回

第四章　空间解析几何与向量运算

4.1　空间直角坐标系与向量

4.2　向量的乘法

4.3　平面

4.4　空间直线

4.5　曲面与空间曲线

返回

4.5 曲面与空间曲线

一、 曲面及其方程

二、 柱面、锥面、旋转曲面

三、 二次曲面

四、 空间曲线及其方程

五、 空间曲线在坐标面上的投影

返回

一、曲面及其方程

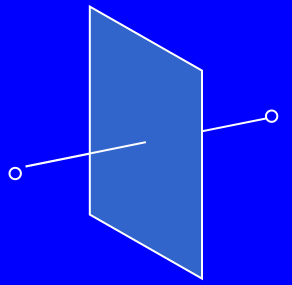
例 1 求到两定点$A(1,2,3)$ 和$B(2,-1,4)$等距离的点的轨迹方程.

解: 设轨迹上的动点为 $M(x,y,z)$, 则$|AM|=|BM|$,即

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$

化简得 $2x-6y+2z-7=0$

说明: 动点轨迹为线段 AB 的垂直平分面



显然在此平面上的点的坐标都满足此方程,

不在此平面上的点的坐标不满足此方程.

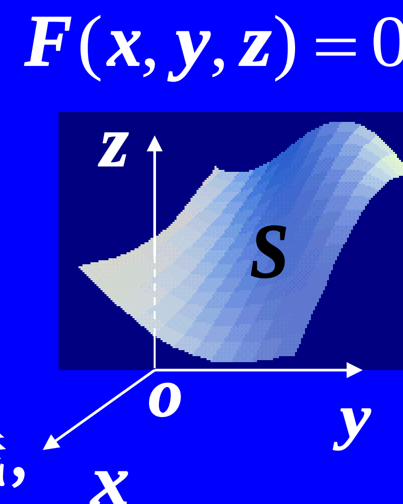
定义 如果曲面 S 与方程 $F(x, y, z) = 0$ 有下述关系

(1) 曲面 S 上的任意点的坐标都满足此方程;

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足此方程,

则 $F(x, y, z) = 0$ 叫做**曲面 S 的方程**,

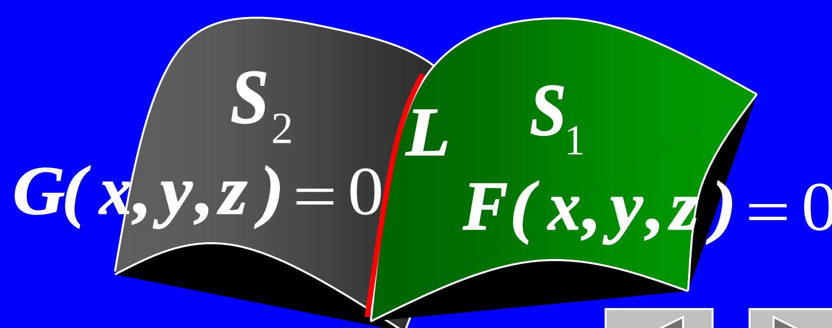
曲面 S 叫做方程 $F(x, y, z) = 0$ 的**图形**.



空间曲线: 空间曲线可视为两曲面的交线,

其一般方程为方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$



定义 如果曲面 S 与方程 $F(x, y, z) = 0$ 有下述关系

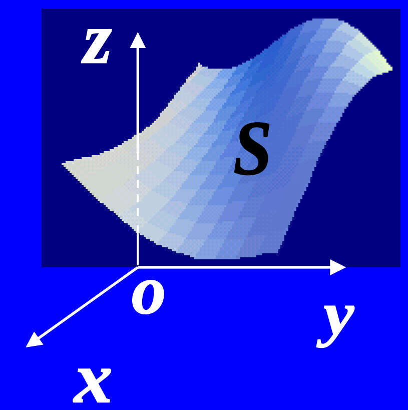
(1) 曲面 S 上的任意点的坐标都满足此方程;

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足此方程,

则 $F(x, y, z) = 0$ 叫做**曲面 S 的方程**,

曲面 S 叫做方程 $F(x, y, z) = 0$ 的**图形**.

$F(x, y, z) = 0$



两个基本问题 :

(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时,
求曲面方程.

(2) 已知方程时 , 研究它所表示的几何形状
(必要时需作图).

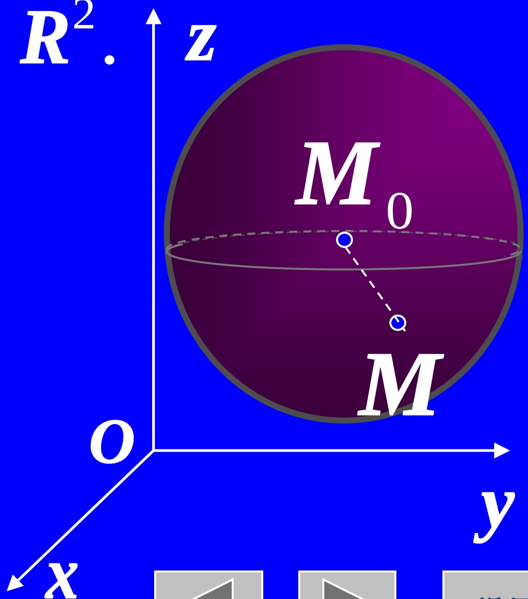
例2 求动点到定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 距离为 R 的轨迹方程.

解: 设轨迹上动点为 $M(x, y, z)$, 依题意 $|M_0M| = R$

即 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R$,

故所求方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2.$$



特别, 当 M_0 在原点时, 球面方程为

$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$

返回

例3 研究方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面

解: 配方得 $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$

此方程表示：球心为 $M_0(1,-2,0)$,

半径为 $\sqrt{5}$ 的球面.

说明：如下形式的三元二次方程（$A\neq 0$）

$$A(x^2+y^2+z^2)+Dx+Ey+Fz+G=0$$

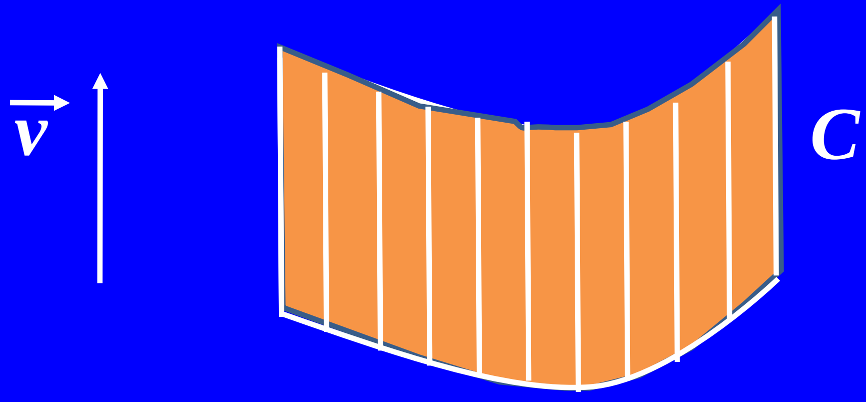
都可通过配方研究它的图形. 其图形可能是

一个球面，或点，或虚轨迹.

