Vi tích phân 1: Chương 4

Anh Ha Le

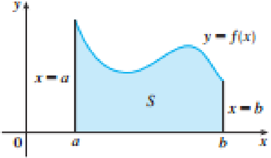
University of Sciences

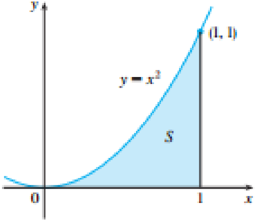
Ngày 23 tháng 12 năm 2024

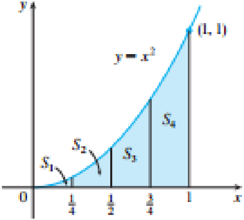
Outline

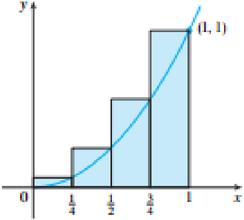
Bài toán diện tích

Tìm diên tích giới hạn bởi đường cong $y = f(x)(f(x) \geq 0)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x = a$, $x = b$

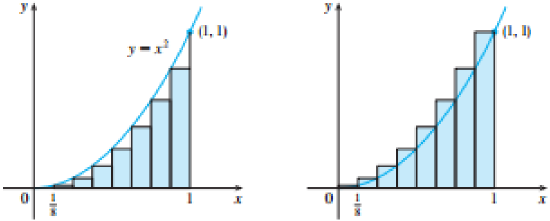








Bài toán diện tích



Bài toán diện tích

Ví dụ: Tính diện tích các hình chữ nhật xấp xỉ bằng 1/3

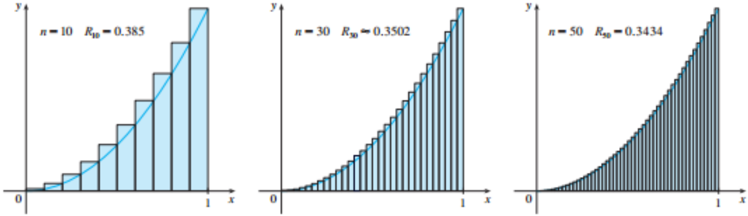
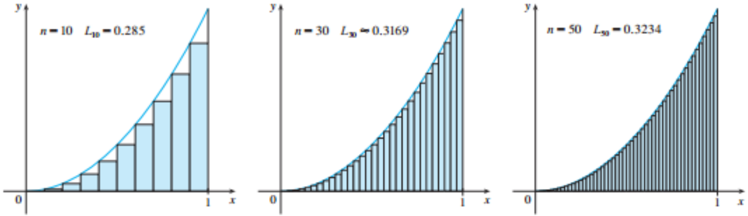
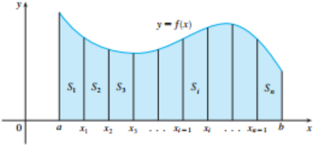
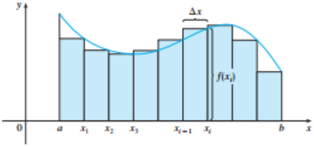


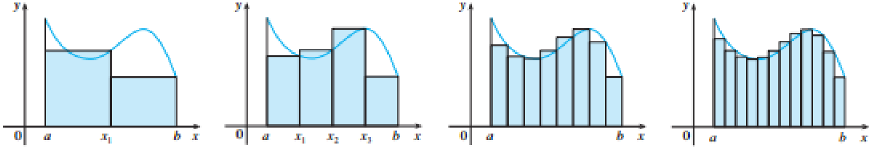
FIGURE 8 Right endpoints produce upper sums because $f(x) = x^2$ is increasing



Bài toán diện tích







(a) $n = 2$ (b) $n = 4$ (c) $n = 8$ (d) $n = 12$

Bài toán diện tích

Chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn bằng nhau, vì thế mỗi đoạn có độ dài:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Mỗi đoạn chia khoảng $[a, b]$ thành những khoảng con

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

với $x_0 = a$, $x_n = b$ và

$$\begin{aligned} x_1 &= a + \Delta x; \\ x_2 &= a + 2\Delta x; \\ &\vdots \\ x_i &= a + i\Delta x; \end{aligned}$$

Diện tích của những hình chữ nhật được tính:

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdot + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Bài toán diện tích

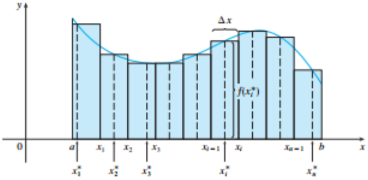
Định nghĩa (Diện tích)

Diện tích *A của miền S nằm dưới đồ thì của hàm số liên tục f là giới hạn của tổng diện tích các hình chữ nhật xấp xĩ:*

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Thay vì sử dụng các điểm đầu mút phải hay trái, chúng ta có thể lấy chiều cao của hình chữ nhật thứ i là giá trị của f tại $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ và

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$



Diện tích

Vậy diện tích A của S được xấp xĩ bằng những công thức sau:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Ví dụ: Cho A là phần diện tích nằm dưới đồ thị $f(x) = \cos(x)$ giới hạn bởi $x = 0$ và $x = \pi/2$

