

SIGNALS AND SYSTEMS

信号与系统

第四章 连续信号与系统的频域分析

第四章 连续信号与系统的频域分析

- 连续信号与系统的频域分析概述
- **4.2** 周期信号分解为傅里叶级数
- **4.3** 周期信号的频谱
- **4.4** 非周期信号的频谱
- **4.5** 傅里叶变换的性质及其应用
- **4.6** 希尔伯特变换及小波变换简介
- **4.7** 取样信号的频谱
- **4.8** 连续时间系统的频域分析
- **4.9** 信号的无失真传输和理想滤波器
- 本章要点
- 作业

连续信号与系统的频域分析概述

- ◆ 实际的信号都可以表示为一系列不同频率的正弦信号之和
 - 这一认识来源于对波形~~的观察~~，物理意义明确。
 - 正弦信号是最常见、最基本的信号。
 - 正弦信号便于产生、传输和处理。
 - 线性时不变系统在单一频率的正弦信号激励下，其稳态响应仍是同一频率的正弦信号。
 - 三角函数的加、减、乘、微分和积分运算后仍然是三角函数。
- ◆ 傅里叶变换 揭示了信号内在的频率特性以及信号的时间特性与频率特性之间的关系。本章的重点就是从物理意义上理解傅里叶变换的性质。
- ◆ 频谱分析 直观、方便地从另一个角度来认识信号。
- ◆ 频域分析法 求解系统在任意信号激励下的零状态响应。
- ◆ 其它 频谱、带宽、无失真传输、调制定理、抽样定理等

4.2 周期信号分解为傅里叶级数

周期信号的表达式

$$f(t) = f(t - nT) \quad n \text{ 为整数}$$

T 为该信号的周期，是满足上式的最小非零正值。

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \text{ 为该信号的角频率。}$$

周期分别为 T_1, T_2 的两个周期信号相加，当 T_1, T_2 之间存在最小公倍数 T 时，所得到的信号仍然为周期信号，其周期为 T 。

即 $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$ ，其中 n_1 和 n_2 为整数，或者说 n_2/n_1 为有理数。

例：判断下列信号是否为周期信号，如果是周期信号，试计算其周期。

$$(1) f_1(t) = 2 + 3\cos\left(\frac{2}{3}t + \theta_1\right) + 5\cos\left(\frac{7}{6}t + \theta_2\right)$$

解： $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{7}{4}$ 为有理数，故 $f_1(t)$ 为周期信号。

其周期 T 是 T_1, T_2 的最小公倍数 12π 。

$$(2) f_2(t) = 2\cos(2t + \theta_1) + 5\sin(\pi t + \theta_2)$$

解： $T_1 = \pi, T_2 = 2, \frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{2}$ 为无理数，故 $f_2(t)$ 不是周期信号。

$$(3) f_3(t) = 3\cos(3\sqrt{2}t + \theta_1) + 7\cos(6\sqrt{2}t + \theta_2)$$

解： $T_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{2}}, T_2 = \frac{2\pi}{6\sqrt{2}}, \frac{T_1}{T_2} = 2$ 为有理数，故 $f_3(t)$ 是周期信号，

周期为 $\frac{2\pi}{3\sqrt{2}}$ 。

4.2.1 三角型傅里叶级数

以 T 为周期的周期信号 $f(t)$ ，若满足狄里赫勒条件：

- (1) 在一个周期内只有有限个不连续点；
- (2) 在一个周期内只有有限个极大值、极小值；
- (3) 在一个周期内绝对可积，即 $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt < \infty$

则可以展开为三角型傅里叶级数

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

其中 $a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) dt$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad n = 1, 2, \dots$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 为基波频率, $n\omega_0$ 为谐波频率, a_n 和 b_n 为傅里叶系数,

$\int_T [\cdot] dt$ 表示从任意起始点开始, 取一个周期 T 为积分区间。

因为 $a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$

所以傅氏级数又可写成工程上更为实用的形式

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

其中

$$A_0 = a_0$$

直流分量

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

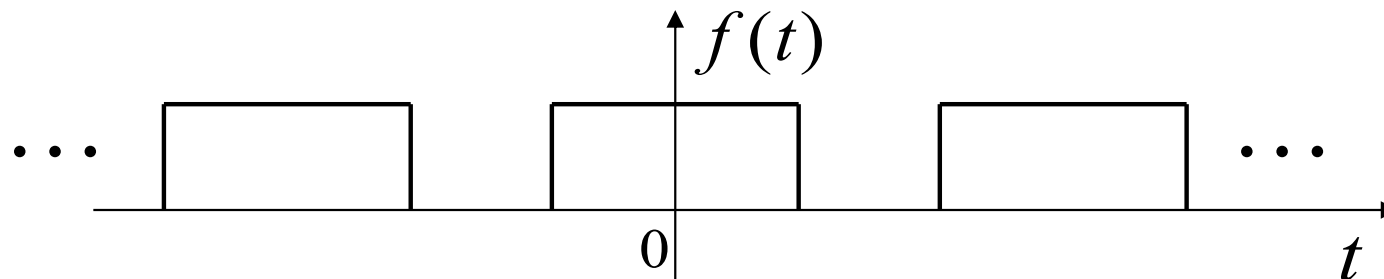
n 次谐波振幅

$$\varphi_n = \arctg\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

n 次谐波初相

信号波形的对称性与傅氏系数的关系

1. 偶函数: $f(t) = f(-t)$, 则 只含有常数项和余弦项。



$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

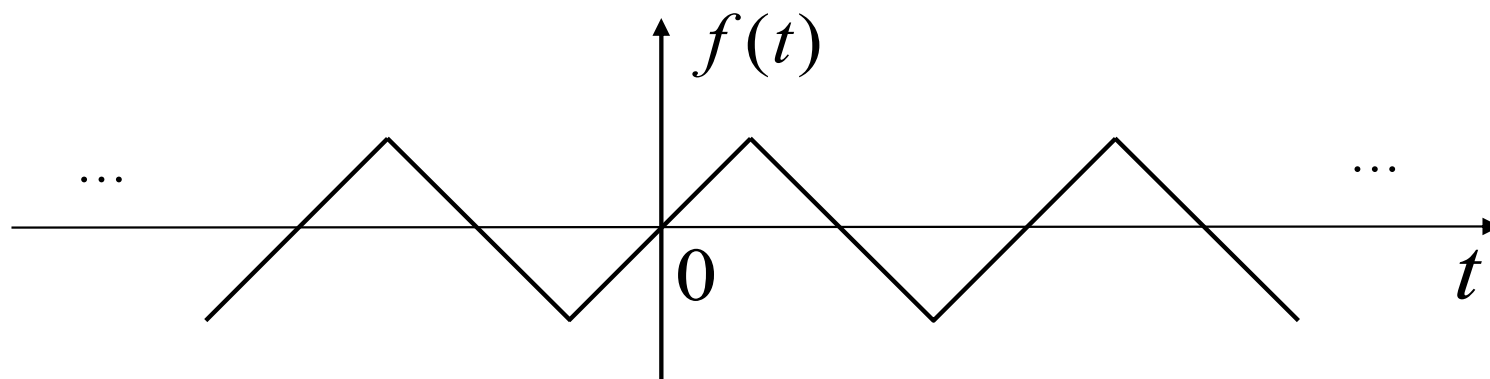
$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

偶函数在对称区间内
积分为半区间积分的
两倍。

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt = 0$$

奇函数在对称区间内
积分为零。

2. 奇函数: $f(t) = -f(-t)$, 则 只含正弦项。



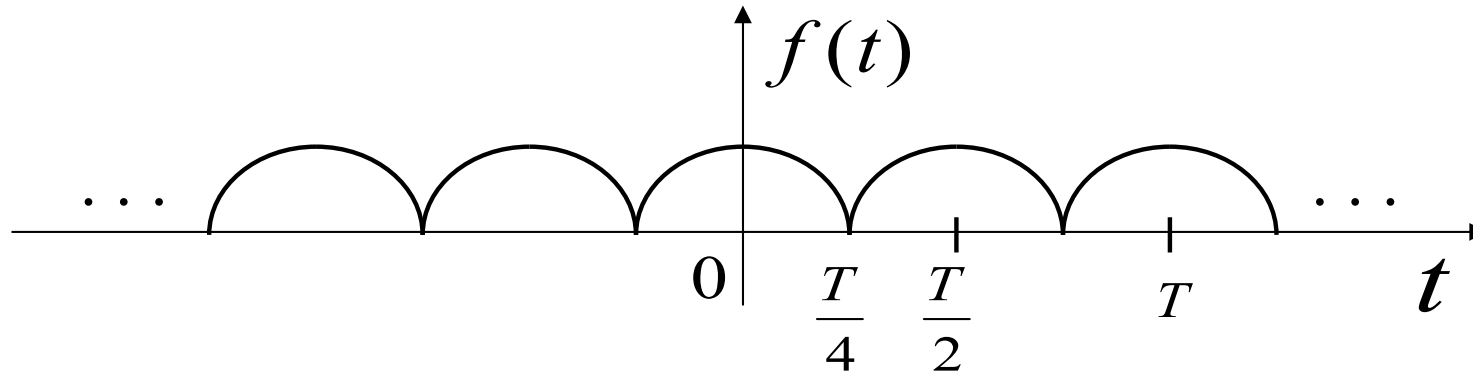
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt = 0$$

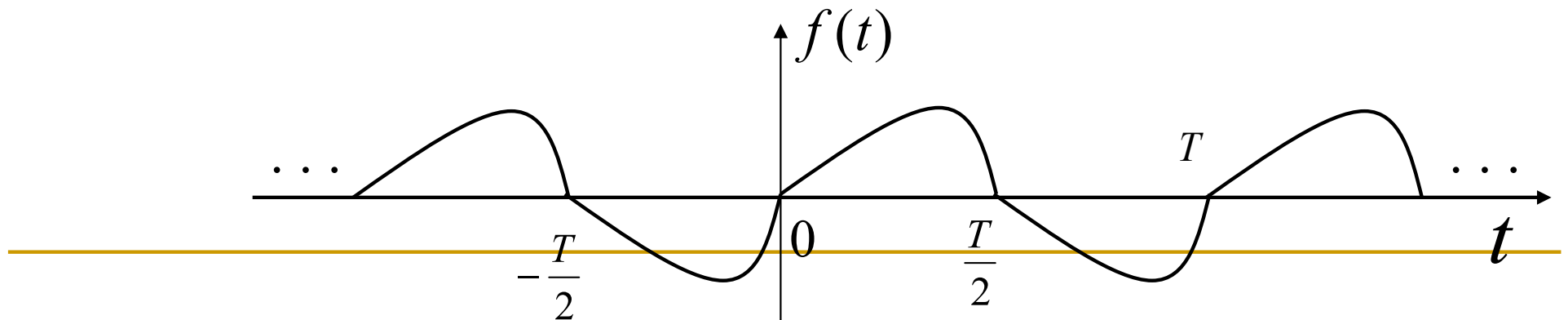
$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

4. 偶谐函数: $f(t) = f(t \pm \frac{T}{2})$, 则 只含偶次谐波。

周期本来就是 $T/2$ 。



4. 奇谐函数: $f(t) = -f(t \pm \frac{T}{2})$, 则 只含奇次谐波。



4.2.2 指数型傅里叶级数

由欧拉公式

$$\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2j} \left(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t} \right), \quad \cos n\omega_0 t = \frac{1}{2} \left(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t} \right)$$

代入三角形傅氏级数，有

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_0 t} \\ &= F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} F_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

式中

$$F_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad F_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = F_n^*$$

是一对关于变量 $n\omega_0$ 的共轭复数，

而 $F_0 = a_0 = A_0$ 是实数。

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} F_{-n} e^{-jn\omega_0 t} = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

考虑到 $F_0 = F_n e^{jn\omega_0 t} \Big|_{n=0}$ ，于是 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$

这就是指数型傅里叶级数，其系数

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

一般情况下， F_n 是关于变量 $n\omega_0$ 的复函数，称为指数型傅里叶级数的复系数，可写成

$$F_n = |F_n| e^{j\theta_n} = R_n + jI_n$$

注意：

1. $F_0 = a_0 = A_0$ 为直流分量，一般情况下要单独计算。

2. 负频率分量的出现只是数学上的表达，没有物理意义。

$$\begin{aligned} F_n e^{jn\omega_0 t} + F_{-n} e^{-jn\omega_0 t} &= |F_n| e^{\angle F_n} e^{jn\omega_0 t} + |F_{-n}| e^{\angle F_{-n}} e^{-jn\omega_0 t} \\ &= 2|F_n| \cos(n\omega_0 t + \angle F_n) \end{aligned}$$

4. 当 $f(t)$ 是实周期信号时， F_n 和 F_{-n} 互为共轭复数，有

$$|F_n| = |F_{-n}|, \quad \theta_n = -\theta_{-n}; \quad R_n = R_{-n}, \quad I_n = -I_{-n}$$

即傅里叶复系数 F_n 的模和实部是 $n\omega_0$ 的偶函数； F_n 的相角和虚部是 $n\omega_0$ 的奇函数。

4. 当 $f(t)$ 是实偶函数时，则 F_n 是实偶函数；

当 $f(t)$ 是实奇函数时，则 F_n 是虚奇函数。

（利用 F_n 的计算公式可以证明）

指数型和三角型傅里叶级数系数之间的关系

$$\because F_n = |F_n| e^{j\theta_n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} \quad (n > 0)$$

$$\therefore |F_n| = \frac{1}{2} A_n = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = \varphi_n = \operatorname{arctg} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right) \quad (n > 0)$$

$$F_0 = a_0 = A_0 \quad (n = 0)$$

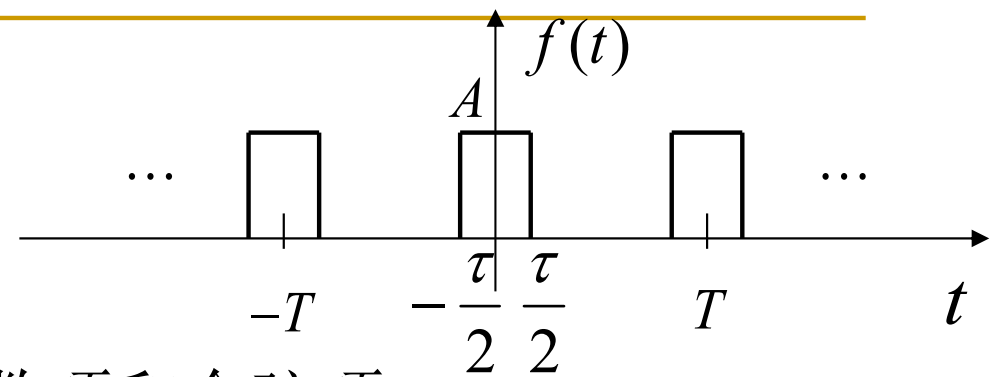
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

注意：指数型和三角型傅里叶级数中， n 的取值范围不同。

物理意义：周期信号可以分解为一个直流分量与许多谐波分量之和。

例：试将图示周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 展开为(1)三角型和(2)指数型傅里叶级数。



解：(1) $f(t)$ 是偶函数，故只含有常数项和余弦项。

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{\tau}{2}} A dt = \frac{A\tau}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{\tau}{2}} A \cos n\omega_0 t dt$$

$$= \frac{4A}{n\omega_0 T} \sin\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right) = \frac{2A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right)$$

$$\therefore f(t) = \frac{A\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right) \cos n\omega_0 t$$

(2) 指数型傅立叶级数

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-jn\omega_0 t} dt$$

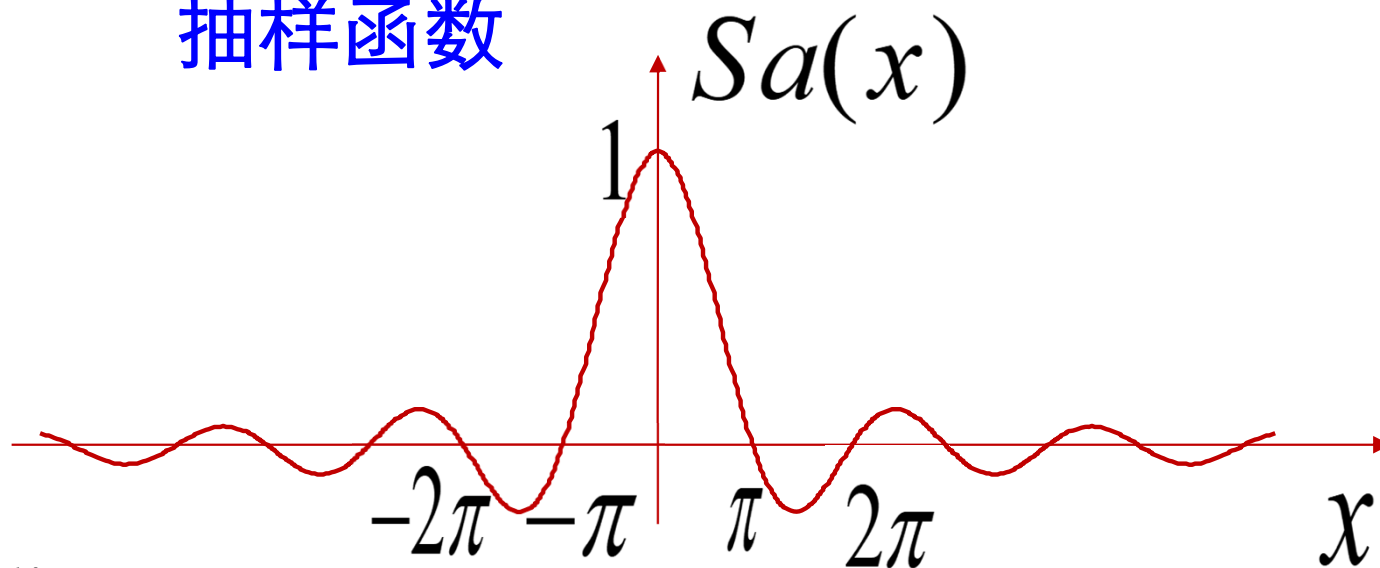
$$= \frac{A e^{-jn\omega_0 t}}{T - jn\omega_0} \bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2A}{T} \frac{\sin(\frac{n\omega_0\tau}{2})}{n\omega_0} = \frac{A\tau}{T} \frac{\sin(\frac{n\omega_0\tau}{2})}{\frac{n\omega_0\tau}{2}}$$

令 $\frac{\sin x}{x} = Sa(x)$ 称为抽样函数或取样函数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(\frac{n\omega_0\tau}{2}) e^{jn\omega_0 t}$$

抽样函数

$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$$



1. 偶函数

$$2. Sa(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

3. 随着 $|x|$ 增大, $Sa(x)$ 的振幅按 $\frac{1}{|x|}$ 的规律衰减, 并趋于零。

4. 过零点: $\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$

$$5. \int_{-\infty}^{\infty} Sa(x) dx = \pi$$

4.3 周期信号的频谱

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n| e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} \end{aligned}$$

说明周期信号可以分解为各次谐波分量的叠加，傅里叶系数 A_n 或 $|F_n|$ 反映了不同谐波分量的幅度， φ_n 或 θ_n 反映了不同谐波分量的相位。

频谱图清晰地表征了周期信号的频域特性，从频域角度反映了该信号携带的全部信息。

4.3.1 周期信号的单边频谱和双边频谱

$$\text{单边频谱} \begin{cases} \text{单边幅度频谱 } (A_n \sim n\omega_0) \\ \text{单边相位频谱 } (\varphi_n \sim n\omega_0) \end{cases} \quad f(t) \leftrightarrow A_n, \varphi_n$$

$$\text{双边频谱} \begin{cases} \text{双边幅度频谱 } (|F_n| \sim n\omega_0) \\ \text{双边相位频谱 } (\theta_n \sim n\omega_0) \end{cases} \quad f(t) \leftrightarrow F_n$$

不同的周期信号，其傅里叶级数的区别在于：

1. 由于 T 不同，所以基波频率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 不同，谐波频率 $n\omega_0$ 也不同。

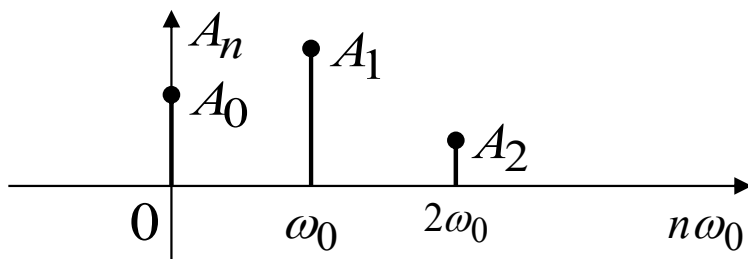
2. 各（非零）分量的数目不同。

4. 幅度 $A_n (|F_n|)$ 不同，相位 $\varphi_n (\theta_n)$ 不同。

例如某周期信号的傅里叶级数为

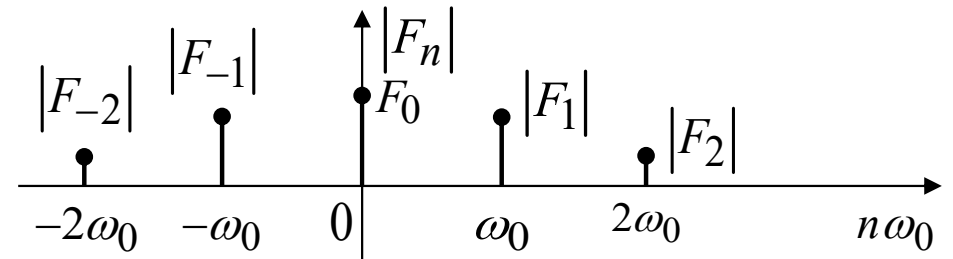
$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) \\ &= F_{-2}e^{-j2\omega_0 t} + F_{-1}e^{-j\omega_0 t} + F_0 + F_1e^{j\omega_0 t} + F_2e^{j2\omega_0 t} \end{aligned}$$

单边频谱：

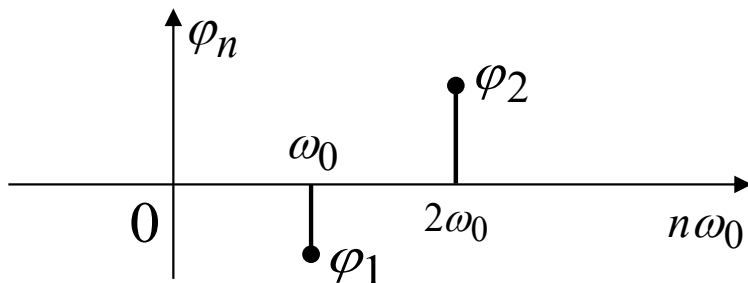


单边幅度频谱

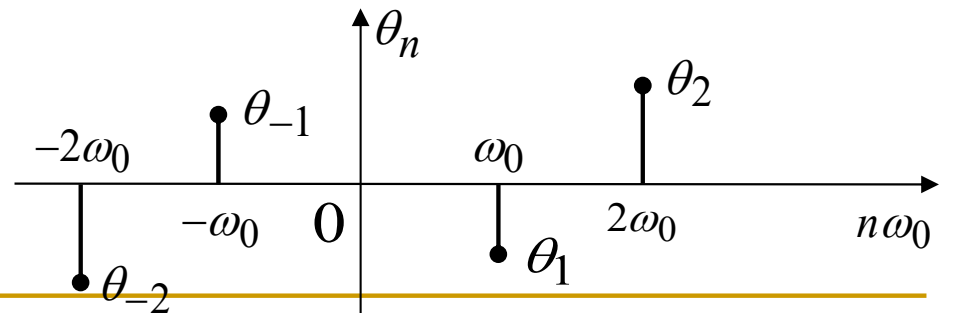
双边频谱：



双边幅度频谱



单边相位频谱



双边相位频谱

画频谱图时注意：

1. $F_0 = A_0$, $|F_n| = \frac{A_n}{2}$ ($n \neq 0$);
2. 三角型傅里叶级数必须统一用余弦函数来表示;
3. 由于 A_n 表示振幅, 故 $A_n \geq 0$;
4. 当 $f(t)$ 是实信号时, 双边幅度频谱 $|F_n|$ 是 $n\omega_0$ 的偶函数, 双边相位频谱 θ_n 是 $n\omega_0$ 的奇函数;
5. 谱线只在基波的整数倍处出现。 (思考: 为什么?)