二、柱面、锥面、旋转曲面

柱面： 已知一空间曲线 C 及一非零向量 $\vec{v}$，平行于向量 $\vec{v}$ 且沿曲线 C 移动的直线形成的轨迹称为柱面.

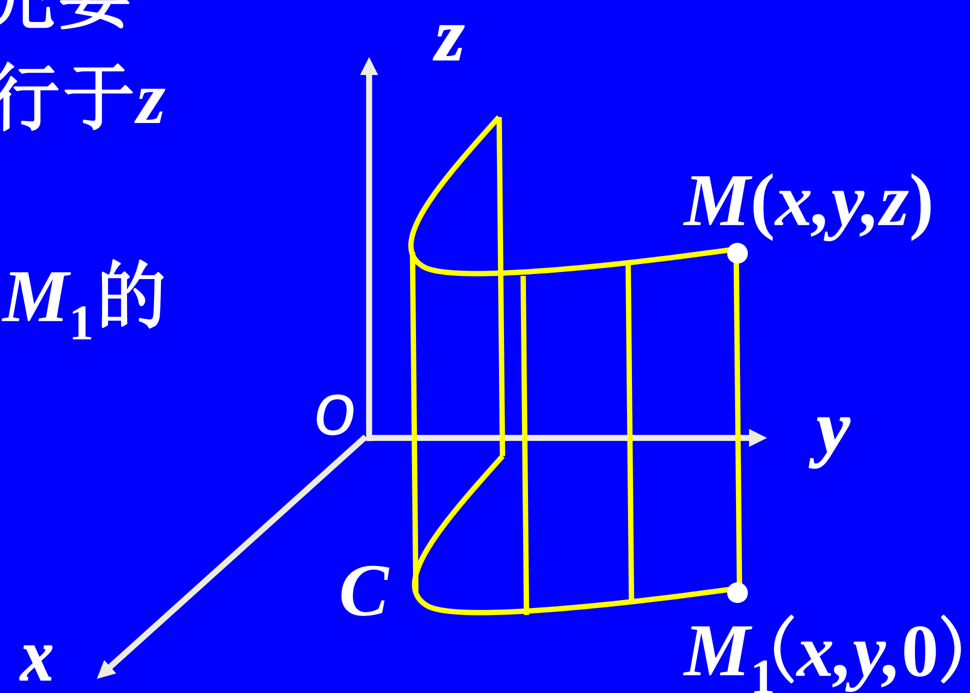
定曲线 C 叫做柱面的准线，动直线 L 叫做柱面的母线.



例4 求以xoy面上的曲线 $C:\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 为准线,

母线平行于z 轴的柱面方程.

解: $M(x,y,z)$在柱面上的充要条件是:过点M且平行于z轴的直线与C相交.



设交点为M_1, 则M_1的坐标为$(x,y,0)$, 且

$$F(x,y)=0.$$

即柱面方程为

$$F(x,y)=0.$$

返回

一般地, 在三维空间

方程 $F(x,y)=0$ 表示柱面

母线 平行于 z 轴; 准线 xoy 面上的曲线

l_1

方程 $G(y,z)=0$ 表示柱面

母线 平行于 x 轴’ 准线 yoz 面上的曲线

; l_2.

方程 $H(z,x)=0$ 表示柱面

母线 平行于 y 轴; 准线 xoz 面上的曲线 l_3.

缺一个变量的方程必表示柱面, 柱面母线平行于所缺变量同名的坐标轴.

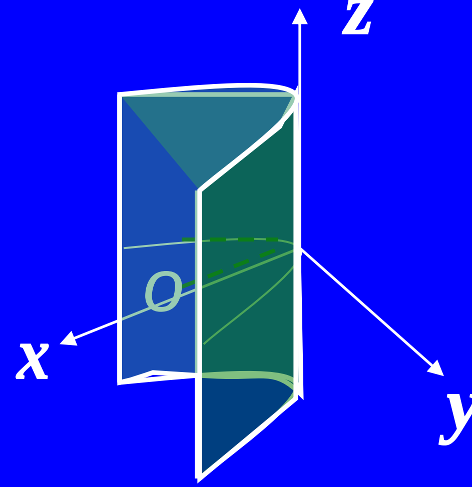
例5

(1) $y^2=2x$ 表示抛物柱面

母线平行于 z 轴;

准线为 xoy 面上的抛物线

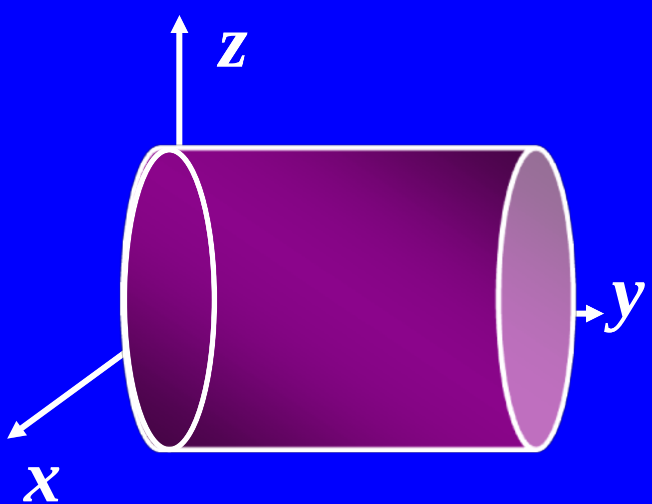
.



(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$ 表示椭圆柱面

母线平行于 y 轴;

准线为 xoz 面上的椭圆.



返回

例6 求母线平行于 y 轴且通过曲线

$$C:\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ 2x^2-y^2+3z^2=0 \end{cases}$$ 的柱面方程.

解: 从曲线 C 的方程中消去 y, 得

$$x^2+z^2=4.$$

即曲线C的等价方程为: $$\begin{cases} x^2+z^2=4 \\ 2x^2-y^2+3z^2=0 \end{cases}.$$

从而母线平行于 y 轴的柱面方程为

: $$x^2+z^2=4.$$

例6 求母线平行于 y 轴且通过曲线

$$C:\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\2x^2-y^2+3z^2=0\end{cases}$$ 的柱面方程.

