中国科学院
自动化研究所
INSTITUTE OF AUTOMATION
CHINESE ACADEMY OF SCIENCES

基于知识的推理
（Knowledge-based Inference）

毛文吉
中国科学院自动化研究所

2016年11月

关于推理

- **推理：**依据一定的原则从前提推出结论的过程，从逻辑上分为
  - **演绎推理：**由一组前提必然地推导出某个结论的过程
    核心：三段论；保真性；没有增加新知识
  - **归纳推理：**以某个命题为前提，推出与其有归纳关系的其它命题的过程
    简单枚举法、类比法等；增加了新知识；不保真

- **经典逻辑推理**

标准逻辑下的演绎推理是人工智能最早采用的经典推理方法，归结推理方法是其最重要的形式化方法

关于推理

- **非经典逻辑与非经典推理**

精确→不精确：
- 多值化：**多值逻辑**
- 模糊化：**模糊逻辑**

静态→动态：
- 可能性：**模态逻辑**
- 时态性：**时态逻辑**

单调→非单调：**非单调逻辑、非单调推理**（Nonmonotonic Reasoning）

- **基于知识的推理**

确定→不确定：**不确定推理** (Approximate Reasoning)

- **基于模型的推理（定性推理**, Qualitative Reasoning)

不确定推理方法的分类和发展

- 不确定推理方法
  - 数值方法
    - 概率方法
      - 信念网络（Pearl,1986）
      - 主观贝叶斯法（Duda等,1976）
    - 新计算方法
      - 确定性理论（Shortliffe等,1975）
      - 证据理论（Dempster&Shafer,1976）
      - 模糊逻辑（Zadeh,1983）
  - 非数值方法
    - 批注理论（Cohen,1985）

不确定推理模型

1. 证据的不确定性描述

表示： 证据 **A**，用 **C(A)** 表示它的不确定性度量

含义： 用某种度量表示证据为真的程度

- A真，C(A) = ?
- A假，C(A) = ?
- 对A一无所知，C(A) = ?

2. 知识的不确定性描述

表示： 规则 **A→B**，用 **f(B, A)** 表示它的不确定性度量

含义： 用某种度量表示前提为真对结论为真的影响程度

- A真则B真，f(B, A) = ?
- A真则B假，f(B, A) = ?
- A对B没有影响，f(B, A) = ?

不确定推理模型

3. 推理计算

① **传播**

已知 C(A)，规则 $A \rightarrow B$，f(B, A)，如何计算 C(B)

② **逻辑组合**

已知 $C(A_1)$ 和 $C(A_2)$，如何计算 $C(A_1 \wedge A_2)$ 、$C(A_1 \vee A_2)$

已知 C(A)，如何计算 C(~A)

③ **合成**

已知 $C_1(B)$，又得知 $C_2(B)$，如何计算 C(B)

④ **更新**

已知 C(B)，规则 $A \rightarrow B$，f(B, A)，C(A)，如何计算 C(B|A)

确定性理论

以确定性因子（或称可信度）**CF** 作为不确定性度量。

- **规则的不确定性度量**

规则 **A→B**，可信度 **CF(B, A) 定义为：**

$$
\mathrm{CF(B, A)} = \begin{cases} \dfrac{P(B|A) - P(B)}{1 - P(B)} & \text{当 } P(B|A) \geq P(B) \\[2ex] \dfrac{P(B|A) - P(B)}{P(B)} & \text{当 } P(B|A) < P(B) \end{cases}
$$

含义： 相对于P(~B)，A真对B真的支持程度（当CF(B, A) ≥ 0）

相对于P(B)，A真对B真的不支持程度（当CF(B, A)＜0）

取值： $-1 \leq \mathrm{CF(B, A)} \leq 1$

1：A真则B必真，–1：A真则B必假

0：A对B无影响

CF(B, A) 的引入

$$\mathbf{CF(B, A)} = \underbrace{MB(B, A)}_{\text{信任增长度}} - \underbrace{MD(B, A)}_{\text{不信任增长度}}$$

$$MB(B, A) = \begin{cases} 1 & P(B) = 1 \\ \dfrac{\max\{P(B|A), P(B)\} - P(B)}{1 - P(B)} & \text{其它} \end{cases}$$

$$MD(B, A) = \begin{cases} 1 & P(B) = 0 \\ \dfrac{\min\{P(B|A), P(B)\} - P(B)}{- P(B)} & \text{其它} \end{cases}$$

