第 5 章　定积分及其应用

5.1　定积分的概念

5.2　定积分的性质

要求：理解定积分的概念、性质及几何意义。

1、填空题

(1) $\int_{-1}^{1}|x|dx =$ __1__ ；

(2) $\int_{0}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx =$ __$\frac{\pi R^2}{4}$__ 。

2、选择题

(1) 设 $I_1=\int_0^1 xdx,\ I_2=\int_0^1\sqrt{x}dx, I_3=\int_0^1\ln(1+x)dx,$ 则 （ C ）

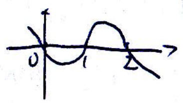
(A) $I_1>I_2>I_3$　　(B) $I_1>I_3>I_2$

(C) $I_2>I_1>I_3$　　(D) $I_3>I_2>I_1$

(2)由曲线 $y=x\,(x\text{-}1)\,(2\text{-}x)$ 与 x 轴围成平面图形的面积 S=(C)

(A) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx-\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

(B) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$



(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

3、比较积分 $\int_1^2 \ln xdx$ 和 $\int_1^2(\ln x)^2dx$ 的大小。

$\because$ 当 $1<x<2$ 时，$\ln x \geq (\ln x)^2$ 且 $\ln x \not\equiv (\ln x)^2$

$\therefore \int_1^2 \ln x\,dx > \int_1^2 (\ln x)^2 dx$

4、试将 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2})$ 化为定积分。

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

5、估计 $\int_2^0 e^{x^2-x}dx$ 的积分值。

先考虑 $\int_0^2 e^{x^2-x}dx$

求 e^{x^2-x} 在$[0,2]$上的最值，令 $f(x)=e^{x^2-x}$

$(e^{x^2-x})'=e^{x^2-x}\cdot(2x-1)$　$\therefore$ 得$[0,2]$内驻点 $x=\frac{1}{2}$，其值为 $e^{-\frac{1}{4}}$

而 $f(0)=1$，$f(2)=e^2$　$\therefore f(x)$在$[0,2]$上 $\max f(x)=f(2)=e^2$

$\min f(x)=f(\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{4}}$

$\therefore 2e^{-\frac{1}{4}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x}dx \leq 2e^2$

$\therefore -2e^2 \leq \int_2^0 e^{x^2-x}dx \leq -2e^{-\frac{1}{4}}$