4.2 向量的乘法

一、 内 积

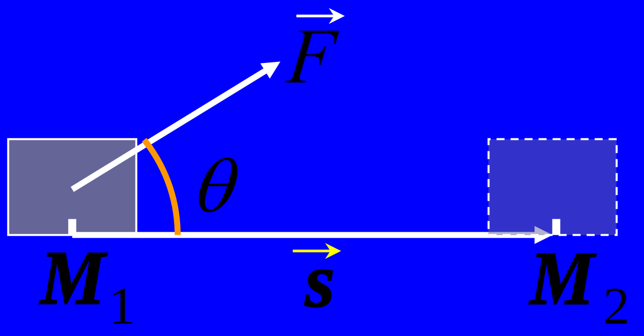
二、 外 积

三、 混 合 积

一、数量积(内积, 点积)

引例 设一物体在常力 $\vec{F}$ 作用下, 沿与力夹角为 θ 的直线移动, 位移为 $\vec{s}$, 则力 $\vec{F}$ 所做的功为

$$W = |\vec{F}|\,|\vec{s}|\cos\theta$$



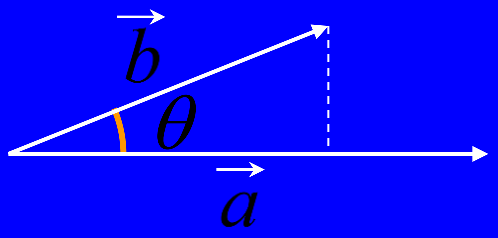
$$\boxed{W = \vec{F}\cdot\vec{s}}$$

返回

定义 设向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 θ，称

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \xlongequal{\text{记作}} \vec{a}\cdot\vec{b}$$

$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的 **数量积（点积, 内积）**.



当 $\vec{a} \neq \vec{0}$ 时, $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影

$$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}|\cos\theta,$$

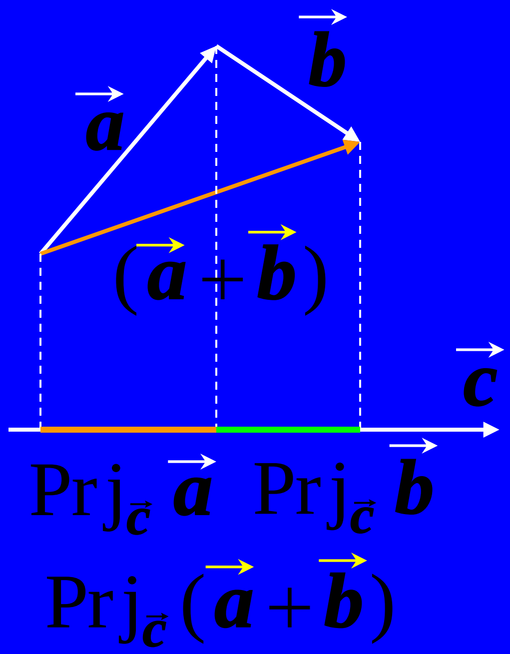
故 $$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\,\vec{b}$$

同理, 当 $\vec{b} \neq \vec{0}$ 时,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}$$

运算律

(1) 交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$



(2) 数乘结合律 (λ,μ为实数)

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=\lambda\big(\vec{a}\cdot(\mu\vec{b})\big)=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

(3) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

事实上, 当 $\vec{c}=\vec{0}$ 时, 显然成立；当 $\vec{c}\neq\vec{0}$ 时

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|\,(\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\vec{a}+\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\vec{b})$$

$$=|\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\vec{a}+|\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

不满足的运算律

(1) 向量的结合律：$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} \neq \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$

(2) 向量的消去律:

1) 若 $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c}$, 一般推不出 $\vec{b} = \vec{c}$.

2) 由 $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, 一般推不出 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$.

数量积的性质

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

(2) $\vec{a},\vec{b}$垂直, 记 $\vec{a}\perp\vec{b}$ ， 则

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$

则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{2}$

(3) $\vec{a},\vec{b}$ 平行, 即 $\vec{a}\,//\,\vec{b}\Leftrightarrow|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

(4) $\vec{a},\vec{b}$ 非零向量, $\theta=\angle(\vec{a},\vec{b})$, $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

(5) 柯西--施瓦兹不等式: $\vec{a}\cdot\vec{b}\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

(6) $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

例1 判断下列各式是否正确, 为什么?