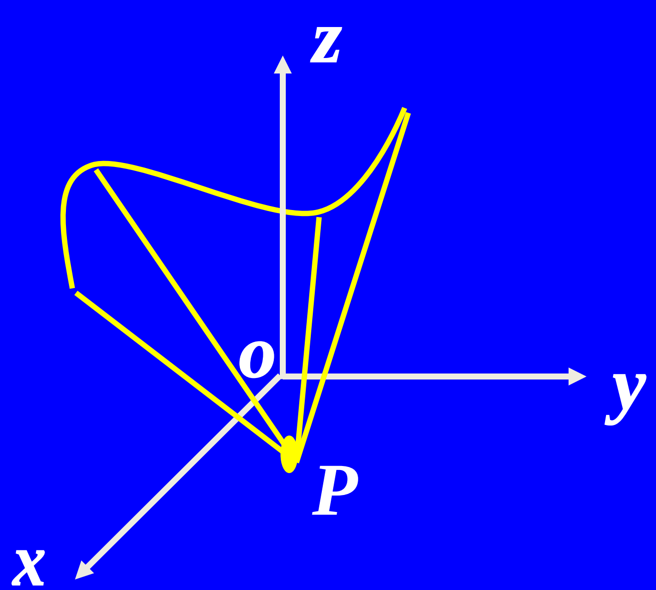
解: 从曲线 C 的方程中消去 y, 就得到母线平行于 y 轴的柱面方程:

$$x^2+z^2=4.$$

类似的, 从曲线 C 的方程中消去 x, 就得到母线平行于 x 轴的柱面方程; 消去 z, 就得到母线平行于 z 轴的柱面方程.

锥面： 已知一空间曲线 C 及曲线C 外一定点P，过P点且与曲线 C 相交的直线 L 形成的轨迹称为**锥面**.

点P称为锥面的**顶点**, 定曲线 C 叫做锥面的**准线**，动直线 L 叫做锥面的**母线**.



二次锥面： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$

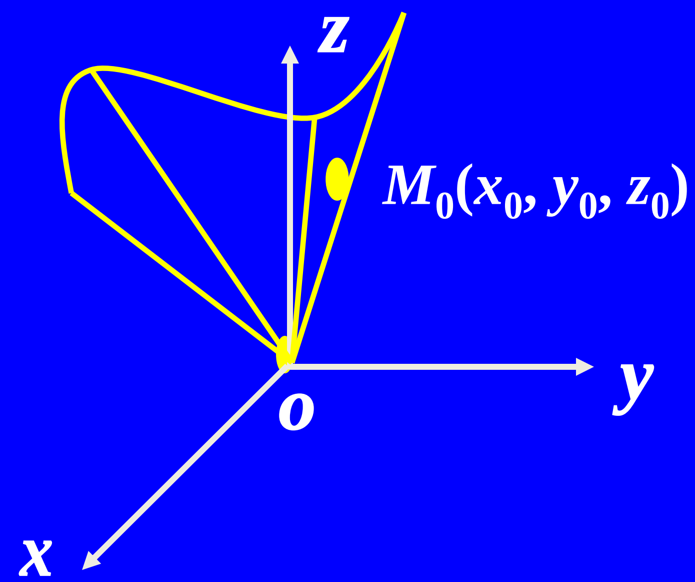
坐标原点在曲面上;

$M_0(x_0, y_0, z_0)$为曲面上任意一点,

则对任意的 t, 点 $M(tx_0, ty_0, tz_0)$

也在曲面上.

方程表示顶点在原点的锥面.

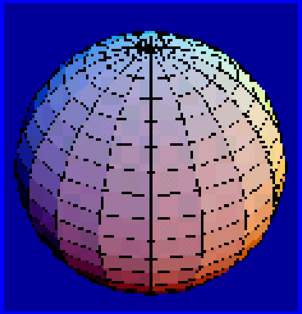


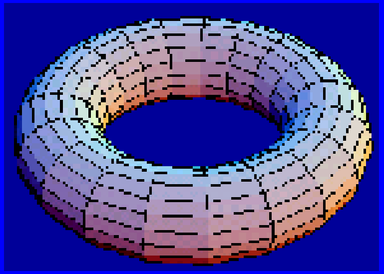
齐次方程必表示以原点为顶点的锥面

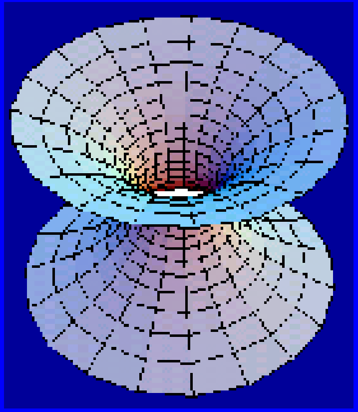
旋转曲面： 一平面曲线 C 绕平面上一定直线 L 旋转一周所产生的曲面叫做**旋转曲面**.

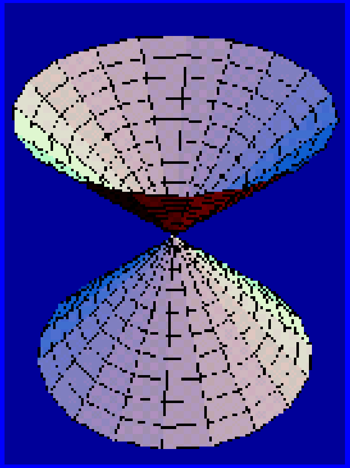
曲线 C 叫做旋转曲面的**母线**，

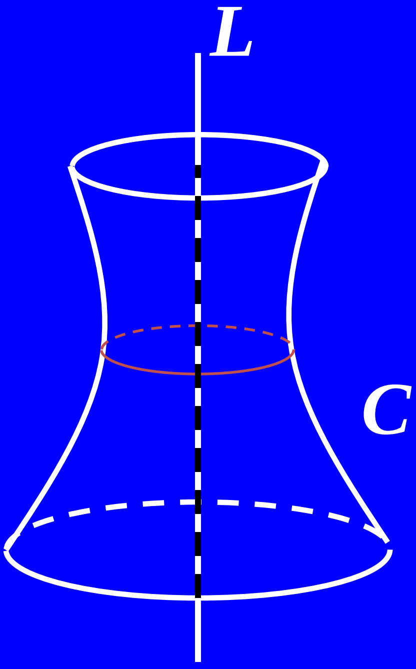
定直线 L 叫做旋转曲面的**旋转轴(轴)**.









