Herbrand定理

张文生　研究员
中国科学院自动化研究所

内容

- **Skolem**范式
- **Herbrand**域
- 语义树
- **Herbrand**定理
- **Davis**的工作

复习

- 定义(定理)
  - 如果G是公式$F_1, F_2,\ldots F_n$的逻辑结论, 则公式

    $$(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$$

    称为定理.
- 定理
  - 给定公式$F_1, F_2,\ldots F_n$和G, G是公式$F_1, F_2,\ldots F_n$的逻辑结论, 当且仅当公式

    $$F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \sim G$$

    不相容 (是永假式)。

- **Skolem范式**
- **Herbrand域**
- 语义树
- **Herbrand定理**
- **Davis的工作**

化公式为Skolem范式的步骤

- 公式化为前束范式。
- 母式化为合取范式。
- 在不影响公式的不相容性的前提下，使用**Skolem**函数，将前束中的存在量词消去。

Skolem函数

- 消去存在量词;
- 令公式H是一个前束范式，并且母式M是合取范式

  $(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)(M)$

  对前缀从左到右遇到的第一个存在量词$Q_r(1\le r\le n)$, 存在两种情况:

(1) 如果Q_r的左边(前边)没有全称量词, 则M中的x_r用常数a代替;

(2) 如果Q_r的左边(前边)有全称量词$x_{s1},\ldots, x_{sk}$, 且$1\le s_1<\ldots<s_k<r$, 则M中的x_r用函数$f(x_{s1},\ldots, x_{sk})$代替;

从前缀中删除$(Q_r\, x_r)$;

例子(Skolem函数)

- $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$

$\Rightarrow(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,u,v,w)$

$\Rightarrow(\forall y)(\forall z)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,f(y,z),v,w)$

$\Rightarrow(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v))$

注意

- 要求**a**必须是新的常量符号，它未曾在公式其他地方使用过;
- 要求**f()**不同于已出现在**M**中的任一函数，而对**f**的具体形式没有要求。

Skolem函数的意义

- 化公式为**Skolem**范式与原来公式在不相容意义下保持等价**(=)**.

- 定理**:** 令**G**是一个前束合取范式，
$G=(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)M[x_1,\ldots,x_n]$，
  Q_r为**G**中从左向右遇到的第一个存在量词。令
  $$G_1=(Q_1x_1)\ldots(Q_{r-1}x_{r-1})(Q_{r+1}x_{r+1})(Q_nx_n)$$
  $$M[x_1,\ldots,x_{r-1}, f(x_1,\ldots,x_{r-1}),x_{r+1},\ldots,x_n]$$
  其中：**$f(x_1,\ldots,x_{r-1})$**是**x_r**的**Skolem**函数**.**
  则有： **G**不相容$\Leftrightarrow$ **G_1**不相容

证明：(对存在量词x_r使用归纳法）

- 设论域为**D.**

  由于$G=(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)M[x_1,\ldots,x_n]$，

  $G_1=(Q_1x_1)\ldots(Q_{r-1}x_{r-1})(Q_{r+1}x_{r+1})\ldots(Q_nx_n)$

  $M[x_1,\ldots,x_{r-1}, f(x_1,\ldots,x_{r-1}),x_{r+1},\ldots,x_n]$

- 一方面：如果**G**不相容

  假设G_1相容: 存在一个解释**I**，使得 $G_1=T$.

  对任一组$(x_1,\ldots,x_{r-1})$, 都有$f(x_1,\ldots,x_{r-1})$,使得

  $(Q_{r+1}x_{r+1})\ldots(Q_nx_n)M[x_1,\ldots,x_{r-1}, f(x_1,\ldots,x_{r-1}),x_{r+1},\ldots,x_n]$为真

  $f(x_1,\ldots,x_{r-1})$是**D**中一个元素. 因此, 对任一组$(x_1,\ldots,x_{r-1})$,

  $(\exists x_r)(Q_{r+1}x_{r+1})\ldots(Q_nx_n)M[x_1,\ldots,x_r,\ldots,x_n]=T$

  $(\forall x_1)\ldots(\forall x_{r-1})(\exists x_r)(Q_{r+1}x_{r+1})\ldots(Q_nx_n)M[x_1,\ldots,x_r,\ldots,x_n]=T$

  即：**G**相容。

- 另一方面：如果G_1不相容

  假设G相容: 解释I: G=T.

  对任一组$(x_1,\ldots,x_{r-1})$, 存在一个元素$x_r \in D$, 使得 $(Q_{r+1}x_{r+1})\ldots(Q_n x_n)M[x_1,\ldots,x_r,\ldots,x_n]$为真.

  扩充I为I', 使其包含对函数符号$f(x_1,\ldots,x_{r-1})$的指定:

  $$f(x_1,\ldots,x_{r-1})=x_r，\quad 对任一组(x_1,\ldots,x_{r-1})$$

  对任一组$(x_1,\ldots,x_{r-1})$，

  $(Q_{r+1}x_{r+1})\ldots(Q_n x_n)M[x_1,\ldots, f(x_1,\ldots,x_{r-1}),\ldots,x_n]$ 为真.

  I'满足G_1。

- 显然，如果公式前缀中有多个存在量词，则用归纳法证明。

注意

- **Skolem**范式和原式在不相容意义下保持等价**,** 而非等价**(=)**。
  - 如果**G**不相容**,** 那么按照定理**G=G**$_1$。
  - 如果**G**是相容的，一般情况下，**G**不等价于**G**$_1$，即：**G**$\neq$**G**$_1$。

- 例子**:**
  - **G =(∃x)P(x)**
  - **G**$_1$**=P(a)**
  - 在解释**I**下不相等**:**
    - **D={1,2}**
    - **a=1, P(1)=F, P(2)=T.**
  - **G**在**I**下为真**, G**$_1$在**I**下为假**.**

- 将一个公式化为**Skolem**范式后**,** 公式的到了简化，进一步我们还可以简化，那就是将公式化为子句集的形式**.**

- 下面引入子句集的概念。

子句集

- **Skolem**化以后, 将公式表示为子句集合.
  - $(\forall x)(\forall y)((P(x) \vee Q(y)) \wedge (Q(x) \vee \sim S(f(y))))$
  - $\{P(x) \vee Q(y), Q(x) \vee \sim S(f(y))\}$
- 定义(子句, **clause**):
  - 一个包含若干文字的析取式称为子句。例如:
    - $P \vee \sim S \vee R$
    - $P(x) \vee Q(y, z) \vee \sim R(y, y)$

