Vi tích phân 1: Chương 3

Anh Ha Le

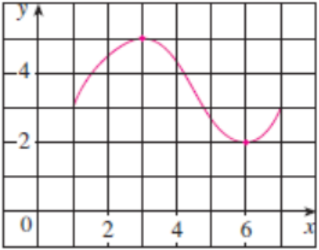
University of Sciences

Ngày 15 tháng 3 năm 2023

Outline

1 Ứng Dụng của Đạo Hàm
- Giá trị cực đại và cực tiểu
- Định lý giá trị trung bình
- Đạo hàm cho biết hình dáng của đồ thị
- Quy tắc l'Hospital
- Phương pháp Newton
- Nguyên hàm

Giá trị cực đại và cực tiểu

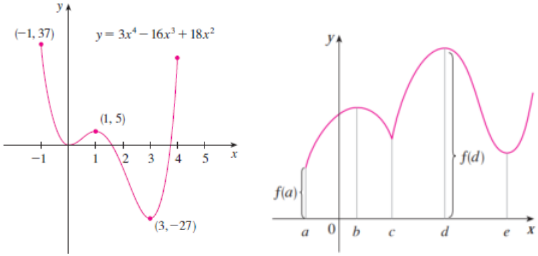


Định nghĩa (Cực đại, cực tiểu tuyệt đối)

Cho $c \in D$ với D miền xác định của hàm số f. Khi đó

- *giá trị* **cực đại tuyệt đối** *của D nếu $f(c) \geq f(x)$ với mọi $x \in D$*
- *giá trị* **cực tiểu tuyệt đối** *của D nếu $f(c) \leq f(x)$ với mọi $x \in D$*

Giá trị cực đại và cực tiểu

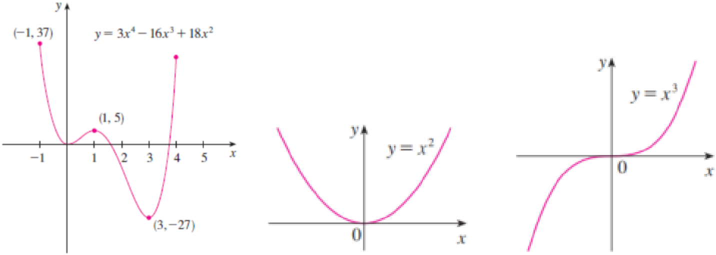


Định nghĩa (Cực đại, cực tiểu địa phương)

Cho $c \in D$ với D miền xác định của hàm số f. Khi đó

- *giá trị* **cực đại địa phương** *của D nếu $f(c) \geq f(x)$ với mọi x thuộc lân cận của c*
- *giá trị* **cực tiểu địa phương** *của D nếu $f(c) \leq f(x)$ với mọi x thuộc lân cận của c*

Giá trị cực đại và cực tiểu



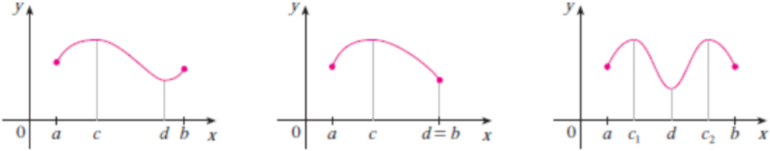
Ví dụ: Tìm giá trị cực tiểu địa phương, cực tiểu tuyệt đối, cực đại địa phương, cực đại tuyệt đối của đồ thị hàm số

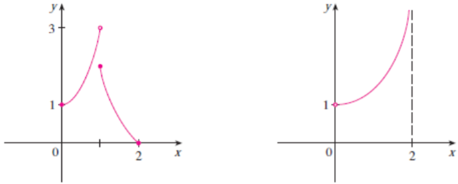
$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad -1 \leq x \leq 4$$

Giá trị cực đại và cực tiểu

Định nghĩa (Định lý cực trị)

Cho hàm số f liên tục trên đoạn đóng $[a, b]$ thì tồn tại điểm c và d thuộc $[a, b]$ sao cho $f(c)$ là giá trị nhỏ nhất và $f(d)$ là giá trị lớn nhất