(a) Dùng điểm đầu mút phải, tìm biểu thức giới hạn (R_n) của A

(b) Ước lượng A bằng cách lấy điểm mẫu là trung điểm và tìm giá trị khi $n = 4$

Outline

Định nghĩa tích phân

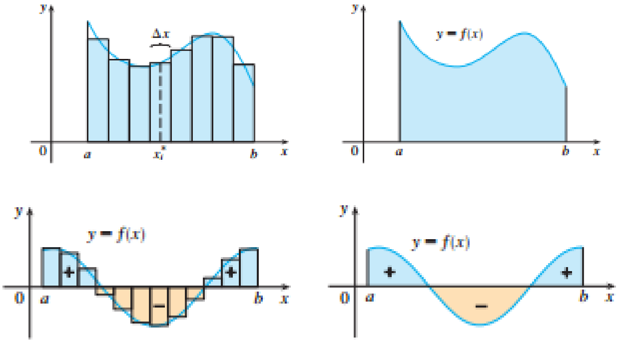
Định nghĩa (Tích phân xác định)

Nếu f *xác định trên* $[a, b]$, *ta chia đoạn* $[a, b]$ *thành* n *khoảng con bằng nhau* $\Delta x = (b - a)/n$. *Ta cho* $x_0(= a), x_1, x_2, \cdot, x_n(= b)$ *là các đầu mút của các khoảng con này, và ta cho* $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ *là các* **điểm mẫu** *trong các khoảng con này, vì vậy* x_i^* *nằm trong khoảng con thứ* $i : [x_{i-1}, x_i]$. *Khi đó* **tích phân xác định của hàm số** f **từ** a **đến** b

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

với điều kiện là giới hạn này tồn tại dù lấy bất kì điểm mút ở đâu. Nếu giới hạn tồn tại thì f **khả tích** *trên* $[a, b]$

Định nghĩa tích phân



Định Lý

Nếu f liên tục trên $[a, b]$ hoặc chỉ có một số hữu hạn điểm không tục thì f khả tích trên $[a, b]$ tức là $\int_a^b f(x)dx$ tồn tại

Định nghĩa tích phân

Ví dụ:

(a) Tính tổng Riemann của $f(x) = x^3 - 6x$, lấy các điểm mẫu là đầu mút phải với $a = 0, b = 3$ và $n = 6$

(b) Tính $\int_0^3 (x^3 - 6x)dx$

Ví dụ:

(a) Thuyết lập công thưc tính $\int_2^5 x^4 dx$ như giới hạn của tổng (điểm mẫu là trung điểm)

(b) Dùng máy tính để giới hạn trên

Tính chất tích phân

Giả sử f, g là những hàm liên tục thì:

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$ với c là hằng số bất kì
2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ với c là hằng số bất kì
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
5. Nếu $f(x) \geq 0$ với $a \leq x \leq b$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
6. Nếu $f(x) \geq g(x)$ với $a \leq x \leq b$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Tính chất tích phân

7. Nếu $m \leq f(x) \leq M$ với $a \leq x \leq b$ thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Ví dụ: Chứng minh rằng $2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}dx \leq 2\sqrt{2}$

Outline

Định lý cơ bản

Định Lý (Định lý cơ bản tích phân)

Nếu f liên tục trên $[a, b]$ thì

1. *Nếu* $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ *thì g liên tục trên* $[a, b]$ *và* $g'(x) = f(x)$
2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(b)$, *trong đó F là nguyên hàm của f, tức là* $F' = f$

Ví dụ: Tính tích phân $\int_{-2}^{1} x^3 dx$

Outline

1. Tích phân
   - Bài toán diện tích
   - Định nghĩa tích phân
   - Định lý cơ bản
   - Tích hân bất định
   - Quy tắc biến đổi
   - Tích phân từng phần
   - Đổi biến lượng giác
   - Xấp xĩ tích phân
   - Tích phân suy rộng
2. Ứng dụng của tích phân
   - Diện tích nằm giữa 2 đường cong
   - Thể tích
   - Giá trị trung bình
   - Độ dài dây cung

Tích phân bất định

Vì tích chất tương qua giữa tích phân và nguyên hàm, nên nguyên hàm của hàm f được kí hiệu $\int f(x)dx$. Do đó

$$\int f(x)dx = F(x) \text{ có nghĩa là } F'(x) = f(x)$$

Chúng ta đưa ra ví dụ $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ vì $(\frac{x^3}{3} + C)' = x^2$. Và chúng ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx \Big|_a^b$$

Tích phân bất định

Bảng tích phân bất định

$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$	$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)d$
$\int kdx = kx + C$	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$
$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$	$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
$\int \sec^2(x)dx = \tan(x) + C$	$\int \sec(x)\tan(x)dx = \sec(x) + C$
$\int \csc^2(x)dx = -\cot(x) + C$	$\int \csc(x)\cot(x)dx = \csc(x) + C$

Ví dụ: Tính $\int_0^3 (x^3 - 6x)dx$

Outline

1. Tích phân
   - Bài toán diện tích
   - Định nghĩa tích phân
   - Định lý cơ bản
   - Tích hân bất định
   - Quy tắc biến đổi
   - Tích phân từng phần
   - Đổi biến lượng giác
   - Xấp xĩ tích phân
   - Tích phân suy rộng
2. Ứng dụng của tích phân
   - Diện tích nằm giữa 2 đường cong
   - Thể tích
   - Giá trị trung bình
   - Độ dài dây cung

