4.3 平 面

一、 点法式方程

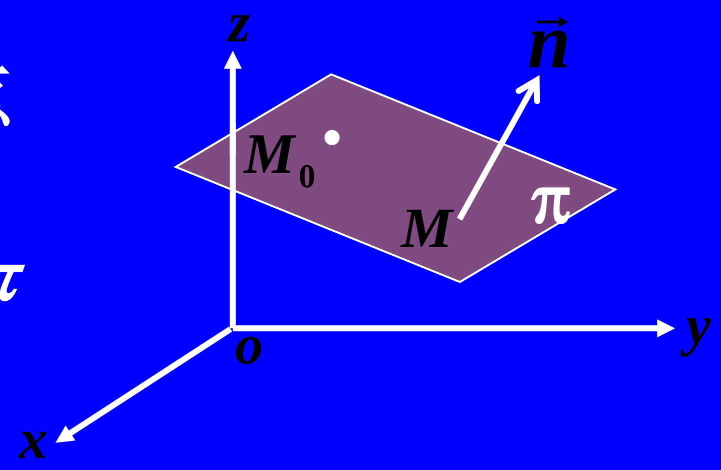
二、 一般式方程

三、 截距式方程

四、 平面与平面的位置关系

一、点法式方程

平面π 可由π 上任意一点和垂直于π 的任一向量完全确定. 垂直于π 的向量称为π 的**法线向量**.



法线向量的特征：垂直于平面内的任一向量.

设 $\vec{n}=(A, B, C)$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$,

$M(x, y, z)$ 为平面π上的任一点,

必有 $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$

返回

$\because \quad \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$

$$\therefore \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

方程(1)称为平面的**点法式方程**,

其中法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$, 已知点 (x_0, y_0, z_0).

平面上的点都满足方程(1)，不在平面上的点都不满足方程（1），方程(1)称为平面π的方程，平面π 称为方程(1)的图形.

二、一般式方程

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz\underbrace{\boxed{-(Ax_0+By_0+Cz_0)}}_{=D}=0$$

$$Ax+By+Cz+D=0$$ 平面的一般方程

法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$.

返回

平面一般方程的几种特殊情况：

(1) $D=0$, 平面通过坐标原点；

(2) $A=0$, $\begin{cases} D=0, & \text{平面通过}x\text{轴；} \\ D\neq 0, & \text{平面平行于}x\text{轴；} \end{cases}$

$$(0,B,C)\cdot(1,0,0)=0$$

类似地可讨论 $B=0$, $C=0$ 情形.

(3) $A=B=0$, 平面平行于xoy 坐标面；

类似地可讨论 $A=C=0$, $B=C=0$ 情形.

返回

三、 截距式方程

例 设平面与x, y, z三轴分别交于$P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$（其中$a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$），求此平面方程.

解 设平面为$Ax + By + Cz + D = 0$,

将三点坐标代入得
$$\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{D}{a},\quad B = -\frac{D}{b},\quad C = -\frac{D}{c}.$$

将 $A=-\frac{D}{a}$, $B=-\frac{D}{b}$, $C=-\frac{D}{c}$,

代入所设方程得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$ 平面的截距式方程

x 轴上截距　　y 轴上截距　　z 轴上截距

返回

例 求过不共线的三点$A_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$ 的平面方程.

解: 设$M(x, y, z)$为平面上的任意一点,

则 $\overrightarrow{A_1M}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}$ 共面.

即
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

平面的三点式方程

例 1 求过三点 $A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$ 和 $C(0,2,3)$ 的平面方程.

解1 $\overrightarrow{AB}=(-3,4,-6)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,3,-1)$

取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 4 & -6\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=(14,9,-1)$,

所求平面方程为 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$,

化简得 $14x+9y-z-15=0$.

返回

例 1 求过三点 $A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$和 $C(0,2,3)$的平面方程.

解2 $\overrightarrow{AB}=(-3,4,-6)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,3,-1)$

设$M(x,y,z)$为平面上的任意一点,

则 $$\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0$$

即 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$

化简得 $14x+9y-z-15=0.$

返回

例 2 求过点$(1,1,1)$，且垂直于平面$x-y+z=7$和$3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

解 $\vec{n}_1=(1,-1,1)$, $\vec{n}_2=(3,2,-12)$

取法向量 $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -12\end{vmatrix}=(10,15,5)$,

所求平面方程为

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0,$$

化简得 $2x+3y+z-6=0.$

返回

例 3 设平面过原点及点 $P(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程.