  说明: 一个子句中没有文字则称空子句(, **nil**, 永假);

  一个子句中有**n**个文字则称**n**文字子句。
- 定义（子句集合）:
  - 子句内部的关系是析取;
  - 子句间的关系是合取;
  - 所有子句受全程量词约束;

化子句集的方法（9个步骤）

例：$(\exists z)(\forall x)(\exists y)\{[(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(y)] \vee U(z)\}$

1. 消蕴涵符

理论根据：$a \rightarrow b = \sim a \vee b$

$(\exists z)(\forall x)(\exists y)\{[\sim(P(x) \vee Q(x)) \vee R(y)] \vee U(z)\}$

2. 移动否定符

理论根据：$\sim(a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$

$\sim(a \wedge b) = \sim a \vee \sim b$

$\sim(\exists x)P(x) = (\forall x)\sim P(x)$

$\sim(\forall x)P(x) = (\exists x)\sim P(x)$

$(\exists z)(\forall x)(\exists y)\{[(\sim P(x) \wedge \sim Q(x)) \vee R(y)] \vee U(z)\}$

3. 变量标准化

即：对于不同的约束，对应于不同的变量

$$(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) = (\exists x)A(x) \wedge (\exists y)B(y)$$

4. 量词左移

$$(\exists x)A(x) \wedge (\exists y)B(y) = (\exists x)(\exists y)\{A(x) \wedge B(y)\}$$

5. 消存在量词 **(skolem**化）

$$(\exists z)(\forall x)(\exists y)\{[(\sim P(x)\wedge\sim Q(x)) \vee R(y)] \vee U(z)\}$$

$$=> (\forall x)\{[(\sim P(x)\wedge\sim Q(x)) \vee R(f(x))] \vee U(a)\}$$

6. 化为合取范式

即$(a \vee b) \wedge (c \vee d) \wedge (e \vee f)$的形式

$(\forall x)\{[(\sim P(x) \wedge \sim Q(x)) \vee R(f(x))] \vee U(a)\}$

$\Rightarrow (\forall x)\{(\sim P(x) \vee R(f(x)) \vee U(a)) \wedge$

$(\sim Q(x) \vee R(f(x)) \vee U(a))\}$

7. 隐去全程量词

$\{(\sim P(x) \vee R(f(x)) \vee U(a)) \wedge (\sim Q(x) \vee R(f(x)) \vee U(a))$

8. 表示为子句集

$\{\sim P(x) \vee R(f(x)) \vee U(a), \sim Q(x) \vee R(f(x)) \vee U(a)\}$

9. 变量标准化（变量换名）

$\{\sim P(x_1) \vee R(f(x_1)) \vee U(a), \sim Q(x_2) \vee R(f(x_2)) \vee U(a)\}$

结论：

- 定理（公式不相容基本定理）
  - 设**S**是公式**G**的子句集，

    G不相容 $\Leftrightarrow$ **S**不相容

- 说明：

  S不相容**:** 对任一个解释**,** **S**中至少有一个子句为假**;**

  S相容**:** 存在一个解释**,** 使**S**中所有子句为真**;**

- 推论：
  - 如果$G=G_1\wedge\ldots\wedge G_n$, S_i是G_i的子句集, $i=1,\ldots,n$. 令$S'=S_1\cup\ldots\cup S_n$.

    G不相容 $\Leftrightarrow$ S'不相容

公式不相容基本定理的应用

——定理证明思路

- 证明定理**G;**
- 证明**~G**不相容**;**
- 证明**~G**的**Skolem**范式$\mathbf{G_1}$不相容**;**
- 证明$\mathbf{G_1}$的子句集不相容。

例1

- 若群F中任一元素x都有$x \cdot x = e$(单位元), 则F是交换群.
  - 设论域为F，谓词$P(x,y,z)$表示$x \cdot y = z$, 依群的定义有
  - A_1： 若$x, y \in F$， 则$x \cdot y \in F$

    可形式描述为： $(\forall x)(\forall y)(\exists z)P(x,y,z)$
  - A_2： 若$x, y, z \in F$， 则$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

    可形式描述为：

    $$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\forall v)(\forall w)$$

    $$[(P(x,y,u) \wedge P(y,z,v) \wedge P(u,z,w) \rightarrow P(x,v,w))$$

    $$\wedge (P(x,y,u) \wedge P(y,z,v) \wedge P(x,v,w) \rightarrow P(u,z,w))]$$

- **A_3：** 若**e**为单位元**,** 则对任一$x \in F$, $x \cdot e = e \cdot x = x$.

  可形式描述为**:** $(\forall x)(P(x,e,x) \land P(e,x,x))$

- **A_4：** 若$x \in F$, 必有$x^{-1} \in F$, 使 $x \cdot x^{-1} = e$.

  令$i(x)$: **x**的逆元x^{-1}.

  可形式描述为**:** $(\forall x)(P(x,i(x),e) \land P(i(x),x,e))$

- 所要证明的是**B**：对$x, y \in F$, 如果$x \cdot x = e$必有$x \cdot y = y \cdot x$

  可形式描述为**:**

$$(\forall x)P(x,x,e) \rightarrow (\forall u)(\forall v)(\forall w)(P(u,v,w) \rightarrow P(v,u,w))$$

- 要证明定理: $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4) \to B$
- 证明: $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge \sim B)$是永假式;
- 证明: $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge \sim B)$的子句集不相容;
- 根据推论, 只要分别求出A_1, A_2, A_3, A_4, $\sim B$的子句集。

- A_1: $(\forall x)(\forall y)(\exists z)P(x,y,z)$
  - S_{A1}: $\{P(x,y,f(x,y))\}$
- A_2: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\forall v)(\forall w)$

  $$[(P(x,y,u) \wedge P(y,z,v) \wedge P(u,z,w) \rightarrow P(x,v,w))$$
  $$\wedge(P(x,y,u) \wedge P(y,z,v) \wedge P(x,v,w) \rightarrow P(u,z,w))]$$
  - S_{A2}: $\{\sim P(x,y,u) \vee \sim P(y,z,v) \vee \sim P(u,z,w) \vee P(z,v,w),$

    $\sim P(x,y,u) \vee \sim P(y,z,v) \vee \sim P(x,v,w) \vee P(u,z,w)\}$
- A_3: $(\forall x)(P(x,e,x) \wedge P(e,x,x))$
  - S_{A3}: $\{P(x,e,x), P(e,x,x)\}$
- A_4: $(\forall x)(P(x,i(x),e) \wedge P(i(x),x,e))$
  - S_{A4}: $\{P(x,i(x),e), P(i(x),x,e)\}$

