

## (8) 個別要素法による礫材の安息角解析

Angle of repose on analysis in gravels for distinct element method simulation

堀口俊行\*, 澁谷 一\*\*, 香月 智\*\*\*

Toshiyuki Horiguchi, Hajime Shibuya, Satoshi Katsuki

\*防衛大学校理工学研究科学生, 建設環境工学科 (〒239-8686 神奈川県横須賀市走水 1-10-20)

\*\*防衛大学校理工学研究科学生, 建設環境工学科 (〒239-8686 神奈川県横須賀市走水 1-10-20)

\*\*\*工博, 防衛大学校教授, 建設環境工学科 (〒239-8686 神奈川県横須賀市走水 1-10-20)

Key Words: distinct element method, aggregate element, angle of repose

キーワード: 個別要素法, 集合体要素, 安息角

## 1. 緒言

我が国は、国土の大部分を山地や丘陵地が占めるとともに梅雨や台風の時期に集中豪雨が多いことから、土石流・地すべり等の土砂災害による被害が各地で生じている。これらの土砂災害から人名や財産の損失を防ぐための代表的な防護構造物として各種の砂防堰堤がある。この砂防堰堤の内部構造には、中詰材というものが使われている。この礫中詰材の抵抗力評価をする研究は、不明確なまま現在に至っている。この評価方法の 1 つに個別要素法<sup>1)</sup>が活用されている。

個別要素法は、粒状体解析に適用し、その粒子間の挙動・変形のメカニズムを微視的観点から明らかにしようとする試みが最近行われている。しかし、解析パラメータの決定方法、特に礫材の集合体特性を表すための方法は確立されていない。このため、礫中詰材の抵抗値<sup>2), 3)</sup>の評価を判断する際に、土質材料の体系を引用して粘着力や内部摩擦角などを用いるが、そもそも個体間の粘着力や摩擦係数と集合体の内部摩擦角などとの相関性は不明であるだけでなく、1 つの礫が 10~30cm になる中詰材の内部摩擦角を測定する実験方法さえないという問題がある。すなわち、大きなサイズの粒状体の基礎的な性質として計測可能なのは、安息角くらいと考えられる。

このように重要な意義をもつ安息角の研究は極めて少なく Van Bulkalow<sup>4)</sup>, Statham<sup>5)</sup>等の数えるほどしか見当たらない。さらに、個別要素法によって安息角を解析したものも少なく、実際の形状に要素を近づかせ安息角の流動性をシミュレーションした例<sup>6)</sup>や、矩形容器に詰め込んだ粒状体に対し、その側面を開いた場合の粒子の挙動を検討した例<sup>7)</sup>などが見当たる程度である。

そこで本研究は、中詰材解析への適用に資する基礎段階として個別要素法による安息角解析法について検討

したものである。その際、安息角の主要な支配因子となり得る要素の凹凸形状に着目して、6 個の等球形要素の集合体要素を用いた個別要素法を開発し、集合体要素の凹凸度や要素間ばねの摩擦角の変化が解析結果の安息角に及ぼす影響について考察するとともに、事前実験とも比較考察するものである。

## 2. 解析手法

個別要素法は、まず各要素が接触状態にあることを判定し、要素間に設定した要素間ばねの接触力を算定し、時々刻々、個々の要素ごとに運動方程式を解くことにより変位を求め、個々の要素の運動を追跡するものである。

本研究においては、複数個の球形要素を剛結し、一つの集合体要素とすることで個々の礫をモデル化する。すなわち、接触判定および接触力の計算は個々の要素ごとに行い、要素の運動を解く際に、集合体を構成する個々の要素（以下、構成要素と呼ぶ）にかかる力を集合体重心点に集成して集合体の運動を解き、これを各構成要素の運動に置き換えて、その挙動を追跡するものとする。

以下には、本研究で提案する集合体要素の運動を表す変位と姿勢、ばね力の計算方法を示す。

## 2.1 要素の変位と姿勢

3 次元空間において、個々の要素は図-1 に示すように計算開始時からの変位・回転角によって要素の位置、姿勢が変化する。この要素の位置と変位、姿勢を次のように表す<sup>8)</sup>。

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^0 + \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^0 + \Delta \mathbf{A}(\theta) \quad (2)$$