Quy tắc biến đổi tích phân

Để tích tích phân bất định sau:

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$$

Để tính phân này, ta dung biến phụ $u = x^2 + 1$ và ta thấy $du = 2xdx$, nên

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{x^2+1}dx &= \int \sqrt{x^2+1}2xdx = \int \sqrt{u}du \\ &= \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

Ta thấy rằng với $F' = f$:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Vì đạo hàm hàm hợp $(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$

Quy tắc đổi biến

Nếu $u = g(x)$ là hàm khả vi và có giá trị trên I và f liên tục trên I, thì

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Ví dụ: Tìm $\int x^3 \cos(x^4 + 2)dx$, $\int \sqrt{2x+1}dx$, $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$, $\int \tan(x)dx$

Quy tắc đổi biến của tích phân xác định

Nếu g' là hàm liên tục trên $[a, b]$ và f liên tục trên miền giá trị $u = g$, thì

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

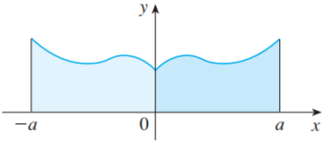
Ví dụ: Tính $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$, $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)}$, $\int_1^3 \frac{\ln(x)}{x}dx$

Tích phân của hàm đối xứng

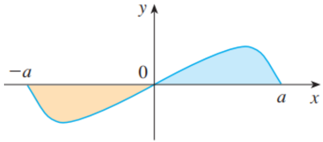
Giả sử hàm số f liên tục trên $[-a, a]$:

(a) Nếu f chẵn ($f(-x) = f(x)$) thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

(b) Nếu f lẽ ($f(-x) = -f(x)$) thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$



(a) f even, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$



(b) f odd, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Ví dụ: Tính $\int_{-2}^{2} (x^4 + 1)dx$, $\int_{-1}^{1} \frac{\tan(x)}{1 + x^2 + x^4} dx$

Outline

1. Tích phân
   - Bài toán diện tích
   - Định nghĩa tích phân
   - Định lý cơ bản
   - Tích hân bất định
   - Quy tắc biến đổi
   - **Tích phân từng phần**
   - Đổi biến lượng giác
   - Xấp xĩ tích phân
   - Tích phân suy rộng
2. Ứng dụng của tích phân
   - Diện tích nằm giữa 2 đường cong
   - Thể tích
   - Giá trị trung bình
   - Độ dài dây cung

Tích phân từng phần

Từ công thức đạo hàm của tích

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Vì thế

$$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = f(x)g(x)$$

Hoặc

$$\int (f(x)g'(x)dx + \int f'(x)g(x))dx = f(x)g(x)$$

Chúng ta có thể sắp xếp lại:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Đặt $u = f(x)$ và $v = g(x)$ khi đó $du = f'(x)dx$ và $dv = g'(x)dx$. Công thức trên được viết

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Tích phân từng phần

Ví dụ: Tìm $\int x\sin x dx$, $\int \ln x dx$, $\int t^2 e^t dx$, $\int e^x \sin x dx$.

Từ tích phân từng phần bất định, ta có có thể tích phân từng phân cho tích phân xác định:

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx}$$

Ví dụ: Tính $\int_0^1 \tan^{-1}(x)dx$, $\int_1^2 x^4(\ln x)^2 dx$

Ví dụ: Tính tích phân $\int \cos^3 x dx$

Ví dụ: Tính tích phân $\int \sin^5 x\cos^2 x dx$

Ví dụ: Tính tích phân $\int \sin^2 x dx$

Ví dụ: Tính tích phân $\int \tan^3 x dx$

Outline

Đổi biến lượng giác

Ví dụ: Tính $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$. Đặt $x = 3\sin\theta, -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.

Ví dụ: Tính $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$. Đặt $x = 2\tan\theta, -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.

Ví dụ: Tính $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}, a > 0$. Đặt $x = a\sec\theta, 0 \le \theta \le \pi/2$.

Tích phân của phân thức

Tính $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+x-2}$, Ta có

$\displaystyle\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$, Tính A và B bằng đồng nhất

Nên

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2} = \int \frac{Adx}{x-1} + \int \frac{Bdy}{x+2} = A|x-1| + B|x-1| + C$$

Tính nguyên hàm của $\displaystyle\int f(x)dx$ với $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$,
S, R, Q là những đa thức.
Tính $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x-1}$

Tích phân của phân thức

Nếu $Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2 \cdots (a_nx + b_n))$ Ta có thể viết

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

Ví dụ: Tính $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}, \int \frac{dx}{x^2 - a^2}$

Tính $\displaystyle\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}dx$ với $b^2 - 4ac < 0$

Ví dụ: Tính $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2}, \int \frac{2x - 1}{x^2 + 4}, \int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}, \int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}$

Ví dụ: Tính $\displaystyle\frac{\sqrt{x + 4}}{x}dx$

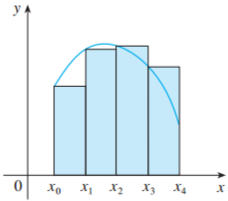
Outline

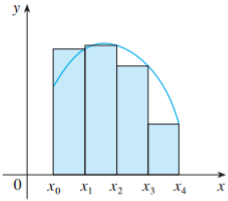
Xấp xĩ tích phân

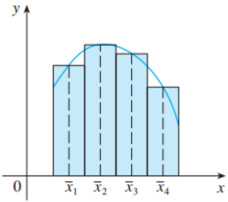
Để tích các tích phân sau:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \text{ hay } \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2} dx$$

Rất khó đưa ra một công thức chính xác cho những tích phân trên. Vì ta thế ta có thể dùng lại định nghĩa tích phân để tính xấp xĩ nó.