例：某周期信号可如下表示，试画出其单边频谱和双边频谱。

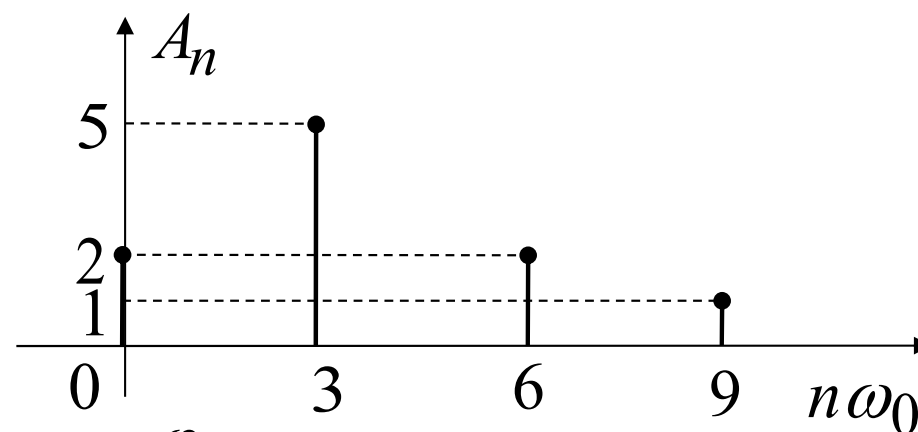
$$f(t) = 2 + 4\cos 3t - 3\sin 3t + \sqrt{3}\sin 6t + \cos 6t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9t + \frac{1}{2}\sin 9t$$

解：(1) 单边频谱

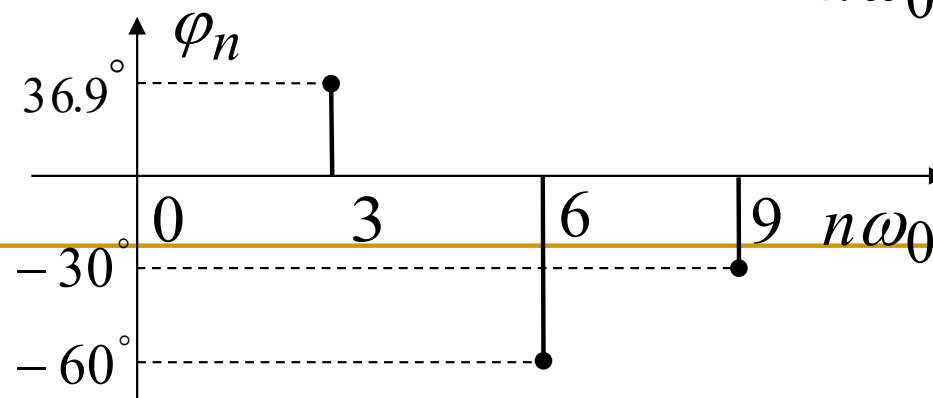
$$f(t) = 2 + 4\cos 3t - 3\sin 3t + \sqrt{3}\sin 6t + \cos 6t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9t + \frac{1}{2}\sin 9t$$

$$= 2 + 5\cos(3t + 36.9^\circ) + 2\cos(6t - 60^\circ) + \cos(9t - 30^\circ)$$

单边幅度频谱：



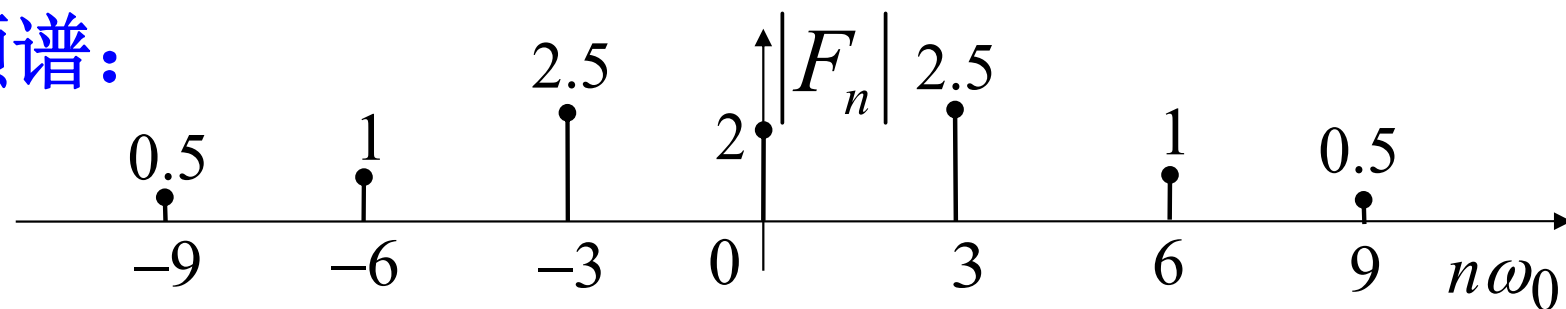
单边相位频谱：



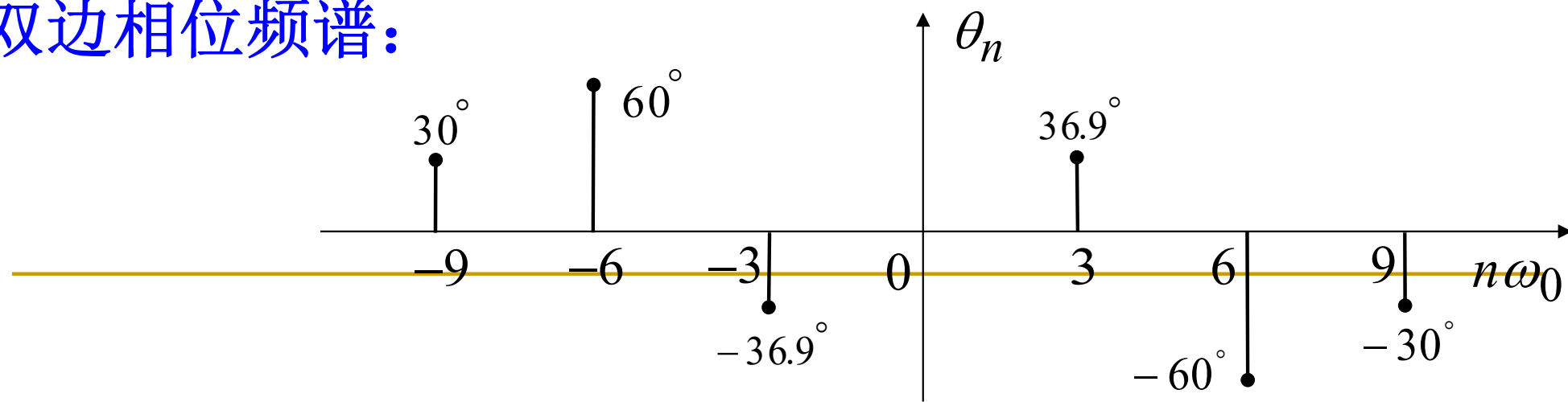
(2) 双边频谱

$$\begin{aligned}f(t) &= 2 + 5\cos(3t + 36.9^\circ) + 2\cos(6t - 60^\circ) + \cos(9t - 30^\circ) \\&= 2 + 2.5[e^{j(3t+36.9^\circ)} + e^{-j(3t+36.9^\circ)}] \\&\quad + e^{j(6t-60^\circ)} + e^{-j(6t-60^\circ)} + 0.5[e^{j(9t-30^\circ)} + e^{-j(9t-30^\circ)}] \\&= 0.5e^{j30^\circ}e^{-j9t} + e^{j60^\circ}e^{-j6t} + 2.5e^{-j36.9^\circ}e^{-j3t} + 2 \\&\quad + 2.5e^{j36.9^\circ}e^{j3t} + e^{-j60^\circ}e^{j6t} + 0.5e^{-j30^\circ}e^{j9t}\end{aligned}$$

双边幅度频谱:



双边相位频谱:



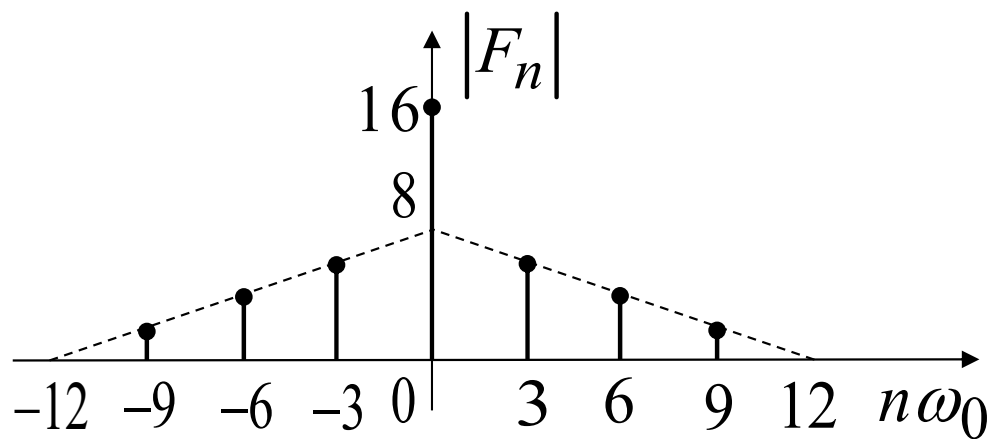
例：已知某周期信号的单边频谱如图所示，试写出该信号的时域表达式，并画出其双边频谱。

解：

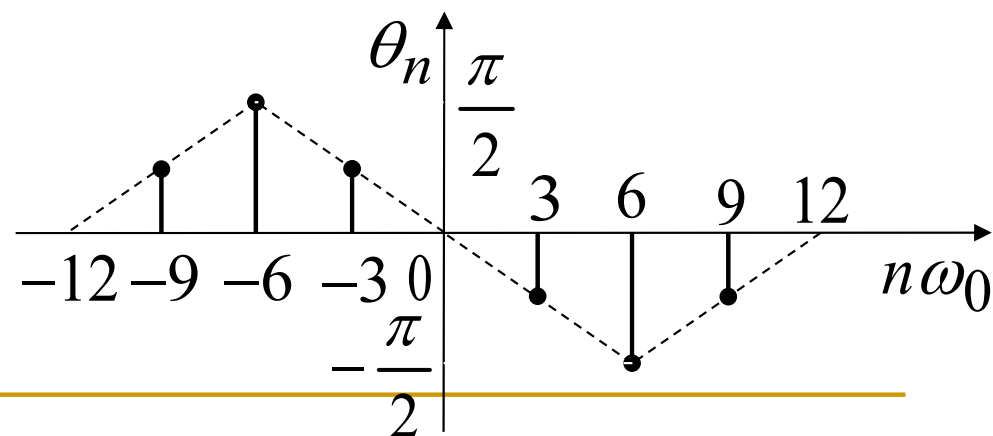
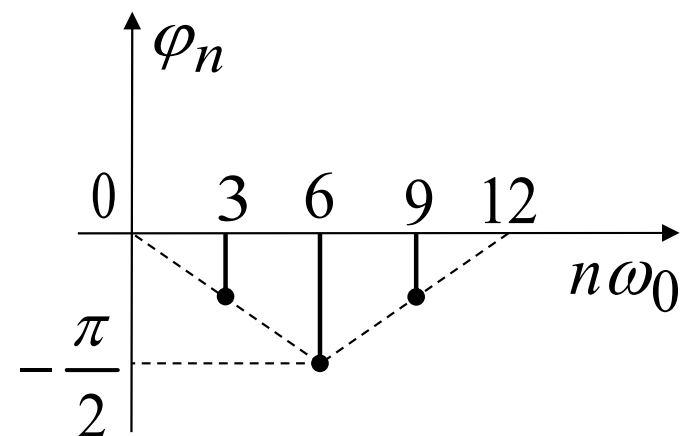
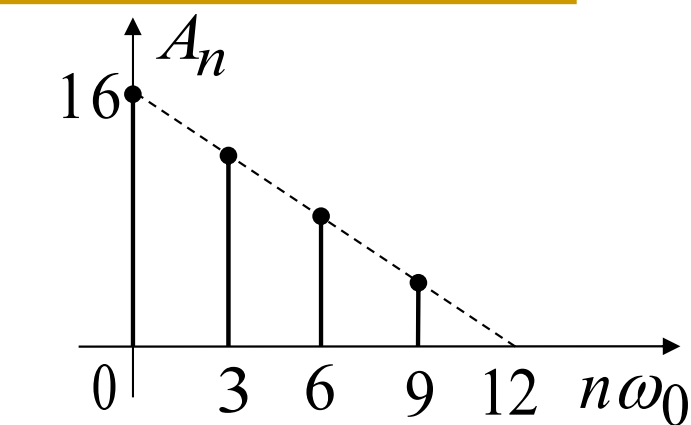
$$f(t) = 16 + 12\cos(3t - \frac{\pi}{4})$$

$$+ 8\cos(6t - \frac{\pi}{2}) + 4\cos(9t - \frac{\pi}{4})$$

双边频谱：



双边幅度频谱

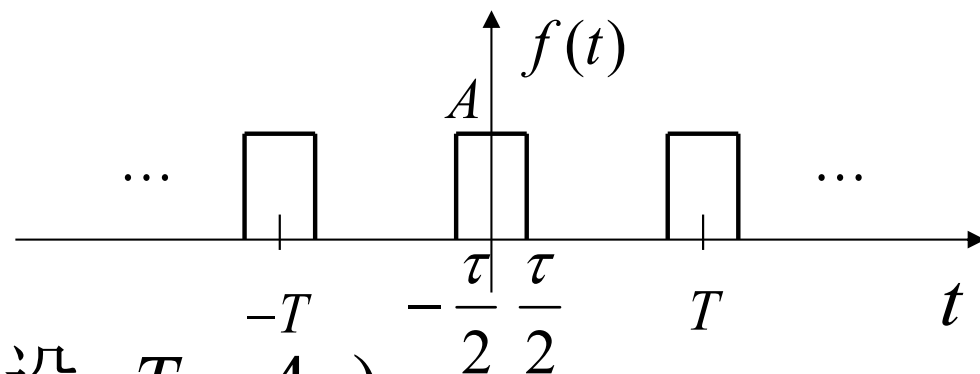


双边相位频谱

4.3.2 周期信号频谱的特点

下面以周期矩形脉冲为例，说明周期信号频谱的特点。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$



(设 $T = 4\tau$)

$$F_n = \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

当 F_n 为实数时，频谱可以用一张图表示：

主峰高度：

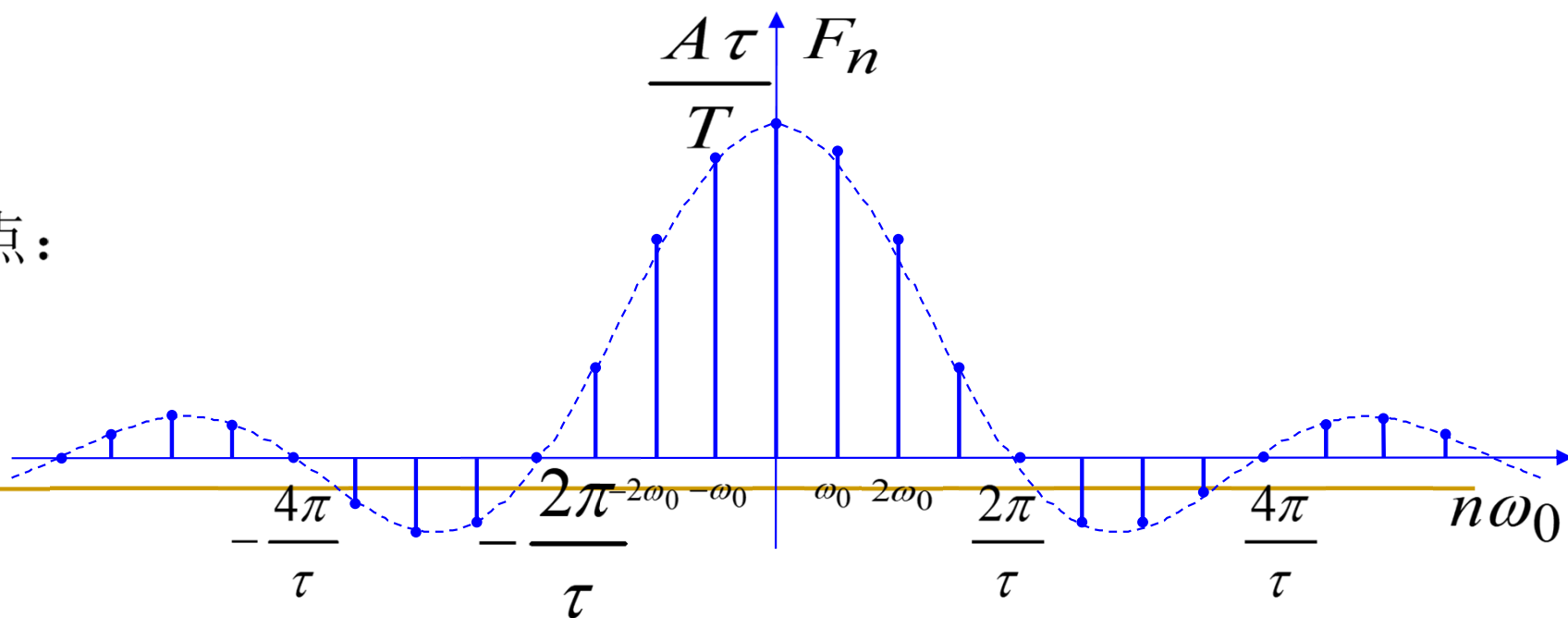
$$F_0 = \frac{A\tau}{T}$$

第一次过零点：

$$\omega_z = \frac{2\pi}{\tau}$$

有效带宽：

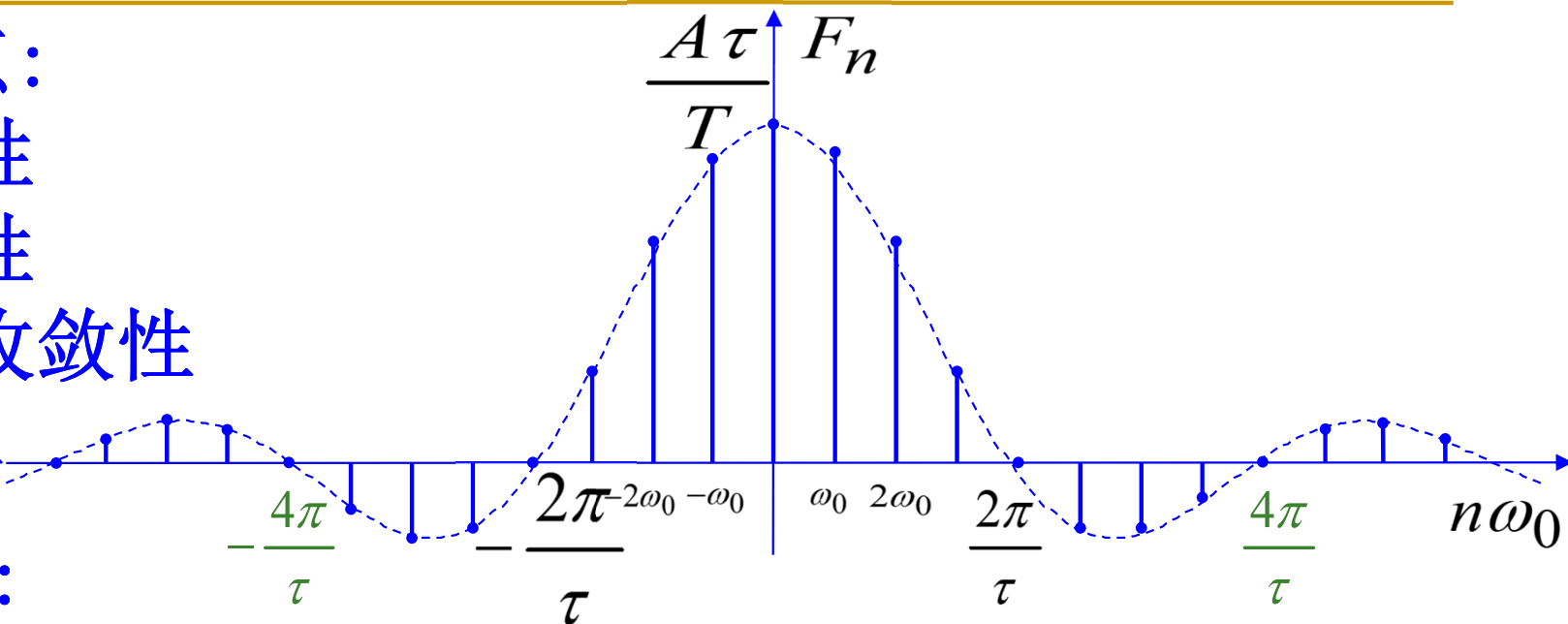
$$0 \sim \omega_z$$



1. 频谱特点:

- (1) 离散性
- (2) 谐波性
- (3) 幅度收敛性

2. τ 和 T 与频谱的关系:



(1) $\tau \downarrow$: 主峰高度 $\frac{A\tau}{T} \downarrow$; 过零点 $\frac{2\pi}{\tau} \uparrow$; 谱线间隔 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 不变;

$$\text{当 } \tau = T \text{ 时: } F_n = \frac{A\tau}{T} Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) = ASa(n\pi)$$

周期信号 \rightarrow 直流信号 \therefore 频谱也只显示直流分量。

(2) $T \uparrow$: 主峰高度 $\frac{A\tau}{T} \downarrow$; 过零点 $\frac{2\pi}{T}$ 不变; 谱线间隔 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \downarrow$
 当 $T \rightarrow \infty$ 时: 周期信号 \rightarrow 非周期信号; 离散频谱 \rightarrow 连续频谱

主峰高度 $\rightarrow 0$, 但频谱包络线的形状不变。

4.3.2 周期信号的功率谱

周期信号的平均功率

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \right] dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cdot F_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \end{aligned}$$

$$\text{或 } P = F_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |F_n|^2 = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2}$$

称为帕什瓦尔定理或功率等式 表明周期信号在时域中的平均功率等于频域中的直流分量和各次谐波分量的平均功率之和。

$|F_n|^2$ 随 $n\omega_0$ 变化的图形称为周期信号的功率频谱，
简称功率谱。

例：图示周期矩形脉冲， $A=1$, $T=0.5$, $\tau=0.1$ ，试画出其频谱和功率谱，并求出其在有效频带宽度($0 \sim \frac{2\pi}{\tau}$)内的分量所具有的平均功率占整个信号平均功率的百分比。

解： $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 4\pi$

$$F_n = \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) = 0.2 \text{Sa}(0.2n\pi)$$

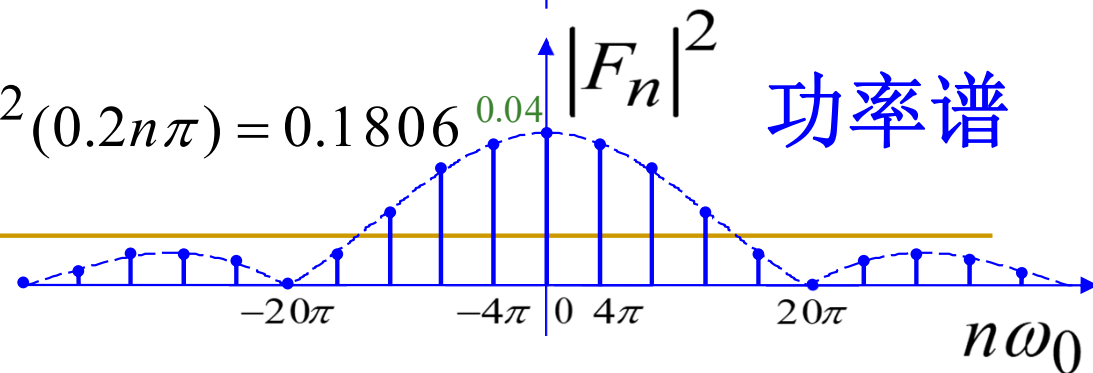
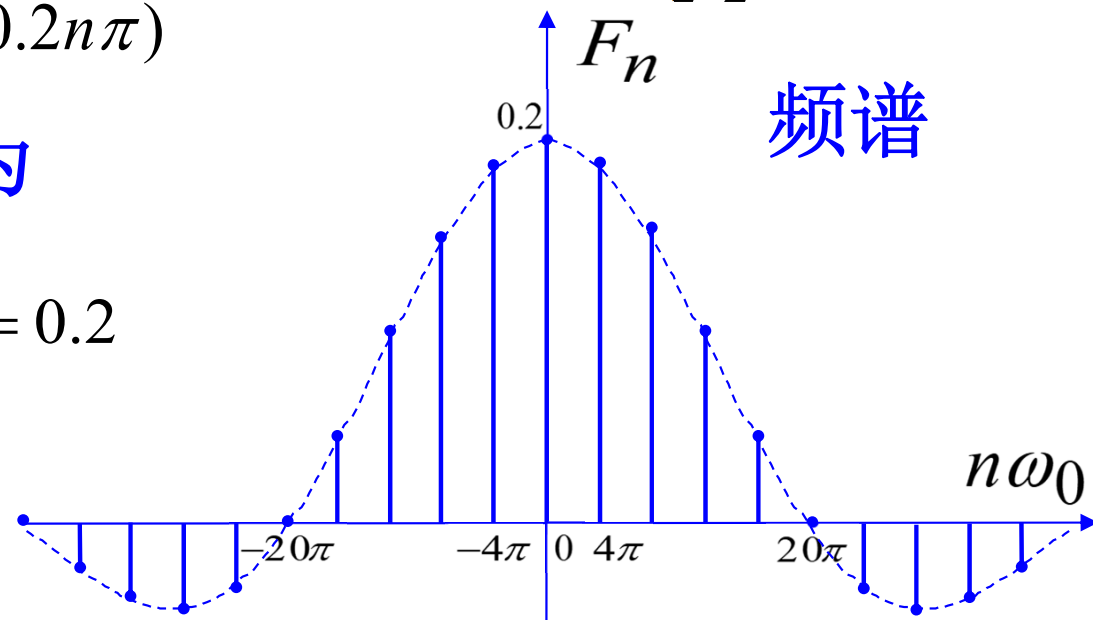
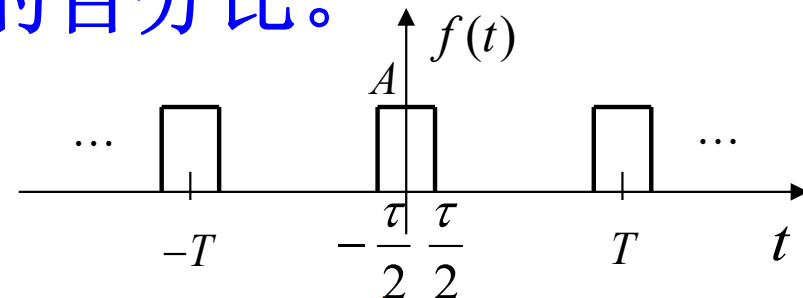
在时域中求得信号的功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \frac{1}{0.5} \int_{-0.1/2}^{0.1/2} 1^2 dt = 0.2$$

