中国科学院自动化研究所
INSTITUTE OF AUTOMATION
CHINESE ACADEMY OF SCIENCES

基于知识的推理

（Knowledge-based Inference）

毛文吉

中国科学院自动化研究所

2016年12月

证据理论（D-S理论）

U 是论域集合，U 中元素互斥，将证据 **A** 表示成 U 的子集，引入如下函数：

基本概率分配函数 m：$2^U \rightarrow [0, 1]$，满足

$$m(\phi)=0,\ \sum_{A\subseteq U} m(A)=1$$

表示对 U 的子集 A 的信任程度.

例：U＝{红, 黄, 蓝}

m(ϕ, {红}, {黄}, {蓝}, {红, 黄}, {红, 蓝}, {黄, 蓝}, {红, 黄, 蓝})

＝ (0, 0.3, 0, 0.1, 0.2, 0.2, 0, 0.2)

证据理论

信任函数 Bel： $2^U \rightarrow [0, 1]$

$$\mathrm{Bel}(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$

表示对 A 的总信任程度．$\mathrm{Bel}(\phi) = 0$，$\mathrm{Bel}(U) = 1$

似然函数 Pl： $2^U \rightarrow [0, 1]$

$$\mathrm{Pl}(A) = 1 - \mathrm{Bel}(\sim A) = \sum_{B \subseteq U} m(B) - \sum_{B \subseteq \sim A} m(B) = \sum_{B \cap A \neq \phi} m(B)$$

表示对不否定 A 的信任程度．$\mathrm{Pl}(\phi) = 0$，$\mathrm{Pl}(U) = 1$

例： $U = \{a, b, c\}$，$\mathrm{Bel}(\{a, b\}) = m(\{a\}) + m(\{b\}) + m(\{a, b\})$

$\mathrm{Pl}(\{a\}) = m(\{a\}) + m(\{a, b\}) + m(\{a, c\}) + m(\{a, b, c\})$

证据理论

- **证据的不确定性度量**

区间 **[Bel(A), Pl(A)]** 作为证据 **A** 的不确定性度量

含义： Bel(A) 表示对 A 的总信任程度

Pl(A) 表示对不否定 A 的信任程度

Pl(A)－Bel(A) 表示对 A 不知道的一种度量

取值： $0 \le Bel(A) \le Pl(A) \le 1$

[Bel(A), Pl(A)]:

[1, 1]	A真 (Bel(A)=1, Bel(~A)=0)
[0, 0]	A假 (Bel(A)=0, Bel(~A)=1)
[0, 1]	对A一无所知 (Bel(A)=Bel(~A)=0)
其它合理值	A既部分为真，又部分为假

证据理论

还常采用函数形式度量 **A** 的不确定性：

$$\mathbf{f\,(A)} = \mathrm{Bel(A)} + \frac{|A|}{|U|}[\mathrm{Pl(A)} - \mathrm{Bel(A)}]$$

|A|, |U|: 集合所含元素个数

取值：$0 \le f(A) \le 1$，$f(\phi)=0$，$f(U)=1$

- **规则的不确定性度量**

规则 **A→B**，A、B 是 U的子集，$A=\{a_1, \ldots, a_m\}$，$B=\{b_1, \ldots, b_k\}$

用$(\mathbf{c_1, \ldots, c_k})$ 作为不确定性度量，且 $c_i \ge 0$，$1 \le i \le k$，$\sum_{j=1}^{k} c_j \le 1$.

推理计算（1）

① 逻辑组合

$$f(A_1 \wedge A_2) = \min\{f(A_1), f(A_2)\}$$

$$f(A_1 \vee A_2) = \max\{f(A_1), f(A_2)\}$$

② 传播

已知 $f(A)$，规则 $A \rightarrow B=\{b_1, \ldots, b_k\}$，$(c_1, \ldots, c_k)$，$|U|$，计算 $f(B)$

规定：$m(\{b_1\}, \ldots, \{b_k\}) = (f(A) \cdot c_1, \ldots, f(A) \cdot c_k)$

$$m(U) = 1 - \sum_{i=1}^{k} f(A) \cdot c_i$$

进而计算 Bel(B)、Pl(B)，得到 f(B)

例： 已知 $f(A)=0.6$，规则 $A \rightarrow B=\{b_1, b_2\}$，$(c_1, c_2)=(0.3, 0.5)$，$|U|=20$, 计算 $f(B)$

$m(\{b_1\}, \{b_2\}) = (0.6 \times 0.3, 0.6 \times 0.5) = (0.18, 0.3)$

$m(U) = 1 - (0.18+0.3) = 0.52$

$Bel(B) = m(\{b_1\})+m(\{b_2\})+m(\{b_1, b_2\}) = 0.48$, $Pl(B) = 1 - Bel(\sim B) = 1 - 0 = 1$

