Vi tích phân 1: Chương 5: Lý thuyết chuỗi

Anh Ha Le

University of Sciences

Ngày 5 tháng 4 năm 2023

Vi tích phân 1: Chương 5: Lý thuyết chuỗi

Anh Ha Le

University of Sciences

Ngày 5 tháng 4 năm 2023

Outline

1. Dãy số thực
   - Định nghĩa dãy số
   - Hội tụ của dãy số
   - Dãy đơn điệu, dãy bị chặn

2. Chuỗi số
   - Các dấu hiệu hội tụ
   - Chuỗi đan dấu
   - Hội tụ tuyệt đối

3. Chuỗi lũy thừa

Định nghĩa (Dãy số)

Dãy số có thể được nghĩa là một tập hợp những số được viết như sau:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

a_1 *được gọi là số đầu tiên của dãy số,* a_2 *là số thứ 2 của dãy số,* a_n *là số thư n của dãy số.*
Với mỗi số nguyên dương n *thì có tương ứng một số thực* a_n *nên dãy số có thể gọi là hàm số từ số nguyên dương vào số thực.*
Một dãy $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ *cũng thường ký hiệu bởi:*

$$\{a_n\} \text{ hay } \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

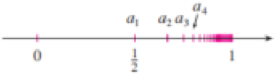
Ví dụ: Một dãy $\{a_n\}$ có thể được biểu diễn thành 3 dạng sau:

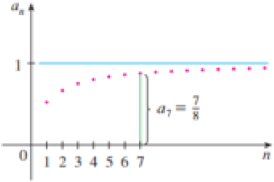
a. $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad a_n = \dfrac{n}{n+1}, \quad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n}{n+1}, \cdots\right\}$

b. $\{\sqrt{n-3}\}_{n=3}^{\infty}$, $a_n = \sqrt{n-3}, n \geq 3$, $\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{n-3}, \cdots\}$

Ví dụ: Tìm dạy tổng quát của dãy số sau:

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3215}, \dots\right\}$$





Ta trở lại với ví dụ đầu tiên $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, ta thấy rằng a_n sẽ sắp xĩ tới 1 khi n lớn. Ta có

$$1 - a_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

là rất nhỏ khi n đủ lớn. Ta có thể viết rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Outline

1. Dãy số thực
   - Định nghĩa dãy số
   - Hội tụ của dãy số
   - Dãy đơn điệu, dãy bị chặn
2. Chuỗi số
   - Các dấu hiệu hội tụ
   - Chuỗi đan dấu
   - Hội tụ tuyệt đối
3. Chuỗi lũy thừa

hay tổng quát

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

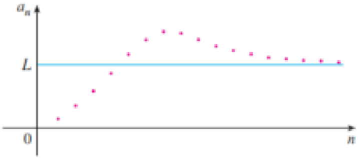
có nghĩa là a_n sắp xĩ L khi n đủ lớn.

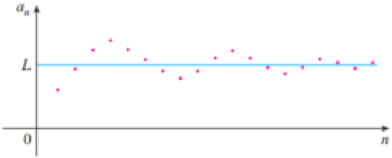
Định nghĩa (Hội tụ dãy số)

Một dãy $\{a_n\}$ có giới hạn là L, chúng ta có thể viết

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \text{ hay } a_n \to L \text{ khi } n \to \infty$$

nếu a_n gần giá trị L khi n đủ lớn. Nếu $\lim_{n \to \infty} a_n$ tồn tại thì ta nói dãy số hội tụ. Nếu $\lim_{n \to \infty} a_n$ không tồn tại thì ta nói dãy số phân kỳ.





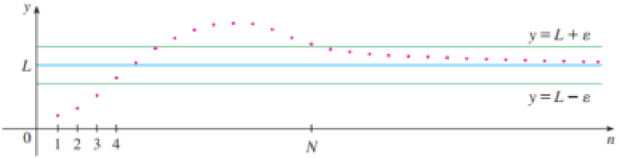
Định nghĩa (Hội tụ dãy số, (ε, N))

Một dãy $\{a_n\}$ có giới hạn là L, chúng ta có thể viết

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \text{ hay } a_n \to L \text{ khi } n \to \infty$$