确定性理论

- **证据的不确定性度量**

证据 **A**，可信度 **CF(A)**

含义： CF(A)＞0，A以CF(A)程度为真

CF(A)＜0，A以CF(A)程度为假

取值： $-1 \le CF(A) \le 1$

$$CF(A)=\begin{cases} 1 & A真 \\ -1 & A假 \\ 0 & 对A一无所知 \end{cases}$$

- **推理计算**

① **传播**

$$CF(B) = CF(B, A)\times \max\{0, CF(A)\}$$

推理计算（1）

② 逻辑组合

$$CF(A_1 \wedge A_2) = \min\{CF(A_1), CF(A_2)\}$$

$$CF(A_1 \vee A_2) = \max\{CF(A_1), CF(A_2)\}$$

$$CF(\sim A) = -CF(A)$$

③ 合成

已知 $CF(A_1)$，规则 $A_1 \rightarrow B$，$CF(B, A_1)$

$CF(A_2)$，规则 $A_2 \rightarrow B$，$CF(B, A_2)$

计算合成的 $CF(B)$

$$CF(B) = \begin{cases} CF_1(B) + CF_2(B) - CF_1(B) \times CF_2(B) & \text{同为非负} \\ CF_1(B) + CF_2(B) + CF_1(B) \times CF_2(B) & \text{同为负} \\ CF_1(B) + CF_2(B) & \text{其它情形} \end{cases}$$

推理计算（2）

③ 合成

$$CF(B)=\begin{cases} CF_1(B)+CF_2(B)\times(1-CF_1(B)) & \text{同为非负} \\ CF_1(B)+CF_2(B)\times(1+CF_1(B)) & \text{同为负} \\ CF_1(B)+CF_2(B) & \text{其它情形} \end{cases}$$

④ 更新

已知 CF(B)，$CF(A)\geq 0$，规则 $A\rightarrow B$，CF(B, A)

计算更新值 CF(B|A)

$$CF(B|A)=\begin{cases} CF(B)+CF(B,A)\times CF(A)\times(1-CF(B)) & \text{同为非负} \\ CF(B)+CF(B,A)\times CF(A)\times(1+CF(B)) & \text{同为负} \\ CF(B)+CF(B,A)\times CF(A) & \text{其它情形} \end{cases}$$

确定性理论的改进模型

- 对合成计算的修正（EMYCIN系统）：

$$CF(B) = \frac{CF_1(B) + CF_2(B)}{1 - \min\{|CF_1(B)|, |CF_2(B)|\}}$$

$CF_1(B)$、$CF_2(B)$ 符号不同时

已知 $CF(B)$，$CF(A) \geq 0$，规则 $A \rightarrow B$，$CF(B, A)$
计算更新值 $CF(B|A)$

$$CF(B|A) = \frac{CF(B) + CF(B, A) \times CF(A)}{1 - \min\{|CF(B)|, |CF(B, A) \times CF(A)|\}}$$

$CF(B)$、$CF(B, A)$ 符号不同时

推理过程示例

已知：R1：规则 $A_1 \rightarrow B_1$，$CF(B_1, A_1) = 0.8$

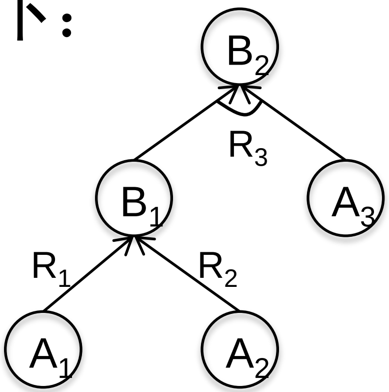
R2：规则 $A_2 \rightarrow B_1$，$CF(B_1, A_2) = -0.5$

