Vi tích phân 1: Chương 2

Anh Ha Le

University of Sciences

Ngày 11 tháng 5 năm 2025

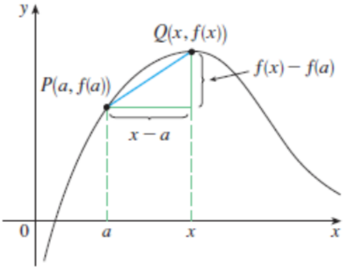
Outline

Bài toán tiếp tuyến

Xét đồ thị parabolic $y = x^2$, tìm tiếp tuyến của parabolic tại điểm $P(1,1)$, lấy điểm $Q(x, x^2) \neq P$ thì hệ số gốc của đường PQ:

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

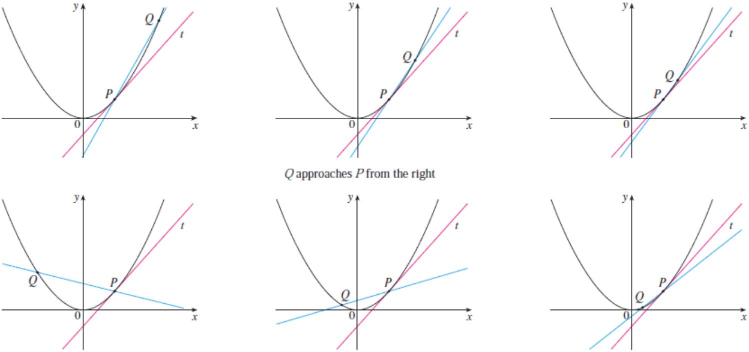
Với $Q(1.5, 2.5)$ thì $M_{PQ} = \dfrac{1.5^2 - 1}{1.5 - 1} = 2.5$



Để tìm tiếp tuyến tại điểm P là đường thẳng PQ khi Q trùng với P

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

Ta dễ dàng tìm được tiếp tuyến tại P $y - 1 = 2(x - 1)$ hay $y = 2x - 1$

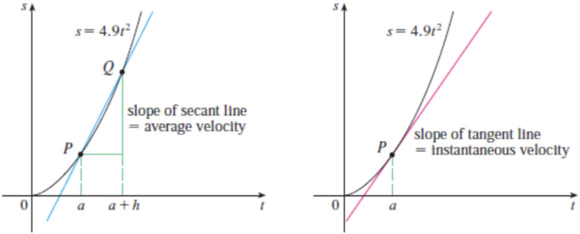


Q approaches P from the right

Q approaches P from the left

Bài toán vận tốc

Một vật duy chuyển với quảng đường s được biểu diễn theo thời gian t: $s = 4.9t^2$



Vận tốc trung bình giữa P và Q: $m_{PQ} = \dfrac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{(a+h)-a}$. Vận tốc tức thời tại điểm P: $m_P = \lim\limits_{Q \to P} m_{PQ} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{h}$

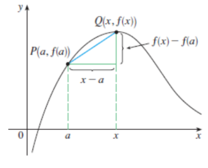
Outline

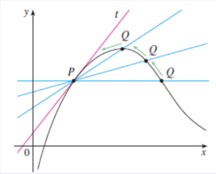
Tiếp tuyến

Định nghĩa (Tiếp tuyến)

Tiếp tuyến *của đường cong* $y = f(x)$ *tại điểm* $P(a, f(a))$ *là đường thẳng qua* P *với hệ số gốc*

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

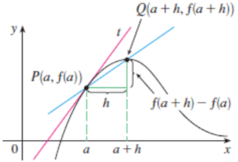




Ví dụ: Tìm tiếp tuyến tại của đường cong $f(x) = x^2$ tại điểm $(1, 1)$

Chúng ta có thể đặt $x = a + h$, khi $x \to a$ thì $h \to 0$ thì chúng ta có tính lại hệ số gốc của tiếp tuyến

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Ví dụ: Tính hệ số gốc của tiếp tuyến của đường cong $y = f(x) = x^{-2}$ tại điểm 1.

