第三部分　概率论与数理统计

第一章　随机事件与概率

习题精选一

一、填空题

1. 0.2.

【详解】 由 $A\supset C, B\supset C$ 得 $AB\supset C$，于是　$P(AB\overline{C})=P(AB-C)=P(AB)-P(C)=0.5-P(C)$.
又　$P(A-C)=P(A)-P(C)=0.7-P(C)=0.4$. 故　$P(C)=0.3$. 因此，$P(AB\overline{C})=0.5-0.3=0.2$.

2. $\dfrac{2}{3}$.

【详解】 由 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，可得 A 与 B 独立，即 $P(AB)=P(A)P(B)$. 故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.$$

3. $\dfrac{1}{6}$.

【详解】 这是古典概型. 基本事件总数就是4件次品被取出的所有不同方式数 C_{10}^4，有利事件数即为前7次抽取中取出3件次品的所有不同方式数 C_7^3. 故所求概率为　　$P=\dfrac{C_7^3}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{6}$.

4. 2 011.

【详解】 因为 n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项，含有元素 a_{11} 的项共有 $(n-1)!$，由对立事件的概率公式、古典概率公式可得

$$1-\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{2\ 010}{2\ 011}.$$

故 $n=2\ 011$.

5. $\dfrac{2}{3}$.

【详解】 设 $A_i=\{$所取到的一件产品为 i 等品$\}$，$i=1,2,3$. 由题意知所求概率为

$$P=P(A_1|\overline{A}_3)=\frac{P(A_1\overline{A}_3)}{P(\overline{A}_3)}.$$

又 $P(A_1)=0.6, P(A_2)=0.3, P(A_3)=0.1, A_1\subset\overline{A}_3$.

故
$$P=\frac{P(A_1)}{1-P(A_3)}=\frac{0.6}{0.9}=\frac{2}{3}.$$

6. $\dfrac{1}{2}$.

【详解】　设 $A_1=\{$第一个人取到新球$\}$，$A_2=\{$第一个人取到旧球$\}$，$B=\{$第二个人取到旧球$\}$.
由 Bayes 公式得所求概率为

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum\limits_{i=1}^{2}P(B|A_i)P(A_i)}=\frac{\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}.$$

7. $\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$.

【详解】　这是一个几何概型. 如图 3—1—1 所示，所求概率为阴影部分的面积除以半圆的面积：

$$P=\frac{\frac{1}{2}a^2\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi\cdot a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}.$$

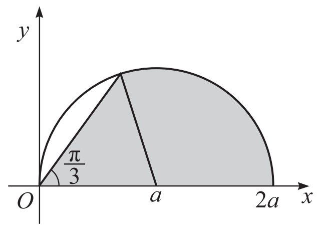

图 3—1—1

8. $\frac{1}{2}[1-(1-2p)^n]$.

【详解】　设 X 表示 n 重伯努利试验中试验成功的次数，则 X 服从二项分布 $B(n,p)$.

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\qquad k=0,1,2,\cdots,n.$$

因为
$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=1 \qquad ①$$

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-p)^k(1-p)^{n-k}=(1-2p)^n \qquad ②$$

于是 ① − ② 得所求概率为　$\frac{1}{2}[1-(1-2p)^n]$.

二、选择题

1. (B)

【详解】　“至少有两个班超额完成任务”的对立事件是“至多有一个班超额完成任务”，即“至少有两个班没有超额完成任务”，故选(B).

【评注】　题中事件也可以等价地表示为：　$A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$.

2. (D)

【详解】　由 A 和 B 互不相容可知 $AB=\varnothing$，于是 $A\subset\overline{B}$. 故 $A+\overline{B}=\overline{B}$，即 $P(A+\overline{B})=P(\overline{B})$.

3. (A)

【详解】　考虑到概率为 1 或 0 的事件与任何一个事件独立，从而由事件运算律得

$$(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B})=(A\overline{A}+B\overline{A}+AB+B)(A\overline{A}+\overline{B}\overline{A}+A\overline{B}+\overline{B})$$
$$=(B\overline{A}+B)\overline{B}=B\overline{B}=\varnothing.$$

$\varnothing$与 AB 一定独立. 故选(A).

4. (D)

【详解】　由条件概率公式得选项(D)的左边为

$$P(BC|A)=\frac{P(BCA)}{P(A)}=\frac{P(BA)}{P(A)}\cdot\frac{P(CBA)}{P(BA)}=P(B|A)P(C|BA)=\text{右边}.$$

故选(D).

5. (A)

【详解】　因为$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$，显然与 A 互不相容.

6. (B)

【详解】　所求概率的事件为第 10 次命中目标，前 9 次射击中有 4 次命中目标，故由各次射击的独立性

得所求概率为 $\quad C_9^4 p^4(1-p)^5 \cdot p = C_9^4 p^5 (1-p)^5$. 选(B).

三、解答题

1.【详解】 设 $A_1=\{$某指定的一层有2位乘客离开$\}$,$A_2=\{$没有2位以及2位以上乘客在同一层离开$\}$,$A_3=\{$至少有2位乘客在同一层离开$\}$. 由古典概率得

$$P(A_1)=\frac{C_7^2\cdot 9^5}{10^7}.\qquad P(A_2)=\frac{P_{10}^7}{10^7}.\qquad P(A_3)=1-P(A_2)=1-\frac{P_{10}^7}{10^7}.$$

2.【详解】 (1)设 $A=\{$所取的两件产品中有一件是废品$\}$,$B=\{$所取的两件产品中另一件是废品$\}$,所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},$$

其中 AB 表示所取两件产品都是废品,A 表示所取两件产品中(至少)有一件是废品. 由古典概型得

$$P(AB)=\frac{C_m^2}{C_M^2},\qquad P(A)=\frac{C_m^1C_{M-m}^1+C_m^2}{C_M^2}.$$

故
$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{m-1}{2M-m-1}.$$

(2)设 $C=\{$所取的两件产品中有一件不是废品$\}$,$B=\{$所取的两件产品中另一件是废品$\}$,所求概率为 $P(B|C)$. 由条件概率公式与古典概型得

$$P(B|C)=\frac{P(BC)}{P(C)}=\frac{C_m^1C_{M-m}^1/C_M^2}{(C_m^1C_{M-m}^1+C_{M-m}^2)/C_M^2}=\frac{2m}{M+m-1}.$$

3.【详解】 如图3—1—2所示,$\triangle ABP$ 与 $\triangle ABC$ 面积之比等于对应边 AB 上的高之比,即 $\quad \dfrac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{PE}{CD}$.

故要 $\dfrac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}}>\dfrac{n-1}{n}$,当且仅当点 P 要落入 $\triangle FGC$ 中,此三角形 FG 边上的高为 CD 的 $\dfrac{1}{n}$,且 $FG\parallel AB$. 由几何概型得所求概率为 $\triangle FGC$ 与 $\triangle ABC$ 面积之比,故 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比大于 $\dfrac{n-1}{n}$ 的概率为

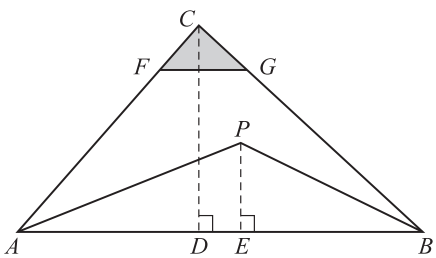

图3—1—2

$$\frac{S_{\triangle FGC}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{n^2}.$$

4.【详解】 (1)由加法公式以及事件 A,B,C 的两两独立性得

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\&=3P(A)-3P^2(A)+P(ABC).\end{aligned}$$

又
$$P(A\cup B\cup C)=\frac{23}{25},\qquad P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})=\frac{14}{25}.$$

于是得
$$P^2(A)-P(A)+\frac{4}{25}=0.$$

故 $P(A)=\dfrac{1}{5}$ 或 $\dfrac{4}{5}$. 但 $P(A)\geqslant P(ABC)=\dfrac{11}{25}$,从而 $P(A)=\dfrac{1}{5}$ 不符合要求,应舍去,即 $P(A)=\dfrac{4}{5}$.

(2)由 $P(ABC)=0$ 以及减法公式得

$$\begin{aligned}P(A\overline{B}\,\overline{C})&=P(A\overline{B}-C)=P(A\overline{B})-P(A\overline{B}C)=P(A)-P(AB)-[P(AC)-P(ABC)]\\&=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)=P(A)-P(AB)-P(AC)\\&=P(A)-P(A)P(B)-P(A)P(C)=P(A)-2P^2(A).\end{aligned}$$

而 $P(A\overline{B}\,\overline{C})\geqslant 0$,于是 $P(A)-2P^2(A)\geqslant 0$,故 $P(A)\leqslant\dfrac{1}{2}$.

