解：$\because R(A)=2$

$\therefore$ $Ax=0$ 的解空间的维数为：$4-2=2$

而所给向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

α_1,α_2 线性无关

故 α_1,α_2 为 $Ax=0$ 的一个基础解系

故将 α_1,α_2 标准正交化即可.

令 $b_1=\alpha_1=(1,1,2,3)^T$

$$b_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,b_1)}{(b_1,b_1)}b_1=\alpha_2-\frac{1}{3}b_1=\frac{1}{3}(-4,2,$$

将 b_1,b_2 单位化，即得标准正交基：

$$\eta_1=\frac{b_1}{|b_1|}=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \eta_2=\frac{1}{\sqrt{39}}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\\3\end{pmatrix}$$

返回

解：∵ A有三个互不相同的特征值 1, 2, 3

∴ A可对角化

取 $e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{3}(1, 2, 2)^T$

$e_2 = \frac{a_2}{\|a_2\|} = \frac{1}{3}(2, -2, 1)^T$

$e_3 = \frac{a_3}{\|a_3\|} = \frac{1}{3}(-2, -1, 2)^T$

记 $C = (e_1, e_2, e_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

则 C为正交矩阵，且 $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} = \Lambda$

$\therefore A = C\Lambda C^{-1} = C\Lambda C^T$

$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

返回

第八章　二次型

8.1　二次型

8.2　二次型的标准型

8.3　正定二次型

8.3　正定二次型

一、正定二次型的定义

二、正定二次型的判定

返回

一、惯性定理

一个实二次型，既可以通过正交变换化为标准形，也可以通过拉格朗日配方法化为标准形，显然，其标准形一般来说是不唯一的，但标准形中所含有的项数是确定的，项数等于二次型的秩.

下面我们限定所用的变换为**实变换**，来研究二次型的标准形所具有的性质.

二、 二次型的规范形

1、二次型的规范形

形如

$$z_1^2+\ldots+z_p^2-z_{p+1}^2-\ldots-z_r^2$$

的二次型称为 规范形.

二次型 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j$ ………… $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

正交变换 $C^{\mathrm{T}}AC=C^{-1}AC=\Lambda$

标准形 $g(y)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\ldots+d_ny_n^2$

………… $\Lambda=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$

可逆变换 $C^{\mathrm{T}}AC=S$

规范形 $h(z)=z_1^2+\ldots+z_p^2-z_{p+1}^2-\ldots-z_r^2$

………… $S=\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$

返回

惯性定理　对于任意一个实二次型, 总可以经过一个适当的可逆线性变换 $x = Cy$ 化成规范形:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2$$

且规范形是唯一的.

r: 二次型的秩

p: 正惯性指数

$r - p$: 负正惯性指数

$|r - 2p|$: 符号差

◀ ▶ 返回

一、正定二次型的定义

引例 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$\forall (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}} \neq 0, \quad a_i \in \mathrm{R},$$

$$f(a_1, a_2, a_3) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0.$$

定义 设有实二次型 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$, 如果任一非零实向量 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$:

(1) 恒有 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax > 0$, 则称 $f(x)$ 为正定二次型, 矩阵A 称为正定矩阵.

(2) 恒有 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax < 0$, 则称 $f(x)$ 为负定二次型, 矩阵A 称为负定矩阵.

(3) 恒有 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax \geq 0$, 则称 $f(x)$ 为半正定二次型, 矩阵A 称为半正定矩阵.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$ 正定二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2$$ 负定二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2 \quad (r < n)$$

半正定二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \ldots - x_r^2 \quad (r \leq n)$$

既非正定也非负定

例1 设A, B都是n阶正定矩阵. 证明：$kA+lB$也是正定矩阵 $(k>0, l>0)$.

证 $\because$ A, B都是n阶正定矩阵

$\therefore$ $\forall x \in \mathrm{R}^n, x \neq 0$, 有 $x^{\mathrm{T}}Ax > 0, x^{\mathrm{T}}Bx > 0$

$$\therefore \quad x^{\mathrm{T}}(kA + lB)x = kx^{\mathrm{T}}Ax + lx^{\mathrm{T}}Bx > 0$$

$\therefore$ $kA + lB$为正定矩阵.

定理5 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是正定矩阵. 证明:

$$a_{ii}>0 \quad (i=1,\dots,n).$$

正定的必要条件

证 设某$a_{ii}\le 0$,

取 $x=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)^{\mathrm{T}}$

第 i 个分量

则 $x^{\mathrm{T}}Ax=a_{ii}\le 0$,

矛盾.

所以 $a_{ii}>0$, $(i=1,\dots,n)$.

返回

二、正定二次型的判定

对于实二次型的标准形

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \dots + k_n x_n^2$$

容易判断二次型的正定性。

那对于一般的二次型呢?