推理计算（2）

③ 合成

已知 $f(A_1)$，规则 $A_1 \to B$，$(c_1, \ldots, c_k)$

$f(A_2)$，规则 $A_2 \to B$，$(c_1', \ldots, c_k')$

计算合成的 $f(B)$

先分别计算 m_1 和 m_2：

$m_1(\{b_1\}, \ldots, \{b_k\}, U)$

$m_2(\{b_1\}, \ldots, \{b_k\}, U)$

再引入算子⊕：$m = m_1 \oplus m_2$

规定：$m(\phi) = 0$，$m(A) = K \cdot \sum_{X \cap Y = A} m_1(X) \cdot m_2(Y)$

$$K^{-1} = 1 - \sum_{X \cap Y = \phi} m_1(X) \cdot m_2(Y) = \sum_{X \cap Y \neq \phi} m_1(X) \cdot m_2(Y)$$

推理过程示例

已知：$f(A_1) = 0.8$，规则 $A_1 \to B$，$(c_1, c_2) = (0.25, 0.75)$

$f(A_2) = 0.5$，规则 $A_2 \to B$，$(c_1', c_2') = (0.6, 0.2)$，$|U| = 20$

计算：$f(B)$

$$m_1(\{b_1\}, \{b_2\}) = (0.8 \times 0.25, 0.8 \times 0.75) = (0.2, 0.6)$$

$$m_1(U) = 1 - (0.2+0.6) = 0.2$$

$$m_2(\{b_1\}, \{b_2\}) = (0.5 \times 0.6, 0.5 \times 0.2) = (0.3, 0.1)$$

$$m_2(U) = 1 - (0.3+0.1) = 0.6$$

m2 \ m1	$\{b_1\}_{0.2}$	$\{b_2\}_{0.6}$	$U_{0.2}$
$\{b_1\}_{0.3}$	$\{b_1\}_{0.06}$	ϕ	$\{b_1\}_{0.06}$
$\{b_2\}_{0.1}$	ϕ	$\{b_2\}_{0.06}$	$\{b_2\}_{0.02}$
$U_{0.6}$	$\{b_1\}_{0.12}$	$\{b_2\}_{0.36}$	$U_{0.12}$

$$m(\{b_1\}) = K \cdot (0.06+0.06+0.12) = K \cdot 0.24$$

$$m(\{b_2\}) = K \cdot (0.06+0.02+0.36) = K \cdot 0.44$$

$$m(U) = K \cdot 0.12$$

推理过程示例

已知：$f(A_1) = 0.8$，规则 $A_1 \rightarrow B$，$(c_1, c_2) = (0.25, 0.75)$

$f(A_2) = 0.5$，规则 $A_2 \rightarrow B$，$(c_1', c_2') = (0.6, 0.2)$，$|U| = 20$

计算：$f(B)$

$$K^{-1} = 0.24+0.44+0.12 = 0.8$$

$$m(\{b_1\}) = K \cdot (0.06+0.06+0.12) = K \cdot 0.24 = 0.3$$

$$m(\{b_2\}) = K \cdot (0.06+0.02+0.36) = K \cdot 0.44 = 0.55$$

$$m(U) = K \cdot 0.12 = 0.15$$

$$Bel(B) = m(\{b_1\}) + m(\{b_2\}) + m(\{b_1, b_2\}) = 0.3 + 0.55 + 0 = 0.85$$

$$Pl(B) = 1 - Bel(\sim B) = 1$$

$$f(B) = Bel(B) + \frac{|B|}{|U|}(Pl(B) - Bel(B)) = 0.85 + \frac{2}{20} \times (1 - 0.85) = 0.865$$

知识推理小结

- 比较：不确定推理方法

	确定性理论	主观Bayes方法	证据理论	可能性理论
理论基础	较弱	较强	较强	中等
适于处理的不确定类型	概率	概率	概率、模糊	模糊
不确定性的给定方法	主观	主观、客观	主观	主观
能否区分不确定/不知道	难以	难以	可以	可以
易于使用	容易	容易	困难	一般

1. Kanal & Lemmer (Eds.). *Uncertainty in Artificial Intelligence*. Elsevier, 1986.
2. Genesereth & Nilsson. *Logical Foundations of Artificial Intelligence*. Elsevier, 1987.

知识推理小结

- **最弱约束条件**

（1）当证据和规则都是确定的情况下，不确定推理得出的结论应与确定性推理的结论相一致（以确定性推理为特例）

（2）不确定值的计算在其值域上应具有封闭性

（3）当对规则前提的不确定值一无所知时，前提应对结论的不确定值没有任何影响（命题单位元）

（4）当规则的前提与结论无关时，前提应对结论的不确定值没有任何影响（规则单位元）

（5）$C(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \leq \min\{C(A_1), C(A_2), \ldots, C(A_n)\}$

（6）$C(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \geq \max\{C(A_1), C(A_2), \ldots, C(A_n)\}$

谢谢大家！