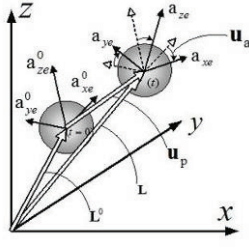


図-1 要素の変位と姿勢

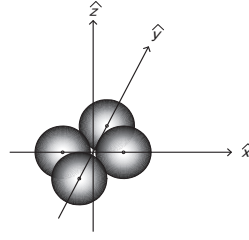


図-2 集合体要素の局所座標

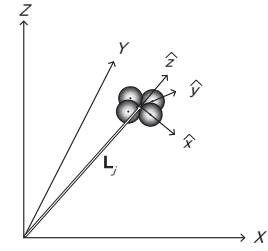


図-3 集合体要素の局所座標

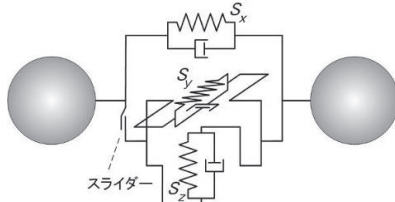


図-4 要素間ばね

ここで、 $\mathbf{L}$ ：要素重心の全体座標系に対する位置ベクトル、 $\mathbf{L}^0$ ：初期の位置ベクトル、 $\mathbf{u}$ ：変位ベクトル ( $\mathbf{u}^T = [u_x, u_y, u_z]$ )、 $\mathbf{A}$ ：要素の重心を中心とする全体座標系への回転角を表す姿勢マトリクス、 $\mathbf{A}^0$ ：初期の姿勢マトリクス、 $\Delta\mathbf{A}$ ：姿勢マトリクスの変化量、 $\boldsymbol{\theta}$ ：回転角ベクトル ( $\boldsymbol{\theta}^T = [\theta_x, \theta_y, \theta_z]$ ) である。

姿勢マトリクスは、重心を原点とする方向余弦ベクトルによって与えられる。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x^T \\ \mathbf{a}_y^T \\ \mathbf{a}_z^T \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ ：それぞれ局所座標の  $x, y, z$  方向の方向余弦ベクトルである。

姿勢マトリクスは方向余弦ベクトルによって構成されているので、単位ベクトル長を保つための規定化を逐次行った<sup>8)</sup>。

集合体要素は図-2 に示すような複数個によって形成される剛体を一要素とする。図-3 には、4 個の要素の集合体を示しているが、これらは剛結されたものと仮定すると、その相対位置座標  $\hat{\mathbf{L}}_j$  は不変であるので集合体要素の重心を座標原点とする局所座標系 ( $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ ) を一旦決定すると不変である。すなわち、

$$\hat{\mathbf{L}}_j = \begin{bmatrix} \hat{x}_j \\ \hat{y}_j \\ \hat{z}_j \end{bmatrix} = \text{const.} \quad (j=1, n_a) \quad (4)$$

ここで、 $n_a$ ：集合体要素の構成要素数である。

よって、時々刻々の集合体要素  $k$  の位置座標  $\mathbf{L}_k$  と姿勢マトリクス  $\mathbf{A}_k$  が与えられると、構成要素  $j$  の位置座標  $\mathbf{L}_j$  と姿勢マトリクス  $\mathbf{A}_j$  が次式のように与えられる。

$$\mathbf{L}_j = \mathbf{L}_k + \mathbf{A}_k^T \hat{\mathbf{L}}_j \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_j = \hat{\mathbf{A}}_j \mathbf{A}_k \quad (6)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{A}}_j$ ：集合体要素の局所座標系における構成要素  $j$  の姿勢マトリクスである。

## 2.2 要素間ばねとばね力

要素間ばねは、図-4 に示すように、ばねの姿勢によって定まる局所座標系（法線方向： $x_s$ 、接線方向： $y_s, z_s$ ）に対応した 3 次元のばねであり、また、それぞれに並行したダッシュポットを設置している。このダッシュポットにより生じる並進力  $\mathbf{f}_D$  およびモーメント  $\mathbf{M}_D$  については、以下で述べるばね力により生じる並進力  $\mathbf{f}_K$  およびモーメント  $\mathbf{M}_K$  の算定と同様の手続きにより求めることができる。

図-4 の局所座標系におけるばね力と要素に作用する力のつり合い式は、次式によって求まる。

1) 並進方向

$$\mathbf{f}_K = \mathbf{S}_K \quad (7-a)$$

2) 回転方向

$$\mathbf{M}_K = \mathbf{T}_G \mathbf{C}_s^T \mathbf{T}_s \mathbf{S}_K \quad (7-b)$$

