(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\frac{2}{\pi}\arctan x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{2}{\pi}\arctan x}{\frac{1}{x}}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{2}{\pi}}{-\frac{1}{x^2}}}$

$= e^{-\frac{2}{\pi}}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^4+o(x^4)\right)}{\left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)-(1+x^2+o(x^2))\right)\cdot x^2}$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)} = -\frac{1}{12}$

(4) 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$f''(0)=2$，

求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$。

$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\frac{f(x)}{x}=0\cdot1=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-x}{x^2}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型未定式. 则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-1}{2x}$ —①

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}$ ~~$=\frac{1}{2}f''(0)=1$~~ X

又 $\because \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\cdot\frac{1}{2}=f''(0)\cdot\frac{1}{2}=1$ —②

$\therefore$ 综上①② $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-x}{x^2}=1$

4、确定 a,b 使 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 当 $x\to0$ 时为 x 的 5 阶无穷小量。

$f(x)=x-a\sin x-\frac{b}{2}\sin 2x$

$=x-a\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)-\frac{b}{2}\left(2x-\frac{(2x)^3}{6}+\frac{(2x)^5}{120}+o(x^5)\right)$

$=(1-a-b)x+\left[\frac{a}{6}+\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{2^3}{6}\right)\right]x^3-\left(\frac{a}{120}+\frac{b}{2}\cdot\frac{2^5}{120}\right)x^5+o(x^5)$

$\therefore \begin{cases}1-a-b=0\\ \frac{a}{6}+\frac{2}{3}b=0\end{cases}$

$\therefore a=\frac{4}{3}\quad b=-\frac{1}{3}$

5、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，证明：必有一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$ 成立。

令 $F(x)=f(x)-x$

则 $F(1)=f(1)-1=0-1=-1<0$

$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$

$\therefore F(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上满足零点 Th.

$\therefore F(\eta)=0\quad \eta\in(\frac{1}{2},1)$

又 $\because F(0)=f(0)-0=0$

$\therefore F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上满足 Rolle 中值 Th

$\therefore \exists$ 一点 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$，即 $f'(\xi)=1$