Quy tắc trung bên phải

$$\int_a^b f(x)dx \approx M_R = \Delta x(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))$$

trong đó $\Delta x = \dfrac{b-a}{n},\ x_i = a + (i-1)\Delta x.$

Quy tắc trung bên trái

$$\int_a^b f(x)dx \approx M_L = \Delta x(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}))$$

trong đó $\Delta x = \dfrac{b-a}{n},\ x_i = a + (i-1)\Delta x.$

Quy tắc trung điểm

$$\int_a^b f(x)dx \approx M = \Delta x(f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_2) + \cdots + f(\overline{x}_n))$$

trong đó $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ và $\overline{x}_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$ (trung điểm của $[x_{i-1}, x_i]$)

Để tính diện tích hình chữ nhật con, chúng có thể dùng công thức sau trên đoạn $[x_{i-1}, x_i]$:

$$A_i = \frac{1}{2}(f(x_{i-1} + f(x_i)))\Delta x$$

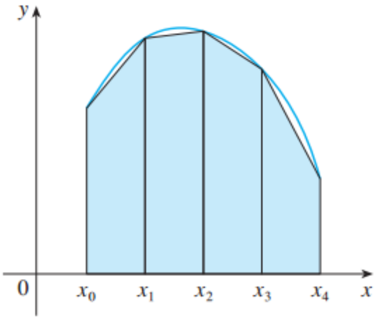
Vì thế tích phân có thể được xấp xỉ

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1}) + f(x_i))\Delta x = \frac{\Delta x}{2}\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1}) + f(x_i)) \\ &= \frac{\Delta x}{2}(f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)) \\ &= \frac{\Delta x}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))\end{aligned}$$

Quy tắc hình thang

$$\int_a^b f(x)dx \approx T = \frac{\Delta x}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

trong đó $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ và $x_i = a + i\Delta x$



Ví dụ: Dùng quy tác trung điểm và quy tắc hình thang với $n = 5$ để tính xấp xĩ tích phân $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

Ta gọi

$$E_T = \int_a^b f(x)dx - T \qquad E_M = \int_a^b f(x)dx - M$$

là sai số của xấp xĩ với quy tắc hình thang và trung điểm.

Định Lý

Nếu $|f''(x)| \leq K$ *với* $x \in [a, b]$ *thì*

$$|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}, \qquad |E_M| \leq \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

Ví dụ:

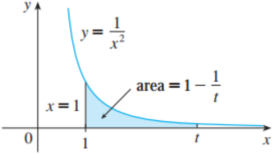
(a) Dùng quy tắc trung điểm, hình thang, bên trái, bên phải với $n = 5$ để tính xấp xĩ tích phân $\int_0^4 x dx$, $\int_0^2 x^2 dx$ $\int_0^1 e^{x^2} dx$

(b) Tìm cận trên của xấp xỉ trên

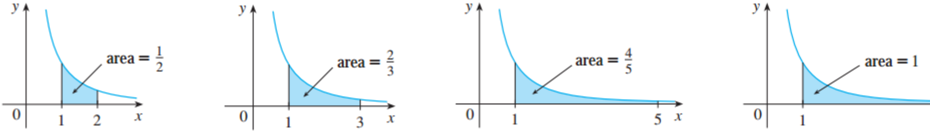
Outline

Tích phân suy rộng loại 1: Các khoảng vô cùng

Để tính diện tích của hình sau:



Diện tích dưới đồ thì $y = f(x) = 1/x^2$ và $x = 1$ và $x = t$ bằng:
$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}|_1^t$. Vì thế diện tích $A = \lim_{t\to\infty} A(t) = 1$



Tích phân suy rộng loại 1: Các khoảng vô cùng

Định nghĩa tích phân suy rộng loại 1

(a) Nếu $\displaystyle\int_a^t f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \geq a$ thì

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx \text{ nếu giới hạn này tồn tại}$$

(b) Nếu $\displaystyle\int_t^b f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \leq b$ thì

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx \text{ nếu giới hạn này tồn tại}$$

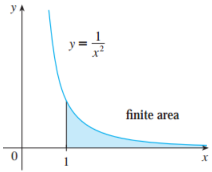
(c) Nếu cả $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)dx$ và $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ tồn tại thì

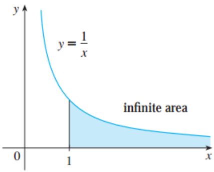
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

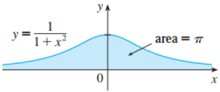
Tích phân suy rộng loại 1: Các khoảng vô cùng

Nếu các tích phân suy rộng trên được gọi là **hội tụ** nếu các giới hạn tương ứng tồn tại và gọi là **phân kỳ** nếu các giới hạn không tồn tại.