Đạo hàm

Định nghĩa (Đạo hàm)

Đạo hàm của hàm số f **tại giá trị** a, *kí hiệu bởi* $f'(a)$ *là*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

nếu giới hạn này tồn tại

Ví dụ: Tìm đạo hàm của hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ tại a.

Tiếp tuyến của $y = f(x)$ tại điểm $(a, f(a))$ là đường thẳng đi qua $(a, f(a))$ có hệ số gốc bằng với $f'(a)$

Vì thế tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm $(a, f(a))$ là

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Tốc độc biến thiên

Giải sử y là đại lượng phụ thuộc vào đại lượng x, khi đó y là hàm số theo x và ta viết $y = f(x)$. Nếu x là biến thiên từ x_1 và x_2 thì độ biến thiên của x:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

và độ biến thiên theo biến y:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

thì tỉ số

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

được gọi là **độ biến thiên trung bình của y tương ứng với x**.

Độ biến thiên tức thời tại y tương ứng với x tại $x = x_1$:

$$\text{Độ biến thiên tức thời} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ biến thiên tức thời của $y = f(x)$ tương ứng với x khi $x = a$

Tốc độ biến thiên

Ví dụ

Cạnh của một hình vuông đo được là 16 cm với sai số dao động trong khoảng 0,1 cm.

1. Sử dụng vi phân để ước lượng sai số tối đa khi tính diện tích của hình vuông.
2. Ước lượng sai số tương đối.

Ví dụ

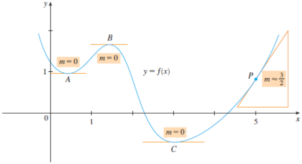
Chu vi vòng của một khối cầu đo được là 84 cm, với sai số dao động trong khoảng 0,5 cm.

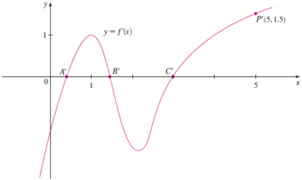
1. Sử dụng vi phân để ước lượng sai số tối đa khi tính diện tích mặt cầu. Qua đó tìm sai số tương đối. (Biết công thức chu vi là $p = 2\pi R$ và diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2$).
2. Hỏi như trên khi tính thể tích của khối cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Outline

Ta có thể thay thế $x = a$ khi tính đạo hàm tại a, vì thế đạo hàm tại x của hàm $f(x)$ là

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$





Ví dụ: Tìm công thức đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3 - x$
Ví dụ: Tìm công thức đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$

Ví dụ

Một quả bóng được ném lên cao và sau t (giây), độ cao của quả bóng cách mặt đất được cho bởi công thức $h(t) = 40t - 16t^2$.

1. Tính độ cao quả bóng lúc $t = 2$. Trong khoảng thời gian Δt (giây), tính từ thời điểm $t = 2$ đến thời điểm $t = 2 + \Delta t$, thì vận tốc trung bình v_{tb} của quả bóng là bao nhiêu?
2. Tính $\lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{tb}}$. Giá trị giới hạn mang ý nghĩa gì?

Ví dụ

Chuyển động của một chất điểm trên một đường thẳng được cho bởi phương trình $s = t^2 - 8t + 18$, trong đó s được đo theo mét, t được đo theo giây.

1. Tính vận tốc trung bình của chất điểm trong các khoảng thời gian dưới đây

   (i) $[3, 4]$ (ii) $[3.5, 4]$ (iii) $[4, 5]$ (iv) $[4, 4.5]$
2. Tính vận tốc tức thời của chất điểm khi $t = 4$

Outline

1. Đạo Hàm
   - Bài toán tiếp tuyến và vận tốc
   - Đạo hàm và tốc độ biến thiên
   - Đạo hàm như là hàm số
   - Các kí hiệu khác
   - Công thức đạo hàm
   - Đạo hàm của hàm lượng giác
   - Đạo hàm hàm hợp
   - Đạo hàm hàm mũ
   - Đạo hàm hàm ẩn
   - Đạo hàm hàm ngược
   - Xấp xĩ tuyến tính và đạo hàm
   - Khai Triển Taylor - Mac-Laurin

