Vi tích phân 1B: Chương 1

Anh Ha Le

University of Sciences

Ngày 7 tháng 1 năm 2024

Outline

1. Hàm số và giới hạn
   - Tập hợp
   - Bốn phương pháp biểu diễn hàm số
   - Các hàm cơ bản
   - Xây dựng hàm mới từ các hàm đã biết
   - Bài toán tiếp tuyến và vận tốc
   - Giới hạn của hàm số
   - Các quy tắc giới hạn
   - Hàm Liên Tục

Tập hợp

Tập hợp

Nếu x là một phần tử của tập hợp A, kí hiệu là $x \in A$ và đọc là "x thuộc A". Nếu x không là một phần tử của tập hợp A, kí hiệu là $x \notin A$ và đọc là "x không thuộc A". Tập hợp A không chứa phần tử nào thì được gọi là tập rỗng , kí hiệu $A = \emptyset$.

Mô tả tập hợp

- Để mô tả một tập hợp, người ta thường sử dụng 2 cách sau:
  - Liệt kê: nếu tập hợp A gồm có 4 phần tử x, y, z và t thì

$$A = \{x, y, z, t\}$$

  - Tính chất: Chỉ ra những tính chất mà những phần tử đó và chỉ những phần tử đó mới có. Giả A là tập hợp có tính chất $\mathcal{P}$ thì $A = \{x|\mathcal{P}\}$. Ví dụ tập hợp C là tập hợp những sinh viên năm nhất là nam:

Các phép toán trên tập hợp

Mô tả tập hợp

- $$C = \{\text{Sinh viên năm nhất} | \text{ Sinh viên là nam}\}$$

Tập con

Nếu một phần tử của tập A là phần tử của B thì kí hiệu $A \subset B$ hay A là con của B.

Ví dụ: Tập $A = \{x, y, z\}$ và $B = \{x, y, x, t\}$ thì $A \subset B$.

Hợp hay Hội

Hợp hay hội hai tập hơp A và B là tập hợp tất cả những phần tử của A và tập hợp tất cả những phần tử của B, kí hiệu là $A \cup B$. Vậy
$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ hoặc $x \in B$.

Ví dụ: Cho $A = \{1, 2, 4\}$ và $B = \{4, 5, 7\}$ thì $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 7\}$.

Giao

Giao hai tập hợp A và B là tập hợp tất cả những phần tử thuộc A và B, kí hiệu là $A \cap B$. Vậy $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ và $x \in B$.

Ví dụ: Cho $A = \{1, 2, 4\}$ và $B = \{4, 5, 7\}$ thì $A \cap B = \{4\}$.

Hiệu

Hiệu của hai tập hợp A và B là tập hợp tất cả những phần tử thuộc A và không thuộc B, kí hiệu là $A \setminus B$. Vậy $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ và $x \notin B$.

Ví dụ: Cho $A = \{1, 2, 4\}$ và $B = \{4, 5, 7\}$ thì $A \setminus B = \{1, 2\}$.
Nếu $A \subset E$ thì phần bù của A trong E được kí hiệu $E \setminus A$.

Tích

Tích hai tập hợp A và B là tập hợp tất cả các cặp số (x, y) với $x \in A$ và $y \in B$ kí hiệu $A \times B$. Vậy $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A$ và $y \in B$.

Ví dụ: Cho $A = \{1, 2\}$ và $B = \{4, 5\}$ thì
$A \times B = \{(1, 4); (1, 5); (2, 4); (2, 4)\}$

Tập số Tự Nhiên, Số Nguyên

Tập số Tự Nhiên

Tập hợp các số tự nhiên:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdot\}$$

Tập hợp các số nguyên

Tập hợp các số nguyên:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

Tập các số nguyên dương, kí hiệu là $\mathbb{Z}^+$:

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}\mathbb{Z}^- = \{\cdots, -3, -2, -1\}$$

Số Hữu Tỉ, Số Thực

Tập số Hữu Tỉ

Tập hợp các số hữu tỉ:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \cdot\}$$

Ví dụ số hữu tỉ $\dfrac{3}{7} = 0,428571428571428571428571\cdots = 0.(428571)$ là số thập phân tuần hoàn.

Tập số Vô Tỉ

Số thập phân vô hạn không tuần hoàn được gọi số vô tỉ.

Ví dụ: Số $\sqrt{2} = 1.4142135623730950488\cdots$ là số thập phân không tuần hoàn.

Số Thực

Số thực kí hiệu là $\mathbb{R}$ là tập hợp số hữu tỉ và số vô tỉ.

Outline

Các hàm số xuất hiện khi một đại lượng này phụ thuộc vào một đại lượng khác. Ta xét 4 trường hợp sau:

A. Diện tích A của một hình tròn phụ thuộc vào bán kính r của hình tròn đó. Mối quan hệ giữa A và r thể hiện qua phương trình $A = \pi r^2$. Với mỗi số thực r ta có một giá trị tương ứng A, vậy chúng ta nói A là hàm số theo r

B. Dân số thế giới P phụ thuộc vào thời gian t. Bảng số liệu cung cấp các ước tính về dân số thế giới $P(t)$ tại thời điểm t trong một năm nhất định. Ví dụ:

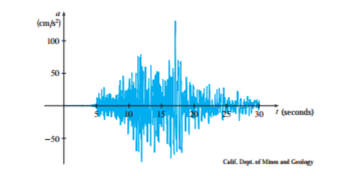
$$P(1950) = 2,560,000,000$$

Với mỗi giá trị thời gian t có một giá trị P tương ứng, ta nói P là làm số theo t.

