Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Chương 2: ĐỊNH THỨC
1. Định nghĩa và các tính chất
2. Định thức và ma trận khả nghịch
3. Quy tắc Cramer

Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Tp Hồ Chí Minh

Chương 2

ĐỊNH THỨC

1. Định nghĩa và các tính chất

1.1 Định nghĩa
1.2 Quy tắc Sarrus
1.3 Khai triển định thức theo dòng và cột
1.4 Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Định thức của A, được ký hiệu là det A hay $|A|$, là một số thực được xác định bằng quy nạp theo n như sau:

- Nếu $n = 1$, $A = (a)$, thì $|A| = a$.
- Nếu $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, thì $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Định nghĩa

- Nếu $n > 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, thì $|A| \xlongequal{\text{dòng } 1} a_{11}(-1)^{1+1}|A(1|1)| + a_{12}(-1)^{1+2}|A(1|2)| + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}|A(1|n)|$, trong đó $A(i|j)$ là ma trận có được từ A bằng cách xóa đi dòng i và cột j của A.

1.1 Định nghĩa

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Khi đó $|A| = 1.(-2) - (-3).4 = 10$

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{pmatrix}$

1.1 Định nghĩa

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Khi đó $|A| = 1.(-2) - (-3).4 = 10$

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{pmatrix}$ $|A| =$

$$1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} + 6(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 10 - 15 + 6 = 1$$

1.2 Quy tắc Sarrus

Trong trường hợp $n = 3$, thì ta có ma trận

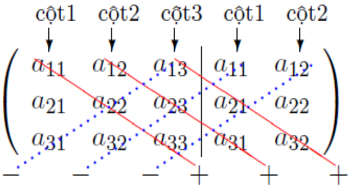
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Áp dụng định nghĩa trên ta có thể tính được định thức của A

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Từ đây ta đưa ra quy tắc Sarrus, đưa vào sơ đồ như sau



Theo đó định thức bằng tổng các tích số của từng bộ 3 số trên các đường liền nét trừ đi tổng các tích số của từng bộ 3 số trên các đường không liền nét. Hoặc

Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Chương 2: ĐỊNH THỨC
1. Định nghĩa và các tính chất
2. Định thức và ma trận khả nghịch
3. Quy tắc Cramer

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} \color{red}\bullet & \color{red}* & \color{red}\circ \\ \color{red}\circ & \color{red}\bullet & \color{red}* \\ \color{red}* & \color{red}\circ & \color{red}\bullet \end{array} - \begin{array}{ccc} \color{blue}* & \color{blue}\circ & \color{blue}\bullet \\ \color{blue}\circ & \color{blue}\bullet & \color{blue}* \\ \color{blue}\bullet & \color{blue}* & \color{blue}\circ \end{array}$$

Định thức của ma trận A được tính bằng tổng các tích số của từng bộ 3 số tương ứng với cùng một ký hiệu trong hình màu đỏ trừ đi tổng các tích số của từng bộ 3 số tương ứng với cùng một ký hiệu trong hình màu xanh.

Ví dụ

Tính định thức $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$

$1.2.5 + 2.1.3 + 3.4.1 - 3.2.3 - 1.1.1 - 2.4.5 = -31$

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là một ma trận vuông cấp n với hệ số trong K. Với mỗi i, j, ta gọi

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} detA(i|j)$$

là phần bù đại số của hệ số a_{ij}, trong đó $A(i|j)$ là ma trận vuông cấp $(n-1)$ có được từ A bằng cách xóa dòng i, cột j.

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó $c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4$; $c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$.

1.3 Khai triển định thức theo dòng và cột

Định lý

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. *Với mỗi* i, j *, gọi* c_{ij} *là phần bù đại số của hệ số* a_{ij}. *Ta có*

- *Công thức khai triển* $|A|$ *theo dòng i:* $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{ik}$.
- *Công thức khai triển* $|A|$ *theo cột j:* $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}c_{kj}$.

Chú ý

Trong việc tính định thức của ma trận ta nên chọn dòng hay cột có nhiều số 0 để tính.