ここで、 $\mathbf{C}_s^T$ ：要素間ばねの局所座標系におけるつり合いマトリクス、 $\mathbf{S}_K$ ：要素間ばねの局所の姿勢マトリクス  $\mathbf{A}_s$  に従う内力ベクトル ( $\mathbf{S}_K^T = [S_{Kx}, S_{Ky}, S_{Kz}]$ )、 $\mathbf{T}_s$ ：要素間ばねの姿勢マトリクス  $\mathbf{A}_s$  に従う局所座標系から要素の局所の姿勢マトリクス  $\mathbf{A}$  に従う局所座標系へ変換する座標変換マトリクス、 $\mathbf{T}_G$ ：要素の局所の姿勢マトリクス  $\mathbf{A}$  に従う局所座標系から全体座標系へ変換する座標変換マトリクスである。

要素間ばねの内力は、次式によって求まる。

$$\mathbf{S}_K(t) = \mathbf{S}_K(t - \Delta t) + \mathbf{k} \Delta \mathbf{q} \quad (8)$$

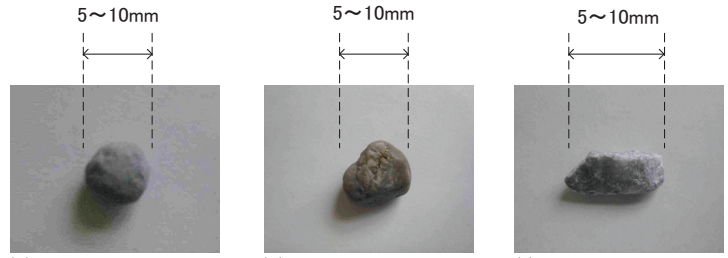
ここで、 $\mathbf{S}_K(t)$ ：時刻  $t$  における要素間ばねの局所の姿勢マトリクス  $\mathbf{A}_s$  に従う内力ベクトル、 $\Delta \mathbf{q}$ ： $\mathbf{S}_K(t)$  ベクトルに対応する要素間ばねの局所の姿勢マトリクス  $\mathbf{A}_s$  に従う  $\Delta t$  間の増分変形量ベクトル、 $\mathbf{k}$ ：増分間の剛性マトリクスである。

なお、接線方向のばねとダッシュポットの合力  $\mathbf{P}_s$  は次式に示すようにモール・クーロンの破壊基準を設けた。

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{S}_{Kx} + \mathbf{S}_{Dx} \quad (9)$$



写真-1 安息角測定



(a) 石炭灰(凹凸小) (b) 玉砂利(凹凸中) (c) 粗骨材(凹凸大)  
写真-2 礫試料

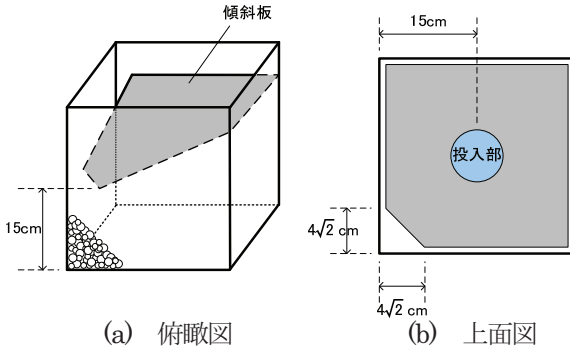


図-5 安息角測定器具

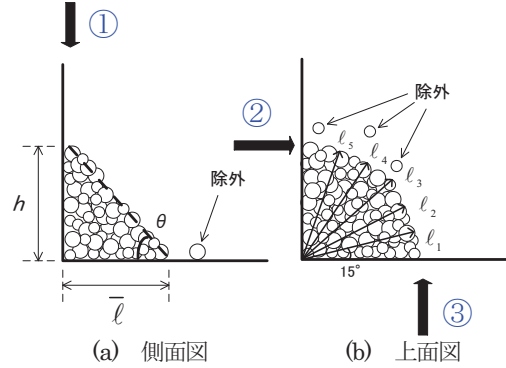


図-6 安息角測定の基本値

表-1 礫試料の諸元

名称	粒形	素材比重	形状
石炭灰	5~10mm	1.8	丸みを帯びている
玉砂利	5~10mm	2.6	丸みがあるがやや凹凸
粗骨材	5~10mm	2.6	偏平した形状のものが あり、凹凸もある

