3.3 集合中元素的计数

- 集合的基数与有穷集合
- 包含排斥原理
- 有穷集的计数

集合的基数与有穷集合

集合 A 的**基数**：集合A中的元素数，记作 card$A$

有穷集 A：　card$A$=$|A|$=n，n为自然数.

有穷集的实例：

$A=\{a,b,c\}$, card$A$=$|A|$=3；

$B=\{x \mid x^2+1=0, x\in R\}$, card$B$=$|B|$=0

无穷集的实例：

N, Z, Q, R, C 等

例：有100名程序员，其中47名熟悉C语言，35名熟悉C++语言，23名熟悉这两种语言。问有多少人对这两种语言都不熟悉？

解：设A，B分别表示熟悉C和C++语言的程序员的集合，则该问题可以用图3.3.1的文氏图表示。将熟悉两种语言的对应人数23填入$A\cap B$的区域内，不难得到$A-B$和$B-A$的人数分别为

$$|A-B| = |A|-|A\cap B|=47-23=24$$

$$|B-A| = |B|-|A\cap B|=35-23=12$$

从而得到$|A\cup B|=24+23+12=59$,

故，$|\sim(A\cup B)|=100-59=41$，

即两种语言都不熟悉的有41人。

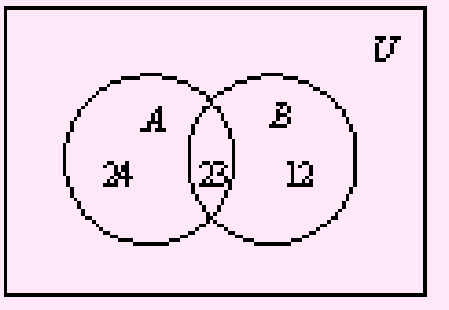


图3.3.1

例： 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个？

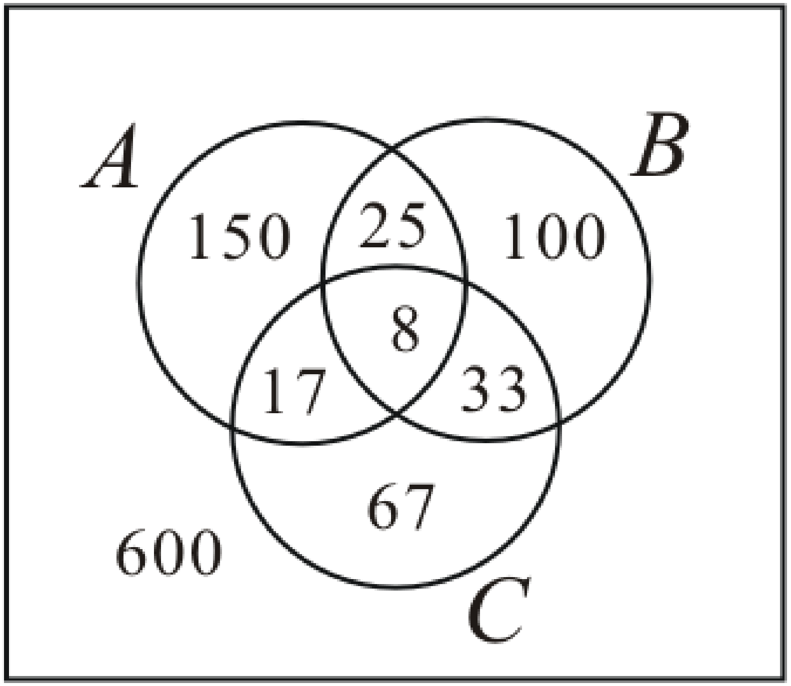
解：$S=\{\, x \mid x\in Z,\ 1\le x \le 1000 \,\}$,

如下定义 S 的 3 个子集 A, B, C：

$A=\{\, x \mid x\in S,\ 5 \mid x \,\}$,

$B=\{\, x \mid x\in S,\ 6 \mid x \,\}$,

$C=\{\, x \mid x\in S,\ 8 \mid x \,\}$



例2

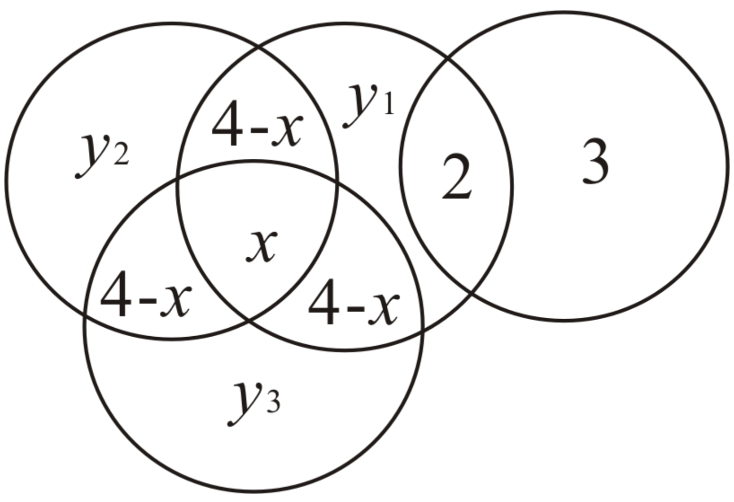
24名科技人员，每人至少会1门外语.