Năm	Dân số (triệu)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080
2010	6870

C. Chi phí C để giởi một lá thư phụ thuộc vào trọng lượng w của nó. Mặc dù không có công thức đơn giản C phụ thuộc w, nhưng bưu điện vẫn có qui tắc tính chi phí C khi biết trọng lượng w.

D. Gia tốc dao động thẳng đứng a của mặt đất được ghi lại trong một trận đông đất là hàm số theo thời gian.



Hình: Gia tốc thẳng đứng của mặt đất trong trận động đất Northridge

Định nghĩa (Hàm số)

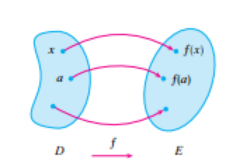
Hàm số f là một quy tắc tương ứng cho mỗi phần tử x thuộc một tập hợp D với một và chỉ một phần tử, kí hiệu là $f(x)$, thuộc một tập hợp E.

D được gọi là miền xác định, $f(x)$ là giá trị của f tại x. Miền giá trị là tập hợp những giá có thể của $f(x)$ khi x chạy trên miền xác định D. Để hiểu rõ hàm số, chúng ta có những cách sau:

- Như một cái máy

Hình: Biểu đồ minh họa hàm f như một cái máy

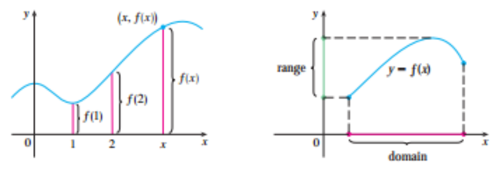
- Biểu đồ mũi tên



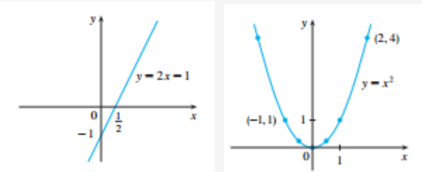
Hình: Biểu đồ mũi tên cho hàm số f

- Đồ thị của hàm số f là các cặp

$$\{(x, f(x)) | x \in D\}$$



Hình: Đồ thị hàm số f

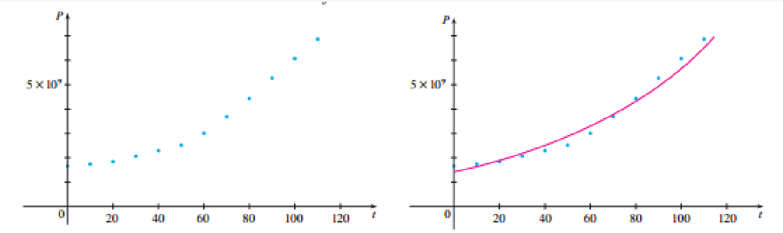


Hình: Đồ thị hàm số $f(x) = 2x - 1$ (trái) và hàm số $f(x) = x^2$ (phải)

Để biểu diễn hàm số, chúng ta có bốn cách:

- Bằng lời (mô tả bằng lời)
- Bằng số (bằng giá trị)
- Bằng thị giác (đồ thị)
- Bằng đại số (công thức)

Trong ví dụ số 2, dân số P tại thời điểm t được biễn diễn bằng số. Ngoài ra chúng ta có thể biểu diễn bằng đồ thị và bằng đại số:
$P(t) = (1.43653 \times 10^9) \cdot (1.013195)^t$ và biểu diễn bằng đồ thị.



Hình: Đồ thị biểu diễn dân số

Trong ví dụ số 3, chúng ta có thể biểu diễn hàm số bằng lời: Gọi $C(w)$ là chi phí gửi một bưu kiện với trọng lương w (C là hàm số theo w). Quy tắc mà dịch vụ bưu chính Mỹ măn 2010 như sau: Chi phí là 88 xu nếu khối lượng dưới 1 ao-xơ, cộng thêm 17 xu cho mỗi ao-xơ tăng thêm (hoặc ít hết), mức tối đa là 13 ao-xơ. Dựa vào mô tả trên, ta có bảng sau:

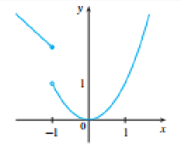
w (ao-xơ)	C(w) (đô la)
$0 < w \le 1$	0.88
$1 < w \le 2$	1.05
$2 < w \le 3$	1.22
$3 < w \le 4$	1.37
$\vdots$	$\vdots$
$12 < w \le 13$	2.92

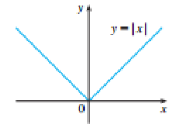
Ví dụ: Tìm miền xác định của các hàm số sau:

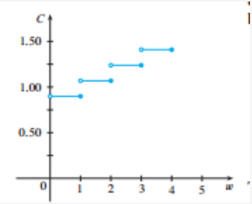
a) $f(x) = \sqrt{(x+2)}$, b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

Hàm số xác định từng phần: là hàm số được xác định bởi những công thức khác nhau trong từng phần khác nhau của miền xác định.
Ví dụ: Hàm số f được xác định bởi công thức:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x \text{ nếu } x \leq -1 \\ x^2 \text{ nếu } x > -1 \end{cases}$$







Ví dụ: Hàm số trị tuyệt đối: $f(x) = |x|$
Ví dụ: Hàm tính chi phí bưu kiện

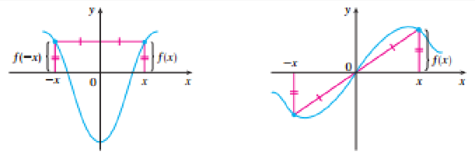
Hàm đối xứng:

- Nếu một hàm số thỏa mãn điều kiện $f(-x) = f(x)$ với mọi x trong miền xác định của nó thì gọi làm **hàm chẳn** như hàm $f(x) = x^2$