5.【详解】 设 $H_i=\{$报名表是第 i 个地区考生的$\}\quad (i=1,2,3)$,$A_j=\{$第 j 次抽到的报名表是男生表$\}\quad (j=1,2)$,则

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3},$$

$$P(\overline{A}_1|H_1)=\frac{3}{10},\quad P(\overline{A}_1|H_2)=\frac{7}{15},\quad P(\overline{A}_1|H_3)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}.$$

$$P(A_2|H_1)=\frac{7}{10},\quad P(A_2|H_2)=\frac{8}{15},\quad P(A_2|H_3)=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}.$$

(1) 由全概率公式得

$$\begin{aligned}p&=P(\overline{A}_1)=P(H_1)P(\overline{A}_1|H_1)+P(H_2)P(\overline{A}_1|H_2)+P(H_3)P(\overline{A}_1|H_3)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{29}{90}.\end{aligned}$$

(2) 由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(H_1)P(A_2|H_1)+P(H_2)P(A_2|H_2)+P(H_3)P(A_2|H_3)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{61}{90}.\end{aligned}$$

又 $P(\overline{A}_1A_2|H_1)=\frac{3\times7}{10\times9}=\frac{7}{30},\quad P(\overline{A}_1A_2|H_2)=\frac{7\times8}{15\times14}=\frac{4}{15},\quad P(\overline{A}_1A_2|H_3)=\frac{5\times20}{25\times24}=\frac{5}{30}.$

于是有 $P(\overline{A}_1A_2)=P(H_1)P(\overline{A}_1A_2|H_1)+P(H_2)P(\overline{A}_1A_2|H_2)+P(H_3)P(\overline{A}_1A_2|H_3)$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{7}{30}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{30}=\frac{2}{9}.$$

由条件概率公式得 $$q=P(\overline{A}_1|A_2)=\frac{P(\overline{A}_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{61}{90}}=\frac{20}{61}.$$

6.【详解】 显然这是一个 6 重 Bernoulli 试验,6 枚骰子中出现偶数点的个数 X 服从二项分布 $B(6,p)$,其中 p 为一枚骰子出现偶数点的概率,即 $p=\frac{1}{2}$.

(1)所求概率为 $$p_1=P(X=3)=C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^{6-3}=\frac{5}{16}.$$

(2)所求概率为 $$p_2=\sum_{k=4}^{6}P(X=k)=\sum_{k=4}^{6}C_6^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^{6-k}=\frac{11}{32}.$$

7.【详解】 设 $B=\{$顾客买下此箱玻璃杯$\}$,$A_i=\{$售货员取的是含 i 只残次品的一箱玻璃杯$\}$($i=0,1,2$),则

$$P(A_0)=0.8,\quad P(A_1)=0.1,\quad P(A_2)=0.1,$$

$$P(B|A_0)=1,\quad P(B|A_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5},\quad P(B|A_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}.$$

(1) 由全概率公式得

$$\begin{aligned}\alpha&=P(B)=P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)\\&=\frac{4}{5}\times1+\frac{1}{10}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{10}\times\frac{12}{19}=\frac{448}{475}.\end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式知

$$\beta=P(A_0|B)=\frac{P(A_0)P(B|A_0)}{P(B)}=\frac{\frac{4}{5}\times1}{\frac{448}{475}}=\frac{95}{112}.$$

8.【详解】 将第一轮的 3 个可能结果 $C_1=\{$甲射中$\}$,$C_2=\{$甲未射中而乙射中$\}$,$C_3=\{$甲、乙均未射中$\}$取作完全事件组. 记 $A=\{$甲获胜$\}$,$B=\{$乙获胜$\}$,由全概率公式得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A\mid C_i)P(C_i),\qquad P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(B\mid C_i)P(C_i).$$

而 $P(C_1)=\alpha$, $P(C_2)=(1-\alpha)\beta$, $P(C_3)=(1-\alpha)(1-\beta)$,

$P(A|C_1)=1$, $P(A|C_2)=0$, $P(A|C_3)=P(A)$,

$P(B|C_1)=0$, $P(B|C_2)=1$, $P(B|C_3)=P(B)$.

代入可得 $P(A)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta(1-\alpha)}$, $P(B)=\dfrac{\beta(1-a)}{\alpha+\beta(1-\alpha)}$.

【评注】 若注意到 $P(A)+P(B)=1$,则可由 $P(B)=1-P(A)$求得.

第二章　随机变量及其分布

习题精选二

一、填空题

1. $\dfrac{3}{8}$.

【详解】 $P(X^2=1)=P(X=-1)+P(X=1)=F(-1)-F(-1-0)+F(1)-F(1-0)$

$$=\frac{1}{8}-0+1-\frac{12}{16}=\frac{3}{8}.$$

2. $\dfrac{9}{64}$.

【详解】 易知 Y 服从二项分布 $B(3,p)$,其中 $p=P\left(X\leqslant\dfrac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{1}{2}}2x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$.

于是, $$P(Y=2)=\mathrm{C}_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-2}=\frac{9}{64}.$$

3. $\dfrac{3}{4}$.

【详解】 因为 $X^2-\dfrac{3}{4}X+\dfrac{1}{8}=\left(X-\dfrac{1}{4}\right)\left(X-\dfrac{1}{2}\right)\geqslant0$, 可得 $X\geqslant\dfrac{1}{2}$ 或 $X\leqslant\dfrac{1}{4}$.故

$$P\left(X^2-\frac{3}{4}X+\frac{1}{8}\geqslant0\right)=P\left(X\geqslant\frac{1}{2}\right)+P\left(X\leqslant\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

4. $\dfrac{3}{4}$.

【详解】 $$P\left(\frac{1}{2}\leqslant X<\frac{3}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x\mathrm{d}x+\int_{1}^{\frac{3}{2}}(2-x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$$

5. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

【详解】 由 $P(X>a)=P(X<a)$ 得 $\int_{a}^{1}4x^3\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}4x^3\mathrm{d}x$. 故 $a=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

二、选择题

1. (C)

【详解】 对于选项(A)，$F(x)$ 在 $x=2$ 不右连续；对于(B)，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0\neq1$；对于(D)，$F(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上不满足单调不降的性质；而(C)中 $F(x)$ 满足作为分布函数的所有条件，故选(C).

2. (A)

【详解】 $f(x)$ 作为概率密度的充要条件是 $f(x)\geqslant0$，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$. 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}k\mathrm{e}^{-x^2+2x}\mathrm{d}x=1$，即 $k\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-1)^2}\cdot\mathrm{e}\mathrm{d}x=1$，可得 $k=\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{\pi}}$. 选(A).

【评注】 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$，　$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，　$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

3. (C)

【详解】 由连续型随机变量的定义可知其分布函数可以表示成一个非负函数的变上限积分，再由变上限积分一定是变上限的连续函数可知应选(C). 其他选项也容易举反例否定.

4. (A)

【详解】 由 $\mu<0$，$a>0$ 得 $|a-\mu|>|-a-\mu|$，即点 a 离开点 μ 的距离大于 $-a$ 离开 μ 的距离，再根据正态密度的图形即知 $f(a)<f(-a)$.

5. (D)

【详解】 由分布函数的充要条件逐条验证可知(D)为正确答案. 另外，(A)，(B)，(C)也易否定.

对于(A)，因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)+f_2(x)]\mathrm{d}x=2\neq1$；

对于(B)，(C)，取下列均匀分布密度：

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}1, & 2<x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是 $f_1(x)f_2(x)\equiv0$，显然不是密度函数，否定(B).

$$2f_1(x)-f_2(x)=\begin{cases}1, & 0<x<2,\\ -1, & 2<x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$显然这也不是密度函数，否定(C).

三、解答题

1.【详解】 由题意可知，Y 服从二项分布 $B(4,p)$，且

$$p=P\left(X>\frac{\pi}{3}\right)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

故 Y 的分布律为

Y	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

2.【详解】 Y 可以看成一个 5 次独立重复试验"成功"的次数，这里"成功"是指顾客的等待时间超过了 10 分钟，因此 Y 服从二项分布 $B(5,p)$，且

$$p=P(X>10)=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2},$$

即 Y 的分布为 $B(5,\mathrm{e}^{-2})$.

又 $$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y=0) = 1-(1-\mathrm{e}^{-2})^5.$$

3.【详解】 由方程 $x^2 + Yx + \frac{3}{4}Y + 1 = 0$ 没有实根得 $Y^2 - 4\times\left(\frac{3}{4}Y+1\right) < 0$,

化简得 $Y^2 - 3Y - 4 < 0$, 即 $-1 < Y < 4$.

于是有 $$P(-1<Y<4) = \frac{1}{4}.$$

又 $Y \sim U(a,5)$,$a>0$,从而得 $$\frac{4-a}{5-a} = \frac{1}{4}.$$

解之得 $a = \frac{11}{3}$.

