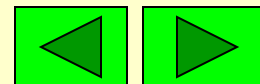


《线性代数与空间解析几何》

第四章 n 维向量

4.3 向量组的秩



复习线性相关性的判定理论

- 单个向量组成的向量组 α :

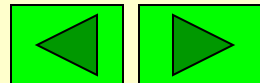
- (1) 若 $\alpha = 0$, 则线性相关;

- (2) 若 $\alpha \neq 0$, 则线性无关.

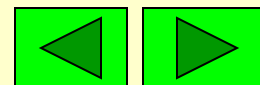
- 两个向量组成的向量组 α, β :

- (1) 若对应分量成比例, 则线性相关;

- (2) 若对应分量不成比例, 则线性无关.



- 设有 n 维向量组成的向量组: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$
(1) 包含 0 向量 \Rightarrow 线性相关. ($m \geq 2$)
(2) 包含成比例的向量 \Rightarrow 线性相关.
(3) 线性相关 \Leftrightarrow 存在一个向量可由其余的
向量线性表示.
(4) 线性无关 \Leftrightarrow 任何向量都不能由其余的
向量线性表示.
(5) 增加(减少)个数不改变相(无)关性.
(6) 增加(减少)维数不改变无(相)关性.



(7) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关性

$\Leftrightarrow x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_m \alpha_m = 0$ 有非零解

\Leftrightarrow 齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解

其中 $A=(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_m)$, $X=(x_1, x_2, \dots, x_m)^T$

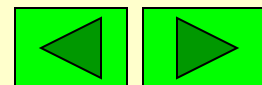
(8) 设有 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

◆ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n| = 0$;

◆ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow |\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n| \neq 0$.

(9) \mathbf{R}^n 中 $\forall n+1$ 个向量一定线性相关.

(10) 矩阵判别法.



4.3 向量组的秩

本节主要内容

1. 向量组的等价;
2. 极大线性无关组与秩;
3. 向量组的秩与矩阵的秩的关系.

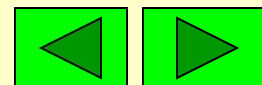
4.3.1 向量组的等价

定义2 设有两个 n 维向量组

(I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$; (II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$

- ◆ 若(I)中每个向量都可由(II)线性表示, 则称 向量组(I)可由向量组(II)线性表示.
- ◆ 若向量组(I)和(II)可以互相线性表示, 则称向量组(I)与(II)等价. 记作:

等价的性质 自反性、对称性、传递性



定理9 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出. 如果 $r > s$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关.
等价地, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 则 $r \leq s$.

证明 为便于书写, 不妨设向量均为列向量, 设

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r), B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s),$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出, 所以存在

$$K = (k_{ij})_{s \times r} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r), \text{ 使得 } A = BK.$$

考虑方程组 $Kx = 0$ 及方程组 $Ax = 0$.

如果 $r > s$, 则方程 $Kx = 0$ 中方程个数 $<$ 未知量个数, 所以方程 $Kx = 0$ 有非零解,

从而 $Ax = BKx = 0$ 有非零解,

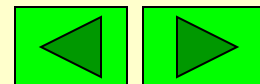
所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关.



定理4.3 设有 n 维向量组:

(I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$; (II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$

若(I)线性无关, 且(I)可由(II)线性表示, 则 $r \leq s$.



证 因为向量组(I)可由(II)线性表示, 故有

$$\begin{cases} \alpha_1 = k_{11}\beta_1 + k_{21}\beta_2 + \cdots + k_{s1}\beta_s \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_r = k_{1r}\beta_1 + k_{2r}\beta_2 + \cdots + k_{sr}\beta_s \end{cases}$$

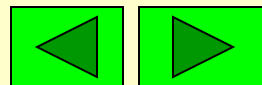
$$\underset{\text{(I)}}{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)} = \underset{\text{(II)}}{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr} \end{pmatrix}$$

$$r = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = r(BK) \leq r(K) \leq s$$

$\because \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 由矩阵判别法知

故

$$r \leq s.$$



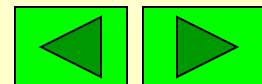
推论1 如果向量组(I)可由(II)线性表示,
且 $r > s$, 则(I) 线性相关.

推论2 若(I)、(II)都线性无关, 且(I)与(II)
等价, 则 $r = s$.

等价的无关向量组必然等秩

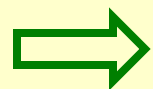
向量组的 \forall 两个极大无关组所含向量个数相等

推论3 若(I)可由(II)线性表示, 则
 $\text{秩(I)} \leq \text{秩(II)}$.