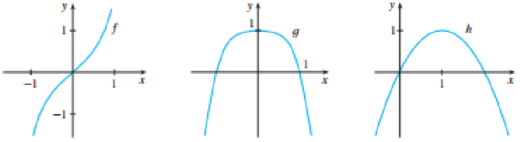
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

- Nếu một hàm số thỏa mãn điều kiện $f(-x) = -f(x)$ với mọi x trong miền xác định của nó thì gọi làm **hàm lẻ** như hàm $f(x) = x^3$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$



Ví dụ: xác định các hàm đây là hàm chẳn hay hàm lẻ:
a) $f(x) = x^5 + x$, b) $g(x) = 1 - x^4$ c) $h(x) = 2x - x^2$



(a) (b) (c)

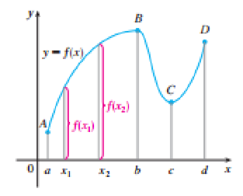
Hàm đồng biến và hàm nghịch biến:

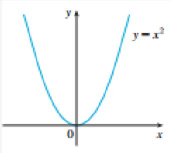
Hàm số f được gọi là **đồng biến** trên khoảng I nếu

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ nếu} x_1 < x_2 \text{ trên } I$$

Hàm số f được gọi là **nghịch biến** trên khoảng I nếu

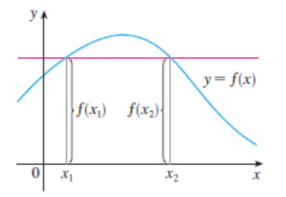
$$f(x_1) > f(x_2) \text{ nếu} x_1 < x_2 \text{ trên } I$$

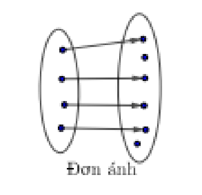


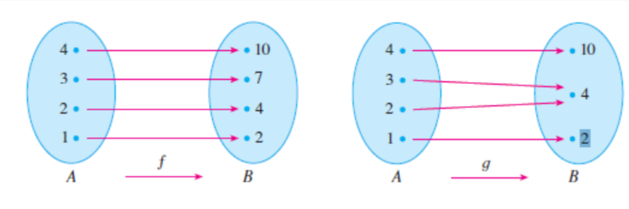


Định nghĩa (Đơn ánh)

Một hàm số $f : D \mapsto E$ *được gọi đơn ánh nếu hai phần tử bất kì* $x_1 \neq x_2$ $(x_1, x_2 \in D)$ *thì* $f(x_1) \neq f(x_2)$







Định nghĩa (Toàn ánh)

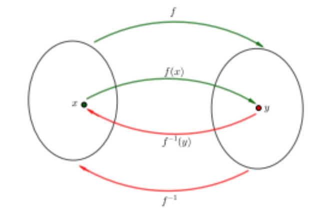
Một hàm số $f : D \mapsto E$ *được gọi toàn ánh nếu mỗi phần tử* $y \in E$ *đều toàn tại ít nhất một phần tử* x *sao cho* $y = f(x)$

Định nghĩa (Song ánh)

Một hàm số $f : D \mapsto E$ *được gọi là song ánh nếu thỏa đơn ánh và toàn ánh*

Định nghĩa (Hàm ngược)

Cho hàm số $f : D \mapsto E$ là song ánh, với mỗi $y \in E$ thì toàn tại duy nhất $x \in D$ sao cho $y = f(x)$, vì thế ta có thể xây dựng hàm số ngược từ $f^{-1} : E \mapsto D$ sao cho: $f^{-1}(y) = x$ và $f(x) = y$



Vì thế: $f(f^{-1}(y)) = y$ với $y \in E$, $\quad f^{-1}(f(x)) = x$ với $x \in D$

Outline

Hàm tuyến tính:

Hàm tuyến tính là hàm số biểu diễn phương trình đường thẳng:

$$y = f(x) = mx + b$$

với m là hệ số gốc và b là tung độ gốc.
Ví dụ: Bảng dưới đây liệt kê nồng độ trung bình carbon dioxide trong không khí (ppm) tại Mauna Loa Observatory từ năm 1980 đến 2008. Tìm biểu đồ biểu diễn nồng độ carbon dioxide

Year	CO_2 level (in ppm)	Year	CO_2 level (in ppm)
1980	338.7	1996	362.4
1982	341.2	1998	366.5
1984	344.4	2000	369.4
1986	347.2	2002	373.2
1988	351.5	2004	377.5
1990	354.2	2006	381.9
1992	356.3	2008	385.6
1994	358.6		

- Nếu dùng điểm đầu và điểm cuối thì hệ số gốc m được tính

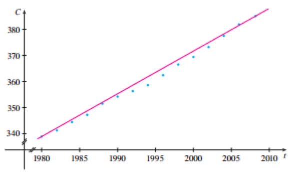
$$m = \frac{385.6 - 338.7}{2008 - 1980} = \frac{46.9}{28} = 1.675$$

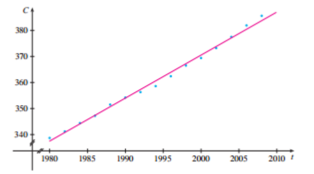
Và phương trình đường thẳng (hình trái)

$$C - 338.7 = 1.675(t - 1980), \text{ suy ra } C = 1.675t - 2977.8$$

- Nếu dùng bình phương tối thiểu, ta có được phương trình (hình phải)

$$C = 1.65429t - 2938.07$$





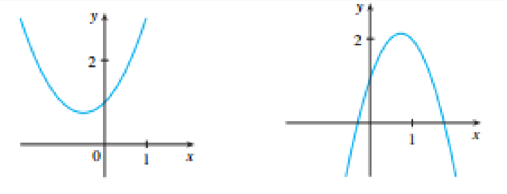
Hàm đa thức:

Hàm số P được gọi là hàm đa thức nếu

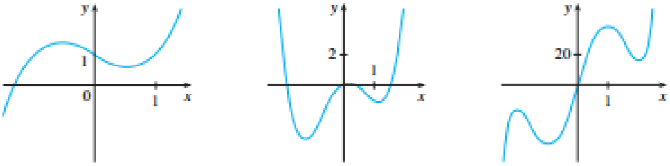
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

với n là số nguyên dương, $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ là hằng số, được gọi hệ số của đa thức. Nếu $a_n \neq 0$ thì n là bậc của của đa thức. ví dụ

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \frac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$



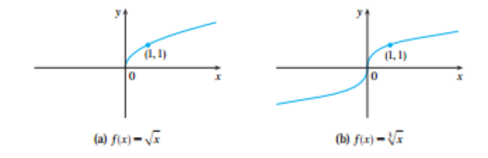
(a) $y = x^2 + x + 1$ (b) $y = -2x^2 + 3x + 1$



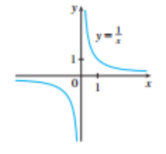
(a) $y = x^3 - x + 1$ (b) $y = x^4 - 3x^2 + x$ (c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

Hàm Lũy thừa

Hàm Lũy thừa: $f(x) = x^a$, trong đó a là hằng số.
- **a = n, với n là số nguyên dương**: giống đa thức.
- **a = 1/n, với n là số nguyên dương**: $f(x) = \sqrt[n]{x}$ là một hàm căn, ví dụ: $f(x) = \sqrt{x}$ là căn bậc 2 với miền xác định $[0, \infty)$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ là căn bậc 3 với miền xác định $\mathbb{R}$



- **a = -1**: $f(x) = x^{-1}$ là hàm nghịch đảo



Hàm phân thức

Hàm phân thức f là tỷ số giữa hai đa thức

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

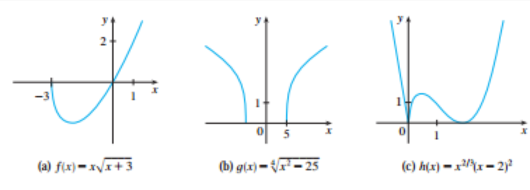
Ví dụ như

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

Hàm đại số

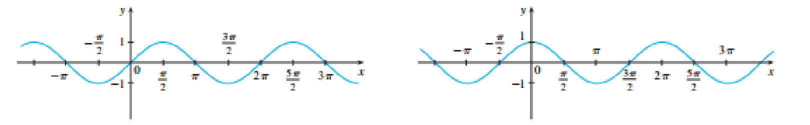
Hàm số f được xây dựng từ các đa thức với các phép tính đại số (cộng, trừ, nhân, chia, căn thức). Ví dụ:

$$f(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x-2)\sqrt[3]{x+1}$$

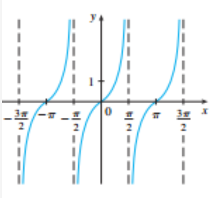


Hàm lượng giác

Ví dụ: $f(x) = \sin(x)$ hay $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

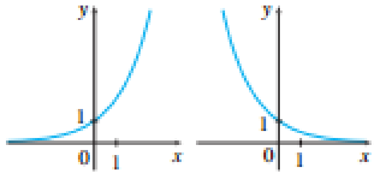


(a) $f(x) = \sin x$ (b) $g(x) = \cos x$



Hàm mũ

Hàm mũ là hàm được biểu diễn $f(x) = a^x$ với a là hằng số dương

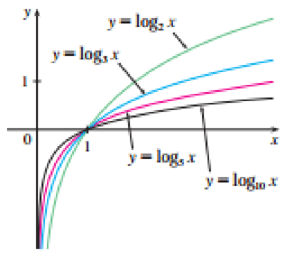


(a) $y = 2^x$ (b) $y = (0.5)^x$

Hàm logarit

Hàm logarit là hàm số được biểu diễn $f(x) = \log_a(x)$ với a là hằng số dương. Hàm logarit là hàm ngược của hàm mũ vì

$$\log_a(a^x) = x \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } a^{\log_a(y)} = y \ \forall y > 0$$



Ví dụ: Xác định nhưng hàm số sau thuộc loại nào:

a) $f(x) = 5^x$, b) $g(x) = x^5$

c) $h(x) = \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$, d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

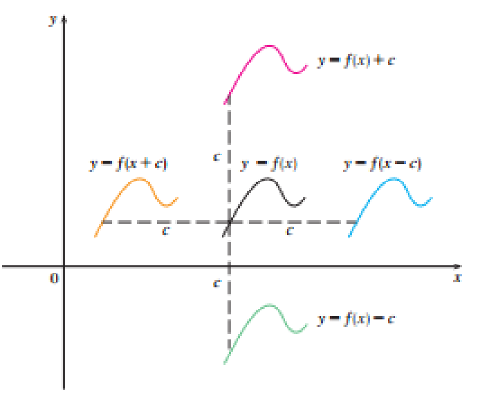
Outline

1. Hàm số và giới hạn
   - Tập hợp
   - Bốn phương pháp biểu diễn hàm số
   - Các hàm cơ bản
   - Xây dựng hàm mới từ các hàm đã biết
   - Bài toán tiếp tuyến và vận tốc
   - Giới hạn của hàm số
   - Các quy tắc giới hạn
   - Hàm Liên Tục

Các phép biến đổi

Phép tịnh tiến ngang và dọc. Giả sử $C > 0$, đồ thị của hàm số

- $y = f(x) + c$, tịnh tiến đồ thì $y = f(x)$ một khoảng là c lên phía trên
- $y = f(x) - c$, tịnh tiến đồ thì $y = f(x)$ một khoảng là c xuống phía dưới
- $y = f(x - c)$, tịnh tiến đồ thì $y = f(x)$ một khoảng là c qua bên phải
- $y = f(x + c)$, tịnh tiến đồ thì $y = f(x)$ một khoảng là c qua bên trái

