第六章　向量空间的正交性

6.3　向量空间的内积

6.4　实对称矩阵的对角化

返回

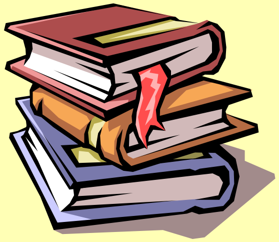
6.4实对称矩阵的相似对角化

一、共轭矩阵

二、实对称矩阵的特征值特征向量

三、实对称矩阵的相似对角化

四、综合例题



一、共轭矩阵

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$a_{ij}\in C$（C 为复数集）.

$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$ 称为 A 的共轭矩阵.

共轭矩阵具有以下性质：

(1) $\overline{A^{\mathrm{T}}}=\overline{A}^{\mathrm{T}}$,

(2) $\overline{kA}=\overline{k}\,\overline{A}$,

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$.

二、 实对称矩阵的特征值与特征向量.

定理3 实对称矩阵的特征值都是实数.

证 设 $A \in \mathbf{R}^{n\times n},\ A^{\mathrm{T}} = A,\quad A\alpha = \lambda\alpha,$

$$\alpha = \left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)^{\mathrm{T}} \neq 0.$$

则 $\overline{A\alpha} = \overline{A}\,\overline{\alpha} = \overline{\lambda\alpha} = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}$, (两边求共轭)

$\therefore\quad \overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}} = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}$, (上式两边转置)

$\overline{\alpha}^{\mathrm{T}} A\alpha = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha$, (上式两边右乘$\alpha$)

$\lambda\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha,$

$\left(\lambda - \overline{\lambda}\right)\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha = 0,$

$\because\ \overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha = \overline{a_1}a_1 + \overline{a_2}a_2 + \cdots + \overline{a_n}a_n \neq 0,$

$\therefore\quad \lambda = \overline{\lambda}.$

推论 实对称矩阵 A 的特征向量都是实向量.

这是因为 A 的特征向量都是

$$(\lambda_i I - A)x = 0$$

的非零解向量,而 A 的特征值 λ_i 是实数.

定理4 实对称矩阵不同特征值的特征向量相互正交.

注意 一般实矩阵不同特征值的特征向量线性无关.

定理4 实对称矩阵不同特征值的特征向量相互正交.

证 设 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1$，$A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$，

$$(\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0).$$

$$\lambda_1\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 = (\lambda_1\alpha_1)^{\mathrm{T}}\alpha_2 = (A\alpha_1)^{\mathrm{T}}\alpha_2 = \alpha_1^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\alpha_2$$

$$= \alpha_1^{\mathrm{T}}A\alpha_2 = \alpha_1^{\mathrm{T}}\lambda_2\alpha_2 = \lambda_2\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2,$$

$$\therefore\ (\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 = 0,$$

$$\because\ \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0,$$

$$\therefore\ (\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 = 0.$$

三、实对称矩阵的相似对角化

定理5 对任一实对称矩阵 A，都存在正交矩阵 C，使

$$C^{\mathrm{T}}AC = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值.

引理 设 A 是实对称矩阵，λ 是 A 的 k 重特征值，则 λ 所对应的线性无关特征向量的个数恰为 k.

求正交矩阵 C 与对角矩阵 Λ 的步骤：

(1) 求 $f(\lambda)=|\lambda I-A|$ 的根：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$；

(2) 求 $(\lambda_i I-A)x=0$ 的基础解系：

$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir_i}$；

(3) 将 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir_i}$ 先正交化后单位化得：

$\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \cdots, \gamma_{ir_i}$；

(4) 令 $C=\left(\gamma_{11} \cdots \gamma_{1r_1} \cdots \gamma_{k1} \cdots \gamma_{kr_k}\right)$，

则 C 为正交矩阵且

$$C^{\mathrm{T}}AC=C^{-1}AC=\Lambda=diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right).$$

例1 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 C 与对角矩阵 Λ，使 $C^{\mathrm{T}}AC=C^{-1}AC=\Lambda$.

