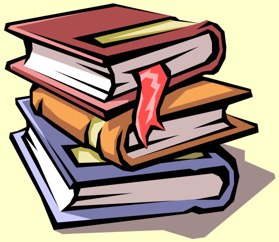
2.5 线性方程组及高斯消元法

一、引入

二、初等变换与高斯消元法

三、线性方程组有解判别法



一、引入

方程组 $$Ax=b$$

其中 $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

就是 $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

齐次方程组：$Ax = 0$;

非齐次方程组：$Ax = b, \quad b \neq 0$
(b中至少有一分量不为零)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ 为$Ax = b$的**解**：$Ax = b$ 成立.

即$x_1, \dots, x_n$使得方程组成立.

解集：方程组所有解的集合

解集 $\begin{cases} \text{空 集：方程组无解 —— 不相容} \\ \text{非空集：方程组有解 —— 相 容} \begin{cases} \text{有唯一解} \\ \text{无穷多解} \end{cases} \end{cases}$

等价方程组：两个方程组同解

返回

问题

方程组何时有解？
若有解，有多少解？如何求出其全部解？

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 & (1) \\ \quad\quad\; x_2 + x_3 = 0 & (2) \\ \quad\quad\quad\quad\; x_3 = 2 & (3) \end{cases}$$

行阶梯型方程组

返回

二、初等变换与高斯消元法

例1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3=4 & (1) \\ x_1+4x_2+3x_3=1 & (2) \\ x_1-3x_2-2x_3=5 & (3) \\ x_1+x_2+x_3=3 & (4) \end{cases}$$

解: 第一步, 使第一个方程中 x_1 的系数为 1, 可 $(1)\leftrightarrow(4)$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 & (1) \\ x_1+4x_2+3x_3=1 & (2) \\ x_1-3x_2-2x_3=5 & (3) \\ 2x_1+5x_2+4x_3=4 & (4) \end{cases}$$

第二步，把第一个方程以下的各方程中的 x_1 消去，可用(2)(3)(4)分别减(1)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 & (1) \\ 3x_2 + 2x_3 = -2 & (2) \\ -4x_2 - 3x_3 = 2 & (3) \\ 3x_2 + 2x_3 = -2 & (4) \end{cases}$$

第三步，使第二个方程中的 x_2 的系数为 1，可(2)+(3)，然后再乘 -1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 & (1) \\ x_2 + x_3 = 0 & (2) \\ -4x_2 - 3x_3 = 2 & (3) \\ 3x_2 + 2x_3 = -2 & (4) \end{cases}$$

第四步，消去(3)(4)中含x_2的项, (3)+(2)×4, (4) − 3×(2)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 & (1) \\ x_2 + x_3 = 0 & (2) \\ x_3 = 2 & (3) \\ -x_3 = -2 & (4) \end{cases}$$

第五步, 把第三个方程以下的各方程中的 x_3消去, (4)+(3)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 & (1) \\ x_2 + x_3 = 0 & (2) \\ x_3 = 2 & (3) \\ 0 = 0 & (4) \end{cases}$$

行阶梯型方程组

返回

第六步, 用回代的方法求解, 即$(2)-(3)$, $(1)-(3)$

最后 $(1)-(2)$，得

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

上述消元过程中, 我们对方程组施行了以下三种变换:

(1) 交换两个方程的位置;

(2) 以非零数 k 乘某一行;

(3) 把某一个方程的 k 倍加到另一行上.

这三种变换称为**线性方程组的初等变换.**

由于三种变换都是可逆的，所以变换前的方程组与变换后的方程组是同解的．故这三种变换是同解变换．

事实上，线性方程组的初等变换只对方程组中未知量的系数与常数进行运算，未知量并未参与运算．

对方程组施行的初等变换可以用相应的矩阵的变换来表示．

再看例1．

例1 解线性方程组

增广矩阵 $(A \mid b)$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 & (1) \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (2) \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 & (4) \end{cases}$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

解: 第一步, 使第一个方程中 x_1 的系数为1, 可 $(1) \leftrightarrow (4)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 & (1) \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (2) \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 & (3) \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 & (4) \end{cases}$$

$$B_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

第二步，把第一个方程以下的各方程中的 x_1消去，可用(2)(3)(4)分别减(1)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 & (1) \\ 3x_2 + 2x_3 = -2 & (2) \\ -4x_2 - 3x_3 = 2 & (3) \\ 3x_2 + 2x_3 = -2 & (4) \end{cases}$$

$$B_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

第三步，使第二个方程中的 x_2 的系数为 1，可(2)+(3)然后再乘 -1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 & (1) \\ x_2 + x_3 = 0 & (2) \\ -4x_2 - 3x_3 = 2 & (3) \\ 3x_2 + 2x_3 = -2 & (4) \end{cases}$$