在有效频带宽度 ($0 \sim \frac{2\pi}{\tau}$) 内的分量所具有的平均功率为

$$P' = |F_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^5 |F_n|^2 = 0.2^2 + 2 \sum_{n=1}^5 \text{Sa}^2(0.2n\pi) = 0.1806$$

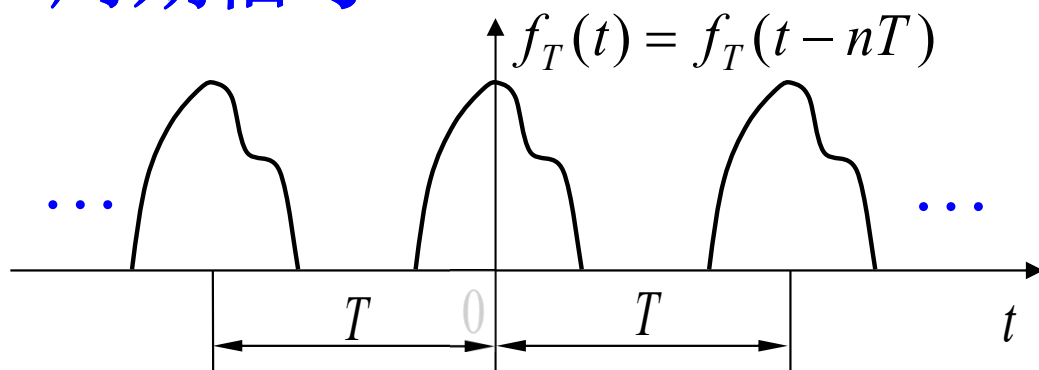
$$\therefore \frac{P'}{P} = \frac{0.1806}{0.2} \times 100\% = 90.3\%$$



4.4 非周期信号的频谱

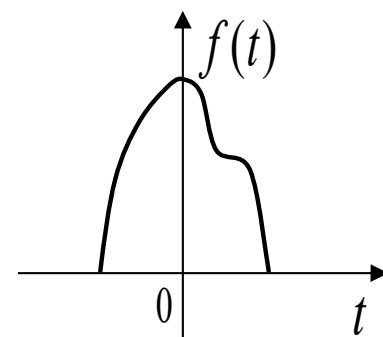
4.4.1 从傅里叶级数到傅里叶变换

周期信号



非周期信号

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = f(t)$$



$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时, $F_n \rightarrow 0$, $\omega_0 \rightarrow \Delta\omega$

而 $TF_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt = F_n(jn\Delta\omega)$ 可能为有限值

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(jn\Delta\omega)}{T} e^{jn\Delta\omega t} \\
 &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{F(jn\Delta\omega)}{2\pi} \Delta\omega \right) e^{jn\Delta\omega t} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(jn\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega t} \cdot \Delta\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{—称为傅里叶积分或傅氏反变换}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(j\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} T F_n = \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{—称为傅里叶正变换或傅氏变换}
 \end{aligned}$$

$$\text{记作 } F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

$$\text{或 } f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

4.4.2 频谱函数 $F(\omega)$ 的物理意义及其自身特性

周期信号的指数型傅里叶级数 $f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$ 表明,

周期信号可以分解为无限多个频率为 $n\omega_0$ 、复振幅为 F_n 的指数分量 $e^{jn\omega_0 t}$ 的离散和;

非周期信号的傅里叶变换 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ 表明,

非周期信号可以分解为无穷多个频率为 ω 、复振幅为 $\frac{F(\omega)d\omega}{2\pi}$ 的虚指数分量 $e^{j\omega t}$ 的连续和 (积分)。

$$F(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} T F_n = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{2\pi}{\Delta\omega} F_n = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{F_n}{\Delta f}$$

为单位频带的复振幅称为频谱密度函数

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ 一般情况下是关于 ω 的复函数，可以写作

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\theta(\omega)} \quad \text{习惯上称} \quad \begin{cases} |F(\omega)| \sim \omega \text{ 曲线为幅度频谱} \\ \theta(\omega) \sim \omega \text{ 曲线为相位频谱} \end{cases}$$

当 $f(t)$ 为实信号时， $F(\omega)$ 有如下特性：

(1) $F^*(\omega) = F(-\omega)$ ，即 $|F(-\omega)| = |F(\omega)|$ 和 $\theta(-\omega) = -\theta(\omega)$

如果 $F(\omega)$ 表示为

$$F(\omega) = \text{Re}[F(\omega)] + j\text{Im}[F(\omega)] = R(\omega) + jI(\omega)$$

则 $R(-\omega) = R(\omega)$ ， $I(-\omega) = -I(\omega)$

(2) $F(\omega)$ 与 F_n 之间的关系

$$F(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} TF_n \quad \text{和} \quad F_n = \left. \frac{F(\omega)}{T} \right|_{\omega = n\omega_0}$$

(3) 奇、偶函数的傅里叶变换特点

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

当 $f(t)$ 为 t 的实偶函数时,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad \text{为 } \omega \text{ 的实偶函数}$$

当 $f(t)$ 为 t 的实奇函数时,

$$F(\omega) = -j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = -j 2 \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad \text{为 } \omega \text{ 的虚奇函数}$$

对于任意的实信号 $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$,

则 $f_e(t) \leftrightarrow R(\omega) \quad f_o(t) \leftrightarrow jI(\omega)$

4.4.3 傅里叶变换的存在性

狄里赫勒条件修改为

- (1) 在 $(-\infty \sim \infty)$ 只有有限个不连续点;
- (2) 在 $(-\infty \sim \infty)$ 只有有限个极大值、极小值;
- (3) 在 $(-\infty \sim \infty)$ 绝对可积, 即

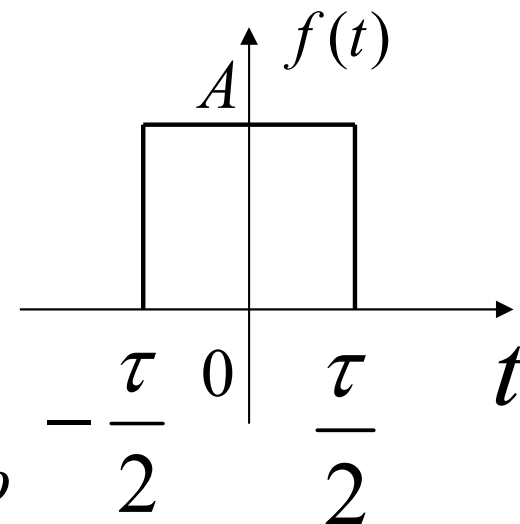
$$|F(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

这只是充分条件而非必要条件, 如果引入广义函数后, 即使不满足此条件, 甚至某些非功率非能量信号也可能存在傅氏变换。

4.5 一些常见信号的频域分析

1. 矩形脉冲

$$f(t) = A \cdot g_{\tau}(t) = \begin{cases} A & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

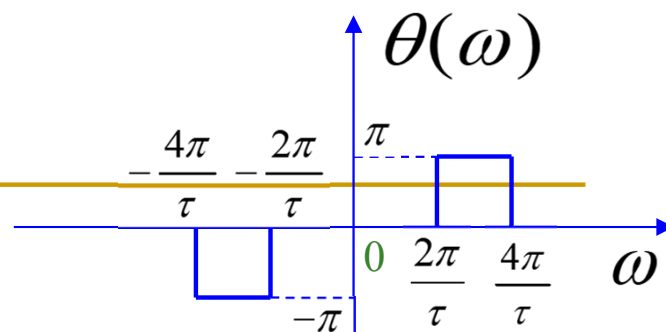
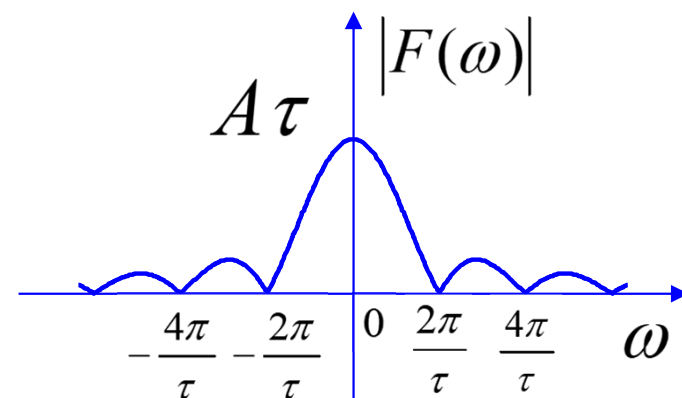


$$F(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} TF_n = \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \Big|_{n\omega_0=\omega}$$

$$= A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

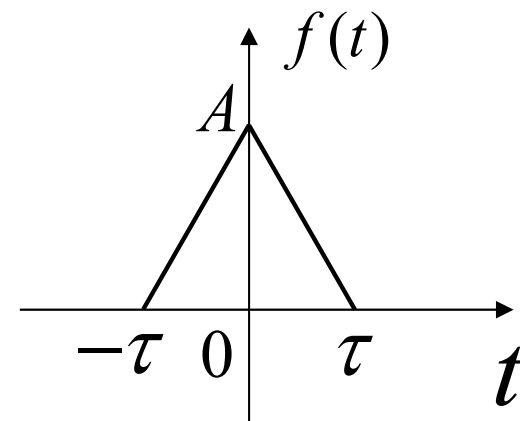
幅度频谱 $|F(\omega)| = A\tau \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|$

相位频谱 $\theta(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) > 0 \\ \pi & \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) < 0 \end{cases}$



2. 三角形脉冲

$$f(t) = A \cdot \Delta_{2\tau}(t) = \begin{cases} A \left(1 - \frac{|t|}{\tau} \right) & |t| \leq \tau \\ 0 & |t| \geq \tau \end{cases}$$

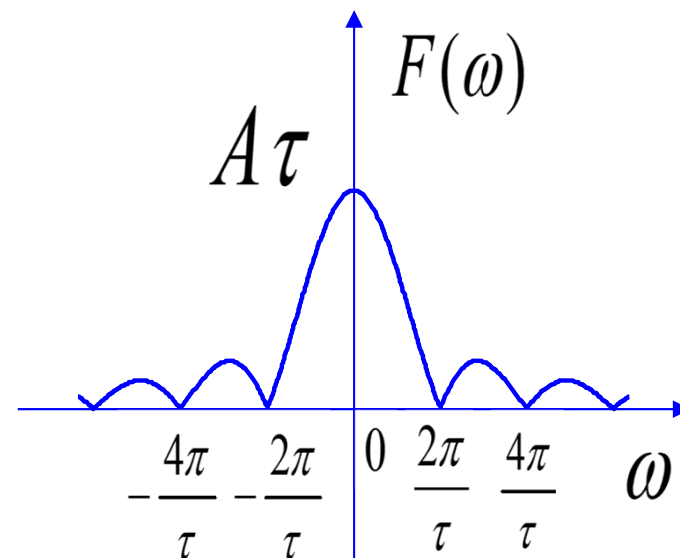


$$F(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = 2A \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \cos \omega t dt$$

$$= 2A \int_0^{\tau} \cos \omega t dt - \frac{2A}{\tau} \int_0^{\tau} t \cos \omega t dt$$

$$= 2A \frac{\sin \omega \tau}{\omega} - \frac{2A}{\tau \omega} \int_0^{\tau} t d(\sin \omega t)$$

$$= \frac{4A}{\omega^2 \tau} \sin^2 \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) = A \tau \text{Sa}^2 \left(\frac{\omega \tau}{2} \right)$$



幅度频谱即 $F(\omega)$ 相位频谱为零

4. 单边实指数脉冲

$$f(t) = Ae^{-\alpha t}u(t) \quad (\alpha > 0)$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\alpha t}u(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= A \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \frac{Ae^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{\alpha + j\omega} \end{aligned}$$

幅度频谱 $|F(\omega)| = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$

相位频谱 $\theta(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$

4. 双边实指数脉冲

$$f(t) = A e^{-\alpha|t|} \quad (\alpha > 0)$$

$$F(\omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-j\omega t} dt$$

$$= A \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + A \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt$$

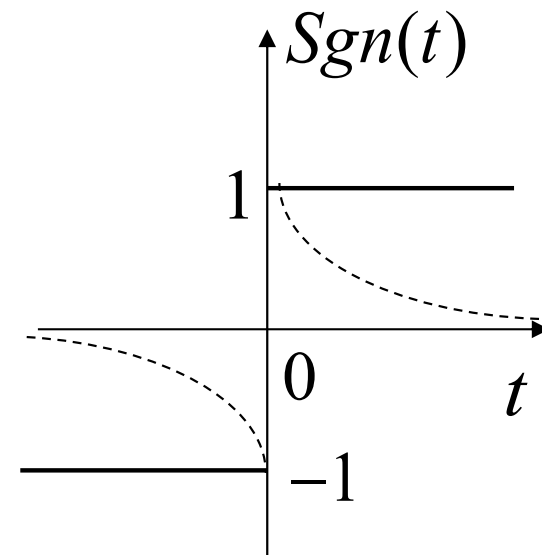
$$= \frac{A}{\alpha - j\omega} + \frac{A}{\alpha + j\omega} = \frac{2A\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

幅度频谱即 $F(\omega)$

相位频谱为零

5. 符号函数

$$\text{Sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



$$\text{Sgn}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [e^{-\alpha t} u(t) - e^{\alpha t} u(-t)]$$

$$F(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\alpha - j\omega} \right] = \frac{2}{j\omega}$$

幅度频谱 $|F(\omega)| = \frac{2}{|\omega|}$

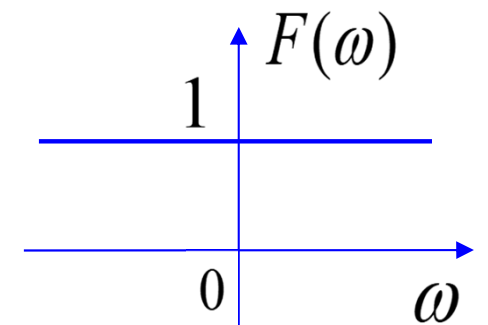
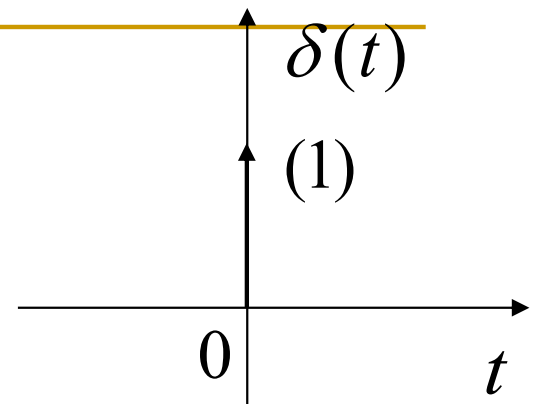
相位频谱 $\theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} \text{sgn}(\omega)$

6. 单位冲激函数 $\delta(t)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (\text{白噪声})$$

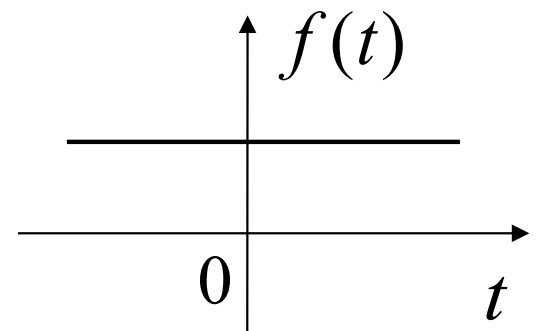
$$\text{反变换 } \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

$$\text{有 } \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm jxy} dx = 2\pi \delta(y)$$

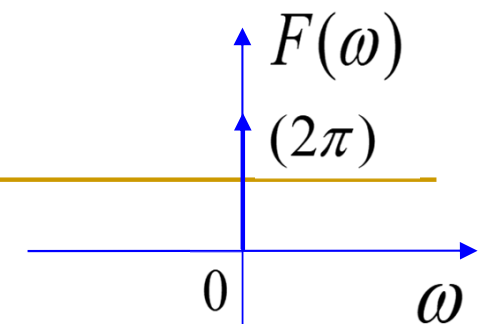


7. 直流信号

$$\text{设 } f(t) = 1$$



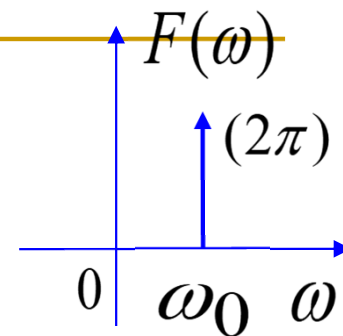
$$\text{则 } F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi \delta(\omega)$$



8. 虚指数信号 $e^{j\omega_0 t}$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt$$

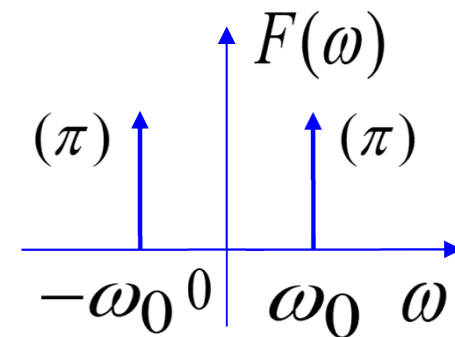
$$= 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$



正弦、余弦函数的傅里叶变换

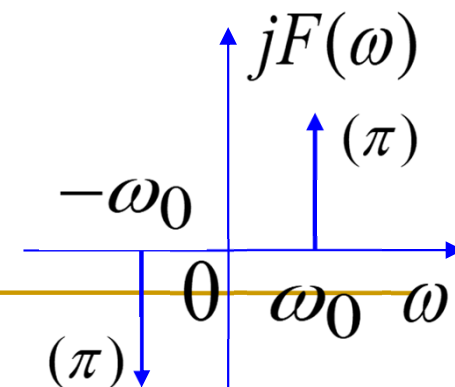
$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$\leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$



$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{j2}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

$$\leftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

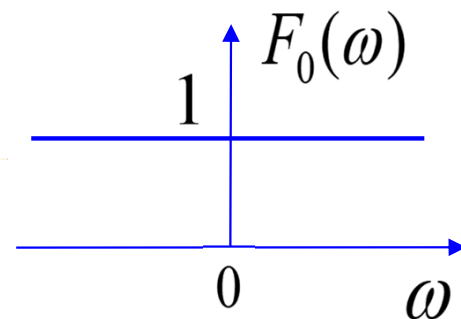
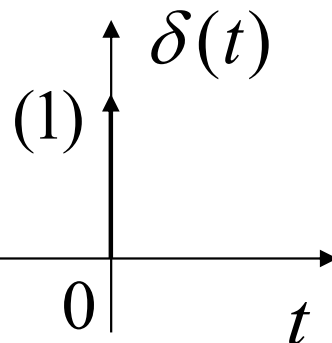


周期信号的傅里叶变换

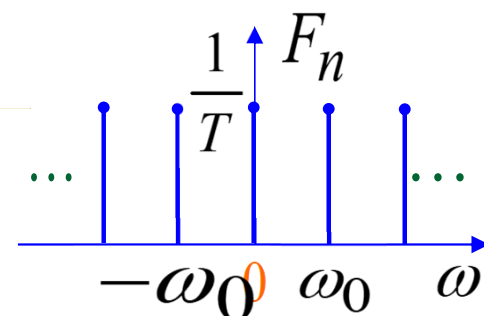
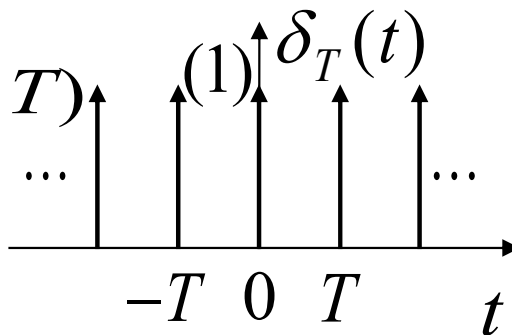
$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$F(\omega) = \mathcal{F} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \right]$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

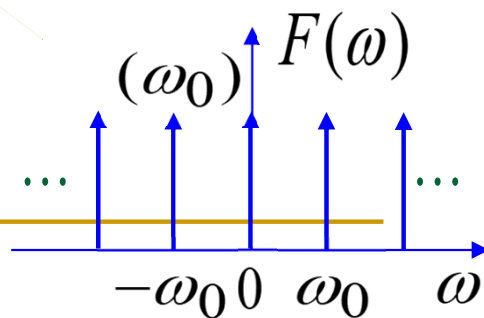


例如 $\delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$



$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$$



9. 单位阶跃信号

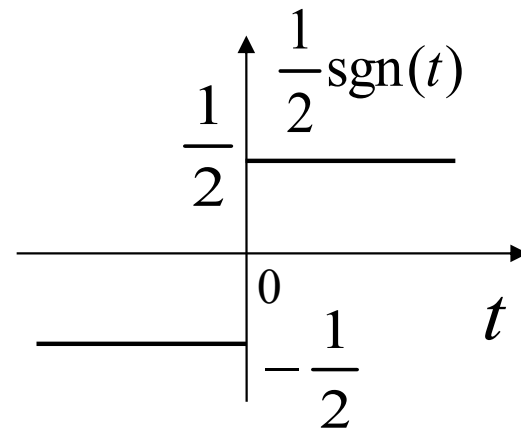
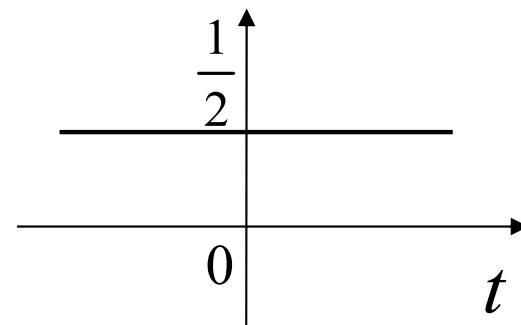
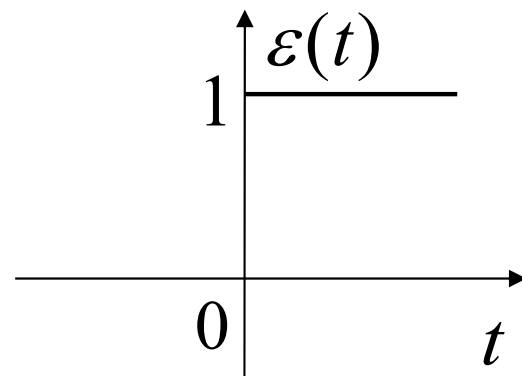
可以表示为

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

$$\leftrightarrow F(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$R(\omega) = \pi\delta(\omega)$$

$$I(\omega) = -\frac{1}{\omega}$$



10. 高斯脉冲(钟形脉冲)

$$f(t) = A e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \quad (-\infty < t < \infty)$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} e^{-j\omega t} dt \\ &= \sqrt{\pi} A \tau e^{-\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

可见，高斯脉冲信号的频谱仍为高斯脉冲，若

$$A = 1, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ 时, } f(t) = e^{-\pi t^2}$$

$$F(\omega) = e^{-\left(\frac{\omega}{2\sqrt{\pi}}\right)^2}, \quad \text{则} \quad F(f) = e^{-\pi f^2}$$

4.6 傅里叶变换的性质及其应用

对任意信号都可以在时域和频域中进行描述，联系这两种描述方法的纽带就是傅里叶变换。

傅里叶变换的性质揭示了信号的特性、运算在时域和频域中的对应关系，当在某一个域中对信号进行分析和计算感到困难时，可以利用傅里叶变换的性质转换到另一个域中进行。

另外，根据定义求取傅里叶正、反变换时，不可避免地会遇到麻烦的积分或信号不满足绝对可积的条件等问题，而利用傅里叶变换的性质则可以简捷地求得信号的傅里叶正、反变换。

1. 线性

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

则 $af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$ (a, b 为常数)

