

# 博弈论小结

January 21, 2019

## 1 必胜必败状态

必胜状态: 先手存在操作, 使得后手无论如何操作, 先手总能做出操作获得胜利.

必败状态: 先手无论如何操作, 后手总能做出操作获得胜利.

必胜状态存在一个后继状态为必败状态, 必败状态的所有后继状态均为必胜状态.

## 2 题目

### 2.1 Bash 博弈

有  $N$  个石子, 每次操作至少取 1 个, 至多取  $M$  个, 取到最后一个石子的人赢.

当  $N \% (M + 1) = 0$  时先手必败, 否则先手必胜.

### 2.2 AGC010 D

由 gcd 等于 1 可只, 如果有奇数个偶数, 那么先手必胜. 否则如果有至少两个奇数, 那么先手必败, 如果只有一个奇数, 那么肯定只能操作这个奇数, 然后递归.

### 2.3 AGC002 E

排个序, 转化成从左下角每次可以往上或者往右走, 第一次走出去的人赢. 发现必胜必败态斜着都是相等的.

### 2.4 AGC010 F

每次只会拿走一颗石头, 不会移动到石头数大于等于当前石头数的结点. 将石头数目从小到大排序, 按大小顺序依次加入树中, 并求出必胜必败状态.

## 3 SG 函数

### 3.1 Nim 游戏

有  $N$  堆石子, 第  $i$  堆有  $a_i$  个, 每次一个人可以在一堆石子中取走至少一个石子, 取到最后一颗石子的人胜.

如果  $a_i$  的异或起来为 0 则先手必败, 否则先手必胜. 因为如果异或为 0, 那么不论如何操作, 异或之后不为 0, 而异或不为 0 总存在一种操作使得之后异或为 0.

### 3.2 SG 定理

- 定义没有后继的状态 SG 值为 0.
- 定义  $\text{mex}\{A\}$  为集合  $A$  中最小的没有出现的非负整数.
- 一个游戏的 SG 值为  $\text{mex}\{\text{所有后继状态 SG 值}\}$ .
- 整个局面的 SG 值为所有子游戏 SG 值的异或和.
- SG 值为 0 的局面为必败状态, 不为 0 的为必胜状态.

SG 定理就是 NIM 游戏的推广, SG 值为  $i$  的一个游戏可以被看成一堆大小为  $i$  的石子.

### 3.3 阶梯 NIM

有  $N$  堆石子, 每次一个人可以选择第  $i$  堆石子, 并将其中若干个石子移动到第  $i-1$  堆中去, 若  $i=1$  则直接移走, 不能操作的人输.

只需要考虑编号为奇数的堆, 相当于这些堆进行 NIM 游戏.

### 3.4 BZOJ 1188

每个豆子相当于一个独立的游戏, 求出每个豆子的 SG 值.

### 3.5 BZOJ 2576

根据 SG 函数的定义来做, 利用  $\lfloor \frac{N}{M} \rfloor$  至多只有  $\sqrt{N}$  个不同的取值.

### 3.6 翻硬币游戏

**定理:** 可以把每一个硬币看成一个独立的游戏.

<https://www.cnblogs.com/kuangbin/p/3218060.html>