$$B_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

第四步，消去(3)(4)中含x_2的项, (3)+(2)×4, (4) – 3×(2)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 & (1) \\ x_2 + x_3 = 0 & (2) \\ x_3 = 2 & (3) \\ -x_3 = -2 & (4) \end{cases}$$

$$B_4 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

第五步, 把第三个方程以下的各方程中的 x_3消去, (4)+(3)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 & (1) \\ x_2 + x_3 = 0 & (2) \\ x_3 = 2 & (3) \\ 0 = 0 & (4) \end{cases}$$

$$B_5 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

第六步, 用回代的方法求解, 即$(2)-(3)$，$(1)-(3)$

最后 $(1)-(2)$，得

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$$B_6 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

定义1　下面三种变换称为矩阵的**初等行变换**:

(1) 对调两行（对调i, j两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$）;

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行的所有元素;

（第 i 行乘 k, 记作 $r_i \times k$）

(3) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去（第 j 行的 k 倍加到第 i 行上, 记作 $r_i + kr_j$）.

例1

$$B=(A\mid b)=\begin{pmatrix}2&5&4&4\\1&4&3&1\\1&-3&-2&5\\1&1&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\1&4&3&1\\1&-3&-2&5\\2&5&4&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_1\times(-2)]{\substack{r_2+r_1\times(-1)\\ r_3+r_1\times(-1)}}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&3&2&-2\\0&-4&-3&2\\0&3&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&1&0\\0&-4&-3&2\\0&3&2&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2\times(-3)]{r_3+r_2\times 4}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&1&0\\0&0&1&2\\0&0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&1&0\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B_5$$

返回

$$B=(A\mid b)=\begin{pmatrix}2&5&4&4\\1&4&3&1\\1&-3&-2&5\\1&1&1&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&1&0\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B_5$$

$$\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-2\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B_6$$

即原方程的解为:
$$\begin{cases}x_1=3\\x_2=-2\\x_3=2\end{cases}$$

求解线性方程组：

增广矩阵 → 初等行变换 → 行阶梯形矩阵 → 判定解的情况 → 有解 / 无解

有解 → 初等行变换 → 行最简形矩阵

高斯—若尔当 消元法

例2 解方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$

解: 对线性方程组的增广矩阵依次施行如下初等行变换:

$$\overline{A} = (A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

最后一行对应方程:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2$$

为矛盾方程.

故原方程无解.

例3 解方程组

$$
\begin{cases}
x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = -1 \\
2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2 \\
3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -3 \\
x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 2
\end{cases}
$$

$$
\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\
3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2
\end{array}\right)
\to
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3
\end{array}\right)
$$

$$
\to
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3
\end{array}\right)
\to
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

返回

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

从下往上消元

$$\xrightarrow{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 - 7x_5 \\ x_3 = 2 \qquad - 4x_5, \\ x_4 = -1 \qquad + 3x_5 \end{cases}$$

其中x_2, x_5任意（自由未知量）

返回

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 - 7x_5 \\ x_3 = 2 \qquad\quad - 4x_5, \\ x_4 = -1 \qquad + 3x_5 \end{cases}$$ 其中x_2, x_5任意（自由未知量）

或写成向量形式即为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$ 其中t_2, t_5为任意实数

例1 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

非零行的行数
=未知量个数

有唯一解

例2 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

该数不为零，
无解

例3 $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

非零行的行数
<未知量个数

有无穷多解

返回

一般地，设线性方程 $Ax=b$ 的增广矩阵为：

$$(A\vdots b)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

行初等变换 → 行阶梯形矩阵

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ & & \ddots & \vdots & & \ddots & & \\ & & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

必要时重新安排未知量次序

初等行变换 $\longrightarrow$

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
& 1 & & & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
& & \ddots & & & \ddots & & \\
& & & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

行最简形矩阵

1. $d_{r+1} \neq 0$，无解；系数矩阵非零行行数<增广矩阵非零行行数

2. $d_{r+1} = 0$，有解：

(1) $r = n$：有唯一解：$x_1 = d_1, x_2 = d_2, \cdots, x_n = d_n$.

(2) $r < n$：有无穷多组解：

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n + d_2 \\ \cdots\cdots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n + d_r \end{cases}$$

$x_{r+1},\ x_{r+2},\ \cdots,\ x_n$： 自由未知量 .

自由未知量个数： $n - r$

返回

问题：对于齐次方程组 $Ax = 0$ ？

即 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

零向量 $x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots. & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 总是该方程的一个解，

称为零解．故齐次线性方程组总是相容的．

$$\begin{cases} \text{只有零解:} \\ \text{有无穷多解:} \end{cases}$$

返回

定理1　n 元非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵 A 的秩等于增广矩阵 $B=(A,b)$ 的秩.