返回

定理6 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$ 正定 $\Leftrightarrow$ 标准形中n个系数全为正.

定理6' 二次型经过可逆线性变换，其正定性不变.

证　设 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$，　作线性变换 $x = Cy$，C 可逆.

则　$x \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0$，

且 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax \xlongequal{x = Cy} y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)y = g(y)$，

易知

二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 正定 $\Leftrightarrow$ 二次型 $y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)y$ 正定.

或　A 正定 $\Leftrightarrow$ $C^{\mathrm{T}}AC$ 正定.

已知: $f = x^{\mathrm{T}}Ax$ 可用正交变换 $x = Cy$ 化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的特征值;

还可经过适当的可逆线性变换 $x = C y$ 化成规范形:

$$y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$$

由此可得定理6 的

推论1 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$ 正定 $\Leftrightarrow$ A 的特征值全为正.

推论2 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$ 正定 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 的正惯性指数 $p = n$.

推论3 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$ 正定 $\Leftrightarrow$ A 与 I 合同.

推论4 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$ 正定 $\Leftrightarrow$ 存在可逆P, 使得 $A= P^{\mathrm{T}}P$.

例3 设A是n 阶正定矩阵，证明: $|A+I|>1$.

证 $\because$ A是正定矩阵

$\therefore$ A的特征值：λ_1，λ_2，…，λ_n 全为正实数

$\therefore$存在正交矩阵C, 使

$$C^{-1}AC=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

$$\begin{aligned}|A+I| &= |C\Lambda C^{-1}+I| \\ &= |C\Lambda C^{-1}+CIC^{-1}| \\ &= |C(\Lambda+I)C^{-1}| \\ &= |C|\,|\Lambda+I|\,|C^{-1}| = |\Lambda+I| \\ &= (\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\dots(\lambda_n+1)>1\end{aligned}$$

定理7.（霍尔维茨定理） 对称矩阵 A 为正定的充分必要条件是：A 的各阶顺序主子式都为正，

即 $$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\ \dots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}>0.$$

对称矩阵 A 为负定的充分必要条件是：奇数阶顺序主子式为负，而偶数阶顺序主子式为正，

即 $$(-1)^r\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}>0,\qquad (r=1,2,\dots,n).$$

例4 讨论下面二次型的正定性:

(1) $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3;$

(2) $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_2x_3;$

解 f_1 中 x_3^2 的系数 $a_{33} = -1 < 0,$

f_2 中 x_2^2 的系数 $a_{22} = 0,$

所以, f_1, f_2 都不是正定二次型.

(3) $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$;

解 f_3 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$P_1 = 1 > 0, \qquad P_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

$$P_3 = |A| = 2 > 0,$$

所以 f_3 是正定二次型.

返回

例5 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2t\,x_1x_2 + 2\,x_1x_3$,

t 为何值时，f 为正定二次型？

解 $$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

需 $$\begin{cases} P_1 = 1 > 0 \\ P_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0 \\ P_3 = |A| = 4 - 2t^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 2t^2 > 0 \\ 4 - t^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$$

所以，当 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ 时 f 为正定次型.

$f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$ 为正定二次型 $\Leftrightarrow$ A 为正定矩阵.

结论 对于实对称矩阵 A，以下命题等价：

(1) A为正定矩阵；

(2) A的特征值全为正实数；(f 的正惯性指数 $p = n$)

(3) A与单位矩阵I合同；

(4) $A = P^{\mathrm{T}}P$, P 可逆 ;

(5) A的各阶顺序主子式全大于零.

结论' 对于二次型 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$，以下命题等价：

(1) $f(x)$ 为负定二次型；

(2) A 的特征值全为负实数；

(3) $f(x)$ 的负惯性指数为n；

(4) A 的顺序主子式满足：

$$(-1)^k P_k > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

例6 设A是正定矩阵, 证明: 存在正定矩阵B, 使得 $A = B^2$.

证： 因 A 为正定矩阵，故存在正交矩阵C，使得

$$C^{-1}AC = C^{\mathrm{T}}AC = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},\ 其中\lambda_i > 0$$

即 $A = C\Lambda C^{\mathrm{T}}$.

令 $B = C\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}C^{\mathrm{T}}$，则有 $A = B^2$.

例7 设A是正定矩阵，证明：A^{-1}，$A^{*}, A^{2}, A+I$都是正定矩阵.

证明： 因A是正定矩阵，故A为实对称、可逆矩阵，

显然 A^{-1}，$A^{*}, A^{2}, A+I$ 都为实对称矩阵.

（1）A^{-1}正定（三种方法）.

