Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Chương 5

CHÉO HÓA MA TRẬN

Nội dung

Chương 5: CHÉO HÓA MA TRẬN

- Trị riêng, vector riêng
- Không gian con riêng
- Chéo hóa ma trận
- Một số ứng dụng của chéo hóa ma trận

Trị riêng, vector riêng

Định nghĩa

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$, ta nói hệ số $\lambda \in \mathbb{R}$ là một trị riêng của ma trận A nếu có một vector khác không $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$Ax^\top = \lambda x^\top$$

hay nói cách khác

$$(A - \lambda I_n)x^\top = 0$$

x được gọi là một vector riêng của A tương ứng với λ.

Ví dụ

$\lambda = 3$ là một giá trị riêng của ma trận $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ tương ứng với vector riêng $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Nhận xét

Nếu v *là vector riêng ứng với trị riêng* λ, *thì* $\alpha v (\alpha \neq 0)$ *cũng là vector riêng ứng với trị riêng* λ.

Định nghĩa

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$, đa thức đặc trưng của A được định nghĩa là

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n).$$

Mệnh đề

Trị riêng của ma trận A *là nghiệm của đa thức đặc trưng* $P_A(\lambda)$.

Ví dụ

Tìm các trị riêng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Không gian con riêng

Định nghĩa

Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$, và λ là một trị riêng của A. Các vector riêng của A tương ứng với trị riêng λ là các vector khác không x trong không gian nghiệm của hệ phương trình

$$(A - \lambda I_n)x^\top = 0$$

Không gian nghiệm này được gọi là không gian riêng $E(\lambda)$ của ma trận A tương ứng với trị riêng λ.

Ví dụ

Tìm cơ sở cho các không gian riêng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Hướng dẫn:

Đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = -(\lambda - 5)^2(\lambda - 1)$$

Trị riêng

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 5(\text{ bội } 2), \lambda_2 = 1(\text{ bội } 1)$$

Không gian riêng

- Với $\lambda_1 = 5$, không gian riêng $E(5)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - 5I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải ra ta được tập nghiệm

$$E(5) = \{(-t, t, s) | t, s \in \mathbb{R}\} = \{(-t, t, 0) + (0, 0, s) | t, s \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{t(-1, 1, 0) + s(0, 0, 1) | t, s \in \mathbb{R}\}$$

Suy ra $E(5)$ có số chiều là $\dim E(5) = 2$ với cơ sở $\mathcal{B}_1 = \{(-1, 1, 0); (0, 0, 1)\}$

- Với $\lambda_2 = 1$, không gian $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} X = 0$$

Giải ra ta được tập nghiệm

$$E(1) = \{(t, t, 0) | t \in \mathbb{R}\} = \{t(1, 1, 0) | t \in \mathbb{R}\}$$

Suy ra $E(1)$ có số chiều là $\dim E(1) = 1$ với cơ sở $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 0)\}$

Chéo hóa ma trận

Định nghĩa

Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là chéo hóa được nếu tồn tại một ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo.

Định lý

Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ chéo hóa được khi và chỉ khi A thỏa mãn hai điều kiện sau:

- $P_A(\lambda)$ *phân rã trên* $\mathbb{R}$, *nghĩa là* $P_A(\lambda)$ *có thể phân tích thành dạng*

$$P_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$$

  với $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ *và* $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$.
- $\forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $dimE(\lambda_i) = m_i$.

Hệ quả

Nếu ma trận A có n trị riêng khác nhau, thì A chéo hóa được.

Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ma trận A có chéo hóa được hay không?

Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ma trận A có chéo hóa được hay không?

Hướng dẫn:

Đa thức đặc trưng của A là

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= |A - \lambda I_3| \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 3 & 2-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 6 \\ &= (-1)(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 6) \end{aligned}$$

$P_A(\lambda)$ có 3 nghiệm phân biệt là $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 + \sqrt{7}, \lambda_3 = 1 - \sqrt{7}$.
Vậy A có 3 trị riêng phân biệt. Do đó A chéo hóa được.

Ví dụ

Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm trị riêng và vector riêng của A. Xác định cơ sở, số chiều của các không gian riêng tương ứng. Ma trận A có chéo hóa được hay không?

Ví dụ

Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm trị riêng và vector riêng của A. Xác định cơ sở, số chiều của các không gian riêng tương ứng. Ma trận A có chéo hóa được hay không?