4.【详解】 Y 的可能取值为 0,2,且

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= P(1+(-1)^X = 0) = \sum_{1\leqslant 2k+1\leqslant n} P(X=2k+1) \\ &= \mathrm{C}_n^1 p(1-p)^{n-1} + \mathrm{C}_n^3 p^3(1-p)^{n-3} + \cdots + \mathrm{C}_n^i p^i (1-p)^{n-i} \ (i \text{ 为不超过 } n \text{ 的最大奇数}) \\ &= \frac{1}{2}[1-(1-2p)^n]. \end{aligned}$$

$$P(Y=2) = 1 - P(Y=0) = \frac{1}{2}[1+(1-2p)^n].$$

故 Y 的分布律为

Y	0	2
P	$\frac{1}{2}[1-(1-2p)^n]$	$\frac{1}{2}[1+(1-2p)^n]$

.

【评注】 由 $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1$ 以及 $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-p)^k (1-p)^{n-k} = (1-2p)^n$,立即可得二项分布律中奇数项之和为 $\frac{1}{2}[1-(1-2p)^n]$,偶数项之和为 $\frac{1}{2}[1+(1-2p)^n]$.

5.【详解】 Y 的分布函数为 $F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(X^2+1 \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y-1)$

由 X 的密度函数的分段点可得

(1) 当 $y<1$ 时, $F_Y(y) = 0$;

(2) 当 $y \geqslant 2$ 时, $F_Y(y) = 1$;

(3) 当 $1 \leqslant y < 2$ 时,有
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(-\sqrt{y-1} \leqslant X \leqslant \sqrt{y-1}) = \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\sqrt{y-1}}^{0} (1+x)\mathrm{d}x + \int_0^{\sqrt{y-1}} (1-x)\mathrm{d}x \\ &= 2\sqrt{y-1} - y + 1. \end{aligned}$$

故所求分布函数为
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<1, \\ 2\sqrt{y-1}-y+1, & 1 \leqslant y < 2, \\ 1, & y \geqslant 2. \end{cases}$$

6.【详解】 X 的密度函数为
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0<x<4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

先求 Y 的分布函数:

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(X^2 - 2X - 3 \leqslant y) = P((X-1)^2 \leqslant 4+y)$$

(1) 当 $y < -4$ 时, $F_Y(y) = 0$;

(2) 当$-4\leqslant y<-3$时，$F_Y(y)=P(1-\sqrt{4+y}\leqslant X\leqslant 1+\sqrt{4+y})=\int_{1-\sqrt{4+y}}^{1+\sqrt{4+y}}f_X(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{1-\sqrt{4+y}}^{1+\sqrt{4+y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{4+y};$$

(3) 当$-3\leqslant y<5$时，$F_Y(y)=\int_{1-\sqrt{4+y}}^{1+\sqrt{4+y}}f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{1-\sqrt{4+y}}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{1+\sqrt{4+y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sqrt{4+y}+\frac{1}{4}$;

(4) 当$y\geqslant 5$时，　　$F_Y(y)=1$.

故Y的密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{4+y}}, & -4<y<-3,\\ \dfrac{1}{8\sqrt{4+y}}, & -3<y<5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

第三章　多维随机变量及其分布

习题精选三

一、填空题

1. 0.341 3.

【详解】 由于随机变量X_1,X_2,X_3相互独立，而且均服从正态分布，故$Z=3X_1+2X_2+X_3$仍服从正态分布．又$E(Z)=2,D(Z)=36$，于是$Z\sim N(2,6^2)$，因此

$$P(2\leqslant 3X_1+2X_2+X_3\leqslant 8)=\Phi(1)-\Phi(0)=\Phi(1)-\frac{1}{2}\approx 0.341\ 3$$

2. $\frac{5}{7}$.

【详解】 $P(\max(X,Y)\geqslant 0)=P[(X\geqslant 0)\cup(Y\geqslant 0)]=P(X\geqslant 0)+P(Y\geqslant 0)-P(X\geqslant 0,Y\geqslant 0)$

$$=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}.$$

3. $1-\mathrm{e}^{-3},1-\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{-3}$.

【详解】 $P(\max(X,Y)\neq 0)=1-P(\max(X,Y)=0)=1-P(X=0,Y=0)$

$$=1-P(X=0)P(Y=0)=1-\mathrm{e}^{-1}\times\mathrm{e}^{-2}=1-\mathrm{e}^{-3}.$$

$$P(\min(X,Y)\neq 0)=P(X\neq 0,Y\neq 0)=P(X\neq 0)P(Y\neq 0)$$

$$=[1-P(X=0)][1-P(Y=0)]=(1-\mathrm{e}^{-1})(1-\mathrm{e}^{-2})$$

$$=1-\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{-3}.$$

【评注】 第二问也可如下计算：

$$P(\min(X,Y)\neq 0)=1-P(\min(X,Y)=0)$$

$$=1-\left[\sum_{j=0}^{\infty}P(X=0,Y=j)+\sum_{i=1}^{\infty}P(X=i,Y=0)\right]$$
$$=1-\left[P(X=0)+P(Y=0)\sum_{i=1}^{\infty}P(X=i)\right]$$
$$=1-[e^{-1}+e^{-2}(1-e^{-1})]$$
$$=1-e^{-1}-e^{-2}+e^{-3}.$$

4. $\frac{5}{3}$或$\frac{7}{3}$.

【详解】 易知$1<a<3$,于是$P(A)=\frac{a-1}{2}$, $P(B)=\frac{3-a}{2}$, $P(AB)=P(A)P(B)$.

由$P(A\cup B)=\frac{7}{9}$得$P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{7}{9}$,即$9a^2-36a+35=0$.

从而 $(3a-5)(3a-7)=0$, 得 $a=\frac{5}{3}$或$a=\frac{7}{3}$.

5. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$,$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$.

【详解】 X的密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+\sin x\sin y}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x\sin y}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}y \quad \text{(第二个积分为0,因为被积函数是} y \text{的奇函数)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

类似得Y的密度为 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}$.

二、选择题

1. (B)

【详解】 由已知得X与Y的分布为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

,

Y	0	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

.

方程中的t有相同的实根的概率为

$$P(4X^2-4Y=0)=P(X^2=Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

2. (B)

【详解】 因为$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$,即

$$\int_1^4\int_0^2 k(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$$

故 $k=\frac{1}{50}$.

3. (A)

【详解】
$$P(X+Y\geqslant 1)=\iint\limits_{x+y\geqslant 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\iint\limits_{x+y<1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=1-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_x^{1-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=1-\int_0^{\frac{1}{2}}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x-1})\mathrm{d}x$$
$$=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-1}.$$

4.（A）

【详解】 由 Y 服从 $B(n,p)$ 可知 $(Y=0),(Y=1),\cdots,(Y=n)$ 构成一个完全事件组．由全概率公式可得 $Z=X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant z)=\sum_{k=0}^{n}P(X+Y\leqslant z|Y=k)P(Y=k)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}P(X\leqslant z-k|Y=k)P(Y=k)=\sum_{k=0}^{n}P(X\leqslant z-k)P(Y=k)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\Phi(z-k)\cdot \mathrm{C}_n^kP^k(1-p)^{n-k},$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布的分布函数，显然是连续函数．由连续函数性质可知 $F_Z(z)$ 仍为连续函数，故选（A）.

5.（C）

【详解】 X 的密度函数为
$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

从而 X 与 Y 的联合密度为
$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<2,y\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$P(X+Y\geqslant 1)=1-P(X+Y<1)=1-\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$=1-\int_0^1\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{x-1})\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}.$$

三、解答题

1.【详解】（1）放回抽样

$$P(X_1=0,X_2=0)=\frac{10\times 10}{12\times 12}=\frac{25}{36},\qquad P(X_1=0,X_2=1)=\frac{10\times 2}{12\times 12}=\frac{5}{36},$$
$$P(X_1=1,X_2=0)=\frac{2\times 10}{12\times 12}=\frac{5}{36},\qquad P(X_1=1,X_2=1)=\frac{2\times 2}{12\times 12}=\frac{1}{36}.$$

因此 (X_1,X_2) 的联合分布律以及边缘分布律为：

X_1 \ X_2	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{6}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

（2）不放回抽样

$$P(X_1=0,X_2=0)=\frac{10\times 9}{12\times 11}=\frac{15}{22},\qquad P(X_1=0,X_2=1)=\frac{10\times 2}{12\times 11}=\frac{5}{33},$$
$$P(X_1=1,X_2=0)=\frac{2\times 10}{12\times 11}=\frac{5}{33},\qquad P(X_1=1,X_2=1)=\frac{2\times 1}{12\times 11}=\frac{1}{66}.$$

因此(X_1,X_2)的联合分布律以及边缘分布律为:

X_1 \ X_2	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{15}{22}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{5}{6}$
1	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{6}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

【评注】 两种情况下的联合分布律虽然不同,但边缘分布律是相同的,能解释为什么吗?