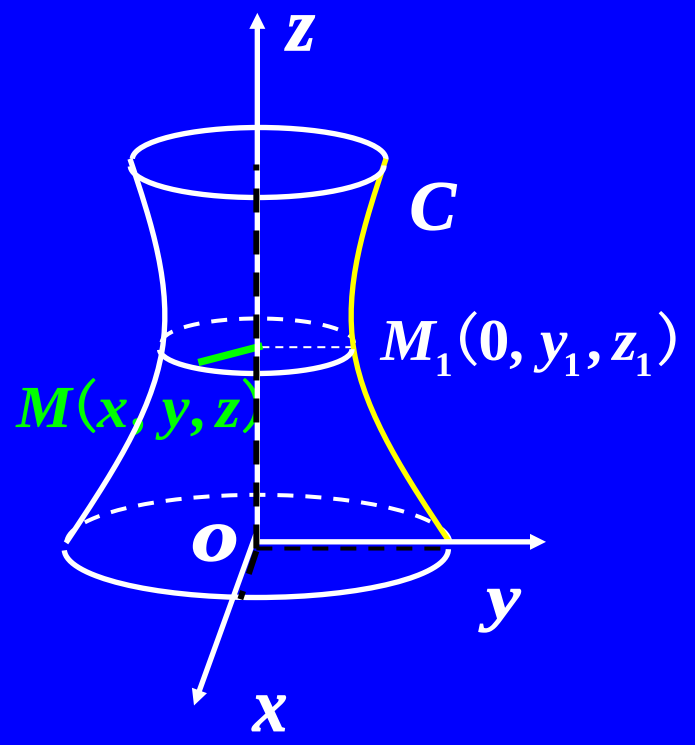


例7 求yoz面上曲线$C:\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$，绕$z$轴旋转所成曲面的方程.

解: 给定 yoz 面上曲线 C:

若点$M_1(0,y_1,z_1)\in C$，则有

$$f(y_1,z_1)=0$$



当绕z轴旋转时，该点转到

$M(x,y,z)$，则有

$$z=z_1,\quad \sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$$

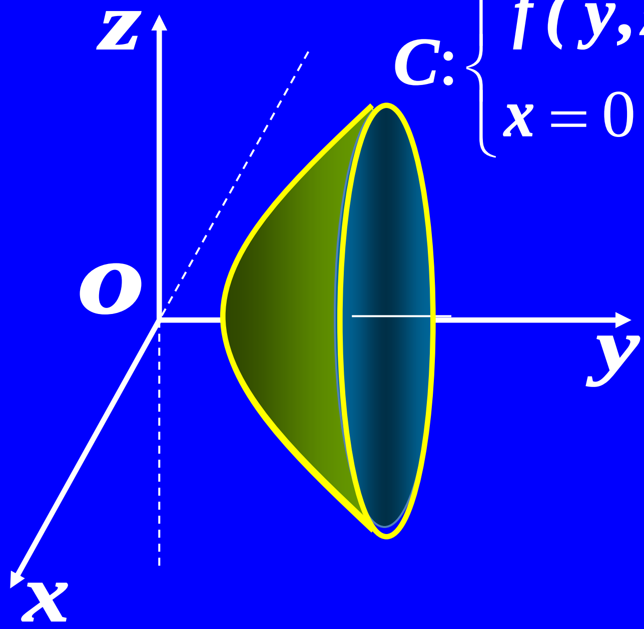
故旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

返回

思考： 当曲线 C 绕 y 轴旋转时，方程如何？

$$C:\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$



$$f\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$$

xoy面上的椭圆：$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$

绕 x 轴旋转得曲面方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2+z^2}{b^2}=1$;

绕 y 轴旋转得曲面方程 $\dfrac{x^2+z^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

这两种曲面都叫做旋转椭球面.

xoz面上的双曲线: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

绕 x 轴旋转得曲面方程 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2 + z^2}{c^2} = 1;$

绕 z 轴旋转得曲面方程 $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1;$

这两种曲面都叫做旋转双曲面.

*yoz*面上的抛物线: $\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$

绕它的对称轴 z 轴旋转得曲面方程

$$x^2 + y^2 = 2pz$$

这种曲面叫做旋转抛物面.

三、二次曲面

二次曲面： 三元二次方程所表示的曲面

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx$$
$$+Gx + Hy + Iz + J = 0$$

(二次项系数不全为 0)

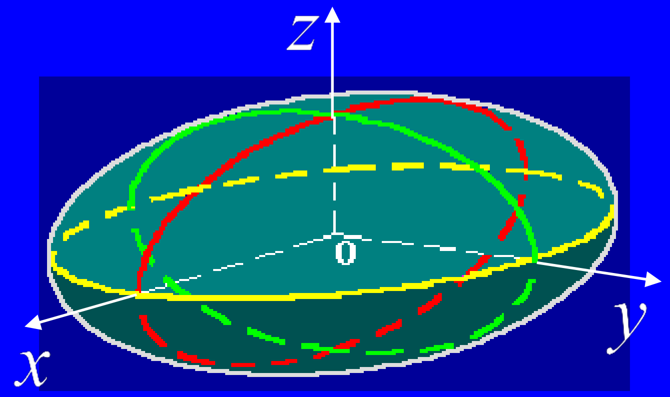
研究二次曲面特性的基本方法：截痕法

1. 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{ 为正数})$$

(1) 关于坐标面、坐标轴及坐标原点对称, 范围为:

$$|x|\le a,\quad |y|\le b,\quad |z|\le c$$



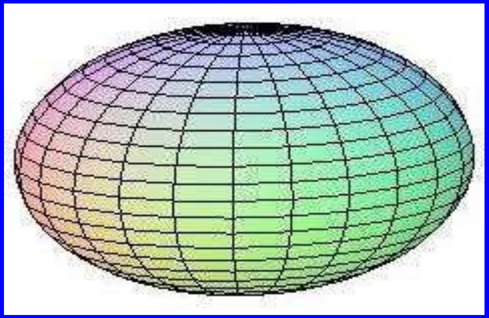
(2) 与坐标面的交线：椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$

(3) 截痕：与 $z=z_1\ (|z_1|<c)$ 的交线为椭圆：

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-z_1^{\ 2})}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-z_1^{\ 2})}=1 \\ z=z_1 \end{cases}$$

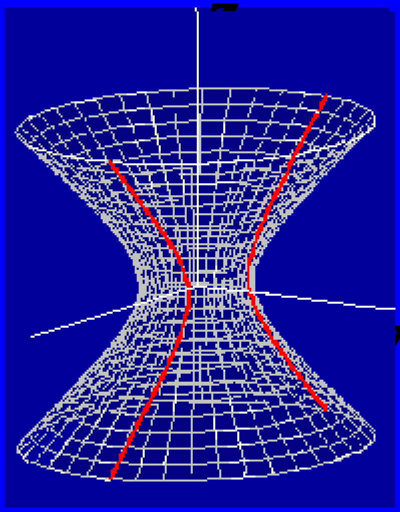


同样 $y=y_1\ (|y_1|\le b)$ 及 $x=x_1\ (|x_1|\le a)$ 的截痕也为椭圆.