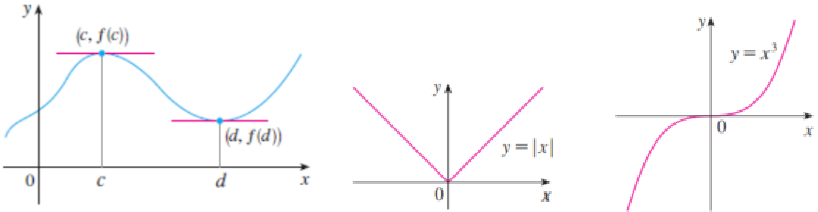


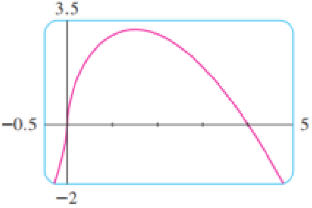


Giá trị cực đại và cực tiểu

Định nghĩa (Định lý Fermat)

Nếu f có cực đại hay cực tiểu địa phương tại c và nếu $f'(c)$ tồn tại thì $f'(c) = 0$





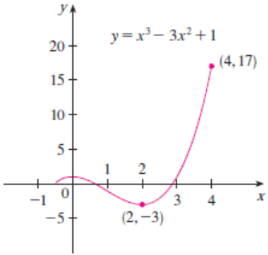
Tìm cực đại địa phương và cực tiểu địa phương của hàm số sau:
$f(x) = x^{3/5}(4 - x)$

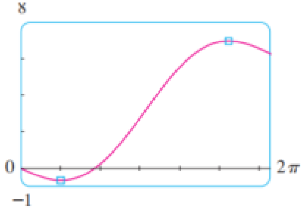
Tìm cực tiểu, cực đại

Để tìm các giá trị cực đại, cực tiểu tuyệt đối của hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$

- Tìm điểm c sao cho $f'(c) = 0$ hay $f'(c)$ không tồn tại
- Tìm giá trị của f tại a ($f(a)$) và b ($f(b)$)
- Giá trị lớn nhất các giá trị từ bước 1 đến bước 2 chính là giá trị cực đại tuyệt đối; còn giá trị nhỏ nhất các giá trị đó chính là giá trị cực tiểu tuyệt đối

Giá trị cực đại và cực tiểu





Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\frac{1}{2} \leq x \leq 4$$

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số sau:

$$f(x) = x - 2\sin(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

Outline

1. Ứng Dụng của Đạo Hàm
   - Giá trị cực đại và cực tiểu
   - Định lý giá trị trung bình
   - Đạo hàm cho biết hình dáng của đồ thị
   - Quy tắc l'Hospital
   - Phương pháp Newton
   - Nguyên hàm

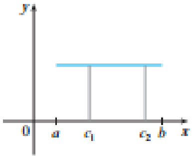
Định lý giá trị trung bình

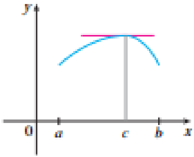
Định Lý (Định lý Rolle)

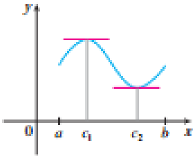
Cho hàm số f thỏa mãn 3 giải thiết sau:

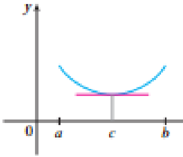
- f *liên tục trên đoạn* $[a, b]$
- f *khả vi trên khoảng* (a, b)
- $f(a) = f(b)$

Luôn tồn tại một số $c \in (a, b)$ *sao cho* $f'(c) = 0$

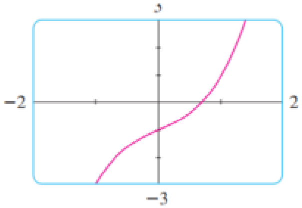








Định lý giá trị trung bình



Ví dụ: Tìm điểm c thỏa định lí Rolle của hàm số:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2 \text{ trên } [0,3]$$
$$f(x) = \cos(2x) \text{ trên } [\pi/8, 7\pi/8]$$

Ví dụ: Chứng minh phương trình $x^3 + x - 1 = 0$ có một nghiệm duy nhất
Ví dụ: Cho hàm só $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Ta có $f(-1) = f(1)$ nhưng không có điểm $c \in (-1,1)$ sao cho $f'(c) = 0$.???

