Bài giảng Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Đại học Khoa học Tự nhiên, Tp Hồ Chí Minh

Chương 1

MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Nội dung

Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận

1.1. Định nghĩa và ký hiệu.
1.2. Ma trận vuông.
1.3. Các phép toán ma trận.

Định nghĩa

Một ma trận loại $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ là một bảng chữ nhật gồm m dòng, n cột với mn hệ số trong $\mathbb{R}$ có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Viết tắt: $A = (a_{ij})_{m \times n}$ hay $A = (a_{ij})$, trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

a_{ij} là hệ số ở dòng i, cột j của ma trận A (hệ số này còn được ký hiệu là A_{ij}).
Ký hiệu $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ là tập hợp tất cả những ma trận loại $m \times n$ trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}); B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

Ma trận có các hệ số bằng 0, được gọi là ma trận không, ký hiệu $0_{m\times n}$ (hay 0).

Ví dụ

$$0_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa

Ma trận vuông cấp n là một ma trận loại $n \times n$, (số dòng bằng số cột). Ký hiệu $M_n(\mathbb{R})$ là tập hợp các ma trận vuông cấp n.

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),\ 0_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa

Nếu $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ thì đường chứa các phần tử $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ được gọi là đường chéo chính hay đường chéo của A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa

Một *ma trận chéo cấp n* là một ma trận vuông cấp n mà tất cả các hệ số nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0. Nếu A là một ma trận chéo cấp n, ta ký hiệu $A = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Ví dụ

$$A = diag(1, 2, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa

Ma trận đơn vị cấp n, ký hiệu I_n hay I, là ma trận chéo cấp n mà tất cả các hệ số nằm trên đường chéo chính đều bằng 1.

Ví dụ

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa

Ma trận tam giác trên (tương ứng *ma trận tam giác dưới*) là một ma trận vuông mà tất cả các hệ số nằm phía dưới (tương ứng phía trên) đường chéo chính đều bằng 0. Như vậy,

- $A = (a_{ij})_{n \times n}$ là ma trận tam giác trên khi và chỉ khi $a_{ij} = 0, \forall 1 \leq j < i \leq n$.
- $B = (b_{ij})_{n \times n}$ là ma trận tam giác dưới khi và chỉ khi $b_{ij} = 0, \forall 1 \leq i < j \leq n$.

Nhận xét

Ma trận vuông A là ma trận đường chéo khi và chỉ khi A vừa là ma trận tam giác trên vừa là ma trận tam giác dưới.

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa (so sánh hai ma trận)
Cho hai ma trận cùng loại $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$. Ta nói A bằng B, ký hiệu $A = B$, nếu $a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \overline{1,m}, j \in \overline{1,n}$.

Ví dụ
Tìm x, y, z để

$$\begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ 2x-1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y-4 & 1 \\ y-1 & 2z+2 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa (phép lấy chuyển vị)

Cho $A = (a_{ij})$ là một ma trận loại $m \times n$. Ta gọi *ma trận chuyển vị* của A, ký hiệu $A^\top$, là ma trận loại $n \times m$, có được từ A bằng cách xếp các dòng của A thành các cột tương ứng, nghĩa là nếu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ thì } A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Nếu $A^\top = A$ thì ta nói A là *ma trận đối xứng*. Nếu $A^\top = -A$ thì nói A là *ma trận phản xứng*.

Tính chất

Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó

- $(A^\top)^\top = A$;
- $A^\top = B^\top \Leftrightarrow A = B$.

Ví dụ

Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ ta có $A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ là ma trận đối xứng.

$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận phản xứng.

Định nghĩa (Phép nhân vô hướng với ma trận)
Cho ma trận $A = (a_{ij})$ và số thực $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta định nghĩa αA là ma trận có từ A bằng cách nhân tất cả các hệ số của A với α, nghĩa là

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

Ma trận $(-1)A$ được ký hiệu là $-A$, được gọi là ma trận đối của A.

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, ta có $2A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$,
$-A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Tính chất

Với $A = (a_{ij})$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có

- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
- $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$;
- $0.A = 0$ *và* $1.A = A$.