Khả vi của hàm số

Định nghĩa (Hàm khả vi)

Hàm f **khả vi** *tại* a *nếu* $f'(a)$ *tồn tại. Hàm số* **khả vi** *trên khoảng mở* (a, b) *(hay* (a, ∞), $(-\infty, a)$, $(-\infty, \infty)$*) nếu nó khả vi tại mọi điểm trong khoảng đó*

Ví dụ: Khảo sát tính khả vi của hàm số $f(x) = |x|$

Định Lý

Nếu hàm số f *khả vi tại* a *thì nó liên tục tại a.*

Đạo hàm cấp cao

Nếu hàm số f khả vi thì đạo hàm của nó là một hàm số, vì thế f' cũng có đạo hàm của nó kí hiệu là $(f')' = f''$. Vì vậy hàm f'' là đạo hàm cấp 2 của hàm số f, chúng ta cũng có thể kí hiệu là $f^{(2)}$. Vậy đạo cấp n của hàm số $f(x)$ được kí hiệu là $f^{(n)}$:

$$f^{(n)}(x) = (f^{n-1}(x))'$$

Ví dụ: Tính đạo hàm cấp 1, 2 và 3 của hàm số

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 1$$

Outline

Công thức đạo hàm

Đạo hàm của hàm hằng (c là hằng số)

$$(c)' = 0$$

Đạo hàm của hàm lũy thừa

$$(x)' = 1$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \text{ nếu n là số nguyên dương}$$

Quy tắc đạo hàm

Quy tắc nhân với hằng số: Nếu c là hằng số và f là hàm khả vi thì

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

Quy tắc tổng và trừ: Nếu f và g là các hàm khả vi thì

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Quy tắc nhân: Nếu f và g là các hàm khả vi thì

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = (1 + 2x^2)(x - x^2)$

Quy tắc chia: Nếu f và g là các hàm khả vi thì

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+x-2}$

Lũy thừa tổng quát

Nếu n là số nguyên dương thì

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số $f(t) = \dfrac{3}{t^3}$

Quy tắc lũy thừa: Nếu n là số thực tùy ý thì

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Ví dụ: Tính đạo hàm của x^π
Ví dụ: Tính đạo hàm của $\sqrt{x}$
Ví dụ: Tính đường thẳng tiếp tuyến của đường cong $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ tại diểm $(1, \dfrac{1}{2})$

Outline

Sử dụng một công thức $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, chúng ta có những công thức sau:

Đạo hàm của các hàm lượng giác :

$$(\sin(x))' = \cos(x) \qquad (\cos(x))' = -\sin(x)$$
$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad (\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

Ví dụ: Tính vi phân của hàm $f(x) = \dfrac{\sec(x)}{1+\tan(x)}$, $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$. Đô thị của f có tiếp tuyến nằm ngang tại những giá trị nào?

Ví dụ: Tìm $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{4x}$

Outline

Đạo hàm hàm hợp

Để tính đạo hàm của hàm số

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Hàm số F là hàm hợp $F = f \circ g$ với $g(x) = x^2 + 1$ và $f(x) = \sqrt{x}$

Quy tắc đạo hàm hợp: Nếu g khả vi tại x và f khả vi tại $g(x)$ thì hàm hợp $F = f \circ g$ được xác định bởi $F(x) = f(g(x))$ khả vi tại x và F' được tính bởi

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Ta có $f'(u) = (u^{1/2})' = \dfrac{1}{2}u^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ và $g'(x) = 2x$ thì

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ví dụ: Tính vi đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin^2(x)$

Quy tắc Lũy thừa đạo hàm hợp: Nếu n lad số thực và $u = g(x)$ thì

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$
$$(g(x)^n)' = n(g(x))^{n-1}g'(x)$$