表-2 解析パラメータ

項目			値
要素	要素数 (単体)		12000
	要素数 (集合体)		2000
	密度		1900kg/m <sup>3</sup>
要素間 ばね	ばね	法線方向 $K_n$	1.0×10 <sup>6</sup> N/m
	定数	接線方向 $K_s$	1.5×10 <sup>5</sup> N/m
	減衰定数	$h$	0.8
	粘着力	$C$	0N
計算条件	摩擦角	$\tan\phi$	0.554(29°)
	時間刻み	$\Delta t$	5.0×10 <sup>-7</sup> s

$$P_{s,cr} = C + P_n \tan \phi \quad (10)$$

$$P_s = \begin{cases} \sqrt{(S_{K_y} + S_{D_y})^2 + (S_{K_z} + S_{D_z})^2} & (P_s \leq P_{s,cr}) \\ P_{s,cr} & (P_s > P_{s,cr}) \end{cases} \quad (11)$$

ここで、 $P_n$ 、 $P_s$ ：それぞれの法線方向、接線方向のばねとダッシュポットの合力、 $S_{D_x}$ 、 $S_{D_y}$ 、 $S_{D_z}$ ：それぞれのダッシュポットの内力の x, y, z 成分、 $P_{s,cr}$ ：接線方向合力  $P_s$  の滑り限界、 $C$ ：粘着力、 $\tan \phi$ ：摩擦係数である。

### 3. 事前実験

本研究においては注入法<sup>9)</sup>を用いて、形状の異なる 3 種類の礫を傾斜板のスリット部が礫で閉塞しない範囲で、礫を 100~150 個/秒の速さで傾斜板の中央付近の投入地点 (図-5(b)) に流下させ、安息角の測定実験を行い、礫の形状と安息角の関係について基礎的な検討を行った。

#### 3.1 実験装置

写真-1 および図-5 に実験器具の概要を示す。この実験器具は、投入用の傾斜板と堆積部からなる一辺 30cm の立方体の箱である。傾斜板の傾斜角度は 25 度であり、

最も低い三角コーナーに一辺 4√2 cm のスリットが空けられており、このスリットから礫は落下高さ 15cm で落下する。箱の側面は透明なアクリル板で、堆積状況を観察できる。

#### 3.2 礫試料

写真-2 に実験に用いた試料を示す。石炭灰、玉砂利、粗骨材の 3 種類の異なる礫を用いた。なおその形状特性は、石炭灰は丸みを帯びており凹凸が少なく、玉砂利、粗骨材となるに従い凹凸が大きい試料となっている。その粒径は、ふるい分けにより 5mm~10mm の一様粒径とした。また、それぞれの素材の比重を表-1 に示す。それぞれ、石炭灰は 1.8、玉砂利および粗骨材は 2.6 となっている。

#### 3.3 安息角の測定

安息角の計測方法には種々の方法があるが<sup>10)</sup>、本実験では以下の手順により測定した。

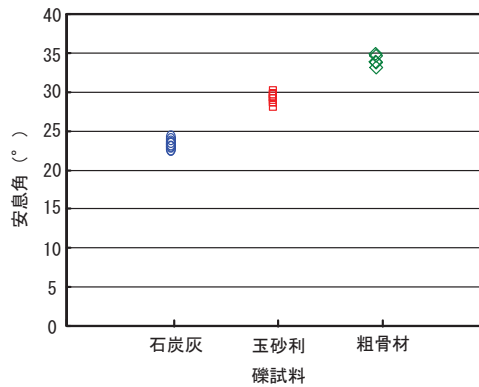


図-7 安息角に及ぼす形状の影響

- (1) 側方からアクリル板を通して撮影した写真より、堆積した礫の最も高い位置を高さ  $h$  とする。
- (2) 上方から撮影した写真より、図-6(b)に示すようにに堆積した礫の半径を 5 方向測定し、その平均半径  $\bar{\ell}$  を求める。この際、底面にあつて他のものと接触しない礫は除外する。

$$\bar{\ell} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \ell_i \quad (12)$$

- (3) 高さ  $h$ , 半径  $\bar{\ell}$  を用いて次式より安息角  $\theta$  を求める。

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{h}{\bar{\ell}} \right) \quad (13)$$