2.【详解】 (1)因为 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=1-\mathrm{e}^{-0.5x}$,

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=1-\mathrm{e}^{-0.5y}.$$

于是,对任意实数x,y有 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$.

故X与Y相互独立.

(2) $\alpha=P(X>0.1,Y>0.1)$ (注意100小时为0.1千小时)

$=P(X>0.1)P(Y>0.1)$ (由(1)知X与Y独立)

$=[1-P(X\leqslant 0.1)][1-P(Y\leqslant 0.1)]$

$=[1-F_X(0.1)][1-F_Y(0.1)]$

$=\mathrm{e}^{-0.05}\cdot\mathrm{e}^{-0.05}=\mathrm{e}^{-0.1}$.

3.【详解】 因(X,Y)的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

故Z的分布函数为 $F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P\left(\frac{Y}{3X}\leqslant z\right)=\iint\limits_{\frac{y}{3x}\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

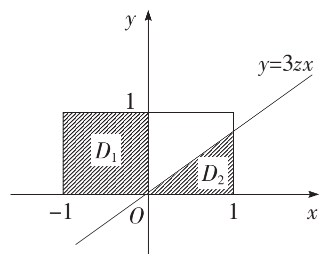

图 3—3—1

当$0\leqslant z<\frac{1}{3}$时,如图3—3—1,

$$F_Z(z)=\iint\limits_{D_1+D_2}\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(S_{D_1}+S_{D_2})$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}z\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z,$$

其中S_{D_1},S_{D_2}表示区域D_1,D_2的面积;

当$z\geqslant\frac{1}{3}$时,如图3—3—2,

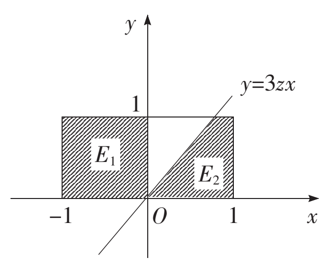

图 3—3—2

$$F_Z(z)=\iint\limits_{E_1+E_2}\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\frac{1}{12z};$$

同理可得:

当$-\frac{1}{3}\leqslant z<0$时,$F_Z(z)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z$;

当$z<-\frac{1}{3}$时, $F_Z(z)=-\frac{1}{12z}$.

故 Z 的密度函数为 $$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{12z^2}, & |z|\geqslant\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{3}{4}, & |z|<\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

4.【详解】 联合分布函数为 $$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

如图 3—3—3.

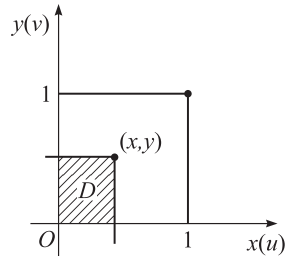

图 3—3—3

(1)当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，显然有 $F(x,y)=0$；

(2)当 $x\geqslant1$ 且 $y\geqslant1$ 时，有 $F(x,y)=1$；

(3)当 $0\leqslant x<1$ 且 $0\leqslant y<1$ 时，

$$F(x,y)=\iint_D 4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^y\left(\int_0^x 4uv\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v=x^2y^2;$$

类似可得

(4)当 $0\leqslant x<1$，且 $y\geqslant1$ 时，$F(x,y)=x^2$；

(5)当 $0\leqslant y<1$，且 $x\geqslant1$ 时，$F(x,y)=y^2$.

因此，$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{ 或 }y<0,\\ x^2y^2, & 0\leqslant x<1\text{ 且 }0\leqslant y<1,\\ x^2, & 0\leqslant x<1\text{ 且 }y\geqslant1,\\ y^2, & x\geqslant1\text{ 且 }0\leqslant y<1,\\ 1, & x\geqslant1\text{ 且 }y\geqslant1.\end{cases}$$

5.【详解】 (1)易知 U,V 的可能取值为 $1,2,3$，且

$$\begin{aligned}P(U=1,V=1)&=P[\max(X,Y)=1,\min(X,Y)=1]=P(X=1,Y=1)\\&=P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{9}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(U=2,V=1)&=P[\max(X,Y)=2,\min(X,Y)=1]\\&=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)\\&=P(X=1)P(Y=2)+P(X=2)P(Y=1)=\frac{2}{9}.\end{aligned}$$

类似可得

$$P(U=3,V=1)=\frac{2}{9},\qquad P(U=2,V=2)=\frac{1}{9},$$

$$P(U=3,V=2)=\frac{2}{9},\qquad P(U=3,V=3)=\frac{1}{9},$$

$$P(U=1,V=j)=0,j=2,3,\qquad P(U=2,V=3)=0.$$

故联合分布律为

U \ V	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	0	0
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
3	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

(2)两个边缘分布律为

U	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$

V	1	2	3
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

(3)由 $P(U=i|V=2)=\dfrac{P(U=i,V=2)}{P(V=2)}$，$i=2,3$，可得条件分布律为

$U\|V=2$	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

6.【详解】 (1)由已知可得 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

Y 关于 $X=x$ 的条件密度为($0<x<2$) $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{2-x}, & x<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

故 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{2(2-x)}, & 0<x<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^y\frac{1}{2(2-x)}\mathrm{d}x, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\frac{2}{2-y}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3)如图 3—3—4 所示，有

$$P(X+Y>2)=\iint\limits_{x+y>2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{1}{2(2-x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{2-x}^2\frac{1}{2(2-x)}\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^2\frac{1}{2(2-x)}\mathrm{d}y$$

$$=\ln 2.$$

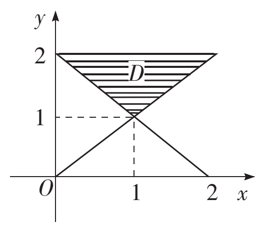

图 3—3—4

【评注】 上述二重积分若化为先对 x 后对 y 的积分将是一个广义积分，虽然亦可以算出，但没有先对 y 后对 x 积分方便.

7.【详解】 $P\{\max(X,Y)<1,\min(X,Y)<-1\}$

$=P\{(X<1,Y<1)\cap[(X<-1)\cup(Y<-1)]\}$

$=P[(X<1,Y<1,X<-1)\cup(X<1,Y<1,Y<-1)]$

$=P[(X<-1,Y<1)\cup(X<1,Y<-1)]$

$=P(X<-1,Y<1)+P(X<1,Y<-1)-P(X<-1,Y<1,X<1,Y<-1)$

$=P(X<-1)P(Y<1)+P(X<1)P(Y<-1)-P(X<-1)P(Y<-1)$

$=\Phi(-\frac{1}{\sigma})\Phi(\frac{1}{\sigma})+\Phi(\frac{1}{\sigma})\Phi(-\frac{1}{\sigma})-\Phi^2(-\frac{1}{\sigma})$

$=2[1-\Phi(\frac{1}{\sigma})]\Phi(\frac{1}{\sigma})-[1-\Phi(\frac{1}{\sigma})]^2$

$=2\times(1-\frac{3}{4})\times\frac{3}{4}-(1-\frac{3}{4})^2=\frac{5}{16}.$

其中 $\Phi(x)$ 表示标准正态分布的分布函数.

8.【详解】 $F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(XY\leqslant z)$

$$=P(XY\leqslant z|Y=0)P(Y=0)+P(XY\leqslant z|Y=1)P(Y=1)\text{（由全概率公式而得）}$$
$$=P(z\geqslant 0|Y=0)P(Y=0)+P(X\leqslant z|Y=1)P(Y=1)$$
$$=P(z\geqslant 0)(1-p)+P(X\leqslant z)p.$$

(1)当 $z<0$ 时，有 $F_Z(z)=P(X\leqslant z)p=p\int_{-\infty}^{z}f(x)\mathrm{d}x$.

(2)当 $z\geqslant 0$ 时，有 $F_Z(z)=1-p+p\int_{-\infty}^{z}f(x)\mathrm{d}x$. 故所求分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}p\int_{-\infty}^{z}f(x)\mathrm{d}x, & z<0,\\ 1-p+p\int_{-\infty}^{z}f(x)\mathrm{d}x, & z\geqslant 0.\end{cases}$$

【评注】 上述分布函数在 $z=0$ 间断，且既非离散型，也非连续型随机变量的分布($0<p<1$).

第四章　随机变量的数字特征

习题精选四

一、填空题

1. 1.055 6，　0.777 8.

【详解】 令每次检验“调整设备”为事件 A，Y 表示检验 10 件产品中所发现的次品数，则 $Y\sim B(10,0.1)$. 于是

$$p=P(A)=P(Y\geqslant 2)=1-P(Y=0)-P(Y=1)$$
$$=1-C_{10}^{0}(0.1)^{0}(0.9)^{10}-C_{10}^{1}(0.1)\times(0.9)^{9}=0.263\ 90.$$

显然，$X\sim B(4,p)$. 故　$E(X)=4p=1.055\ 6$，　　$D(X)=4p(1-p)=0.777\ 8$.