Tìm $f'(x)$ nếu $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$, và $f(x) = (2x+1)^4(x^3-x+1)^4$

Outline

Đạo hàm hàm mũ

Định nghĩa số e:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

Đạo hàm của các hàm mũ va logrit:

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = (e^{\ln(a)x})' = \ln(a)e^{\ln(a)x} = \ln(a)a^x \text{ với } a>0$$

$$(\ln x)' = 1/x \text{ với } x>0$$

$$(\log_a x)' = (\frac{\ln(x)}{\ln a})' = \frac{1}{\ln ax} \text{ với } a>0, x>0$$

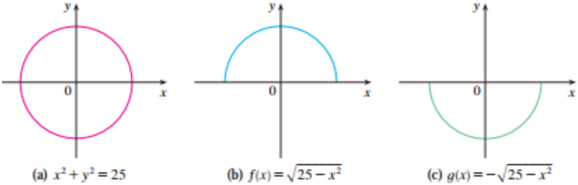
Ví dụ:

Tính $f'(x)$ với $f(x) = xe^x$ và $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ và $f(x) = \cos\left(\dfrac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)$

Outline

Đạo hàm hàm ẩn

Xét hàm số ẩn có dạng
$$x^2 + y^2 = 25$$
Ta có viết thành $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$, ta có hai hàm số để minh họa cho hàm số trên $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ và $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$.



Xét hàm số ẩn có dạng
$$x^3 + y^3 = 6xy$$
Ta khó viết hàm số trên dưới dạng tường minh.

Đạo hàm hàm ẩn

Ví dụ

a) Cho hàm ẩn $x^2 + y^2 = 25$. Tính $\dfrac{dy}{dx}$.

b) Tìm tiếp tiếp của đường tròn $x^2 + y^2 = 25$ tại điểm $(3, 4)$.

Giải: a) Lấy đạo hàm theo x của phương trình trên

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

y là hàm số theo x, nên

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{y^2}{dy}\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Vậy

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

b) Tại điểm $(3, 4)$, ta có $x = 3$ và $y = 4$, vì thế

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

Phương trình đường thẳng tiếp tuyến của đường tròn tại điểm $(3, 4)$ là

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \text{ hay } 3x + 4y = 25$$

Outline

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f^{-1}(x)$. Ta có $f(f^{-1}(x)) = x$ nên $f(y) = x$. Lấy đạo hàm 2 vế theo biến x ta được

$$\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 1$$

Nên

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$$

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm $y = \sin^{-1}(x)$ với $-\pi/2 \le y \le \pi/2$.
Ta có $y = \sin^{-1}(x)$ nên $\sin(y) = x$. Lấy đạo hàm 2 vế theo biên x, ta có

$$\cos(y)y' = 1 \text{ nên } y' = \frac{1}{\cos(y)}$$

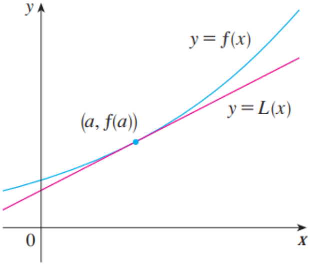
Vì $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ nên $\cos y \ge 0$ và $\cos y = \sqrt{1-\sin^2(y)} = \sqrt{1-x^2}$
Vậy

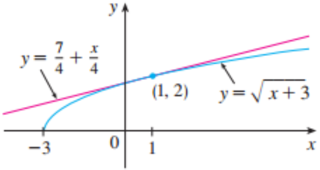
$$(\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Tính đạo hàm của hàm số sau:
(a) $y = \cos^{-1}(x)$, (b) $y = \tan^{-1}(x)$, (c) $y = \cot^{-1}(x)$
(d) $y = \ln(x)$, (e) $y = \log_a(x)$, (g) $y = x^{\sqrt{x}}$

