王 [illegible] 学号 [illegible]

2、设 a_1 是任意一个非零的四维向量，$a_2=(2,1,0,0)$，$a_3=(4,1,4,0)$，$a_4=(1,0,2,0)$，若向量组 b_1,b_2,b_3,b_4 可由向量组 a_1,a_2,a_3,a_4 线性表示，试证明 b_1,b_2,b_3,b_4 线性相关。

证：$(\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=\begin{pmatrix}2&4&1\\1&1&0\\0&4&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&0\\2&4&1\\0&4&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&4&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore R(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2.$

$\therefore R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\le 3.$

$\because b_1,b_2,b_3,b_4$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示

$\therefore R(b_1,b_2,b_3,b_4)\le 3.$

$\therefore$ 矩阵 $B=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ 的秩小于其所含向量个数

$\therefore b_1,b_2,b_3,b_4$ 线性相关

3、在 R^3 中，已知向量组 $a_1=(1,1,0)^T,a_2=(0,1,1)^T,a_3=(-1,2,1)^T$，

3、在 R^3 中，已知向量组 $a_1=(1,1,0)^T, a_2=(0,1,1)^T, a_3=(-1,2,1)^T$，

证明 a_1,a_2,a_3 是 R^3 的一个基，并求向量 $b=(2,0,0)^T$ 在该基下的坐标。

证：$(a_1,a_2,a_3,b)=\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\1&1&2&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&3&-2\\0&1&1&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&3&-2\\0&0&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\times(-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&3&-2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+r_3]{r_2-3r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$

因 $(a_1,a_2,a_3)\sim I$，故 a_1,a_2,a_3 为 R^3 的一组基

且从上式可知：$b=a_1+a_2-a_3$

从而 b 在该基下坐标为：$(1,1,-1)^T$.

第六章　特征值与特征向量

6.1　特征值与特征向量

6.2　相似矩阵与矩阵的对角化

6.1 特征值与特征向量

一、特征值与特征向量的定义

二、特征值与特征向量的性质

三、特征值与特征向量的计算

四、关于特征值的一些结论

返回

一、 定义

引例 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix},\ \alpha=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$

$$A\alpha=\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=2\alpha, \qquad =\begin{pmatrix}4\\ -4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}= \qquad ,$$

$$A\gamma=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}\neq k\gamma.$$

定义 设 $A\in R^{n\times n},\ \alpha\in R^{n},\ \lambda\in R.$ 若

$$A\alpha=\lambda\alpha\ \left(\alpha\neq 0\right),$$

则称 λ 为 A 的一个**特征值**，

α 为 A 对应于 λ 的一个**特征向量**.

二、 性质

1. 设 $A\alpha=\lambda\alpha\left(\alpha\neq 0\right)$, 则

$$A\left(k\alpha\right)=k\left(A\alpha\right)=k\left(\lambda\alpha\right)=\lambda\left(k\alpha\right).$$

2. 设α_1,α_2 是矩阵A的属于特征值λ的特征向量, 则当$\alpha_1+\alpha_2\neq 0$时, $\alpha_1+\alpha_2$ 也是矩阵A的属于特征值λ的特征向量.

注意: 设$A\alpha_i=\lambda\alpha_i\left(i=1,2,\cdots,s\right)$, 则

$$A\left(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\right)$$
$$=\lambda\left(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\right).$$

特征子空间

设 $\boldsymbol{V}_{\lambda}=\left\{\alpha \mid \boldsymbol{A}\alpha=\lambda\alpha,\ \alpha\in\mathbf{R}^{n}\right\}$

则由特征值与特征向量的性质可知：

$$\forall\ \alpha,\beta\in\boldsymbol{V}_{\lambda},\quad \alpha+\beta\in\boldsymbol{V}_{\lambda}$$

$$\forall\,\alpha\in\boldsymbol{V}_{\lambda},\boldsymbol{k}\in\mathbf{R},\quad \boldsymbol{k}\alpha\in\boldsymbol{V}_{\lambda}\ .$$

故 $\boldsymbol{V}_{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 维向量空间 $\mathbf{R}^{n}$ 的子空间．

$\boldsymbol{V}_{\lambda}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间．

思考：$\boldsymbol{V}_{\lambda}$ 的所有向量都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量吗？

定理1. 设 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ 是 n 阶方阵 A 的 m 个特征值，$p_1, p_2, ..., p_m$ 依次是与之对应的特征向量. 如果 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ 各不相等，则向量组 $p_1, p_2, ..., p_m$ 线性无关.