例 $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

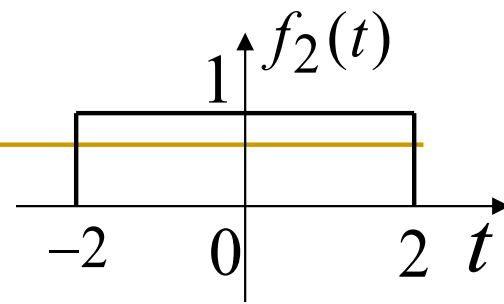
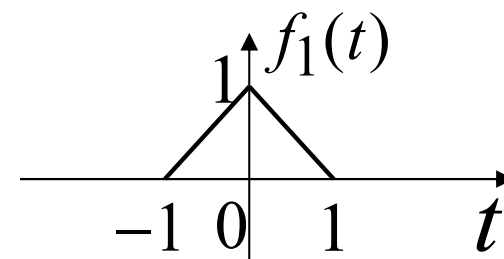
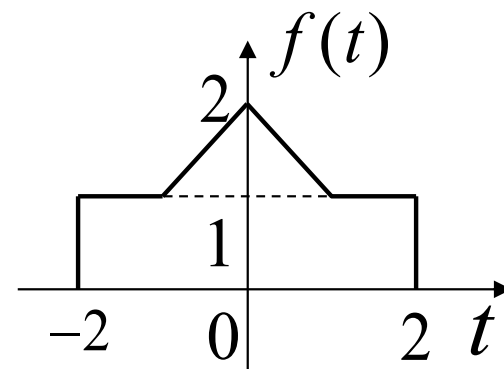
$$f_1(t) = \Delta_2(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases} \leftrightarrow F_1(\omega) = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$f_2(t) = g_4(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 2 \\ 0 & |t| > 2 \end{cases} \leftrightarrow F_2(\omega) = 4Sa(2\omega)$$

$$\therefore f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

$$\leftrightarrow F_1(\omega) + F_2(\omega) = F(\omega)$$

$$= Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + 4Sa(2\omega)$$



2. 对称性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

证明: $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

将上式中变量的符号 t 和 ω 互相掉换, 得

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$$

若 $f(t)$ 为偶函数, 则 $f(\omega) = f(-\omega)$, 有

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$$

利用对称性质可以方便地求得某些信号的傅里叶变换或傅里叶反变换。

例如，求直流信号的傅里叶变换。

$$\because f(t) = \delta(t) \leftrightarrow 1 = F(\omega)$$

$$\therefore F(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

傅里叶变换的对称性质可以帮助我们理解工程实际中的重要概念。

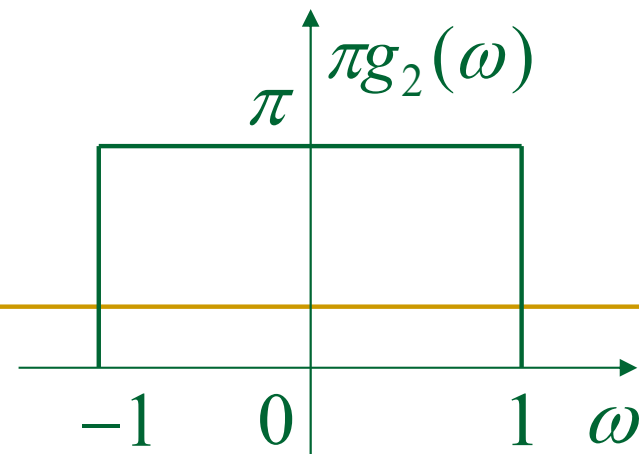
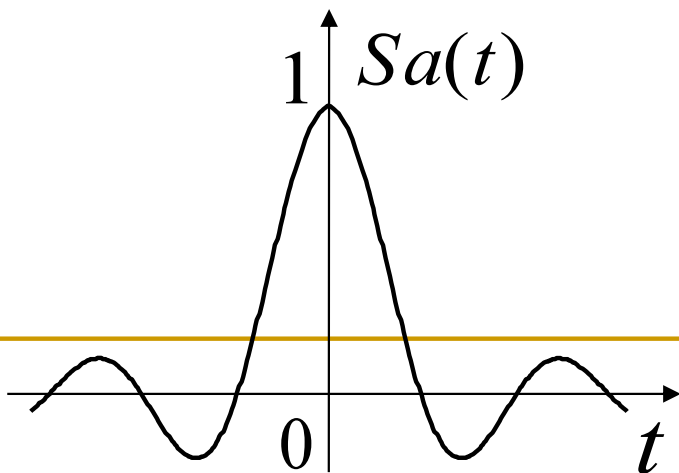
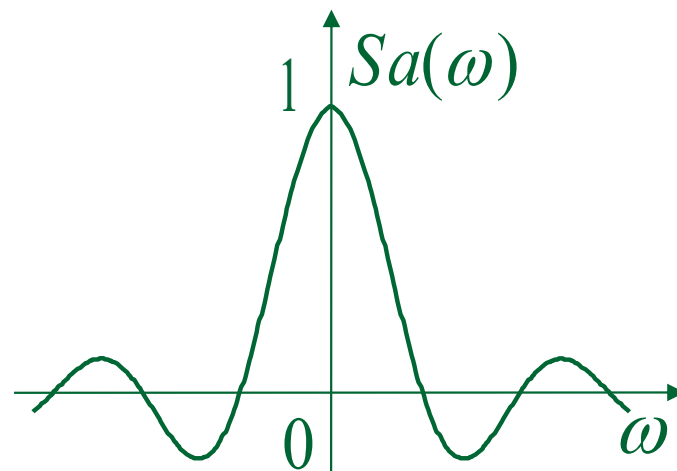
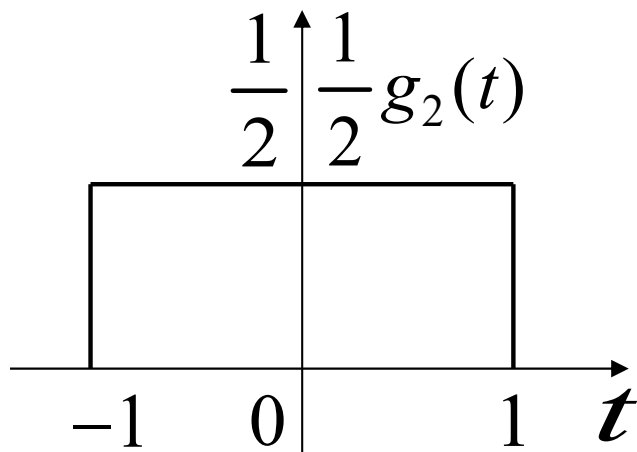
例如，时域中连续的周期信号的频谱是离散的、非周期的，根据对称性可知：时域中离散的、非周期信号的频谱必定是连续的、周期的。

例4-6-2 试求取样函数 $Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$ 的频谱函数。

解：设 $F(t) = Sa(t)$

$$\text{则 } F(\omega) = Sa(\omega) \leftrightarrow \frac{1}{2} g_2(t) = f(t)$$

$$\therefore F(t) = Sa(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) = \pi g_2(-\omega) = \pi g_2(\omega)$$



4. 比例性（尺度变换）

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ （ a 为非零实常数）

证明：若 $a > 0$, $f(at) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$

$$\xrightarrow{x=at} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\left(\frac{\omega x}{a}\right)} \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

同理可证，若 $a < 0$ ，则 $f(at) \leftrightarrow -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

综合上述两种情况，得 $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

若 $a = -1$, 则 $f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$

函数 $f(at)$ 表示函数 $f(t)$ 沿时间轴压缩（或扩展）了 a 倍，
而 $F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ 则表示 $F(\omega)$ 沿频率轴扩展（或压缩）了 a 倍。

以矩形脉冲为例，设脉冲宽度为 τ ，其频谱的有效带宽为 $\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)$ ，即脉宽与带宽的乘积是一个常数。在通信技术中，为了提高通信速度（每秒内所传送的脉冲数），减小脉冲宽度和希望减小所占用的频带宽度是一对矛盾。

4. 时移性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega)$

证明：根据傅里叶变换的定义，有

$$\begin{aligned} f(t - t_0) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt \xrightarrow{x=t-t_0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega(x+t_0)} dx \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx = e^{-j\omega t_0} F(\omega) \end{aligned}$$

或：根据傅里叶反变换的定义，有

$$f(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F(\omega) e^{-j\omega t_0}] e^{j\omega t} d\omega$$

$$\text{即 } f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

表明函数在时域中的时移，对应于其频谱在频域中产生附加相移。

既有时移又有尺度变换

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

$$\text{则 } f(at - t_0) = f[a(t - \frac{t_0}{a})] \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\omega \frac{t_0}{a}}$$

(a 和 t_0 为实常数, 且 $a \neq 0$)

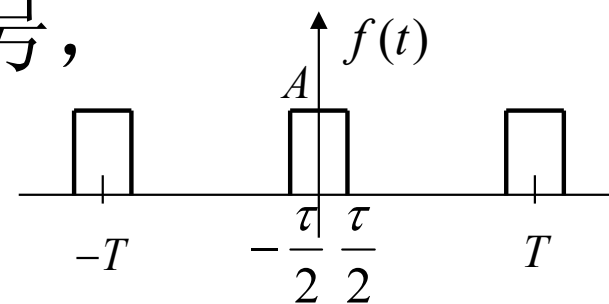
例3-6-3 求图示三矩形脉冲信号 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 。

解: 设 $f_0(t)$ 表示中间的单个矩形脉冲信号,

则

$$f_0(t) \leftrightarrow F_0(\omega) = A \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$

$$f(t) = f_0(t+T) + f_0(t) + f_0(t-T)$$



频谱图形见

图3-6-4

根据时移性, 可得 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 为

$$F(\omega) = F_0(\omega)(e^{j\omega T} + 1 + e^{-j\omega T}) = A \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)(1 + 2 \cos \omega T)$$

5. 频移性（调制定理）

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$

证明：根据傅里叶变换的定义，有

$$\begin{aligned} f(t)e^{j\omega_0 t} &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= F(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

表明 $f(t)$ 在时域中乘以 $e^{j\omega_0 t}$ ，对应于 $F(\omega)$ 在频域移动 ω_0 。

调制定理

$$f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$$

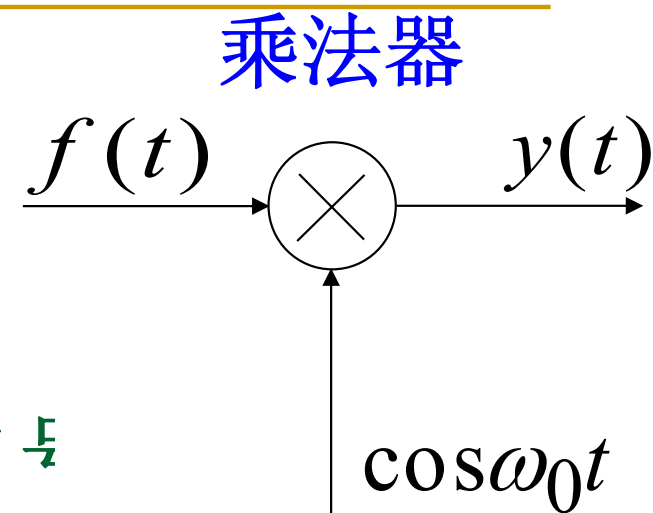
$$f(t)\sin\omega_0 t \leftrightarrow \frac{j}{2}[F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)]$$

幅度调制（振幅调制）

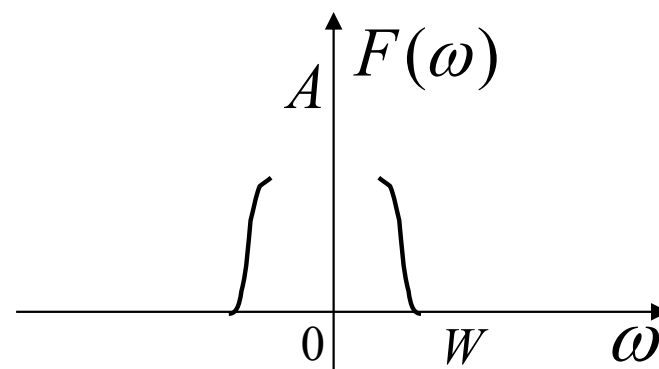
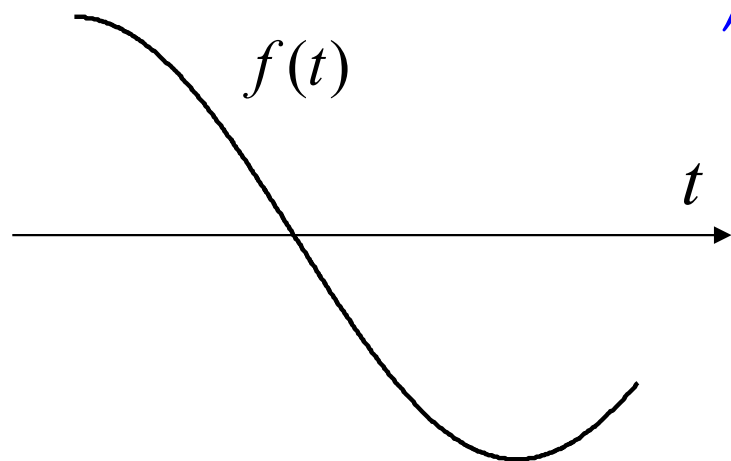
信号 $f(t)$ —称为调制信号

正弦或余弦信号—称为载波信号

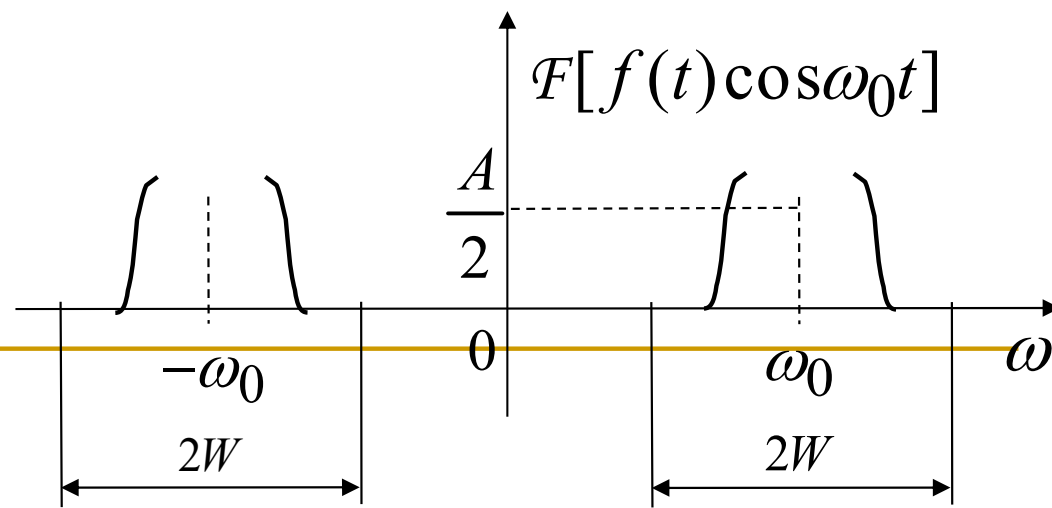
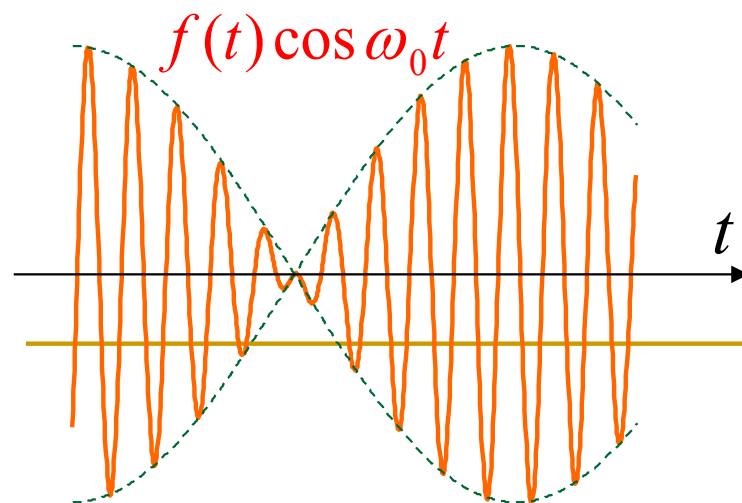
$y(t) = f(t) \cdot \cos\omega_0 t$ —称为已调制信号



例4-6-4



频分多路复用



6. 卷积定理

(1) 时域卷积定理

$$\text{若 } f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

$$\text{则 } f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

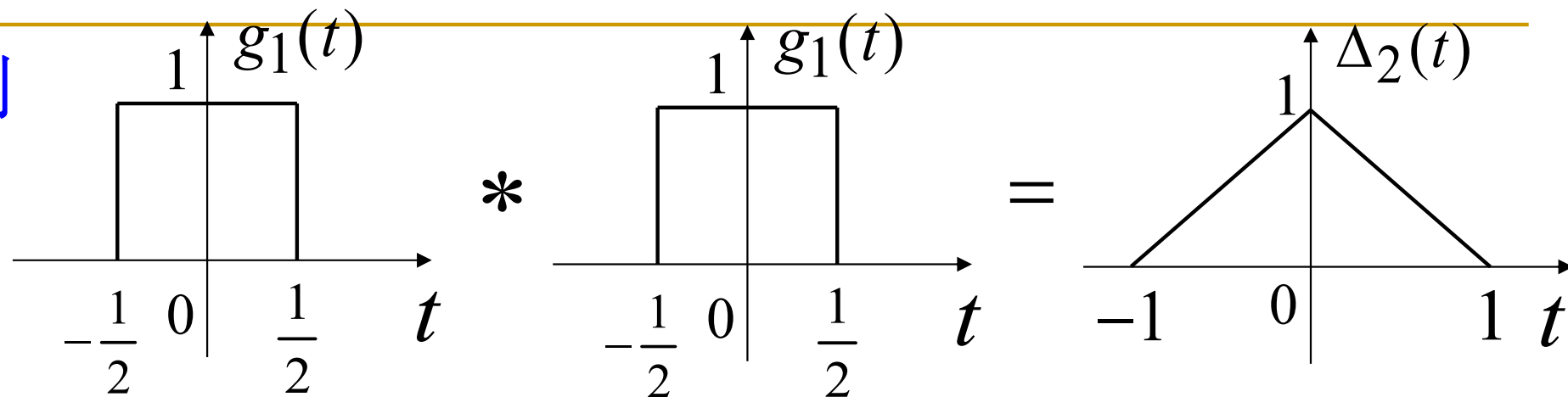
$$\text{证明: } f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[F_2(\omega) e^{-j\omega \tau} \right] d\tau$$

$$= F_2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = F_2(\omega) \cdot F_1(\omega)$$

例



$$F[g_1(t)] = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$F[\Delta_2(t)] = F[g_1(t) * g_1(t)] = F[g_1(t)] \cdot F[g_1(t)]$$

$$= Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

在系统分析中，利用时域卷积定理求解零状态响应将很方便：

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) \leftrightarrow Y_{zs}(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

(2) 频域卷积定理

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

则 $f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$

证明: $\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(t) e^{-j\omega t} dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda) e^{j\lambda t} d\lambda \right] f_2(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j(\omega - \lambda)t} dt \right] d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda) F_2(\omega - \lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

两个信号相乘，
当其中一个信号的频谱为冲激函数时，利用频域卷积定理求取频谱是十分方便的，
如 $f(t)e^{j\omega_0 t}$ ，
 $f(t)\cos\omega_0 t$ 等。

7. 时域微分和积分

(1) 时域微分性质 若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$
则 $\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$

证明:
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [j\omega F(\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

即
$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

推广
$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$$

(2) 时域积分性质

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $\int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda \leftrightarrow \pi F(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(\omega)$

证明: $f(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \varepsilon(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$

$$\leftrightarrow F(\omega) [\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}] = \pi F(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(\omega)$$

式中, $F(0) = F(\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$

当 $F(0) = 0$ 时, 则有 $\int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega)$

(3) 利用时域微、积分性质计算傅里叶变换

当 $\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t)$ 为常数时，其频谱 $F(\omega)$ 不易求得，设

$f'(t) = g(t) \leftrightarrow G(\omega)$ ，此时计算 $F(\omega)$ 的公式推导如下：

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f'(\tau) d\tau = f(t) - f(-\infty)$$

$$\leftrightarrow \pi G(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} G(\omega) = F(\omega) - 2\pi f(-\infty) \delta(\omega)$$

将 $G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=0} = f(\infty) - f(-\infty)$ 代入上式，整理得

$$F(\omega) = \frac{G(\omega)}{j\omega} + \pi [f(\infty) + f(-\infty)] \delta(\omega) \quad \text{微分冲激法}$$

例如，求符号函数的频谱：

设 $f(t) = \text{sgn}(t)$ ，则 $f(\infty) = 1$ ， $f(-\infty) = -1$ ，

$f'(t) = \text{sgn}'(t) = g(t) = 2\delta(t) \leftrightarrow 2 = G(\omega)$ ，代入公式

$$F(\omega) = \frac{G(\omega)}{j\omega} + \pi[f(\infty) + f(-\infty)]\delta(\omega)$$

$$\text{得 } \text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

3.5节中求符号函数频谱的方法不是很妥当，如 $\varepsilon(t)$ 就不能这样做，否则会漏掉其直流分量。

当 $f(\infty) = f(-\infty) = 0$ 时，才有 $F(\omega) = \frac{G(\omega)}{j\omega}$

当 $f(-\infty) = 0$ ， $f(\infty)$ 为常数时，才有 $F(\omega) = \frac{G(\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega)$

例4-6-6 求图示信号的频谱。

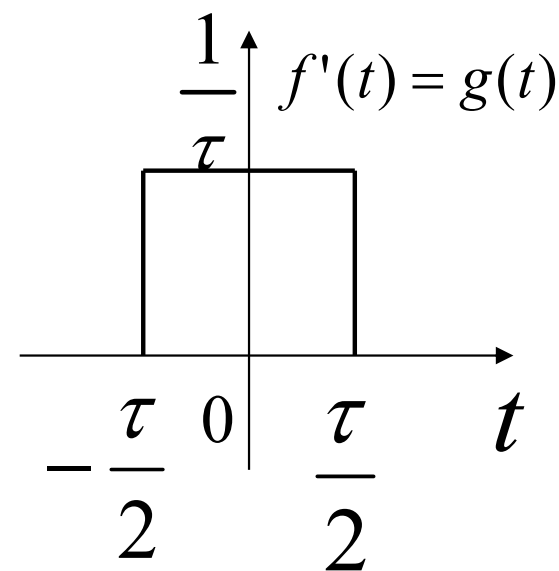
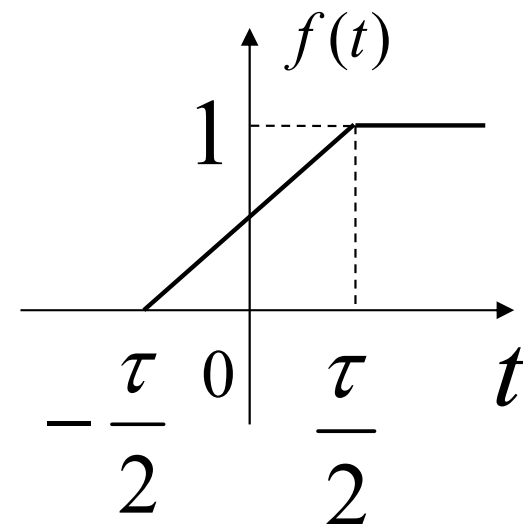
解：对 $f(t)$ 求导，得 $f'(t)$ 如图

则 $f'(t) = g(t) \leftrightarrow G(\omega) = \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

又 $f(\infty) = 1$, $f(-\infty) = 0$, 代入公式

$$F(\omega) = \frac{G(\omega)}{j\omega} + \pi[f(\infty) + f(-\infty)]\delta(\omega)$$

得 $F(\omega) = \frac{\text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$



例4-6-7 求图示信号的频谱。

解：对 $f(t)$ 求导，得 $f'(t)$ 如图，则

$$f'(t) = g(t)$$

$$= -\delta(t+2) + 3\delta(t+1) - 3\delta(t-1) + \delta(t-2)$$

$$\leftrightarrow G(\omega) = -e^{j2\omega} + 3e^{j\omega} - 3e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}$$