Hướng dẫn:

Đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ -3 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-4)(\lambda^2+4)$$

Trị riêng

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

Do đó ma trận A chỉ có một trị riêng $\lambda = 4$. Không gian riêng $E(4)$ là không gian nghiệm của hệ $(A - 4I_3)X = 0$.

$$(A - 4I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có

$E(4) = \{(x_1, x_2, x_3) = (-t, -t, t) | t \in \mathbb{R}\} = \{t(-1, -1, 1) | t \in \mathbb{R}\}$.

$E(4)$ có cơ sở là $\mathcal{B} = \{(-1, -1, 1)\}$.

Vì ma trận A không phân rã được, nên A không chéo hóa được.

Thuật toán chéo hóa ma trận

Bước 1: Tìm đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

- Nếu $P_A(\lambda)$ không phân rã thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 2: Tìm tất cả các nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ của $P_A(\lambda)$ và các số bội $m_1, m_2, \ldots, m_p$ của chúng. Đối với mỗi $i \in \overline{1,p}$, tìm số chiều của không gian nghiệm $E(\lambda_i)$ của hệ phương trình $(A - \lambda_i I)X = 0$

- Nếu tồn tại một $i \in \overline{1,p}$ sao cho $\dim E(\lambda_i) < m_i$ thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, A chéo hóa được và chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 3: Với mỗi $i \in \overline{1,p}$ tìm một cơ sở $\mathcal{B}_i$ cho $E(\lambda_i)$, gọi P là ma trận có được bằng cách dựng các vector trong $\mathcal{B}_i$ thành các cột. Khi đó ma trận P làm chéo A và $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo.

$$diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \ldots, \lambda_p)$$

trong đó λ_i xuất hiện m_i lần với mọi i.

Ví dụ

Chéo hóa ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Ví dụ

Chéo hóa ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.

Trị riêng $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1($ bội $1), \lambda_2 = -2($ bội $2)$

Không gian riêng

- Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$.

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải ra ta được tập hợp nghiệm
$E(1) = \{(x_1, x_2, x_3) = (t, -t, t) | t \in \mathbb{R}\} = \{t(1, -1, 1) | t \in \mathbb{R}\}$.
Suy ra $E(1)$ có $\dim E(1) = 1$ với cơ sở $\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1, -1, 1)\}$.

- Với $\lambda_2 = -2$, không gian riêng $E(-2)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A + 2I_3)X = 0$.

$$(A + 2I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải ra ta được tập hợp nghiệm là
$E(-2) = \{(x_1, x_2, x_3) = (-t - s, t, s) | t, s \in \mathbb{R}\} = \{(-t, t, 0) + (-s, 0, s) | t, s \in \mathbb{R}\} = \{t(-1, 1, 0) + s(-1, 0, 1) | t, s \in \mathbb{R}\}$.
Suy ra $E(-2)$ có chiều $\dim E(-2) = 2$ với cơ sở
$\mathcal{B}_2 = \{u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = (-1, 0, 1)\}$.

Vì các không gian $E(\lambda_i)$ của A có số chiều bằng số bội của các trị riêng tương ứng nên A chéo hóa được. Lập ma trận P bằng cách lần lượt dựng các vector trong $\mathcal{B}_1$,$\mathcal{B}_2$ thành các cột

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Khi đó $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ví dụ

Chéo hóa ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

Bài toán:

Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$. Giả sử A chéo hóa được trên $\mathbb{R}$. Khi đó tồn tại một ma trận khả nghịch $P \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho

$$D = P^{-1}AP \qquad (*)$$

là một ma trận chéo. Giả sử

$$D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Do $(*)$ nên $A = PDP^{-1}$. Từ đây suy ra

$$A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1} = Pdiag(\lambda_1^k \ldots \lambda_n^k)P^{-1}.$$

Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tính A^n.

Đáp án: $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}$.

Ta minh họa ý tưởng thông qua một ví dụ sau đây:

Ví dụ

Giả sử các dãy số thực $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ thỏa các công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n; \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{với} \quad \begin{cases} u_0 = 2; \\ v_0 = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Tìm công thức tính số hạng tổng quát của u_n và v_n.

