

习题精选二

一、填空题

1. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < -1, \\ \frac{5x+7}{16}, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

则 $P(X^2 = 1) =$ _____.

2. 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\{X \leq \frac{1}{2}\}$ 出现的次数, 则 $P(Y = 2) =$ _____.

3. 设 X 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 则概率 $P(X^2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{8} \geq 0) =$ _____.

4. 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2-x, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

则 $P(\frac{1}{2} \leq X < \frac{3}{2}) =$ _____.

5. 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

又 a 为 $(0, 1)$ 中的一个实数, 且 $P(X > a) = P(X < a)$, 则 $a =$ _____.

二、选择题

1. 下列函数中能够作为分布函数的是【 】

$$\begin{aligned} \text{(A)} F(x) &= \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{3}, & -1 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases} & \text{(B)} F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x}, & x \geq 0. \end{cases} \\ \text{(C)} F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x+2}{5}, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases} & \text{(D)} F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ 1, & x \geq \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

2. 设 $f(x) = ke^{-x^2+2x}$ 为一概率密度, 则 k 的值为【 】

$$\text{(A)} \frac{e^{-1}}{\sqrt{\pi}} \quad \text{(B)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \text{(C)} \frac{1}{2} \quad \text{(D)} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

3. 下列命题正确的是【 】

- (A) 连续型随机变量的密度函数是连续函数.
(B) 连续型随机变量的密度函数 $f(x)$ 满足 $0 \leq f(x) \leq 1$.
(C) 连续型随机变量的分布函数是连续函数.
(D) 两个概率密度函数的乘积还是密度函数.

4. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu < 0$, $f(x)$ 为 X 的密度函数, 则对任何正数 $a > 0$, 有【 】

- (A) $f(a) < f(-a)$. (B) $f(a) = f(-a)$.
(C) $f(a) > f(-a)$. (D) $f(a) + f(-a) = 1$.

5. 设 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 为随机变量的分布函数, $f_1(x)$, $f_2(x)$ 是密度函数, 则【 】

- (A) $f_1(x) + f_2(x)$ 是密度函数.
(B) $f_1(x)f_2(x)$ 是密度函数.
(C) 对任何满足 $a + b = 1$ 的实数 a, b , $af_1(x) + bf_2(x)$ 是密度函数.
(D) $F_1(x)F_2(x)$ 是分布函数.

三、解答题

1. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次, 用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数, 试求 Y 的分布律.

2. 设顾客在其银行的窗口等待服务的时间 X (以分计) 服从指数分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，若超过10分钟，他就离开，他一个月要到银行5次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，试求 Y 的分布律以及概率 $P(Y \geq 1)$.

3. 设随机变量 Y 服从 $[a, 5]$ 上的均匀分布， $a > 0$ ，且关于未知量 x 的方程 $x^2 + Yx + \frac{3}{4}Y + 1 = 0$ 没有实根的概率为 $\frac{1}{4}$ ，试求 a 的值.

4. 已知 $X \sim B(n, p)$ ， $Y = 1 + (-1)^X$ ，试求 Y 的分布律.

5. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x < 0, \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

求 $Y = X^2 + 1$ 的分布函数.

6. 设 X 服从区间 $(0, 4)$ 上的均匀分布，随机变量 $Y = X^2 - 2X - 3$ ，试求 Y 的概率密度.