2. 0，1.

【详解】 由于 $f(x)$ 为概率密度函数，故 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}(ax+b)\mathrm{d}x=1$，即有 $\frac{a}{2}+b=1$ ①.

又 $E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}x(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，有 $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{2}$ ②.

联立①、②解得 $a=0$，$b=1$.

3. 0.6，0.24.

【详解】 由 $F(x)$ 分布函数可得 X 的可能取值为 -1，0，1，且

$$P(X=-1)=F(-1)-F(-1^-)=0.2-0=0.2,$$
$$P(X=0)=F(0)-F(0^-)=0.6-0.2=0.4,$$
$$P(X=1)=F(1)-F(1^-)=1-0.6=0.4.$$

故　　$E(|X|)=0.6.\qquad D(|X|)=E(|X|^2)-E^2(|X|)=0.6-0.6^2=0.24.$

4. 0.7.

【详解】 $\mathrm{Cov}(Y,Z)=\mathrm{Cov}(Y,X+0.8)=\mathrm{Cov}(Y,X)=\mathrm{Cov}(X,Y)$,

$D(Z)=D(X+0.8)=D(X)$,

于是
$$\rho_{YZ}=\frac{\mathrm{Cov}(Y,Z)}{\sqrt{D(Y)}\sqrt{D(Z)}}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(Y)}\sqrt{D(X)}}=\rho_{XY}=0.7.$$

5. 0.

【详解】 由 $X\sim N(0,1)$,$Y=X^{2n}$,有 $E(X)=0$,

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(XY)=E(X^{2n+1})$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=0.$$

故 $\rho_{XY}=0$.

二、选择题

1. (A)

【详解】 由于　$E[(X-c)^2]=[E(X-c)]^2+D(X-c)=(\mu-c)^2+\sigma^2$,

$E[(X-\mu)^2]=[E(X-\mu)]^2+D(X-\mu)=(\mu-\mu)^2+\sigma^2=\sigma^2$,

故当 $c=\mu$ 时,有 $E[(X-c)^2]=E[(X-\mu)^2]$,当 $c\neq\mu$ 时,有 $E[(X-c)^2]>E[(X-\mu)^2]$.

故选(A).

2. (D)

【详解】 由于 $X\sim f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0. & \text{其他}.\end{cases}$;$Y\sim f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0. & \text{其他}.\end{cases}$ 而且 X 和 Y 相互独立,

故 (X,Y) 的联合分布密度为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}1, 0<x<1, 0<y<1,\\ 0. & \text{其他}.\end{cases}$$

由此可以看出 (X,Y) 服从二维均匀分布.

3. (D)

【详解】 由 X 与 Y 相互独立知 X 与 $\dfrac{1}{Y}$ 也独立,从而由数学期望的性质知(D)正确.

4. (A)

【详解】 根据定积分、重积分的对称性易得 $E(X)=0$,$E(Y)=0$,$E(XY)=0$,从而 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$,即 X 与 Y 不相关. 由于联合密度函数 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$,故 X 与 Y 不独立,即选(A).

5. (C)

【详解】 由 X 与 Y 不相关,则有

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X_1+aX_2,X_1+bX_2)$$
$$=\mathrm{Cov}(X_1,X_1)+b\mathrm{Cov}(X_1,X_2)+a\mathrm{Cov}(X_2,X_1)+ab\mathrm{Cov}(X_2,X_2)=0.$$

由于随机变量 X_1 和 X_2 相互独立同分布,因此

$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=\mathrm{Cov}(X_2,X_1)=0$,　　故　　$\mathrm{Cov}(X,Y)=D(X_1)+abD(X_2)=0$,

所以 $1+ab=0$,得 $ab=-1$,a、b 互为负倒数.

三、解答题

1.【详解】 易知 (X,Y) 的全部可能取值为:(i,j),$1\leqslant j\leqslant i$,$1\leqslant i\leqslant 5$. 由乘法公式得 (X,Y) 的分

布律为：

$$p_{ij}=P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j\mid X=i\}P\{X=i\}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5i}.$$

其表格形式为：

X \ Y	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0
4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0
5	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$

由表可求得：$E(Y)=\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{5}y_j p_{ij}=2.$

2.【详解】　X 可能的值为 0,1,2,3，记 $A_i=\{$汽车在第 i 个路口遇到红灯$\}$，$i=1,2,3$

则 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{2}$，且 A_1,A_2,A_3 相互独立，于是

$$P(X=0)=P(A_1)=\frac{1}{2},$$

$$P(X=1)=P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$P(X=2)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

$$P(X=3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

而

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right)=\frac{1}{0+1}\cdot P(X=0)+\frac{1}{1+1}\cdot P(X=1)+\frac{1}{2+1}\cdot P(X=2)+\frac{1}{3+1}\cdot P(X=3)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}=\frac{67}{96}.$$

3.【详解】　$E(XY)=(-1)\times0\times0.1+(-1)\times1\times0.3+(-1)\times2\times0.15+\cdots+2\times2\times0.1=0$，

$$D(XY)=E(XY)^2-[E(XY)]^2=[E(XY)]^2$$

$$=[(-1)\times1]^2\times0.3+[(-1)\times2]^2\times0.15+(2\times1)^2\times0.1+(2\times2)^2\times0.1=2.9.$$

4.【详解】　因为

$$E(XY)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}xy\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1.$$

$$E(XY)^2=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}(xy)^2\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4.$$

所以，

$$D(XY)=E(XY)^2-[E(XY)]^2=3.$$

5.【详解】　令 X 表示第 1 台记录仪无故障工作时间，Y 表示第 2 台记录仪无故障工作时间，则 $T=X+Y$，于是 $E(T)=E(X)+E(Y)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$. 由独立性得 $D(T)=D(X)+D(Y)=\frac{1}{25}+\frac{1}{25}=\frac{2}{25}$.

6.【详解】　设 X_i 为在 $[0,1]$ 中任取的第 i 个点的坐标，$i=1,2,\cdots,n$，则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，即其分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

令 $X_{(1)}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$，$X_{(n)}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$，则最远两点的距离为 $X=X_{(n)}-X_{(1)}$，从而 $E(X)=E[X_{(n)}]-E[X_{(1)}]$. 因为分布函数为

$$F_{X_{(n)}}(x)=F^n(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^n, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}\qquad F_{X_{(1)}}(x)=1-[F(x)]^n=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-(1-x)^n, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

相应的密度函数为

$$f_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}nx^n, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad f_{X_{(1)}}(x)=\begin{cases}n(1-x)^{n-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以，$$E[X_{(n)}]=\int_0^1 nx^n\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1},\qquad E[X_{(1)}]=\int_0^1 nx\,(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1},$$

故 $$E(X)=\frac{n}{n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n-1}{n+1}.$$

7.【详解】 因为 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\frac{1}{4}(x+1), & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_X(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{4}(y+1), & 0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故 $$E(X)=E(Y)=\int_0^2\frac{1}{4}y(y+1)\mathrm{d}y=\frac{7}{6},\qquad E(X^2)=E(Y^2)=\int_0^2\frac{1}{4}y^2(y+1)\mathrm{d}y=\frac{5}{3}.$$

又 $$D(X)=D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{11}{36}.$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\int_0^2\frac{1}{8}xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2\frac{1}{8}x\left(\frac{x}{2}\cdot y^2+\frac{1}{3}\cdot y^3\right)\Big|_{y=0}^{2}\mathrm{d}x=\int_0^2\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{36}.$$

所以 $$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}\,(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\frac{1}{11}.$$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}\,(X,Y)=2\times\frac{11}{36}+2\times\left(-\frac{1}{36}\right)=\frac{5}{9}.$$

8.【详解】 设机器一周内有 X 天发生故障，这一周的利润为 Y 万元，由题意可知 $X\sim B(5,0.2)$，且 $Y=\begin{cases}10, & X=0\\ 5, & X=1\\ 0, & X=2\\ -2, & X\geqslant 3\end{cases}$，则

$$\begin{aligned}E(Y)&=10\cdot P(X=0)+5\cdot P(X=1)+0\cdot P(X=2)+(-2)\cdot P(X\geqslant 3)\\ &=10\times C_5^0\cdot 0.2^0\cdot 0.8^5+5\times C_5^1\cdot 0.2^1\cdot 0.8^4-2\times[1-C_5^0\cdot 0.2^0\cdot 0.8^5\\ &\quad -C_5^1\cdot 0.2^1\cdot 0.8^4-C_5^2\cdot 0.2^2\cdot 0.8^3]\\ &=5.208\,96\end{aligned}$$

9.【详解】 商店所获利润是需求量 X 和进货量的函数，本题关键是正确列出供大于求和供不应求时

利润与进货量的关系，然后利用利润不少于 9 280 元建立一不等式求出进货量的值.