证： 设有常数 $k_1, k_2, ..., k_m$ 使

$$k_1 p_1 + k_2 p_2 + ... + k_m p_m = 0 \qquad (1)$$

则

$$A(k_1 p_1 + k_2 p_2 + ... + k_m p_m) = 0$$

即

$$\lambda_1 k_1 p_1 + \lambda_2 k_2 p_2 + ... + \lambda_m k_m p_m = 0 \qquad (2)$$

继推之，有：

$$\lambda_1^n k_1 p_1 + \lambda_2^n k_2 p_2 + ... + \lambda_m^n k_m p_m = 0 \qquad (n)$$

$$(n = 1, 2, ..., m-1)$$

返回

把上面各式合并成矩阵形式，得

$$(k_1 p_1, k_2 p_2, \dots, k_m p_m)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = (0, 0, \dots, 0)_{n\times m}$$

上式等号左端第二个矩阵的行列式是范德蒙行列式，由 λ_i 互不相等, 所以行列式不等于0, 故而该矩阵可逆。于是有

$$(k_1 p_1, k_2 p_2, \dots, k_m p_m) = (0, 0, \dots, 0)$$

即 $\quad k_j p_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$

但 $\quad p_j \neq 0, \qquad$ 故 $k_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots m).$

所以向量组 $p_1, p_2, \dots, p_m$ 线性无关。

定理1. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ 是 n 阶方阵 A 的 m 个特征值，$p_1, p_2, \ldots, p_m$ 依次是与之对应的特征向量. 如果 $\lambda_1,\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 各不相等，则向量组 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 线性无关.

推论 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是 n 阶矩阵 A 的互不相同的特征值, 如果 $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ir_i}$ 是 A 的属于特征值 $\lambda_i (i = 1, \cdots, s)$ 的线性无关的特征向量, 那么向量组

$$x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1r_1}, \cdots, x_{s1}, x_{s2}, \cdots, x_{sr_s}$$

线性无关.

返回

思考：设 λ_1, λ_2是n 阶方阵A 的两个不同特征值，

x_1, x_2 分别是它们对应的特征向量.

证明：x_1, x_2 线性无关.

证：考虑 $k_1x_1 + k_2x_2 = 0.$ (*)

(*)两边左乘A，得 $\lambda_1k_1x_1 + k_2\lambda_2x_2 = 0.$ (1)

(*)两边左乘λ_1，得 $\lambda_1k_1x_1 + k_2\lambda_1x_2 = 0.$ (2)

两式相减，得 $k_2(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 = 0.$ (3)

$\because$ x_2为特征向量，即有 $x_2 \neq 0$，且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，

$\therefore$ $k_2 = 0.$ 代入(*)式得 $k_1 = 0.$

故 x_1，x_2 线性无关.

三、计算

分析 设 $A\alpha=\lambda\alpha\,(\alpha\neq 0)$, 则 $(\lambda I-A)\alpha=0$,

$\Rightarrow\ |\lambda I-A|=0$, 且 α 是 $(\lambda I-A)x=0$ 的非零解.

定义

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为矩阵A 的特征多项式.

$|\lambda I-A|=0$ 称为矩阵A 的特征方程.

求A的特征值与特征向量的步骤：

(1) 写出 $f(\lambda)=|\lambda I-A|$;

(2) 求解 $|\lambda I-A|=0$, 得到全部特征值：

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k;$$

(3) 对每个特征值λ_i，求$(\lambda_i I-A)x=0$的 ：

$$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{r_i}},$$

则A对应于λ_i的特征向量为：

$$k_1\alpha_{i_1}+k_2\alpha_{i_2}+\cdots+k_{r_i}\alpha_{r_i}\quad(\qquad\qquad).$$

返回

例1 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$,求$A$的特征值与特征向量.

解:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4 & -2\\ 2 & \lambda+6 & -4\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4\\ 2 & \lambda+6\end{vmatrix}$$

$$=\cdots=(\lambda-2)^2(\lambda+7)$$

$\lambda_1=2$(二重), $\lambda_2=-7.$

求 $\lambda_1=2$ 的特征向量, $(\lambda_1 I-A)x=0$ 即

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$x_1=-2x_2+2x_3$$

基础解系为: $\alpha_1=(-2,\ 1,\ 0)^T$, $\alpha_2=(2,\ 0,\ 1)^T$.

特征向量为: $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ $(k_1,k_2$不全为零$)$.

求$\lambda_2=-7$的特征向量. $(\lambda_2 I-A)x=0$ 即

$$\lambda_2 I-A=\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}x_3\\ x_2=-x_3\end{cases},$$

基础解系为：$\alpha_3=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$,

特征向量为： $k_3\alpha_3\ (k_3\neq 0)$.

返 回

例2 求矩阵A的特征值与特征向量

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

解 $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=1(二重).$$

求$\lambda_1=2$的特征向量，

$$\lambda_1 I-A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

即 $\begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\\ x_3=1\end{cases}$

基础解系为：$\alpha_1=(0,0,1)^T$，

特征向量为：$k_1\alpha_1\ (k_1\neq 0)$.

返回

求 $\lambda_2=1$的特征向量：

$$\lambda_2 I-A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=-2x_3\end{cases}$$

基础解系为：$\alpha_2=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$,

特征向量为：$k_2\alpha_2\ (k_2\neq 0)$.

注意：比较例1，例2，能得什么结论？

返回

特征值的重数与其对应的线性无关特征向量个数的关系:

设 λ_0 是矩阵 A 的 k 重特征值，则 λ_0 所对应的线性无关特征向量的个数 .

即,齐次方程组 $\left(\lambda_0 I - A\right) x = 0$ 的基础解系所含解向量个 数不超过 k .

即 $\dim V_{\lambda_0} \le k$.

几何重数 ≤ 代数重数

返回

四、 关于特征值的一些结论

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^{n}- \qquad \lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^{n}|A|.$$

设 A的特征值是：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$=\lambda^{n}- \qquad \lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^{n}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

结论1 设n 阶矩阵$A=(a_{ij})$有n个特征值：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$(重根按重数计算)，则

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

$$=\mathrm{tr}(A)$$

矩阵的迹

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|.$$

A可逆的充要条件是$\lambda_i\neq 0\left(i=1,2,\cdots,n\right)$.

返回

方阵A可逆的充分必要条件

A_n可逆 $\Leftrightarrow$ (1) 存在B, $AB = I$(或$BA = I$)

$\Leftrightarrow$ (2) $AX = 0$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ (3) $A \overset{行}{\sim} I_n$

$\Leftrightarrow$ (4) $A = E_1 E_2 \cdots E_s$

$\Leftrightarrow$ (5) $\det A \neq 0$

$\Leftrightarrow$ (6) A 非奇异

$\Leftrightarrow$ (7) A 为满秩矩阵

$\Leftrightarrow$ (8) A 的列（行）向量组线性无关

$\Leftrightarrow$ (9) A 的所有特征值全部不为零

结论2 设λ为n阶矩阵$A=(a_{ij})$的特征值,

(1) λ 也是 A^{T} 的特征值（A与A^{T}有相同的特征值）;

(2) 当A可逆时, $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值, 是 的特征值;

(3) 设P可逆, 则 $P^{-1}AP$ 与 A 有相同的特征值;

(4) 设$f(x)$为x的多项式, 则 $f(\lambda)$ 是矩阵 $f(A)$ 的特征值;
特别的, 是 的特征值$(k \in N)$.