Định lý giá trị trung bình

Định Lý (Định lý giá trị trung bình)

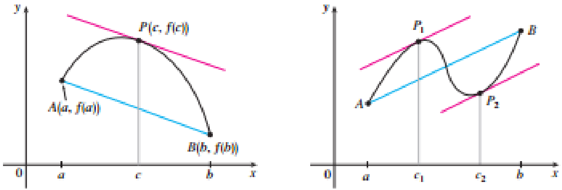
Cho hàm số f thỏa mãn 2 giải thiết sau:

- *f liên tục trên đoạn $[a, b]$*
- *f khả vi trên khoảng (a, b)*

Khi đó tồn tại một số $c \in (a, b)$ sao cho

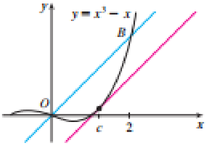
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

hoặc $$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



Định lý giá trị trung bình

Ví dụ: Chứng minh sự tồn tạ của c thông qua hàm số $f(x) = x^3 - x$ trên đoạn $[a, b]$



Ví dụ: Tìm điểm c thỏa định lý trung bình của hàm số sau:
$(a)\ f(x) = \sqrt{x},\ [0, 4],\quad (b)\ f(x) = e^{-x},\ [0, 2],\quad (c)\ f(x) = \ln(x),\ [1, 4]$
Ví dụ: Chứng minh rằng những phương trình chỉ có một nghiệm duy nhất.
$(a)\ f(x) = 2x + \cos(x),\qquad (b)\ x^3 + e^x = 0$
Ví dụ: Cho hàm số $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Chứng minh rằng không có điểm $c \in (0, 3)$ thỏa $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Giải thích tại sao???
Ví dụ: Giả sử rằng $3 \leq f'(x) \leq 5$ cho tất cả x. Chứng minh rằng $18 \leq f(8) - f(2) \leq 30$

Định Lý

Nếu $f'(x) = 0$ *với mọi điểm* $x \in (a, b)$ *thì* f *là hàm hằng*

Ví dụ: Cho hàm số f được định nghĩa sau

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0 \\ -1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Ví dụ: Chứng minh rằng $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$

Outline

1. Ứng Dụng của Đạo Hàm
   - Giá trị cực đại và cực tiểu
   - Định lý giá trị trung bình
   - Đạo hàm cho biết hình dáng của đồ thị
   - Quy tắc l'Hospital
   - Phương pháp Newton
   - Nguyên hàm

Hình dáng của đồ thị

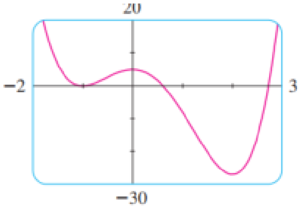
Tiêu chuẩn đồng biến/nghịch biến

(a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc một khoảng I thì hàm số f đồng biến trên I

(b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc một khoảng I thì hàm số f nghịch biến trên I

Tìm khoảng tăng và khoảng giảm của hàm số

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$$



Hình dáng của đồ thị

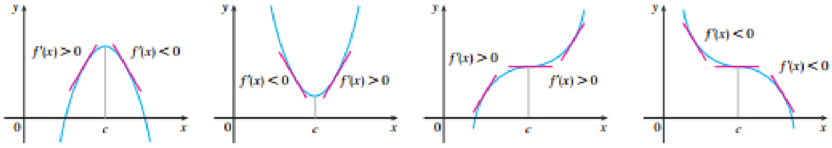
Tiêu chuẩn đạo hàm cấp một

Giả sử c là một điểm tới hạn của một hàm số liên tục f

(a) Nếu f' đổi dấu từ dương sang âm tại c, thì f là một cực đại địa phương tại c

(b) Nếu f' đổi dấu từ âm sang dương tại c, thì f là một cực tiểu địa phương tại c

(c) Nếu f' không đổi dấu tại c, thì f không có cực đại hay cực tiểu địa phương tại c