由 X 服从区间[10，30]上均匀分布知，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{20}, & 20\leqslant x\leqslant 30,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

以 M_a 表示"进货量为 a 单位时，商店所获利润"，则

$$M_a=\begin{cases}500a+300(x-a), & a<x\leqslant 30,\\ 500x-100(a-x), & 10\leqslant x\leqslant a,\end{cases}=\begin{cases}300x+200a, & a<x\leqslant 30,\\ 600x-100a, & 10\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$$

于是期望利润为：

$$\begin{aligned}E(M_a)&=\int_{10}^{30}M_af(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{20}\left[\int_{10}^{a}(600x-100a)\mathrm{d}x+\int_{a}^{30}(300x+200a)\mathrm{d}x\right]\\&=\int_{10}^{a}(30x-5a)\mathrm{d}x+\int_{a}^{30}(15x+10a)\mathrm{d}x\\&=15x^2\Big|_{10}^{a}-5a(a-10)+\frac{15}{2}x^2\Big|_{a}^{30}+10a(30-a)\\&=-\frac{15}{2}a^2+350a+5\ 250,\end{aligned}$$

令　$M_a=-\dfrac{15}{2}a^2+350a+5\ 250\geqslant 9\ 280$，即　$\dfrac{15}{2}a^2-350a+4\ 030\leqslant 0$，

解得 $20\dfrac{2}{3}\leqslant a\leqslant 26$. 故商店利润的期望值不少于 9 280 元的最少进货量为 21 个单位.

第五章　大数定律和中心极限定理

习题精选五

一、填空题

1. $\dfrac{3}{4}$.

【详解】　由切比雪夫不等式 $P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ 有

$$\begin{aligned}P\{5<X<17\}&=P\{5-11<X-11<17-11\}=P\{-6<X-11<6\}\\&=P\{|X-11|<6\}\geqslant 1-\frac{9}{6^2}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

2. $1-\dfrac{1}{n}$.

【详解】　因为

$$E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=E(X_i)=\mu,\ D(\overline{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}D(X_i)=\frac{4}{n},$$

故 $$P\{\mu-2<\overline{X}<\mu+2\}=P\{|\overline{X}-\mu|<2\}\geqslant 1-\frac{D(\overline{X})}{2^2}=1-\frac{1}{n}.$$

3. 20.

【详解】 由切比雪夫不等式得 $P\{|X-E(X)|\geqslant c\}\leqslant\dfrac{D(X)}{c^2}$，得 $\dfrac{4}{c^2}\leqslant 0.01$，故 $c\geqslant 20$.

4. $\dfrac{1}{12}$.

【详解】 记 $\xi=X-Y$，则 $E(\xi)=E(X)-E(Y)=2-2=0$，而

$$\begin{aligned}D(\xi)&=D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=D(X)+D(Y)-2\rho_{(X,Y)}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}\\&=1+4-2\times0.5\times\sqrt{1}\times\sqrt{4}=3\end{aligned}$$

由切比雪夫不等式得，

$$P\{|X-Y|\geqslant 6\}=P\{|\xi-E(\xi)|\geqslant 6\}\leqslant\frac{D(\xi)}{6^2}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.$$

二、选择题

1. (D)

【详解】 由切比雪夫不等式 $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geqslant 1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ 得

$$P\{|X-E(X)|<3\}\geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}.$$

2. (C)

【详解】 由于 $X\sim B(n,p)$，故 $E(X)=np$，$D(X)=np(1-p)$.

由切比雪夫不等式 $P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ 得

$$P\{|X-np|\geqslant\sqrt{2n}\}\leqslant\frac{np(1-p)}{(\sqrt{2n})^2}=\frac{1}{2}p(1-p)\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$

3. (B)

【详解】 由切比雪夫不等式得 $P\{|S_{16}-16|<\varepsilon\}\geqslant 1-\dfrac{D(S_{16})}{\varepsilon^2}=1-\dfrac{16}{\varepsilon^2}$.

4. (A)

【详解】 由于 X_i 的期望和方差不一定存在，故中心极限定理的前提条件不满足，所以不一定可以用中心极限定理来近似计算 p. 于是可排除(C)与(D). 因为随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，于是 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合密度可由边缘密度，即 X_i 的密度函数 $f(x)$ 来确定，所以 p 是可以用 $f(x)$ 来进行计算的.

三、解答题

1.【详解】 (1)设 X_i 表示第 i 个学生来参加家长会的家长数，$i=1,2,\cdots,400$，X 表示来参加会议的家长总数，则 $X=\sum\limits_{i=1}^{400}X_i$，$X_1,X_2,\cdots,X_{400}$ 相互独立，且 X_i的分布为

X_i	0	1	2
p	0.05	0.8	0.15

，

$$E(X)=400\times E(X_i)=440,\qquad D(X)=400\times D(X_i)=76.$$

根据列维—林德伯格中心极限定理得

$$P(X\geqslant 450)=1-P(X<450)=1-\Phi\left(\frac{450-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)=1-\Phi(1.15)\approx 0.1251.$$

(2)设 $Y_i=\begin{cases}1, & 第\ i\ 个学生有一名家长参会,\\ 0, & 否则,\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,400$．则 $Y=\sum_{i=1}^{400}Y_i$ 表示仅有 1 名家长来参加会议的学生数，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{400}$ 相互独立，且 Y_i 的分布为

Y_i	0	1
p	0.2	0.8

，

$$E(Y)=400\times E(Y_i)=320,\qquad D(Y)=400\times D(Y_i)=64.$$

根据列维—林德伯格中心极限定理得

$$P(Y\leqslant 340)=\Phi\left(\frac{340-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right)=\Phi(2.5)\approx 0.9938.$$

2.【详解】 设 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是装运的第 i 箱的重量(单位：千克)，n 为所求箱数．由题设可以将 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 视为独立同分布的随机变量，而 n 箱的总重量 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 是独立同分布随机变量之和．由题设，有

$$E(X_i)=50,\qquad \sqrt{D(X_i)}=5;$$
$$E(S_n)=50n,\qquad \sqrt{D(S_n)}=5\sqrt{n}\ (单位：千克).$$

根据列维—林德伯格中心极限定理知，S_n 近似服从正态分布 $N(50n,25n)$．而箱数 n 根据下述条件确定

$$P\{S_n\leqslant 5000\}=P\left\{\frac{S_n-50n}{5\sqrt{n}}\leqslant\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}\right)>0.977=\Phi(2).$$

由此得 $\dfrac{1000-10n}{\sqrt{n}}>2$，从而 $n<98.0199$．故每辆车最多可以装 98 箱．

3.【详解】 总保险费为：$2500\times 120=300000$(元)．用 X 表示 2 500 人在一年中的死亡人数，则 $X\sim B(2500,0.002)$．由棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理得：

(1)亏本的概率为：
$$\begin{aligned}p_1&=P(20000X>300000)=P(X>15)\\&=1-P(X\leqslant 15)=1-\Phi\left(\frac{15-2500\times 0.002}{\sqrt{2500\times 0.002\times 0.998}}\right)\\&=1-\Phi(4.472)\approx 0.\end{aligned}$$

(2)获利不少于 100 000 元的概率为：
$$\begin{aligned}p_2&=P(300000-20000X\geqslant 100000)=P(X\leqslant 10)\\&=\Phi\left(\frac{10-2500\times 0.002}{\sqrt{2500\times 0.002\times 0.998}}\right)=\Phi(2.2362)=0.9874.\end{aligned}$$

(3)令 $X_i=\begin{cases}1,第\ i\ 人死亡,\\0.\ 否则.\end{cases}$ 则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，且 $X\sim B(n,0.002)$．保险公司希望 99.9%可能性保证获利不少于 500 000 元，故

$$P(120n-20000X\geqslant 500000)\geqslant 0.999,\qquad 即\qquad P(X\leqslant 0.006n-25)\geqslant 0.999.$$

于是
$$\Phi\left(\frac{0.006\times n-25-0.002\times n}{\sqrt{n\times 0.002\times 0.998}}\right)\geqslant\Phi(3.07)=0.999.$$