英语：13； 日语：5； 德语：10； 法语：9

英日：2； 英德：4； 英法：4； 法德：4

会日语的不会法语、德语

求：只会 1 种语言人数，会 3 种语言人数



$x+2(4-x)+y_1+2=13$//英语

$x+2(4-x)+y_2=10$//德语

$x+2(4-x)+y_3=9$//法语

$x+3(4-x)+y_1+y_2+y_3=19$

$x=1, y_1=4, y_2=3, y_3=2$

包含排斥原理

定理 设 S 为有穷集，$P_1, P_2, \ldots, P_m$ 是 m 种性质，A_i 是 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集，i=1, 2, …, m.则 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$ 的元素数为

$$
\begin{aligned}
&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}| \\
&= |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots \\
&+ (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|
\end{aligned}
$$

证明

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_m}|$$

$$=|S|-\sum_{i=1}^{m}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots$$

$$+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m|$$

证明要点：任何元素 x，如果不具有任何一个性质，则对等式右边计数贡献为 1， 否则为 0

证 设 x不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$,

$$x\notin A_i\ ,\ i=1, 2, \ldots, m$$

$$x\notin A_i\cap A_j\ ,\ 1\le i<j\le m$$

$$\ldots$$

$$x\notin A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m\ ,$$

x 对右边计数贡献为

$$1-0+0-0+\ldots+(-1)^m\cdot 0=1$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}|$$

证明（续）

$$= |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots$$
$$+ (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

设 x具有 n 条性质，$1 \le n \le m$

x 对 $|S|$ 贡献为 1

x 对 $\sum_{i=1}^{m} |A_i|$ 贡献为 C_n^1

x 对 $\sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j|$ 贡献为 C_n^2

....

x 对 $|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$ 贡献为 C_n^m

x 对右边计数贡献为

$$1 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^m C_n^m = 1 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} C_n^i 1^{n-i} (-1)^i = (1-1)^n = 0$$

推论

S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots$$

$$+ (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

证明 $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$

$$= |S| - |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m}|$$

$$= |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}|$$

将定理 1 代入即可

应用

例1 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个?

解： $S = \{ x \mid x \in Z, 1 \le x \le 1000 \}$,

如下定义 S 的 3 个子集 A, B, C:

$A = \{ x \mid x \in S, 5 \mid x \}$,

$B = \{ x \mid x \in S, 6 \mid x \}$,

$C = \{ x \mid x \in S, 8 \mid x \}$

例1（续）

$A=\{\, x \mid x\in S,\ 5 \mid x \,\}$,

$B=\{\, x \mid x\in S,\ 6 \mid x \,\}$,

$C=\{\, x \mid x\in S,\ 8 \mid x \,\}$

对上述子集计数：

$|S|=1000$,

$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200$, $|B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=133$,

$|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$,

$|A\cap B|=\lfloor 1000/30 \rfloor=33$, $|B\cap C| = \lfloor 1000/40 \rfloor=25$,

$|B\cap C|=\lfloor 1000/24 \rfloor=41$,

$|A\cap B\cap C| = \lfloor 1000/120 \rfloor=8$,

代入公式

$$N = 1000-(200+133+125)+(33+25+41)-8=600$$

例2 求欧拉函数的值

欧拉函数： $\phi(n)$

表示$\{0,1,\ldots,n-1\}$中与n互素的数的个数.

$\phi(12)=4$，与12互素的数有1, 5, 7, 11.

解： n 的素因子分解式

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

令$A_i=\{\, x \mid 0\le x<n-1$且 p_i整除 $x \,\}$

$$\phi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k}|$$

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad 1 \le i < j \le n$$

$$\ldots$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k| = \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}$$

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k}| \\
&= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \ldots + \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right) \\
&\quad - \ldots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k} \\
&= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)
\end{aligned}$$

实例

与 60 互素的正整 数有 16 个：

1，7，11，13，17，19，23，29，

31，37，41，43，47，49，53，59.

$$\phi(60)=60(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})$$

$$=60\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=16$$