- **B: $(\forall x)P(x,x,e) \to (\forall u)(\forall v)(\forall w)(P(u,v,w) \to P(v,u,w))$**
  - **$S_{\sim B}$: $\{P(x,x,e), P(a,b,c), \sim P(b,a,c)\}$**

- **$S_{A1} \cup S_{A2} \cup S_{A3} \cup S_{A4} \cup S_{\sim B}$共含有10个子句:**
  - **$\{P(x,y,f(x,y))$,**
    $\sim P(x,y,u) \vee \sim P(y,z,v) \vee \sim P(u,z,w) \vee P(z,v,w)$,
    $\sim P(x,y,u) \vee \sim P(y,z,v) \vee \sim P(x,v,w) \vee P(u,z,w)$,
    …,
    $\sim P(b,a,c)\}$

- **Skolem**范式
- **Herbrand**域
- 语义树
- **Herbrand**定理
- **Davis**的工作

动机

- 命题逻辑下验证定理是直观的，但是在谓词逻辑下验证定理是困难的。
  - 公式G含有n个原子, 有2^n个解释;
  - $G_1 = P \vee (Q \wedge R)$
  - $G_2 = ((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$

P	Q	R	G_1
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

P	Q	G_2
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- 一阶逻辑下验证定理是困难的原因:
  - 个体变量论域D的任意性.
  - D中元素的任意性.
  - 解释的个数的无限性.

- 我们试图找到：一个比较简单的、特殊的论域，使得只要在这个论域上该公式是不可满足的，便能保证该公式在任一论域上也是不可满足的?

——**Herbrand**域**(**简称**H**域**)**就具有这样的性质。

Herbrand域

- 令H_0是子句集S中出现的常量的集合。若S中没有常量出现, 则H_0由单个常量a组成(即$H_0=\{a\}$);

- 对于i=1,2,…
  $H_i=H_{i-1}\cup\{$所有形如$f(t_1,\dots,t_n)$的项的集合$\}$

  其中：$f(t_1,\dots,t_n)$是出现于S中的任一函数符号$t_1,\dots,t_n\in H_{i-1}$。

- 规定H_∞为S的Herbrand域（**Herbrand universe of S**, 简称H域）。

例1 S={P(z), P(x)∨Q(y)}

- $H_0=\{a\}$
  $H_1= H_0$
  $H_2= H_1$
  …
  $H_\infty=\{a\}$

例2　$S=\{P(a), P(x)\vee P(f(x))\}$

- $H_0=\{a\}$
  $H_1=\{a\}\cup\{f(a)\} = \{a, f(a)\}$
  $H_2=H_1\cup\{f(a), f(f(a))\} = \{a, f(a), f(f(a))$
  …
  $H_\infty=\{a, f(a), f(f(a)),\ldots\}$

例3 S={P(f(x)，a，g(y)，b)}

- **H_0={a，b}**
  H_1={a，b，f(a)，g(a)，f(b)，g(b)}
  H_2={a，b，f(a)，g(a)，f(b)，g(b)，
  f(f(a))，f(g(a))，f(f(b))，f(g(b))，
  g(f(a))，g(g(a))，g(f(b))，g(g(b))}
  …

基本概念

- 定义（基础，**ground)**：
  - 没有变量的项，称为基础项**(ground term).**
    - **f(a,b)**
  - 没有变量的原子，称为基础原子**(ground atom).**
    - **P(a,f(b))**
  - 没有变量的文字，称为基础文字**(ground literal).**
    - **P(a,f(b)), ~P(a,f(b))**
  - 没有变量的子句，称为基础子句**(ground clause).**
    - **P(b,f(b))** $\vee$ **~Q(f(f(b)))**

原子集

- 定义：令**S**是一个子句集合，形如$\mathbf{P(t_1,\ldots,t_n)}$的基础原子集合，称为**S**的原子集，或**Herbrand**基，记为**A**。

  其中：$\mathbf{P(t_1,\ldots,t_n)}$是出现在**S**中的任一谓词符号**,** 而$\mathbf{t_1,\ldots,t_n}$ 是**S**的**H**域的任意元素。

例子

- $S=\{P(z), P(x)\vee Q(y)\}$
  - $H_\infty=\{a\}$
  - $A=\{P(a), Q(a)\}$

- $S=\{P(a), P(x)\vee P(f(x))\}$
  - $H_\infty=\{a, f(a), f(f(a)),\ldots\}$
  - $A=\{P(a), P(f(a)), P(f(f(a))),\ldots,\ P(a)\vee P(f(a)),\ \ldots\}$

- $S=\{P(f(x), a, g(y), b)\}$
  - $H_\infty=\{a, b, f(a), g(a), f(b), g(b),\ldots\}$
  - $A=\{P(a,a,a,a), P(a,a,a,b), P(a,a,b,b),\ldots\}$

基础实例

- 定义：当**S**中的某子句**C**中所有变量符号均以**S**的**H**域的元素代入时，所得的基子句**C'**称作**C**的一个基础实例**(**基例，**a ground instance of a clause C)**。

- 例 **S={P(x), Q(f(y))∨R(y), Z(f(y))}**

  - **H={a,f(a),f(f(a)),…}**
  - **P(a), P(f(a))**都称作子句**C=P(x)**的基例。
  - 同样, **Q(f(a))∨R(a), Q(f(f(a)))∨R(f(a))**都是**Q(f(y))∨R(y)**的基例。
  - 对于任一**b∈D,**子句**P(b), Q(f(b))∨R(b)**都叫基子句。

  - 但是，**Q(a)∨R(a)**不是**Q(f(y))∨R(y)**的基础实例。

注意

- 原子集和基础实例不同：
  - 原子集考虑单个原子，基础实例考虑子句。
    - **Q(f(a))**∨**R(a)**是基例，但不属于**S**的原子集。
  - 原子集是将某个谓词中的项改为**H**域中的元素，而基例是改变量。
    - **H={a,f(a),f(f(a)),…}.**
    - **Q(a)**不是**Q(f(y))**的基例**,** 但是属于**S**的原子集。
    - **Q(f(a))**既是**Q(f(y))**的基例**,** 又属于**S**的原子集。
  - 一个基础实例是由原子集中的原子或原子的非析取而成。
    - **A={P(a), Q(a), R(a), Z(a), P(f(a)), Q(f(a)),…}**
    - 基础实例**: Q(f(a))**∨**R(a)**