解 $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

$$\lambda_1=1(\text{二重}),\quad \lambda_2=10.$$

返回

求 $\lambda_1 = 1$的特征向量：

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -2x_2 + 2x_3 \,,$$

下求正交基础解系：

令 $\alpha_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

将 α_1, α_2 正交化：$\beta_1 = \alpha_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$,

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \frac{1}{5}(2, 4, 5)^{\mathrm{T}} .$$

或直接取：$\beta_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\beta_2 = \left(1, 2, \dfrac{5}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

返回

再将 β_1, β_2 单位化：

$$\gamma_1=\frac{1}{\left|\beta_1\right|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\ \gamma_2=\frac{1}{\left|\beta_2\right|}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{45}}(2,4,5)^{\mathrm{T}}.$$

求 $\lambda_2=10$ 的特征向量：

$$\lambda_2 I-A=\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1=-\frac{1}{2}x_3,\quad x_2=-x_3,\quad \alpha_3=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}.$$

将 α_3 单位化：$\gamma_3=\frac{1}{\left|\alpha_3\right|}\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,-2)^{\mathrm{T}}.$

令 $C=(\gamma_1\ \ \gamma_2\ \ \gamma_3)=\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$,

则 C 为正交矩阵且:

$$C^T AC = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}.$$

例2 求 a, b 的值与正交矩阵 C，使 $C^{-1}AC = \Lambda$ 为对角矩阵，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$

解 $\because$ A 与对角阵Λ相似

$$\therefore \quad \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(\Lambda) \Rightarrow 1 + a + 1 = 0 + 1 + 4$$

$$\Rightarrow a = 3.$$

$$|A| = |\Lambda| \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b = 1.$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix},\quad \lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4.$$

求$\lambda_1=0$的特征向量:

$$\lambda_1 I-A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-3&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可得 $\lambda_1=0$的特征向量为： $\alpha_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,

同样可得 $\lambda_2=1$的特征向量为： $\alpha_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$

$\lambda_3=4$的特征向量为： $\alpha_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化：

$$\gamma_1 = \frac{1}{|\alpha_1|}\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^{\mathrm{T}},$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{|\alpha_2|}\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^{\mathrm{T}},$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{|\alpha_3|}\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $C = (\gamma_1 \ \ \gamma_2 \ \ \gamma_3)$，则 C 为正交矩阵且

$$C^{-1}AC = diag(0, 1, 4).$$

例3 实对称矩阵 A 与 B 相似

$\Leftrightarrow A$与B有相同的特征值.

证： $\Rightarrow$: 相似矩阵有相同的特征值.

$\Leftarrow$: 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是A与B的特征值，则

矩阵相似

$$A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \sim B,$$

由矩阵相似的传递性可得：

$$A \sim B.$$

返回

例4 设n阶非零方阵A满足 $A^2=O$.

证明：A不能与任何对角矩阵相似.

证：(反证法) 假设 A 与对角阵Λ相似,

即存在可逆矩阵 P,有

$$P^{-1}AP=\Lambda,\ \text{其中}\Lambda\ \text{为对角阵}.$$

$$\Rightarrow\quad A=P\Lambda P^{-1}$$

$$\Rightarrow\quad A^2=(P\Lambda P^{-1})^2\quad =P\Lambda^2P^{-1}\ =O$$

$$\Rightarrow\quad \Lambda^2=O$$

$$\Rightarrow\quad \Lambda=O$$

$$\Rightarrow\quad A=P\Lambda P^{-1}=O$$

这与 A 为非零方阵矛盾.

四、综合例题（第六、七章）

例1 设 n 阶矩阵 A 的任何一行元素的和都是 a，求 A 的一个特征值与特征向量．

解 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则 $a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}=a$

返回

取 $\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$，则

$$A\alpha=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n} \\ a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\therefore$ $\lambda=a$ 是 A 的一个特征值，

$\alpha=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的一个特征向量．

例2 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值是 1, 2, 3, A 对应于特征值 1, 2 的特征向量分别是：

$$\alpha_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}.$$

求 (1) A 对应于特征值 3 的特征向量，

(2) 求矩阵 A.