Ví dụ: xác định các tích phân sau phân kỳ hay hội tụ: $\int_1^\infty \frac{1}{x}$, $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$, $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}$

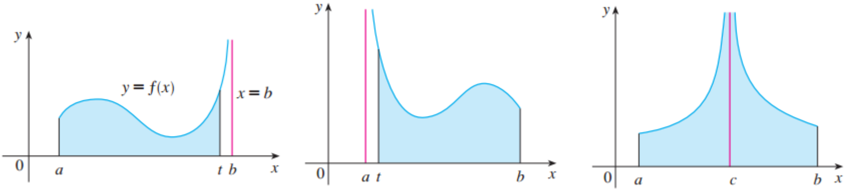






Tích phân suy rộng loại 2: trên khoảng gián đoạn

Để tính diện tích của hình sau:



Diện tích dưới đồ thì $y = f(x)$ và $x = a$ và $x = t$ bằng:

$A(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)dx$. Vì thế diện tích $A = \lim\limits_{t \to b} A(t)$

Tích phân suy rộng loại 2: trên khoảng gián đoạn

Định nghĩa tích phân suy rộng loại 2

(a) Cho f liên tục $[a, b)$ và bị gián đoạn tại b, thì
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx \text{ nếu giới hạn này tồn tại}$$

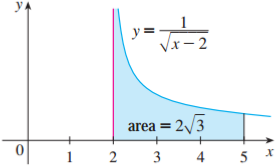
(b) Cho f liên tục $(a, b]$ và bị gián đoạn tại a, thì
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx \text{ nếu giới hạn này tồn tại}$$

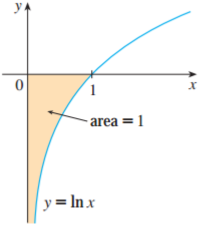
(c) Nếu f gián đoạn tại c $(a \leq c \leq b)$, các tính phân $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ đều tồn tại thì
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Tích phân suy rộng loại 2: trên khoảng gián đoạn

Nếu các tích phân suy rộng trên được gọi là **hội tụ** nếu các giới hạn tương ứng tồn tại và gọi là **phân kỳ** nếu các giới hạn không tồn tại.

Ví dụ: xác định các tích phân sau phân kỳ hay hội tụ: $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$, $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$, $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx$





Tiêu chuẩn so sánh 1

Định Lý (Tích phân suy rộng loại, Tiêu chuẩn so sánh 1)

Giả sử f và g là hàm số liên tục với $f(x) \geq g(x) \geq 0$ với $x \geq a$ thì

(a) *Nếu $\int_a^{\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{\infty} g(x)dx$ hội tụ*

(b) *Nếu $\int_a^{\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{\infty} f(x)dx$ phân kỳ*

Ví dụ: Chứng minh $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ hội tụ, $\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}$ phân kỳ.

Tiêu chuẩn so sánh 1

Định Lý (Tích phân suy rộng loại 2, Tiêu chuẩn so sánh 1)

Giả sử $\int_a^b f(x)dx$ *và* $\int_a^b g(x)dx$ *là tích phân suy rộng loại 2, nếu* $c \in [a, b]$ *là điểm* **kỳ dị** *của tích phân (không liên tục hay không xác định). Nếu* $f(x) \geq g(x) \geq 0$ *với* x *thuộc lân cận của* c

(a) *Nếu* $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ thì* $\int_a^b g(x)dx$ *hội tụ*

(b) *Nếu* $\int_a^b g(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int_a^b f(x)dx$ *phân kỳ*

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + \sin^2(x)} dx$, $\int_1^{\pi/2} \frac{1}{x \sin x} dx$.

Tiêu chuẩn so sánh 2

Định Lý (Tích phân suy rộng loại 1, Tiêu chuẩn so sánh 2)

Giả sử f và g là hàm số liên tục với $f(x), g(x) \geq 0$ với $x \geq a$. Nếu

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, \infty)$$

thì $\int_a^{\infty} f(x)dx$, $\int_a^{\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.

Ví dụ: Khảo sát sụ hội tụ của $\int_1^{\infty} \frac{x^2 + \ln x + 1}{x^5 + 3x^2 + 3}dx$, $\int_1^{\infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{x^4 + x^3 - 3}dx$

Tiêu chuẩn so sánh 2

Định Lý (Tích phân suy rộng loại 2, Tiêu chuẩn so sánh 2)

Giả sử $\int_a^b f(x)dx$ *và* $\int_a^b g(x)dx$ *là tích phân suy rộng loại 2, nếu* $c \in [a, b]$ *là điểm* **kỳ dị** *của tích phân. Nếu*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, \infty)$$

thì $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ *cùng hội tụ hay cùng phân kỳ*

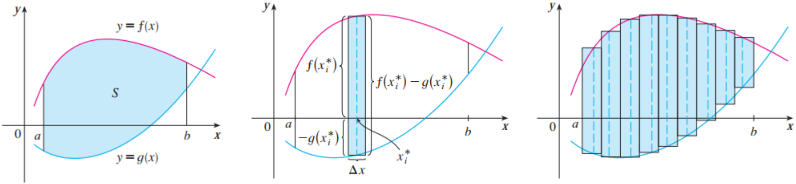
Ví dụ: Khảo sát sụ hội tụ của $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2(2+x)}}dx$, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$

