5.3　微积分基本定理

要求： 理解积分上限函数及其求导公式；熟练掌握牛顿-莱布尼茨公式。

1、填空题

(1)设 $x=\int_t^0 \sin u du$，$y=\int_0^t \cos u du$，则 $\frac{dy}{dx}=$ $-\cot t$ ；

(2) 设 $f(x)$连续，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\int_a^x xf(t)dt}{x-a}=$ $af(a)$ ；

(3) 函数 $F(x)=\int_1^x(2-\frac{1}{\sqrt{t}})dt\ (x>0)$ 的单调减少区间是 $(0,\frac{1}{4})$ 。

2、选择题

(1) 设 $f(x)$连续，且 $F(x)=\int_x^{e^{-x}} f(t^2)dt$，则 $F'(x)=$（ A ）

$(A)-e^{-x}f(e^{-2x})-f(x^2)$

$(B)-e^{-x}f(e^{-2x})+2xf(x^2)$

$(C)f(e^{-2x})2x-2xf(x^2)$

$(D)e^{-x}f(e^{-2x})-f(x^2)$

(2) 函数 $f(x)=\int_0^x \frac{3t+1}{t^2-t+1}dt$ 在区间[0,1]上　（ A ）

(A) 单调增加　(B) 单调减少　(C) 先增后减　(D) 先减后增

(3) 函数 $f(x)=\int_0^x te^{-t}dt$ 在 $x=0$ 处取得　（ B ）

(A) 极大值　(B) 极小值　(C) 非极值点　(D) 拐点

3、求由 $\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=0$ 所决定的隐函数 y 对 x 导数 $\frac{dy}{dx}$。

$e^y\cdot y'+\cos x=0 \Rightarrow y'=-e^{-y}\cos x$

$e^y-1+\sin x=0 \quad \therefore y'=\frac{\cos x}{\sin x-1}$

4、求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^6}\int_0^{x^2}\sin t^2 dt$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^4\cdot 2x}{6x^5}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{6}$

$=\frac{1}{3}$

5、计算下列定积分

(1) $\int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$

$=\int_{-1}^0 (3x^2+\frac{1}{x^2+1})dx$

$=x^3\Big|_{-1}^0+\arctan x\Big|_{-1}^0$

$=1+\frac{\pi}{4}$