Định nghĩa (Phép cộng ma trận)

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó tổng của A và B, ký hiệu $A + B$, là ma trận được xác định bởi:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

Ký hiệu $A - B := A + (-B)$ và gọi là *hiệu* của A và B.

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Tính $A + B$ và $A - B$.

Tính chất

Với $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *và* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *ta có*

i. $A + B = B + A$;

ii. $(A + B) + C = A + (B + C)$;

iii. $0_{m\times n} + A = A + 0_{m\times n} = A$;

iv. $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}$;

v. $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$;

vi. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

vii. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

viii. $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$.

Định nghĩa (phép nhân ma trận)

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{n\times p}$ sao cho số cột của A bằng số dòng của B. Ta định nghĩa *tích* của hai ma trận A và B, ký hiệu là AB, là ma trận được xác định như sau:

- AB có kích thước $m \times p$.
- AB có hệ số ở dòng i, cột j được tính bởi công thức

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nj} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, tìm tích $AB = ?$

Tính chất

Với $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B, B_1, B_2 \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, $D_1, D_2 \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$, *ta có*

- $I_m A = A$ *và* $AI_n = A$. *Đặc biệt, với* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *ta có*
$$I_n A = AI_n = A.$$
- $0_{p\times m}A = 0_{p\times n}$ *và* $A0_{n\times q} = 0_{m\times q}$. *Đặc biệt, với* $A = M_n(\mathbb{R})$, *ta có*
$$0_{n\times n}A = A0_{n\times n} = 0_{n\times n}.$$
- $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

- Phép nhân ma trận có tính chất kết hợp, nghĩa là

$$(AB)C = A(BC).$$

- Phép nhân ma trận có tính chất phân phối đối với phép cộng , nghĩa là

$$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2;$$

$$(D_1 + D_2)A = D_1A + D_2A.$$

Chú ý

1. *Phép nhân ma trận không có tính giao hoán, nghĩa là thông thường ta có* $AB \neq BA$.
2. *Nhiều tính chất quen thuộc của phép nhân giữa các số thực không còn đúng đối với phép nhân ma trận, chẳng hạn: Với* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *ta có* $A^2 = 0$; $AB = AC$, *nhưng* A, B *đều khác* 0 *và* $B \neq C$.

Định nghĩa (lũy thừa ma trận vuông)

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ta gọi lũy thừa bậc k của A là một ma trận thuộc $M_n(\mathbb{R})$, ký hiệu A^k, được xác định như sau:

$$A^0 = I_n; A^1 = A; A^2 = AA; \ldots ; A^k = A^{k-1}A.$$

Như vậy $A^k = \underbrace{A \cdots A}_{\text{k lần}}$.

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^2, A^3,..., từ đó suy ra A^{100}.

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^2, A^3,..., từ đó suy ra A^{100}.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dùng quy nạp chứng minh rằng $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \times 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Từ đó suy ra

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 100 \times 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^{100}.

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^n với $n > 1$.

Tính chất

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ *và* $k, l \in \mathbb{N}$. *Khi đó:*

- $I^k = I$;
- $A^{k+l} = A^k A^l$;
- $A^{kl} = (A^k)^l$.

Định nghĩa

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và

$$f(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

là một đa thức bậc m trên $\mathbb{R}$. Khi đó ta định nghĩa

$$f(A) = \alpha_m A^m + \alpha_{m-1} A^{m-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n$$

và ta gọi $f(A)$ là đa thức theo ma trận A.

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ và $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$. Tính $f(A)$.

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ và $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$. Tính $f(A)$.

Ta có $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $f(A) = 3A^2 - 2A + 2I_2$.

Do đó

$$f(A) = 3\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 27 & -33 \\ -11 & 16 \end{pmatrix}$$

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

2.1. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.
2.2. Ma trận bậc thang.
2.3. Hạng của ma trận.

2.1. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Ta gọi *phép biến đổi sơ cấp trên dòng*, viết tắt là phép *BĐSCTD* trên A, là một trong ba loại biến đổi sau:

- Loại 1: Hoán vị hai dòng i và j $(i \neq j)$. Ký hiệu: $d_i \leftrightarrow d_j$.
- Loại 2: Nhân dòng i với một số $\alpha \neq 0$. Ký hiệu: $d_i := \alpha d_i$.
- Loại 3: Cộng vào một dòng i với β lần dòng j $(j \neq i)$. Ký hiệu: $d_i := d_i + \beta d_j$.