(4) 当 $a=b$ 时为旋转椭球面； 当 $a=b=c$ 时为球面.

2. 双曲面

(1) 单叶双曲面



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$（a,b,c 为正数）

平面 $z=z_1$ 上的截痕为椭圆

平面 $y=y_1(x=x_1)$上的截痕情况:

1) $|y_1|<b$ 时，截痕为 双曲线:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_1^{\ 2}}{b^2}\\ y=y_1\end{cases}$$

(实轴平行于 x 轴;

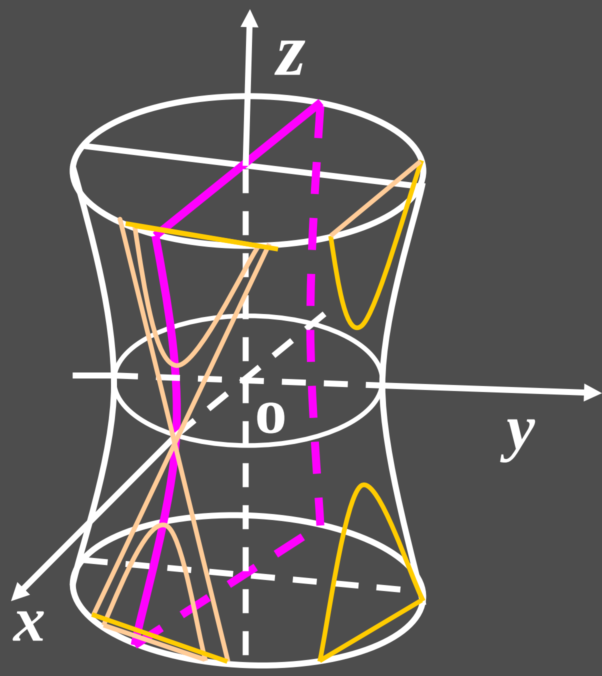
虚轴平行于 z 轴)

2）$|y_1| = b$ 时，截痕为 相交直线：

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} \pm \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = b\,(\text{或} -b) \end{cases}$$

3）$|y_1| > b$时，截痕为 双曲线：

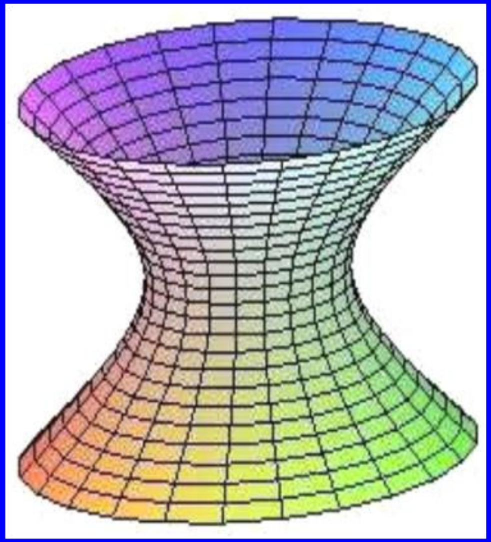
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = \underline{1 - \dfrac{y_1^2}{b^2}} < 0 \\ y = y_1 \end{cases}$$



（实轴平行于z 轴；虚轴平行于x轴）

2) $|y_1| = b$ 时，截痕为 相交直线：

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} \pm \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = b\,(\text{或} -b) \end{cases}$$



3) $|y_1| > b$时，截痕为 双曲线：

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = \underbrace{1 - \dfrac{y_1^2}{b^2}}_{<0} \\ y = y_1 \end{cases}$$

（实轴平行于z 轴；虚轴平行于x轴）

思考题: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 的形状如何？

返回

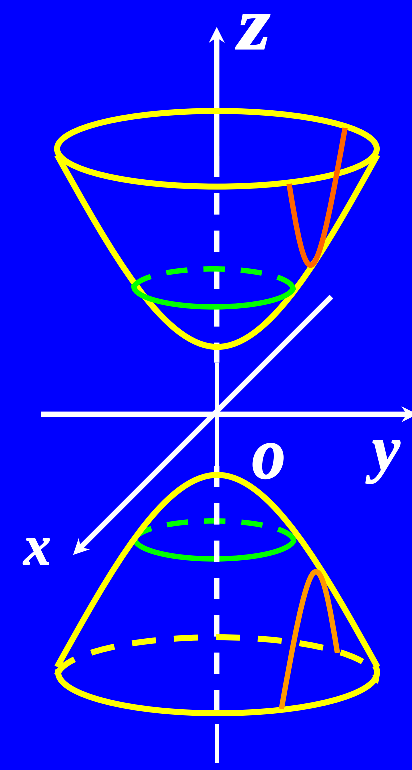
(2) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a, b, c \text{ 为正数})$$

平面 $y=y_1$ 上的截痕为 双曲线;

平面 $x=x_1$ 上的截痕为 双曲线;

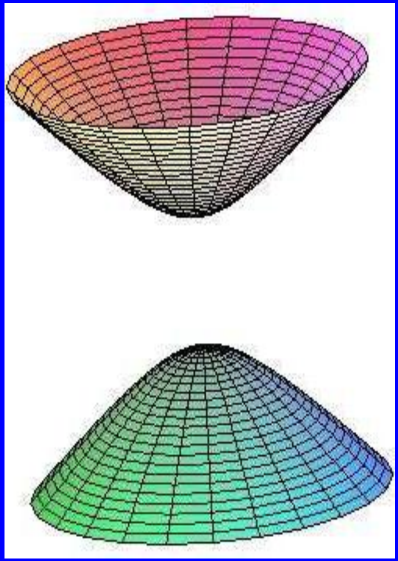
平面 $z=z_1\ (|z_1|>c)$ 上的截痕为椭圆.



返回

(2) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a,b,c\text{ 为正数})$$



平面 $y=y_1$ 上的截痕为 双曲线;

平面 $x=x_1$ 上的截痕为 双曲线;

平面 $z=z_1\ (|z_1|>c)$ 上的截痕为椭圆.