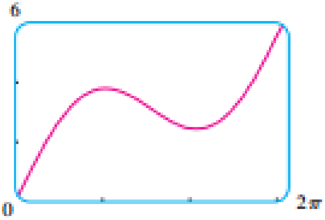


(a) Local maximum (b) Local minimum (c) No maximum or minimum (d) No maximum or minimum

Hình dáng của đồ thị

Ví dụ: Tìm các giá trị cực đại và cực tiểu địa phương của hàm số

$$g(x) = x + 2\sin(x) \qquad 0 \leq x \leq 2\pi$$

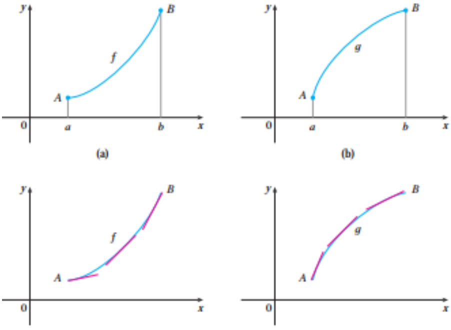


Ví dụ: Tìm điểm cực đại và cực tiểu của những hàm số sau:
$(a)\ f(x) = x^4 - 2x^2 + 3,\quad (b)\ f(x) = \cos^2(x) - 2\sin x,\ [0, 2\pi]$
$(c)\ f(x) = x^2 - x - \ln x$

Đồ thị lõm, lồi

Định nghĩa (Đồ thị lõm, lồi)

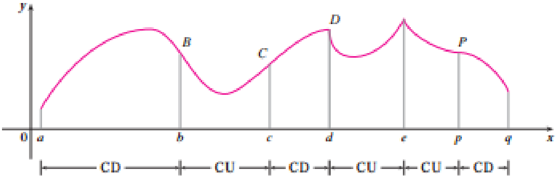
Nếu đồ thị hàm số f nằm trên tất cả những tiếp tuyến của nó trong một khoảng I cho trước thì đồ thị hàm số được gọi là **lõm** *trong khoảng I. Ngược lại, Nếu đồ thị hàm số f nằm dưới tất cả những tiếp tuyến của nó trong một khoảng I cho trước thì đồ thị hàm số được gọi là* **lồi** *trong khoảng I.*



(a) (b)

(a) Concave upward (b) Concave downward

Tiêu chuẩn lồi/lõm, Điểm uốn



Tiêu chuẩn lồi/lõm

(a) Nếu $f''(x) > 0$ với mọi $x \in I$, thì đồ thị của f lõm trên khoảng I

(b) Nếu $f''(x) < 0$ với mọi $x \in I$, thì đồ thị của f lồi trên khoảng I

Định nghĩa (Điểm uốn)

Một điểm P thuộc đường cong $y = f(x)$ được gọi là **điểm uốn** *nếu hàm số f liên tục tại đó và đường cong thay đổi từ lồi sang lõm hay ngược lại*

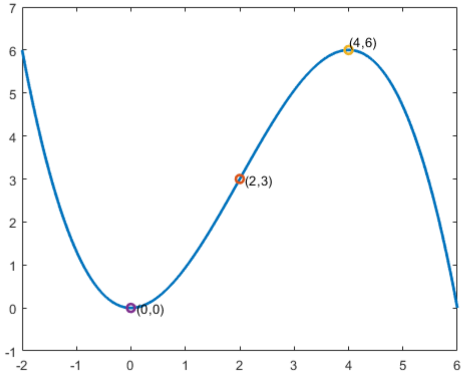
Tiêu chuẩn lồi/lõm, Điểm uốn

Ví dụ: Phát họa đồ thị của hàm f thỏa mãn:

(i) $f(0) = 0,\ f(2) = 3,\ f(4) = 6,\ f'(0) = f'(4) = 0$

(ii) $f'(x) > 0$ với $0 < x < 4$, $f'(x) < 0$ với $x < 0$ và với $x > 4$

(iii) $f''(x) > 0$ với $x < 2$, $f''(x) < 0$ với $x > 2$



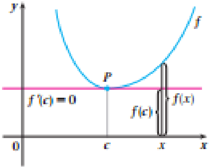
Tiêu chuẩn đạo hàm cấp 2

Tiêu chuẩn đạo hàm cấp 2

Giả sử f'' liên tục tại lân cận điểm c

(a) Nếu $f'(c) = 0$ và $f''(c) > 0$ thì f có cực tiểu địa phương tại c

(b) Nếu $f'(c) = 0$ và $f''(c) < 0$ thì f có cực đại địa phương tại c

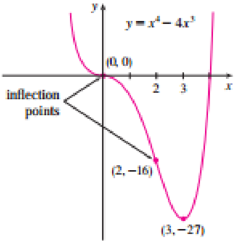


Ví dụ: Tìm cực đại và cực tiểu địa phương dùng tiêu chuẩn đạo hàm cấp 1 và 2.

$$(a)\ f(x) = \frac{x^2}{x-1}, \quad (b)\ f(x) = 1 + 3x^2 - x^3$$

Tiêu chuẩn đạo hàm cấp 2

Ví dụ:
(a) Tìm điểm cực trị của hàm số $f(x) = x^4(x-1)^3$.
(b) Tìm cực đại và cực tiểu địa phương bằng đạo hàm cấp 2.
(c) Tìm cực đại và cực tiểu địa phương bằng đạo hàm cấp 1.
Ví dụ: Xét tính lồi lõm của đường cong $y = x^4 - 4x^3$, tìm các điểm uốn, cực đại, cực tiểu địa phương.



Ví dụ: Xét tính lồi lõm của hàm số $f(x) = x - \sin x,\ [0, 4\pi]$, tìm các điểm uốn, cực đại, cực tiểu địa phương.

Outline

1. Ứng Dụng của Đạo Hàm
   - Giá trị cực đại và cực tiểu
   - Định lý giá trị trung bình
   - Đạo hàm cho biết hình dáng của đồ thị
   - Quy tắc l'Hospital
   - Phương pháp Newton
   - Nguyên hàm

Quy tắc l'Hospital

Có cách dễ dàng nào để tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \text{ hay } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Quy tắc L'Hospital's

Giả sử f và g khả vi, và $g'(x) \neq 0$ trên một lân cận của a. Giả sử

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ and } \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

hay

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \text{ and } \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

và tồn tại $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ hữu hạn hay vô hạn thì

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Quy tắc l'Hospital

Ví dụ: Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to\pi^-}(\sec x-\tan x)$$

Dạng tích

Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$, ta có thể tích giới hạn

$$\lim_{x\to a} fg(x)=\lim_{x\to a}\frac{f}{1/g} \text{ hay } \lim_{x\to a} fg(x)=\lim_{x\to a}\frac{g}{1/f}$$

Ví dụ: Tính giới hạn

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x), \qquad \lim_{x\to\infty}\sqrt{x}e^{-x/2}$$

Dạng hiệu

Nếu $\lim_{x\to a} = \infty$ và $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, để tính $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x))$, ta dùng biến đổi đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$ hay $\frac{0}{0}$ và dùng quy tắc L'Hospital để tính giới hạn

Ví dụ: Tính giới hạn

$$\lim_{x\to\pi^-}(\sec x - \tan x), \quad \lim_{x\to 0}(\cot x - \frac{1}{x})$$

Dạng mũ

Nếu giới hạn của $[f(x)]^{g(x)}$ có dạng 1^∞, ∞^0 hoặc 0^0 thì chúng ta có thể đưa về dạng $\frac{0}{0}$ bằng cách sử dụng công thức $a^b = e^{b\ln(a)}$

Ví dụ: Tính các giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 0^+}(1+\sin(4x))^{\cot x}, \quad \lim_{x\to 0^+} x^x, \quad \lim_{x\to 0^+}(\cos(x))^{1/x^2}$$

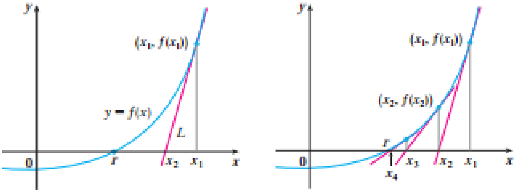
Outline

1. Ứng Dụng của Đạo Hàm
   - Giá trị cực đại và cực tiểu
   - Định lý giá trị trung bình
   - Đạo hàm cho biết hình dáng của đồ thị
   - Quy tắc l'Hospital
   - Phương pháp Newton
   - Nguyên hàm