H解释

- 起因
  - 由子句集**S**建立**H**域，进而容易得到原子集**A**;
  - 一般论域**D**上对**S**的解释**I** ⇒ **H**域上的解释**I***;
  - **S**在**D**上为真 ⇒ **S**在**H**上为真;
  - **S**在**D**上不可满足 ⇒ **S**在**H**上不可满足。

H解释

- 定义(***H-interpretation* of S**)

  给定子句集***S***，***H***是***S***上的**Herbrand**全域，***I***是***H***上***S***的一个解释，如果满足：

  - ***I*** 映射所有**S**中的常数到自身；
  - 令***f*** 是一个***n***-元函词，$h_1, \ldots h_n$ 是***H***中的元， 在***I***上***f***被指派一个$(h_1, \ldots h_n)$ 到$f(h_1, \ldots h_n)$的映射，其中$(h_1, \ldots h_n)$ 属于H^n；

  则***I*** 称为一个**S**的***H***-解释。

例： $S=\{P(x), Q(f(y)) \vee R(a), Z(f(y))\}$

- **I:**
  - **H={a, f(a), f(f(a))…}**
  - **I={a，a; a，f(a); a，f(f(a)); …}**

H解释的表示

- 令$A=\{A_1,\ldots,A_n,\ldots\}$是S的原子集, 一个H解释可被表示为:

$$I=\{m_1,\ldots,m_n,\ldots\}$$

其中：m_j或者是A_j，或者是$\sim A_j$。

如果m_j是A_j, 则A_j为真, 否则, A_j为假。

例1 $S=\{P(x)\vee Q(x), R(f(y))\}$

- **H={a, f(a), f(f(a)), …}**
- **A={P(a),Q(a),R(a),P(f(a)),Q(f(a)),R(f(a)),…}**
- 凡对**A**中各元素真假值的一个具体设定，都是**S**的一个**H**解释。

I_1*={P(a),Q(a),R(a),P(f(a)),Q(f(a)),R(f(a)),…}

I_2*={~P(a),~Q(a),~R(a),~P(f(a)),Q(f(a)),R(f(a)),…}

I_3*={P(a),~Q(a),~R(a),~P(f(a)),Q(f(a)),~R(f(a)),…}

$S|I_1^*=T$, $S|I_2^*=F$, $S|I_3^*=F$

注意：对S的任一个解释I均可找到一个H解释I*与其对应.

- 例子: S={P(x)，Q(y，f(y，a))}
  - 设D={1,2},解释I作如下设定

a	f(1,1)	f(1,2)	f(2,1)	f(2,2)
2	1	2	2	1

P(1)	P(2)	Q(1,1)	Q(1,2)	Q(2,1)	Q(2,2)
T	T	F	T	T	F

  - 对x=1, y=1: P(1)∧Q(1,f(1,2))=T
    对x=1, y=2: P(1)∧Q(2,f(2,2))=T
    对x=2, y=1: P(2)∧Q(1,f(1,2))=T
    对x=2, y=2: P(2)∧Q(2,f(2,2))=T
  - 在解释I下, S为真;

找I*;

- H={a, f(a,a), f(a,f(a,a)), f(f(a,a),a), f(f(a,a), f(a,a)),...}

- A={P(a),Q(a,a),P(f(a,a)),Q(a,f(a,a)),Q(f(a,a) ,a), Q(f(a,a),f(a,a)), ...}

- **a→2**
  f(a,a) →f(2,2) →1
  f(a,f(a,a)) →f(2,1) →2
  f(f(a,a),a) →f(1,2) →2
  f(f(a,a),f(a,a)) →f(2,2) →1
  ……

- **P(a) →P(2) →T**
  Q(a,a) →Q(2,2) →F
  P(f(a,a)) →P(1) →T
  Q(a,f(a,a)) →Q(2,1) →T
  Q(f(a,a),a) →Q(1,2) →T
  Q(f(a,a),f(a,a)) →Q(1,1) →F
  ……

- $I^* = \{P(a), \sim Q(a,a), P(f(a,a)), Q(a,f(a,a)), Q(f(a,a),a), \sim Q(f(a,a),f(a,a)), \ldots\}$
- $S = \{P(x), Q(y, f(y, a))\}$
- $H = \{a, f(a,a), f(a,f(a,a)), f(f(a,a),a), f(f(a,a), f(a,a)), \ldots\}$

在I*下的S的真值

- $S|I^* = P(a) \wedge Q(a,f(a,a)) \quad \wedge \; P(a) \wedge Q(f(a,a),f(f(a,a),a))$

  (x=a,y=a对应于x=2,y=2)　　(x=a,y=f(a,a) 对应于x=2,y=1)

$\wedge \; P(f(a,a)) \wedge Q(a,f(a,a)) \quad\quad \wedge \; P(f(a,a)) \wedge Q(f(a,a),f(f(a,a),a))$

(x=f(a,a),y=a 对应于x=1,y=2)　　(x=f(a,a),y=f(a,a) 对应于x=1,y=1)

$\wedge P(a) \wedge Q(f(a,f(a,a)),f(f(a,f(a,a)),a)) \wedge \ldots\ldots \quad =T$

(x=a,y=f(a,f(a,a)) 对应于x=2,y=2)

例2

- **S={P(x)∨Q(x), R(f(y))}**
  - 设**D={1,2},**解释**I**作如下设定
  -

f(1)	**f(2)**	**P(1)**	**P(2)**	**Q(1)**	**Q(2)**	**R(1)**	**R(2)**
2	**2**	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**

于是有 **S|I=T**

- 由于**I**对常量符号**a**没有设定**,** 这时**a**设定**1**或**2(D**中元素**),** 便有相应于**I**的**H**解释$\mathbf{I_1}$*****和$\mathbf{I_2}$***:**

- I_1*={P(a),~Q(a),~R(a),~P(f(a)),Q(f(a)),R(f(a)),~P(f(f(a))),Q(f(f(a))),R(f(f(a))),...}
- I_2*={~P(a),Q(a),R(a),~P(f(a)),Q(f(a)),R(f(a)),~P(f(f(a))),Q(f(f(a))),R(f(f(a))),...}

- 有$\mathbf{S|I_1{*}=T}$， $\mathbf{S|I_2{*}=T}$。

对应于I的H-解释I*

- 定义：

假定在域**D**上的一个解释**I**，一个对应于**I**的**H**解释***I****是指满足下列条件的**H**解释：

令 $h_1,\ldots,h_n$ 是 H的元素，每一个 h_i 被映射到**D**域中的一些 d_m，如果$\mathbf{P}(h_1,\ldots h_n)$ 被解释**I**指派为***T(F)***，则$\mathbf{P}(h_1,\ldots h_n)$ 也被***I****指派为***T(F)***。