(1) $\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|$ (√)

(2) $|\vec{a}| \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$ (×)

(3) $\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}$ (√)

(4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (√)

(5) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \ \vec{b}^2$ (×)

(6) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$ (√)

(7) 若$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$, 且$\vec{c} \neq \vec{0}$, 那么 $\vec{a} = \vec{b}$. (×)

例2 设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为单位向量, 且满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

求 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ 的值.

解: $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$

$$\Rightarrow (\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})$$

$$+(\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c})$$

$$+(\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c})=0$$

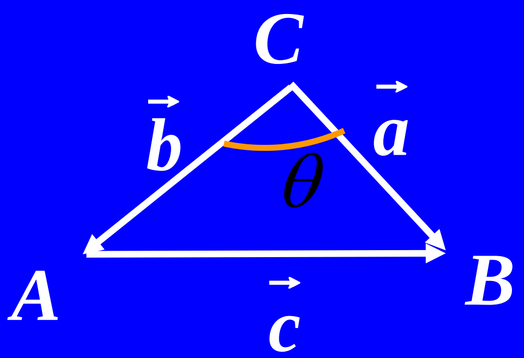
$$\Rightarrow \left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\right)+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c})=0$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{3}{2}$$

例3 证明: 向量 $\vec{a}$ 垂直于向量 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$.

提示: 只要证明 $\vec{a}\cdot\left[(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}\right]=0$.

例4 用向量证明三角形余弦定理.



证: $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$.

故有 $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

$$\vec{c}^{\,2} = \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$= \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

即 $\vec{c}^{\,2} = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

记 $|\vec{c}| = c$, $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$,

即 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$.

返回

数量积的坐标运算

设向量 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z), \vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})\\&=a_x\vec{i}\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})\\&\quad+a_y\vec{j}\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})\\&\quad+a_z\vec{k}\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\end{aligned}$$

注：$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 是相互垂直的单位向量

数量积的坐标运算

设向量 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z), \vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

(2) $\vec{a},\vec{b}$ 垂直, 即 $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$

(3) $\vec{a},\vec{b}$ 平行, 即 $\vec{a}\,//\,\vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$

$(b_x, b_y, b_z$ 不全零)

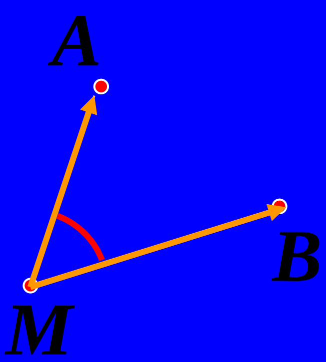
(4) $\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

(5) 柯西--施瓦兹不等式:

$$\left|a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right| \le \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}$$

(6) $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

例5. 已知三点 $M(1,1,1),\ A(2,2,1),\ B(2,1,2)$, 求 $\angle AMB$.



解: $\overrightarrow{MA}=(1,\ 1,\ 0),\quad \overrightarrow{MB}=(1,\ 0,\ 1)$

则 $$\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}|\,|\overrightarrow{MB}|}$$

$$=\frac{1+0+0}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

故 $$\angle AMB=\frac{\pi}{3}$$

◀ ▶ 返回

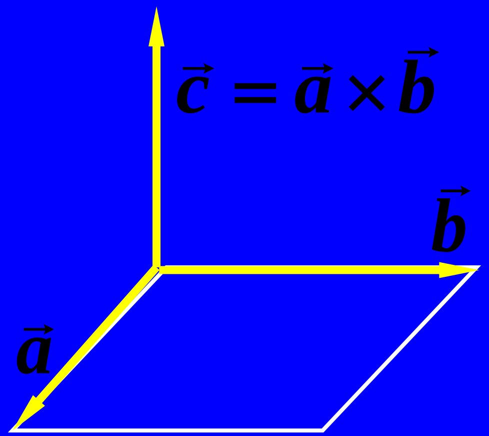
二、向量的向量积(外积, 叉积)

定义 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的外积 $\vec{a}\times\vec{b}$ 是一个向量,

(1) $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$,

(2) $\vec{a}\times\vec{b}$ 与 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 所确定的平面垂直，且

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ 符合右手系.



