例3 证明 $\begin{vmatrix} A & C \\ D & B \end{vmatrix} = |A||B - DA^{-1}C|$（行列式第一降阶定理）

其中A为n阶可逆矩阵，B为m阶方阵.

证

$$\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B - DA^{-1}C \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} A & C \\ D & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B - DA^{-1}C \end{vmatrix}$$

$$= |A||B - DA^{-1}C|$$

例4 证明$|E_m-AB|=|E_n-BA|$,其中A为$m\times n$阶矩阵，B为$n\times m$阶阵.

证
$$\begin{bmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n-BA \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{vmatrix} = |E_n-BA|$$

$$\begin{bmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} E_m-AB & A \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{vmatrix} = |E_m-AB|$$

$$\therefore \boxed{|E_m - AB| = |E_n - BA|}$$

利用上式可得

$$\boxed{\left|\lambda E_m - AB\right| = \lambda^{m-n}\left|\lambda E_n - BA\right|,\ m > n, \lambda \text{ 为任意数.}}$$

$$\because \left|\lambda E_m - AB\right| = \lambda^m \left|E_m - \frac{1}{\lambda}AB\right| \qquad (\lambda \neq 0)$$

$$= \lambda^m \left|E_n - \frac{1}{\lambda}BA\right|$$

$$= \lambda^{m-n}\left|\lambda E_n - BA\right|$$

$\lambda = 0$ 时可见书上的说明.

注 本例的结果可以把m阶的行列式转化为n阶的行列式计算, 此时可称为(**降阶公式**).

尤其是当$n=1$时,即A为1列B为1行时,等式的右端即为1个数.

例5 计算 $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} = \left| E_n + \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| E_n + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| E_1 + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| 1 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \right|$$

$$= 1 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

复习 秩的运算性质（1）

若A是$m\times n$矩阵, 则

1. $0\leqslant r(A)\leqslant \min\{m,n\}$

2. $r(A^{\mathrm{T}})=r(A)$

3. $r(kA)=\begin{cases} 0 & k=0 \\ r(A) & k\neq 0 \end{cases}$

4. $r(A_1)\leqslant r(A)$, (A_1为A的子阵)

2.8.3 秩的运算性质（2）

5. $r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$

证 设 $r(A) = r_1, r(B) = r_2$

则存在可逆阵 P_1, P_2, Q_1, Q_2, 使

$$P_1AQ_1 = \begin{bmatrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2BQ_2 = \begin{bmatrix} E_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $$P=\begin{bmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}Q=\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} P_1AQ_1 & 0 \\ 0 & P_2BQ_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore r\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}=r_1+r_2=r(A)+r(B)$$

6. $r\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \geq r(A)+r(B)$

证 设 $r(A)=r_1, r(B)=r_2$

则存在可逆阵 P_1, P_2, Q_1, Q_2, 使

$$P_1AQ_1=\begin{bmatrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2BQ_2=\begin{bmatrix} E_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $P=\begin{bmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{bmatrix}, \quad Q=\begin{bmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow P\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_1AQ_1 & P_1CQ_2 \\ 0 & P_2BQ_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & P_1CQ_2 \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} E_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\therefore r\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \geq r(A) + r(B)$$

例1 $r\left[\begin{array}{c:ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] = 4 > r(A) + r(B) = 2$

7. $r(A \vdots B) \le r(A) + r(B)$

证 $r(A) + r(B) = r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$

$$= r\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & B \end{bmatrix} \ge r(A \vdots B)$$

8. $r(A+B) \leqslant r(A)+r(B)$

证 $r(A)+r(B)=r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} A & A+B \\ 0 & B \end{bmatrix}\geq r(A+B)$

例2 $r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=3>r\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=r(A+B)=2$

9. $r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}$

证 $r(A)=r(A\ 0)=r(A\ AB)\geqslant r(AB)$

$$r(B)=r\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} B \\ AB \end{bmatrix}\geq r(AB)$$

10. A为$m\times n$矩阵, B为$n\times p$矩阵,

$$r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$$

且 $AB=0$ 时， $r(A)+r(B)\leq n$

证 $r(A)+r(B)\leqslant r\begin{bmatrix} A & 0 \\ E & B \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} 0 & -AB \\ E & B \end{bmatrix}$

$$=r\begin{bmatrix} 0 & -AB \\ E & 0 \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & AB \end{bmatrix}=n+r(AB)$$