Outline

Xấp xỉ tuyến tính





Với x gần a thì hàm số:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) = L(x)$$

gọi là xấp xỉ tuyến tính của f tại a

Ví dụ: Tìm hàm xấp xĩ của hàm số $f(x) = \sqrt{x+3}$ tại $a = 1$ và dùng để tính xấp xĩ $\sqrt{3.98}$ và $\sqrt{4.05}$ Đạo hàm của hàm $f(x) = \sqrt{x+3} = (x+3)^{1/2}$ là

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

Ta có $f(1) = 2$ và $f'(1) = 1/4$. Nên

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 2 + \frac{1}{4}(x-1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

Nghĩa là xấp xĩ tuyến tính tại 1

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4} \qquad \text{khi } x \text{ gần } 1$$

Vậy $\sqrt{3.98} \approx \frac{7}{4} + \frac{0.98}{4} = 1.995$ và $\sqrt{4.05} \approx \frac{7}{4} + \frac{1.05}{4} = 2.0125$

Outline

Đa thức Talor

Cho hàm số f là hàm số có đạo hàm đến cấp n tại điểm a. Khi đó đa thức Taylor bậc n xung quanh điểm a của f được định nghĩa

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
&= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n
\end{aligned}$$

Phần chênh lệch $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ gọi là phần dư của chuỗi Taylor của f

Đa thức Taylor

Ví dụ

Tìm xấp xỉ Taylor bậc 2 $T_2(x)$ tại 0 của hàm số $f(x) = \cos(x)$.

Giải: Ta có

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\sin(x); \quad f'(0) = 0 \\ f''(x) &= -\cos(x); \quad f''(0) = -1 \end{aligned}$$

Khai triển Taylor của hàm số $f(x) = \cos(x)$ tại điểm 0 là

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Đa thức Taylor

Ví Dụ

Tìm xấp xĩ Taylor bậc 2 $T_2(x)$ tại 1 của hàm số $f(x) = \sqrt{x+3}$ và tính giá trị xấp xĩ của $\sqrt{3.98}$ va $\sqrt{4.05}$.

Giải: Ta có

$$\begin{aligned}
f(1) &= 2 \\
f'(x) &= \frac{1}{2}(x+3)^{-1/2}; \quad f'(1) = \frac{1}{4} \\
f''(x) &= \frac{-1}{4}(x+3)^{-3/2}; \quad f''(1) = -\frac{1}{32}
\end{aligned}$$

Khai triển Taylor của hàm số $f(x) = \sqrt{x+3}$ tại điểm 1 là

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\
&= 2 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{(x-1)^2}{64}
\end{aligned}$$

Đa thức Taylor

Ta có $f(0.98) = \sqrt{3.98}$ nên

$$\begin{aligned} f(0.98) \approx T_2(0.98) &= 2 + \frac{1}{4}(0.98 - 1) - \frac{(0.98-1)^2}{64} \\ &= 2 - \frac{0.02}{4} - \frac{0.0004}{64} = 1.99499375 \end{aligned}$$

Ta có $f(1.05) = \sqrt{4.05}$ nên

$$\begin{aligned} f(1.05) \approx T_2(1.05) &= 2 + \frac{1}{4}(1.05 - 1) - \frac{(1.05-1)^2}{64} \\ &= 2 + \frac{0.05}{4} - \frac{0.0025}{64} = 2.0124609375 \end{aligned}$$

Ví Dụ: Tìm xấp xĩ Taylor bậc 8 $T_8(x)$ tại 0 của hàm số $f(x) = \sin(x)$.