### 3.4 実験ケース

礫が堆積して安息角を形成する場合、礫数が少ないと安息角のばらつきが大きくなる。このため、まず礫数が安息角に与える影響を観察した。その結果、どの試料においても礫数が 1500 以下の範囲では安息角にばらつきが見受けられるが、礫数が 2000 を越えると安息角のばらつきがほとんど見受けられないことがわかった。従って、実験では、上述の検討結果を踏まえて礫数を 2000 個として、各試料に対し 5 回ずつ実験を行った。

### 3.5 実験結果

図-7 に 2000 個の礫を用いた全ケースにおける各試料の安息角を示す。これより、石炭灰、玉砂利、粗骨材と凹凸が大きくなるにつれて、安息角が大きくなることがわかる。

## 4. 個別要素法解析

### 4.1 礫形状モデル

本解析は礫試料の凹凸を表現するために、図-8 に示す、同一半径球を 6 個用いた集合体要素を用いて安息角を求める。その基本形状は、図-8(a)に示すように互いに密に接触した正八面体のような形状である。この基本形状を

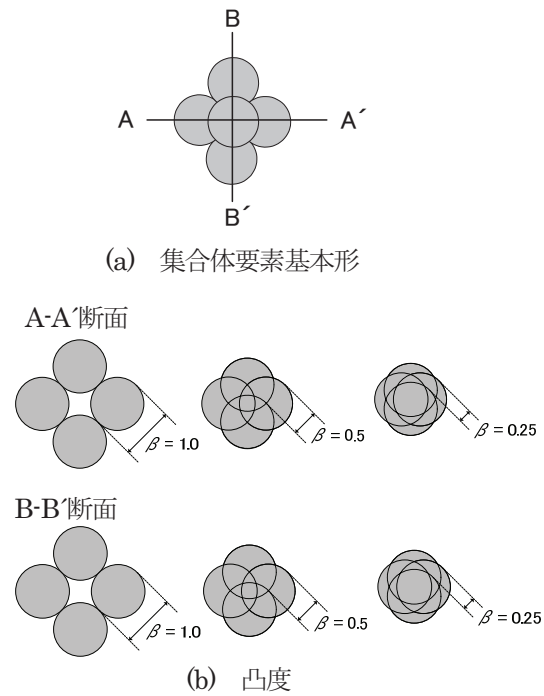


図-8 集合体要素モデル

各構成要素が同程度に相互重複させたものを作成すると、図-8(b)に示すように、その重複程度によって凹凸の度合いが表現できる。本研究では、重複していない部分が球の直径  $D$  に対して、どの程度凸部を形成しているかを表すパラメータとして、凸度を次式で表す。

$$\beta D \quad (14)$$

ここで、 $\beta$  : 凸度を表すパラメータ (0.0~1.0),  $D$  : 構成球形要素の直径である。

### 4.2 解析ケースおよびパラメータ

解析は、凸度  $\beta$  を 0.20~0.50 までの計 7 種類について、各ケース 2 回ずつ解析を行った。

表-2 に解析条件を示す。ここで、要素間ばねの摩擦角  $\phi$  は、各試料に対する事前実験を行った結果から  $29^\circ$  とし、計算に用いたその他の定数等は、実験条件を参考として、事前のパラメトリック解析により決定した。

### 4.3 解析結果

#### (1) 堆積過程

図-9 に、凸度  $\beta=0.40$  とした場合の解析過程を実験と経過時間を基準として比較して示す。図-9(b)の 4 秒後では、実験では既に約  $30^\circ$  の安息角の堆積を形成し、落下点より遠くに散乱した礫は少ないのに対し、解析では遠くに散乱した要素が比較的多くなり落下点に堆積した要素が少ないため、安息角は  $20^\circ$  より小さく、緩やかである。しかし、図-9(c)の 8 秒過程時には、解析の散乱要素は図-9(b)に比してさほど増えておらず、堆積に寄与する要素数の割合が多くなり、最高点の高さも実験のもの