Với φ là một phép biến đổi sơ cấp, ký hiệu $\varphi(A)$ là ma trận có từ A qua φ.

Ví dụ

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 := 2d_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$d_3 = d_3$

$\rightarrow$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Nhận xét

1. $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A$
2. $A \xrightarrow{d_i := \alpha d_i} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i := \frac{1}{\alpha} d_i} A$
3. $A \xrightarrow{d_i := d_i + \beta d_j} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i := d_i - \beta d_j} A$

Định nghĩa

Cho $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Ta nói A *tương đương dòng* với B, ký hiệu $A \sim B$, nếu B có được từ A qua hữu hạn phép biến đổi sơ cấp trên dòng nào đó. Vậy $A \sim B \Leftrightarrow \exists \varphi_1, ..., \varphi_k$ là các phép BĐSCTD sao cho

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \xrightarrow{\varphi_2} A_2 \cdots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = B$$

Định nghĩa

Cho ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, hệ số khác 0 đầu tiên kể từ bên trái của mỗi dòng của ma trận A được gọi là phần tử cơ sở của dòng đó.

Định nghĩa

Cho ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Một dòng của A được gọi là dòng bằng 0 nếu tất cả các hệ số của dòng đó đều bằng 0. Một dòng của A được gọi là dòng khác 0 nếu có ít nhất một hệ số của dòng đó khác 0.

Ví dụ

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Các hệ số màu đỏ là các phần tử cơ sở của mỗi dòng của ma trận A.

Dòng 1 và 2 của ma trận A là các dòng khác 0. Dòng 3 của ma trận A là dòng bằng 0.

Định nghĩa

Ma trận A là *ma trận bậc thang* nếu A thỏa hai tính chất sau:

1. Các dòng khác 0 luôn luôn ở trên các dòng bằng 0 của A.
2. Trên hai dòng khác 0 của A, phần tử cơ sở của dòng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa phần tử cơ sở của dòng trên.

2.2. Ma trận bậc thang

Như vậy ma trận bậc thang sẽ có dạng

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & \dots & \dots & a_{1k_2} & \dots & \dots & a_{1k_r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2k_2} & \dots & \dots & a_{2k_r} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rk_r} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa (Ma trận bậc thang rút gọn)

Ma trận A được gọi là *ma trận bậc thang rút gọn* nếu các tính chất sau được thoả

1. A có dạng bậc thang.
2. Các phần tử cơ sở đều bằng 1.
3. Trên cột có chứa phần tử cơ sở, các hệ số ngoài phần tử cơ sở đều bằng 0.

Ví dụ

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C là ma trận bậc thang rút gọn, D không là ma trận bậc thang rút gọn.

Định nghĩa

Nếu A tương đương dòng với một ma trận bậc thang B, thì ta nói B là một dạng bậc thang của ma trận A.

Ví dụ

Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ta thấy A tương dương dòng với B qua phép biến đổi $d_2 = d_2 - d_1$. Vậy B là một dạng bậc thang của A.

Thuật toán Gauss - Tìm dạng bậc thang của ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Mô tả chung

- Đầu tiên ta xác định phần tử cơ sở của dòng 1.
  - Nếu phần tử cơ sở của dòng 1 nằm bên phải phần tử cơ sở của một dòng dưới nó, ta thực hiện đổi dòng.
  - Nếu phần tử cơ sở của dòng 1 nằm cùng cột hoặc nằm bên trái phần tử cơ sở của các dòng dưới nó, thì ta thực hiện bước tiếp theo.
- Ta khử các hệ số khác 0 (nằm cùng cột) dưới phần tử cơ sở của dòng 1 (dùng phần tử cơ sở của dòng 1 làm chuẩn, ta dùng phép biến đổi loại 3 để khử)(lấy dòng i-bội của dòng 1)
- Sau khi khử các hệ số khác 0 (nằm cùng cột) dưới phần tử cơ sở của dòng 1, ta bắt đầu xác định phần tử cơ sở của dòng 2, và tiếp tục thực hiện quá trình trên cho các dòng phía dưới dòng 2....
- Tiếp tục quá trình trên cho đến khi ta được ma trận bậc thang.