R3：规则 $B_1 \wedge A_3 \rightarrow B_2$，$CF(B_2, B_1 \wedge A_3) = 0.9$

$CF(A_1) = CF(A_2) = CF(A_3) = 1$，$CF(B_1) = CF(B_2) = 0$

计算：$CF(B_1)$、$CF(B_2)$ 的更新值

解： 由规则形成的推理网络如图，推理过程如下：



推理过程示例

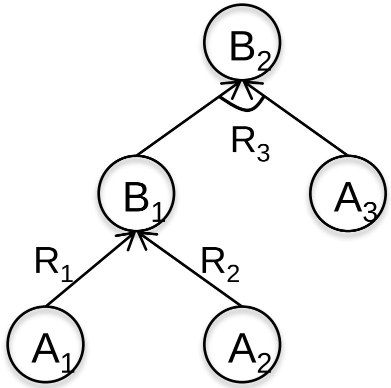
已知：R1：规则 $A_1 \rightarrow B_1$，$CF(B_1, A_1) = 0.8$

R2：规则 $A_2 \rightarrow B_1$，$CF(B_1, A_2) = -0.5$

R3：规则 $B_1 \wedge A_3 \rightarrow B_2$，$CF(B_2, B_1 \wedge A_3) = 0.9$

$CF(A_1) = CF(A_2) = CF(A_3) = 1$，$CF(B_1) = CF(B_2) = 0$

计算：$CF(B_1)$、$CF(B_2)$ 的更新值



（1）根据 R_1，计算 B_1 的可信度更新值

$CF(B_1|A_1) = 0 + 0.8 \times 1 \times (1-0) = 0.8$

（2）根据 R_2，计算 B_1 的可信度更新值

$CF(B_1|A_2) = (0.8+(-0.5) \times 1) / (1-0.5) = 0.6$

（3）计算 B_1、A_3 逻辑组合的可信度

$CF(B_1 \wedge A_3) = \min\{CF(B_1), CF(A_3)\} = \min\{0.6, 1\} = 0.6$

（4）根据 R_3，计算 B_2 的可信度更新值

$CF(B_2|B_1 \wedge A_3) = 0 + 0.9 \times 0.6 \times (1-0) = 0.54$

主观概率论（主观Bayes方法）

引入两个数值（**LS, LN**）作为规则的不确定性度量。

- **规则的不确定性度量**

规则 **A→B**， 度量（**LS, LN**）**定义为：**

$$\mathbf{LS} = \frac{P(A|B)}{P(A|\sim B)} \qquad \mathbf{LN} = \frac{P(\sim A|B)}{P(\sim A|\sim B)}$$

含义： 1）几率函数：$O(x) = \dfrac{P(x)}{1-P(x)}$

2）可以得到：$O(B|A) = LS \cdot O(B)$

$O(B|\sim A) = LN \cdot O(B)$

LS： 表示A真时，对B真的影响程度（**充分性因子**）

LN： 表示A假时，对B真的影响程度（**必要性因子**）

LS, LN 的引入及公式证明

证明： 由于 $$P(B|A) = \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)}$$

$$P(\sim B|A) = \frac{P(A|\sim B)\,P(\sim B)}{P(A)}$$

$$O(X) = \frac{P(X)}{1-P(X)} = \frac{P(X)}{P(\sim X)}$$

两式相比得：

$$\underbrace{\boxed{\frac{P(B|A)}{P(\sim B|A)}}}_{O(B|A)} = \underbrace{\boxed{\frac{P(A|B)}{P(A|\sim B)}}}_{LS} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{P(B)}{P(\sim B)}}}_{O(B)}$$

即： $$O(B|A) = LS \cdot O(B)$$

类似可得： $$O(B|\sim A) = LN \cdot O(B)$$

主观Bayes方法

- **规则的不确定性度量**

取值： LS ≥ 0，LN ≥ 0，且

① LS＞1，LN＜1

② LS＜1，LN＞1

③ LS＝LN＝1

$$LS=\frac{P(A|B)}{P(A|\sim B)}$$

$$LN=\frac{P(\sim A|B)}{P(\sim A|\sim B)}=\frac{1-P(A|B)}{1-P(A|\sim B)}$$

LS:

∞	A真则B必真
>1	A真支持B真
1	A真对B无影响
<1	A真不支持B真
0	A真则B必假

$$LS=\frac{O(B|A)}{O(B)}$$

LN:

∞	A假则B必真
>1	A假支持B真
1	A假对B无影响
<1	A假不支持B真
0	A假则B必假

$$LN=\frac{O(B|\sim A)}{O(B)}$$

主观Bayes方法

- **证据的不确定性度量**

证据 **A**，以 **O(A)** 或 **P(A)** 作为不确定性度量

转换：

$$O(X)=\frac{P(X)}{1-P(X)} \qquad P(X)=\frac{O(X)}{1+O(X)}$$

$$O(A)=\begin{cases}\infty & A真 \\ 0 & A假\end{cases}$$

- **推理计算**

① **A确定时**

$$O(B|A)=LS\cdot O(B)$$

$$O(B|{\sim}A)=LN\cdot O(B)$$

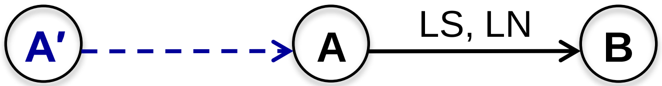
推理计算（1）

② A不确定

已知 P(A)，规则 A→B，(LS, LN)，P(B)

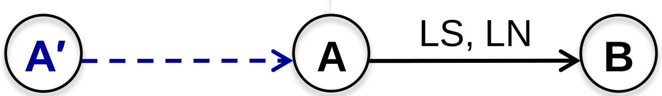
计算使用规则后 B 的不确定性更新值 P(B|A)

引入 **A′**：代表与证据 **A** 有关的所有观察，则 A′ 必发生且出现在 A 之前



推理计算（1）

② A不确定



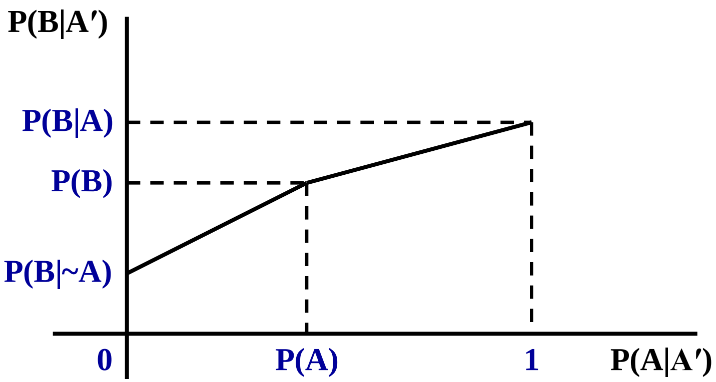
已知 P(A)，规则 A→B，(LS, LN)，P(B)，P(A|A′)

计算使用规则后 B 的不确定性更新值 P(B|A′)

关于 A′（Duda, 1976）给出公式：

$$P(B|A') = P(B|A) \cdot P(A|A') + P(B|{\sim}A) \cdot P({\sim}A|A')$$

分别计算以下情形：



i) P(A|A′)＝1 时，P(B|A′)＝P(B|A)

ii) P(A|A′)＝0 时，P(B|A′)＝P(B|~A)

iii) P(A|A′)＝P(A) 时，

P(B|A′)＝P(B|A) • P(A)+P(B|~A) • P(~A)＝P(B)

iv) P(A|A′) 取其它值，通过线性插值求得 P(B|A′)

计算 P(B|A)、P(B|~A)