证　必要性. 设方程组 $Ax=b$ 有解,

设 $R(A)<R(B)$,

则B的行阶梯形矩阵中最后一个非零行对应矛盾方程 0 = 1 ,

这与方程组有解相矛盾. 因此 $R(A)=R(B)$.

充分性. 设 $R(A)=R(B)$,

设 $R(A)=R(B)=r(r\le n)$,

则 B 的行阶梯形矩阵中含 r 个非零行,

把这 r 行的第一个非零元所对应的未知量作为非自由未知量,

其余 $n-r$ 个作为自由未知量,

并令 $n-r$ 个自由未知量全取0,

即可得方程组的一个解. 证毕

定理2　对齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的系数矩阵施行有限次初等行变换，使它化为行阶梯形矩阵 S，记 S 中非零行行数为 r，则

齐次方程组只有零解 $\Leftrightarrow$ $r = n$

齐次方程组有非零解 $\Leftrightarrow$ $r < n$

推论　设矩阵A为n阶矩阵，则齐次线性方程组

$Ax = 0$ 有非零解 的充要条件为 $\det A = 0$

$Ax = 0$ 只有零解 的充要条件为 $\det A$ 不等于0

小结 $R(A)=R(B)=n \Leftrightarrow Ax=b$有唯一解

$R(A)=R(B)<n \Leftrightarrow Ax=b$有无穷多解.

齐次线性方程组：系数矩阵化成行最简形矩阵，便可写出其通解；

非齐次线性方程组：增广矩阵化成行阶梯形矩阵，便可判断其是否有解．若有解，化成行最简形矩阵，便可写出其通解；

二、线性方程组的解法

求解线性方程组 $Ax = b$:

增广矩阵

初等行变换 →

从左往右
从上至下
进行消元

行阶梯形矩阵

判定解的情况 →

有解

初等行变换 →

从右往左
从下至上
进行消元

行最简形矩阵

无解

线性方程组的解法

例1 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

解 对系数矩阵 A 施行初等行变换：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \underset{r_3 - r_1}{\overset{r_2 - 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2 \div (-3)}{\overset{r_3 - r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1 - 2r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - \dfrac{5}{3}x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + \dfrac{4}{3}x_4 = 0, \end{cases}$$

由此即得 $\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \dfrac{5}{3}x_4, \\ x_2 = -2x_3 - \dfrac{4}{3}x_4, \end{cases}$ (x_3, x_4 可任意取值).

令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2$, 把它写成通常的参数形式

$$\begin{cases} x_1 = 2c_2 + \dfrac{5}{3}c_2, \\ x_2 = -2c_2 - \dfrac{4}{3}c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \end{cases} \qquad \therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \dfrac{5}{3} \\ -\dfrac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例２　求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

解　对增广矩阵B进行初等变换，

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{r_3 - r_2}{\overset{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

显然，$R(A) = 2, R(B) = 3,$　故方程组无解.

上页　下页　返回

例３　求解非齐次方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}.$$

解　对增广矩阵B进行初等变换

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

上页　下页　返回

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于$R(A)=R(B)=2$, 故方程组有解，且有

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_3 = 2x_4 + 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_2 = x_2 + 0x_4 \\ x_3 = 0x_2 + 2x_4 + 1/2 \\ x_4 = 0x_2 + x_4 \end{cases}$$

所以方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

其中x_2, x_4任意.

例4 证明方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$ 有解的充要条件

是$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$.在有解的情况下，求出它的一切解.

解证 对增广矩阵B进行初等变换，

方程组的增广矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{5} a_i \end{pmatrix}$$

$$\because R(A)=R(B)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} a_i = 0$$

上页 下页 返回

$\therefore$ 方程组有解的充要条件是 $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0.$

由于原方程组等价于方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \end{cases}$

由此得通解：

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + x_5 \\ x_2 = a_2 + a_3 + a_4 + x_5 \\ x_3 = a_3 + a_4 + x_5 \\ x_4 = a_4 + x_5 \end{cases}$$

$(x_5$为任意实数$).$

例4 解齐次方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

注意是系数矩阵

解: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

最后一个矩阵是行最简形矩阵，对应的方程组为

$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

解得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix}$，$t$ 为任意实数.

注意是齐次方程组

例5 利用矩阵初等行变换确定λ取何值时,线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有 (1) 唯一解?
(2) 无解?
(3)无穷多解?

解

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - \lambda r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 + r_2}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1-\lambda^2+\lambda-\lambda^3 \end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & (1+\lambda)^2(1-\lambda) \end{array}\right)$$

(1) 唯一解: $\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -2$

(2) 无　解: $\lambda = -2$

(3) 无穷多解: $\lambda = 1$

返回

预　习

(^-^) Bye!