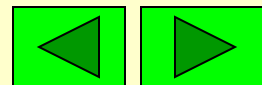


证 设 $r(\text{I})=r$, $r(\text{II})=s$, (I') , (II') 分别是 (I) , (II) 的极大无关组, 显然 (I') , (II') 含向量的个数分别是 r 与 s .

因为 (I') 可由 (I) 线性表示, (I) 可由 (II) 线性表示, 而 (II) 可由 (II') 线性表示, 所以 (I') 可由 (II') 线性表示. 由定理4.3有 $r \leq s$.



等价的向量组等秩



例2 设 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$.

若向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 证明
向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 也线性无关.

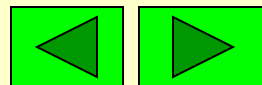
证1 由已知可以解得用 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 来表示

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 的表达式: } \alpha_1 = \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2 + \beta_3)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2 - \beta_3), \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}(-\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$$

故两向量组**等价**, **等秩**, $r(\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3) = 3$

$\Rightarrow r(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) = 3 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.



证2 $(\beta_1 \beta_2 \beta_3) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\because \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$\therefore (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = (\beta_1 \beta_2 \beta_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

故两向量组**等价**, **等秩**,

$$\therefore r(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = r(\beta_1 \beta_2 \beta_3) = 3.$$

则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

4.3.1 向量组的极大无关组与秩

定义1 设 S 是 n 维向量构成的向量组, 在 S 中选取 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 如果满足

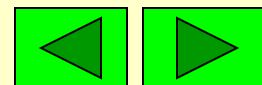
(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关

(2) 任取 $\alpha \in S$, 总有 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关.

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为向量组 S 的一个极大线性无关组 (简称极大无关组).

数 r 称为该向量组的秩, 记为

$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r$ 或秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r$



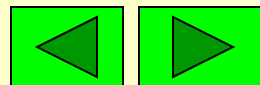
例1 设有向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$,
 $\beta_2 = (2, 1, 0)^T$, $\beta_3 = (3, 2, 1)^T$,
求向量组的秩和极大无关组.

解 因 β_1, β_2 线性无关, 且
$$\beta_3 = \beta_1 + \beta_2$$

所以 β_1, β_2 为极大无关组,

故 秩($\beta_1, \beta_2, \beta_3$) = 2.

可知 β_1, β_3 和 β_2, β_3 也都是极大无关组.



二、极大无关组的性质

结论1 向量组与其任一极大无关组等价; (定理5)

结论2 一向量组的任两个极大无关组等价;
(等价性质)

结论3 一向量组的任两个极大无关组所含向量个数相等, 其个数都等于向量组的秩.

结论4 向量组线性无关(相关)

\Leftrightarrow 其极大无关组就是它本身

\Leftrightarrow 向量组的秩 = 向量组所含向量个数.
($<$)





向量组极大无关组的几个问题：

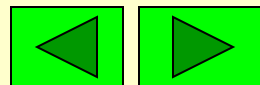
➤ 极大无关组与原向量组的关系？

➤ 极大无关组之间的关系？

这都要用到两个向量组之间的关系.

性质1 向量组与它的极大无关组等价.

证 设(I) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_m$ 的秩为 r ,
不妨设(II) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是(I)的一个
极大无关组.



(1) $\forall \alpha_i (i = 1, 2, \dots, r) \in (I)$, 由

$$\alpha_i = 0\alpha_1 + \dots + 1\alpha_i + \dots + 0\alpha_r + 0\alpha_{r+1} + \dots + 0\alpha_m$$

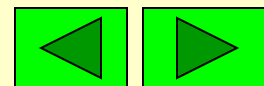
即(II)可由(I)线性表示.

(2) 由定义1知, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中任意 $r+1$ 个

向量都线性相关. $\forall \alpha_j \in (I)$ 如果 $j=1, \dots, r$, α_j 显然可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示; 如果 $j=r+1, \dots, m$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_j$ 一定线性相关, 所以 $\alpha_j (j=r+1, \dots, m)$ 可以由

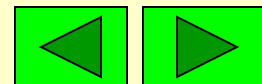
$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示 \Rightarrow (I)可由(II)线性表示.

故 (I)与(II) 等价.



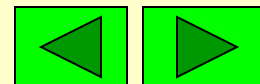
性质2 向量组的任意两个极大无关组**等价**.

证 设 (I), (II) 是向量组 **S** 的两个极大无关组, 由**性质1**知, (I) 与 **S** 等价, (II) 与 **S** 等价, 由传递性 (I) 与 (II) 等价.