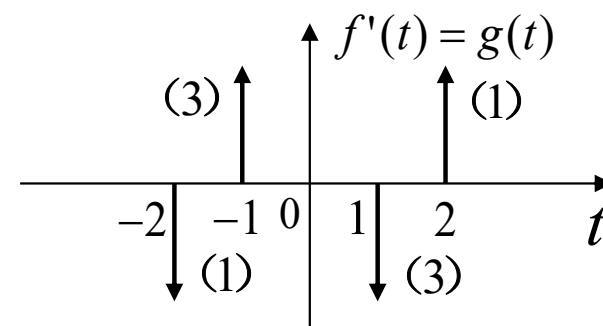
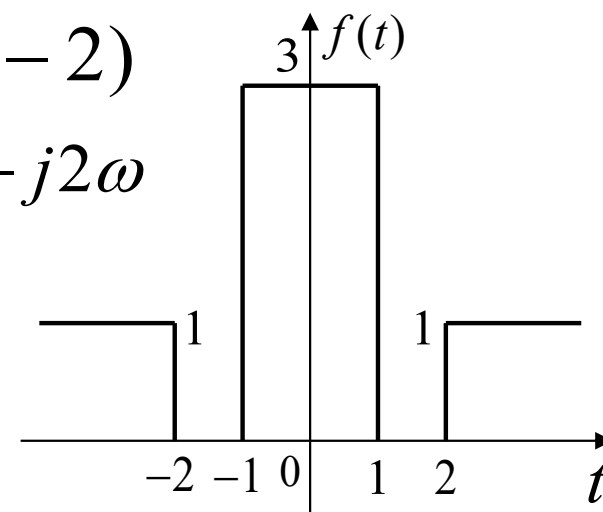
$$= 6j\sin\omega - j2\sin 2\omega$$

又 $f(\infty) = f(-\infty) = 1$ ，代入公式

$$\text{得 } F(\omega) = \frac{G(\omega)}{j\omega} + 2\pi\delta(\omega)$$

$$= \frac{6\sin\omega}{\omega} - \frac{2\sin 2\omega}{\omega} + 2\pi\delta(\omega)$$

$$= 6Sa(\omega) - 4Sa(2\omega) + 2\pi\delta(\omega)$$



8. 频域微分和积分

(1) 频域微分性质

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $(-jt)f(t) \leftrightarrow \frac{dF(\omega)}{d\omega}$

证明: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ $\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} (-jt)f(t)e^{-j\omega t} dt$

$$\therefore (-jt)f(t) \leftrightarrow \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

写成实用的形式 $tf(t) \leftrightarrow j\frac{dF(\omega)}{d\omega}$

递推, 得 $t^n f(t) \leftrightarrow (j)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$

(2) 频域积分性质 若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

$$\text{则 } \pi f(0)\delta(t) + \frac{f(t)}{-jt} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(\Omega) d\Omega$$

$$\text{证明: } \int_{-\infty}^{\omega} F(\Omega) d\Omega = F(\omega) * u(\omega) \\ \because u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\text{利用对称性, 有 } \frac{1}{-jt} + \pi\delta(t) \leftrightarrow 2\pi u(\omega)$$

再利用频域卷积定理, 得

$$\left[\frac{1}{-jt} + \pi\delta(t) \right] \cdot f(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi u(\omega) * F(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} F(\Omega) d\Omega$$

$$\text{即 } \pi f(0)\delta(t) + \frac{f(t)}{-jt} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(\Omega) d\Omega$$

例4-6-8 试证明下列傅里叶变换对成立：

$$(1) \quad t^n \leftrightarrow 2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega) \quad (2) \quad t^n \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{n!}{(j\omega)^{n+1}} + \pi j^n \delta^{(n)}(\omega)$$

解 (1) 由于 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \leftrightarrow F(\omega) = \delta(\omega)$, 根据频域微分性质,

得 $(-jt)^n \frac{1}{2\pi} \leftrightarrow \delta^{(n)}(\omega), \quad \text{故} \quad t^n \leftrightarrow 2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega)$

(2) 由于 $\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$, 根据频域微分性质

得 $(-jt)^n \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{d^n}{d\omega^n} \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right]$

故 $t^n \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{n!}{(j\omega)^{n+1}} + \pi j^n \delta^{(n)}(\omega)$

例4-6-9 试证明下列傅里叶变换对成立:

$$(1) \frac{1}{\pi t} \leftrightarrow -j \operatorname{sgn}(\omega) \quad (2) -\frac{1}{\pi t^2} \leftrightarrow |\omega|$$

解 (1) 由于 $f(t) = \operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega} = F(\omega)$

利用对称性 $F(t) = \frac{2}{jt} \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) = 2\pi \operatorname{sgn}(-\omega) = -2\pi \operatorname{sgn}(\omega)$

再利用线性 $\frac{1}{\pi t} \leftrightarrow -j \operatorname{sgn}(\omega)$

(2) 利用(1)的结论, 再利用时域微分性质, 可得

$$\left(\frac{1}{\pi t} \right)' = \frac{-1}{\pi t^2} \leftrightarrow j\omega [-j \operatorname{sgn}(\omega)] = \omega \operatorname{sgn}(\omega)$$

即 $-\frac{1}{\pi t^2} \leftrightarrow |\omega|$

傅里叶变换性质的应用

例：设 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 求 $(1-t)f(1-t)$ 的傅立叶变换

解法一：设 $f_1(t) = tf(t)$

则 $(1-t)f(1-t) = [-(t-1)]f[-(t-1)] = f_1[-(t-1)]$

根据频域微分性，有

$$F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)] = \mathcal{F}[tf(t)] = j \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

根据时移和尺度变换的性质，有

$$f_1[-(t-1)] \leftrightarrow F_1(-\omega)e^{-j\omega} = \left[j \frac{dF(-\omega)}{d(-\omega)} \right] e^{-j\omega}$$

即 $(1-t)f(1-t) \leftrightarrow -j \frac{dF(-\omega)}{d\omega} e^{-j\omega}$

解法二： $(1-t)f(1-t) = f(1-t) - tf(1-t)$

$$f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$$

$$f(1-t) = f[-(t-1)] \leftrightarrow F(-\omega)e^{-j\omega}$$

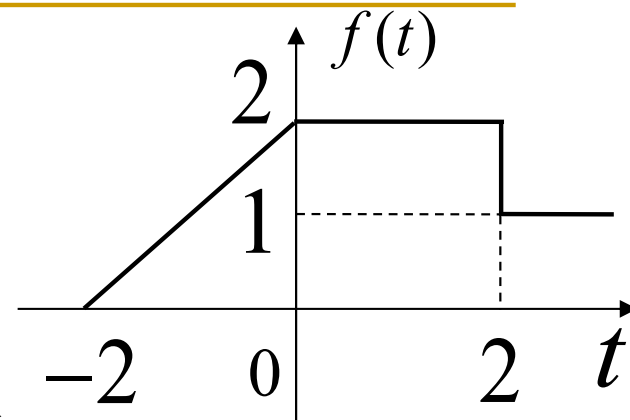
$$tf(1-t) \leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} [F(-\omega)e^{-j\omega}]$$

$$= j \left[\frac{dF(-\omega)}{d\omega} e^{-j\omega} - jF(-\omega)e^{-j\omega} \right]$$

$$= j \frac{dF(-\omega)}{d\omega} e^{-j\omega} + F(-\omega)e^{-j\omega}$$

$$\therefore (1-t)f(1-t) \leftrightarrow -j \frac{dF(-\omega)}{d\omega} e^{-j\omega}$$

例 求图示信号的频谱。

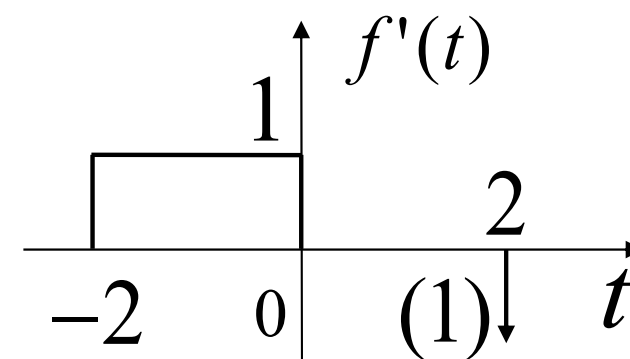


解：对 $f(t)$ 求导，得 $f'(t)$ 如图

根据典型信号的傅里叶变换以及时移性，

有
$$f'(t) \leftrightarrow 2Sa(\omega)e^{j\omega} - e^{-j2\omega}$$

又
$$f(\infty) = 1, \quad f(-\infty) = 0$$



根据时域微积分的性质

得
$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega} \left[2Sa(\omega)e^{j\omega} - e^{-j2\omega} \right] + \pi\delta(\omega)$$

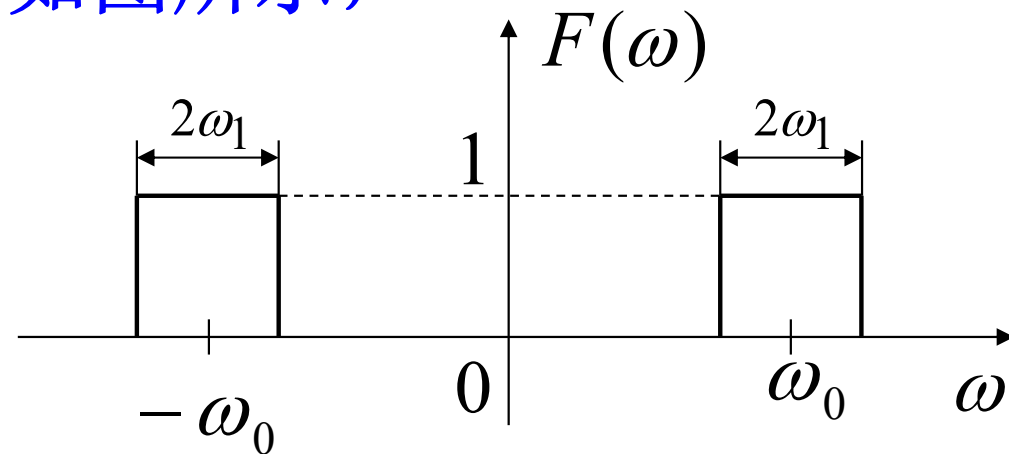
例 求单边正弦信号和单边余弦信号的傅里叶变换。

$$\begin{aligned}\cos \omega_0 t \varepsilon(t) &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [\pi \delta(\omega + \omega_0) + \pi \delta(\omega - \omega_0)] * [\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}] \\&= \frac{\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2j(\omega + \omega_0)} + \frac{1}{2j(\omega - \omega_0)} \\&= \frac{\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\end{aligned}$$

同理可得

$$\sin \omega_0 t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{j\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

例 已知信号 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 如图所示，
试写出其时域表达式。

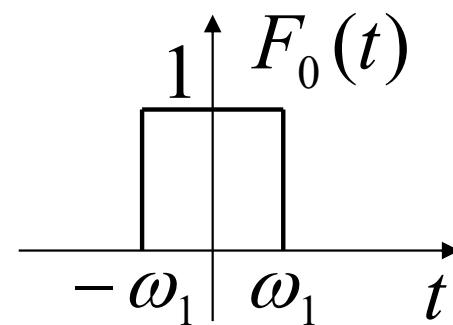


解：(1) 利用对称性求解

设 $F_0(t)$ 如图所示

则 $F_0(t) \leftrightarrow 2\omega_1 Sa(\omega_1\omega)$

有 $F(t) = F_0(t + \omega_0) + F_0(t - \omega_0)$



$$\leftrightarrow F[F_0(t)] \cdot (e^{j\omega_0\omega} + e^{-j\omega_0\omega}) = 4\omega_1 Sa(\omega_1\omega) \cos \omega_0\omega$$

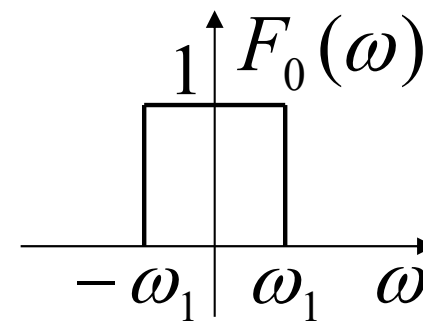
根据对称性 $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

即 $4\omega_1 Sa(\omega_1\omega) \cos \omega_0\omega = 2\pi f(-\omega) = 2\pi f(\omega)$

$$\therefore f(t) = \frac{2\omega_1}{\pi} Sa(\omega_1 t) \cos \omega_0 t$$

(2) 利用调制定理求解

设 $F_0(\omega)$ 如图所示



$$\text{则 } F_0(t) \leftrightarrow 2\omega_1 \text{Sa}(\omega_1\omega) = 2\pi f_0(-\omega) = 2\pi f_0(\omega)$$

$$\text{即 } f_0(t) = \frac{1}{\pi} \omega_1 \text{Sa}(\omega_1 t)$$

$$\text{有 } F(\omega) = F_0(\omega + \omega_0) + F_0(\omega - \omega_0) = \mathcal{F}[2f_0(t)\cos\omega_0 t]$$

$$\therefore f(t) = 2f_0(t)\cos\omega_0 t = \frac{2\omega_1}{\pi} \text{Sa}(\omega_1 t)\cos\omega_0 t$$

(3) 利用频域卷积定理求解

$$F(\omega) = F_0(\omega) * [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\therefore f(t) = 2\pi \cdot \mathcal{F}^{-1}[F_0(\omega)] \cdot \mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$= 2\pi \cdot \frac{\omega_1}{\pi} \text{Sa}(\omega_1 t) \cdot \frac{1}{2\pi} [e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}] = \frac{2\omega_1}{\pi} \text{Sa}(\omega_1 t) \cos \omega_0 t$$

例

$$\text{求 } \frac{d}{dt}[e^{-2(t-1)}u(t)] \leftrightarrow$$

$$\text{解: } e^{-2(t-1)}u(t) = e^2 e^{-2t}u(t) \leftrightarrow e^2 \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$\text{根据时域微分性} \quad \frac{d}{dt}[e^2 e^{-2t}u(t)] \leftrightarrow e^2 \frac{j\omega}{j\omega + 2}$$

$$\text{例: 求 } e^{-jt}\delta(t+2) \leftrightarrow$$

$$\text{解法一: } \delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\text{根据时移性} \quad \delta(t+2) \leftrightarrow e^{j2\omega}$$

$$\text{根据频移性} \quad e^{-jt}\delta(t+2) \leftrightarrow e^{j2(\omega+1)}$$

$$\text{解法二: } e^{-jt}\delta(t+2) = e^{-j2}\delta(t+2) \leftrightarrow e^{j2(\omega+1)}$$

例 已知如图所示信号 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$

试求信号 $f_1(t)$ 的傅里叶变换 $F_1(\omega)$ 。

解：设 $f_0(t)$ 如图所示，

$$\text{则 } f_0(t) = \frac{1}{2} f(2t) + \frac{1}{2} f(-2t)$$

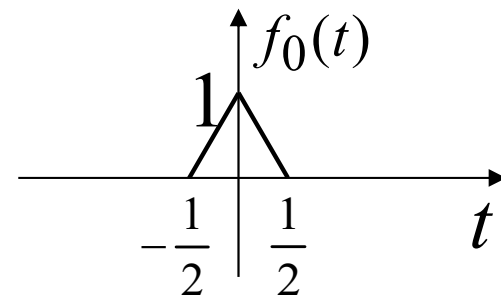
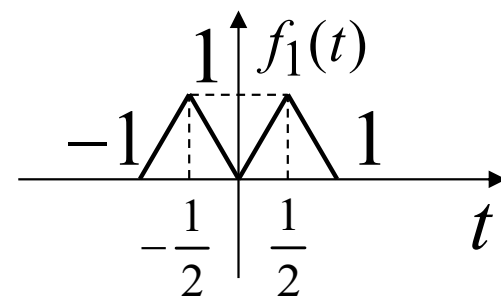
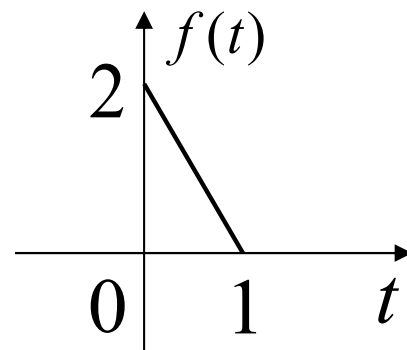
$$\leftrightarrow \frac{1}{4} F\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{1}{4} F\left(-\frac{\omega}{2}\right) = F_0(\omega)$$

$$f_1(t) = f_0(t) * \left[\delta\left(t - \frac{1}{2}\right) + \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) \right]$$

$$\leftrightarrow F_1(\omega) = F_0(\omega) \cdot \left[e^{-j\frac{\omega}{2}} + e^{j\frac{\omega}{2}} \right] = 2F_0(\omega) \cos \frac{\omega}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[F\left(\frac{\omega}{2}\right) + F\left(-\frac{\omega}{2}\right) \right] \cos \frac{\omega}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[R\left(\frac{\omega}{2}\right) + jI\left(\frac{\omega}{2}\right) + R\left(-\frac{\omega}{2}\right) + jI\left(-\frac{\omega}{2}\right) \right] \cos \frac{\omega}{2}$$



因为 $f(t)$ 为实函数，有

$$F(-\omega) = F^*(\omega)$$

即

$$F\left(\frac{\omega}{2}\right) = F^*\left(-\frac{\omega}{2}\right)$$

故

$$R\left(-\frac{\omega}{2}\right) = R\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad I\left(-\frac{\omega}{2}\right) = -I\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\therefore F_1(\omega) = \frac{1}{2} \left[R\left(\frac{\omega}{2}\right) + jI\left(\frac{\omega}{2}\right) + R\left(-\frac{\omega}{2}\right) + jI\left(-\frac{\omega}{2}\right) \right] \cos \frac{\omega}{2}$$

$$= R\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos \frac{\omega}{2}$$

4.7 相关函数与谱密度

4.7.1 能量谱密度

$$\begin{aligned}\text{由 } E &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot F(-\omega) d\omega\end{aligned}$$

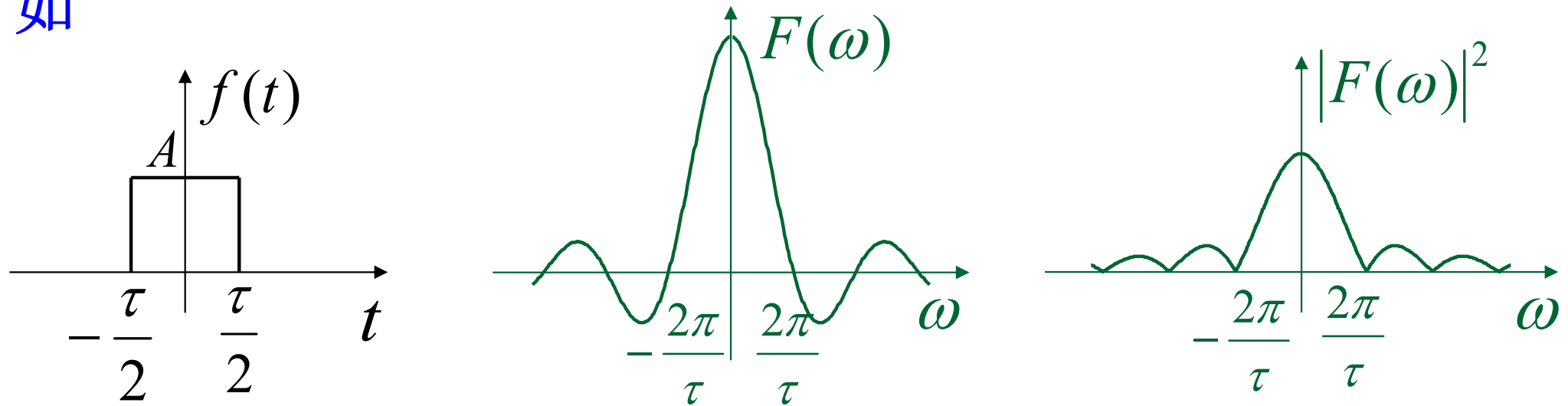
当 $f(t)$ 为实函数时, 有 $F(-\omega) = F^*(\omega)$, 得

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

称为帕什瓦尔等式, 或能量等式

定义: $E_f(\omega) = |F(\omega)|^2$ 为能量谱密度, 简称能量谱。
显然, 能量谱只与信号的幅度谱有关, 与相位谱无关。

如



能量谱密度 E_f 是单位频带上的信号能量, 它的单位是 $\text{J} \cdot \text{s}$ 。

例如: 矩形脉冲信号在频带 $(0 \sim \frac{2\pi}{\tau})$ 内所有分量的总能量就是

对 $\frac{E_f(\omega)}{2\pi} = \frac{|F(\omega)|^2}{2\pi}$ 在 $(-\frac{2\pi}{\tau} \sim \frac{2\pi}{\tau})$ 区间的积分值。

利用帕什瓦尔等式可以帮助我们计算一些积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

例如单边指数信号 $f(t) = e^{-\alpha t} \varepsilon(t) \leftrightarrow F(\omega) = \frac{1}{j\omega + \alpha}$

在时域中计算其能量： $E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = \frac{1}{2\alpha}$

在频域中计算其能量： $E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2} d\omega$

所以，有 $\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2} d\omega = \frac{1}{2\alpha}$

作为能量谱密度的一个应用，下面介绍信号的脉冲宽度和频带宽度的一般概念。

对于一个脉冲宽度为 τ 的矩形脉冲来说，它的频谱存在零交点 $\omega_z = \frac{2\pi}{\tau}$ ，其主要分量的角频率分布在 $0 \sim \omega_z$ 之间。因此定义信号的有效带宽为 $\Delta\omega = \omega_z$ 或 $\Delta f = \frac{1}{\tau}$ 。

但是对于一般的信号来说，例如高斯脉冲，它在时域和频域中都没有零交点，这时其有效脉冲宽度和有效频带宽度可以从能量的角度来定义。

有效脉冲宽度 $\Delta\tau$ 定义为：在时域中绝大部分能量所集中的那段时间，可以表示为

$$\int_{-\frac{\Delta\tau}{2}}^{\frac{\Delta\tau}{2}} f^2(t)dt = \eta E \quad (\text{一般取 } \eta = 90\%)$$

有效频带宽度 $\Delta\omega$ 定义为：在频域中绝大部分能量所集中的那段频带，即

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} |F(\omega)|^2 d\omega = \eta E$$

无论采用什么定义，有效脉冲宽度（脉宽）和有效频带宽度（带宽）的乘积都是一个常数，即两者成反比。因此，要同时具有较窄的脉宽和带宽，就必须选用两者乘积较小的脉冲信号。

4.8 连续系统的频域分析

频域分析：研究系统在不同频率的信号激励下，其零状态响应随频率变化的规律（频率响应特性）。

频域分析法（傅里叶变换分析法）：利用傅里叶变换在频域中求解系统的零状态响应的方法。

4.8.1 傅里叶变换分析法

由线性时不变系统的数学模型

$$\begin{aligned} & a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\ &= b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 x'(t) + b_0 x(t) \end{aligned}$$

两边取傅氏变换，并利用时域微分性质，得

$$\begin{aligned} & [a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 (j\omega) + a_0] Y(\omega) \\ &= [b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1 (j\omega) + b_0] X(\omega) \end{aligned}$$

$$Y(\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0} X(\omega)$$

$$= H(\omega)X(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0}$$

称为系统的系统函数，也称频率响应特性

傅里叶变换分析法的步骤：

- (1) 求取激励 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(\omega)$ ；
- (2) 确定系统的系统函数 $H(\omega)$ ；
- (3) 计算响应的傅里叶变换 $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$ ；
- (4) 取 $Y(\omega)$ 的反变换，得 $y(t)$ 。

4.8.2 系统特性的频域表征 $H(\omega)$

系统函数 $H(\omega)$ 描述了系统在零状态条件下，响应的傅里叶变换与激励的傅里叶变换之间的关系，表征了系统自身的特性，与激励无关。

1. 系统函数 $H(\omega)$ 的物理意义

(1) 系统函数 $H(\omega)$ 是冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换

当 $x(t) = \delta(t)$ 时， $y(t) = x(t) * h(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)$

$$X(\omega) = 1 \quad Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = H(\omega)$$

说明 $h(t)$ 和 $H(\omega)$ 是一对傅里叶变换对，它们分别从时域和频域两个方面表征了同一个系统的特性。

(2) 当激励为无时限的虚指数信号 $x(t) = e^{j\omega t} (-\infty < t < \infty)$ 时,

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= e^{j\omega t} H(\omega) \end{aligned}$$

说明无时限的虚指数信号作用于系统时，其零状态响应（此时也是全响应）仍为同频率的虚指数信号，是激励乘以一个与时间 t 无关的复函数 $H(\omega)$ ，结果是将激励信号在幅度上放大 $|H(\omega)|$ 倍，相位上附加一个 $\angle H(\omega)$ 的相位移后输出。

(3) 当激励为一般信号时,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{X(\omega) d\omega}{2\pi} \right] \cdot e^{j\omega t} \right\}$$

说明信号 $x(t)$ 可以分解为无穷多个频率为 ω , 复振幅为 $\frac{X(\omega) d\omega}{2\pi}$ 的虚指数分量 $e^{j\omega t}$ 的连续和(积分)。