解之得 $n\geqslant 9620$．即公司至少要发展 9 620 个客户．

4.【详解】 设至少要掷 n 次：正面次数为 X，则 $X\sim B\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$，$E(X)=\dfrac{n}{2}$，$D(X)=\dfrac{n}{4}$，正面出现的频率为 $\dfrac{X}{n}$．所以 $P\left\{0.45\leqslant\dfrac{X}{n}\leqslant 0.55\right\}\geqslant 0.9$．又由于 $E\left(\dfrac{X}{n}\right)=\dfrac{1}{n}E(X)=\dfrac{1}{2}$，$D\left(\dfrac{X}{n}\right)=\dfrac{1}{n^2}D(X)=\dfrac{1}{4n}$，故由切比雪夫不等式得

$$P\left\{0.45\leqslant\frac{X}{n}\leqslant0.55\right\}=P\left\{\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{2}\right|\leqslant0.05\right\}=P\left\{\left|\frac{X}{n}-E\left(\frac{X}{n}\right)\right|\leqslant0.05\right\}$$

$$\geqslant1-\frac{D\left(\frac{X}{n}\right)}{0.05^2}=1-\frac{100}{n}\geqslant0.9.$$

于是 $n\geqslant1\ 000$．由中心极限定理,有

$$P\left\{0.45\leqslant\frac{X}{n}\leqslant0.55\right\}=P\left\{\frac{0.45-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4n}}}\leqslant\frac{\frac{X}{n}-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4n}}}\leqslant\frac{0.55-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4n}}}\right\}$$

$$=\Phi(0.1\sqrt{n})-\Phi(-0.1\sqrt{n})\geqslant0.9,$$

即 $\Phi(0.1\sqrt{n})\geqslant0.95$，故 $0.1\sqrt{n}\geqslant1.65$，即 $n\geqslant272.25$．所以至少要掷273次．

第六章　数理统计的基本概念

习题精选六

一、填空题

1. χ^2，2.

【详解】 总体 $X\sim N(0,2^2)$．记 $Y_1=X_1-2X_2$，$Y_2=3X_3-4X_4$，则有

$$E(Y_1)=E(X_1-2X_2)=E(X_1)-2E(X_2)=0,$$
$$D(Y_1)=D(X_1-2X_2)=D(X_1)+4D(X_2)=20,$$

同理，$E(Y_2)=0$，　$D(Y_2)=10$．

从而 $\frac{1}{\sqrt{20}}Y_1\sim N(0,1)$，$\frac{1}{10}Y_2\sim N(0,1)$，$\frac{1}{20}Y_1^2\sim\chi^2(1)$，$\frac{1}{100}Y_2^2\sim\chi^2(1)$，又 Y_1,Y_2 相互独立，

所以　$Y=\frac{1}{20}Y_1^2+\frac{1}{100}Y_1^2\sim\chi^2(2)$．

2. t，2.

【详解】 记 $Y=\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}$，$Z=X_3^2+X_4^2$．因 $X\sim N(0,1)$，则

$$E(Y)=E\left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\right)=0,\qquad D(Y)=D\left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}(D(X_1)+D(X_2))=1,$$

即 $Y\sim N(0,1)$，因 $X_3\sim N(0,1)$，$X_4\sim N(0,1)$，X_3 与 X_4 独立，$Z=X_3^2+X_4^2\sim\chi^2(2)$．又 Y,Z 相互独立，所以 $\frac{Y}{\sqrt{Z/2}}\sim t(2)$，即 $\frac{(X_1-X_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{(X_3^2+X_4^2)/2}}=\frac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}\sim t(2)$．

3. F，(1,1)．

【详解】　因 $X \sim N(0,\sigma^2)$，则 $X_1+X_2 \sim N(0,2\sigma^2)$，$X_1-X_2 \sim N(0,2\sigma^2)$．所以 $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$，$\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$，从而，$\dfrac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$，$\dfrac{(X_1-X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$，且 $(X_1+X_2)^2$ 与 $(X_1-X_2)^2$ 独立，故 $\dfrac{(X_1+X_2)^2/2\sigma^2}{(X_1-X_2)^2/2\sigma^2} \sim F(1,1)$．

4. $\dfrac{1}{2}$．

【详解】　$X \sim F(n,n)$，则 $\dfrac{1}{X} \sim F(n,n)$，故 X 与 $\dfrac{1}{X}$ 同分布．令 $Y=\dfrac{1}{X}$，则 $P\{X<1\}=P\{Y<1\}$，即 $P\{X<1\}=P\{X>1\}$．而 $P\{X=1\}=0$，所以 $P\{X<1\}=\dfrac{1}{2}$．

二、选择题

1. (A)

【详解】　由 $X \sim N(1,4)$，有 $E(\overline{X})=1$，$D(\overline{X})=\dfrac{4}{100}$，因 $Y=a\overline{X}+b \sim N(0,1)$，所以

$$E(Y)=aE(\overline{X})+b=a+b=0, \qquad D(Y)=a^2D(\overline{X})=\frac{4}{100}a^2=1,$$

解得，$a=\pm 5$，$b=\mp 5$. 故选(A).

2. (C)

【详解】　记 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，即

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1).$$

3. (A)

【详解】　由协方差性质得

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_1+X_2,X_1-X_2)&=\mathrm{Cov}(X_1,X_1)-\mathrm{Cov}(X_2,X_2)\\&=D(X_1)-D(X_2)=\sigma^2-\sigma^2=0,\end{aligned}$$

所以，X_1+X_2 与 X_1-X_2 不相关．另外，因 (X_1+X_2,X_1-X_2) 服从二维正态分布，故 X_1+X_2 与 X_1-X_2 也是独立的．选(A).

4. (D)

【详解】　$\overline{X} \sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，则 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，而 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，所以

$$\frac{\left(\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2}{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)} \sim F(1,n-1), \qquad \text{即} \qquad \frac{n(\overline{X}-u)^2}{S^2} \sim F(1,n-1). \qquad \text{选(D).}$$

5. (B)

【详解】　因 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim N(0,2)$，X 与 Y 独立，故 $X+Y \sim N(0,3)$，于是 $\dfrac{X+Y}{\sqrt{3}} \sim N(0,1)$．

所以 $\dfrac{1}{3}(X+Y)^2 \sim \chi^2(1)$. 选(B).

三、解答题

1.【详解】　(1)样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布律为：

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}=p^{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}(1-p)^{\sum\limits_{k=1}^{n}(1-x_k)}.$$

(2) 显然 $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 服从二项分布 $B(n,p)$，即其分布律为：

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i=k\right\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

(3) $E(\overline{X})=p,\qquad D(\overline{X})=\dfrac{p(1-p)}{n},\qquad E(S^2)=D(X)=p(1-p).$

2.【详解】 因 $X_1+X_2\sim N(0,2\times3^2)$，$X_3+X_4+X_5\sim N(0,3\times3^2)$，$X_6+X_7+X_8+X_9\sim N(0,4\times3^2)$，则 $\dfrac{X_1+X_2}{3\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，$\qquad\dfrac{X_3+X_4+X_5}{3\sqrt{3}}\sim N(0,1)$，$\qquad\dfrac{X_6+X_7+X_8+X_9}{6}\sim N(0,1)$.

所以，$\dfrac{1}{18}(X_1+X_2)^2\sim\chi^2(1)$，$\quad\dfrac{1}{27}(X_3+X_4+X_5)^2\sim\chi^2(1)$，$\quad\dfrac{1}{36}(X_6+X_7+X_8+X_9)^2\sim X^2(1)$.

于是 $a=\dfrac{1}{18}$，$b=\dfrac{1}{27}$，$c=\dfrac{1}{36}$，Y 服从自由度为3的卡方分布，即 $Y\sim\chi^2(3)$.

第七章　参数估计

习题精选七

一、填空题

1. $\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-1$；$\qquad\hat{\theta}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$.

【详解】 矩估计：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-(x-\theta)}\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{+\infty}(x-\theta)\mathrm{e}^{-(x-\theta)}\mathrm{d}x+\int_{\theta}^{+\infty}\theta\mathrm{e}^{-(x-\theta)}\mathrm{d}x=1+\theta,$$

令 $E(X)=\overline{X}$，则 $1+\theta=\overline{X}$，$\hat{\theta}=\overline{X}-1$.

最大似然估计：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-(x_i-\theta)}=\mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}=\mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+n\theta},\ (x_i>\theta),$$

$$\ln L(\theta)=n\theta-\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=n>0$，又 $\theta<x_i$，$i=1,2,\cdots,n$，故 $\theta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$，可使 $\ln L(\theta)$ 取最大值，

即 θ 的最大似然估计量为：$\hat{\theta}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$.

2. $\dfrac{1}{n}$.

