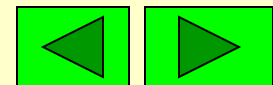


2.3 分块矩阵

2.3.1 分块矩阵的概念

- 处理有特点的大矩阵时需要进行分块
- **分法:** 将矩阵用纵线和横线分成若干小矩阵, 每个小矩阵称为原矩阵的子块.

定义 以子块为元素的矩阵称为**分块阵**.



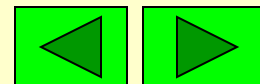
■ 常用分块方式

● 分成四块. 例如:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

特殊 A —— 视为一个子块

a_{ij} —— 视为一个子块

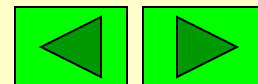


● 按列分块. 例如:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]$$

● 按行分块. 例如:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

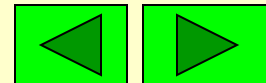


■ 分块对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$$

■ 分块三角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & * & \\ & A_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$$



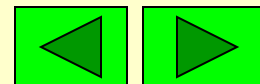
2.3.2 分块矩阵的运算

- **加法：** 原矩阵同形且分块方式相同

$$A + B = (A_{ij})_{s \times t} + (B_{ij})_{s \times t} = (A_{ij} + B_{ij})_{s \times t}$$

- **数乘：** 分块方式任意

$$kA = k(A_{ij})_{s \times t} = (kA_{ij})_{s \times t}$$



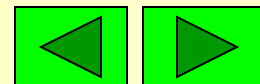
● **乘法**: $AB = C$ ($A_{m \times p}, B_{p \times n}$)

• A 的 **列数** = B 的 **行数**

• A 的 **列** 的分法 = B 的 **行** 的分法

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{bmatrix}$$

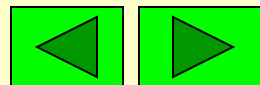
$$\begin{aligned} C_{ij} &= A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{it}B_{tj} \\ &= \sum_{k=1}^t A_{ik}B_{kj}, \quad i = 1, \cdots, s; \quad j = 1, \cdots, r. \end{aligned}$$



例1

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{array} \right]$$

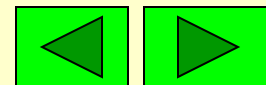
$$= \begin{bmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2E \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2E \\ A_{22}B_{21} \end{bmatrix}$$



● **转置:** $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}$

$$A^T = (A_{ij}^T)^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1t}^T & \cdots & A_{st}^T \end{pmatrix}$$

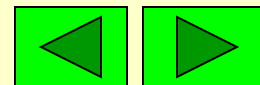
特别 $[A_1 \cdots A_t]^T = \begin{bmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_t^T \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_t \end{bmatrix}$



● 方阵的幂及行列式：当 A_i 是方阵时，
(分块对角矩阵的行列式)

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} A_1^m & & & \\ & A_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^m \end{bmatrix}, \quad (m \in N)$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{vmatrix} = |A_1| |A_2| \cdots |A_s|.$$



● 分块三角阵的行列式:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & * & \\ & A_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}, \text{ 当 } A_i \text{ 是方阵时,}$$

$$|A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_s|$$

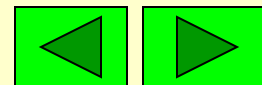
● 对角阵的逆矩阵:

当 $|A_i| \neq 0$ 时, 即 A_i 可逆时, A 可逆

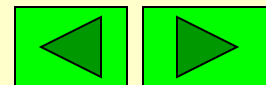
$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \ddots & & \\ A_s & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & A_{s-1}^{-1} & \\ & \ddots & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

例2 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $|A|$ 及 A^{-1}

解 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 3 = 6$



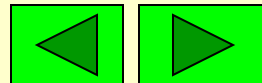
$$\begin{aligned}
 A^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