注意单叶双曲面与双叶双曲面的区别:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\begin{cases}1, & \text{单叶双曲面;}\\ -1, & \text{双叶双曲面.}\end{cases}$$

椭球面和双曲面的标准方程可统一写为:

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1 \qquad (A\cdot B\cdot C\neq 0)$$

（1） 当 A,B,C 皆正时, 表示椭球面;

（2） 当 A,B,C 两正一负时, 表示单叶双曲面;

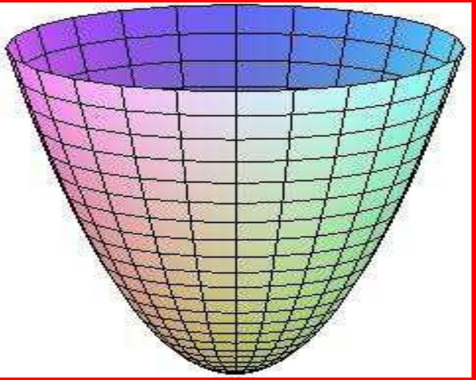
（3） 当 A,B,C 一正两负时, 表示双叶双曲面;

（4） 当 A,B,C 皆负时, 表示虚椭球面.

3、 抛物面

（1） 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad （p \text{ 与 } q \text{ 同号}）$$



(1) 范围：若$p>0$且$q>0$, 则

图形在 xOy 平面上方，否则在 xOy 平面下方.

(2) 对称性：图形关于z 轴、yOz 平面、xOz 平面对称.

(3) 截痕

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$$ 设 $p>0,\ q>0$

1^0 用坐标面 $xOy\,(z=0)$ 与曲面相截

截得一点，即坐标原点 $O(0,0,0)$

原点也叫椭圆抛物面的顶点.

与平面 $z=z_1\ (z_1>0)$ 的交线为椭圆.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2pz_1}+\dfrac{y^2}{2qz_1}=1 \\ z=z_1 \end{cases}$$

当 z_1 变动时，这种椭圆的**中心**都在 z 轴上.

与平面 $z=z_1\ (z_1<0)$ 不相交.

2^0 用坐标面 $xOz\ (y=0)$ 与曲面相截

截得抛物线 $\begin{cases} x^2=2pz \\ y=0 \end{cases}$

返回

与平面 $y = y_1$ 的交线为抛物线.

$$\begin{cases} x^2 = 2p\left(z - \dfrac{y_1^2}{2q}\right) \\ y = y_1 \end{cases}$$

它的轴平行于 z 轴

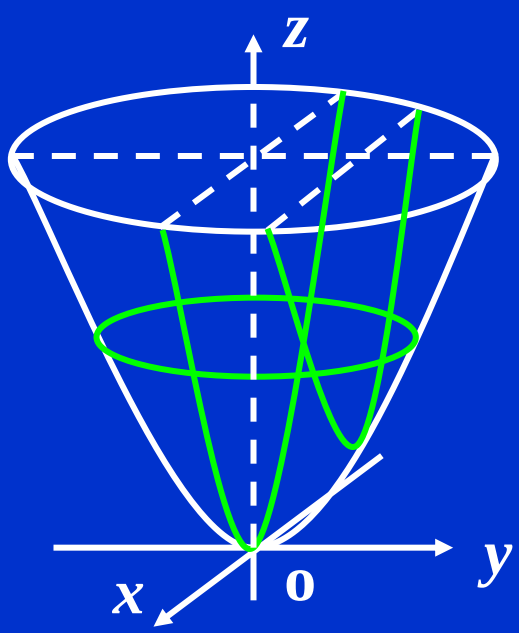
顶点 $\left(0, y_1, \dfrac{y_1^2}{2q}\right)$

3^0 用坐标面 yOz $(x = 0)$，$x = x_1$ 与曲面相截

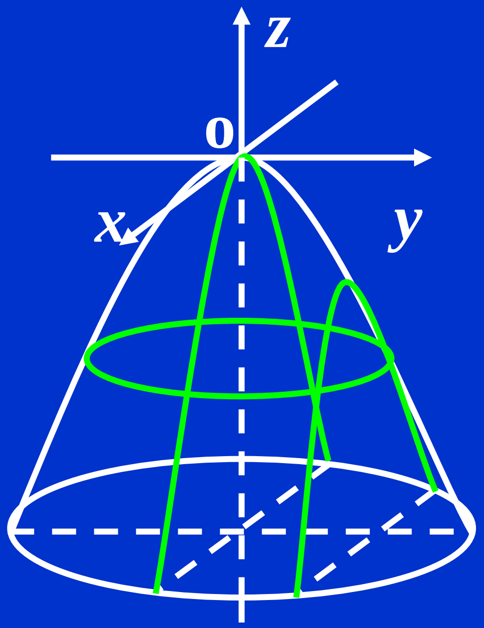
均可得抛物线.

同理当 $p < 0,\ q < 0$ 时可类似讨论.

椭圆抛物面的图形如下：



$p > 0, \quad q > 0$



$p < 0, \quad q < 0$

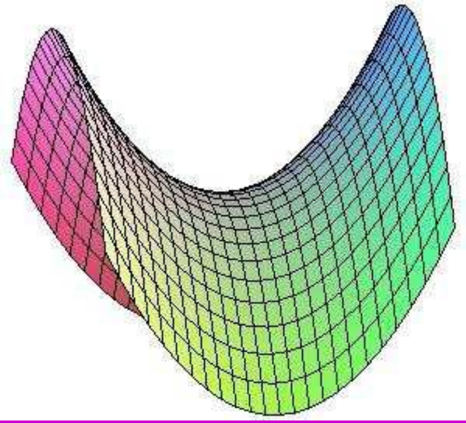
特殊地：当 $p=q$时，方程变为

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z \quad (p>0)$$ 旋转抛物面

（由 xOz 面上的抛物线 $x^2=2pz$ 绕它的轴旋转而成的）

（2） 双曲抛物面

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z, \quad (p \text{ 与 } q \text{ 同号})$$



(1) 范围：$x, y, z \in \mathrm{R}$, 曲面可向各方向无限延伸.

(2) 对称性：图形关于z 轴、yOz 平面、xOz 平面对称.