Outline

1. Tích phân
   - Bài toán diện tích
   - Định nghĩa tích phân
   - Định lý cơ bản
   - Tích hân bất định
   - Quy tắc biến đổi
   - Tích phân từng phần
   - Đổi biến lượng giác
   - Xấp xĩ tích phân
   - Tích phân suy rộng
2. Ứng dụng của tích phân
   - Diện tích nằm giữa 2 đường cong
   - Thể tích
   - Giá trị trung bình
   - Độ dài dây cung

Diện tích nằm giữa 2 đường cong

Xét miền S giới hạn bởi 2 đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$, trong đó f, g là hàm liên tục, $f(x) \geq g(x)$ với $x \in [a, b]$



Diện tích nằm giữa 2 đường cong

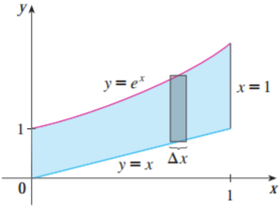
Diện tích A của miền S được tính bằng giới hạn

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i^*) - g(x_i^*))\Delta x$$

Vì thế

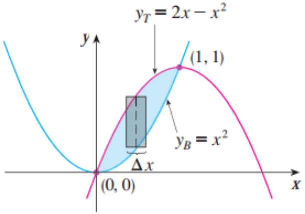
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Ví dụ: Tìm diện tích miền giới hạn phía trên bởi $y = x^2 + 1$, phía trên bởi $y = x$ và giới hạn 2 bên $x = 0$ và $x = 1$

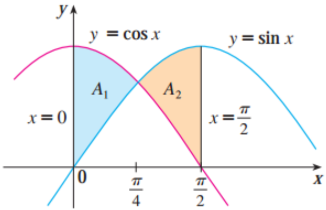


Diện tích nằm giữa 2 đường cong

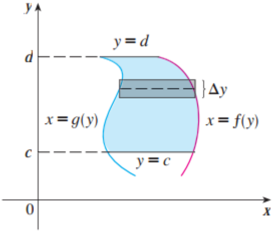
Ví dụ: Tìm diện tích giới hạn bởi các parabol sau $y = x^2$ và $y = 2x - x^2$

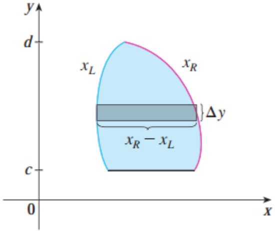


Ví dụ: Tìm diện tích giới hạn bởi các đường cong sau $y = \sin x$ và $y = \cos x$, $x = 0$ và $x = \pi/2$



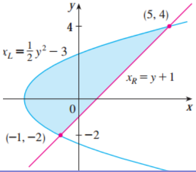
Diện tích nằm giữa 2 đường cong





$$A = \int_c^d (f(y) - g(y))dy = \int_c^d (x_R - x_L)dy$$

Ví dụ: Tìm diện tích giới hạn bởi đường thẳng $y = x - 1$ và parabol $y^2 = 2x + 6$

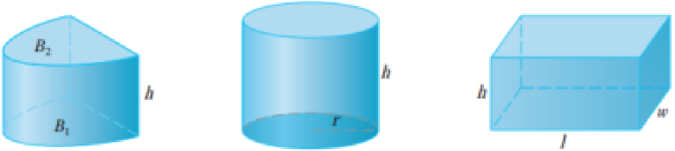


Outline

1. Tích phân
   - Bài toán diện tích
   - Định nghĩa tích phân
   - Định lý cơ bản
   - Tích hân bất định
   - Quy tắc biến đổi
   - Tích phân từng phần
   - Đổi biến lượng giác
   - Xấp xĩ tích phân
   - Tích phân suy rộng
2. Ứng dụng của tích phân
   - Diện tích nằm giữa 2 đường cong
   - Thể tích
   - Giá trị trung bình
   - Độ dài dây cung

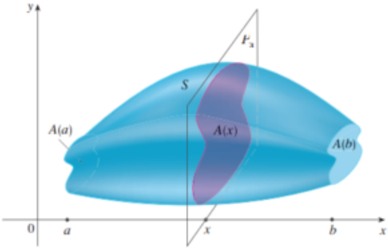
Thể tích

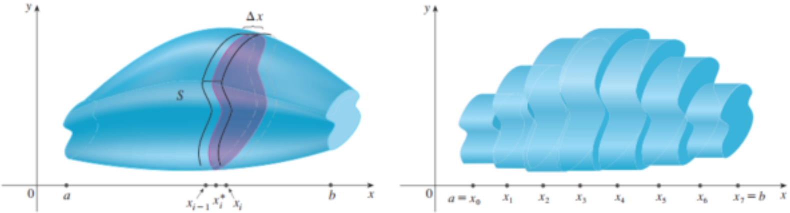
Với những hình cơ bản, ta dễ dàng tích thể tích của chúng.



