习题 1：形成一条参数三次多项式曲线 Lagrange 插值法，是使曲线在参数 P（t）在参数 t=0,1/3,2/3,1 时通过事先给定的 4 个点 P_1、P_2、P_3、P_4。求矩阵 M_i，使 P（t）=TM_iP。其中，T=（t^3　t^2　t^1）,P=(P^1　P^2　P^3　P^4)^T。

根据 Lagrange 插值法，参数三次多项式曲线 P(t)可表示为：

$$P(t) = f(t_0)g_0(t) + f(t_1)g_1(t) + f(t_2)g_2(t) + f(t_3)g_3(t)$$

其中：

$$g_0(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)(t_0-t_3)}$$

$$g_1(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)(t_1-t_3)}$$

$$g_2(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)(t_2-t_3)}$$

$$g_3(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_0)(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$

根据题意有：

$$f(t_0) = f(0) = P_1$$

$$f(t_1) = f(\frac{1}{3}) = P_2$$

$$f(t_2) = f(\frac{2}{3}) = P_3$$

$$f(t_3) = f(1) = P_4$$

所以有：

$$g_0(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)(t_0-t_3)} = \frac{(t-\frac{1}{3})(t-\frac{2}{3})(t-1)}{(0-\frac{1}{3})(0-\frac{2}{3})(0-1)} = -\frac{9}{2}t^3 + 9t^2 - \frac{11}{2}t + 1$$

$$g_1(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)(t_1-t_3)} = \frac{(t-0)(t-\frac{2}{3})(t-1)}{(\frac{1}{3}-0)(\frac{1}{3}-\frac{2}{3})(\frac{1}{3}-1)} = \frac{27}{2}t^3 - \frac{45}{2}t^2 + 9t$$

$$g_2(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)(t_2-t_3)} \frac{(t-0)(t-\frac{1}{3})(t-1)}{(\frac{2}{3}-0)(\frac{2}{3}-\frac{1}{3})(\frac{2}{3}-1)} = -\frac{27}{2}t^3 + 18t^2 - \frac{9}{2}t$$

$$g_3(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_0)(t_3-t_1)(t_3-t_2)} \frac{(t-0)(t-\frac{1}{3})(t-\frac{2}{3})}{(1-0)(1-\frac{1}{3})(1-\frac{2}{3})} = \frac{9}{2}t^3 - \frac{9}{2}t^2 + t$$

因为

$P(t) = TM_l P$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

所以矩阵

$$M_l = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & \frac{27}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{9}{2} \\ 9 & -\frac{45}{2} & 18 & -\frac{9}{2} \\ -\frac{11}{2} & 9 & -\frac{9}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

习题 2.设 P0＝(0,0,0)，P1=(0,1,0)，P2=(1,0,1)，P3=(1,0,0)，试求出一段三次参数多项式曲线，使曲线经过 P1 和 P2 点，与 P0P1 和 P2P3 相切。

解答：

根据题意，可以选用 Hermite 曲线，要求条件是两个端点位置坐标以及端点处的切向量。

P0P1=(0,1,0)-(0,0,0)=(0,1,0)，P2P3=(1,0,0)-(1,0,1)=(0,0,-1)

$$P_i(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_1' \\ P_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

习题 3. 设用 P_0，P_1，P_0'，P_1'确定了一段 Hermite 形式的参数三次多项式曲线，用 Q_0，Q_1，Q_0'，Q_1'又确定了一段,问两段曲线连续的条件是什么？一阶导数和二阶导数连续的条件是什么？由此讨论两段 Hermite 形成的参数三次曲线怎样才能光滑地拼接起来。

解答：

根据 Hermite 形式参数曲线的特点，可知第一段曲线以 P_0 为起点，以 P_1 终点，第二段曲线以 Q_0 为起点，Q_1 为终点。

假设这两段曲线分别利用 P_1 点和 Q_0 点进行拼接，则两段**曲线连续**的条件是 $P_1 = Q_0$，即两点重合。

已知 Hermite 形式参数曲线可记为：

$$P_i(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \\ P_i' \\ P_{i+1}' \end{bmatrix}$$

对该式求导，可得一阶导数和二阶导数为：

$$P_i'(u) = \begin{bmatrix} u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 3 & 3 \\ -6 & 6 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \\ P_i' \\ P_{i+1}' \end{bmatrix}$$

$$P_i''(u)=\begin{bmatrix}u & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12 & -12 & 6 & 6\\ -6 & 6 & -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_i\\ P_{i+1}\\ P_i'\\ P_{i+1}'\end{bmatrix}$$