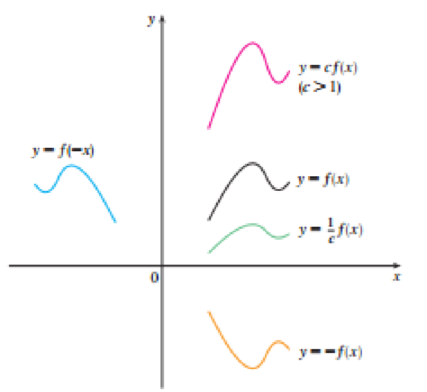


y
y = f(x) + c
y = f(x + c)
c
y = f(x)
y = f(x − c)
c
c
0
c
x
y = f(x) − c

Các phép biến đổi

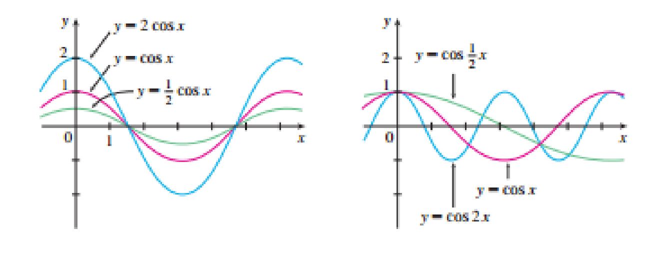
Co giãn và lấy phép đối xứng theo chiều ngang và dọc. Giả sử $C > 0$, đồ thị của hàm số

- $y = cf(x)$, giãn đồ thị $y = f(x)$ theo chiều dọc một hệ số c
- $y = \dfrac{1}{c}f(x)$, co đồ thị $y = f(x)$ theo chiều dọc một hệ số c
- $y = f(cx)$, co đồ thị $y = f(x)$ theo chiều ngang một hệ số c
- $y = f(x/c)$, giãn đồ thị $y = f(x)$ theo chiều ngang một hệ số c
- $y = -f(x)$, lấy đối xứng đồ thị $y = f(x)$ qua trục hoành
- $y = f(-x)$, lấy đối xứng đồ thị $y = f(x)$ qua trục tung

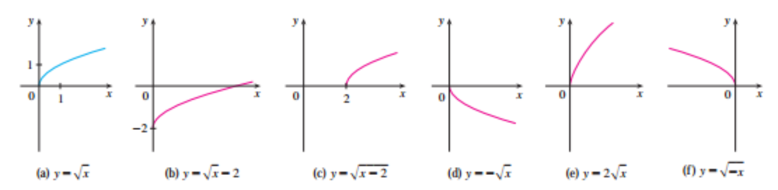


y
$y = cf(x)$
$(c > 1)$
$y = f(-x)$
$y = f(x)$
$y = \frac{1}{c}f(x)$
0
x
$y = -f(x)$

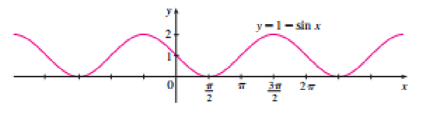
Ví dụ: Vẽ đồ thị của các hàm số sau: $y = 2\cos(x)$, $y = 1/2\cos(x)$, $y = \cos(1/2x)$, $y = \cos(2x)$



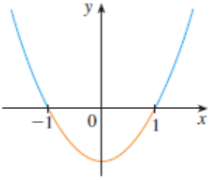
Ví dụ: Vẽ đồ thị của các hàm số sau: $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$



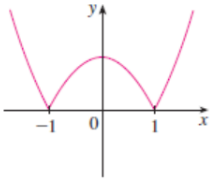
Ví dụ: Vẽ đồ thị của các hàm số sau: $y = \sin(2x)$, $y = 1 - \sin(x)$



Ví dụ: Vẽ đồ thị của các hàm số sau: $y = |x^2 - 1|$



(a) $y = x^2 - 1$



(b) $y = |x^2 - 1|$

Kết hợp các hàm số

Hai hàm số f và g kết hợp với nhau để tạo các hàm số mới $f+g$, $f-g$, fg và $\dfrac{f}{g}$ qua các phép cộng trừ nhân chia như số thực

- (f+g)(x) = f(x) + g(x)
- (f-g)(x) = f(x) - g(x)
- (fg)(x) = f(x)g(x)
- $(\dfrac{f}{g})$(x) = f(x)/g(x)

Hàm hợp

Định nghĩa (Hàm hợp)

Cho hai hàm số f và g, hàm hợp thành $f \circ g$ (hàm hợp của f và g) được xác định

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Miền xác định của hàm hợp $f \circ g$ là tập hợp tất cả những điểm x thuộc miền xác định của g sao cho $g(x)$ thuộc miền xác định của f.
Gọi D_1 và D_2 lần lược là miên xác định của g và f thì miền xác định của hàm hợp $f \circ g$ là:

$$D = \{x \in D_1 | g(x) \in D_2\}$$

Ví dụ: Cho $f(x) = x^2$ và $g(x) = x - 3$, tìm hàm hợp $(f \circ g)(x)$ và $(g \circ f)(x)$

Ví dụ: Với $f(x) = \sqrt{x}$ và $g(x) = \sqrt{2-x}$, tìm miền xác định của những hàm số sau:
a) $f \circ g$ b) $g \circ f$, c)$f \circ f$ d)$g \circ g$