向量积又称为外积,叉积.

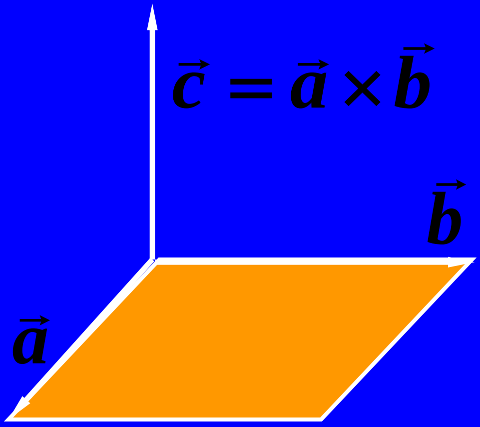
注意:

(1) $\vec{a}\times\vec{b}$ 仍是一向量, 既垂直于$\vec{a}$, 也垂直于$\vec{b}$,

故垂直于 $\vec{a},\vec{b}$ 所确定的平面.

(2) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$ 是一个数,

是以 $\vec{a},\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.



返回

外积的性质及运算规律

(1) $\vec{a} \perp \vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b} \perp \vec{a}\times\vec{b};$

(2) $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0},\ \vec{0}\times\vec{a} = \vec{0};$

(3) $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0};$

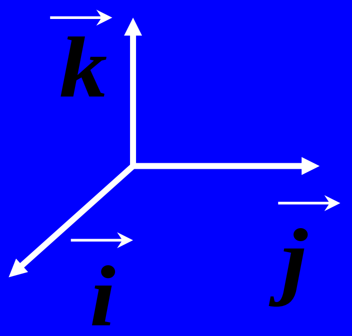
(4) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a};$

(5) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b});$

(6) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}.$

注意: 没有交换律、消去律、结合律.

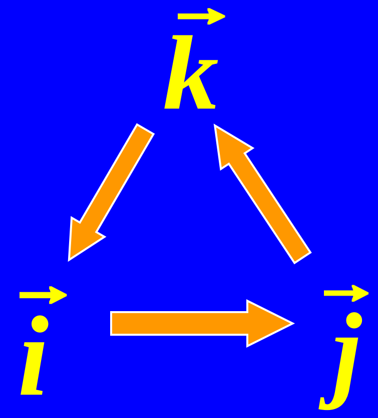
向量积的坐标运算



(1) $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$;

$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.$

$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$



(2) 设$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$,则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$$

$$=a_1b_2\vec{k}-a_1b_3\vec{j}-a_2b_1\vec{k}+a_2b_3\vec{i}+a_3b_1\vec{j}-a_3b_2\vec{i}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

一定要熟练掌握

例 1 求与$\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$都垂直的单位向量.

解

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=10\vec{j}+5\vec{k}=(0\quad 10\quad 5),$$

$$\because |\vec{c}|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5},$$

$$\therefore \vec{e}_{\vec{c}}=\pm\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}\right)=\pm\left(0,\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

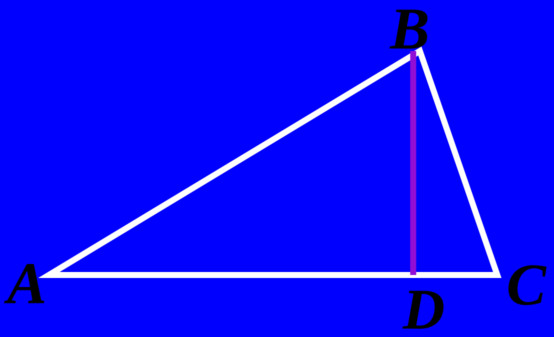
返回

例 2 在顶点为 $A(1,-1,2)$、$B(5,-6,2)$ 和 $C(1,3,-1)$ 的三角形中，求 AC 边上的高 BD.

