6.2.3　几类可降阶的高阶微分方程

要求：会用降阶解法解三类方程：$y^{(n)}=f(x)$、$y''=f(x,y')$、$y''=f(y,y')$。

1、求下列方程的通解。

(1) $y''(1+e^x)+y'=0$

令 $y'=p$，则 $y''=p'$

$p'(1+e^x)+p=0$

$\frac{dp}{dx}(1+e^x)=-p$

$\frac{dp}{p}=-\frac{1}{1+e^x}dx$（同乘 e^{-x} 积分）

$\ln|p|=\ln(e^{-x}+1)+\ln|C_1|$

$p=C_1(e^{-x}+1)$

$y=-C_1e^{-x}+C_1x+C_2$

(2) $y''=1+(y')^2$

令 $y'=p(x)$，则 $y''=p'$

$p'=1+p^2$　　$\frac{dp}{1+p^2}=dx$

$\arctan p=x+C_1$

$\frac{dy}{dx}=\tan(x+C_1)$

$dy=\tan(x+C_1)dx$

$\therefore y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$

2、求下列微分方程满足初始条件的特解。

(1) $(1-y)y''+2(y')^2=0, y|_{x=1}=2, y'|_{x=1}=-1$

设 $y'=p(y)$，则 $y''=p\cdot p'$

$\therefore (1-y)p\cdot p'+2p^2=0$

$(1-y)\frac{dp}{dy}=-2p$

$\frac{dp}{p}=2\frac{1}{y-1}dy$

$\ln|p|=2\ln|y-1|+C$

$\because y|_{x=1}=2,\ y'|_{x=1}=-1$

$\therefore C=0$

$\therefore |p|=(y-1)^2$

$\because y'|_{x=1}=-1<0$

$\therefore p=-(y-1)^2$

$\frac{dy}{dx}=-(y-1)^2$

$\frac{dy}{-(y-1)^2}=dx$

$\frac{1}{y-1}=x+C_1$

$\because y|_{x=1}=2$　$\therefore C_1=0$

$\therefore y=\frac{1}{x}+1$

(2) $y''-\frac{1}{x}y'=xe^x, y|_{x=1}=1, y'|_{x=1}=e$

令 $y'=p$，则 $y''=p'$

$\therefore p'-\frac{1}{x}p=xe^x$

$\therefore p=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int xe^x e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C_1\right]$

$=x\left[\int e^x dx+C_1\right]=x(e^x+C_1)$

$\because p|_{x=1}=e$　$\therefore C_1=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=xe^x$

$dy=xe^x dx$

$y=\int xe^x dx=xe^x-e^x+C_2$

$\because y|_{x=1}=1$

$\therefore y=xe^x-e^x+1$