Thuật toán Gauss - Tìm dạng bậc thang của ma trận $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

Thuật toán chi tiết

- Bước 1: $i := 1, j := 1$.
- Bước 2: Nếu $i > m$ hoặc $j > n$ thì kết thúc.
- Bước 3: Nếu $a_{ij} = 0$ thì sang bước 4. Nếu $a_{ij} \neq 0$ thì thực hiện các phép BĐSCTD sau:

  $$d_k := d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i, \quad k > i.$$

  Sau đó $i := i + 1, j := j + 1$ và quay về bước 2.
- Bước 4: Nếu $a_{kj} = 0$ với mọi $k > i$ thì $j := j + 1$ và quay về Bước 2. Nếu $a_{kj} \neq 0$ với một $k > i$ nào đó thì chọn một k như vậy và thực hiện phép BĐSCTD: $d_i \leftrightarrow d_k$ và quay về Bước 3.

Ví dụ

Tìm một dạng bậc thang của ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$

Ví dụ

Tìm một dạng bậc thang của ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-6d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_4:=d_4-\frac{3}{2}d_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_4:=d_4-\frac{5}{2}d_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nhận xét

Một ma trận A thì có nhiều dạng bậc thang, tuy nhiên các dạng bậc thang của A đều có chung số dòng khác 0.

Định nghĩa

Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, số dòng khác 0 của một dạng bậc thang của A là hạng của A, ký hiệu $r(A)$.

Mệnh đề

Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Khi đó:*

i. $0 \le r(A) \le m, n$;

ii. $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

iii. $r(A^\top) = r(A)$;

iv. *Nếu* $A \sim B$ *thì* $r(A) = r(B)$.

Ví dụ

Tìm hạng của các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -3 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị của m để $r(A) = 3$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị của m để $r(B) = 2$ với $B = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$

Dạng bậc thang rút gọn

Định nghĩa

Nếu A tương đương dòng với một ma trận bậc thang rút gọn B, thì B được gọi là dạng bậc thang rút gọn của A.

Ví dụ

Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ta thấy C là dạng bậc thang rút gọn của A qua phép biến đổi $d_2 := d_2 - d_1, d_2 := -d_2, d_1 := d_1 - 2d_2$.

Nhận xét

Dạng bậc thang rút gọn của một ma trận A là duy nhất và được ký hiệu R_A.

Thuật toán Gauss-Jordan. Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Mô tả chung

- Đầu tiên ta đưa ma trận về dạng bậc thang.
- Chuyển các phần tử cơ sở của mỗi dòng thành số 1 (dùng phép biến đổi loại 2).
- Trên các cột chứa phần tử cơ sở, ta khử các số khác 0 (dùng phần tử cơ sở làm chuẩn, sau đó thực hiện biến đổi loại 3).

Thuật toán chi tiết

Để đưa ma trận A về dạng bậc thang rút gọn , ta làm như thuật toán Gauss ở các Bước $1, 2, 4$, riêng ở Bước 3 ta cần thực hiện các phép biến đổi sau:

$$d_k := d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i \text{ với } k \in \overline{1, n}; k \neq i;$$

$$d_i := \frac{1}{a_{ij}} d_i.$$

Dạng bậc thang rút gọn

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$, tìm R_A?

Dạng bậc thang rút gọn

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$, tìm R_A?

$R_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -18 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ R_A có được từ A thông qua các phép biến đổi: $d_2 := d_2 + 2d_1$, $d_3 := d_3 - 3d_1$, $d_2 := -1d_2$, $d_1 := d_1 - 2d_2$.

Ví dụ

Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4:=d_4-6d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-2d_1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2:=-\frac{1}{2}d_2]{\substack{d_1:=d_1+\frac{1}{2}d_2 \\ d_4:=d_4-\frac{3}{2}d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-\frac{5}{2}d_3]{\substack{d_1:=d_1-\frac{1}{2}d_3 \\ d_2:=d_2-\frac{5}{2}d_3}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_A.$$

Ta thấy R_A là dạng bậc thang rút gọn của A.

3. Hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa

1. Một hệ phương trình tuyến tính trên $\mathbb{R}$ gồm m phương trình, n ẩn số là một hệ có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (*)$$

trong đó

- a_{ij} là các hệ số;
- $b_i \in \mathbb{R}$ là các hệ số tự do;
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các ẩn số nhận giá trị trong $\mathbb{R}$;

Nếu các hệ số $b_i = 0$ thì ta nói hệ phương trình tuyến tính trên là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất trên $\mathbb{R}$.

2. Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận hệ số* của hệ $(*)$.

Ma trận $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ được gọi là cột các *hệ số tự do* của hệ $(*)$.

Ma trận $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ được gọi là cột các ẩn của hệ $(*)$.

Khi đó hệ $(*)$ được viết dưới dạng $AX = B$. Đặt

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

được gọi là *ma trận bổ sung* (hay *ma trận mở rộng*) của hệ $(*)$.

3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa

Ta nói $u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ là nghiệm của hệ phương trình $(*)$ nếu ta thay thế $x_1 := \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n := \alpha_n$ thì tất cả các phương trình trong $(*)$ đều thỏa.

Định nghĩa

Hai hệ phương trình là tương đương nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Nhận xét

Khi giải một hệ phương trình tuyến tính, các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ tương đương:

- *Hoán đổi hai phương trình cho nhau.*
- *Nhân hai vế của một phương trình cho một số khác* 0.
- *Cộng vào một phương trình một bội của phương trình khác.*

Định lý

Nếu hai hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng tương đương dòng với nhau thì hai hệ phương trình đó tương đương nhau.

Ví dụ

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ 2x - y + z = 1; \\ x + y + z = 4. \end{cases} \qquad (1)$$

3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3:=d_3-d_1]{d_2:=d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-2d_2]{d_1:=d_1+d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[d_2:=d_2-5d_3]{\substack{d_1:=d_1-3d_3 \\ d_3:=-\frac{1}{7}d_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ta có $\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Suy ra

$$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 0y & + & 0z & = & 1; \\ 0x & + & y & + & 0z & = & 2; \\ 0x & + & 0y & + & z & = & 1. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1; \\ y & = & 2; \\ z & = & 1. \end{array}\right.$$

Ví dụ

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 10. \end{cases} \qquad (2)$$
Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính, ta có
$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_3:=d_3-5d_1]{d_2:=d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-2d_2]{d_1:=d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \qquad - 9z = 9 \\ \qquad y + 7z = -5. \end{cases}$$

Như vậy nghiệm của hệ (2) là $\begin{cases} x = 9 + 9t \\ y = -5 - 7t \\ z = t. \end{cases}$

Ví dụ

Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases} \qquad (3)$$

Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính, ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_3:=d_3-5d_1]{d_2:=d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -15 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-2d_2]{d_1:=d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Hệ (3) vô nghiệm vì $0x + 0y + 0z = -5$.

Nhận xét

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

luôn có một nghiệm $u = (0, 0, \dots, 0)$.
Nghiệm này được gọi là nghiệm tầm thường.

Định lý

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính chỉ có 3 trường hợp sau:

- *Vô nghiệm;*
- *Duy nhất một nghiệm;*
- *Vô số nghiệm.*

Có 2 phương pháp

- Gauss
- Gauss-Jordan

Phương pháp Gauss

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B)$.
Bước 2. Đưa ma trận $\tilde{A}$ về dạng bậc thang R.
Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang R mà ta kết luận nghiệm. Cụ thể :

- Trường hợp 1. Ma trận R có 1 dòng là

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \neq 0 \end{array}\right)$$

Kết luận hệ phương trình vô nghiệm.

- Trường hợp 2. Ma trận R có dạng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & \alpha_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất. Việc tính nghiệm được thực hiện từ dưới lên trên.

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

- Trường hợp 3. Khác 2 trường hợp trên, khi đó hệ có vô số nghiệm, và
  - Ẩn tương ứng với các cột không chứa phần tử cơ sở của dòng nào sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
  - Ẩn tương ứng với cột có phần tử cơ sở sẽ được tính từ dưới lên trên và theo các ẩn tự do.