例3 证明：A 与 A^{T}有相同的特征值.

A 与 $P^{-1}AP$ 有相同的特征值.

证：$$\left|\lambda I - A^{\mathrm{T}}\right| = \left|\lambda I^{\mathrm{T}} - A^{\mathrm{T}}\right| = \left|(\lambda I - A)^{\mathrm{T}}\right| = \left|\lambda I - A\right|$$

即 A 与 A^{T} 有相同的特征多项式,

故 A 与 A^{T} 有相同的特征值.

类似可证: A 与 $P^{-1}AP$ 有相同的特征值.

例4 设矩阵 A 可逆且 $A\alpha=\lambda\alpha\left(\alpha\neq 0\right)$,

求 A^{-1} 与 A^{*} 的特征值与特征向量.

解 若 $\lambda=0$ ，则 $A\alpha=0\Rightarrow\alpha=0$, 矛盾.

$\therefore\ \lambda\neq 0$.

$\because\ A\alpha=\lambda\alpha$

$\therefore\ \alpha=A^{-1}\left(A\alpha\right)=A^{-1}\left(\lambda\alpha\right)=\lambda\left(A^{-1}\alpha\right)$

$\therefore\ A^{-1}\alpha=\dfrac{1}{\lambda}\alpha\quad(\because\lambda\neq 0)$

又 $AA^{*}=|A|I,\quad A^{*}=|A|A^{-1}$,

$\therefore\ A^{*}\alpha=|A|A^{-1}\alpha=\dfrac{|A|}{\lambda}\alpha$.

例5 设 α 是矩阵 A 的特征向量, $f(x)$ 是 x 的多项式,

证明: $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值, α 是 $f(A)$ 的特征向量.

分析: $f(x)=a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0$

$$f(A)=a_n A^n+\cdots+a_1 A+a_0 I$$

$$f(A)\alpha=\left(a_n A^n+\cdots+a_1 A+a_0 I\right)\alpha \overset{?}{=} f(\lambda)\alpha$$

$$A\alpha=\lambda\alpha \quad (\alpha\neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad A^2\alpha=A(A\alpha)=A(\lambda\alpha)=\lambda(A\alpha)=\lambda^2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad A^3\alpha=A\left(A^2\alpha\right)=A\left(\lambda^2\alpha\right)=\lambda^3\alpha$$

$$\Rightarrow \quad A^n\alpha=\lambda^n\alpha,$$

证 设 $A\alpha=\lambda\alpha\ \ (\alpha\neq\mathbf{0})$

则 $A^2\alpha=A(A\alpha)=A(\lambda\alpha)=\lambda(A\alpha)=\lambda^2\alpha$

$\therefore\quad A^n\alpha=\lambda^n\alpha\,,$

$$=(a_nA^n+\cdots+a_1A+a_0I)\alpha$$

$$=a_nA^n\alpha+\cdots+a_1A\alpha+a_0\alpha$$

$$=a_n\lambda^n\alpha+\cdots+a_1\lambda\alpha+a_0\alpha$$

$$=\left(a_n\lambda^n+\cdots a_1\lambda+a_0\right)\alpha$$

思考：设$\lambda_0=2$是矩阵A的一个特征值，确定

$A^3-3A^2+2I-4A^{-1}$ 的一个特征值.

◀ ▶ 返回

例6 设 $A^2 = A$，证明：A 的特征值为 0 或 1．

证 设 $A\alpha = \lambda\alpha \quad (\alpha \neq 0)$

则 $A^2\alpha = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda(A\alpha) = \lambda^2\alpha$

$\therefore \quad \lambda^2\alpha = \lambda\alpha, \quad (\lambda^2 - \lambda)\alpha = 0$

$\therefore \quad \lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$.

练习:

(1) 设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$A$的特征值是$\underline{\quad 1, 2, 3 \quad}$,

A是$\underline{\quad\text{可逆}\quad}$(可逆性)，$A^2-I$的特征值是$\underline{\quad 0, 3, 8 \quad}$,

A^2-I是$\underline{\quad\text{不可逆}\quad}$(可逆性).

