(1) 保持点（5，10）固定，x 方向放大 3 倍，y 方向放大 2 倍。变换矩阵如下：

$$T(-5,-10)\cdot S(3,2)\cdot T(5,10)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-5&-10&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\5&10&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\-10&-10&1\end{bmatrix}$$

(2) 绕坐标原点顺时针旋转 $90°$。变换矩阵如下：

$$R(-90°)=\begin{bmatrix}\cos(-90°)&\sin(-90°)&0\\-\sin(-90°)&\cos(-90°)&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(3) 对直线 $y=x$ 成轴对称。变换矩阵如下：

$$R(45°)\cdot S(-1,1)\cdot R(-45°)=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$ 或者

$$R(-45°)\cdot S(1,-1)\cdot R(45°)=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(4) 对直线 $y=-x$ 成轴对称。变换矩阵如下：

$$R(45°)\cdot S(1,-1)\cdot R(-45°)=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

或者

$$R(-45°)\cdot S(-1,1)\cdot R(45°)=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(5) 沿与水平方向成 θ 角的方向扩大 S_1 倍，沿与水平方向成 $90°+\theta$ 角的方向扩大 S_2 倍。变换矩阵如下：

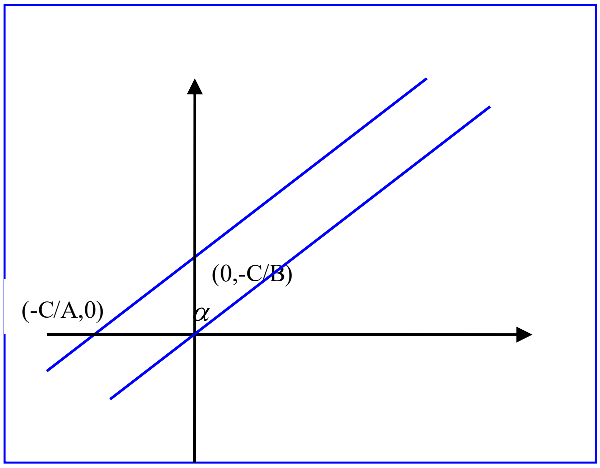
$$R(-\theta)\cdot S(S_1,S_2)\cdot R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & \sin(-\theta) & 0\\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1 & 0 & 0\\ 0 & S_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}S_1\cdot\cos^2\theta+S_2\cdot\sin^2\theta & (S_1-S_2)\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta & 0\\ (S_1-S_2)\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta & S_1\cdot\sin^2\theta+S_2\cdot\cos^2\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(6) 对于平面上任意一点(x_0,y_0)成为中心对称。变换矩阵如下：

$$T(-x_0,-y_0)\cdot S(-1,-1)\cdot T(x_0,y_0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -x_0 & -y_0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ x_0 & y_0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 2x_0 & 2y_0 & 1\end{bmatrix}$$

(7) 对平面上任意一条方程为$Ax+By+C=0$的直线成轴对称。变换矩阵如下：



A、B 不能同时为 0

当$A\neq 0$， $B=0$时，方程为$Ax+C=0$，变换为

$$T(\frac{C}{A},0)\cdot S(-1,1)\cdot T(-\frac{C}{A},0)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{C}{A} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{C}{A} & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{2C}{A} & 0 & 1\end{bmatrix}$$

当$A=0$， $B\neq 0$时，方程为$By+C=0$，变换为

$$T(0,\frac{C}{B})\cdot S(1,-1)\cdot T(0,-\frac{C}{B})$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{C}{B} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{C}{B} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & \frac{2C}{B} & 1\end{bmatrix}$$

当 $A\neq 0$，$B\neq 0$ 时，方程为 $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$，直线与 x 轴正向夹角为 $arctg(-\frac{A}{B})$，

$$T(0,\frac{C}{B})\cdot R(-arctg(-\frac{A}{B}))\cdot S(1,-1)\cdot R(arctg(-\frac{A}{B}))\cdot T(0,-\frac{C}{B})$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{C}{B} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} & \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} & 0\\ -\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} & \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} & -\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} & 0\\ \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} & \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{C}{B} & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{B^2-A^2}{A^2+B^2} & -\frac{2AB}{A^2+B^2} & 0\\ -\frac{2AB}{A^2+B^2} & \frac{A^2-B^2}{A^2+B^2} & 0\\ -\frac{2AC}{A^2+B^2} & -\frac{2BC}{A^2+B^2} & 1\end{bmatrix}$$

习题 4. 举例说明由平移、比例或旋转构成的组合变换一般不能交换变换的次序，说明什么情况下可以交换次序。

解答：

不同类型的变换通常不能交换次序，相同类型的变换可以交换次序。

$$T(T_{x1},T_{y1})\cdot T(T_{x2},T_{y2})=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ T_{x1} & T_{y1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ T_{x2} & T_{y2} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ T_{x1}+T_{x2} & T_{y1}+T_{y2} & 1\end{bmatrix}$$

$$S(S_{x1},S_{y1})\cdot S(S_{x2},S_{y2})=\begin{bmatrix}S_{x1} & 0 & 0\\ 0 & S_{y1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_{x2} & 0 & 0\\ 0 & S_{y2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{x1}S_{x2} & 0 & 0\\ 0 & S_{y1}S_{y2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R(\theta_1)\cdot R(\theta_2)=\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0\\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0\\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) & 0\\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

平移与比例不能交换变换的次序，如下：

$$T(T_x,T_y)\cdot S(S_x,S_y)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\T_x&T_y&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_x&0&0\\0&S_y&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_x&0&0\\0&S_y&0\\T_xS_x&T_yS_y&1\end{bmatrix}$$

$$S(S_x,S_y)\cdot T(T_x,T_y)=\begin{bmatrix}S_x&0&0\\0&S_y&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\T_x&T_y&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_x&0&0\\0&S_y&0\\T_x&T_y&1\end{bmatrix}$$

平移与旋转不能交换变换的次序，如下：

$$T(T_x,T_y)\cdot R(\theta)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\T_x&T_y&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\T_x\cos\theta-T_y\sin\theta&T_x\sin\theta+T_y\cos\theta&1\end{bmatrix}$$

$$R(\theta)\cdot T(T_x,T_y)=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\T_x&T_y&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\T_x&T_y&1\end{bmatrix}$$

当 $S_x\neq S_y$ 时，比例与旋转不能交换变换的次序，而当 $S_x=S_y$ 时，比例与旋转可以交换变换的次序，如下：

$$S(S_x,S_y)\cdot R(\theta)=\begin{bmatrix}S_x&0&0\\0&S_y&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_x\cos\theta&S_x\sin\theta&0\\-S_y\sin\theta&S_y\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$R(\theta)\cdot S(S_x,S_y)=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_x&0&0\\0&S_y&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_x\cos\theta&S_y\sin\theta&0\\-S_x\sin\theta&S_y\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

即如果组合变换由一系列比例和旋转变换组成，并且比例变换中 $S_x=S_y$，则可以交换变换次序。