由 $O(B|A)=LS \cdot O(B)$

$$\frac{1}{1-P(B|A)}-1=\frac{LS \cdot P(B)}{1-P(B)}$$

$$O(X)=\frac{P(X)}{1-P(X)}=\frac{1}{1-P(X)}-1$$

整理得：

$$P(B|A)=\frac{LS \cdot P(B)}{(LS-1) \cdot P(B)+1}$$ ……… 情形 i）

由 $O(B|A)=LS \cdot O(B)$ 同样推导可得：

$$P(B|\sim A)=\frac{LN \cdot P(B)}{(LN-1) \cdot P(B)+1}$$ ……… 情形 i i）

推理计算（2）

③ 逻辑组合

$$P(A_1 \wedge A_2|A') = \min\{P(A_1|A'), P(A_2|A')\}$$

$$P(A_1 \vee A_2|A') = \max\{P(A_1|A'), P(A_2|A')\}$$

$$P(\sim A|A') = 1-P(A|A')$$

$$O(\sim A|A') = \frac{1}{O(A|A')}$$

④ 合成

已知 $P(A_1)$，$A_1 \to B$，(LS_1, LN_1)，对A_1的有关观察A_1'，$P(A_1|A_1')$

$P(A_2)$，$A_2 \to B$，(LS_2, LN_2)，对A_2的有关观察A_2'，$P(A_2|A_2')$

A_1'、A_2'相互独立，$P(B)$

$$O(B|A_1' \cap A_2') = \frac{O(B|A_1')}{O(B)} \cdot \frac{O(B|A_2')}{O(B)} \cdot O(B)$$

证明：

$$O(B|A_1'\cap A_2') = \frac{P(A_1'\cap A_2'|B)}{P(A_1'\cap A_2'|\sim B)} \cdot O(B)$$

$$= \frac{P(A_1'|B) \cdot P(A_2'|B)}{P(A_1'|\sim B) \cdot P(A_2'|\sim B)} \cdot O(B)$$

$$= \frac{O(B|A_1')}{O(B)} \cdot \frac{O(B|A_2')}{O(B)} \cdot O(B)$$

推理过程示例

已知：证据 A 必发生，B_1 的先验概率为 0.03，而规则

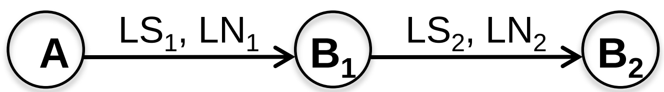
R1：$A \rightarrow B_1$，$LS_1 = 20$，$LN_1 = 1$

R2：$B_1 \rightarrow B_2$，$LS_1 = 300$，$LN_1 = 0.01$

B_2 的先验概率 $P(B_2) = 0.01$

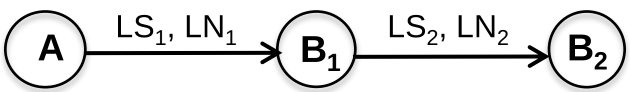
计算：使用规则 R_1、R_2 后，B_2 的概率更新值 $P(B_2|A)$

解：



推理过程示例

已知：证据 A 必发生，B_1 的先验概率为 0.03，而规则



R1：$A \rightarrow B_1$，$LS_1 = 20$，$LN_1 = 1$

R2：$B_1 \rightarrow B_2$，$LS_2 = 300$，$LN_2 = 0.01$

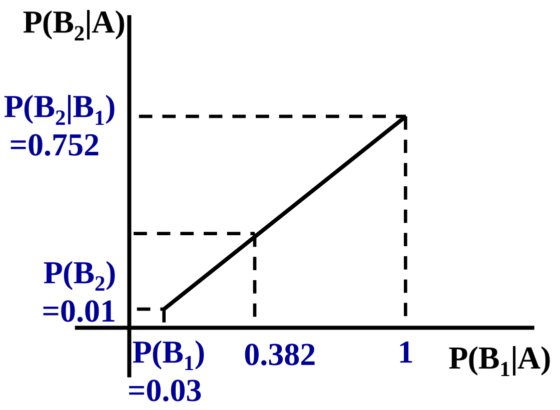
B_2 的先验概率 $P(B_2) = 0.01$

计算：使用规则 R_1、R_2 后，B_2 的概率更新值 $P(B_2|A)$

（1）根据 R_1，由于 A 确定

$$O(B_1|A) = LS_1 \bullet O(B_1) = 20 \times \frac{0.03}{1-0.03} = 0.619$$

$$P(B_1|A) = \frac{0.619}{1+0.619} = 0.382$$



（2）根据 R_2，由于 B_1 不确定，计算几种情形：

i）$P(B_1|A)=1$时，$P(B_2|A) = \dfrac{LS_2 \bullet P(B_2)}{(LS_2-1)\bullet P(B_2)+1} = 0.752$