例3 设 $A, B \in M_3, |A| = 3, |B| = -2$. 求

$$\begin{aligned} 1. \begin{vmatrix} 3A & \mathbf{0} \\ AB & -5B \end{vmatrix} &= |3A| |-5B| \\ &= 3^3 |A| \cdot (-5)^3 |B| = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \begin{vmatrix} \mathbf{0} & 3A \\ -AB & 5B \end{vmatrix} &= (-1)^{3 \times 3} \begin{vmatrix} 3A & \mathbf{0} \\ 5B & -AB \end{vmatrix} = (-1)^{3 \times 3} |3A| |-AB| \\ &= -3^3 |A| \cdot (-1)^3 |A| |B| = -2 \cdot 3^5 \end{aligned}$$

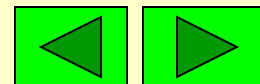


尤其要注意 $A_{m \times p} B_{p \times n} = 0$ 时的特殊情况:

***例4** $AB = A(B_1, B_2, \dots, B_n)$ A 为一子块

$$= (AB_1, AB_2, \dots, AB_n)$$
$$= (0, 0, \dots, 0)$$
$$\Rightarrow AB_j = 0, j = 1, \dots, n.$$

说明 B 的每一列都是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个解.



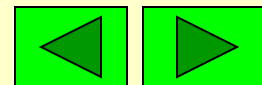
例5 $A_{m \times p} B_{p \times n} = C_{m \times n}$ 的不同理解:

$$(1) AB = A(B_1, B_2, \dots, B_n) = (AB_1, AB_2, \dots, AB_n)$$

$$C = (C_1, C_2, \dots, C_n) \Rightarrow AB_j = C_j, j = 1, \dots, n$$

$$(2) AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1 B \\ A_2 B \\ \vdots \\ A_m B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix} = C$$

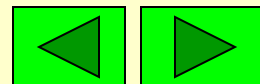
$$\Rightarrow A_i B = C_i, i = 1, \dots, m$$



2.3.3 分块矩阵的初等变换

本节内容提要

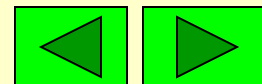
- ◆ 分块矩阵的初等变换
- ◆ 分块初等阵
- ◆ 利用分块矩阵的初等变换求秩



2.3.3 分块矩阵的初等变换

对分块矩阵也可以引进初等变换和初等矩阵的概念. 分块矩阵关于子块的一次初等变换, 可以看作是关于元素的一批初等变换的合成. 我们只以分成4块的情况简单解释.

设
$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

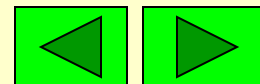


定义 下面三种针对分块矩阵 **M** 的变形,
统称为分块矩阵的初等变换:

初等行变换 **初等列变换**

- (1)换法: $r_i \leftrightarrow r_j$ $(c_i \leftrightarrow c_j)$
- (2)倍法: Pr_i $(c_iP), P$ — 可逆
- (3)消法: $r_i + Kr_j$ $(c_j + c_iK), K$ —矩阵

- 这里要假定运算满足可行性原则.
- 为什么要求 **P** 可逆?



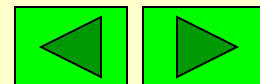
2.3.3 分块初等阵

分块单位阵 $\xrightarrow{\text{一次初等变换}}$ 分块初等阵

$$\begin{bmatrix} E_m & \\ & E_n \end{bmatrix} \rightarrow (1) \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} 0 & E_m \\ E_n & 0 \end{bmatrix} \quad \text{换法:}$$

$$\text{倍法: } (2) \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$$

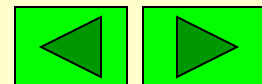
$$\text{消法: } (3) \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ K & E_n \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} E_m & K \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$$



- 对分块矩阵进行一次初等行(列)变换, 相当于给它左(右)乘以一个相应的分块初等矩阵:

换法:
$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A} \\ \mathbf{D} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$



倍法:

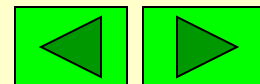
$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PA & PB \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AP & B \\ CP & D \end{bmatrix}$$

消法:

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ K & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ KA+C & KB+D \end{bmatrix}$$

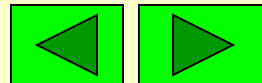
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ K & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & B \\ C+DK & D \end{bmatrix}$$