且 $AB=0$时, 有 $r(A)+r(B)\leq n.$

秩的运算性质（2）

5. $r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$

6. $r\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \geq r(A) + r(B)$

7. $r(A \vdots B) \leq r(A) + r(B)$

8. $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$

9. $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

10. A为$m\times n$矩阵, B为$n\times p$矩阵, 则

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$$

且 $AB = 0$时，$r(A) + r(B) \leq n$

- 矩阵
  - 基本运算
    - 线性运算(加法、数乘)
    - 乘法→方幂(求方幂的方法)
    - 行列式乘法公式
    - 转 置
  - 逆 矩 阵
    - 定义及运算性质
    - 求 法
      - 定义法
      - 伴随矩阵法
      - 初等变换法
    - 判 别7条
  - 初等变换
    - 初等阵
    - 等秩、等价，行阶梯、标准形
  - 秩
    - 定 义
    - 应用：线性方程组
    - 性 质10条
    - 求 法：初等(行)变换
  - 分块矩阵
    - 加, 数乘, 乘,幂, 转置, 逆, 初等变换

可逆的判别(7条)

$A_{n\times n}$可逆 $\Longleftrightarrow$ $\exists B_{n\times n}$ 使 $AB=E$

$\Longleftrightarrow$ $|A|\neq 0$

$\Longleftrightarrow$ $r(A)=n$

$\Longleftrightarrow$ A与E 等价,$PAQ=E$, $A\xrightarrow{\text{行列初}}E$

可逆

$\Longleftrightarrow$ $A=P_1P_2\cdots P_s$, P_i 为初等阵

$\Longleftrightarrow$ $AX=0$只有零解

$\Longleftrightarrow$ $AX=b$只有唯一解

伴随矩阵

1. 基本公式: $AA^* = A^*A = |A|E$

2. 求逆:若A可逆, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*, (A^*)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A$

$$A^* = |A|A^{-1}, (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

3. 性质:(1)$|A^*| = |A|^{n-1}$,(2)$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ ($n>2$)

(3)$(kA)^* = k^{n-1}A^*$, (4)$r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 1, r(A) = n-1 \\ 0, r(A) < n-1 \end{cases}$

(5)$r(A^*)^* = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 0, r(A) < n \end{cases}$ ($n>2$)

第二章常见的题型

1. 求方幂:4, 5, 11, 22, 23(注意秩为1的矩阵).

2. 求逆:8(矩阵多项式方程$f(A)=0$)14, 16.

3. 解矩阵方程:(考查矩阵运算及性质)
9, 10, 13, 15(先化简).

4. 初等变换初等阵:21, 32. 补充题.

5. 涉及伴随矩阵:25, 26, 34.

6. 求秩:证明秩的等式:19, 20.

7. 分块阵:21, 27, 30, 31, 32, 33.

8. 证明题:17, 18, 28, 29.

求方幂

例1 设$\alpha=(1,2,3,4)^T$, $\beta=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)^T$

$A=\alpha\beta^T$, 求A^n.

解 可知 $r(A)=1$

所以 $A^n=(\beta^T\alpha)^{n-1}A$

$$=4^{n-1}A=4^{n-1}\alpha\beta^T$$

$$
=4^{n-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}=4^{n-1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{4}\\ 4 & 2 & \frac{4}{3} & 1\end{bmatrix}
$$

初等变换与初等阵

例2 A可逆, 将A的i, j两行互换得B, 求AB^{-1}.

解

$$E(i, j)A = B$$

$$AB^{-1} = A(E(i, j)A)^{-1} = E^{-1}(i, j) = E(i, j)$$

例3 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}$

$$P_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中A可逆, 则 $B^{-1}=$

(A) $A^{-1}P_1P_2$, (B) $P_1A^{-1}P_2$

$\boxed{(C)}$ $P_1P_2A^{-1}$, (D) $P_2A^{-1}P_1$

解

$$B = AP_2P_1$$

$$B^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1} = P_1P_2A^{-1}$$

$$AP_1P_2 = B$$

$$B^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1}A^{-1} = P_2P_1A^{-1}$$

应选择(C).

解矩阵方程、求逆的问题

例4 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，$X$ 满足

$$A^*X=A^{-1}+2X,\text{ 求}X.$$

解 因为 $A^*X=A^{-1}+2X$

所以 $AA^*X=AA^{-1}+2AX$

即 $|A|X=E+2AX,\quad (|A|E-2A)X=E$

所以 $X=(|A|E-2A)^{-1}$

$$\left|A\right| = 4, \quad \left|\left|A\right|E - 2A\right| = 32 \neq 0$$

所以 $\left|A\right|E - 2A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 可逆.

用初等变换可求出逆为

$$X = (\left|A\right|E - 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

关于秩的问题

例5 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$, B 为3阶非零矩阵,

且 $AB=0$, 求t.

解

$$AB=0 \quad r(A)+r(B)\le n$$

$$B\ne 0,\quad r(B)\ge 1$$

$$r(A)\le n-r(B)\le n-1=2$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=7(3+t)=0$$

$$\therefore t=-3$$

例6 设A与B是两个n阶非零方阵，满足$AB=0$，则A与B的秩为

（A）都等于n.（B）必有一个为零.