返回

(3) 截痕 (设$p < 0,\ q < 0$)

用平面$z = z_0\ (z_0 \neq 0)$截曲面所得截痕为双曲线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2pz_0} - \dfrac{y^2}{2qz_0} = 1 \\ z = z_0 \end{cases}$$

用平面$x = x_0$与$y = y_0$截曲面所得截痕为

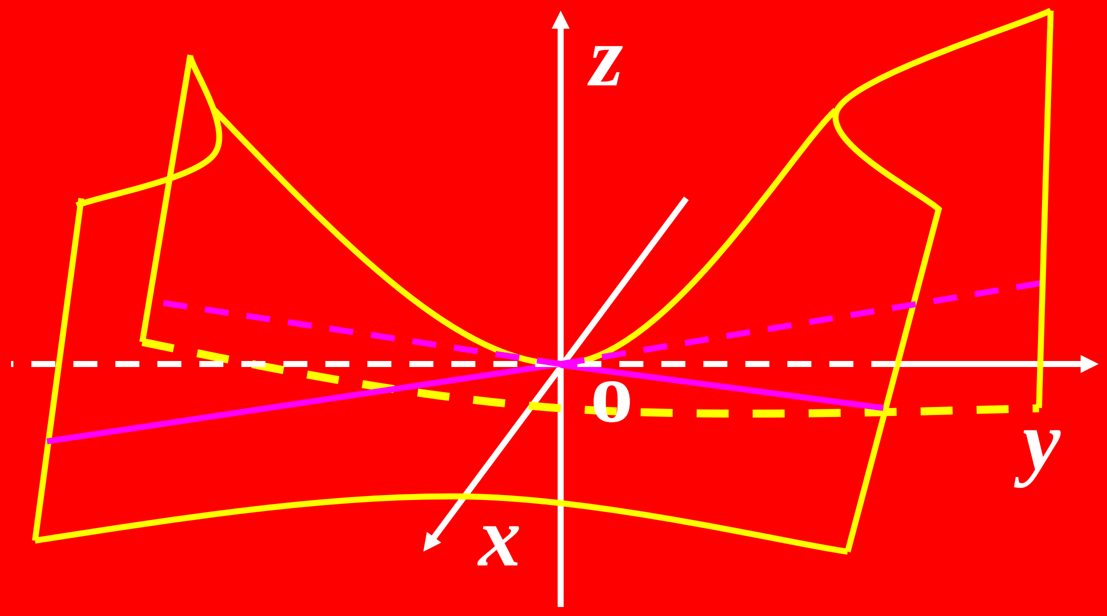
$$\begin{cases} z = \dfrac{x_0^{\ 2}}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} \\ x = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y_0^{\ 2}}{2q} \\ y = y_0 \end{cases}$$

这是两条抛物线.

双曲抛物面 (马鞍面)

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z\,,\quad (p<0,\ q<0)$$

图形如下：

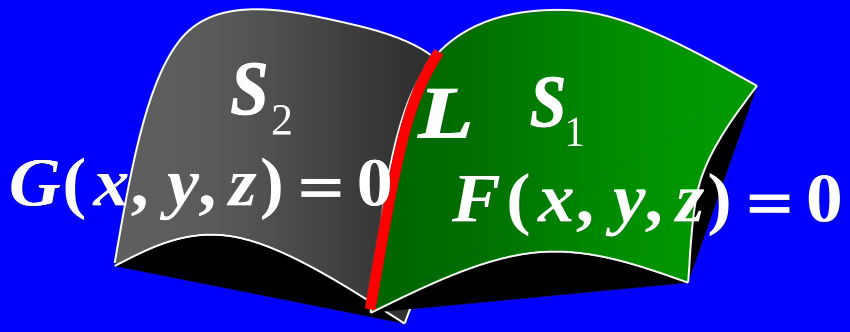


返回

四、空间曲线及其方程

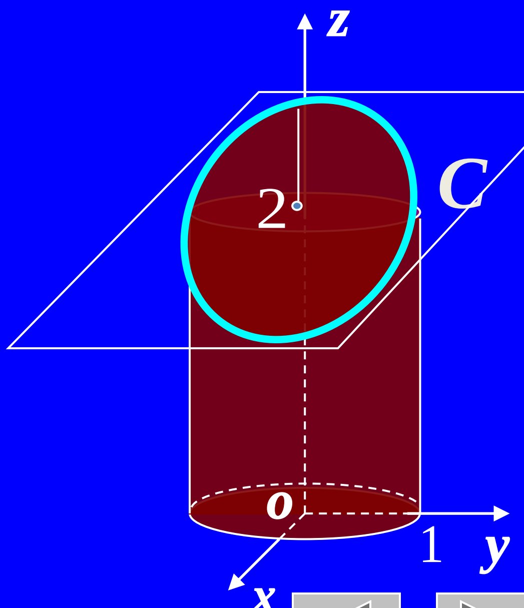
空间曲线可视为两曲面的交线, 其一般方程为方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$



例如, 方程组

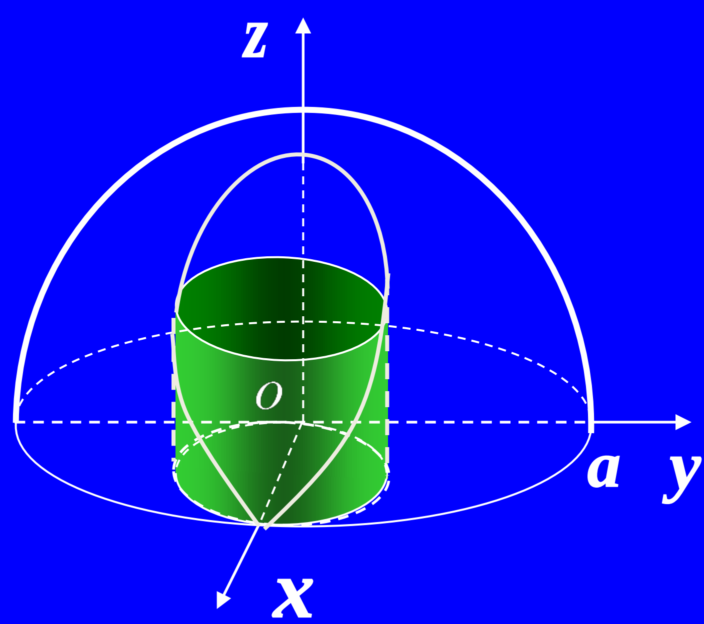
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$$

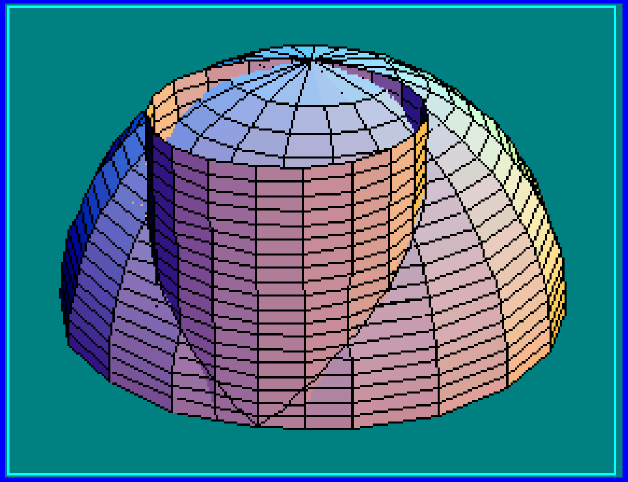


表示圆柱面与平面的交线 C.