H解释的性质

- 引理
  - 如果在论域**D**上的一个解释**I**满足**S**，则任一个对应于**I**的**H**解释**I***，也满足**S**。
- 定理
  - 子句集**S**是不可满足的，当且仅当**S**的所有的**H**解释使**S**为假。

- 证明:
  - (⇒)设**S**是不可满足的.
    - 则在任一个论域上的任一解释使**S**为假;
    - **H**是一个论域，则**H**上的所有解释使**S**为假；
    - 从而，**S**的所有的**H**解释使**S**为假。
  - (⇐)设**S**的所有的**H**解释使**S**为假.
    - 假设子句集**S**可满足.
    - 在一个论域**D**中存在某个解释**I**使**S**为真;
    - 令**I***是对应于**I**的一个解释，根据引理，**S**在**I*** 上也为真，这与假设矛盾;
    - 所以，子句集**S**不可满足.

结论：

- 如果**S**为不满足的，则存在一个特殊域，当**S**被证明在这个域上的所有解释为**F**。

- 即证明了对所有域上的所有解释为**F**，也就证明了**S**为不相容的。

几个性质

- (性质1)一个子句**C**的基础实例**C'**被解释**I**满足，**iff**存在一个**C'**的基础文字**L'**在**I**中，即**C'**$\cap$ **I**$\neq\varnothing$。

  - **C: ~P(x)** $\vee$ **Q(f(x))**
  - **H: {a, f(a), f(f(a)),…}**
  - **C':~P(a)** $\vee$ **Q(f(a))**
  - **I_1: {~P(a), ~Q(a), ~P(f(a)), ~Q(f(a)), …}**

- (性质2)一个子句**C**在解释**I**下为真，**iff**这个子句**C**的每个基础实例被**I**所满足。

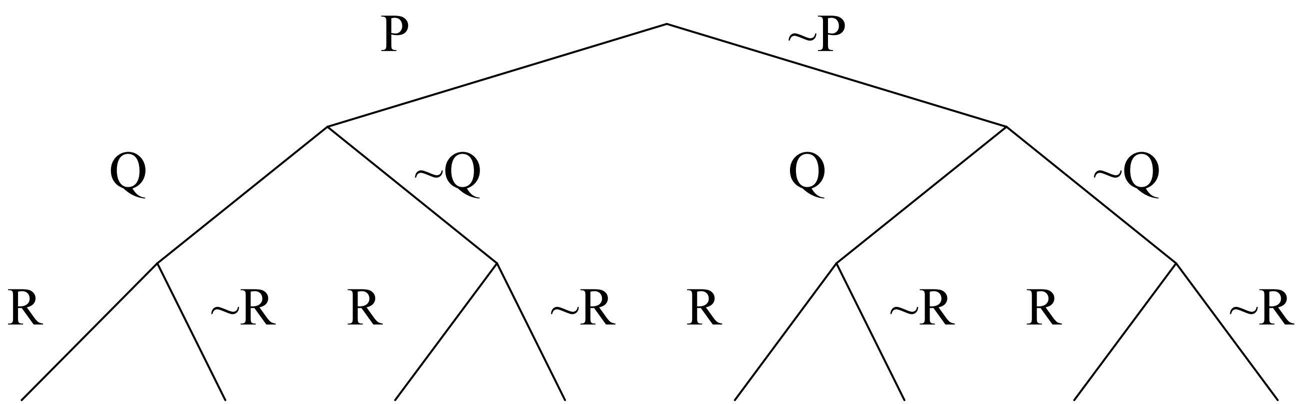
  - **I_2: {P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), …}**

- (性质3)一个子句**C**在解释**I**下为假，**iff**至少存在一个**C**的基础实例**C'**，使得**C'** 不被**I**所满足。
  - **C: ~P(x)** $\vee$ **Q(f(x))**
  - **H: {a, f(a), f(f(a)),…}**
  - **C':~P(a)** $\vee$ **Q(f(a))**
  - **I_3: {P(a), ~Q(a), P(f(a)), ~Q(f(a)), …}**
- (性质4)子句集**S**是不可满足的，**iff**对每个解释**I**下，至少有**S**的某个子句的某个基例不被**I**所满足。

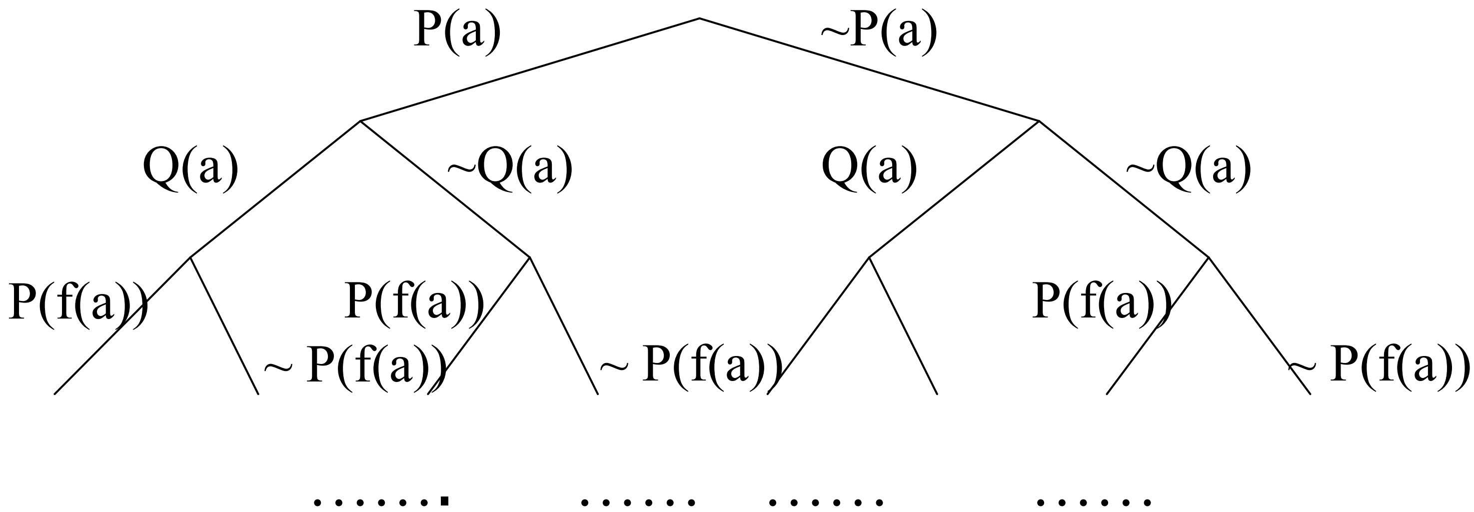
- **Skolem**范式
- **Herbrand**域
- 语义树
- **Herbrand**定理
- **Davis**的工作