Đa thức Taylor

Công thức Taylor với dư số Lagrange

Cho hàm số f có đạo hàm tới cấp $n+1$ liên tục trong khoảng $(a-R, a+R)$. Khi đó với mọi $x \in (a-R, a+R)$ luôn tồn ζ_x nằm giữa x và a sao cho

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \text{ với } R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\zeta_x)}{(n+1)|}(x-a)^{n+1}$$

Trong đó T_n là đa thức Taylor bậc n của f tại những điểm gần a:

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Đa thức Taylor

Bất đẳng thức Taylor

Cho hàm số f có đạo hàm tới cấp $n+1$ liên tục trong khoảng $(a-R, a+R)$. Nếu $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ với mọi $x \in (a-R, a+R)$ thì phần dư $R_n(x)$ của chuỗi Taylor thỏa bất đẳng thức:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \text{ với } x \in (a-R, a+R)$$

1. Xấp xỉ f bằng đa thức Taylor bậc n tại a.
2. Sử dụng dư số Lagrange để đánh giá độ chính xác của phép xấp xỉ $f(x) \approx T_n(x)$ khi x nằm trong đoạn cho trước.

Ví dụ

(a) Xấp xĩ hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$ bằng đa thức Taylor bậc 2 tại $a = 8$.
(b) Sử dụng dư số Lagrange để đánh giá độ chính xác của phép xấp xỉ $f(x) \approx T_n(x)$ khi $7 \leq x \leq 9$.

Giải: (a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x} = x^{1/3}, & f(8) &= 2, \\ f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-2/3}, & f'(8) &= \frac{1}{12}, \\ f''(x) &= -\frac{2}{9}x^{-5/3}, & f''(8) &= -\frac{1}{144} \end{aligned}$$

- Vì thế đa thức Taylor bậc 2:

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(2) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8) \\ &= 2 + \frac{(x-8)}{12} - \frac{(x-8)^2}{288} \end{aligned}$$

- Vậy xấp xĩ của $\sqrt[3]{x} \approx T_2(x) = 2 + \frac{(x-8)}{12} - \frac{(x-8)^2}{288}$

(b)

- Ta dùng định lý bất đẳng thức Taylor tại $a = 8$ và $n = 2$:

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x-8|^3$$

ở đây $|f'''(x)| \leq M$ với mọi $7 \leq x \leq 9$. Ta có

$$f'''(x) = \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{x^{8/3}} \leq \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{7^{8/3}} < 0.0021 \text{ với } 7 \leq x \leq 9$$

- Ta chon $M = 0.0021$ thì $|f'''(x)| \leq M$ với mọi $7 \leq x \leq 9$. Khi $7 \leq x \leq 9$ thì $|x-8| \leq 1$, vì thế

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x-8|^3 \leq \frac{0.0021}{6}.1| < 0.0004.$$

Vậy khi $7 \leq x \leq 9$ thì xấp xĩ bậc 2 có sai số là 0.0004.

Ví dụ

(a) Xấp xĩ hàm số $f(x) = x^{-2}$ bằng đa thức Taylor bậc $n = 2$ tại $a = 1$.
(b) Sử dụng dư số Lagrange để đánh giá độ chính xác của phép xấp xỉ $f(x) \approx T_n(x)$ khi $0.9 \leq x \leq 1.1$.

Ví dụ

(a) Xấp xĩ hàm số $f(x) = x^{2/3}$ bằng đa thức Taylor bậc $n = 3$ tại $a = 1$.
(b) Sử dụng dư số Lagrange để đánh giá độ chính xác của phép xấp xỉ $f(x) \approx T_n(x)$ khi $0.8 \leq x \leq 1.2$.

Ví dụ

Sử dụng dư số Lagrange để xác định số số hạng của chuỗi Taylor của $\cos(x)$ tại 90° để ước lượng $\cos 80^\circ$ chính xác đến 5 chữ số thập phân.

Ví dụ

Sử dụng dư số Lagrange để xác định số số hạng của chuỗi Taylor của e^x tại 0 dùng để xấp xỉ $e^{0.1}$ với biên độ chính xác 0.00001.

Ví dụ

1. Tìm đa thức Taylor $T_2(x)$ tại $x = 0$ của hàm số $f(x) = \sin(\pi x)$
2. Tìm d sao cho sai số $|R_2(x)| = |f(x) - T_2(x)| \leq 10^{-5}$ với mọi $|x| < d$.
3. Tìm n sao cho sai số $|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)| \leq 10^{-5}$ với mọi $|x| < 0.1$.