性质3 一个向量组线性无关的充要条件是它的极大无关组就是其自身

性质4 向量组A中任一个向量都可由它的极大无关组线性表出



已知 $\alpha_1=(1,2,-1)$, $\alpha_2=(2,-3,1)$, $\alpha_3=(4,1,-1)$,
可以验证 α_1 和 α_2 , α_1 和 α_3 , α_2 和 α_3 都是原向量组
的极大线性无关组.

由例题可知:

(1) 最大无关组不唯一;

(2) 一个向量组只要有非零向量, 则一定存在
极大无关组

则同一个向量组的不同极大无关组中含
有向量的个数有什么关系? 相等!!!

传递性+无关性即可证明

两向量组秩的关系:

推论1 若向量组A可由组B线性表出, 则 $R(A) \leq R(B)$.

特别的, 若向量组A与组B等价, 则 $R(A) = R(B)$.

证明 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_1}$ 为向量组A的极大无关组, $r_1 = R(A)$;

设 $\beta_1, \dots, \beta_{r_2}$ 为向量组B的极大无关组, $r_2 = R(B)$.

\therefore 向量组A可由向量组B线性表出

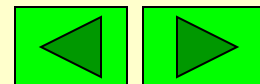
$\therefore \alpha_1, \dots, \alpha_{r_1}$ 可由 $\beta_1, \dots, \beta_{r_2}$ 线性表出

且 $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_1}$ 线性无关

\therefore 由定理9知 $r_1 \leq r_2$.



4.3.3 向量组的秩与矩阵的秩的关系



向量组的秩与矩阵的关系

——极大无关组的求解方法

矩阵 A 的**列秩**: A 的列向量组的秩;

矩阵 A 的**行秩**: A 的行向量组的秩;

矩阵 A 的**秩** $R(A)$: A 的最高阶非零子式的阶数 r .



定理7 矩阵的 行秩 = 列秩 = 矩阵的秩.

证 设 $R(A) = r$, 设某一 r 阶子式 $D_r \neq 0$.

$D_r \neq 0 \Rightarrow D_r$ 所在的 r 列构成的矩阵的秩为 r
(定理2)
 \Rightarrow 这 r 个列向量线性无关

$D_{r+1} = 0 \Rightarrow D_{r+1}$ 所在的 $r+1$ 列构成的矩阵的秩为 r
(定理2)
 \Rightarrow 任意 $r+1$ 个列向量线性相关

故 D_r 所在的 r 列是 A 的列向量组的一个极大无关组,
所以 A 的**列秩**等于 r .

定理7的证明—求向量组的秩和极大无关组的方法之一



定理8 矩阵的初等行变换不改变（部分或全部）列向量之间的线性关系.

矩阵的初等列变换不改变（部分或全部）行向量之间的线性关系.

由于 A^T 的列向量就是 A 的行向量，所以定理的两部分结论是等价的.

定理8' $A_{m \times n} \xrightarrow{\text{行初等变换}} B_{m \times n}$, 则 A 的任意 k 个 ($1 \leq k \leq n$) 列向量与 B 的对应 k 个列向量有相同的线性相关性.



定理8' $A_{m \times n} \xrightarrow{\text{行初等变换}} B_{m \times n}$, 则A的任意 k 个 ($1 \leq k \leq n$)
列向量与B的**对应** k 个列向量有**相同的线性相关性**.

证明: $A_k = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}) \xrightarrow{\text{行}} B_k = (\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_k})$,

则 $A_k x = 0$ 与 $B_k x = 0$ 同解, 其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$,

即: A_k 的列向量与 B_k 的列向量有相同的线性相关性.

定理8的证明—求向量组的秩和极大无关组的方法之二



定理8' $A_{m \times n} \xrightarrow{\text{行初等变换}} B_{m \times n}$, 则 A 的任意 k 个 ($1 \leq k \leq n$) 列向量与 B 的**对应** k 个列向量有**相同的线性相关性**.

$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B \Rightarrow A$ 的**行向量组**与 B 的**行向量组**等价

$A \xrightarrow{\text{初等列变换}} B \Rightarrow A$ 的**列向量组**与 B 的**列向量组**等价



例3 求向量组 $\alpha_1=(1,2,0,3)$, $\alpha_2=(2,-1,3,1)$, $\alpha_3=(4,-7,9,-3)$ 的秩和一个极大无关组, 并判断线性相关性.

解

$$A=(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

所以, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 < 3$,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

α_1, α_2 为一个极大无关组.



例4 求向量组 $\alpha_1=(1,2,0,3)$, $\alpha_2=(2,-1,3,1)$, $\alpha_3=(4,-7,9,-3)$

的一个最大无关组, 并将其余向量用最大无关组线性表出.