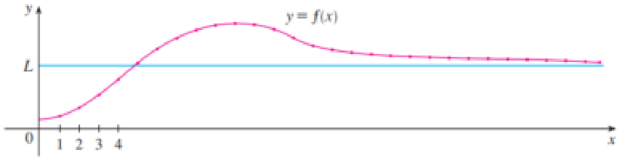
nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại so nguyên dương N sao cho

$$|a_n - L| \leq \varepsilon \text{ với mọi } n > N$$



Định Lý

Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ *thì* $a_n = f(n)$ *khi* n *là số nguyên dương thì* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$



Ví dụ: Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$ với $r > 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^r} = 0$ khi $r > 0$

Định nghĩa (Hội tụ về vô cùng)

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ *nghĩa là khi với mọi số thực* $M > 0$ *thì tồn tại số nguyên dương* N *sao cho*

$$a_n > M \text{ với mọi } n > N$$

Nếu dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là những dãy hội tụ và c là hằng số thì

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = [\lim\limits_{n\to\infty} a_n]^p$ nếu $p > 0$ và $a_n > 0$
- Nếu $a_n \leq b_n \leq c_n$ với $n \geq n_0$, và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

Định Lý

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Một số giới hạn cơ bản

- Với $r > 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^r} = 0$
- Với $r > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{r} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- Với $r > 0$ và α cho trước tùy ý thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{(1+r)^n} = 0$
- Với r cho trước thỏa $|r| < 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

Ví dụ: Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{10+n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của dãy $a_n = (-1)^n$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

Định Lý

Nếu $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *và hàm số* f *liên tục tại* L *thì*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

Ví dụ: Tìm $\lim_{n\to\infty} \sin(\dfrac{\pi}{n})$.

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của dãy $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của dãy $a_n = r^n$.

Ví dụ: Tìm $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{r}$ với $r > 0$.

Ví dụ: Tìm $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ với $r > 0$.

Ví dụ: Tìm $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{(1+r)^n}$ với $r > 0$ và α

Outline

Dãy đơn điệu

Định nghĩa (Dãy đơn điệu)

Một dãy số $\{a_n\}$ *được gọi là tăng nếu* $a_{n+1} > a_n$ *với mọi* $n \geq 1$, *nghĩa là* $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$. *Một dãy số* $\{a_n\}$ *được gọi là giảm nếu* $a_{n+1} < a_n$ *với mọi* $n \geq 1$. *Một dãy được gọi là đơn điệu nếu nó tăng hoặc giảm*

Ví dụ: Dãy số $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ là dãy tăng.

Ví dụ: Dãy số $\left\{\dfrac{3}{n+5}\right\}$ là dãy giảm.

Ví dụ: Dãy số $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ là dãy giảm.

Dãy bị chặn

Định nghĩa (Dãy bị chặn)

Một dãy số $\{a_n\}$ *bị chặn trên* *nếu tồn tại số thực* M *sao cho*

$$a_n \leq M \text{ với mọi } n \geq 1$$

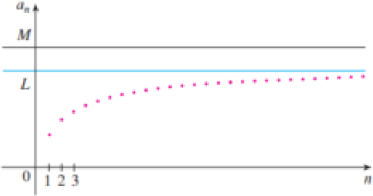
Một dãy số $\{a_n\}$ *bị chặn dưới* *nếu tồn tại số thực* m *sao cho*

$$a_n \geq m \text{ với mọi } n \geq 1$$

Nếu một dãy $\{a_n\}$ *số bị chặn trên và bị chặn dưới thì* $\{a_n\}$ *được gọi dãy bị chặn.*

Ví dụ: Dãy $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ bị trên bởi 1 và bị chặn dưới bởi 0 và hội tụ về 1.