解 $\overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$

$\overrightarrow{AB}=(4,-5,0)$

三角形 ABC 的面积为



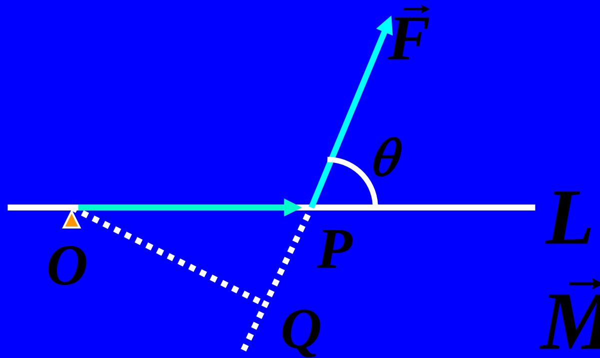
$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\frac{25}{2},$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5,\qquad S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|BD|$$

$$\frac{25}{2}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot BD\qquad \therefore BD=5.$$

例4 外积的物理意义

设O为一根杠杆L的支点，有一力$\vec{F}$作用于这杠杆上P点处。力$\vec{F}$与$\overrightarrow{OP}$的夹角为θ，力$\vec{F}$对支点O的力矩是向量$\vec{M}$,它的模



$$|\vec{M}| = |OQ||\vec{F}|$$

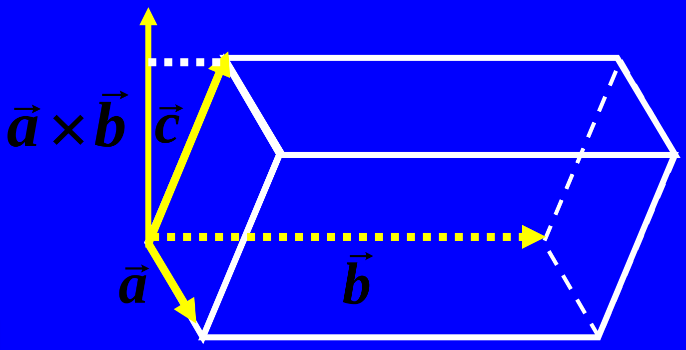
$$= |\overrightarrow{OP}||\vec{F}|\sin\theta$$

$\vec{M}$ 的方向垂直于OP与$\vec{F}$ 所决定的平面，指向符合右手系.

三、混合积

定义 已知三向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$，向量 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 称为这三个向量的**混合积**，记为$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

几何意义



以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为棱作平行六面体，则

底面积 $A=|\vec{a}\times\vec{b}|$，高 $h=|\vec{c}||\cos\alpha|$

故平行六面体体积为

$$V = Ah = |\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\alpha| = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$$

$$= |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

返回

混合积的坐标运算

设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$,

$\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$,

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

这是混合积的坐标表达式

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\vec{i}+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\vec{j}$$
$$+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\vec{k}$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

$$=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)c_1+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)c_2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)c_3$$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

返回

混合积的性质：

(1) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$

(轮换对称性)

(2) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c} = -(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}.$

（3）三向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面 $\Longleftrightarrow (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0.$

例如, $(\vec{a},\vec{b},\vec{a}) = 0.$

返回

例5 已知 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=2$，

计算 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

解 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}$$

$$+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}_{=0}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{a}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}$$

$$=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=4.$$

返回

例 6 已知不在一平面上的四点 $A(x_1, y_1, z_1)$、$B(x_2, y_2, z_2)$、$C(x_3, y_3, z_3)$、$D(x_4, y_4, z_4)$，求四面体 $ABCD$ 的体积.

解 由立体几何知，四面体的体积等于以向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$ 为棱的平行六面体的体积的六分之一.

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$$

$$\because \ \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\because \ \overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

$$\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$$

$$\overrightarrow{AD}=(x_4-x_1, y_4-y_1, z_4-z_1)$$

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$$

$$=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

式中正负号的选择和行列式的符号一致.

例7 导出4点 $A_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1,2,3,4$, 在同一平面上的条件.

解:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$