假设随机变量 X 的绝对值不大于 1：$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，$P\{X=1\}=\frac{1}{4}$；在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 在 $(-1,1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间的长度成正比，试求：

(1) 随机变量 X 的分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}$；

(2) X 取负值的概率.

解：(1) 当 $x\le -1$ 时，显然 $F(x)=0$；当 $-1<x\le 1$ 时，由于

$$1=P(|X|)\le 1)=P(X=-1)+P(-1<X<1)+P(X=1),$$

所以 $P(-1<X<1)=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$。又由已知条件可得

$$P(-1<X\le x\,|\,-1<X<1)=\frac{x+1}{2},\quad |x|<1。$$

注意到，对于 $-1<X<1$，有 $(-1,x]\subset(-1,1)$，因此

$$P(-1<X\le x)=P(-1<X\le x,\ -1<X<1)=P(-1<X<1)\bullet P(-1<X\le x\,|\,-1<X<1)$$

$$=\frac{5}{8}\cdot\frac{x+1}{2}=\frac{5}{16}(x+1),$$

于是当 $-1<x\le 1$，$F(x)=P(X\le x)=P(X\le -1)+P(-1<X\le x)$

$$=\frac{1}{8}+\frac{5}{16}(x+1)=\frac{5x+7}{16}$$

当 $x>1$ 时 $F(x)=1$，因此 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \dfrac{5x+7}{16}, & -1<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

(2) X 取负值的概率为

$$P(X<0)=F(0)-P(X=0)=\frac{7}{16}.$$