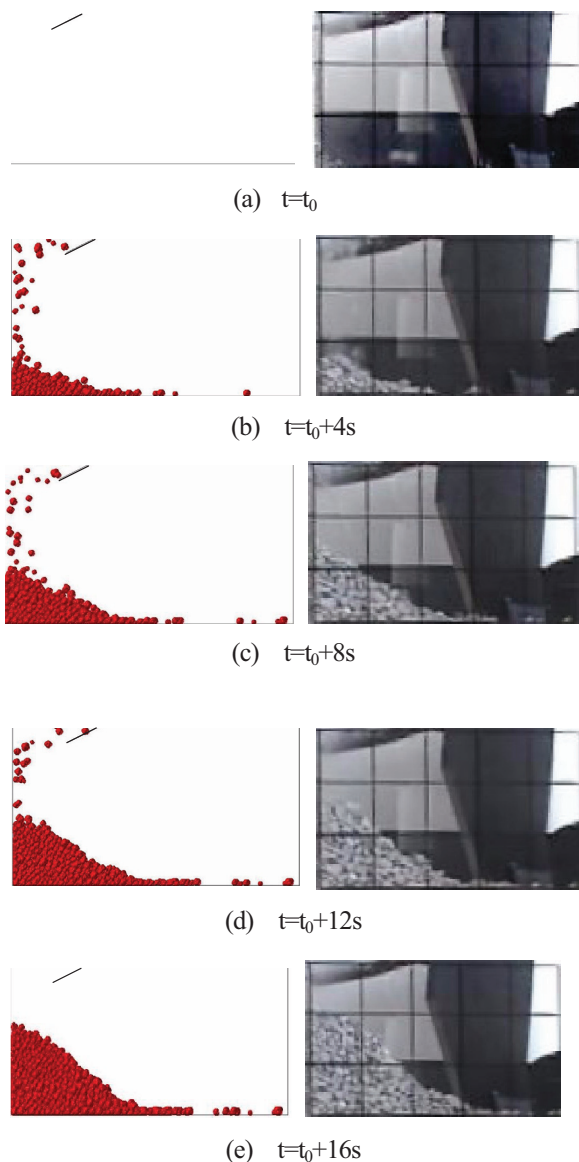


図-9  $\beta=0.40$  と粗骨材の時刻歴比較  
(左：解析結果 右：実験結果)

とほぼ同じになっている。その後は、図-9 (d)の12秒後、図-9 (e)の16秒後においてもその安息角はほぼ同じ角度で維持されて相似形で堆積要素数が増加する。つまり、10秒あたりでの安息角は安定状態に達している点において、実験結果と一致していることが分かる。

## (2) 安息角と凸度 $\beta$ の関係

図-10 に解析で得られた安息角～凸度  $\beta$  関係を示す。これより、提案集合体要素モデルの凸度  $\beta$  と安息角には明瞭な相関関係が存在する。試みにその関係をフィッティングすると次式となり、図-10 中に破線で示しているように解析結果とよく一致する。