(a) Cylinder $V = Ah$ (b) Circular cylinder $V = \pi r^2 h$ (c) Rectangular box $V = lwh$

Với hình rắn S không phải là cylinder thì ta tính thể tích của S bằng cách nào?





Với mọi điểm $x \in [a, b]$, ta vẽ một mặt phẳng qua x và song song với mặt yOz (gọi là mặt P_x), cắt vật rắn S với diện tích $A(x)$. Chia khoảng $[a, b]$ thành n đoạn bằng nhau $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ với những điểm $x_0 = a, x_1, x_2, \cdots, x_n = b$. Những mặt phẳng P_{x_i}, $i = 0, 1, \cdots, n$ cắt vặt rắn S thành n vật rắn nhỏ S_i. Lấy điểm $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$V(S_i) = A(x_i^*)\Delta x \tag{3.1}$$

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V(S_i) = \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x \tag{3.2}$$

Định nghĩa (Định nghĩa thể tích)

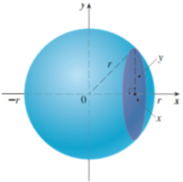
Cho vật rắn S nằm giữa $x = a$ và $x = b$. Nếu $A(x)$ là diện tích mặt cắt của mặt phẳng P_x đi qua x và vật rắn S, $A(x)$ là hàm số liên tục thì thể tích S là

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)dx \tag{3.3}$$

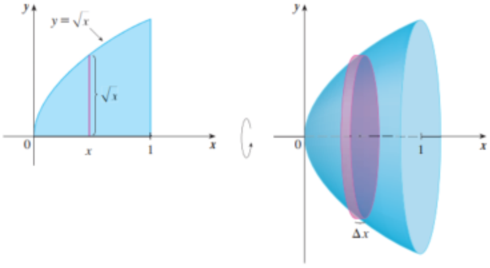
Ví dụ: Nếu S là hình tròn xoay thì diện tích $A(x)$ là hằng số và bằng A.

Nên thể tích $V = \displaystyle\int_a^b A(x)dx = A(b-a) = Ah$ với $h = b - a$.

Ví dụ: Chứng minh thể tích hình tròn với bán kính r là $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

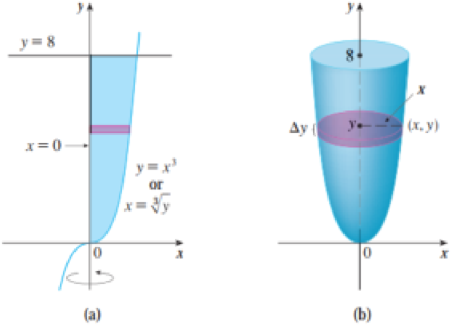


Ví dụ: Tìm thể tích hình rắn khi quay quanh trục Ox miền giới hạn $y = \sqrt{x}$ từ 0 đến 1.

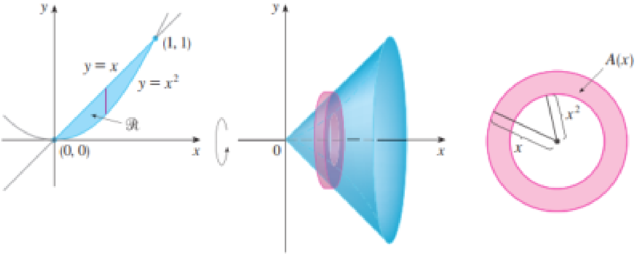


(a) (b)

Ví dụ: Tìm thể tích hình rắn khi quay quanh trục Oy miền giới hạn $y = x^3$, $y = 0$ và $x = 0$.

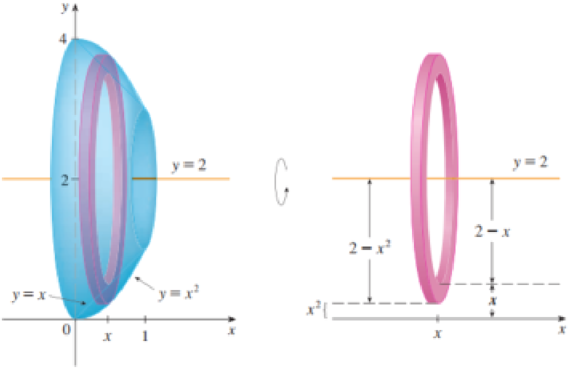


Ví dụ: Miền $\mathcal{R}$ tạo bởi 2 đường cong $y = x$ và $y = x^2$ được quay quanh trục Ox. Tìm thể tích vật rắn được tạo bởi cách trên.

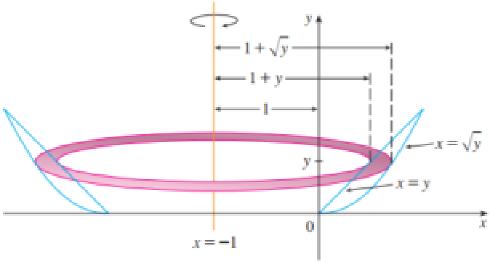


(a) (b) (c)

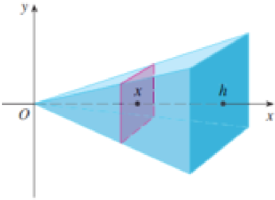
Ví dụ: Miền $\mathcal{R}$ ở ví dụ trên được quay quanh đường thẳng $y = 2$. Tìm thể tích vật rắn được tạo bởi cách trên.

