2.3 分块矩阵

2.3.1 分块矩阵的概念

- 处理有特点的大矩阵时需要进行分块
- 分法: 将矩阵用纵线和横线分成若干小矩阵, 每个小矩阵称为原矩阵的子块.

定义 以子块为元素的矩阵称为分块阵.

■ 常用分块方式

● 分成四块. 例如:

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

特殊 **A** ——视为一个子块

a_{ij} ——视为一个子块

- 按列分块. 例如:

$$A=\left[\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix}$$

- 按行分块. 例如:

$$A=\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]=\begin{bmatrix}\beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3\end{bmatrix}$$

分块对角矩阵

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$$

分块三角矩阵

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & * & \\ & A_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$$

2.3.2 分块矩阵的运算

- **加法：** 原矩阵同形且分块方式相同

$$A+B=(A_{ij})_{s\times t}+(B_{ij})_{s\times t}=(A_{ij}+B_{ij})_{s\times t}$$

- **数乘：** 分块方式任意

$$kA=k(A_{ij})_{s\times t}=(kA_{ij})_{s\times t}$$

- 乘法: $AB = C$ ($A_{m\times p}$, $B_{p\times n}$)
  - A的列数 = B 的行数
  - A的列的分法 = B 的行的分法

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{it}B_{tj}$$

$$= \sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj},\ i = 1,\cdots,s;\ j = 1,\cdots,r.$$

例1

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{array}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{2E} \\ \boldsymbol{B}_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{2E} \\ \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} \end{bmatrix}$$

● **转置：** $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}$

$$A^{\mathrm{T}}=(A_{ij}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1t}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{st}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

特别 $\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_t \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} A_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ A_t^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_t \end{bmatrix}$

- **方阵的幂及行列式：** 当A_i是方阵时，
（**分块对角矩阵的行列式**）

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} A_1^m & & & \\ & A_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^m \end{bmatrix}, \quad (m \in N)$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{vmatrix} = |A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

● 分块三角阵的行列式：

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & * & \\ & A_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix},$$ 当A_i是方阵时，

$$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$$

● 对角阵的逆矩阵:

当$|A_i|\neq 0$时, 即A_i可逆时, A可逆

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & A_{s-1}^{-1} & \\ & \iddots & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

例2 设 $A=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$，求 $|A|$ 及 A^{-1}

解 $|A|=\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2\times 3=6$

$$A^{-1}=\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\4&2&0&0\\\hline 0&0&3&4\\0&0&0&1\end{array}\right]^{-1}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\4&2\end{bmatrix}^{-1}&0\\0&\begin{bmatrix}3&4\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

例3 设 $A, B \in M_3, |A| = 3, |B| = -2.$ 求

$$1.\begin{vmatrix} 3A & 0 \\ AB & -5B \end{vmatrix} = |3A||-5B|$$

$$= 3^3|A|\cdot(-5)^3|B| = 2\cdot 3^4\cdot 5^3$$

$$2.\begin{vmatrix} 0 & 3A \\ -AB & 5B \end{vmatrix} = (-1)^{3\times 3}\begin{vmatrix} 3A & 0 \\ 5B & -AB \end{vmatrix} = (-1)^{3\times 3}|3A||-AB|$$

$$= -3^3|A|\cdot(-1)^3|A||B| = -2\cdot 3^5$$

尤其要注意 $A_{m\times p}B_{p\times n}=0$ 时的特殊情况:

*例4 $AB=A(B_1,B_2,\cdots,B_n)$ A为一子块

$$=(AB_1,AB_2,\cdots,AB_n)$$

$$=(0,0,\cdots,0)$$

$$\Rightarrow AB_j=0,\ j=1,\cdots,n.$$

说明B 的每一列都是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个解.

例5 $A_{m\times p}B_{p\times n}=C_{m\times n}$ 的不同理解:

(1) $AB=A(B_1,B_2,\cdots,B_n)=(AB_1,AB_2,\cdots,AB_n)$

$C=(C_1,C_2,\cdots,C_n)\Rightarrow AB_j=C_j, j=1,\cdots,n$

(2) $$AB=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_m\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}A_1B\\A_2B\\\vdots\\A_mB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1\\C_2\\\vdots\\C_m\end{bmatrix}=C$$

$\Rightarrow A_iB=C_i, i=1,\cdots,m$

2.3.3 分块矩阵的初等变换

本节内容提要

- 分块矩阵的初等变换
- 分块初等阵
- 利用分块矩阵的初等变换求秩

2.3.3 分块矩阵的初等变换

对分块矩阵也可以引进初等变换和初等矩阵的概念. 分块矩阵关于子块的一次初等变换, 可以看作是关于元素的一批初等变换的合成. 我们只以分成4块的情况简单解释.