证法1(按定义)： $\forall\ x \neq 0,$

$$f(x) = x^{\mathrm{T}} A^{-1} x \xlongequal{x = Ay} y^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}} A^{-1} A) y = y^{\mathrm{T}} A y$$

Q A正定， $\therefore \forall y \neq 0,\ \ y^{\mathrm{T}} A y > 0,$

而$\forall\ x \neq 0,\ \ y = Ax \neq 0,$

$\therefore x^{\mathrm{T}} A^{-1} x > 0.$

返回

证法2（A正定 $\Leftrightarrow$ A与单位矩阵I合同）

因 A 是正定矩阵，

所以，存在可逆矩阵 P， 使 $P^{\mathrm{T}} A P = I$.

$$
\begin{aligned}
(P^{\mathrm{T}} A P)^{-1} &= P^{-1} A^{-1} (P^{\mathrm{T}})^{-1} \\
&= P^{-1} A^{-1} (P^{-1})^{\mathrm{T}} \\
&= I
\end{aligned}
$$

令 $Q = (P^{-1})^{\mathrm{T}}$，则 $Q^{\mathrm{T}} A^{-1} Q = I$.

所以， A^{-1} 为正定矩阵.

证法3（A正定 $\Leftrightarrow$ A的特征值全大于零）

$\because$ A 正定

$\therefore$ A 的特征值全大于零，

即 $\lambda_i > 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$

$$\therefore \quad \frac{1}{\lambda_i} > 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

而 A^{-1} 的全部特征值为：$\dfrac{1}{\lambda_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$

故 A^{-1} 正定.

其他结论可类似证明。

例8 设实对称矩阵A满足 $A^3-6A^2+11A-6I=0$.

证明：A 正定.

证明：设λ为 A 的特征值,则由题意知

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

$$\Rightarrow \lambda=1 \text{ 或 } \lambda=2 \text{ 或 } \lambda=3$$

$\Rightarrow$ A 的特征值必定大于零

$\Rightarrow$ A 正定

例9 已知A为实反对称矩阵, 证明：$I-A^2$可逆且正定.

证：(1) 先证对称性

$$\left(I-A^2\right)^{\mathrm{T}}=I-(A^2)^{\mathrm{T}}=I-(A^{\mathrm{T}})^2=I-(-A)^2$$
$$=I-A^2$$

(2) $\forall x\in R^n,\ x\neq 0,$

$$x^{\mathrm{T}}(I-A^2)x=x^{\mathrm{T}}x-x^{\mathrm{T}}A^2x=x^{\mathrm{T}}x+x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax$$
$$=x^{\mathrm{T}}x+(Ax)^{\mathrm{T}}Ax$$
$$\geq x^{\mathrm{T}}x$$
$$>0$$

综上(1)(2)知 $I-A^2$ 正定

思考题

1. 设A为 n 阶实对称正定矩阵, 证明：若$A-I$正定，证明：$I-A^{-1}$也正定.

提示: (1) 对称性 (2)正定 $\Leftrightarrow$ 特征值全大于零.

2. 设 $A_{m\times n}$ 为 实矩阵且 $m<n$. 证明：AA^{T}正定的充要条件是 $R(A)=m$.

提示: (1) 对称性 (2) 按定义.

3. 设实对称矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$是正定矩阵. $b_1, b_2, \ldots, b_n$是任意n个非零实数，证明: $B=(a_{ij}b_ib_j)_{n\times n}$为正定矩阵.

证

$$|B_k|=\begin{vmatrix} b_1^2a_{11} & b_1b_2a_{12} & \cdots & b_1b_ka_{1k} \\ b_2b_1a_{21} & b_2^2a_{22} & \cdots & b_2b_ka_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_kb_1a_{k1} & b_kb_2a_{k2} & \cdots & b_k^2a_{kk} \end{vmatrix}=b_1^2b_2^2\cdots b_k^2|A_k|$$

正定矩阵A的k阶顺序主子式 $|A_k|>0$, $(k=1, \ldots, n)$.

所以，$|B_k|>0$, $(k=1, \ldots, n)$.

所以 B 为正定矩阵.

返回

四、小结

1. 正定二次型的概念，正定二次型与正定矩阵的区别与联系.

2. **正定二次型（正定矩阵）**的判别方法：

(1) **定义法**；

(2) **顺次主子式判别法**；

(3) **特征值判别法**.

3. 根据正定二次型的判别方法，可以得到**负定二次型（负定矩阵）**相应的判别方法，请大家自己推导.

思考题

设A,B分别为m阶,n阶正定矩阵,试判定分块矩阵$C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$是否为正定矩阵.

思考题解答

解 C是正定的.

因为,设$z^T=(x^T,y^T)$为$m+n$维向量,其中x,y分别是m维和n维列向量,若$z\neq 0$,则x,y不同时为零向量,于是

$$z^T Cz=(x^T,y^T)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$=x^T Ax+y^T By>0,$$

且C是实对称阵,故C为正定矩阵.

上页 下页 返回