一阶导数连续，即要求 $P'(1)=Q'(0)$，根据上面结论可知：

$$P'(1)=P_1'=Q'(0)=Q_0'$$

二阶导数连续，即要求 $P''(1)=Q''(0)$，根据上面结论可知：

$$P''(1)=6P_0-6P_1+2P_0'+4P_1'\text{；}\quad Q''(0)=-6Q_0+6Q_1-4Q_0'-2Q_1'$$

整理可得：

$$6P_0-6P_1+2P_0'+4P_1'=-6Q_0+6Q_1-4Q_0'-2Q_1'$$

因为 $P_1=Q_0$， $P_1'=Q_0'$ 所以有： $3P_0+P_0'+4P_1'=3Q_1-Q_1'$

综上所述，可知两段 Hermite 形式的参数三次曲线光滑拼接的条件是：

拼接点连续，即： $P_1=Q_0$

拼接点处 C^1 连续，即： $P_1=Q_0$ 且 $P_1'=Q_0'$

拼接点处 C^2 连续，即： $P_1=Q_0$， $P_1'=Q_0'$ 且 $3P_0+P_0'+4P_1'=3Q_1-Q_1'$

满足如上条件的两段 Hermite 形式的参数三次曲线可以光滑拼接。

习题 9. 设平面上四点(1，1)，(2，3)，(4，3)，(3，1)确定的一条三次 Bezier 曲线 P(*t*)，试求 P(1/5)，考虑用 Bezier 曲线几何作图算法依据的思想来求解。

解答：

使用几何作图法，有：

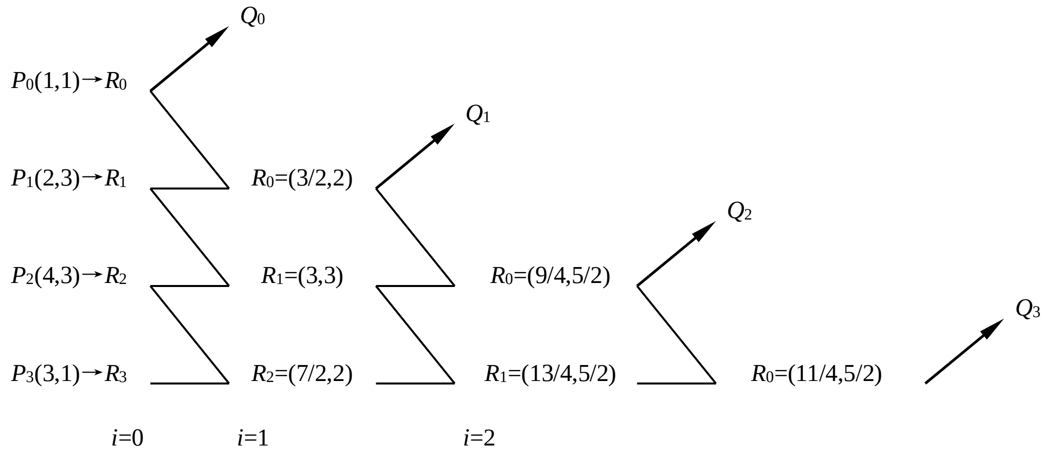
	M=3	M=2	M=1
$P_0(1,1)\rightarrow R_0$	$Q_0(6/5,7/5)\rightarrow R_0$	$Q_0(36/25,43/25)\rightarrow R_0$	$Q_0(211/125,245/125)$ =P(1/5)
$P_1(2,3)\rightarrow R_1$	$Q_1(12/5,3)\rightarrow R_1$	$Q_1(67/25,73/25)\rightarrow R_1$	
$P_2(4,3)\rightarrow R_2$	$Q_2(19/5,13/5)\rightarrow R_2$		
$P_3(3,1)\rightarrow R_3$			

P(1/5)为（211/125，245/125）（或者为（211/125，49/25））

习题 10. 设平面上四点设平面上四点(1，1)，(2，3)，(4，3)，(3，1)确定的 Bezier 曲线是 P(t)，如果在点 P(1/2)处将它分为两段，求前后两段做为 Bezier 曲线各自的四个控制点坐标。

解答：

使用分裂法，有：



前半段四个控制点 $Q_0(1,1)$，$Q_1(3/2,2)$，$Q_2(9/4,5/2)$，$Q_3(11/4,5/2)$，$0 \le t \le 1/2$；

后半段四个控制点 $R_0(11/4,5/2)$，$R_1(13/4,5/2)$，$R_2(7/2,2)$，$R_3(3,1)$，$1/2 \le t \le 1$。