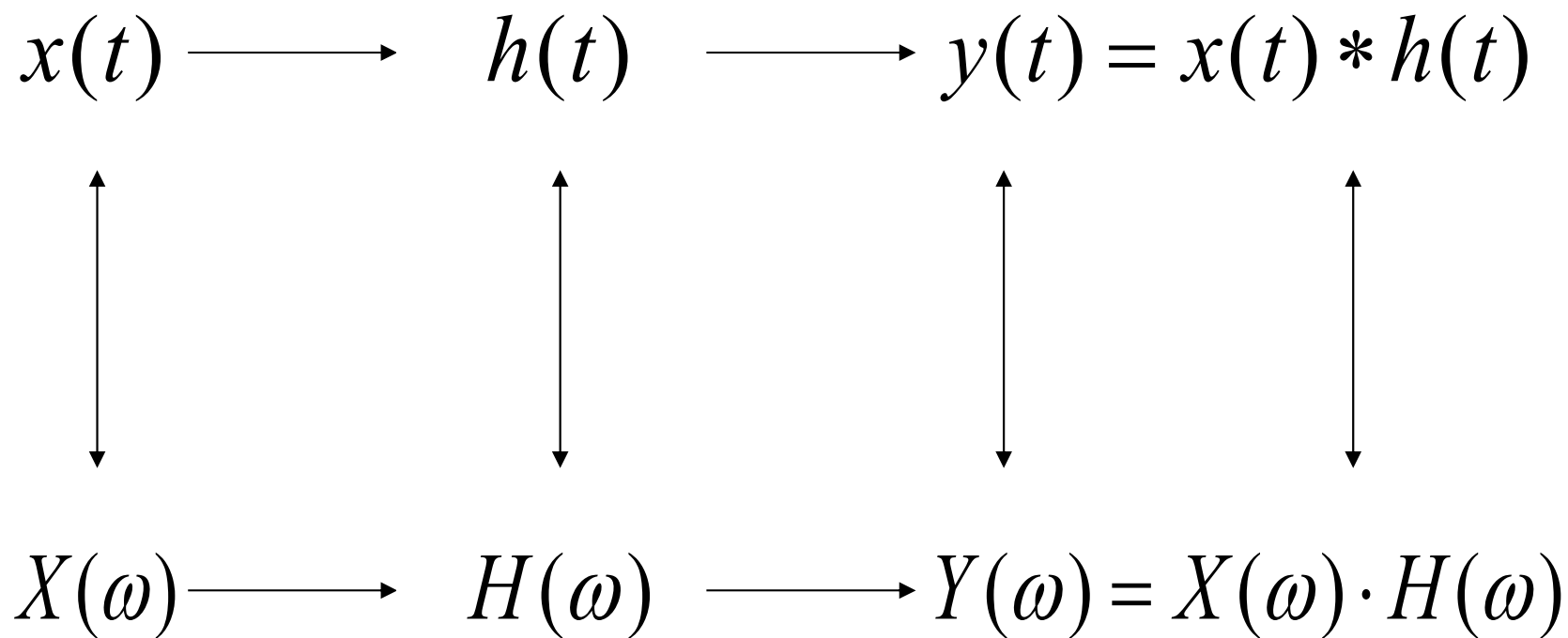
对于 $x(t)$ 中的每一个分量 $\frac{X(\omega) d\omega}{2\pi} e^{j\omega t}$, 相应的响应

分量为 $\frac{X(\omega) d\omega}{2\pi} e^{j\omega t} H(\omega)$ 。

把无穷多个响应分量叠加起来, 便得到了总响应

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{X(\omega) d\omega}{2\pi} e^{j\omega t} \right] H(\omega) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{Y(\omega) d\omega}{2\pi} \right] e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

时域分析与频域分析的关系



2. 系统函数 $H(\omega)$ 的求解方法

(1) 从微分方程直接求解 (方程两边取傅里叶变换)

(2) 对系统的冲激响应取傅里叶变换 $h(t) \leftrightarrow H(\omega)$

(3) 设激励为 $e^{j\omega t} (-\infty < t < \infty)$, 求系统的零状态响应

(4) 由零状态电路的频域模型模型求解

例4-8-1 已知描述系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t) + 5x(t)$$

求系统函数 $H(\omega)$ 。

解：(1) 对微分方程观察，可直接求得

$$H(\omega) = \frac{j\omega + 5}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2}$$

(2) 由第二章的方法，先求得冲激响应为

$$h(t) = \left(4e^{-t} - 3e^{-2t}\right)u(t)$$

对冲激响应取傅里叶变换，得

$$H(\omega) = \frac{4}{j\omega + 1} - \frac{3}{j\omega + 2} = \frac{j\omega + 5}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2}$$

实际上，很多情况下是反向运作，用来求 $h(t)$ 的。

(3) 设 $x(t) = e^{j\omega t} (-\infty < t < \infty)$,

则响应 $y(t) = e^{j\omega t} H(\omega)$ ，代入原方程

$$(j\omega)^2 e^{j\omega t} H(\omega) + 3(j\omega) e^{j\omega t} H(\omega) + 2e^{j\omega t} H(\omega) = (j\omega) e^{j\omega t} + 5e^{j\omega t}$$

可得

$$H(\omega) = \frac{j\omega + 5}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2}$$

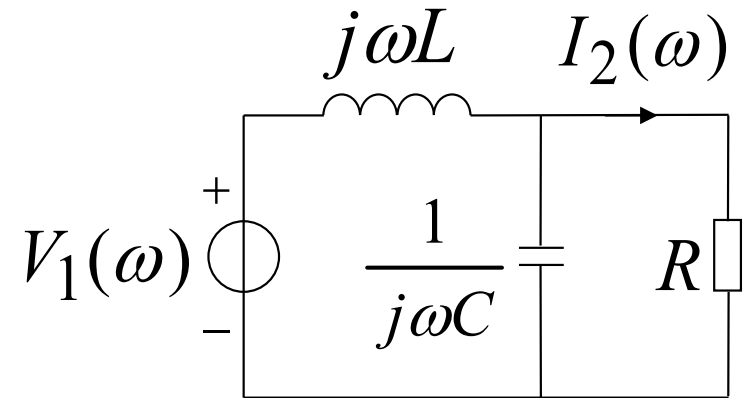
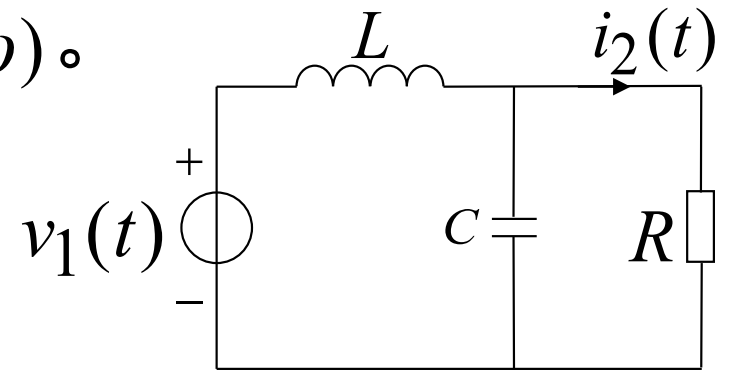
例4-8-2：求图示电路的系统函数 $H(\omega)$ 。

解：零状态频域电路模型如图，

类似于相量分析法，可得

$$\begin{aligned} I_2(\omega) &= \frac{R // \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + (R // \frac{1}{j\omega C})} V_1(\omega) \cdot \frac{1}{R} \\ &= \frac{1}{(j\omega)^2 RLC + j\omega L + R} V_1(\omega) \end{aligned}$$

$$\therefore H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{I_2(\omega)}{V_1(\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2 RLC + j\omega L + R}$$



当然，还可以从系统函数写出系统的微分方程。

4. 系统的频率特性

系统函数 $H(\omega)$ 一般是变量 ω 的复函数，可以写作

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$

其中， $|H(\omega)|$ 随 ω 变化的特性称为系统的幅频特性；

$\theta(\omega)$ 随 ω 变化的特性称为系统的相频特性，

总称为系统的频率特性。

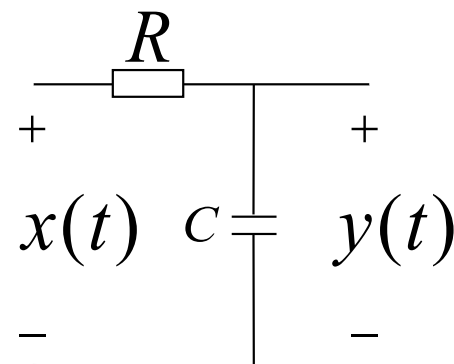
若 $h(t)$ 为实函数，则 $H(-\omega) = H^*(\omega)$ ，故得

$$\begin{cases} |H(-\omega)| = |H(\omega)| \\ \theta(-\omega) = -\theta(\omega) \end{cases}$$

由于 $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ ，这意味着系统把频谱密度为 $X(\omega)$ 的激励信号改变为频谱密度为 $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ 的响应信号，改变的规律完全由系统函数 $H(\omega)$ 所决定。

例如 RC低通滤波器

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}}$$



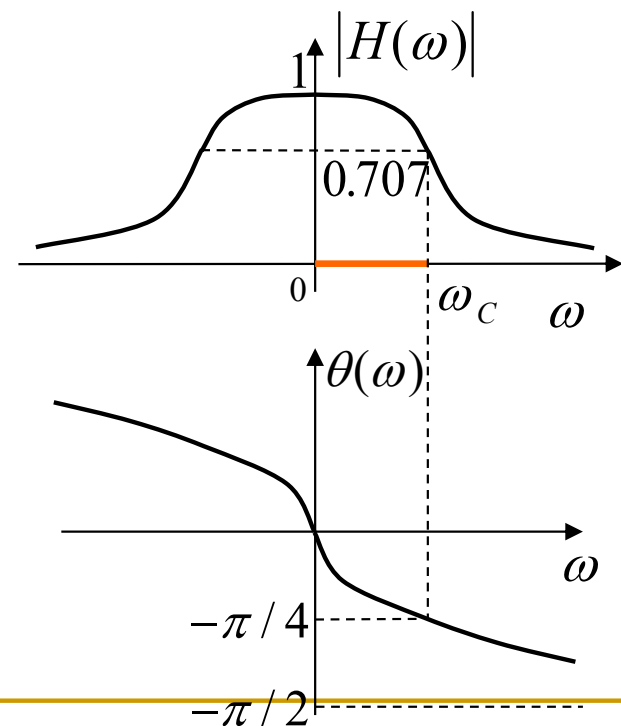
其中, $\omega_c = \frac{1}{RC}$ 称为半功率点角频率或截止角频率

幅度频谱为 $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$

相位频谱为 $\theta(\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

低通滤波器的通频带为 $0 \sim \omega_c$

与信号的频带宽度定义不同



例4-8-3 试用傅里叶变换分析法计算RC低通滤波器的阶跃响应。

解：激励 $x(t) = u(t) \leftrightarrow X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

系统函数 $H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \frac{RC}{1 + j\omega RC} \end{aligned}$$

反变换得系统的阶跃响应为

$$y(t) = (1 - e^{-\frac{1}{RC}t})u(t)$$

例4-8-4 若系统的微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x'(t)$
已知 $x(t) = e^{-t}u(t)$, $y_{zi}(0^+) = 2$, $y_{zi}'(0^+) = 1$, 试求系统的完全响应。

解：(1) 用频域分析法求零状态响应 $y_{zs}(t)$

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$H(\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6}$$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} \cdot \frac{j\omega}{(j\omega + 2)(j\omega + 3)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{j\omega + 1} + \frac{2}{j\omega + 2} + \frac{-\frac{3}{2}}{j\omega + 3}$$

$$\therefore y_{zs}(t) = \left[-\frac{1}{2}e^{-t} + 2e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-3t} \right] u(t)$$

(2) 用时域分析法求零输入响应 $y_{zi}(t)$

该系统的齐次微分方程为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$$

其特征根为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$

$$\therefore y_{zi}(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-3t}$$

代入初始值 $y_{zi}(0^+) = 2, y_{zi}'(0^+) = 1$, 可得 $k_1 = 7, k_2 = -5$

$$\therefore y_{zi}(t) = 7e^{-2t} - 5e^{-3t} \quad (t > 0)$$

(3) 全响应 $y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$

$$= 7e^{-2t} - 5e^{-3t} + \left[-\frac{1}{2}e^{-t} + 2e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-3t}\right]u(t) \quad (t > 0)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t} + 9e^{-2t} - \frac{13}{2}e^{-3t} \quad (t > 0)$$

列：求系统在周期信号 $x(t) = \cos \omega_0 t$ 激励下的稳态响应。

解： $X(\omega) = \mathcal{F}[\cos \omega_0 t] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)}\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$
$$= |H(-\omega_0)|e^{j\theta(-\omega_0)}\pi\delta(\omega + \omega_0) + |H(\omega_0)|e^{j\theta(\omega_0)}\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$y(t) = |H(-\omega_0)|e^{j\theta(-\omega_0)}\frac{e^{-j\omega_0 t}}{2} + |H(\omega_0)|e^{j\theta(\omega_0)}\frac{e^{j\omega_0 t}}{2}$$

$$\because |H(-\omega_0)| = |H(\omega_0)|, \quad \theta(-\omega_0) = -\theta(\omega_0)$$

$$\therefore y(t) = |H(\omega_0)| \cdot \left[e^{-j\theta(\omega_0)} \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2} + e^{j\theta(\omega_0)} \frac{e^{j\omega_0 t}}{2} \right]$$
$$= |H(\omega_0)| \cdot \cos[\omega_0 t + \theta(\omega_0)]$$

显然，稳态响应仍为同频率的正弦信号，但是幅度

放大了 $|H(\omega_0)|$ 倍，相位移动了 $\theta(\omega_0)$ 。

例：某线性时不变系统的幅频特性 $|H(\omega)|$ 和相频特性 $\theta(\omega)$

如图所示，若系统的激励为 $x(t) = 2 + 4\cos 5t + 4\cos 10t$,

试求响应 $y(t)$ 。

解：根据系统的频率特性知，该系统
将直流信号幅度放大1倍；

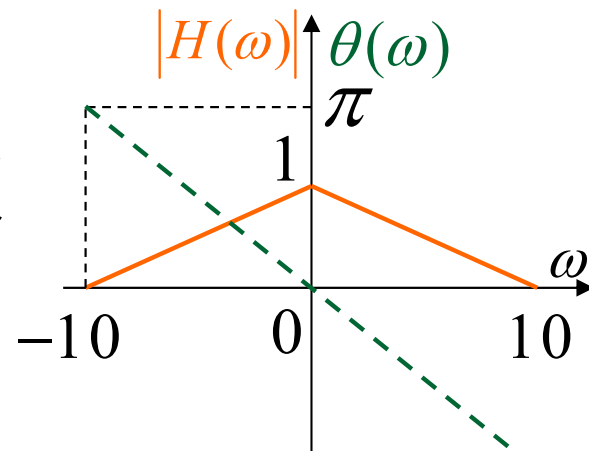
将 $\omega = 5$ 的正弦信号幅度放大 $\frac{1}{2}$ 倍，附加相位移 $-\frac{\pi}{2}$ ；

将 $\omega = 10$ 的正弦信号幅度衰减为0。

所以，当激励 $x(t) = 2 + 4\cos 5t + 4\cos 10t$ 时，系统的响应为

$$y(t) = 2 + 2\cos(5t - 90^\circ)$$

可以看出，线性系统在周期信号激励下的响应仍然为周期信号，
系统函数 $H(\omega)$ 描述了系统对不同频率信号的幅度和相位的影响。



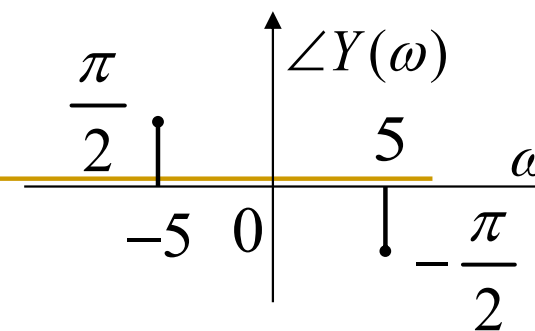
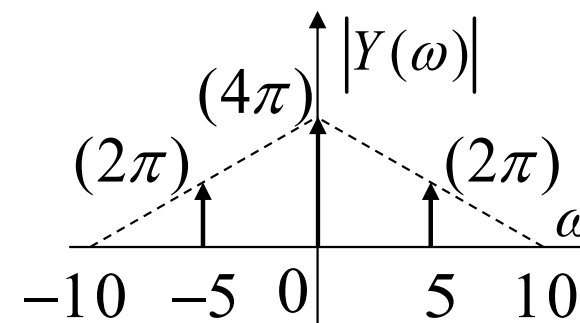
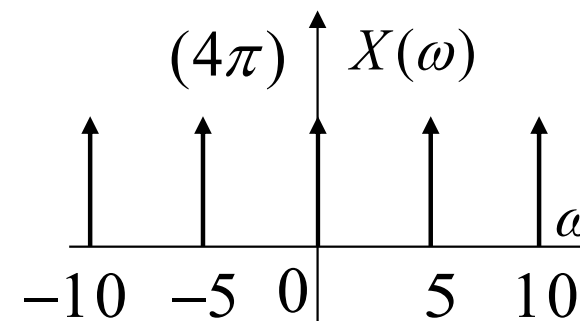
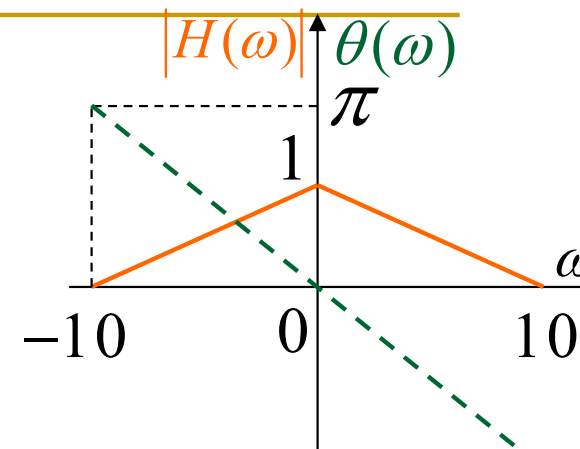
另解：取输入信号的傅里叶变换得

$$X(\omega) = 4\pi\delta(\omega) + 4\pi[\delta(\omega + 5) + \delta(\omega - 5)] \\ + 4\pi[\delta(\omega + 10) + \delta(\omega - 10)]$$

$$\therefore Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)}X(\omega) \\ = 2\pi[e^{j90^\circ}\delta(\omega + 5) + 2\delta(\omega) + e^{-j90^\circ}\delta(\omega - 5)]$$

取上式的傅里叶反变换，得

$$y(t) = 2 + 2\cos(5t - 90^\circ)$$



例4-8-6 已知系统的频率特性 $H(\omega)$ 如图所示，激励信号 $x(t) = 2Sa(2\pi t)$ ，试画出响应 $y(t)$ 的频谱 $Y(\omega)$ 的图形。

解：设 $F(t) = 2Sa(2\pi t)$

$$\text{则 } F(\omega) = 2Sa(2\pi\omega) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} g_{4\pi}(t) = f(t)$$

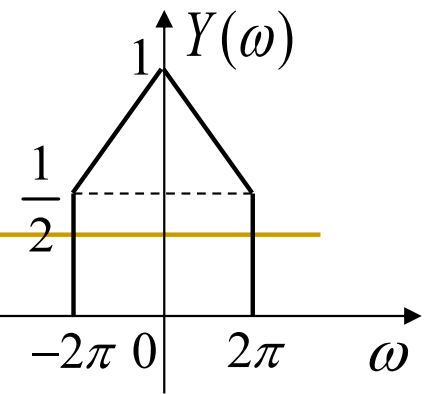
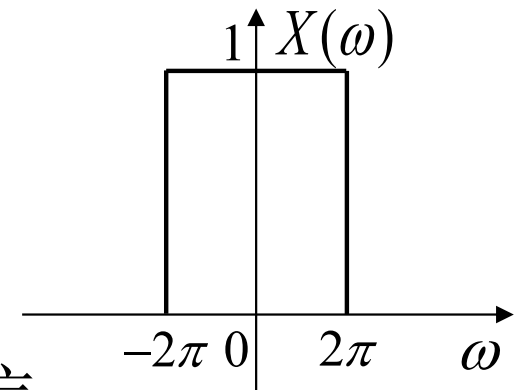
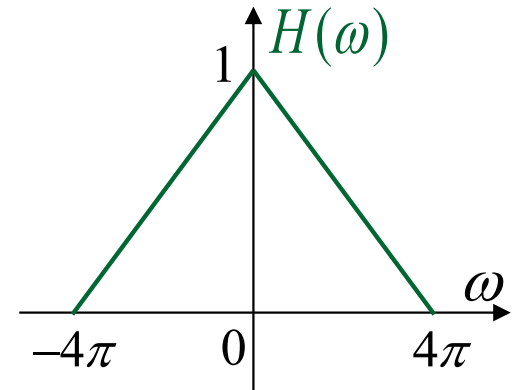
根据对称性，有

$$F(t) = 2Sa(2\pi t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) = g_{4\pi}(\omega)$$

$$\therefore X(\omega) = g_{4\pi}(\omega)$$

则 $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ 图形见右下。

可以看出，在系统的传输特性作用下，信号的频谱发生了变化。用频域分析法研究信号在传输过程中的变化情况，以及系统对信号的影响是非常直观和方便的，物理概念非常清楚。



频域分析法的优缺点

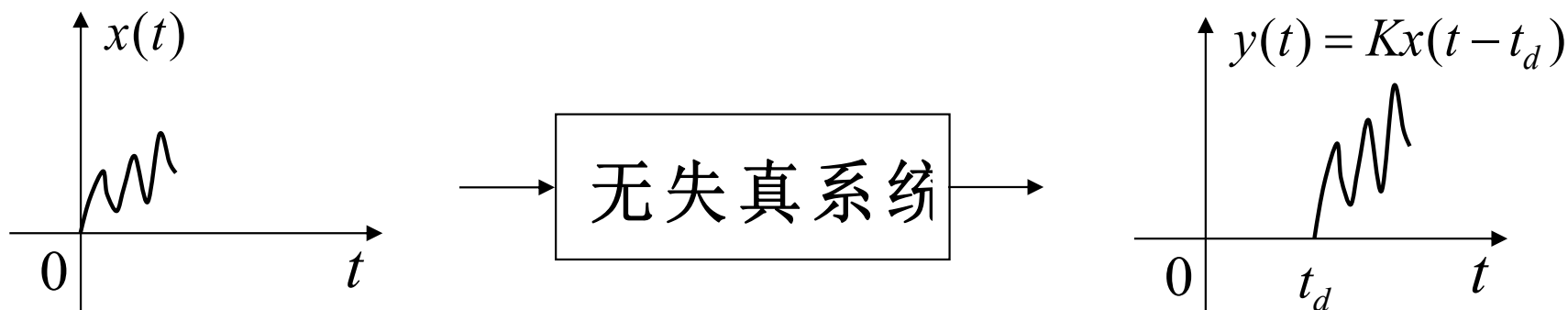
1. 只能求零状态响应；
2. 反变换有时不太容易；
3. 只能求稳态响应；
4. 物理概念清楚，在信号的频谱分析和系统的频率特性分析方面有突出的优点，是十分重要的工具。

4.9 信号的无失真传输和理想滤波器

4.9.1 无失真传输

输出信号和输入信号相比，只有幅度大小和出现时间先后的不同，而波形没有变化，这种传输叫无失真传输。

$$y(t) = Kx(t - t_d)$$



无失真传输系统的频域表示： $Y(\omega) = KX(\omega)e^{-j\omega t_d}$

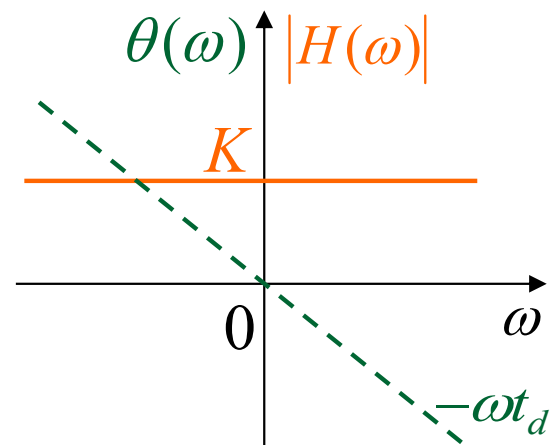
系统函数 $H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = Ke^{-j\omega t_d}$

幅度频谱 $|H(\omega)| = K$

相位频谱 $\theta(\omega) = -\omega t_d$

无失真传输系统应满足的两个条件：

- (1) 通频带为无穷大
- (2) 相频特性与 ω 成正比



在传输有限带宽信号时，只要在信号所占有的频带范围内满足幅频特性为常数和相频特性与 ω 成正比就可以了。

线性失真 $\left\{ \begin{array}{l} \text{幅度失真（声音信号对此敏感）} \\ \text{相位失真（图像信号对此敏感）} \end{array} \right.$