Hướng dẫn:

Đặt $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ và $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Công thức (1) được viết lại như sau:

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{với} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Từ đó tính được

$$X_n = A^n X_0.$$

Với A^n đã được tính ở ví dụ trước, ta có

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 2.3^n + 2^n - 3^n \\ -2^{n+2} + 4.3^n - 2^n + 2.3^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Vậy $\begin{cases} u_n = 5.2^n - 3^{n+1}; \\ v_n = -5.2^n + 6.3^n. \end{cases}$

Bài toán. Tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n; \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n; \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{cases} \qquad (1)$$

trong đó mọi $a_{ij} \in \mathbb{R}$ và mọi x_i đều là hàm khả vi theo biến t.

Giải hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Hướng dẫn. Đặt $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Khi đó hệ (1) được viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\frac{dX}{dt} = AX, \text{ với } A = (a_{ij}) \quad (2)$$

Giả sử A chéo hóa được, nghĩa là tồn tại ma trận đường chéo D và ma trận khả nghịch P sao cho

$$D = P^{-1}AP \quad (3)$$

Đặt

$$Y = P^{-1}X \quad (4)$$

Lấy vi phân theo t ta có

$$\frac{dY}{dt} = P^{-1}\frac{dX}{dt}. \quad (5)$$

Thay (2) vào (5) ta được

$$\frac{dY}{dt} = P^{-1}AX \quad (6)$$

Từ (3) ta có $P^{-1}A = DP^{-1}$. Thay vào (6) ta được

$$\frac{dY}{dt} = DP^{-1}X$$

Mặt khác $Y = P^{-1}X$. Suy ra

$$\frac{dY}{dt} = DY.$$

Vì D là ma trận đường chéo nên ta dễ dàng tìm ra Y. Sau đó dùng công thức $X = PY$ để tìm ra X.

Nếu A là một ma trận chéo hóa được, thì ta có thể giải hệ (1) qua các bước sau:

Bước 1. Chéo hóa ma trận A, nghĩa là tìm ma trận khả nghịch P sao cho $D = P^{-1}AP$ là ma trận chéo.

Bước 2. Giải hệ $\dfrac{dY}{dt} = DY$.

Bước 3. Tìm X bởi công thức $X = PY$.

Ví dụ

Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Bước 1:

Ma trận của hệ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Chéo hóa ma trận A, ta tìm được ma trận $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ làm chéo A và

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bước 2. Viết lại hệ $\frac{dY}{dt} = DY$ thành hệ

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = 3y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dy_1}{y_1} = 2dt \\ \frac{dy_2}{y_2} = 3dt \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int \dfrac{dy_1}{y_1} & = & \int 2dt \\ \int \dfrac{dy_2}{y_2} & = & \int 3dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ln(|y_1|) & = & 2t + \alpha_1 \\ ln(|y_2|) & = & 3t + \alpha_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 & = & e^{2t+\alpha_1} \\ y_2 & = & e^{3t+\alpha_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 & = & C_1 e^{2t} \\ y_2 & = & C_2 e^{3t} \end{cases}; \quad C_1, C_2 \text{ là các hằng số.}$$

Bước 3. Ta có $X = PY$, do đó

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 - y_2 \\ y_1 + 2y_2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} x_1 & = & -C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} \\ x_2 & = & C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{3t} \end{cases}$$

Ví dụ

Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} &= -x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} &= -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} &= 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 \end{cases}$$

Dãy Fibonacii

Dãy Fibonacii là dãy vô hạn các số

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$$

Mỗi số hạn trong dãy Fibonacii (kể từ số hạng thứ ba) bằng tổng của hai số hạng đứng ngay trước nó:

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, \quad k \geq 0, F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Làm thế nào để tính số hạng F_n mà không cần tính lần lượt từ các số $F_0 = 0, F_1 = 1$?

Hướng dẫn.

Đặt $u_k = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}$ và $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$u_{k+1} = Au_k.$$

Từ đó suy ra

$$u_k = A^k u_0, \quad \text{với } u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dãy Fibonacii

Vấn đề dẫn đến việc tính A^k. Ta sẽ dùng phương pháp chéo hóa ma trận để tính.
Đa thức đặc trưng $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ có các nghiệm khác nhau là

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Do đó A chéo hóa được và một dạng chéo của A là

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{với } P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Thay vào ta được

$$A^k = PD^kP^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1\end{pmatrix}.$$

Hơn nữa, ta có

$$\begin{pmatrix}F_{k+1} \\ F_k\end{pmatrix} = u_k = A^k u_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix}\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k\end{pmatrix}.$$

Thay các giá trị của λ_1 và λ_2 vào ta được

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right].$$