又如, 方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$

表示上半球面与圆柱面的交线 C.





曲线的参数方程

将曲线C上的动点坐标x, y, z表示成参数 t 的函数：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \qquad\qquad a \le t \le b, \\ z = z(t) \end{cases}$$

称它为空间曲线的参数方程.

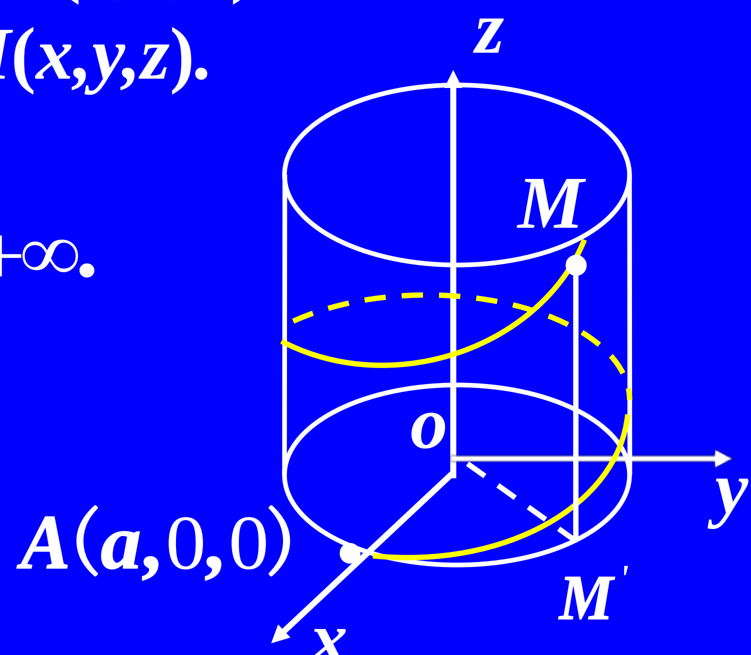
例8 一个动点以角速度 w 绕轴旋转，同时又以线速度 v 平行于轴作等速直线运动，这个动点的轨迹称为**螺旋线**. 试建立它的参数方程.

解: 建立直角坐标系，取时间 t 为参数.

设 $t = 0$ 时，动点位于点 $A(a,0,0)$.

时刻 t，动点运动至点 $M(x,y,z)$.

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, \quad 0 \le t < +\infty. \\ z = vt, \end{cases}$$



令 $\theta = \omega t$，得

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = \dfrac{v}{\omega}\theta, \end{cases} \quad 0 \le \theta < +\infty.$$

例9 将下列曲线一般方程化为参数方程

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$

解: (1) 根据第一方程引入参数，得所求为

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=\frac{1}{3}(6-2\cos t) \end{cases}$$

(2) 将第二方程配方 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$，得所求为

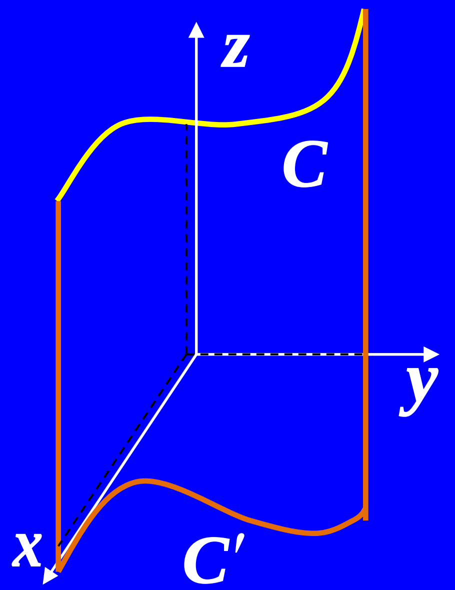
$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t \\ y=\frac{a}{2}\sin t \\ z=a\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t} \end{cases}$$

返回

空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$

消去 z 得投影柱面 $H(x,y)=0$,



则 C 在 xoy 面上的投影曲线 C' 为

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

C 在 yoz 面上的投影曲线

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

C 在 zox 面上的投影曲线

$$\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

例10 求如下曲线C在xoy面上的投影曲线方程：

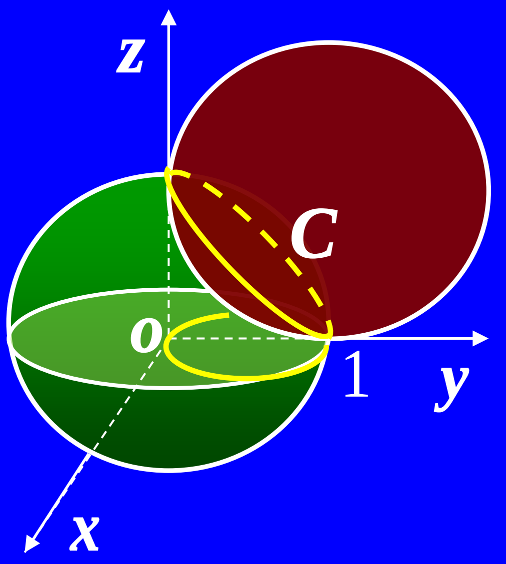
$$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$$

解： 消去z，得柱面：

$$x^2+2y^2-2y=0$$

在xoy面上的投影曲线为

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$$



返回

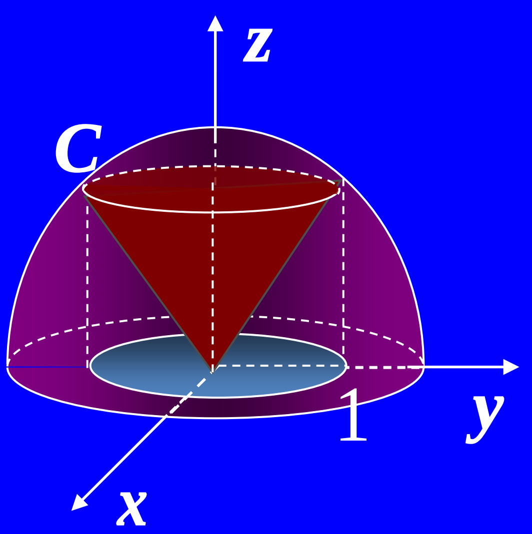
例11 设一个立体由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成，求它在 xoy 面上的投影.

解： 半球面与锥面交线为 $C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$

消去z，得柱面：$x^2+y^2=1$.

从而交线C在xoy面上的投影曲线C'：

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$$



故所围立体在xoy面上的投影为： $\begin{cases} x^2+y^2\le 1, \\ z=0. \end{cases}$

返回