设 $$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}$$

定义 下面三种针对分块矩阵M的变形，统称为分块矩阵的初等变换：

初等行变换 初等列变换

(1)换法：$r_i \leftrightarrow r_j$ $(c_i \leftrightarrow c_j)$

(2)倍法：Pr_i $(c_i P)$, P — 可逆

(3)消法：$r_i + Kr_j$ $(c_j + c_i K)$, K—矩阵

- 这里要假定运算满足可行性原则.
- 为什么要求P可逆?

2.3.3 分块初等阵

分块单位阵 $\xrightarrow{\text{一次初等变换}}$ 分块初等阵

$$\begin{bmatrix} E_m & \\ & E_n \end{bmatrix} \to (1) \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} 0 & E_m \\ E_n & 0 \end{bmatrix}$$ 换法:

倍法: $(2) \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$

消法: $(3) \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ K & E_n \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} E_m & K \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$

- 对分块矩阵进行一次初等行(列)变换，相当于给它左(右)乘以一个相应的分块初等矩阵：

换法：
$$\begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C & D \\ A & B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}$$

倍法:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} PA & PB \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AP & B \\ CP & D \end{bmatrix}$$

消法:

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ K & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ KA+C & KB+D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & 0 \\ K & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A+BK & B \\ C+DK & D \end{bmatrix}$$

- 对分块阵进行一次初等行(列)变换, 相当于对原矩阵进行一系列初等行(列)变换.
- 分块初等变换不改变分块阵的秩.
- 消法分块初等变换保持行列式值不变.
- 用分块初等变换求逆.

$$(A \vdots E) \xrightarrow{\text{分块行}} (E \vdots A^{-1})$$

$$\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{分块列}} \begin{bmatrix} E \\ \cdots \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

例1 求 $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1}$,其中$A$, B可逆.

解 $\left[\begin{array}{cc:cc} A & C & E_m & 0 \\ 0 & B & 0 & E_n \end{array}\right] \xrightarrow{行} \left[\begin{array}{cc:cc} E_m & A^{-1}C & A^{-1} & 0 \\ 0 & B & 0 & E_n \end{array}\right]$

$\xrightarrow{行} \left[\begin{array}{cc:cc} E_m & A^{-1}C & A^{-1} & 0 \\ 0 & E_n & 0 & B^{-1} \end{array}\right]$

$\xrightarrow{行} \left[\begin{array}{cc:cc} E_m & 0 & A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & E_n & 0 & B^{-1} \end{array}\right]$

$$\therefore \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

总结：常用的分块矩阵求逆公式

设 A, B 都是可逆方阵，则有下列公式.

$$(1)\ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$(2)\ \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3)\ \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$(4)\ \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

例2 用分块方法证明 $|AB|=|A||B|$, 其中A、B为n阶方阵.

证 $\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & E_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -A \\ B & E_n \end{bmatrix}$

$$|AB| = \begin{vmatrix} AB & 0 \\ B & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -A \\ B & E_n \end{vmatrix} = (-1)^{n^2} \begin{vmatrix} -A & 0 \\ E_n & B \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n^2+n} \begin{vmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

所以 $|AB|=|A||B|$.

或 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -AB \\ E_n & B \end{bmatrix}$

例3 证明 $\begin{vmatrix} A & C \\ D & B \end{vmatrix} = |A||B - DA^{-1}C|$

（行列式第一降阶定理）

其中A为n阶可逆矩阵，B为m阶方阵.

证

$$\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B - DA^{-1}C \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} A & C \\ D & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B - DA^{-1}C \end{vmatrix}$$

$$= |A||B - DA^{-1}C|$$

例4 证明$|E_m - AB| = |E_n - BA|$，其中A为$m\times n$阶矩阵，B为$n\times m$阶阵.

证
$$\begin{bmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n - BA \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{vmatrix} = |E_n - BA|$$

$$\begin{bmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} E_m - AB & A \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{vmatrix} = |E_m - AB|$$

$$\therefore \boxed{|E_m - AB| = |E_n - BA|}$$

利用上式可得

$$\boxed{|\lambda E_m - AB| = \lambda^{m-n} |\lambda E_n - BA|,\ m > n, \lambda \text{ 为任意数.}}$$

$$\because |\lambda E_m - AB| = \lambda^m \left| E_m - \frac{1}{\lambda} AB \right| \quad (\lambda \neq 0)$$

$$= \lambda^m \left| E_n - \frac{1}{\lambda} BA \right|$$

$$= \lambda^{m-n} |\lambda E_n - BA|$$

$\lambda = 0$ 时可见书上的说明.

注 本例的结果可以把m阶的行列式转化为n阶的行列式计算, 此时可称为 (**降阶公式**).

尤其是当$n=1$时,即A为1列B为1行时,等式的右端即为1个数.

例5 计算 $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} = \left| E_n + \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| E_n + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| E_1 + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| 1 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \right|$$

$$= 1 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$