解 设平面为 $Ax+By+Cz+D=0$,

由平面过原点知 $\boxed{D=0,}$

由平面过点 $(6,-3,2)$ 知 $\boxed{6A-3B+2C+D=0}$

$\because \vec{n}\perp(4,-1,2)$, $\quad\therefore \boxed{4A-B+2C=0}$

$$\Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C,$$

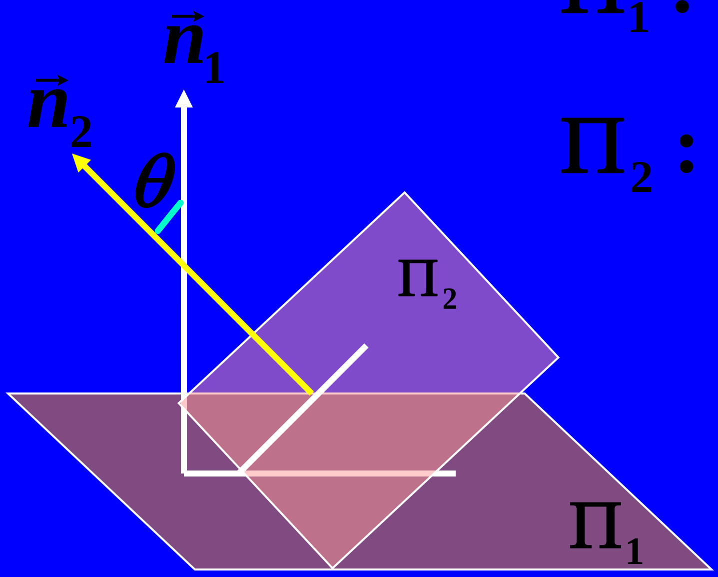
所求平面方程为 $2x+2y-3z=0.$

返回

四、平面与平面的位置关系

1. 两平面的夹角

定义 两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.（通常取锐角）



$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1),$$

$$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2),$$

返回

按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

两平面夹角余弦公式

2. 两平面垂直与平行的充要条件：

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$

(2) $\Pi_1 // \Pi_2$ 但不重合 $\Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}.$

(3) Π_1 与 Π_2 重合 $\Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}.$

例4 讨论以下各组平面的位置关系：

(1) $-x+2y-z+1=0$, $\quad y+3z-1=0$

(2) $2x-y+z-1=0$, $\quad -4x+2y-2z-1=0$

(3) $2x-y-z+1=0$, $\quad -4x+2y+2z-2=0$

解 (1) $$\cos\theta=\frac{|-1\times 0+2\times 1-1\times 3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}$$

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{60}}$ 两平面相交，夹角 $\theta=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{60}}$.

(2) $2x-y+z-1=0,\qquad -4x+2y-2z-1=0$

$$\vec{n}_1=(2,-1,1),\quad \vec{n}_2=(-4,2,-2)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2}\neq\frac{-1}{-1},$$

两平面平行但不重合.

(3) $2x-y-z+1=0,\qquad -4x+2y+2z-2=0$

$$\because \frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2},$$

$\therefore$ 两平面重合.

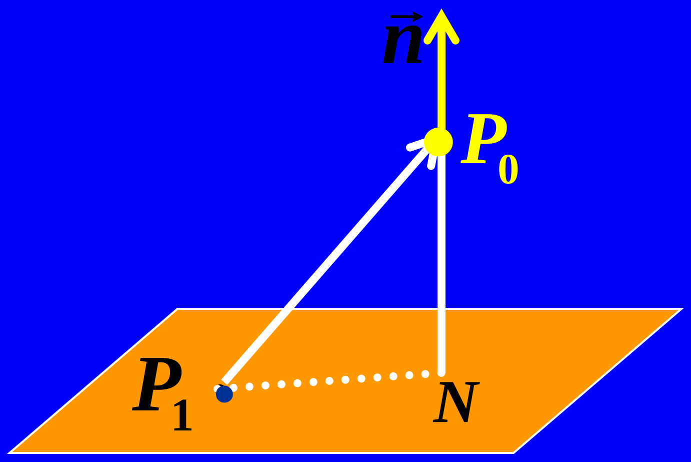
返回

例 5 求点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

的距离.

解 $\forall P_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$



$$d = |\mathrm{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0}|$$

$$= \left| \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_0}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{n}|}$$

$$= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

返回

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

点到平面距离公式.

思考: 两平行平面之间的距离?