- 对分块阵进行一次初等行(列)变换, 相当于对原矩阵进行一系列初等行(列)变换.
- 分块初等变换不改变分块阵的秩.
- 消法分块初等变换保持行列式值不变.
- 用分块初等变换求逆.

$$(A:E) \xrightarrow{\text{分块行}} (E:A^{-1})$$

$$\begin{bmatrix} A \\ \dots \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{分块列}} \begin{bmatrix} E \\ \dots \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$



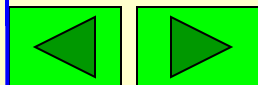
例1 求 $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1}$, 其中 A, B 可逆.

解 $\begin{bmatrix} A & C & | & E_m & 0 \\ 0 & B & | & 0 & E_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} E_m & A^{-1}C & | & A^{-1} & 0 \\ 0 & B & | & 0 & E_n \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} E_m & A^{-1}C & | & A^{-1} & 0 \\ 0 & E_n & | & 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} E_m & 0 & | & A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & E_n & | & 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$



总结：常用的分块矩阵求逆公式

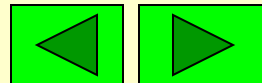
设 A, B 都是可逆方阵，则有下列公式.

$$(1) \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$



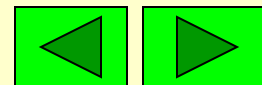
例2 用分块方法证明 $|AB| = |A||B|$,
其中 A 、 B 为 n 阶方阵.

证
$$\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & E_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -A \\ B & E_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |AB| &= \begin{vmatrix} AB & 0 \\ B & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -A \\ B & E_n \end{vmatrix} = (-1)^{n^2} \begin{vmatrix} -A & 0 \\ E_n & B \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n^2+n} \begin{vmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{vmatrix} = |A||B| \end{aligned}$$

所以 $|AB| = |A||B|$.

或
$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -AB \\ E_n & B \end{bmatrix}$$

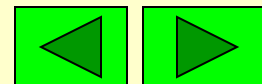


例3 证明 $\begin{vmatrix} A & C \\ D & B \end{vmatrix} = |A| |B - DA^{-1}C|$
(行列式第一降阶定理)

其中 A 为 n 阶可逆矩阵, B 为 m 阶方阵.

证

$$\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B - DA^{-1}C \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} A & C \\ D & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B - DA^{-1}C \end{vmatrix}$$
$$= |A| |B - DA^{-1}C|$$



例4 证明 $|E_m - AB| = |E_n - BA|$, 其中
 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, B 为 $n \times m$ 阶阵.

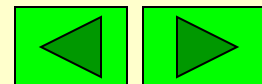
证

$$\begin{bmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n - BA \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{vmatrix} = |E_n - BA|$$

$$\begin{bmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} E_m - AB & A \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{vmatrix} = |E_m - AB|$$



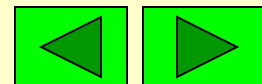
$$\therefore |E_m - AB| = |E_n - BA|$$

利用上式可得

$$|\lambda E_m - AB| = \lambda^{m-n} |\lambda E_n - BA|, \quad m > n, \lambda \text{ 为任意数.}$$

$$\begin{aligned} \because |\lambda E_m - AB| &= \lambda^m \left| E_m - \frac{1}{\lambda} AB \right| \quad (\lambda \neq 0) \\ &= \lambda^m \left| E_n - \frac{1}{\lambda} BA \right| \\ &= \lambda^{m-n} |\lambda E_n - BA| \end{aligned}$$

$\lambda = 0$ 时可见书上的说明.



注 本例的结果可以把 m 阶的行列式转化为 n 阶的行列式计算, 此时可称为
(降阶公式).

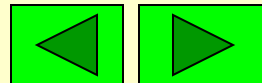
尤其是当 $n = 1$ 时, 即 A 为1列 B 为1行时,
等式的右端即为1个数.

例5 计算

解

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} = E_n + \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{vmatrix}$$



$$= \left| E_n + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| E_1 + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right|$$

$$= | \mathbf{1} + x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n |$$

$$= \mathbf{1} + x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