Ví dụ: Dãy $a_n = (-1)^n$ bị chặn trên và chặn dưới $-1 \leq a_n \leq 1$ với mọi n nhưng a_n phân kỳ



Định Lý

Mọi dãy bị chặn, đơn điệu thì hội tụ

Ví dụ: Xét dãy số sau:

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) \text{ với } n = 1, 2, 3, \cdots$$

Dãy số trên bị chặn trên và tăng

Định Lý (Sự bảo toàn thứ tự qua giới hạn)

Nếu hai dãy $\{a_n\}$ *và* $\{b_n\}$ *là hai dãy hội tụ và tồn tại* $n_0 > 0$ *sao cho* $a_n \leq b_n$ *với mọi* $n \geq n_0$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Định Lý (Định lý kẹp)

Nếu có $n_0 \in \mathbf{N}$ *sao cho với mọi* $n \geq n_0$, $a_n \leq b_n \leq c_n \geq$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

Ví dụ: Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$

Định nghĩa (Chuỗi số)

Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *với mỗi* $n \geq 1$, *xét tổng hữu hạn*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n \tag{2.1}$$

Các tổng s_n *gọi là* *tổng riêng phần*. *Dãy* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *được gọi là chuỗi số và được ký hiệu:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ hay } a_1 + a_2 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Nếu dãy $\{s_n\}$ *hội tụ và* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ *tồn tại thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *được gọi là* *hội tụ* *và có thể*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim_{s\to\infty} s_n$$

Định nghĩa

Nếu $\{s_n\}$ phân kỳ thì chuỗi được gọi phân kỳ.

Ví dụ: Cho dãy $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ với mọi $n \geq 1$, vậy

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Vậy

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 1$$

Và chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$

Ví dụ: Cho $a \neq 0$. Ta xét chuỗi hình học: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$.

- Nếu $|r| = 1$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a = na$. Vì $\lim_{n\to\infty} s_n$ không tồn tại nên chuỗi phân kỳ.

- Nếu $|r| < 1$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}$, vì $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ nên

$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r}$. Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{1}{1-r}$.

- Nếu $|r| > 1$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}$, vì $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ nên

$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$. Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ phân kỳ.

Ví dụ: Tìm tổng của chuỗi sau:

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

Ví dụ: Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{n-1}$ hội tụ hay phân kỳ.

Ví dụ: Viết số $2.3\overline{17} = 2.317171717\cdots$ dưới dạng số thập phân.

Ví dụ: Tìm tổng của chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ với $|x| < 1$.

Ví dụ: Chứng minh chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Ví dụ: Chứng minh chuỗi điều hòa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

Hint: $s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$

Định Lý

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Remark

Nếu $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *thì không kết luận được rằng* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ*

Định Lý

Nếu $\lim_{n\to\infty} a_n$ *không tồn tại hoặc* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *thì* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ*

Ví dụ: : Chứng minh $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ phân kỳ.

Định Lý

Cho hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ *(*c *là hằng số),* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Ví dụ: Tìm tổng $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right)$

Remark

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ và* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *phân kỳ thì* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *phân kỳ.*

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ và* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *phân kỳ thì* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *không có kết luận.*

Outline

Tiêu chuẩn so sánh (bất đẳng thức)

Cho hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ thỏa: $0 \leq a_n \leq b_n$ với mọi $n \geq 1$ thì

(i) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

(ii) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ

Ví dụ: Chứng minh sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$.

Ví dụ: Xác định chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ hội tụ hay phân kỳ

Tiêu chuẩn so sánh (giới hạn)

Cho hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ với $a_n, b_n \geq 0$ với mọi $n \geq 1$. Nếu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

(i) Nếu $c \in (0, \infty)$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.

(ii) Nếu $c = 0$ thì nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

(iii) Nếu $c = \infty$ thì nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ

Ví dụ: Chứng minh sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 11}$.

Ví dụ: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{4 + n^5}}$ hội tụ hay phân kỳ.

Định Lý

Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *với số thực* p

(i) *Nếu* $p > 1$ *thì chuỗi hội tụ*

(ii) *Nếu* $p \leq 1$ *thì chuỗi phân kỳ*

Outline

1. Dãy số thực
   - Định nghĩa dãy số
   - Hội tụ của dãy số
   - Dãy đơn điệu, dãy bị chặn
2. Chuỗi số
   - Các dấu hiệu hội tụ
   - Chuỗi đan dấu
   - Hội tụ tuyệt đối
3. Chuỗi lũy thừa

Chuỗi đan dấu

Cho dãy số $\{a_n\}$ và $a_n \geq 0$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ hay $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$ được gọi là chuỗi đan dấu. Hai chuỗi này được sắp xếp âm dương xen kẽ nhau.