Ví dụ

Tính định thức của ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Mệnh đề

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó:

i. $|A^T| = |A|$.

ii. *Nếu ma trận A có một dòng hay một cột bằng* 0 *thì* $|A| = 0$.

iii. *Nếu A là một ma trận tam giác thì* $|A|$ *bằng tích các phần tử trên đường chéo của A, nghĩa là*

$$|A| = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$$

Định lý

Nếu $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, *thì* $|AB| = |A||B|$

1.4 Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

Định lý

Cho $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó*

1. *Nếu* $A \xrightarrow[i \neq j]{d_i \leftrightarrow d_j} A'$, *thì* $|A'| = -|A|$;
2. *Nếu* $A \xrightarrow{d_i := \alpha d_i} A'$ *thì* $|A'| = \alpha |A|$;
3. *Nếu* $A \xrightarrow[i \neq j]{d_i := d_i + \beta d_j} A'$ *thì* $|A'| = |A|$.

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & -8 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{dòng } 2} 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -4 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột } 2} 2.3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{d_2:=d_2-d_1} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -11 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{dòng } 2} 6(-11)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -594.$$

2. Định thức và ma trận khả nghịch

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Đặt $C = (c_{ij})$ với $c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i|j)|$ là phần bù đại số của a_{ij}. Ta gọi ma trận chuyển vị C^T của C là ma trận phụ hợp của A, ký hiệu là $adj(A)$.

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Khi đó $C = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 11 \\ 10 & -7 & 1 \\ 7 & -2 & -8 \end{pmatrix}$.

Suy ra $adj(A) = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 7 \\ 10 & -7 & -2 \\ 11 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

Nhận diện ma trận khả nghịch

Định lý

Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi $|A| \neq 0$. Hơn nữa,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

Ví dụ

Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Chương 2: ĐỊNH THỨC
1. Định nghĩa và các tính chất
2. Định thức và ma trận khả nghịch
3. Quy tắc Cramer

$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$; $c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$
$|A| = 3c_{31} + 4c_{32} = 3.(-2) + 4.1 = -2 \neq 0.$
Vậy ma trận A khả nghịch.
Tương tự như trên ta có thể tính được $c_{11} = -4; c_{12} = 3; c_{13} = -1; c_{21} = 4; c_{22} = -3; c_{23} = -1; c_{33} = 1$. Từ đó ta có ma trận $C = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $adj(A) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Suy ra $A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A) = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Chương 2: ĐỊNH THỨC
1. Định nghĩa và các tính chất
2. Định thức và ma trận khả nghịch
3. Quy tắc Cramer

Hệ quả

Ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *khả nghịch khi và chỉ khi* $ad - bc \neq 0$.

Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Suy ra $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

3. Quy tắc Cramer

Định lý

Cho hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ $(*)$ *gồm n ẩn và n phương trình. Đặt* $\Delta = detA; \Delta_i = detA_i, i \in \overline{1,n}$ *trong đó* A_i *là ma trận có được từ A bằng cách thay cột i bằng cột B. Khi đó*

i. *Nếu* $\Delta \neq 0$ *thì hệ* $(*)$ *có một nghiệm duy nhất là:*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i \in \overline{1,n}$$

ii. *Nếu* $\Delta = 0$ *và* $\Delta_i \neq 0$ *với một i nào đó thì hệ* $(*)$ *vô nghiệm.*

iii. *Nếu* $\Delta = 0$ *và* $\Delta_i = 0, \forall i \in \overline{1,n}$ *thì hệ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.*

Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Chương 2: ĐỊNH THỨC
1. Định nghĩa và các tính chất
2. Định thức và ma trận khả nghịch
3. Quy tắc Cramer

Giải hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & -3; \\ 2x & - & y & + & z & = & 1; \\ x & + & y & + & z & = & 4. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Chương 2: ĐỊNH THỨC
1. Định nghĩa và các tính chất
2. Định thức và ma trận khả nghịch
3. Quy tắc Cramer

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ 2x - y + z = 1; \\ x + y + z = 4. \end{cases} \quad (1)$$ Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Chương 2: ĐỊNH THỨC

1. Định nghĩa và các tính chất

2. Định thức và ma trận khả nghịch

3. Quy tắc Cramer

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -14;$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -7;$$

Vì $\Delta \neq 0$, nên hệ có nghiệm duy nhất $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1$; $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2$; $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1$.

Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Chương 2: ĐỊNH THỨC
1. Định nghĩa và các tính chất
2. Định thức và ma trận khả nghịch
3. Quy tắc Cramer

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases}$

Bài giảng môn học Đại số tuyến tính
Nguyễn Anh Thi
Chương 2: ĐỊNH THỨC
1. Định nghĩa và các tính chất
2. Định thức và ma trận khả nghịch
3. Quy tắc Cramer

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases}$ Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -45.$$

Vậy hệ vô nghiệm.

Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Chương 2: ĐỊNH THỨC

1. Định nghĩa và các tính chất

2. Định thức và ma trận khả nghịch

3. Quy tắc Cramer

Giải hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 4; \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & 3; \\ 5x & + & 7y & + & 4z & = & 10. \end{array}\right.$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 10. \end{cases}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0; \ \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 10 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

Vì $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ nên không kết luận được nghiệm của hệ. Do đó ta phải dùng Gauss hoặc Gauss-Jordan để giải.

Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0; \\ -2x_1 & + & (m-2)x_2 & + & (m-5)x_3 & = & 2; \\ mx_1 & + & x_2 & + & (m+1)x_3 & = & -2. \end{array}\right.$$

Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ -2x_1 + (m-2)x_2 + (m-5)x_3 = 2; \\ mx_1 + x_2 + (m+1)x_3 = -2. \end{cases}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3);$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & m-5 \\ -2 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -4m + 12;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & m-5 \\ m & -2 & m+1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m-2 & 2 \\ m & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2m - 6;$$

Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Chương 2: ĐỊNH THỨC

1. Định nghĩa và các tính chất

2. Định thức và ma trận khả nghịch

3. Quy tắc Cramer

- $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{-4}{m-1}, 0, \frac{2}{m-1})$
- $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right.$
  - m=1, $\Delta_1 = 8 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.
  - $m = 3$, $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Khi đó hệ phương trình là $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right)$ giải lại bằng pp Gauss

    Nghiệm của hệ là $(x_1, x_2, x_3) = (3t - 2, t, 1 - \frac{5}{2}t)$ với t tự do.

Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Chương 2: ĐỊNH THỨC
1. Định nghĩa và các tính chất
2. Định thức và ma trận khả nghịch
3. Quy tắc Cramer

Ví dụ

Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (m-7)x & + & 12y & - & 6z & = & m; \\ -10x & + & (m+19)y & - & 10z & = & 2m; \\ -12x & + & 24y & + & (m-13)z & = & 0. \end{cases}$$

Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Chương 2: ĐỊNH THỨC
1. Định nghĩa và các tính chất
2. Định thức và ma trận khả nghịch
3. Quy tắc Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & -6 \\ -10 & m+9 & -10 \\ -12 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m & 12 & -6 \\ 2m & m+9 & -10 \\ 0 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = m(m-1)(m-17)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m-7 & m & -6 \\ -10 & 2m & -10 \\ -12 & 0 & m-13 \end{vmatrix} = 2m(m-1)(m-14)$$

Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Chương 2: ĐỊNH THỨC

1. Định nghĩa và các tính chất

2. Định thức và ma trận khả nghịch

3. Quy tắc Cramer

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & m \\ -10 & m+9 & 2m \\ -12 & 24 & 0 \end{vmatrix} = 36m(m-1)$$

Biện luận

- Nếu $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1, -1$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là
$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{m(m^2-18m+17)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{m(m-17)}{m^2-1}; \\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{m(m^2-15m+14)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{m(m-14)}{m^2-1}; \\ z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-36m(m-1)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{-36m}{m^2-1}. \end{cases}$$

- Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{r} m = -1 \\ m = 1 \end{array}\right.$
  - $m = -1$, $\Delta_1 = -36 \neq 0$, hệ vô nghiệm.
  - $m = 1$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Ta có hệ
    $$\begin{cases} -6x + 12y - 6z = 1; \\ -10x + 20y - 10z = 2; \\ -12x + 24y - 12z = 0. \end{cases}$$
    Hệ vô nghiệm.