Phương pháp Newton

Để giải phương trinh sau:

$$48x(1+x)^{60} - (1+x)^{60} + 1 = 0$$



Cho x_1,để tính x_2 như trong hình. Ta có đường thẳng tiếp tiếp tại $(x_1, f(x_1))$

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Phương pháp Newton

Để tính x_2, ta có công thức

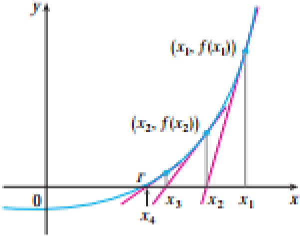
$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

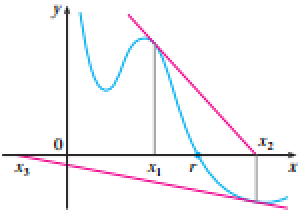
hay

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Vậy ta có thể tổng quát hóa khi tìm giá trị x_{n+1} khi biết x_n:

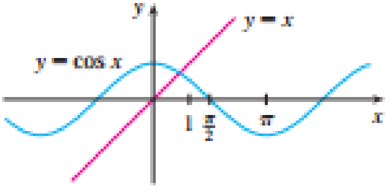
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$





Phương pháp Newton

Ví dụ: Bắt đầu với $x_1 = 2$, tìm nghiệm xấp xĩ thứ ba x_3 của phương trình:
$x^3 - 2x - 5 = 0$
Ví dụ: Sử dụng phương pháp Newton để tìm $\sqrt[6]{2}$ chính xác đến 8 chữ số thập phân
Ví dụ: Tìm nghiệm của phương trình $\cos(x) = x$, lấy chính xác đến 6 chữ số thập phân



Ví dụ: Tìm nghiệm chính xác đến 6 con số: $(x-2)^2 = \ln x$

Outline

1. Ứng Dụng của Đạo Hàm
    - Giá trị cực đại và cực tiểu
    - Định lý giá trị trung bình
    - Đạo hàm cho biết hình dáng của đồ thị
    - Quy tắc l'Hospital
    - Phương pháp Newton
    - Nguyên hàm

Nguyên hàm

Định nghĩa (Nguyên hàm)

Một hàm số F *được gọi là nguyên hàm của* f *trên khoảng* I *nếu* $F'(x) = f(x)$ *với mọi* $x \in I$

Định Lý (Nguyên hàm)

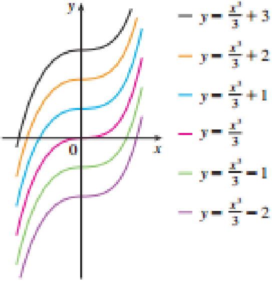
Nếu F *là nguyên hàm của* f *trên khoảng* I, *thì nguyên hàm của* f *trên khoảng* I *có dạng tổng quát:*

$$F(x) + C$$

với C *là hằng số tùy ý*

Nguyên hàm

Ví dụ: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$



Ví dụ: Tìm nguyên hàm của các hàm sau:

$(a)\ f(x) = \sin(x) \qquad (b)\ f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad (c)\ f(x) = x^n,\ n \neq -1$

Bảng nguyên hàm

Hàm số	Nguyên hàm	Hàm số	Nguyên Hàm
$cf(x)$	cF(x)	$\sec^2(x)$	$\tan(x)$
$f(x)+g(x)$	$F(x)+G(x)$	$\sec(x)\tan(x)$	$\sec(x)$
$x^n (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1}(x)$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1}(x)$
e^x	e^x	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$		

Ví dụ: Tìm tất cả hàm số g sao cho $g'(x) = 4\sin(x) + \dfrac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$

Ví dụ: Tìm f nếu $f'(x) = x\sqrt{x}$ và $f(1) = 2$

Ví dụ: Tìm f nếu $f'(x) = e^x + 20(1+x^2)^{-1}$ và $f(0) = -2$