Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Tp Hồ Chí Minh

Chương 4

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Nội dung

4.1 Định nghĩa và những tính chất căn bản

Định nghĩa

Cho V và W là hai không gian vector trên trường $\mathbb{R}$. Ta nói $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính nếu nó thỏa mãn các điều kiện dưới đây:

i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \forall x_1, x_2 \in V$,

ii) $f(\alpha x) = \alpha f(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in V$.

Nhận xét

- *Điều kiện i) và ii) trong định nghĩa có thể được thay thế bằng một điều kiện:* $f(\alpha x_1 + x_2) = \alpha f(x_1) + f(x_2), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V$
- *Nếu f là một ánh xạ tuyến tính, thì*
  - $f(0) = 0$.
  - $f(-x) = -f(x), \forall x \in V$.

Ký hiệu

- *L(V, W) là tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ $V \to W$.*
- *Nếu $f \in L(V,V)$ thì f được gọi là một toán tử tuyến tính trên V. Viết tắt $f \in L(V)$.*

Ví dụ

Các ánh xạ sau đây là ánh xạ tuyến tính

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ xác định bởi

$$f(x) = (x, 0, \ldots, 0);$$

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 - 3x_2);$$

Định lý

Mọi ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ đều hoàn toàn xác định bởi ảnh của các vector của một cơ sở nào đó của V.

Chứng minh Ta xét trường hợp V là không gian vector hữu hạn chiều. Gỉa sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là một cơ sở của V và các vector $f(u_i), \forall i \in \overline{1, n}$ hoàn toàn xác định trong W. Khi đó $\forall x \in V$, biểu diễn x một cách duy nhất dưới dạng

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

ta có $f(x) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \cdots + \alpha_n f(u_n)$.

Trên tập hợp $L(V, W)$ ta định nghĩa các phép toán sau đây:

a) Phép cộng: $\forall f, g \in L(V, W), \forall x \in V$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

b) Phép nhân vô hướng: $\forall f \in L(V, W), \forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Mệnh đề

$L(V, W)$ với những phép toán vừa định nghĩa phía trên là một không gian vector trên trường $\mathbb{R}$.

4.2 Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính.

a) Tập hợp $Kerf = \{x \in V | f(x) = 0\}$ được gọi là nhân của ánh xạ f.

b) Tập hợp $Imf = \{f(x) | x \in V\}$ được gọi là ảnh của ánh xạ f.

Nhân và ảnh của f tương ứng là không gian con của V và W.

Ví dụ

Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z)$$

Tìm một cơ sở của $Kerf$.

Gọi $u \in \mathbb{R}^3, u \in Kerf \Leftrightarrow f(u) = 0$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & 5y & - & z & = & 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có nghiệm $(x, y, z) = (2t, -t, t)$ với $t \in \mathbb{R}$. Nghiệm cơ bản của hệ là $u = (2, -1, 1)$. Vậy $Kerf$ có cơ sở là $\{u = (2, -1, 1)\}$.

Gọi $u \in \mathbb{R}^3, u \in Kerf \Leftrightarrow f(u) = 0$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có nghiệm $(x, y, z) = (2t, -t, t)$ với $t \in \mathbb{R}$. Nghiệm cơ bản của hệ là $u = (2, -1, 1)$. Vậy $Kerf$ có cơ sở là $\{u = (2, -1, 1)\}$.

Định lý

Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó, nếu $S = \{u_1, u_2, \dots u_m\}$ là tập sinh của V thì $f(S) = \{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m)\}$ là tập sinh của Imf.

Ví dụ

Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z).$$

Tìm một cơ sở của *Imf*.

Ví dụ

Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z).$$

Tìm một cơ sở của *Imf*.

Gọi $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ là một cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Ta có $f(e_1) = (1, 2, 3)$, $f(e_2) = (1, 3, 5)$, $f(e_3) = (-1, -1, -1)$. Ta có *Imf* sinh bởi $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$. Lập ma trận

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó *Imf* có cơ sở là $\{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, 1, 2)\}$.

Định lý

Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính từ không gian vector hữu hạn chiều V vào không gian vector W. Khi đó Imf là không gian con hữu hạn chiều của W và ta có công thức:

$$\dim V = \dim Kerf + \dim Imf$$

Định nghĩa

Cho V và W là các không gian vector trên trường $\mathbb{R}$. Gọi $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ và $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ lần lượt là các cơ sở của V và W. Cho f là một ánh xạ tuyến tính từ không gian vector V vào không gian vector W, $f \in L(V, W)$. Đặt

$$P = ([f(u_1)]_{\mathcal{C}}, [f(u_2)]_{\mathcal{C}}, \ldots, [f(u_n)]_{\mathcal{C}})$$

Khi đó ma trận P được gọi là ma trận biểu diễn của ánh xạ f theo cặp cơ sở $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, ký hiệu $P = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ hoặc $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.
Nếu $f \in L(V)$ thì ma trận $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ được gọi là ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính f, ký hiệu $[f]_{\mathcal{B}}$

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$$

và cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,2), u_3 = (1,1,1)\}$, $\mathcal{C} = \{v_1 = (1,3), v_2 = (2,5)\}$. Tìm $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$$

và cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,2), u_3 = (1,1,1)\}$, $\mathcal{C} = \{v_1 = (1,3), v_2 = (2,5)\}$. Tìm $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$

Ta có $[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $[f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \end{pmatrix}$, $[f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Vậy $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

Định lý

Cho V, W là các không gian vector với các cơ sở tương ứng là $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$. Giả sử $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó với mọi vector $x \in V$, ta có

$$[f(x)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[x]_{\mathcal{B}}$$

Hệ quả

Cho V là không gian vector trên trường $\mathbb{R}$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở trong V. Giả sử f là một toán tử tuyến tính trong V. Khi đó, với mọi $x \in V$ ta có

$$[f(x)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}$$

Ví dụ

Trong ví dụ trên ta lấy $x = (1, 2, 3)$, ta có $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Do đó

$$[f(x)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Mệnh đề

Cho V và W là các không gian vector hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{R}$. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ và $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ tương ứng là các cặp cơ sở trong V và W. Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ ta có

$$[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}')^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$$

Hệ quả

Cho $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở trong không gian vector hữu hạn chiều V trên trường $\mathbb{R}$. Khi đó với mọi toán tử tuyến tính f ta có

$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vector

$$u_1 = (1,1,0); u_2 = (0,2,1); u_3 = (2,3,1)$$

và ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 - x_2 + 3x_3)$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vector:

$$u_1 = (1, -1, 2); u_2 = (3, -1, 4); u_3 = (5, -3, 9)$$

1. Chứng tỏ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
2. Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là một ánh xạ tuyến tính thỏa

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Hãy tìm biểu thức của ánh xạ f.