Outline

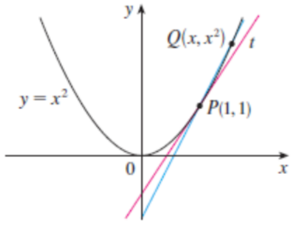
1. Hàm số và giới hạn
   - Tập hợp
   - Bốn phương pháp biểu diễn hàm số
   - Các hàm cơ bản
   - Xây dựng hàm mới từ các hàm đã biết
   - Bài toán tiếp tuyến và vận tốc
   - Giới hạn của hàm số
   - Các quy tắc giới hạn
   - Hàm Liên Tục

Bài toán tiếp tuyến

Xét đồ thị parabolic $y = x^2$, tìm tiếp tuyến của parabolic tại điểm $P(1,1)$, lấy điểm $Q(x, x^2) \neq P$ thì hệ số gốc của đường PQ:

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

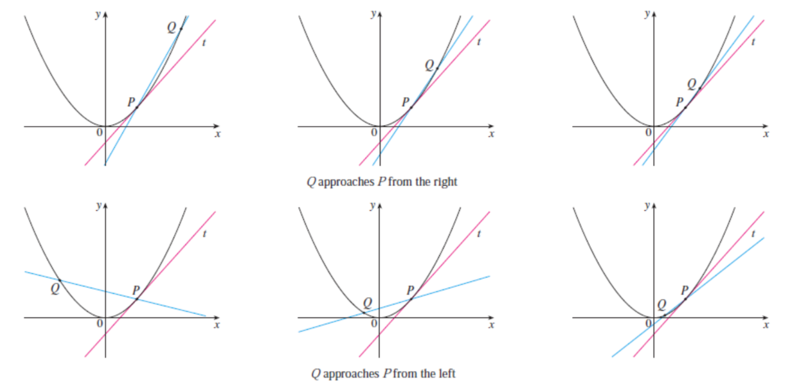
Với $Q(1.5, 2.5)$ thì $M_{PQ} = \dfrac{1.5^2 - 1}{1.5 - 1} = 2.5$



Để tìm tiếp tuyến tại điểm P là đường thẳng PQ khi Q trùng với P

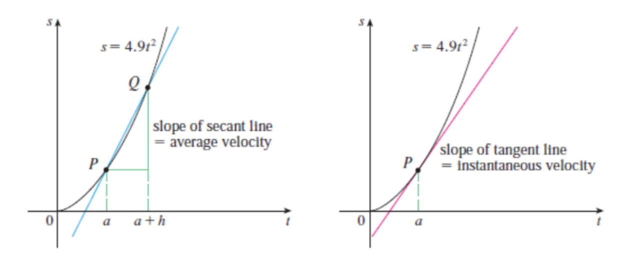
$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

Ta dễ dàng tìm được tiếp tuyến tại P $y - 1 = 2(x - 1)$ hay $y = 2x - 1$



Bài toán vận tốc

Một vật duy chuyển với quảng đường s được biểu diễn theo thời gian t: $s = 4.9t^2$



Vận tốc trung bình giữa P và Q: $m_{PQ} = \dfrac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{(a+h) - a}$. Vận tốc tức thời tại điểm P: $m_P = \lim\limits_{Q \to P} m_{PQ} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{h}$

Outline

Định nghĩa

Định nghĩa (Gió hạn hàm số)

Giải sử $f(x)$ xác định khi x gần a. Ta có thể viết

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ hay } f(x) \to L \text{ khi } x \to a$$

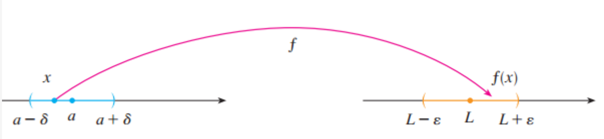
Ta nói "giới hạn $f(x)$ khi x tiến về x bằng L" nếu chúng ta có thể lấy các giá trị $f(x)$ gần L một cách tùy ý bằng cách lấy các giá trị của x đủ gần a nhưng không bằng a.

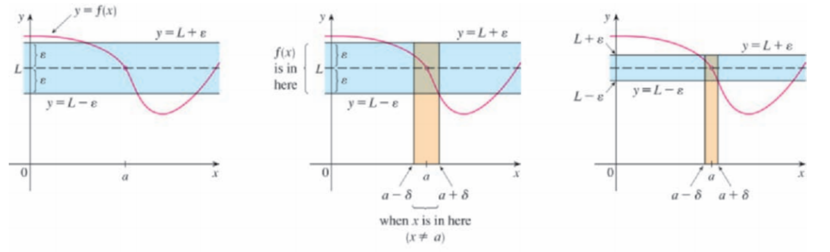
Chúng ta cũng có thể định nghĩa theo kiểu ε, δ. Ta viết

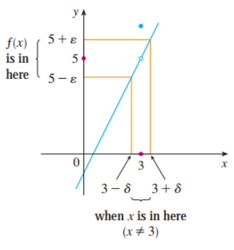
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

nếu với mội $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ với mọi } 0 < |x - a| < \delta$$


f
x
f(x)
a − δ
a
a + δ
L − ε
L
L + ε


y = f(x)
y = L + ε
y = L − ε
L
ε
0
a
x
f(x) is in here
a − δ
a + δ
when x is in here
(x ≠ a)
L + ε
L − ε


y
f(x) is in here
5 + ε
5
5 − ε
0
3
x
3 − δ
3 + δ
when x is in here
(x ≠ 3)

Ví dụ: Dự đoán giá trị của $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$

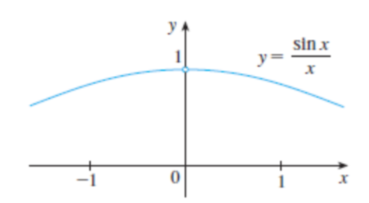
$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