ii）$P(B_1|A)=P(B_1)=0.03$时，$P(B_2|A)=P(B_2)=0.01$

插值：$P(B_2|A) = 0.01 + \dfrac{0.752-0.01}{1-0.03} \times (0.382-0.03) = 0.279$

证据理论（D-S理论）

将证据 **A** 表示成集合形式，引入函数：

基本概率分配函数 m：$2^U \to [0, 1]$，满足

$$m(\phi) = 0,\quad \sum_{A \subseteq U} m(A) = 1$$

信任函数 Bel：$2^U \to [0, 1]$

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$

似然函数 Pl：$2^U \to [0, 1]$

$$Pl(A) = 1 - Bel(\sim A) = \sum_{B \subseteq U} m(B) - \sum_{B \subseteq \sim A} m(B) = \sum_{B \cap A \neq \phi} m(B)$$

例：$U = \{a, b, c\}$，$Bel(\{a, b\}) = m(\{a\}) + m(\{b\}) + m(\{a, b\})$

$Pl(\{a\}) = m(\{a\}) + m(\{a, b\}) + m(\{a, c\}) + m(\{a, b, c\})$

证据理论

- **证据的不确定性度量**

区间 **[Bel(A), Pl(A)]** 作为证据 **A** 的不确定性度量

含义： Bel(A) 表示对 A 的总信任程度

Pl(A) 表示对不否定 A 的信任程度

Pl(A)－Bel(A) 表示对 A 不知道的一种度量

取值： $0 \le Bel(A) \le Pl(A) \le 1$

[Bel(A), Pl(A)]:

	[1, 1]	A真 (Bel(A)=1, Bel(~A)=0)
	[0, 0]	A假 (Bel(A)=0, Bel(~A)=1)
	[0, 1]	对A一无所知 (Bel(A)=Bel(~A)=0)
	其它合理值	A既部分为真，又部分为假

证据理论

还常采用函数形式度量 A 的不确定性：

$$\mathbf{f}\,(\mathbf{A}) = \mathrm{Bel}(A) + \frac{|A|}{|U|}[\mathrm{Pl}(A) - \mathrm{Bel}(A)]$$

|A|, |U|: 集合所含元素个数

取值：$0 \le f(A) \le 1$，$f(\phi) = 0$，$f(U) = 1$

- **规则的不确定性度量**

规则 **A→B**，A、B 是 U的子集，$|B| = k$，$(\mathbf{c_1, \ldots, c_k})$ 作为度量，且 $c_i \ge 0$，$1 \le i \le k$，$\sum_{j=1}^{k} c_j \le 1$.

- **推理计算**

① **逻辑组合**

$$f(A_1 \wedge A_2) = \min\{f(A_1), f(A_2)\}$$

$$f(A_1 \vee A_2) = \max\{f(A_1), f(A_2)\}$$

推理计算

② 传播

已知 $f(A)$，规则 $A\rightarrow B=\{b_1, \ldots, b_k\}$，$(c_1, \ldots, c_k)$，$|U|$，计算 $f(B)$

规定：$m(\{b_1\}, \ldots, \{b_k\})=(f(A)\cdot c_1, \ldots, f(A)\cdot c_k)$

$$m(U)=1-\sum_{i=1}^{k} f(A)\cdot c_i$$

进而计算 $Bel(B)$、$Pl(B)$，得到 $f(B)$

③ 合成

已知 $f(A_1)$，规则 $A_1\rightarrow B$，$(c_1, \ldots, c_k)$

$f(A_2)$，规则 $A_2\rightarrow B$，$(c_1', \ldots, c_k')$

计算合成的 $f(B)$

引入算子$\oplus$：$m=m_1\oplus m_2$， 规定：$m(\phi)=0$，

$$m(A)=K\cdot\sum_{X\cap Y=A} m_1(X)\cdot m_2(Y),\quad K^{-1}=1-\sum_{X\cap Y\neq\phi} m_1(X)\cdot m_2(Y)$$

