

习题精选三

一、填空题

1. $X_1 \sim N(0, 2)$, $X_2 \sim N(1, 3)$, $X_3 \sim N(0, 6)$, 且 X_1, X_2, X_3 相互独立, 则 $P(2 \leq 3X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 8) =$ _____.
2. 设 $P(X \geq 0, Y \geq 0) = \frac{3}{7}$, $P(X \geq 0) = P(Y \geq 0) = \frac{4}{7}$, 则 $P(\max(X, Y)) =$ _____.
3. 设 X 与 Y 相互独立, 均服从 $[1, 3]$ 上的均匀分布, 记 $A = (X \leq a)$, $B = (Y > a)$, 且 $P(A \cup B) = \frac{7}{9}$, 则 $a =$ _____.
4. 设 X 服从参数为 1 的泊松分布, Y 服从参数为 2 的泊松分布, 而且 X 与 Y 相互独立. 则 $P(\max(X, Y)) \neq 0$ _____, $P(\min(X, Y)) \neq 0$ _____.
5. 二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1 + \sin x \sin y}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)} \quad (-\infty < x, y < +\infty),$$

则两个边缘密度为_____.

二、选择题

1. 设 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的 0-1 分布, Y 服从参数为 $\frac{1}{3}$ 的 0-1 分布, 则方程 $t^2 + 2Xt + Y = 0$ 中 t 有相同实根的概率为 【 】
(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$
2. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + y^2), & 0 < x < 2, 1 < y < 4, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

则 k 的值必为 【 】

- (A) $\frac{1}{30}$ (B) $\frac{1}{50}$ (C) $\frac{1}{60}$ (D) $\frac{1}{80}$
3. 设 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

则概率 $P(X + Y \geq 1)$ 为 【 】

- (A) $2e^{-\frac{1}{2}}$ (B) $e^{-1} - e^{-2}$ (C) e^{-1} (D) $1 - e^{-2}$

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, Y 服从二项分布 $B(n, p)$, 则 $X + Y$ 的分布函数【 】
- (A) 是连续函数. (B) 恰有 $n + 1$ 个间断点.
(C) 恰有一个间断点. (D) 有无穷多个间断点.
5. 设 X 与 Y 相互独立, $X \sim U(0, 2)$, Y 的密度函数为 $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0, \end{cases}$ 则 $P(X + Y \geq 1)$ 为
- (A) $1 - e^{-1}$ (B) $1 - e^{-2}$ (C) $1 - \frac{1}{2}e^{-1}$ (D) $1 - 2e^{-2}$ 【 】

三、解答题

1. 箱子里装有12件产品, 其中2件次品, 每次从箱子里任取一件产品, 共取2次, 定义随机变量 X_1, X_2 如下:

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{第}i\text{次取出正品,} \\ 1, & \text{第}i\text{次取出次品.} \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

试分别在下面两种情况下求出 (X_1, X_2) 的联合分布律和 X_1, X_2 的边缘分布律:

- (1) 放回抽样; (2) 不放回抽样.

2. 一个电子仪器由两个部件构成, 以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命(单位为千小时), 已知 X 和 Y 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5x} - e^{-0.5y} + e^{-0.5(x+y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

- (1) 问 X 和 Y 是否相互独立?

- (2) 求两个部件的寿命都超过100小时的概率 α .

3. 设 (X, Y) 服从 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ 上的均匀分布, 试求 $Z = \frac{Y}{3X}$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

4. 设 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$

试求 (X, Y) 的联合分布函数.

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且服从同分布, 已知 X 的分布律为 $P(X = i) = \frac{1}{3}, i = 1, 2, 3$. 令 $U = \max(X, Y), V = \min(X, Y)$, 试求:

- (1) (U, V) 的联合分布律;
(2) (U, V) 关于 U 与关于 V 的边缘分布律;
(3) U 在 $V = 2$ 条件下的条件分布律.

6. 设随机变量 X 服从区间 $(0, 2)$ 上的均匀分布，而随机变量 Y 服从区间 $(X, 2)$ 上的均匀分布，试求：

(1) X 和 Y 的联合密度 $f(x, y)$; (2) Y 的概率密度; (3)概率 $P(X + Y > 2)$.

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, $P(X < 1) = \frac{3}{4}$, 试求概率 $P\{\max(X, Y) < 1, \min(X, Y) < -1\}$.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立， X 的概率密度为 $f(x)$, Y 服从参数为 p 的 $0 - 1$ 分布，试求 $Z = XY$ 的分布函数.

9. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = Ae^{-ax^2 + bxy - cy^2},$$

其中 $A > 0, a > 0, c > 0$. 问在什么条件下 X 与 Y 相互独立?