南京邮电大学 2016/2017 学年第一学期

《线性代数与解析几何》期末试卷(A)答案

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

院(系)__________ 班级________ 学号________ 姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总 分
得分										

得 分

一.填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1．设 A,B 均为 n 阶矩阵，$|A|=2$，$|B|=-3$，则 $|2A^*B^{-1}|=$ $\underline{-\dfrac{2^{2n-1}}{3}}$

2. 设 $A=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$，其中列向量 A_1,A_2,A_4 线性无关，$A_3=2A_1-A_2+A_4$，则齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解是 $\underline{k(2,-1,-1,1)^T,k\in R}$

3. 设方阵 A 满足 $A^2+3A-2I=0$，其中 I 为单位矩阵，则 $(A+2I)^{-1}=$ $\underline{\dfrac{1}{4}(A+I)}$

4. 空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线方程是 $\underline{\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}}$

5.若三阶方阵 A 使得 $I+A,3I-A,A+3I$ 都不可逆，则 A 一定相似于矩阵 $\underline{\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 3 & \\ & & -3 \end{pmatrix}}$

二.选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 A,B 为 n 阶矩阵，则必有　　（ B ）

(A) $|A+B|=|A|+|B|$　　(B) $(A+B)^T=A^T+B^T$

(C) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$　　(D) $AB=BA$

2．设 A 是 n 阶方阵，满足 $A^2=I$，I 为 n 阶单位方阵，则　　（ C ）

(A) $\det A=1$　(B) A 的特征值是 1　(C) $R(A)=n$　(D) A 是对称矩阵

3．点 $P(2,-1,1)$ 到直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$ 的距离为　　　　　　　　　　　　　　(*B*)

(*A*) 2　　　　(*B*) 1　　　　(*C*) 3　　　　(*D*) $\frac{1}{3}$

4．n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性无关的充要条件是　　　　　　　　　　　　(*D*)

（*A*）存在一组数 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 使 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_k\alpha_k\neq 0$

（*B*）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 中任意两个向量线性无关

（*C*）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 中有一个向量不能由其余向量线性表示

（*D*）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 中任何一个向量都不能由其余向量线性表示

5. 若二次型 $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 正定，则 a 的取值范围是

(*D*)

（*A*）$(-1,1)$　　（*B*）$(-\infty,0)$　　（*C*）$(-\frac{4}{5},+\infty)$　　（*D*）$(-\frac{4}{5},0)$

得 分

三、(本题 10 分)设 $A^2-AB=I$，其中 I 为单位矩阵，$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$，求 B.　　(03.1)

解　由 $A^2-AB=I$ 得 $B=A-A^{-1}$ …………4 分

$$\because (A\mid I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&-2\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&-1\end{array}\right)$$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$…………4 分　　$\therefore B=A-A^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$…………2 分

得 分

四、(本题 10 分) 求向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,3)^T$，$\alpha_2=(0,2,5,8)^T$，$\alpha_3=(2,2,0,-1)^T$，$\alpha_4=(-1,7,-1,-2)^T$ 秩和它的一个极大线性无关组，并用极大线性无关组表示其余向量.

解 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 3 & 8 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 8 & -7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$…………4 分

$\therefore R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，…………2 分

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个极大线性无关组，…………2 分

且 $\alpha_4=-3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$…………2 分

得 分

五、(本题 10 分) 平面 π 上过直线 $L:\begin{cases} 4x-y+3z-6=0 \\ x+5y-z+10=0 \end{cases}$，且垂直于平面 $2x-y+5z=5$，求平面 π 的方程.

解 设平面 π 的方程为 $(4x-y+3z-6)+\lambda(x+5y-z+10)=0$，

即 $(4+\lambda)x+(5\lambda-1)y+(3-\lambda)z+(10\lambda-6)=0$…………4 分

由题意知 $\{4+\lambda,5\lambda-1,3-\lambda\}\cdot\{2,-1,5\}=0$，可得 $\lambda=3$…………4 分

从而所求平面 π 的方程为 $7x+14y+24=0$…………2 分

得 分

六、(本题 12 分) 已知方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+k\,x_3=2 \\ x_1+k\,x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+2x_3=k \end{cases}$，问 k 为何值时方程组有唯一解？无解？无穷多解？并在有无穷多解时写出通解.

解 $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & k-1 & 1-k & -1 \\ 0 & 0 & 2-k & k-2 \end{pmatrix}$…………3 分

(1) 当 $k\neq1$ 且 $k\neq2$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=3$，原方程组有唯一解. …………2 分

(2) 当$k=1$时，$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&0&0&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$r(A)\neq r(\bar{A})$，原方程组无解. ……2 分

(3) 当$k=2$时，$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&3\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

$r(A)=r(\bar{A})=2<3$，原方程组有无穷多解， …………2 分

通解为$x=k(-3,1,1)^T+(3,-1,0)^T$ ，k 为任意常数. …………3 分

得 分

七、(本题 12 分) 求一个正交变换$x=Qy$，将二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$化成标准形，并指出

$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示的曲面名称.

解 二次型所对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-2&1&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$， …………1 分

它的特征多项式$|\lambda I-A|=(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+2)$，特征值为 3，$1,-2$ …………2 分

对$\lambda_1=3$，由$(\lambda_1 I-A)x=0$得$\xi_1=(1,-1,0)^T$，

单位化得$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$…………2 分

对$\lambda_2=1$，由$(\lambda_2 I-A)x=0$得$\xi_2=(1,1,-2)^T$，$e_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T$……2 分

对$\lambda_2=-2$，由$(\lambda_3 I-A)x=0$得$\xi_3=(1,1,1)^T$，$e_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$………2 分

所求正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，……..…1 分

标准形为 $f = 3y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$ …………………………..1 分

所以方程 $f = 3y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$ 表示单叶双曲面面. ……1 分

得 分

八、（本题 6 分）设 B 为 $m \times n$ 实矩阵， A 为 m 阶实对称矩阵且正定矩阵，证明： $B^T AB$ 正定的充要条件是 $r(B) = n$.

证明：

必要性：设 $B^T AB$ 正定，则 $\forall x \neq 0,\ x^T(B^T AB)x = (Bx)^T A(Bx) > 0$

即对任意 n 维列向量 $x \neq 0$，有 $Bx \neq 0$，

因此方程组 $Bx = 0$ 只有零解，故 $r(B) = n$. ……………….3 分

充分性：$\because A^T = A, \therefore (B^T AB)^T = B^T A^T (B^T)^T = B^T AB$，即 $B^T AB$ 为实对称矩阵

若 $r(B) = n$，则齐次线性方程组 $Bx = 0$ 只有零解，对 $x \neq 0$，有 $Bx \neq 0$，

因为 A 为正定矩阵，所以 $(Bx)^T A(Bx) > 0$，即当 $x \neq 0$ 时 $x^T(B^T AB)x > 0$，

故 $B^T AB$ 正定. ……………….3 分