返回

(2) 设n阶方阵A满足$A^2 = I$,则A的特征值只能是 1 或 -1 ____________.

(3) 设A满足$A^2 = A$(幂等矩阵)，则A的特征值只能是 0 或 1 __________；则$I + A$是 可逆 ________(可逆性).

(4) 设A满足$A^2 = O$(幂零矩阵)，则A的特征值只能是 0 _____；则$I - 2A$是 可逆 ______(可逆性)；$|A + I| =$ 1 _____.

◀ ▶ 返回

例7 设 A 是 n 阶方阵，各行元素之和都是1.

证明：A 必有特征值1.

解 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

由题意知

$$\begin{cases} a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{1n}=1 \\ a_{21}+a_{22}+\ldots+a_{2n}=1 \\ \vdots \\ a_{n1}+a_{n2}+\ldots+a_{nn}=1 \end{cases}$$

用矩阵表示即为 $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

可见 $\lambda = 1$ 是矩阵 A 的特征值,

相应特征向量为 $(1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$.

例8 设A是 n 阶实矩阵，且 $A^{\mathrm{T}}A=I$ ，$|A|<0$ ，

证明：$\lambda=-1$ 是 A 的特征值．

分析： $A\alpha=-\alpha$ ？ $|-I-A|=0$ ？

证

$$A^{\mathrm{T}}A=I \Rightarrow |A^{\mathrm{T}}A|=|A^{\mathrm{T}}||A|=|A|^2=1$$

$$\Rightarrow |A|=-1$$

$$\therefore |-I-A|=|-A^{\mathrm{T}}A-A|$$

$$=|-A^{\mathrm{T}}-I||A|$$

$$=-|-I-A|$$

$$\therefore |-I-A|=0.$$

例9 设A是n阶方阵, 2, 4, 6, …, $2n$ 是A的n个特征值, I 是 n 阶单位阵，求行列式 $\det(A-3I)$.

解: 设 λ 为矩阵 A 的任一特征值,

则 $\lambda-3$ 为 $A-3I$ 的特征值.

因此 $A-3I$ 的全部特征值为:

$$-1,\ 1,\ 3,\ \ldots,\ 2n-3.$$

故 $\det(A-3I)=-1\times1\times3\times\ldots\times(2n-3)$

$$=-(2n-3)\,!!$$

返回

总结： 怎样判断数 λ_0 是否矩阵 A 的特征值？

(1) 是否存在非零向量 α 使 $A\alpha = \lambda_0\alpha$.

(2) $|\lambda_0 I - A| = 0$ ？

练习：

练习册第34页填空题（1）—（6）

返回

思考题： 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$

求 A^{-1} 与 $I+A^{-1}$ 的特征值.

解 $|\lambda I-A|=\cdots=(\lambda+5)(\lambda-1)^2$,

$\lambda_1=-5$， $\lambda_2=1$(二重).

A^{-1}的特征值为：$\mu_1=-\frac{1}{5}$， $\mu_2=1$(二重)

A^{-1}的特征值为：$\mu_1 = -\dfrac{1}{5}$， $\mu_2 = 1$(二重)

设 $A^{-1}\alpha = \mu_1\alpha = -\dfrac{1}{5}\alpha$，其中$\alpha \neq 0$，则

$$\left(I + A^{-1}\right)\alpha = \alpha + \mu_1\alpha = \left(1 + \mu_1\right)\alpha = \frac{4}{5}\alpha .$$

$\therefore$ $I + A^{-1}$的一个特征值是：$\dfrac{4}{5}$.

或 $\left|-\dfrac{1}{5}I - A^{-1}\right| = 0$，$\therefore$ $\left|\dfrac{4}{5}I - \left(I + A^{-1}\right)\right| = 0$，

$\therefore$ $\dfrac{4}{5}$是$I + A^{-1}$的一个特征值.

同样可得$I + A^{-1}$的另一个特征值：2(二重).

◀ ▶ 返回