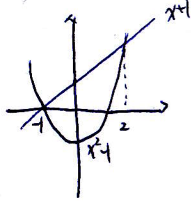
5.6　定积分的几何应用

要求： 掌握定积分的元素法，掌握用定积分来计算一些几何量。

1、求曲线 $y+1=x^2$ 和直线 $y=1+x$ 所围成平面图形的面积。



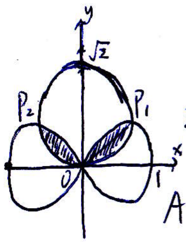
联立 $\begin{cases} y+1=x^2 \\ y=1+x \end{cases}$ 得 $x_1=-1,\ x_2=2$

$\therefore S=\int_{-1}^{2}(x+1-(x^2-1))dx$

$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$

$=\frac{9}{2}$

2、求曲线 $\rho^2=\cos 2\theta$ 与 $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ 所围平面图形面积。



由对称性知所求面积 A 为第一象限部分面积 A_1 的两倍

联立 $\begin{cases} \rho^2=\cos2\theta \\ \rho=\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ 得 $P_1(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{6})$，连接 OP_1，则 A_1 被分为两个曲边扇形

$A=2A_1=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}(\sqrt{2}\sin\theta)^2d\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\, d\theta\right]=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos2\theta)d\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\, d\theta$

$=(\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{2}\sin2\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{6}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

3、求曲线 $y=\ln x$ 上相应于 $\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{2}$ 的一段弧的长度。

$S=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+[(\ln x)']^2}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$

令 $t=\sqrt{x^2+1}$，则 $x=\sqrt{t^2-1}$，$dx=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$

原式 $=\int_2^3\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt=\int_2^3\frac{t^2}{t^2-1}dt$

$=1+\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_2^3=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

$\therefore$ 所求弧长为 $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

4、求曲线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 的长度。星形线 $(\because x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}})$

$\therefore S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(a\cos^3t)'^2+(a\sin^3t)'^2}\,dt$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(3a\cos^2t\sin t)^2+(3a\sin^2t\cos t)^2}\,dt$

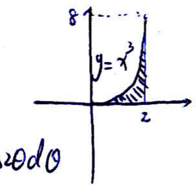
$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2(\cos^4t\sin^2t+\sin^4t\cos^2t)}\,dt$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t\,dt$

$=12a\,\frac{1}{2}\sin^2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=6a$

5、由 $y=x^3, x=2, y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴及 y 轴旋转所得立体的体积。



$V_x=\pi\int_0^2y^2dx=\pi\int_0^2x^6dx=\frac{128\pi}{7}$

$V_y=V_{圆柱体}-\pi\int_0^8x^2dy$

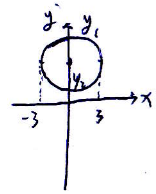
$=4\pi\times8-\pi\int_0^8y^{\frac{2}{3}}dy$

$=32\pi-\frac{3}{5}\cdot32\pi$

$=\frac{64\pi}{5}$

6、求圆盘 $x^2+(y-5)^2\le9$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积。

所求旋转体体积 V 为 $y_1=\sqrt{9-x^2}+5$ 绕 x 轴旋转一周所得立体体积 V_1 减去 $y_2=-\sqrt{9-x^2}+5$ 绕 x 轴旋转一周所得立体体积 V_2



$\therefore V=V_1-V_2=\pi\int_{-3}^3y_1^2dx-\pi\int_{-3}^3y_2^2dx$

$=\pi\int_{-3}^3(34+10\sqrt{9-x^2})dx-\pi\int_{-3}^3(34-10\sqrt{9-x^2})dx$

$=2\pi\int_0^3(34+10\sqrt{9-x^2})dx-2\pi\int_0^3(34-10\sqrt{9-x^2})dx$

$=2\pi\times2\times10\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$

$=40\pi\cdot\frac{9}{4}\pi$

$=90\pi^2$