南京邮电大学 2014/2015 学年第一学期

《线性代数与解析几何》期末试卷(A)

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

院(系)________________ 班级____________ 学号____________ 姓名____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总 分
得分										

得 分

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 均是四维列向量，且四阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$，$|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$，则行列式 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|=\underline{n-m}$

2．设方阵 A 满足 $A^2+A-4I=0$，其中 I 为单位矩阵，则 $(A-I)^{-1}=\underline{\frac{1}{2}(A+2I)}$

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$B$为三阶非零矩阵,且$AB=0$,则 $t=\underline{-3}$

4．空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=36\\ x^2+y^2=2x\end{cases}$ 在xoz平面上的投影曲线方程为 $\underline{\begin{cases}2x+z^2=36\\ y=0\end{cases}}$

5. 若四阶方阵 A 与 B 相似，矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则 $|B^{-1}-I|=\underline{24}$.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1．设 A, B 为 n 阶矩阵，则必有 （ B ）

(A) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$　　(B) $(A+B)^T=A^T+B^T$

(C) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$　　(D) $(AB)^*=A^*B^*$

2．非齐次线性方程组 $AX=b$ 中已未知量个数为 n，方程个数为 m，系数矩阵 A 的秩为 r，则 （ A ）

(A) $r=m$ 时方程组 $AX=b$ 有解　　(B) $r=n$ 时方程组 $AX=b$ 有唯一解

(C) $m=n$ 时方程组 $AX=b$ 有唯一解　　(D) $r<n$ 时方程组 $AX=b$ 有无穷多解

3．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列线性相关的向量组是　　　　(B)

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$　　　　(B) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$　　　　(D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$

4．设直线$L:\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$及平面$\pi:4x+2y+z-2=0$，则　(D)

（A）L 与 π 平行　　　　（B）L 与 π 垂直

（C）L 在 π 上　　　　（D）L 与 π 斜交

5．若二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$ 正定，则 a 的取值范围是　　(C)

（A）$(-2,2)$　　（B）$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$　　（C）$(-3,3)$　　（D）$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

得 分

三、(本题 10 分) 设 $AB=A+2B$，其中 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，求矩阵 B.

解 因为 $AB=A+2B$，$(A-2I)B=A$，所以 $B=(A-2I)^{-1}A$

$$(A-2I\vdots I)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

所以 $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$

得 分

四、(本题 10 分) 求向量组 $\alpha_1=(6,4,1,-1,2)^T$，$\alpha_2=(1,0,2,3,-4)^T$，$\alpha_3=(1,4,-9,-16,22)^T$ 的秩和它的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组表示其余向量.

解 $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -9 \\ -1 & 3 & -16 \\ 2 & -4 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 \\ 0 & -8 & 40 \\ 0 & -11 & 55 \\ 0 & 5 & -25 \\ 0 & -8 & 40 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$………4 分

所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$ ……………2 分

极大线性无关组为：α_1,α_2……………2 分

且 $\alpha_3=\alpha_1-5\alpha_2$ ……………2 分

得 分

五、(本题 10 分) 在平面 $\pi: x+2y-z=20$ 上作一直线 Γ，使直线 Γ 过另一直线 $L:\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y}{10}=\dfrac{z}{7}$ 与平面 π 的交点,且 Γ 与 L 垂直,求直线 Γ 的方程.

解 直线 L 的方向向量 $\vec{s}=\{6,10,7\}$，且 L 过点(1,0,0)，将 L 的参数方程 $x=1+6t$，

$y=10t, z=7t$ 代入平面 π 方程得 $t=1$，所以 L 与平面 π 的交点为(7,10,7)………4 分

平面 π 的法向量 $\vec{n}=\{1,2,-1\}$，所求直线的方向向量 $\vec{s}_1=\vec{s}\times\vec{n}=\{-24,13,2\}$…4 分

所求直线方程为 $\dfrac{x-7}{-24}=\dfrac{y-10}{13}=\dfrac{z-7}{2}$ ……2 分

得 分

六、(本题 12 分) 已知方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+k\,x_3=4 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \\ -x_1+kx_2+x_3=k^2 \end{cases}$，问 k 为何值时，方程组有唯一解？无解？有无穷多解？并在方程组有无穷多解时写出通解.

解 因为 $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & k & 1 \end{vmatrix}=(k+1)(k-4)$………3 分

(1) 当 $k\neq-1$ 且 $k\neq4$ 时，方程组有唯一解. ……2 分

(2) 当 $k=-1$ 时，方程组的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

因为 $R(A)\neq R(\overline{A})$，所以方程组无解. . ….…2 分

(3) 当 $k=4$ 时，方程组的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & 4 & 1 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为 $R(A)=R(\overline{A})=2<3$，所以方程组有无穷多解，. ….…2 分

通解为 $X=k(-3,-1,0)^T+(0,4,0)^T$ ， $k\in R$ . . ….…3 分

得 分

七、(本题 12 分) 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2+2x_2^2-x_3^2+2kx_1x_3$ 经正交变换 $x=Qy$ 可以化成标准形 $2y_1^2+2y_2^2-4y_3^2$，求参数 $k(k>0)$ 及一个合适的正交矩阵 Q.

解 二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 \\ k & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 由题设可知 A 的特征值为 $2,2,-4$ ……….2 分

从而 $|A|=2-2k^2=-16$， $k=3$ ……..…2 分

对 $\lambda_1=\lambda_2=2$, 解方程组 $(A-2I)x=0$ 得相应的特征向量是 $\alpha_1=(1,0,1)^T$，

$\alpha_2=(0,1,0)^T$， ……..…2 分

当 $\lambda_3=-4$，解方程组 $(A+4I)x=0$ 得相应的特征向量是 $\alpha_3=(1,0,-1)^T$， ….2 分

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 已两两正交，单位化得 $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$， $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$， $e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ….3 分

所求正交矩阵$Q=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. ……….1 分

得 分

八、（本题 6 分）设A为$m\times n$实矩阵，I为n阶单位矩阵，已知矩阵$B=\lambda I+A^TA$，试证：当$\lambda>0$时矩阵B为正定矩阵.

证 $B^T=(\lambda I+A^TA)^T=\lambda I+A^TA=B$，故$B$为实对称矩阵 …2 分

对n维向量$x\neq 0$，$x^TBx=x^T(\lambda I+A^TA)x=\lambda x^Tx+(Ax)^TAx$ …2 分

而$x^Tx=\|x\|^2>0$，$(Ax)^TAx=\|Ax\|^2\geq 0$，故$\lambda>0$时$x^TBx>0$，即B为正定阵.

…….2 分