解 $A=(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T) \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

所以, α_1, α_2 是一个最大无关组,

$$\alpha_3 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2.$$



例5 求向量组 $\alpha_1=(2,4,2), \alpha_2=(1,1,0), \alpha_3=(2,3,1), \alpha_4=(3,5,2)$ 的秩和一个最大无关组, 并将其余向量用最大无关组线性表出.

解

$$A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

所以, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)=2$

最大无关组为: α_1, α_2 .

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $\alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2,$

$$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2.$$



两向量组秩的关系:

推论1 若向量组A可由组B线性表出, 则 $R(A) \leq R(B)$.

特别的, 若向量组A与组B等价, 则 $R(A) = R(B)$.

证明 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_1}$ 为向量组A的极大无关组, $r_1 = R(A)$;

设 $\beta_1, \dots, \beta_{r_2}$ 为向量组B的极大无关组, $r_2 = R(B)$.

\therefore 向量组A可由向量组B线性表出

$\therefore \alpha_1, \dots, \alpha_{r_1}$ 可由 $\beta_1, \dots, \beta_{r_2}$ 线性表出

且 $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_1}$ 线性无关

\therefore 由定理9知 $r_1 \leq r_2$.



例6 设 A, B 分别为 $m \times r, r \times n$ 矩阵, 证明:

$$R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}.$$

证 设 $C_{m \times n} = AB$,

$$(c_1, \dots, c_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

$$c_k = b_{1k}\alpha_1 + b_{2k}\alpha_2 + \cdots + b_{rk}\alpha_r, \quad (k = 1, \dots, n)$$

C (即 AB)的列向量组可由 A 的列向量组线性表出,
故由推论1知 $R(AB) \leq R(A)$.

$$\text{又, } R(C) = R(C^T) = R(B^T A^T) \leq R(B^T) = R(B).$$

所以 $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}.$



关于矩阵秩的结论

(1) $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$

(2) $R(AB) \geq R(A) + R(B) - k$, (思考题—难!)

其中 k 是 A 的列数或 B 的行数.

当 $AB = O$ 时, $R(A) + R(B) \leq k$.

(§ 5.4节 第165页习题6)

(3) $R(A + B) \leq R(A) + R(B)$ (第157页习题15)



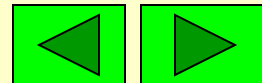
例3 设 $AB=0$.

- 若 A 的列向量组线性无关, 则 $B=0$.
- 若 B 的行向量组线性无关, 则 $A=0$.
- 若 $B \neq 0$, 则 A 的列向量组线性相关.
- 若 $A \neq 0$, 则 B 的行向量组线性相关.

分析 设 $B=(B_1, B_2, \dots, B_m)$, $AB=0 \Rightarrow AB_i=0$.

A 的列向量组线性无关 $\Rightarrow AX=0$ 只有零解
 $\Rightarrow B_i=0, i=1, \dots, m \Rightarrow B=0$.

其余情况可以类似得到.



◆ 极大无关组和秩的求法

初等变换法 n 维列向量组 $S: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

将 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \xrightarrow{\text{行}} (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = B$

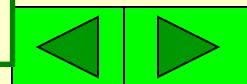
则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$

①秩等; ②极大无关组的位置对应相同;

③表示系数对应相同

$$\text{当 } \beta_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m k_j \beta_j \text{ 时, } \alpha_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m k_j \alpha_j$$

行初等变换不改变 A 的秩, 不改变
列向量组之间的线性关系.

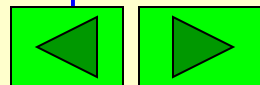


例4 求矩阵**A**列向量组的一个极大无关组和秩，并把其余列向量用所求出的极大无关组线性表示.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$$

解 通过初等**行**变换把**A**化为行最简形

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$



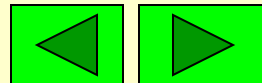
$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B}
 \end{aligned}$$

$$\therefore r(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) = 2$$

α_1, α_2 为一个极大无关组

$$\alpha_3 = \alpha_2 - 3\alpha_1$$

$$\alpha_4 = 2\alpha_2 - 4\alpha_1$$



例5 设有向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

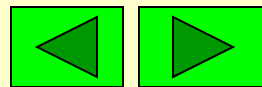
求向量组的 (1) 秩; (2) 极大无关组; (3) 表示系数.

解法1

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

由 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ 而 $|A| = 0$ 知秩 = 3,

$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是该向量组的一个极大无关组.



解法2

$$\text{设 } A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = B$$

(1) 秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$;

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是该向量组的一个极大无关组,
($\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 和 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 也是).

(3) $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_4$

