1.2 数列的极限

要求： 了解数列极限的定义，掌握收敛数列的性质。

1、选择题

(1) 下列命题中正确的是 （ D ）

（A）发散数列必然无界 （B）两个发散数列之和必然发散

（C）两个无界数列之和必然发散 （D）收敛数列必然有界

$\left\{(-1)^n \frac{n}{n+1}\right\}$

(2)下列说法中与“$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$”等价的是 （ D ）

（A）随着 n 的增大，x_n 越来越接近常数 A

（B）点 A 的无论多么小的邻域内都有数列 $\{x_n\}$ 中无穷多个点

（C）数列 $\{x_n\}$ 中所有的点都落在 A 的某个邻域内

（D）无论正数 ε 有多么小，点 A 的 ε 邻域之外至多只有数列 $\{x_n\}$ 中有限多个点

2、用定义证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{4n+1}=\frac{3}{4}$。

对 $\forall \varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{3n+1}{4n+1}-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon$，即要使

$\left|\frac{12n+4-12n-3}{4(4n+1)}\right| = \frac{1}{4(4n+1)} < \frac{1}{n} < \varepsilon$，即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$

另：$N=\left[\frac{1}{16\varepsilon}-\frac{1}{4}\right]$

$\therefore$ 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\frac{3n+1}{4n+1}-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon$。$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{4n+1}=\frac{3}{4}$

3、若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，而数列 $\{y_n\}$ 有界，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$。

$\because \{y_n\}$ 有界. $\therefore \exists M>0$，对 $\forall n\in N$，$|y_n|\le M$

又 $\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ $\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$|x_n|<\frac{\varepsilon}{M}$

$\therefore |x_n y_n| = |x_n||y_n| \le \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

1.3 函数的极限

要求： 掌握函数极限的定义和函数极限的性质。

1、填空题

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域内有界的__充分__条件；

(2) $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 都存在且相等是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的__充要__条件。

2、用定义证明：$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$。

$x\ne -2$，$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right| = |x-2+4| = |x-(-2)|$

取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-(-2)|<\delta$ 时

$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2} = -4$