$\boxed{\text{（C）}}$ 都小于n.（D）若其中一个等于n，则另一个必小于n.

解 因为$A\neq 0, B\neq 0, r(A)\geq 1, r(B)\geq 1,$

$$AB=0 \quad r(A)+r(B)\leq n$$

所以A与B的秩都小于n.

例7 设A为4×3阶矩阵, 且$r(A)=2$, 而

$$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix},\text{则 } r(AB)=\underline{\quad 2 \quad}$$

解1 B为可逆阵, 则可写成初等阵之积, AB即相当于对A进行初等列变换, 初等变换不变秩,故$r(AB)=r(A)=2.$

解2 $r(A)=r(A)+r(B)-3\le r(AB)\le r(A)$

解3 $r(A)=r(ABB^{-1})\le r(AB)\le r(A)$

故 $r(AB)=r(A)=2.$

证明秩的等式

例8 设A为n阶幂等矩阵，即$A^2 = A$，

求证 $r(A)+r(A-E)=n$

证 由 $A^2 = A$ 得 $A(A-E)=0$

$$\therefore r(A)+r(A-E)\le n$$

而$n=r(E)=r(A-A+E)\le r(A)+r(A-E)$

故 $$r(A)+r(A-E)=n$$

关于伴随

例9 设A为n阶矩阵$(n>2)$, A^*是A的伴随矩阵, 则有

(A) $(A^*)^*=|A|^{n-1}A$ (B) $(A^*)^*=|A|^{n+1}A$

$\boxed{\text{(C)}}$ $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$ (D) $(A^*)^*=|A|^{n+2}A$

解 (1) 当A可逆时, 知A^*可逆

$$A^*(A^*)^*=|A^*|E$$

$$(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}\frac{1}{|A|}A=|A|^{n-2}A$$

(2) 若A不可逆, 则$|A|=0$, $r(A)<n$, $r(A^*)^*=0$,

所以$(A^*)^*=0=0A=0$.结论成立.

例10 若A为n阶矩阵$(n\geq 2)$, 则

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$$

证 (1) 如果$r(A)=n$, 由$A^*A=|A|E$知A^*可逆, 从而$r(A^*)=n$.

(2) 如果$r(A)\leq n-2$, 由A^*的定义知

$$A^*=0 \Rightarrow r(A^*)=0.$$

(3)如果$r(A)=n-1$, $A^*\neq 0$, $\Rightarrow r(A^*)\geq 1$.

又$|A|=0$, $A^*A=0$, $r(A)+r(A^*)\leq n$

$$\Rightarrow r(A^*)\leq n-r(A)=1 \Rightarrow r(A^*)=1.$$

例11 设 A为三阶非零实矩阵，若$A^* = A^T$

证明A可逆,并求$|A|$.　　$(a_{ij} = A_{ij})$

证 由 $A^* = A^{\mathrm{T}}$，得 $a_{ij} = A_{ij}, \forall i, j$

$A \neq 0$，不妨设$\exists a_{kj} \neq 0$

将$|A|$按第k 行展开，

$$|A| = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + a_{k3}A_{k3}$$

$$= a_{k1}^2 + a_{k2}^2 + a_{k3}^2 \geq a_{kj}^2 > 0.$$ 故A可逆.

由已知 $A^*=A^{\mathrm{T}}$，$\therefore AA^{\mathrm{T}}=|A|E$

得到$|A|^2= |A|^3$，$|A|^2(|A|-1)=0$

所以由$|A|\neq 0$知$|A|=1$.

例12 设 A, B 为n 阶方阵,证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$$

证 $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$$

分块阵的行列式

例13 设4 阶矩阵$A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4)$, $B=(\beta_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4)$. 如果$|A|=1, |B|=2$, 那么$|A+B|$的值为:

(A) 3　　(B) 6　　(C) 12　　$\boxed{\text{(D)}}$ 24

解 $|A+B|=|\alpha_1+\beta_1\ \ 2\alpha_2\ \ 2\alpha_3\ \ 2\alpha_4|$

$$= 2^3|\alpha_1+\beta_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4|$$

$$=2^3(|A|+|B|)=24$$

应选**(D)**.

下次作习题二中的部分习题

(^-^) Bye!

（例11）设A=(a_{ij}) 是3阶实非零矩阵, 已知$a_{ij}=A_{ij}$, 求|A|.

解 根据已知, A=(a_{ij}). 假定A的第一行有非零元素, 把|A|分别按照第1行展开, 可以得到:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0$$

由已知, $A^*=A^T$, 所以$AA^T=|A|I$, 容易由得到$|A|^2= |A|^3$ 所以|A|=1.