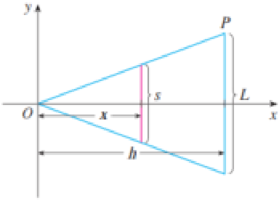


Ví dụ: Miền $\mathcal{R}$ ở ví dụ trên được quay quanh đường thẳng $x = -1$. Tìm thể tích vật rắn được tạo bởi cách trên.



Ví dụ: Tính thể tích của kim tự thấp với chiều cao là h và độ dài của cạnh hình vuông là L





Outline

Giá trị trung bình

Giá trị trung bình của một dãy số $y_1, y_2, \cdots, y_n$:

$$y_{\text{ave}} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

Để tính trung bình của hàm số f trên đoạn $[a, b]$, Ta chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn bằng nhau với mỗi đoạn có độ dài $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Chọn $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ thuộc mỗi đoạn con, thì giá trị trung bình của dãy $f(x_1^*, f(x_2^*)), \cdots, f(x_n^*)$ là:

$$\frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n} = \frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\frac{b-a}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x$$

Theo định nghĩa tích phân

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Định nghĩa giá trị trung bình

Giả sử f liên tục trên $[a, b]$, **giá trị trung bình** của f trên đoạn $[a, b]$ là

$$f_{\text{ave}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Ví dụ: Tìm giá trị trung bình của các hàm số $f(x) = 1 + x^2$ trên đoạn $[-1, 2]$, $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$ trên đoạn $[0, \pi]$

Định Lý (Định lý giá trị trung bình cho tích phân)

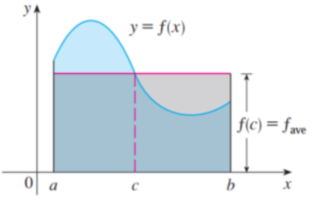
Giả sử f liên tục trên $[a, b]$, thì luôn tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

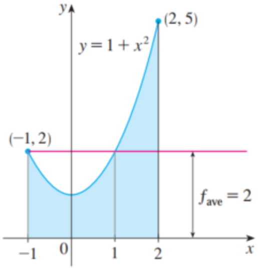
$$f(c) = f_{\text{ave}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Hay
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Ví dụ: Tìm giá trị trung bình của những hàm số sau:

1. $f(x) = 4x - x^2$, $[0, 4]$
2. $f(x) = \sin 4x$, $[-\pi, \pi]$

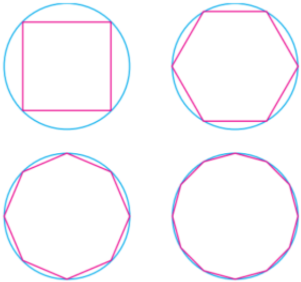


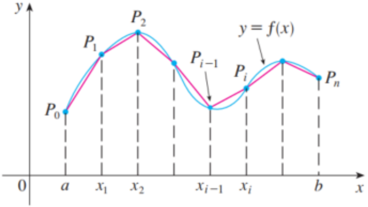


Ví dụ: Tìm giá trị c trong định lý trung bình của hàm số $f(x) = x^2 + 1$ trên đoạn $[-1, 2]$

Outline

Độ dài dây cung





Cho hàm số f liên tục đoạn $[a, b]$. Để tính độ dài đường cong C $y = f(x)$, chia đia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn với những điểm $a = x_0 < x_1, \cdots, x_n = b$ và $\Delta = \dfrac{b-a}{n}$. Ta đặt những điểm $P_i(x_i, y_i)$ với $y_i = f(x_i)$ trên đường cong C.

Độ dài L của đường C là xấp xĩ độ dài những đoạn thẳng $P_{i-1}P_i, i = 1, \cdots, n$.

Định nghĩa (Độ dài cung)

Độ dài L được định nghĩa là

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

Áp dụng định lý trung bình của hàm f trên đoạn $[x_{i-1}, x_i]$, tồn tại $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$ sao cho

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

Hay

$$\Delta y_i - y_{i-1} = f'(x_i^*)\Delta x.$$

Vì thế ta có

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)\Delta x]^2}$$
$$= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\Delta x$$

Theo đinh nghĩa đường cong L

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\Delta x$$

Rất dễ dang ta nhận ra

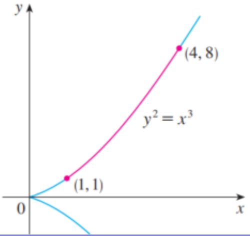
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(x_i^*)]^2}\Delta x=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

Định nghĩa (Công thức độ dài cung)

Nếu f' liên tục trên $[a,b]$ thì độ dài của cung $y=f(x)$ trên $[a,b]$ là

$$L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

Ví dụ: Tìm độ dài cung của đường parabol $y^2=x^3$ giữa 2 điểm $(1,1)$ và $(4,8)$



Định nghĩa

Nếu một cung có phương trình $x = g(y), c \leq y \leq d$ *và* $g'(y)$ *liên tục trên* $[c, d]$ *thì độ dài cung được tính:*

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy$$

Ví dụ: Tính độ dài cung của parabol $y^2 = x$ từ $(0, 0)$ đến $(1, 1)$