推理过程示例

已知：$f(A_1) = 0.8$， 规则 $A_1 \rightarrow B$，$(c_1, c_2) = (0.25, 0.75)$

$f(A_1) = 0.5$， 规则 $A_2 \rightarrow B$，$(c_1', c_2') = (0.6, 0.2)$， $|U| = 20$

计算：$f(B)$

$$m_1(\{b_1\}, \{b_2\}) = (0.8 \times 0.25, 0.8 \times 0.75) = (0.2, 0.6)$$

$$m_1(U) = 1 - (0.2+0.6) = 0.2$$

$$m_2(\{b_1\}, \{b_2\}) = (0.5 \times 0.6, 0.5 \times 0.2) = (0.3, 0.1)$$

$$m_2(U) = 1 - (0.3+0.1) = 0.6$$

m2 \ m1	$\{b_1\}_{0.2}$	$\{b_2\}_{0.6}$	$U_{0.2}$
$\{b_1\}_{0.3}$	$\{b_1\}_{0.06}$	ϕ	$\{b_1\}_{0.06}$
$\{b_2\}_{0.1}$	ϕ	$\{b_2\}_{0.06}$	$\{b_2\}_{0.02}$
$U_{0.6}$	$\{b_1\}_{0.12}$	$\{b_2\}_{0.36}$	$U_{0.12}$

$$m(\{b_1\}) = K \cdot (0.06+0.06+0.12) = K \cdot 0.24$$

$$m(\{b_2\}) = K \cdot (0.06+0.02+0.36) = K \cdot 0.44$$

$$m(U) = K \cdot 0.12$$

推理过程示例

已知：$f(A_1) = 0.8$，规则 $A_1 \rightarrow B$，$(c_1, c_2) = (0.25, 0.75)$

$f(A_1) = 0.5$，规则 $A_2 \rightarrow B$，$(c_1', c_2') = (0.6, 0.2)$，$|U| = 20$

计算：$f(B)$

$$K^{-1} = 0.24+0.44+0.12 = 0.8$$

$$m(\{b_1\})=K \cdot (0.06+0.06+0.12) =K \cdot 0.24=0.3$$

$$m(\{b_2\})=K \cdot (0.06+0.02+0.36) =K \cdot 0.44=0.55$$

$$m(U)=K \cdot 0.12 = 0.15$$

$$Bel(B) = m(\{b_1\}) +m(\{b_2\}) +m(\{b_1, b_2\}) =0.3 + 0.55 + 0 = 0.85$$

$$Pl(B) = 1- Bel(\sim B) = 1$$

$$f(B) = Bel(B) + \frac{|B|}{|U|} (Pl(B)-Bel(B)) = 0.85+\frac{2}{20}\times(1- 0.85) = 0.865$$

知识推理小结

- 比较：不确定推理方法

	确定性理论	主观Bayes方法	证据理论	可能性理论
理论基础	较弱	较强	较强	中等
适于处理的不确定类型	概率	概率	概率、模糊	模糊
不确定性的给定方法	主观	主观、客观	主观	主观
能否区分不确定/不知道	难以	难以	可以	可以
易于使用	容易	容易	困难	一般

1. **Kanal & Lemmer (Eds.).** ***Uncertainty in Artificial Intelligence*. Elsevier, 1986.**
2. **Genesereth & Nilsson.** ***Logical Foundations of Artificial Intelligence*. Elsevier, 1987.**

知识推理小结

- **最弱约束条件**

（1）当证据和规则都是确定的情况下，不确定推理得出的结论应与确定性推理的结论相一致（以确定性推理为特例）

（2）不确定值的计算在其值域上应具有封闭性

（3）当对规则前提的不确定值一无所知时，前提应对结论的不确定值没有任何影响（命题单位元）

（4）当规则的前提与结论无无关时，前提应对结论的不确定值没有任何影响（规则单位元）

（5）$C(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \le \min\{C(A_1), C(A_2), \ldots, C(A_n)\}$

（6）$C(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \ge \max\{C(A_1), C(A_2), \ldots, C(A_n)\}$

谢谢大家！