语义树(Semantic tree)

- 例**1**
  - **G = P $\wedge$ Q $\wedge$ R**
  - **S = {P, Q, R}**
  - **A = {P, Q, R}**



- 例2
  - **S={~P(x)∨Q(x), P(f(y)), ~Q(f(y))}**
  - **H={a, f(a), f(f(a)), …}**
  - **A={P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), …}**



注意

- 颠倒原子的顺序是可以的. 例如**Q(a)**为第一个顶点.
- 如果原子集是无限的，则对应的语义树必定是无限的.
- 从任一个叶节点向根节点看，代表S的一个解释.
- 从任一个中间节点向根节点看，代表S的一个部分解释。

some concepts

- 定义**(complementary pair,** 互补对**)**
  - 如果***A*** 是一个原子，则两个文字***A*** 和 ***~A*** 被称为彼此互对，且 ***{A, ~A}***称为互补对。

- 如果一个字句包含一个互补对，则称该子句是冗余/重言。
  - $\mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \vee \mathbf{\sim Q}$

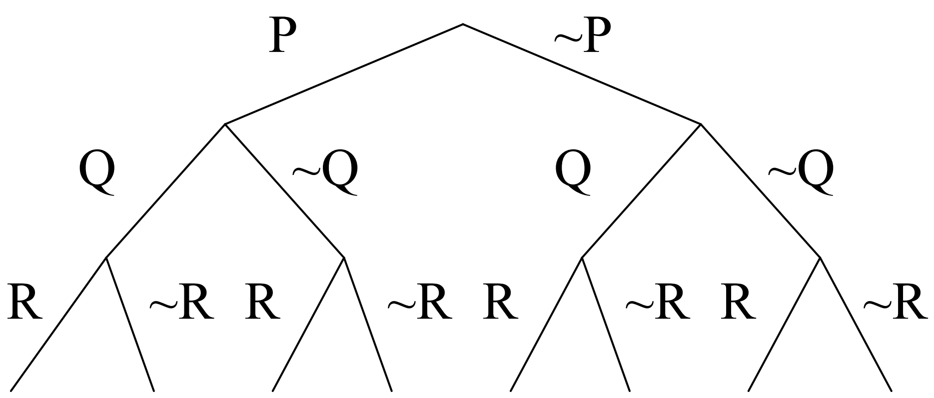
定义(semantic tree, 语义树)

- 给定一个子句集合***S***，**A**是一个**S**的原子集合，一个对**S**来说的语义树是一个向下的树结构，在它的每一条联线上均附加了一个有限的在**A**中的原子或原子非的集合，如此：
  - 对每一个节点**N**，仅有有限个直接联线 L_1, …, L_n，令Q_i是附加在L_i **(i=1,…,n)** 上的所有文字的合取，则 $Q_1 \vee \ldots \vee Q_n$ 是一个永真的命题公式（基础）**.**
  - 对每个节点***N***, 令***I(N)***是从根节点到节点**N**的一个分支上所有附加在各个联线上文字集合的并集（包含**N)**，则 ***I(N)***不包含任何互补节对。

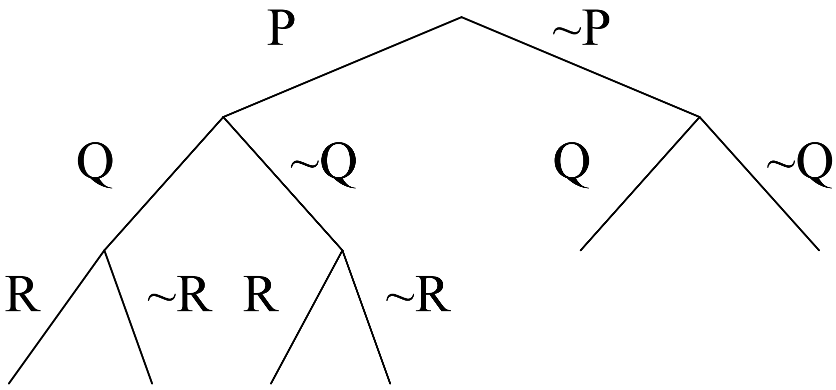
完备语义树(complete semantic tree)

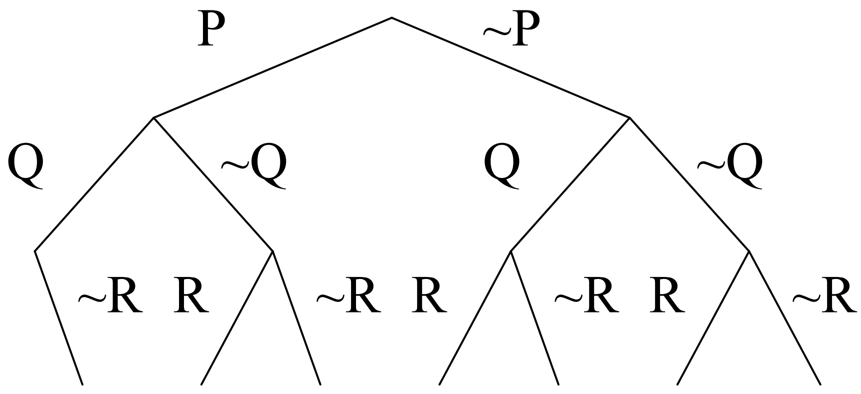
- 定义**(complete semantic tree,** 完备语义树**):**
  - 令$\mathbf{A=\{A_1, A_2, \ldots, A_k,\ldots\}}$ 是原子集合，一个对于**S**来说的语义树是完备的，**iff** 对于这个语义树的每一个端节点**N**（没有从这节点出发联线的节点） ***I(N)***包括 $\mathbf{A_i}$或 $\mathbf{\sim A_i}$，对于$\mathbf{i=1,2,\ldots}$成立。