Định nghĩa (Chuỗi Leinitz)

Chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *hay* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$ *được gọi là chuỗi Leinitz nếu:*

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ *với mọi* $n \geq 1$ *(dãy* $\{a_n\}$ *là dãy giảm)*

Định Lý

Chuỗi Leinitz hội tụ và có tổng s thỏa $|s| \leq a$ với $|a_1|$.

Ví dụ: Chuỗi đan dấu điều hòa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$.

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

(ii) $a_{n+1} \geq a_n$ vì $\displaystyle\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$

Nên chuỗi đan dấu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ hội tụ.

Ví dụ: Chuỗi đan dấu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ hội tụ hay phân kỳ.

Ví dụ: Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}$ hội tụ hay phân kỳ.

Outline

Chuỗi tuyệt đối

Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, chuỗi sau đây

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots |a_n| + \cdots$$

được gọi là chuỗi tuyệt đối (các phần tử được lấy giá trị tuyệt đối).

Hội tụ tuyệt đối

Một chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi tuyệt đối $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ.

Ví dụ: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ: Chuỗi đan dấu điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ không hội tụ tuyệt đối.

Hội tụ có điều kiện

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là hội tụ có điều kiện nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và không hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ hội tụ có điều kiện

Định lý

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối thì nó hội tụ

Ví dụ: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ hội tụ hay phân kỳ.

Ví dụ: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ hội tụ hay phân kỳ.

Định lý (Tiêu chuẩn d'Alembert)

(i) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối

(ii) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty a_n$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ phân kỳ.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ thì không có kết luận gì về sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Remark

Phần (iii) của định lý trên rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, *không đưa tới kết luận nào.*

Remark

Cho ví dụ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *hội tụ, ta có*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} \to 1 \text{ khi } n \to \infty$$

Trong khi đó chuỗi phân kỳ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *có*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1 \text{ khi } n \to \infty$$

Ví dụ: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ phân kỳ.

Ví dụ: Kiểm tra sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ với

Định lý (Tiêu chuẩn Cauchy)

(i) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối

(ii) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ phân kỳ.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ thì không có kết luận gì về sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Ví dụ: Kiểm tra sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+3}{3n+2}\right)^n$

Định nghĩa chuỗi lũy thừa

Chuỗi lũy thừa là chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

trong đó x là biến và c_n's là hằng số và là hệ số của chuỗi. Một chuỗi lũy thừa tổng quát có dạng là

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

gọi là chuỗi lũy thừa tâm a hay chuỗi lũy thừa quanh a

Ví dụ: Tìm x để chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ hội tụ.

Ví dụ: Tìm x để chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ hội tụ.

Ví dụ: Tìm miền hội tụ của hàm Bessel $J(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$

Định lý

Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, chỉ có 3 trường hợp sau:

(i) Chuỗi chỉ hội tụ tại $x = a$

(ii) Chuỗi hội tụ với mọi x

(iii) Có một số dương R sao cho chuỗi hội tụ khi $|x-a| < R$ va phân kỳ khi $|x-a| > R$

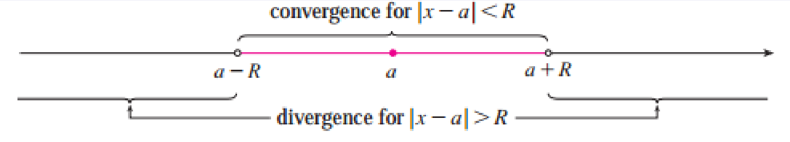
Bán kính hội tụ

R trong phần (iii) được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa. Theo qui ước, $R = 0$ trong phần (i), $R = \infty$ trong phần (ii)

Miền hội tụ

Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là miền chứa những giá trị x mà chuỗi hội tụ. Trong phần (i) thì Miền hội tụ là điểm a, trong phần (ii) thì miền hội tụ là miền $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$, trong phân (iii), miền hội tụ là $\{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq R\} = \{x \in \mathbb{R} : a - R < x < a + R\} = (a - R, a + R)$, nếu $|x - a| = R$, chúng ta không đưa ra bất kỳ kết luận nào. Vậy phần (iii) thì có 4 khả năng miền hội là

$$(a - R, a + R), \quad [a - R, a + R), \quad (a - R, a + R], \quad [a - R, a + R]$$



Ví dụ: Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Ví dụ: Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x-4)^n}{\sqrt{n^3}}.$$

Ví dụ: Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$