Ví dụ

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ x_2 + 2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_3 = 7; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

Ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 18 \end{array}\right)$

Dạng bậc thang R của ma trận mở rộng $\tilde{A}$ là

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

Suy ra nghiệm của hệ là $\begin{cases} x_1 & = & 2; \\ x_2 & = & 1; \\ x_3 & = & 5; \\ x_4 & = & -3. \end{cases}$

Ví dụ

Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$$

Ta có ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right)$

Dạng bậc thang R của ma trận mở rộng:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ có nghiệm: $\begin{cases} x_3 = t \in \mathbb{R} \\ x_4 = s \in \mathbb{R} \\ x_2 = -2 + 10t - 17s \\ x_1 = 5 - 17t + 29s \end{cases}$

Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3; \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5; \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Ma trận mở rộng $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{array}\right)$

Dạng bậc thang R của ma trận mở rộng:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Phương pháp Gauss-Jordan

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B)$.

Bước 2. Đưa ma trận $\tilde{A}$ về dạng bậc thang rút gọn R_A.

Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang rút gọn R_A mà ta kết luận nghiệm. Cụ thể :

- Trường hợp 1.Ma trận R_A có một dòng $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & \neq 0 \end{array}\right)$. Kết luận hệ phương trình vô nghiệm.

- Trường hợp 2.Ma trận R_A có dạng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất là

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$$

- Trường hợp 3. Khác hai trường hợp trên, khi đó hệ có vô số nghiệm, và
  - Ẩn tương ứng với các cột không có phần tử cơ sở của dòng nào sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
  - Ẩn tương ứng với cột có phần tử cơ sở 1 sẽ được tính theo các ẩn tự do.

  Số ẩn tự do được gọi là bậc tự do của hệ phương trình.

Định lý (Kronecker-Capelli)

Nếu $\tilde{A} = (A|B)$ *là ma trận mở rộng của hệ gồm n ẩn dạng* $AX = B$ *thì* $r(\tilde{A}) = r(A)$ *hoặc* $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$. *Hơn nữa,*

- *nếu* $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$ *thì hệ vô nghiệm;*
- *nếu* $r(\tilde{A}) = r(A) = n$ *thì hệ có nghiệm duy nhất;*
- *nếu* $r(\tilde{A}) = r(A) < n$ *thì hệ có vô số nghiệm với bậc tự do là* $n - r(A)$.

Ví dụ

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số m.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 9x_2 + 6x_3 - 15x_4 = 2; \\ 13x_1 + 22x_2 + 13x_3 - 22x_4 = 2m. \end{cases}$$

Ta có ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & -15 & 2 \\ 13 & 22 & 13 & -22 & 2m \end{array}\right)$

Dạng bậc thang R của ma trận mở rộng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m-4 \end{array}\right)$$

Biện luận

- Với $2m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$. Khi đó hệ vô nghiệm.
- Với $m = 2$, hệ tương đương với hệ sau :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 1 \\ \quad\;\; - x_2 - 3x_3 + 11x_4 = -2 \\ \qquad\qquad - x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

Chọn $x_4 = t$ ta tính được

$$\begin{cases} x_3 &= & 1 - x_4 &= & 1 - t; \\ x_2 &= & 2 - 3x_3 + 11x_4 &= & -1 + 14t; \\ x_1 &= & 1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= & 1 - 21t \end{cases}$$

Vậy khi $m = 2$, hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - 21t, -1 + 14t, 1 - t, t)$$

với $t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Ví dụ

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số m

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = m; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + mx_4 = m^2 - 6m + 4. \end{cases}$$

Ta có ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & m \\ 4 & 3 & -1 & m & m^2 - 6m + 4 \end{array}\right)$$

Dạng bậc thang của ma trận mở rộng

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m^2 - 7m \end{array}\right)$$

Biện luận

- Với $m - 7 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 7$, hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x_4 &= & m & & ; \\ x_3 &= & m + 1 - x_4 &= & 1; \\ x_2 &= & 1 + 2x_3 - 2x_4 &= & 3 - 2m; \\ x_1 &= & 1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= & -1. \end{cases}$$

Vậy khi $m \neq 7$ hệ đã cho có duy nhất một nghiệm là:
$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 3 - 2m, 1, m)$.