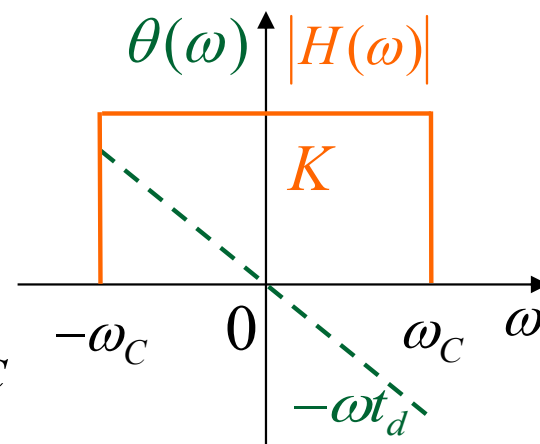
非线性失真：输出信号中出现了输入信号所没有的新的频率分量。

4.9.2 理想滤波器

理想滤波器能在某一频带内无畸变地传输信号并阻止其它的频谱分量通过。

理想低通滤波器

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)} = \begin{cases} Ke^{-j\omega t_d} & |\omega| < \omega_C \\ 0 & |\omega| > \omega_C \end{cases}$$

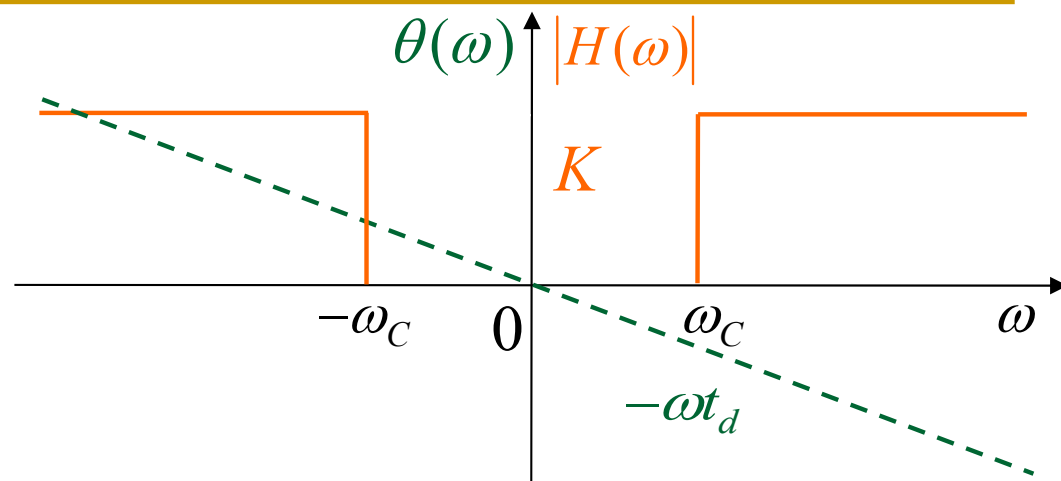


ω_C 称为截止频率 $0 \sim \omega_C$ 的频率范围称为通带
 $\omega_C \sim \infty$ 的频率范围称为阻带。

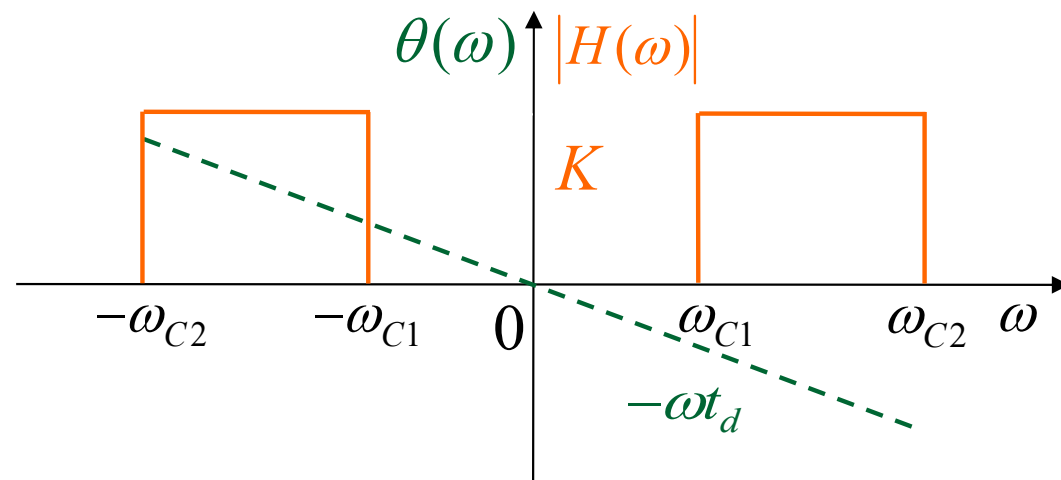
理想低通滤波器的通频带不为无穷大，故又称为带限系统。此类系统的失真取决于通带的宽度和信号的频带宽度。

类似地，还可以定义：

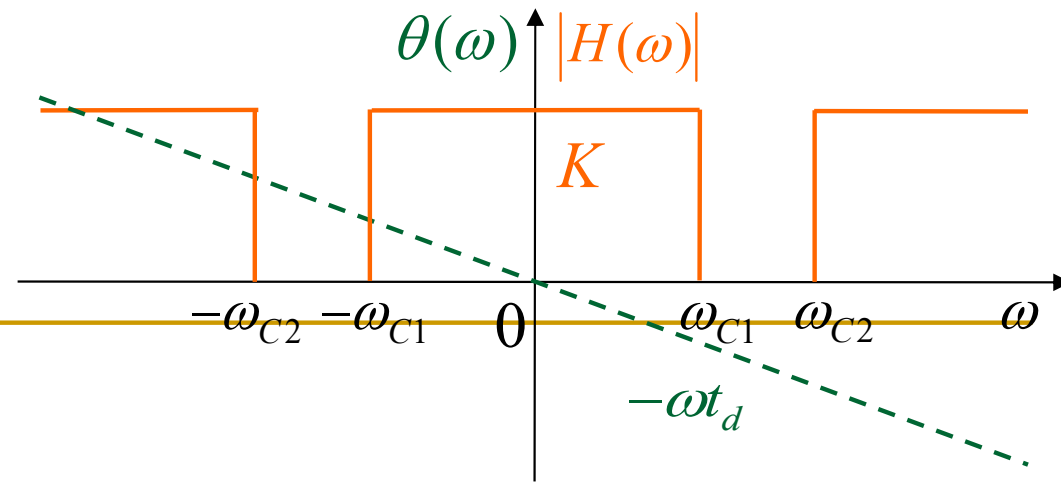
理想高通滤波器



理想带通滤波器



理想带阻滤波器



理想低通滤波器的单位冲激响应

$$x(t) = \delta(t) \leftrightarrow X(\omega) = 1$$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = H(\omega)$$

$$= |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)} = \begin{cases} Ke^{-j\omega t_d} & |\omega| < \omega_C \\ 0 & |\omega| > \omega_C \end{cases}$$

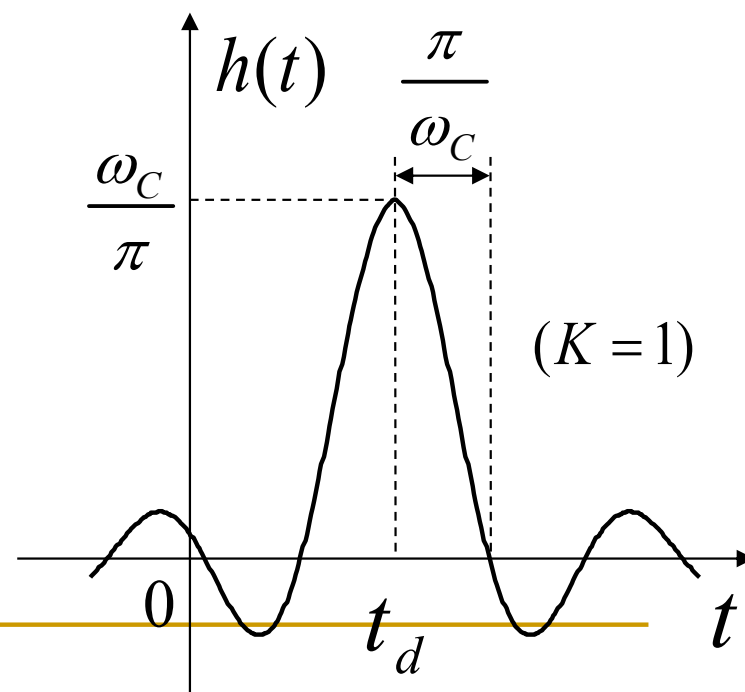
$$= K g_{\omega_C}(\omega) e^{-j\omega t_d}$$

利用对称性和时移性得

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \frac{K\omega_C}{\pi} \text{Sa}[\omega_C(t - t_d)]$$

由图可见，产生了失真和延迟。这是因为理想低通滤波器是一个带限系统，而冲激信号的频带宽度为无穷大。延迟时间是理想低通滤波器相频特性的斜率。

而且是非因果系统，物理上是不可实现的。



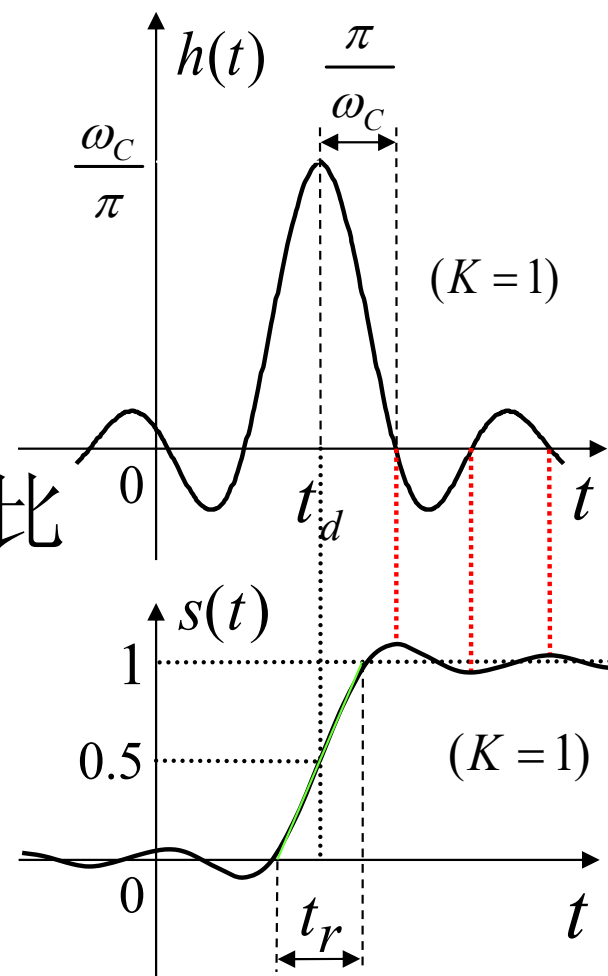
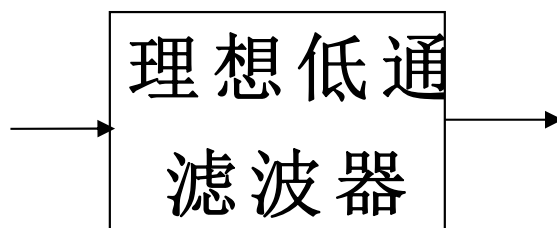
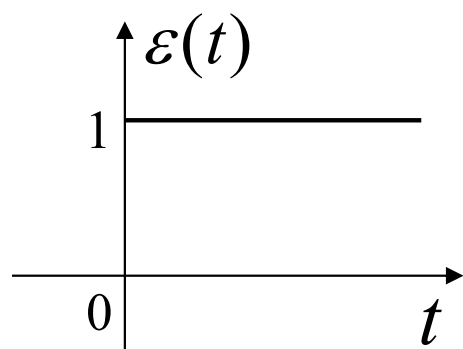
理想低通滤波器的单位阶跃响应

$$s(t) = h^{(-1)}(t) = K \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t - t_d)] \right\}$$

其中 $\text{Si}(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^y \text{Sa}(x) dx$

称为正弦积分函数

上升时间 $t_r = \frac{2\pi}{\omega_c}$ 与系统带宽 ω_c 成反比



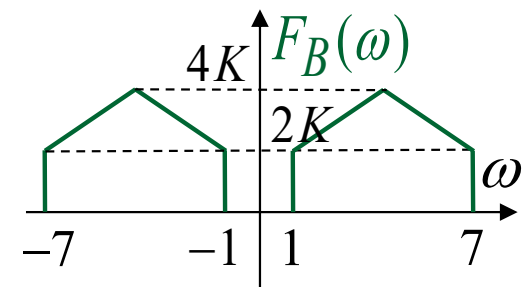
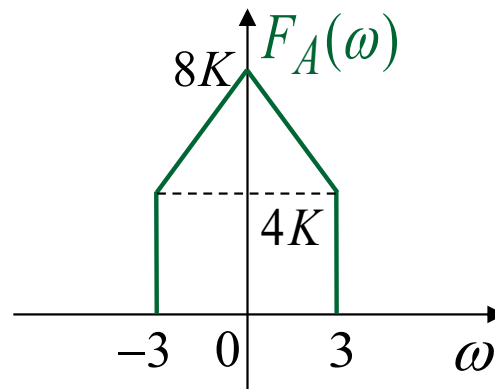
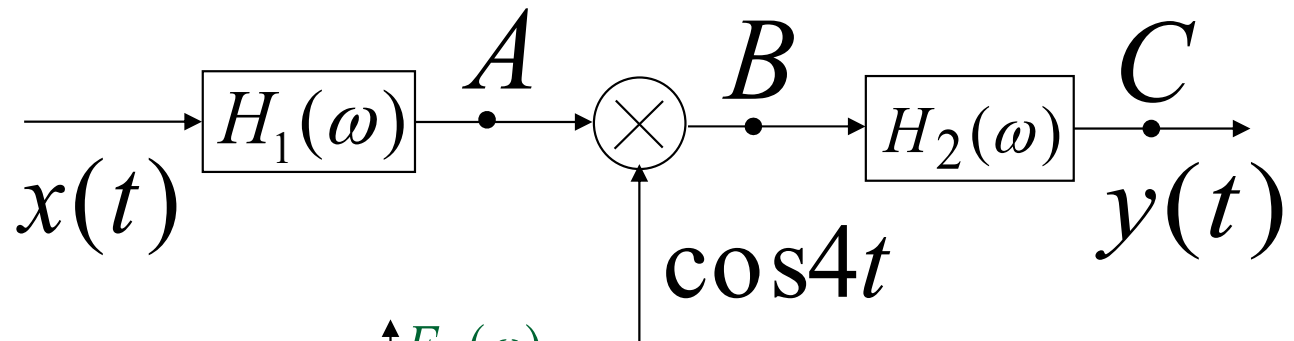
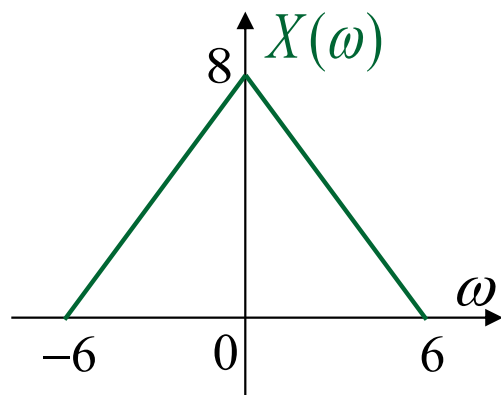
吉布斯现象： $s(t)$ 出现过冲和振荡，过冲的最大值

$$s_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\pi) = 1.0895 \quad \text{与频带宽度无关。}$$

例：已知带限信号 $x(t)$ 的频谱和系统如图，试画出A、B、C各点的频谱密度，图中

$$H_1(\omega) = \begin{cases} K & |\omega| < 3 \\ 0 & |\omega| > 3 \end{cases}$$

$$H_2(\omega) = \begin{cases} K & |\omega| > 4 \\ 0 & |\omega| < 4 \end{cases}$$

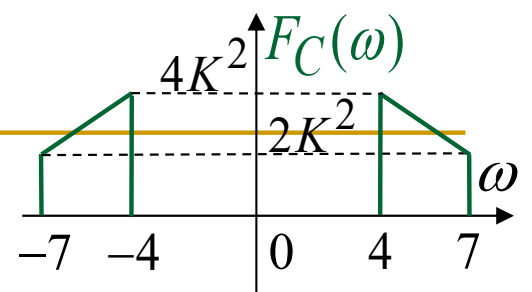


解：

$$F_A(\omega) = X(\omega)H_1(\omega)$$

$$F_B(\omega) = \frac{1}{2} [F_A(\omega + 4) + F_A(\omega - 4)]$$

$$F_C(\omega) = F_B(\omega)H_2(\omega)$$



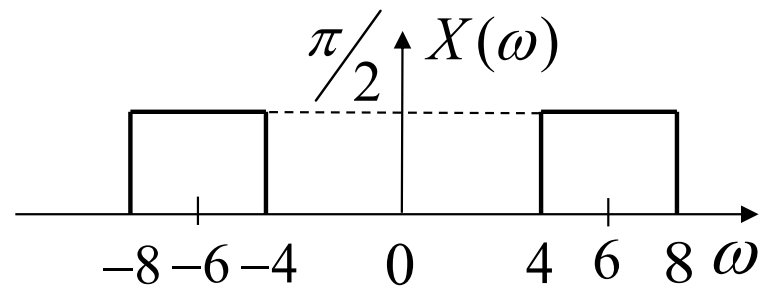
例：已知某线性时不变系统的频率特性 $H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 6 \\ 0 & |\omega| > 6 \end{cases}$

若输入 $x(t) = \frac{\sin 2t}{t} \cos 6t$ ，试求该系统的输出 $y(t)$ 。

解：设 $F(t) = 2Sa(2t)$ ，则 $F(\omega) = 2Sa(2\omega) \leftrightarrow \frac{1}{2}g_4(t) = f(t)$

根据对称性，有 $F(t) = 2Sa(2t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) = \pi g_4(\omega)$

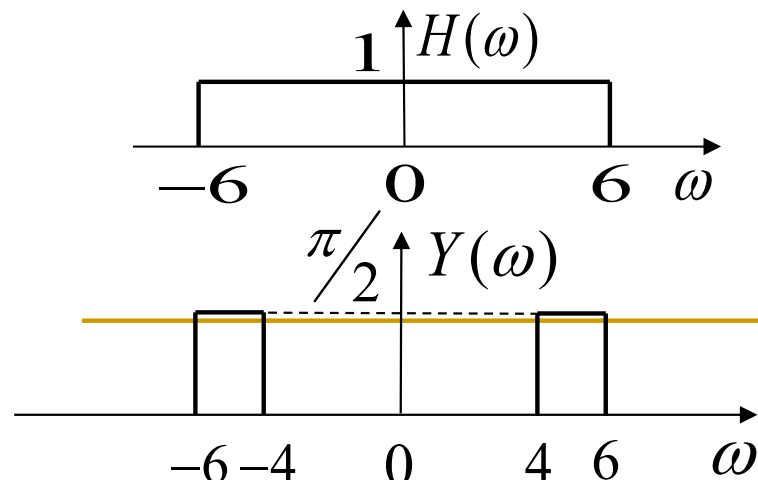
根据调制定理，有 $x(t) = \frac{\sin 2t}{t} \cos 6t = 2Sa(2t) \cos 6t$



$$\leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{2}\pi[g_4(\omega + 6) + g_4(\omega - 6)]$$

$$\text{故 } Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

图形见左下图。

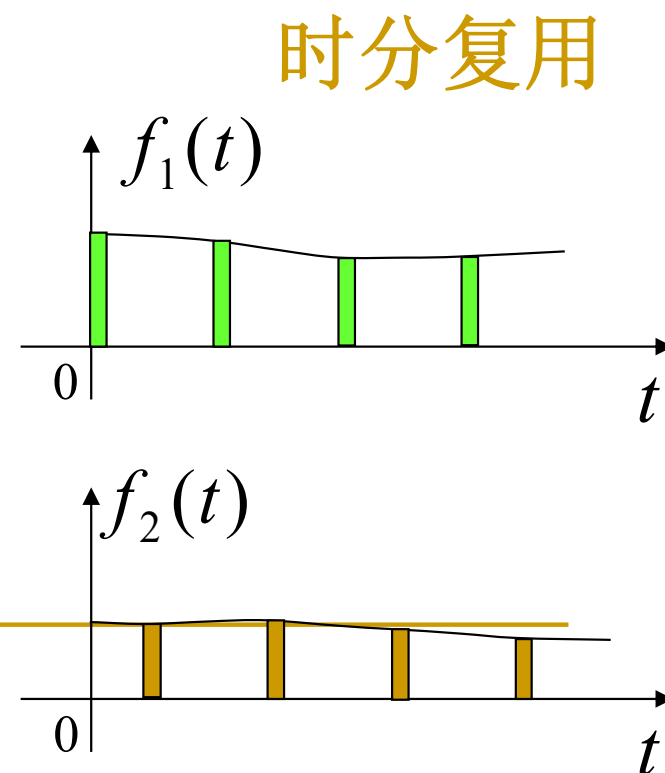
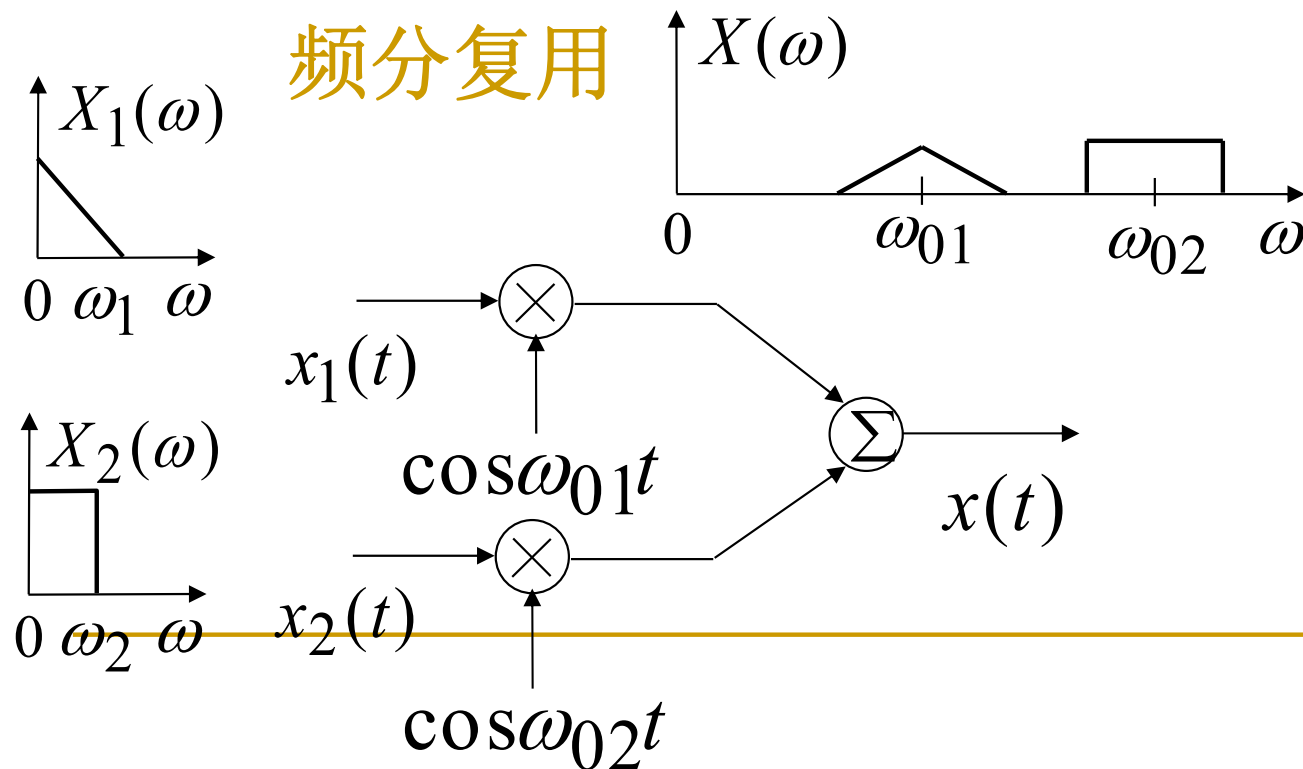


$$\begin{aligned} \text{所以 } y(t) &= F^{-1}[Y(\omega)] = 2 \cdot \frac{1}{2} Sa(t) \cdot \cos 5t \\ &= Sa(t) \cos 5t \end{aligned}$$