解 (1) 设 A 对应于 3 的特征向量是:

设 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,

$$\Rightarrow \begin{cases}(\alpha_1,\alpha_3)=-x_1-x_2+x_3=0\\(\alpha_2,\alpha_3)=x_1-2x_2-x_3=0,\end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}} \text{得 } k_3\alpha_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}\ (k_3\neq 0).$$

返回

(2) 法一

设 $P=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\Lambda=\operatorname{diag}(1,2,3),\qquad A=P\Lambda P^{-1}.$$

$$P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ -3 & 0 & 3\end{pmatrix},$$

$$A=P\Lambda P^{-1}=\cdots=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13 & -2 & 5\\ -2 & 10 & 2\\ 5 & 2 & 13\end{pmatrix}.$$

(2) 法二

$$记\ C=\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha_1}{|\alpha_1|} & \dfrac{\alpha_2}{|\alpha_2|} & \dfrac{\alpha_3}{|\alpha_3|}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},则$$

$$C^{\mathrm{T}}AC=C^{-1}AC=\Lambda=\operatorname{diag}(1,2,3),$$

$$A=C\Lambda C^{-1}=C\Lambda C^{\mathrm{T}}\cdots=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13 & -2 & 5\\ -2 & 10 & 2\\ 5 & 2 & 13\end{pmatrix}.$$

例3 设 A 是 3 阶矩阵且 $I+A$, $3I-A$, $I-3A$ 均不可逆. 证明：

(1) A可逆, (2) A与对角矩阵相似.

证 (1) $\because$ $I+A$不可逆, $\therefore$ $|I+A|=0$,

$\therefore (-1)^3|-I-A|=0 \Rightarrow |-I-A|=0$,

$\therefore \lambda_1=-1$是A特征值.

由 $|3I-A|=0 \Rightarrow \lambda_2=3$是$A$的特征值.

由 $|I-3A|=3^3\left|\frac{1}{3}I-A\right|=0 \Rightarrow \left|\frac{1}{3}I-A\right|=0$,

$\therefore \lambda_3=\frac{1}{3}$是$A$的特征值.

A的特征值均不为零, 故A可逆.

返回

$(2)\ \because\ A$的特征值都是单特征值，

$$\therefore\quad A\text{与}\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 3 & \\ & & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\text{相似.}$$

例4 设 A 是 3 阶矩阵, A^{-1} 的特征值是 1, 2, 3 ,

求 A^* 的特征值 .

解 $AA^* = A^*A = |A|I \quad \Rightarrow A^* = |A|A^{-1}$

设 $A^{-1}\alpha = \lambda\alpha$, $(\alpha \neq 0,\ \lambda$ 是 A^{-1} 的特征值 .$)$

则 $A^*\alpha = \lambda|A|\alpha$,

$\because \quad A^{-1}$ 的特征值是：1, 2, 3,

$\therefore \quad |A^{-1}| = 6 \quad \Rightarrow |A| = \dfrac{1}{6}$

$\therefore \quad A^*$ 的特征值是：$\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}$.

返回

例5 设 $\lambda_1 = 12$ 是 矩阵 A 的特征值，

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & a & 4 \end{pmatrix}$$

求 A 的其余特征值．

解 $$|\lambda_1 I - A| = |12I - A| = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & -a & 8 \end{vmatrix} = 9a + 36 = 0$$

解得 $a = -4$.

返回

$$A=\begin{pmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&4\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}=7+7+4=18,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=\begin{vmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&4\end{vmatrix}=108,$$

将 $\lambda_1=12$ 代入

$$\begin{cases}12+\lambda_2+\lambda_3=18\\12\lambda_2\lambda_3=108\end{cases},$$

得 $\lambda_2=\lambda_3=3$.

返回