【详解】 由 $$E[(\overline{X})^2-cS^2]=E[(\overline{X})^2]-cE(S^2)=D(\overline{X})+(E(\overline{X}))^2-cE(S^2)$$
$$=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-c\sigma^2=\left(\frac{1}{n}-c\right)\sigma^2+\mu^2=\mu^2$$
得，当 $c=\frac{1}{n}$ 时，$(\overline{X})^2-cS^2$ 是 μ^2 的无偏估计．

二、选择题

1. (D)

【详解】 因 $\mu^2+\sigma^2=(E(X))^2+D(X)=E(X^2)$，故 $\mu^2+\sigma^2$ 的矩估计为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$．故选(D)．

2. (B)

【详解】 $E(T_1)=\frac{1}{6}[E(X_1)+E(X_2)]+\frac{1}{3}[E(X_3)+E(X_4)]=\theta$．

$E(T_2)=\frac{1}{5}[E(X_1)+2E(X_2)+3E(X_3)+4E(X_4)]=2\theta\neq\theta$．

$E(T_3)=\frac{1}{4}[E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4)]=\theta$．

$E(T_4)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)\theta=\theta$.

故选(B)．

3. (D)

【详解】 由 $E(X^2)=(E(X))^2+D(X)$ 得，$E(\hat{\theta})^2=(E(\hat{\theta}))^2+D(\hat{\theta})=\theta^2+D(\hat{\theta})\neq\theta^2$，因此，$\hat{\theta}^2$ 是 θ^2 的有偏估计．

4. (D)

【详解】 因为 $E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[E^2(X_i)+D(X_i)]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(0+\sigma^2)=\frac{1}{n}n\sigma^2=\sigma^2$，故选(D)．

5. (C)

【详解】 因为 $E(\overline{X}-S^2)=E(\overline{X})-E(S^2)=\mu-\sigma^2$，故选(C)．

三、解答题

1.【详解】 矩估计：因为 $$\overline{x}=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)=\frac{1}{3}(1+2+1)=\frac{4}{3},$$
$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}p_ix_i=1\cdot\theta^2+2\cdot2\theta(1-\theta)+3\cdot(1-\theta)^2=3-2\theta,$$
于是令 $E(X)=\overline{x}$，得 $\hat{\theta}=\frac{5}{6}$ 为 θ 的矩估计．

最大似然估计：似然函数为
$$L(\theta)=P(X=1)P(X=2)P(X=1)=\theta^2\cdot2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2=2\theta^5(1-\theta).$$
取对数有 $\ln L(\theta)=\ln2+5\ln\theta+\ln(1-\theta)$．对数似然方程为：$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{5}{\theta}-\frac{1}{1-\theta}=0$，

故最大似然估计为 $\hat{\theta}=\frac{5}{6}$．

2.【详解】 $f(x;\theta)=\begin{cases}1,\theta\leqslant x\leqslant\theta+1,\\0, \quad 其他．\end{cases}$

(1) 矩估计量: $E(X)=\int_{\theta}^{\theta+1}x\mathrm{d}x=\dfrac{2\theta+1}{2}$, 令 $E(X)=\overline{X}$, 得 $\hat{\theta}_1=\overline{X}-\dfrac{1}{2}$.

最大似然估计:似然函数 $L(\theta)=\begin{cases}1, & \theta\leqslant x_i\leqslant\theta+1, i=1,2,\cdots,n,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$

显然从似然方程不能得到 θ 的最大似然估计量,但只要注意到似然函数的最大值就是1,且此时 $\theta\leqslant x_i\leqslant\theta+1$, $i=1,2,\cdots,n$, 从而, $\theta\leqslant X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$, 或 $\theta\geqslant X_{(n)}-1=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}-1$.

故可取 $\hat{\theta}_2=X_{(1)}$ 或 $\hat{\theta}_2=X_{(n)}-1$, 作为 θ 的最大似然估计量.

(2) $\hat{\theta}_1$ 是无偏的. 而 $\hat{\theta}_2$ 是有偏的,其无偏修正为 $\hat{\theta}_2^*=X_{(1)}+\dfrac{1}{n+1}$ 或 $X_{(n)}-\dfrac{n}{n+1}$.

事实上, $E(X)=\dfrac{2\theta+1}{2}=\theta+\dfrac{1}{2}$, 而 $E(\overline{X})=E(X)=\theta+\dfrac{1}{2}$, 则

$E(\hat{\theta}_1)=E(\overline{X})-\dfrac{1}{2}=\theta$, 所以 $\hat{\theta}_1$ 是 θ 的无偏估计.

$\hat{\theta}_2$ 是有偏的,其无偏修正为 $\hat{\theta}_2^*=X_{(1)}+\dfrac{1}{n+1}$ 或 $X_{(n)}-\dfrac{n}{n+1}$. 由 X 的密度函数和分布函数分别为

$$f(x)=\begin{cases}1, & \theta\leqslant x\leqslant\theta+1\\0, & \text{其他}\end{cases},\qquad F(x)=\begin{cases}0, & y<\theta,\\x-\theta, & \theta\leqslant x<\theta+1,\\1, & \text{其他}.\end{cases}$$

可知 $X_{(1)}$ 的分布函数为 $F_1(x)=1-[1-F(x)]^n$, $X_{(n)}$ 的分布函数为 $F_n(x)=[F(x)]^n$,
从而它们的密度函数分别为

$$f_1(x)=F'_1(x)=\begin{cases}n(1-x+\theta)^{n-1}, & \theta\leqslant x\leqslant\theta+1\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_n(x)=F'_n(x)=\begin{cases}n(x-\theta)^{n-1}, & \theta\leqslant x\leqslant\theta+1\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故
$$E(X_{(1)})=\int_{\theta}^{\theta+1}x\cdot n(1-x+\theta)^{n-1}\mathrm{d}x=\theta-\frac{1}{n+1},$$
$$E(X_{(n)})=\int_{\theta}^{\theta+1}x\cdot nx^{n-1}\mathrm{d}x=\theta+\frac{n}{n+1}.$$

所以, $E(\hat{\theta}_2^*)=E(X_{(1)})+\dfrac{1}{n+1}=\theta$ 或 $E(\hat{\theta}_2^*)=E(X_{(n)})-\dfrac{n}{n+1}=\theta$, 即 $\hat{\theta}_2^*$ 是 θ 的无偏估计.

3.【详解】 似然函数 $L(\theta)=\dfrac{1}{2^n\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|}$.

对数似然函数 $\ln L(\theta)=-n\ln 2-n\ln\theta-\dfrac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$.

似然方程 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=0$, 故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$.

4.【详解】 μ 的置信度为 α 的置信区间为 $(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}})$, 区间长度为 $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}$, 由题意 $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\leqslant 1$, $u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$, $\sigma=10$. 解之得 $n\geqslant 1\,537$.

第八章 假设检验

习题精选八

一、填空题

1. $\{|\overline{X}-5|\geqslant 0.98\}$.

【详解】 已知 $\sigma^2=\sigma_0^2=2^2$,检验 $H_0: \mu=\mu_0, H_1: \mu\neq\mu_0$. 采用$U$检验，即检验统计量取$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$. 于是拒绝域为 $|u|\geqslant u_{1-\frac{\alpha}{2}}$，其中 $u=\dfrac{\sqrt{16}(\overline{X}-5)}{2}$. 又 $u_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.96$，故拒绝域化为 $\{|\overline{X}-5|\geqslant 0.98\}$.

2. $\dfrac{\overline{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}$.

【详解】 t 检验统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，其中 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

又 $\mu=0, S^2=\dfrac{Q^2}{n-1}$. 从而 t 检验统计量化为 $T=\dfrac{\overline{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}$.

3. $\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$；$\chi^2(n)$.

【详解】 因为 $X\sim N(\mu_0,\sigma^2), \sigma=\sigma_0$，$\dfrac{X-\mu_0}{\sigma_0}\sim N(0,1)$，故统计量：

$$\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\sim\chi^2(n).$$

二、选择题

1. (C)

【详解】 因为此时 χ^2 检验统计量为 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$，其中 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2, \sigma=2$. 故选(C).

2. (B)

【详解】 第一类错误：H_0 正确，但拒绝了 H_0，即 H_1 不真，但接受了 H_1. 故选(B).

三、解答题

1.【详解】 单个正态总体在方差已知的情况下，对均值进行右边假设检验，

从而使用 Z 检验法. $H_0: \mu\leqslant 40$，选取检验统计量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\sigma_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\dfrac{\overline{X}-40}{2/5}\sim N(0,1)$，

$z=3.125>z_\alpha=1.645$，拒绝 H_0 而接受 H_1，即认为这批推进器的燃烧率有显著提高.

2.【详解】 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，显然这是单个正态总体在方差未知时，对均值进行双边假设检验.

作假设 $H_0: \mu = 3.25$，$H_1: \mu \neq 3.25$. 选取检验统计量 $T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，

于是拒绝域为 $|t| = \left|\dfrac{\overline{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| \geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$. 利用所给样本值计算 $\overline{x}$,S，以及将 $\mu = 3.25$，$n = 5$ 代入 $|t| = \left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|$ 得 $|t| = 0.343 < t_{0.005}(4) = 4.6041$，故接受 H_0. 即在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，可以认为这批矿砂镍的含量均值为 3.25.