- 例
  - **G = P ∧ Q ∧ R**
  - **S = {P, Q, R}**
  - **A = {P, Q, R}**



反例





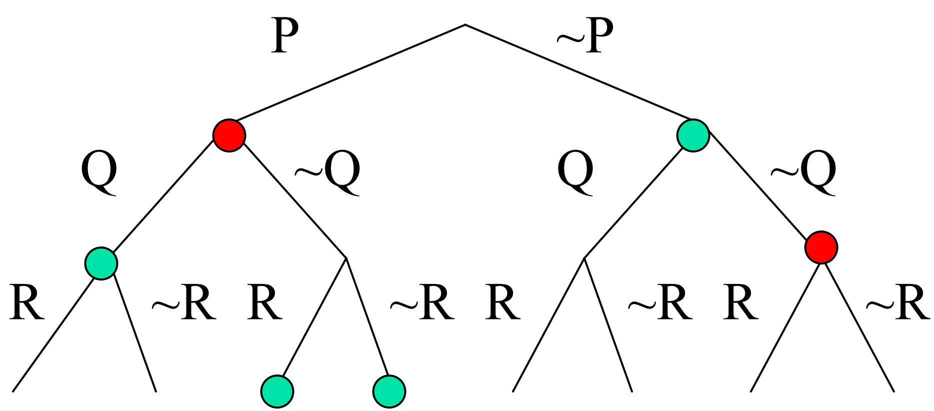
完备语义树的性质：

- **A complete semantic tree for S corresponds to an exhaustive survey of all possible interpretations for S. (全部)**
- **When the atom set A is infinite, any complete semantic tree for S will be infinite. (无限)**
- **If S is unsatisfiable, then S fails to be true in each of these interpretations. Thus, we may stop expanding nodes from a node *N* if *I(N)* falsifies S. (终止)**

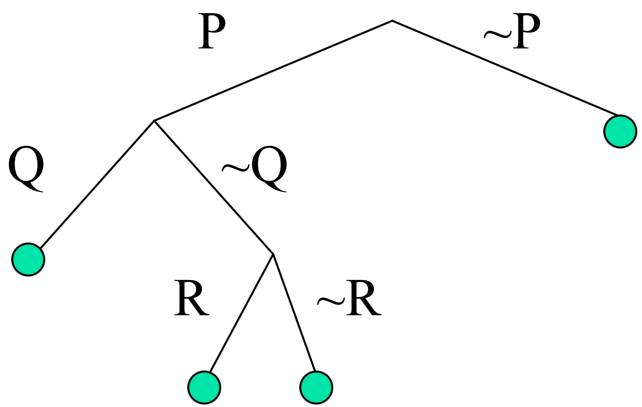
封闭语义树(Closed semantic tree)

- 定义(failure node, 失败节点, 假节点)
  - A node *N* is a failure node if *I(N)* falsifies some ground instance of a clause in *S*, but *I(N')* does not falsify any ground instance of a clause in *S* for every ancestor node *N'* of *N*.

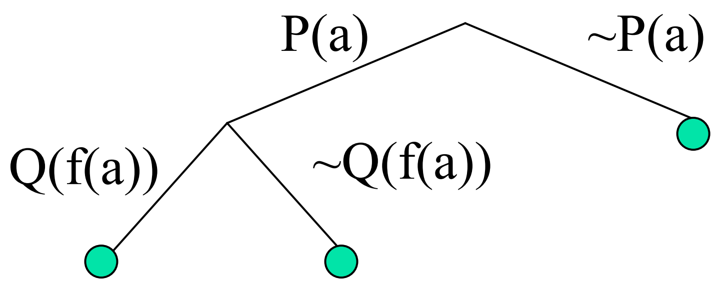
- 例
  - **S={P, Q∨R, ~P∨~Q, ~P∨~R}**



- 定义(Closed semantic tree, 封闭语义树)：
  - A semantic tree T is said to be closed if and only if every branch of T terminates at a failure node.

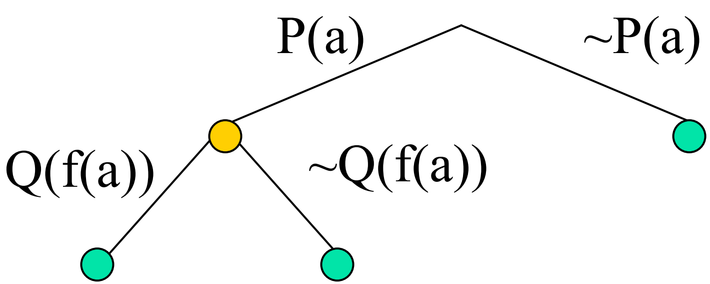


- 例
  - **$S=\{P(x), \sim P(x) \vee Q(f(x)), \sim Q(f(a))\}$**
  - **$A=\{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)),\ldots\}$**



推理节点

- 定义(inference node, 推理节点)
  - A node *N* of a closed semantic tree is called an inference node if all the immediate descendant nodes of N are failure nodes.



- 证明一个定理就是寻找一棵封闭语义树.
- **S**不可满足→**S**在所有解释下为假→ **S**在所有**H**解释下为假;
- 完备语义树包含所有**H**解释;每一枝是一个**H**解释;
- **S**在**I**下为假, 则使某个基础实例为假;
- 这个节点称为假节点, 不用再扩展;
- 所有枝上都有假节点, 则为封闭语义树;

- Skolem范式
- Herbrand域
- 语义树
- Herbrand定理
- Davis的工作

- **Herbrand定理(Version 1)**

子句集**S**是不可满足的，当且仅当对应于**S**的任一棵完备语义树, 都存在一棵有限的封闭语义树。

证明

- 设子句集**S**不可满足.

  要证:对应于**S**的任一棵完备语义树, 都存在一棵有限的封闭语义树。

  设**T**是**S**的完备语义树.

  任选**T**的一个分支**B**, **I**(**B**)是**B**上所有连线上的文字的集合的并. **I**(**B**)是**S**的一个解释.

  S不可满足, 则**I**(**B**)一定使**S**中的一个子句**C**为假;

  I(**B**)一定使**C**的某个基础实例**C'**为假(性质3); **C'**的每个原子一定都在原子集**A**中;

  因为**C'**的文字数目是有限的, 所以在**B**上一定存在一个假节点.

  因为**B**的任意性, **T**的每个分支都有假节点. **T**是封闭的.