- Với $m = 7$, hệ tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

Chọn $x_4 = t$ ta tính được

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_4 = 8 - t; \\ x_2 = 1 + 2x_3 - 2x_4 = 17 - 4t; \\ x_1 = 1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -8 + t. \end{cases}$$

Vậy khi $m = 7$ hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8 + t, 17 - 4t, 8 - t, t)$$

với $t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

4. Ma trận khả nghịch

4.1. Định nghĩa.
4.2. Nhận diện và tìm ma trận khả nghịch.

Định nghĩa

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ta nói A khả nghịch nếu tồn tại ma trận B sao cho $AB = BA = I_n$. Nếu B thỏa điều kiện trên được gọi là ma trận nghịch đảo của A.

Nhận xét

Ma trận nghịch đảo của một ma trận khả nghịch là duy nhất. Ta ký hiệu ma trận nghịch đảo của A là A^{-1}.

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Khi đó $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Mệnh đề

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Giả sử A khả nghịch và có ma trận nghịch đảo là A^{-1}. Khi đó

- A^{-1} *khả nghịch và* $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $A^\top$ *khả nghịch và* $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, αA *khả nghịch và* $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$.

Mệnh đề

Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Giả sử A và B khả nghịch thì AB khả nghịch, hơn nữa

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Định lý

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

i. *A khả nghịch.*

ii. $r(A) = n$.

iii. $A \sim I_n$.

iv. *Tồn tại các phép BĐSCTD $\varphi_1, ..., \varphi_k$ biến ma trận A thành ma trận đơn vị I_n. $A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \rightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = I_n$*

Hơn nữa, khi đó qua chính các phép BĐSCTD $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, ma trận đơn vị I_n sẽ biến thành ma trận nghịch đảo A^{-1}:
$I_n \xrightarrow{\varphi_1} B_1 \rightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_k} B_k = A^{-1}$.

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Lập $(A|I_n)$ và dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng bậc thang rút gọn: $(A|I_n) \xrightarrow{\varphi_1} (A_1|B_1) \rightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_p} (A_p|B_p) \ldots$

Trong quá trình biến đổi có thể xảy ra hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Trong dãy biến đổi trên, tồn tại p sao cho ma trận A_p có ít nhất một dòng hay một cột bằng 0. Khi đó A không khả nghịch.
- Trường hợp 2: Mọi ma trận A_i trong dãy biến đổi trên đều không có dòng hay cột bằng 0. Khi đó ma trận cuối cùng trong dãy trên có dạng $(I_n|B)$. Ta có A khả nghịch và $A^{-1} = B$.

Chú ý

Nếu bài toán chỉ yêu cầu kiểm tra ma trận A có khả nghịch hay không, ta chỉ cần tính hạng của ma trận (dùng Gauss).

Ví dụ

Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}$$

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 14 & 19 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1\\ d_3:=d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-d_2]{d_1:=d_1-2d_2} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-2d_3]{\substack{d_1:=d_1-7d_3\\ d_2:=d_2+2d_3}} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-d_4]{\substack{d_1:=d_1+d_4\\ d_2:=d_2-d_4}} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) = (I_4|A^{-1})$$

Vậy ma trận khả nghịch là $A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & -9 & 1 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ví dụ

Xét tính khả nghịch của A, và tìm A^{-1} (nếu có).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1 \\ d_3:=d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -11 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -12 & -19 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-3d_2]{d_3:=d_3-2d_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-d_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ta có $r(A) < 4$. Suy ra A không khả nghịch.

Định lý

Cho các ma trận $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$ *khả nghịch và* $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $D \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó*

- $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$;
- $XA = C \Leftrightarrow X = CA^{-1}$;
- $AXA' = D \Leftrightarrow X = A^{-1}DA'^{-1}$.

Ví dụ

Cho hai ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Chứng tỏ A khả nghịch và tìm A^{-1}.

b. Tìm ma trận X thỏa $AXA = AB$.

c. Tìm ma trận X thỏa $A^2XA^2 = ABA^2$.

Hệ quả

Cho các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ *khả nghịch và* $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Ta có*

- *Nếu* $AB = 0$ *thì* $B = 0$.
- *Nếu* $CA = 0$ *thì* $C = 0$.