4.11 取样定理

调制定理：把信号搬移到不同的频段来实现**频分多路通信**。（频分复用）

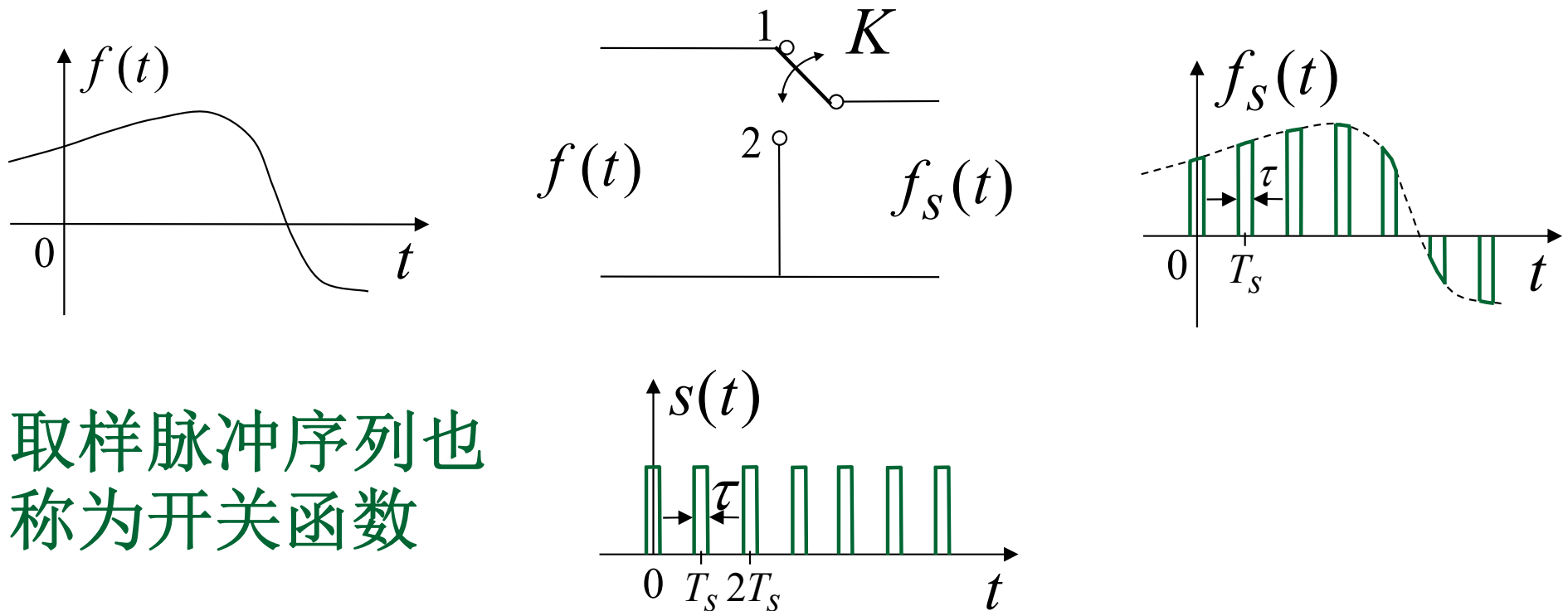
取样定理（抽样定理）：利用连续信号在等时间间隔上的瞬时值（样本值）来表示和恢复原信号，实现**时分复用**。也是连续信号与离散信号之间相互转换的理论依据。



4.11.1 时域取样

取样：利用取样脉冲序列 $s(t)$ 从连续时间信号 $f(t)$ 中抽取一系列离散的样值的过程。

取样后得到的离散信号称之为**取样信号**。



$$f_s(t) = f(t) \cdot s(t)$$

4.11.2 自然取样 $s(t)$ 的幅

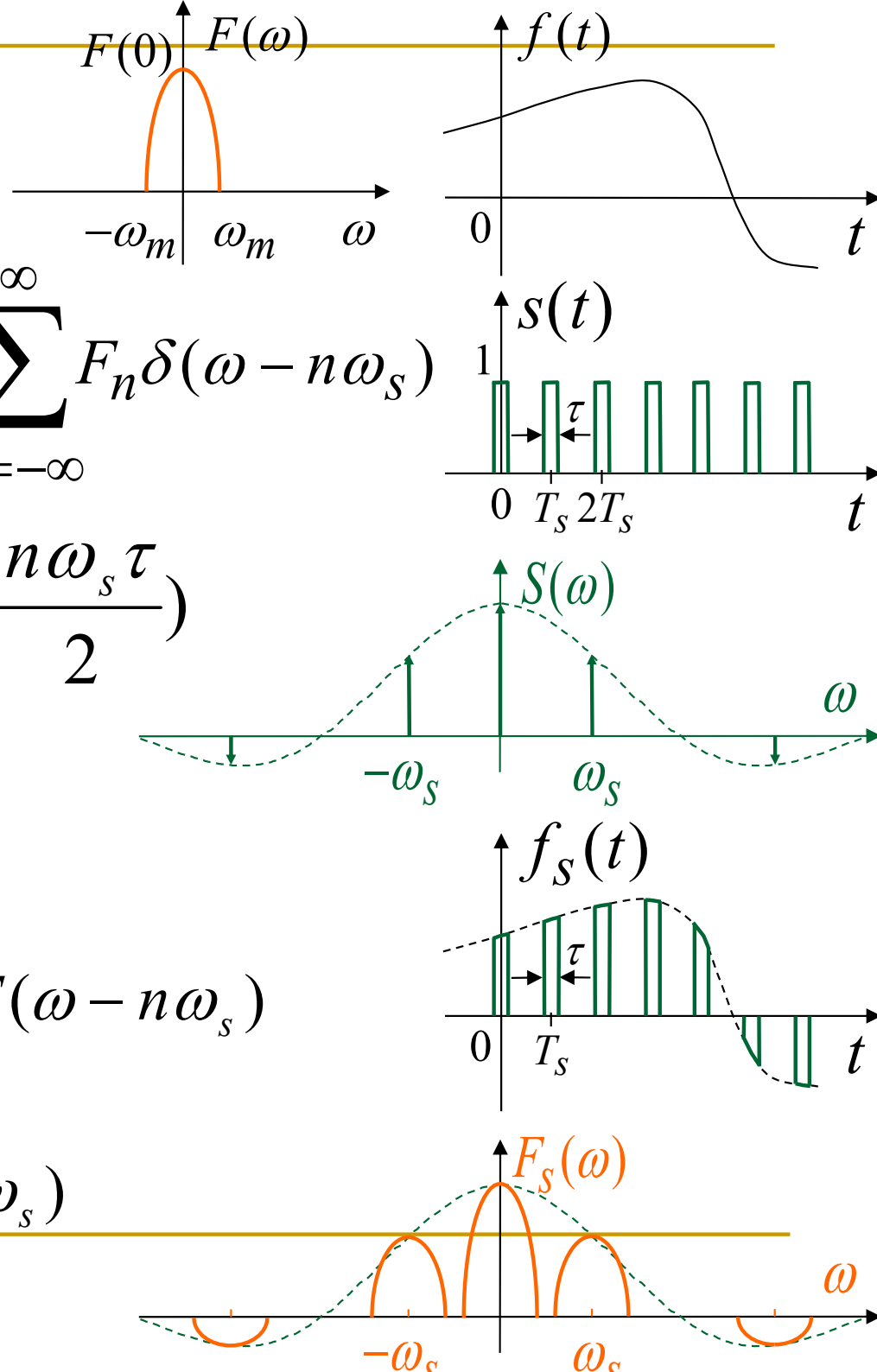
$f_s(t) = f(t) \cdot s(t)$ 值为 1

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_s t} \leftrightarrow S(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

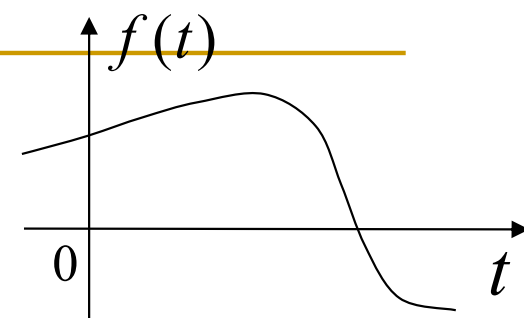
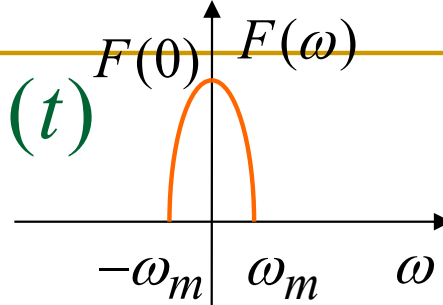
其中 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ $F_n = \frac{\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right)$

由频域卷积定理

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F(\omega - n\omega_s) \\ &= \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s) \end{aligned}$$

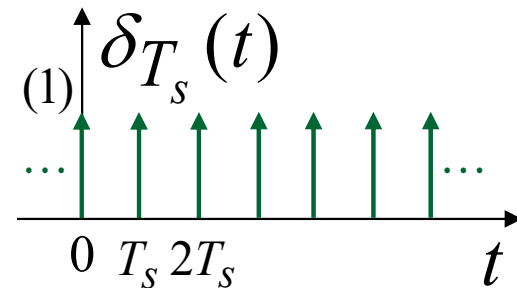


4.11.3 理想取样 $s(t) = \delta_{T_s}(t)$

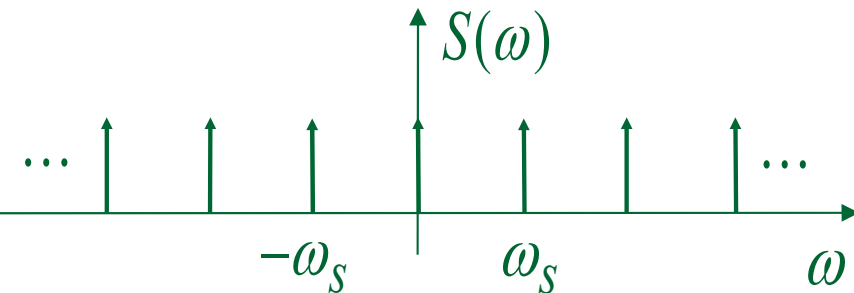


$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

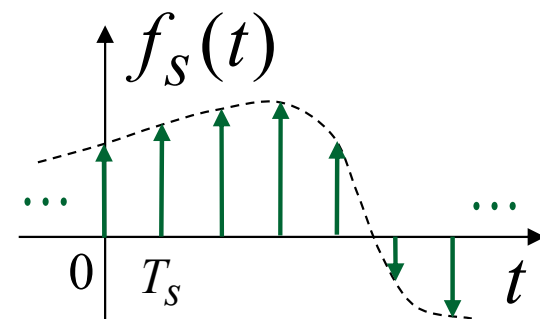
$$S(\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) = \omega_s \delta_{\omega_s}(\omega)$$



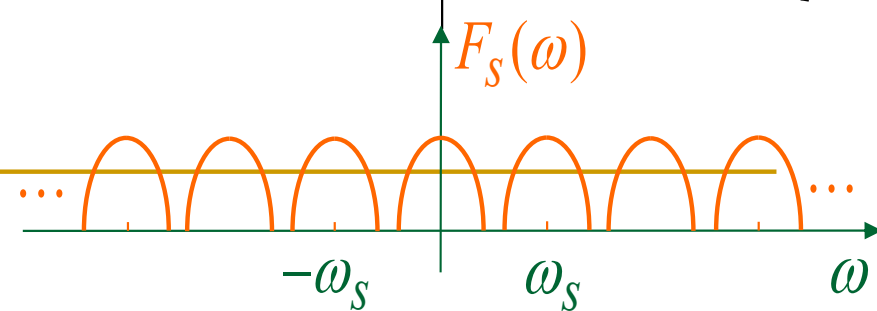
$$f_s(t) = f(t) \cdot \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - nT_s)$$



$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s)$$



$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$$



4.11.4 时域取样定理

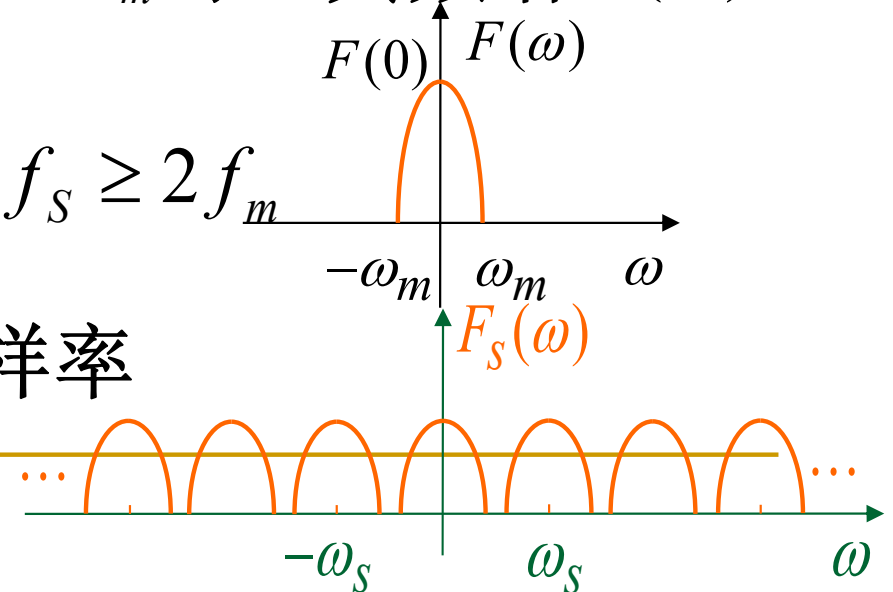
一个在 频谱区间 $(-\omega_m, \omega_m)$ 以外为零的频带有限信号 (带限信号) $f(t)$, 可以唯一地由其均匀时间间隔 T_s $\left(T_s \leq \frac{1}{2f_m}\right)$ 上的取样值 $f(nT_s)$ 确定。

当取样频率 f_s 大于或等于信号带宽的两倍时, 可以从 $f_s(t)$ 中恢复原信号。

可见, 取样定理必须满足两个条件:

1. $f(t)$ 必须为带限信号, 即在 $|\omega| > \omega_m$ 时, 其频谱 $F(\omega) = 0$
2. 取样频率不能过低, 必须满足 $f_s \geq 2f_m$

定义 $f_{S\min} = 2f_m$ 为奈奎斯特取样率



4.11.5 信号的恢复

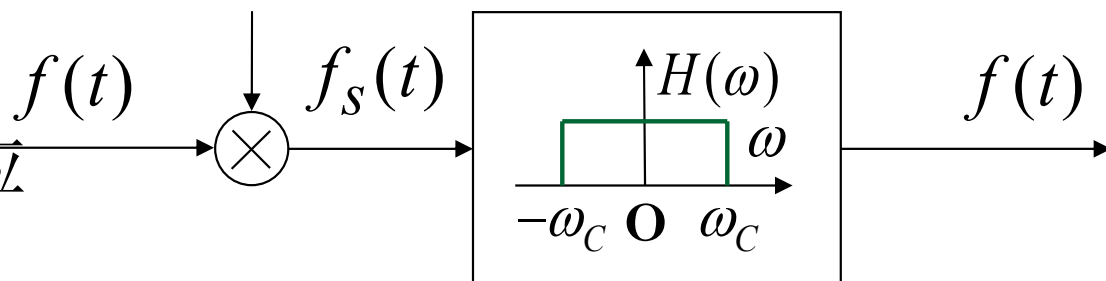
从频域的角度来看，可以通过理想低通滤波器从取样信号 $f_s(t)$ 中恢复原来的连续信号 $f(t)$ 。

从时域的角度分析：

$$F_s(\omega)H(\omega) = \frac{1}{T_s}F(\omega) \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$\therefore F(\omega) = T_s F_s(\omega) H(\omega)$$

理想低通滤波器的冲激响应



$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t)$$

$$\text{则 } f(t) = T_s f_s(t) * \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) = T_s \frac{\omega_c}{\pi} f_s(t) * \text{Sa}(\omega_c t)$$

$$\text{为了简便, 设 } \omega_s = 2\omega_m, \text{ 且 } \omega_c = \omega_m, \text{ 则有 } T_s \frac{\omega_m}{\pi} = \frac{1}{2f_m} \cdot \frac{\omega_m}{\pi} = 1$$

$$\text{得 } f(t) = f_s(t) * \text{Sa}(\omega_m t)$$

这里
故

$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s) * Sa(\omega_m t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)Sa[\omega_m(t - nT_s)]$$

$$\text{得 } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)Sa[\omega_m t - n\pi] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)Sa[\pi f_s t - n\pi]$$

可见，任意信号可以分解为无穷多个取样函数的代数
和。从取样信号重建连续信号的过程见图4-11-8。

能量信号 $f(t)$ 的总能量和取样值 $f(nT_s)$ 的关系(证明略)：

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} f^2(nT_s)$$

例：设 $f(t)$ 为带限信号，带宽 $\omega_m = 8$ ，频谱如图所示，试分别求 $f(2t), f(\frac{t}{2})$ 的带宽和奈奎斯特取样率 ω_s 。

解：(1) $f(2t) \leftrightarrow F_1(\omega) = \frac{1}{2} F(\frac{\omega}{2})$,

其频谱如图所示

频带宽度为 $2\omega_m = 16(\text{rad} / \text{s})$,

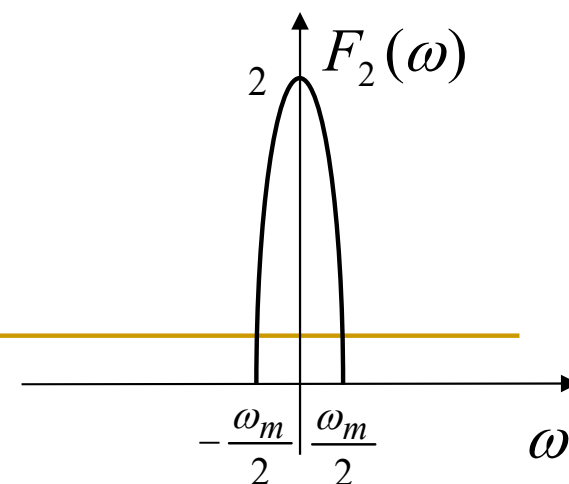
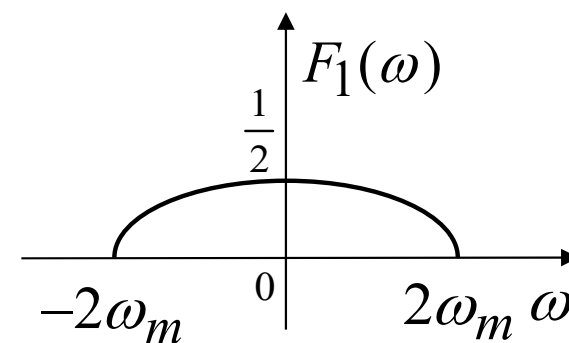
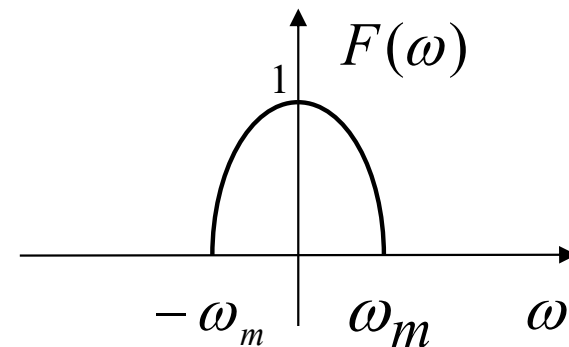
$$\omega_s = 2 \cdot 2\omega_m = 32(\text{rad} / \text{s})$$

(2) $f(\frac{t}{2}) \leftrightarrow F_2(\omega) = 2F(2\omega)$,

其频谱如图所示

频带宽度为 $\frac{\omega_m}{2} = 4(\text{rad} / \text{s})$,

$$\omega_s = 2 \cdot \frac{\omega_m}{2} = 8(\text{rad} / \text{s})$$

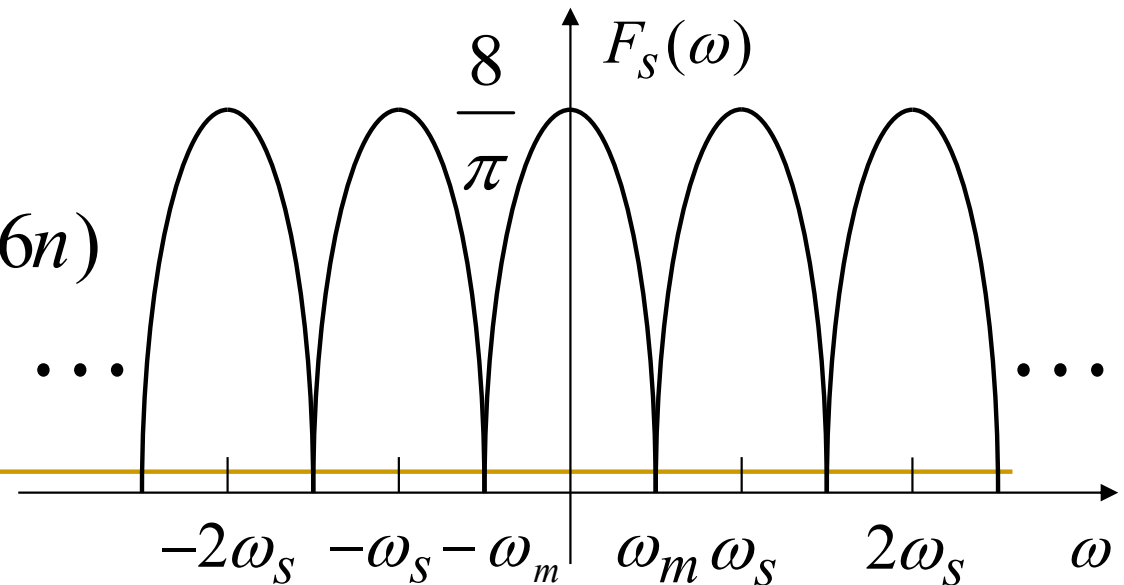
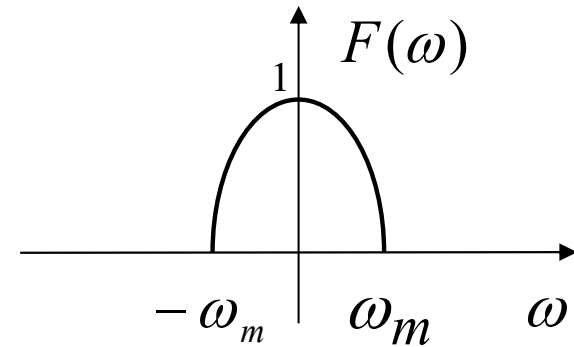


续上例：若用取样序列 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - n\frac{\pi}{8}\right)$ 对信号 $f(t)$ 进行取样，得取样信号 $f_s(t)$ ，试求 $f_s(t)$ 的频谱 $F_s(\omega)$ ，并画出其频谱图。

解： $T_s = \frac{\pi}{8}, \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 16$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$$

$$= \frac{8}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - 16n)$$



频谱见右图。

例：求下列信号的奈奎斯特取样率。

$$(1) Sa(100t) \quad (2) Sa^2(100t) \quad (3) Sa(100t) + Sa^{10}(50t)$$

$$\text{解： (1) } \because \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \leftrightarrow g_\tau(t) \quad \therefore \tau Sa\left(\frac{t\tau}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi g_\tau(\omega)$$

$$\text{其中 } \frac{\tau}{2} = 100, \quad \omega_m = 100 \text{ rad/s}, \quad \text{故 } \omega_s = 2\omega_m = 200 \text{ rad/s}$$

(2) 时域中两个信号相乘，所得信号的带宽为原来两个信号的带宽之和，所以

$$\omega_{m2} = 200 \text{ rad/s}, \quad \omega_{s2} = 2\omega_{m2} = 400 \text{ rad/s}$$

(3) 时域中两个信号相加，所得信号的带宽应为原来两个信号中带宽大的那个信号的带宽，即

$$\omega_{m3} = \max(100, 50 \times 10) = 500 \text{ rad/s}, \quad \omega_{s3} = 2\omega_{m3} = 1000 \text{ rad/s}$$

另外，时域卷积对应于频域相乘，带宽应取小的。

本章要点

- 1. 周期信号分解为傅里叶级数：
 - 三角型级数、指数型级数、两种级数系数之间的关系
- 2. 周期信号的频谱：
 - 单边频谱和双边频谱、功率谱
- 3. 非周期信号的频谱：
 - 傅里叶变换对的定义 $F(\omega)$ 的物理意义 $F(\omega)$ 的特性 $F(\omega)$ 和 F_n 的关系
- 4. 一些常见信号的频域分析：
 - 典型信号的傅里叶变换
- 5. 傅里叶变换的性质及其应用
- 6. 能量谱密度

本章要点（续）

- 7.连续系统的频域分析：
 - 系统函数的求解方法：从系统的微分方程求解、从电路求解
 - 系统的频率特性
 - 频域中求解零状态响应的步骤、频域中求解系统响应的方法
- 8.信号的无失真传输和理想滤波器
 - 无失真传输的条件
 - 含有理想滤波器系统的分析
- 9.奈奎斯特取样率的计算

作业

- 4.1: 4-1 (1) (2)
- 4.3: 4-10, 4-14
- 4.4: 4-17 (6)
- 4.5: 4-20 (b)
- 4.6: 4-18(7), 4-21 (b) , 4-26, 4-33 (a) ,
4-34 (c) (f) , 4-37 (1) (2)(6)(7),
4-42(2)(3)
- 4.7, 4.8: 4-56, 4-58(1)(2), 4-61
- 4.9, 4.11: 4-71, 4-80(3)(5)