T是有限的**.**

T是有限的封闭语义树**.**

- 设对应于**S**的任一棵完备语义树, 都存在一棵有限的封闭语义树.
  - 要证: 子句集**S**不可满足。

    完备语义树包含S的所有解释,每一枝对应一个解释;

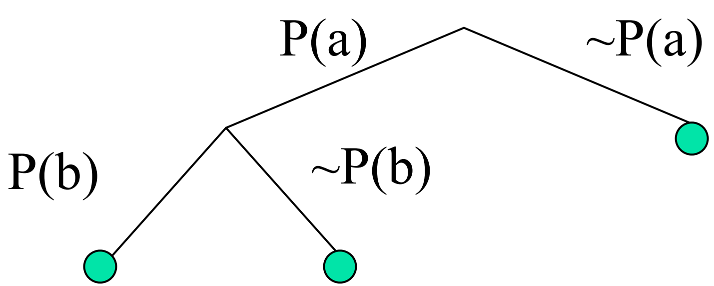
    封闭语义树: 每一枝都终止在假节点上: 每一枝都使**S**的某个子句的某个基例为假.

    (性质4)子句集**S**是不可满足的, **iff**对每个解释**I**下，至少有**S**的某个子句的某个基例为假。

Herbrand定理(Version 2)

- 子句集**S**是不可满足的，当且仅当存在一个有限不可满足的S的基础实例集合S’。

- 例子**:**
  - **S={P(x), ~P(a)∨~P(b), Q(f(x))}**
  - **H={a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b))…}**
  - **A={P(a), P(b), Q(a), Q(b),…}**
  - **S’={P(a), P(b), ~P(a)∨~P(b)}**



- 证明
  - 设子句集**S**是不可满足的;
    - 要证: 存在一个有限不可满足的**S**的基础实例集合 **S'**.

    根据**Version 1,** 有一棵有限的封闭语义树**;**

    每一枝都终止在假节点上**:** 每一枝都使**S**的某个子句的某些基例为假**:** 构成**S'.**

    S'不可满足**.**

    有限的封闭语义树**:** 节点有限**:**假节点有限**: S'**有限**.**

- 设存在一个有限不可满足的**S**的基础实例集合**S’**。
  - **S**的任一个解释**I**都是一个对所有基础实例的解释**;** 它包含一个对**S’**的解释**I’.**
  - 因为**S’**不可满足**,** 所以**I’**使**S’**为假**;**
  - **I’**$\subseteq$**I,** 所以**I**使**S’**为假**; (I**使某个子句的某个基础实例为假**)**
  - 由于解释**I**的任意性**, S**不可满足**.**

Gilmore的方法(1960)

- 子句集**S**是有限的;
- 基础实例的数目是可数的;
- 枚举;

- **Skolem**范式
- **Herbrand**域
- 语义树
- **Herbrand**定理
- **Davis**的工作

Davis-Putnam的工作

- **Gilmore**的方法是指数复杂性的**;**
- **Davis-Putnam:** 提高效率**(**启发式方法**);**

- 四条规则**:**
  - 其应用不改变子句集的不相容性**;**

规则一

- 重言式规则**(tautology rule)**
  - **S**中的重言式子句，不会为**S**的不可满足提供任何信息，应该删除。
  - **S={P∨~P，Q，R∨P}**
    S的逻辑含义是（**P∨~P**）∧**Q∧(R∨P)=**
    Q∧(R∨P)，从而删去重言式**P∨~P**，不影响**S**的真值。
    - **S'={Q，R∨P}**
  - **Delete all the ground clauses from *S* that are tautologies. The remaining set *S'* is unsatisfiable if and only if *S* is.**

规则二

- 单文字规则(one-literal rule)
  - 单文字: 在S中存在只有一个文字的基础子句L.
  - 例子: S={L，L∨P，~L∨Q，S∨~R}
  - 如果在S中存在只有一个文字的基础子句L, 消去在S中带有这个文字L的所有子句得到S’, 如果S’为空, 则S是相容的; 否则, 从S’中删去~L, 得到S’’. S’’不可满足当且仅当S不可满足.
    - S’ = {~L∨Q，S∨~R}
    - S’’= {Q，S∨~R}
  - S不可满足, 则在所有解释下S都为假;
    - L=0;
    - L=1;
      - ~L=0.

规则三

- 纯文字规则(pure-literal rule)
  - 纯文字: 如果文字L出现于S中，而~L不出现于S中，L称为S的纯文字.
  - 例子: **S={A∨B, A∨~B, ~B, B}**
  - L是S的纯文字. 从**S**中删除含**L**的子句得**S'**，如果**S'**为空集，那么**S**是可满足的。否则**, S'**不可满足当且仅当**S**不可满足**.**
    - **S'= {~B, B};**
  - **S**不可满足**,** 在**A**为真下不可满足**;**
    - **A=1: A∨B=1, A∨~B=1;**
    - **S'**不可满足**,** 当然**S**不可满足**;**

规则四

- 分裂规则**(splitting rule)**
  - $S=(L \vee A_1)\wedge \ldots \wedge(L \vee A_m)\wedge$
    $(\sim L\vee B_1)\wedge \ldots \wedge(\sim L\vee B_n)\wedge R$
    A_i, B_i, R中不含L和$\sim L$。
    令$S' =\{A_1\wedge \ldots\wedge A_m\wedge R\}$，
    $S''=\{B_1\wedge \ldots\wedge B_n\wedge R\}$
    则S不可满足当且仅当S'和S''同时是不可满足的。

  - $L=1(S'')$
  - $L=0(S')$

例1

- **S={P∨Q∨~R, P∨~Q, ~P, R, U}**
  - 对**U**使用纯文字**: {P∨Q∨~R, P∨~Q, ~P, R}**
  - 对**~P**使用单文字**: {Q∨~R, ~Q, R}**
  - 对**~Q**使用单文字**: {~R, R}**
  - 对**R**使用单文字**: {□}**
  - **S**不可满足**;**

例2

- **S={P∨Q, ~Q, ~P∨Q∨~R}**
  - 对**~Q**使用单文字**: {P, ~P∨~R}**
  - 对**P**使用单文字**: {~R}**
  - 对**~R**使用纯文字**: {}**
  - **S**可满足**;**

作业

- 写出下式的H域和原子集.
  - S={P(f(x,a))}
  - S={P(x)∨Q(y), R(f(y))}
- 前提：每个储蓄钱的人都获得利息。
  结论：如果没有利息，那么就没有人去储蓄钱。
  令：S（x，y）表示x储蓄y
  M（x） 表示x是钱
  I（x） 表示x是利息
  E（x，y） 表示x获得y

  用逻辑公式表示前提和结论并化为子句形式;
- 下述子句集是可满足的还是不可满足的(给出过程)?
  - S={P∨~Q, ~P∨Q, Q∨~R, ~Q∨~R}
  - S={P∨Q, P∨~Q, R∨Q, R∨~Q}
  - S={P∨Q, P∨~Q, ~P∨Q, ~P∨~Q}