$$\theta = 60.0\beta^{0.60} \quad (15)$$

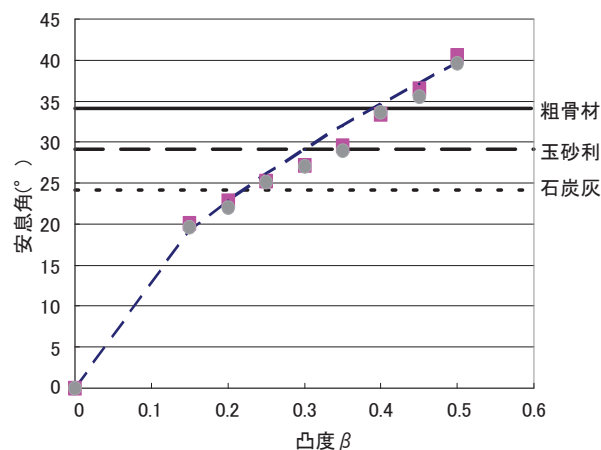


図-10 安息角～凸度  $\beta$  関係

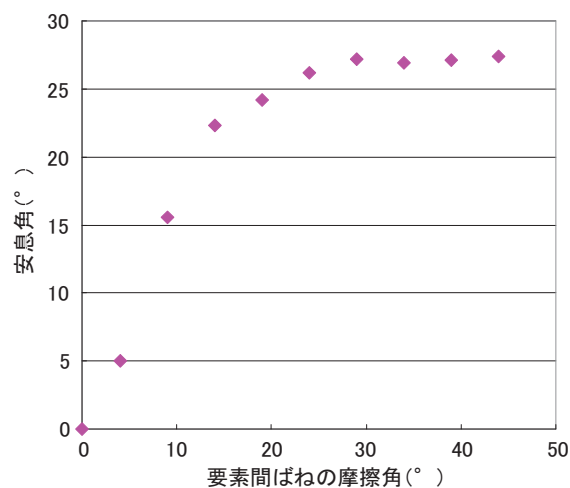


図-11 安息角～要素間摩擦関係

## (3) 安息角と要素間ばねの摩擦角の関係

図-11 に凸度  $\beta=0.30$  とした場合の、要素間ばねの摩擦角  $\phi$  の変化が安息角に与える影響について示す。まず要素間ばねの摩擦角  $\phi$  が  $0^\circ \sim 24^\circ$  においては摩擦角の変化が安息角に与える影響が非常に大きいことがわかる。一方、要素間ばねの摩擦角  $\phi$  が  $24^\circ$  以上になると安息角は約  $28^\circ$  で変化がなく、また個々の要素の動きにも大きな変化が見られなくなっている。片桐らによる集合体要素を用いた安息角に関する研究<sup>11)</sup>においても、要素間ばねの摩擦角が  $20^\circ$  以下では安息角に非常に大きな影響を与えているものの、 $20^\circ$  以上ではほとんど変化がないことを読みとることができる。これより、要素間ばねの摩擦角は  $24^\circ$  より小さい場合には安息角に対し非常に大きな影響を与えるものの、 $24^\circ$  以上では安息角に対してほとんど影響を与えないことがわかった。

## 5. 結 言

本研究は、個別要素法に剛結集合体要素を導入することで、礫要素の凹凸形状や要素間ばねの摩擦角の変化が安息角形成に与える影響について基礎的な検討を行ったものである。本研究の成果をまとめると、以下のようになる。

- (1) 同一球径6個を正八面体状に配置した集合体要素を用いて、安息角形成過程のシミュレーションを行った。これより、集合体要素の凸度 $\beta$ に応じて安息角は変化し、事前実験の最終安息角や安息角の形成過程を概ね再現することができた。
- (2) 要素間ばねの摩擦角は、 $24^\circ$ 以下では安息角に大きな影響を与えるものの、 $24^\circ$ 以上では安息角にあまり変化が見られないことがわかった。
- (3) 安息角の支配因子には、素材の形状以外の要因、例えば、比重、または反発係数などが考えられる。その点について別途検討を進める必要がある

## 参考文献

- 1) Cundall, P.A. and Strack, O.D.L. : A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies, *Geotechnique*, No.29, pp.47-65, 1979
- 2) 香月智：鋼製杵砂防ダムの礫中詰材圧に関する研究, *建築年報*, pp.155, 1991
- 3) 末崎将司, 園田佳巨, 大隅久：礫中詰材による衝撃緩衝効果に関する基礎的研究, *土木学会第64回年次学術講演会講演概要集*, pp.1143-1144, 2009.9
- 4) Van Burkalow Anastasia : Angle of repose and angle of sliding friction: An experimental study, *Bulletin, Geological Society of America*, No.56, pp.669-708, 1945
- 5) Statham Ian : The relationship of porosity and angle of repose to mixture proportions in assemblages of different sized materials, *Sedimentology*, No.21, pp.149-162, 1974
- 6) 片桐 淳, 松島亘志, 山田恭央：不規則形状モデル粒子を用いた安息角流動シミュレーション, 第 57 回理論応用力学講演会, Vol.57, No.3B, pp.511-512, 2008.6
- 7) 吉田順：粒状体の安息角形成に関する数値解析的検討, *土木学会年次学術講演会講演概要集第3部(B)*, Vol.51, No.3B, pp.790-791, 1996.9
- 8) 原木大輔, 香月智, 田代元司：円柱形要素を用いた個別要素法による落石防護網の衝撃応答解析, *土木学会論文集 A*, Vol.65, No.2, pp.536-552, 2009.6
- 9) 日高重助, 三輪茂雄：粉体工学実験マニュアル, 日刊工業新聞社, pp.129-135, 1984.7
- 10) 松倉公憲, 恩田裕一：安息角：定義と測定法にまつわる諸問題, *筑波大学水理実験センター報告*, No.13, pp.27~35, 1989
- 11) 片桐 淳, 松島亘志：月の砂の粒子モデリングと数値解析, *筑波大学修士論文*, pp.14, 2008.3