Vì thế $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = 0.5$

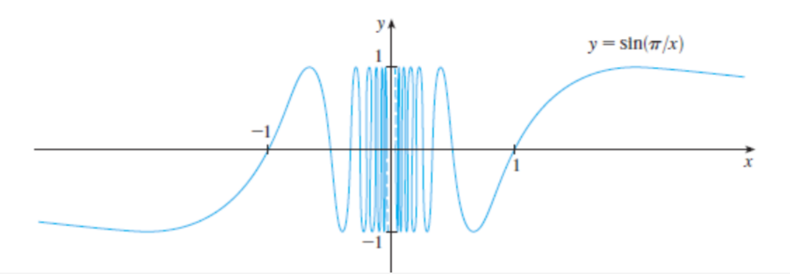
Ví dụ: Dự đoán giá trị của $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

x	$\dfrac{\sin x}{x}$
± 1.0	0.84147098
± 0.5	0.95885108
± 0.4	0.97354586
± 0.3	0.98506736
± 0.2	0.99334665
± 0.1	0.99833417
± 0.05	0.99958339
± 0.01	0.99998333
± 0.005	0.99999583
± 0.001	0.99999983



Vì thế $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

Ví dụ: Dự đoán giá trị của $\lim_{x\to 0}\sin(\frac{\pi}{x})$



Vì thế $\lim_{x\to 0}\sin(\frac{\pi}{x})$ không tồn tại

Giới hạn một bên

Định nghĩa (Giới hạn một bên)

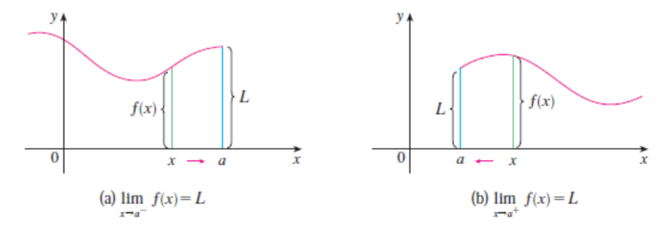
Chúng ta viết

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

và nói rằng giới hạn bên trái của $f(x)$ khi x tiến đến a (hay giới hạn của $f(x)$ khi x tiến tới a từ bên trái) bằng L nếu có thể cho $f(x)$ nhận các giái trị gần tùy ý L bằng cách cho x gần với a và bé hơn a

Chúng ta cũng có thể giới hạn bên phải a

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$



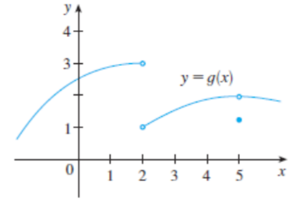
Ta nhận thấy rằng:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ và $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Ví dụ: Cho đồ thì hàm số bên dưới, tìm giới hạn:

(a) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

(d) $\lim\limits_{x\to 5^-} g(x)$ (e) $\lim\limits_{x\to 5^+} g(x)$ (f) $\lim\limits_{x\to 5} g(x)$



Giới hạn vô cùng

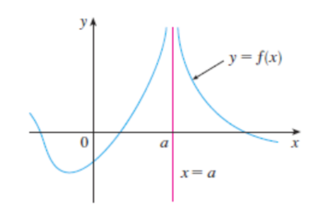
Định nghĩa (giới hạn dương vô cùng)

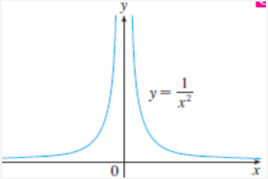
Cho hàm số f xác định hai bên của a, có thể loại trừ điểm a. Khi đó

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

có nghĩa là $f(x)$ có thể nhận các giá trị lớn tùy ý khi ta cho x đủ gần a nhưng không bằng a

Ta có thể viết $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ là $f(x) \to \infty$ khi $x \to a$





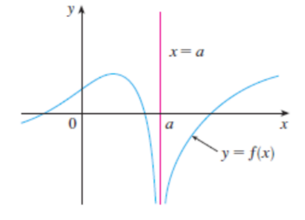
Định nghĩa (giới hạn âm vô cùng)

Cho hàm số f xác định hai bên của a, có thể loại trừ điểm a. Khi đó

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

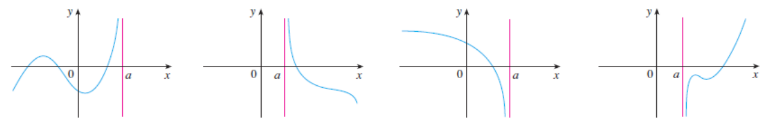
có nghĩa là $f(x)$ có thể nhận các giá trị nhỏ tùy ý khi ta cho x đủ gần a nhưng không bằng a

Ta có thể viết $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ là $f(x) \to -\infty$ khi $x \to a$



Giới hạn một bên cũng được định nghĩa tương tự

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$



(a) $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

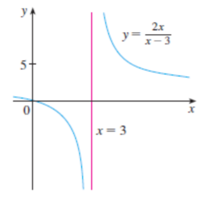
Định nghĩa (tiện cận đứng)

Đường thẳng $x = a$ được gọi là tiệm cận đứng của đường cong $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong những phát biểu sau đây đúng:

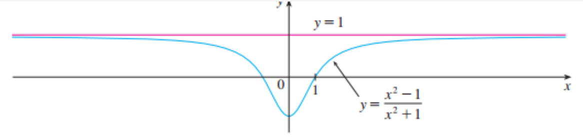
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

Ví dụ: Tìm $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3}$ và $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3}$



Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ =1



Định nghĩa

Cho hàm số f trên đoạn (a, ∞), thì

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

nghĩa là giá trị của $f(x)$ sẽ gần tùy ý L khi x đủ lớn

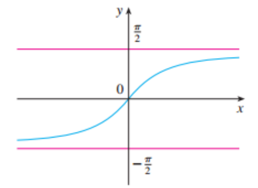
Kí hiệu khác cho $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ là $f(x) \to L$ khi $x \to \infty$

Định nghĩa

Đường thẳng $y = L$ *được gọi là tiệm cận ngang của đường cong* $y = f(x)$ *nếu*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \textit{ hay } \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Ví dụ: Tìm tiệm cận ngang của hàm $f(x) = \tan^{-1}(x)$



Outline

Các quy tắc giới hạn

Giải sự c là một hằng số và các giới hạn $\lim_{x \to a} f(x)$ và $\lim_{x \to a} g(x)$ tồn tại. Khi đó

- $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$
- $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} [\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ nếu $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n$
- $\lim\limits_{x\to a} c = c$
- $\lim\limits_{x\to a} x = a$
- $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$
- $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$
- $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ với n là số nguyên dương (nếu n chẵn thì phải giải sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq 0$)
- Nếu f là hàm đa thức hay phân thức và a thuộc miền xác định của f thì

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Ví dụ: Tính giới hạn của hàm số sau: $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

Ví dụ: Tính giới hạn của hàm số sau: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

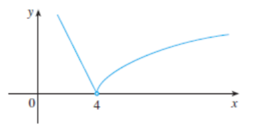
Ví dụ: Tính giới hạn của hàm số sau: $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$

Định Lý

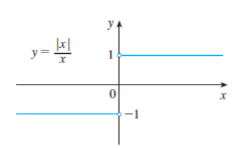
$\lim_{x\to a} f(x) = L$ *khi và chỉ khi* $\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$

Ví dụ: Tìm giới hạn $\lim_{x\to 4} f(x)$ với f được xác định:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} \text{ nếu } x > 4 \\ 8 - 2x \text{ nếu } x \leq 4 \end{cases}$$



Ví dụ: Tìm giới hạn $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$



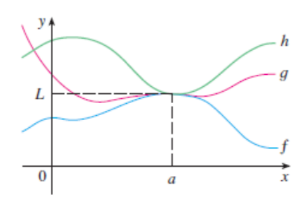
Định Lý

Nếu $f(x) \leq g(x)$ *với mọi* x *trong tập lân cận chứa* a *thì* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$

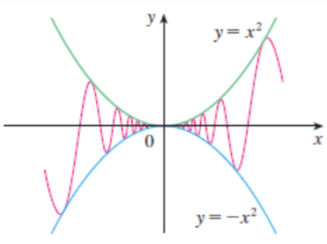
Định Lý (Định lý kẹp)

Nếu $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *với mọi* x *trong lân cận chứa* a *và* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ *thì*

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$



Ví dụ: Tìm giới hạn: $\lim_{x \to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x})$



Outline

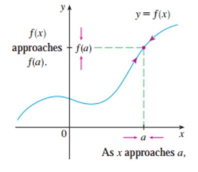
Định nghĩa (Hàm liên tục)

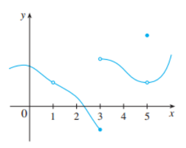
Một hàm số f được gọi là liên tục tại a nếu

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Từ định nghĩa trên, để hàm f liên tục thì cần 3 điều kiện

- $f(a)$ tồn tại
- $\lim_{x \to a} f(x)$ tồn tại
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$





Ví dụ: Tìm những điểm không liên tục của hàm số sau

$$(a) f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x-2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases} \qquad (b) f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 4 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$$

Định nghĩa (Hàm liên tục một bên)

Một hàm số f được gọi là liên tục phải tại a nếu

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

f được gọi là liên tục trái tại a nếu

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Định nghĩa (Hàm liên tục trên một khoảng)

Hàm số f gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm trên khoản đó

Ví dụ: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$

Định Lý

Hàm số f, g liên tục tại a và c là hằng số thì các hàm sau liên tục tại a

(a) $f + g$ (b) $f - g$ (c) cf

(d) fg (e) f/g nếu $g(a) \neq 0$

Định Lý

Hàm đa thức, phân thức, căn thức, lượng giác, hàm mũ, hàm logarit đều liên tục trên miền xác định của nó

Định Lý

Nếu f *liên tục tại* b *và* $\lim_{x \to a} g(x) = b$ *thì* $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$ *hay*

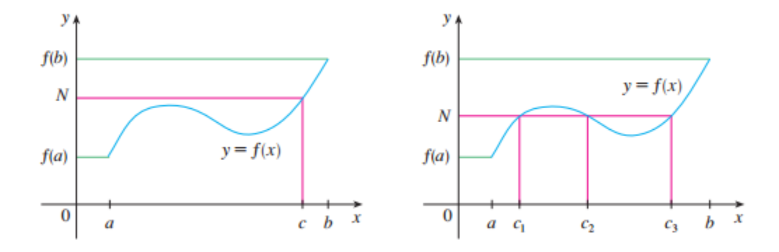
$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

Định Lý

Nếu g *liên tục tại* a *và* f *liên tục tại* $g(a)$ *thì hàm hợp* $f \circ g$ *(*$f \circ g(x) = f(g(x))$*) liên tục tại* a

Định Lý (Đín lý giá trị trung gian)

Cho hàm số f *liên tục trên* $[a, b]$ *và* N *là điểm nằm giữa* $f(a)$ *và* $f(b)$ *(*$f(a) \neq f(b)$*). Khi đó tồn tại* $c \in (a, b)$ *sao cho* $f(c) = N$



Ví dụ: Chứng minh phương trình sau:

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

có nghiệm nằm giữa 1 và 2