5.3 图的矩阵表示

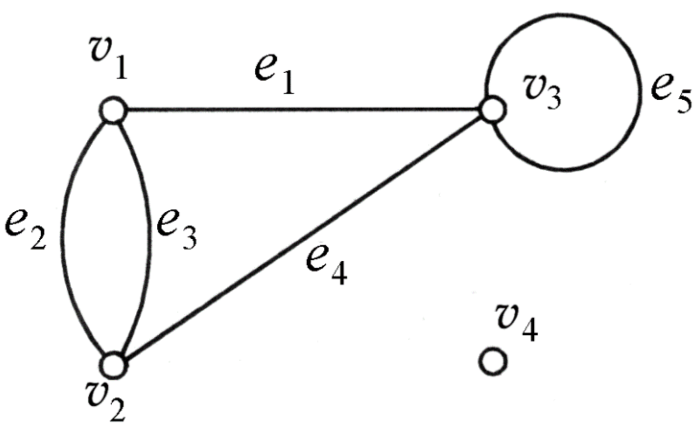
- 无向图的关联矩阵
- 有向图的关联矩阵
- 有向图的邻接矩阵
- 有向图的可达矩阵

无向图的关联矩阵

定义 设无向图$G=<V,E>$，$V=\{v_1, v_2, …, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, …, e_m\}$，令m_{ij}为v_i与e_j的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为**G的关联矩阵**，记为$M(G)$.

例

$$M(G)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



无向图的关联矩阵

定义 设无向图$G=\langle V,E\rangle$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，令$m_{ij}$为$v_i$与$e_j$的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为**$G$的关联矩阵**，记为$M(G)$.

性质 (1) 每一列恰好有两个1或一个2

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$

(4) v_i为孤立点当且仅当第i行全为0

(5) 平行边的列相同

有向图的关联矩阵

定义 设无环有向图$D=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令

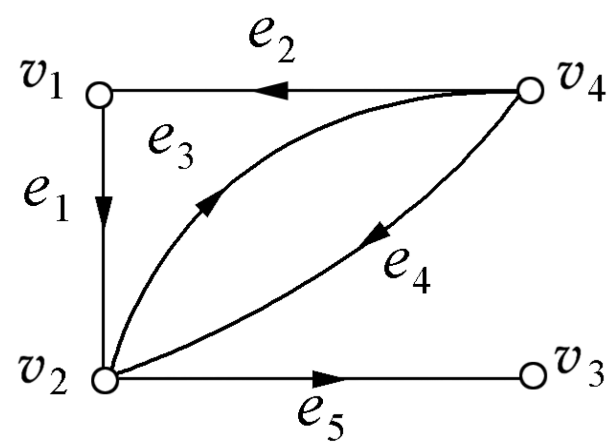
$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

则称$(m_{ij})_{n\times m}$为D的关联矩阵，记为$M(D)$.

有向图的关联矩阵(续)

例

$$M(D)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



性质

(1) 每一列恰好有一个**1**和一个**-1**

(2) 第i行**1** 的个数等于$d^+(v_i)$, **-1** 的个数等于$d^-(v_i)$

(3) 1的总个数等于**-1**的总个数, 且都等于m

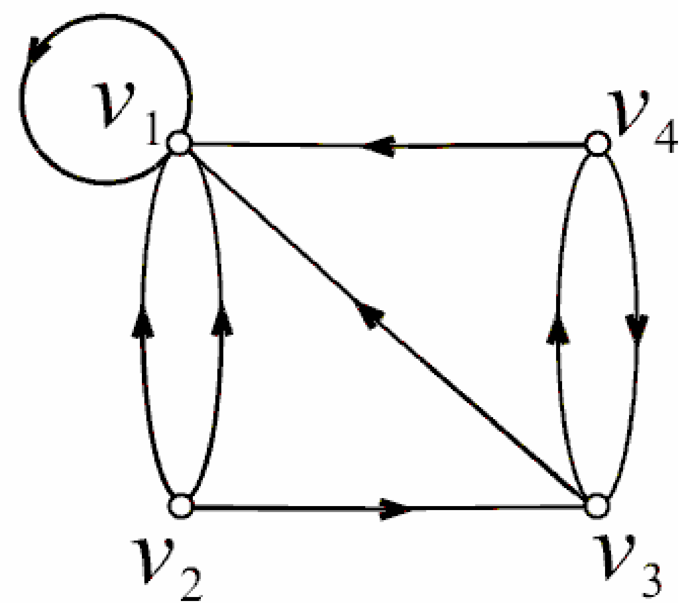
(4) 平行边对应的列相同

有向图的邻接矩阵

定义　设有向图D=<V,E>, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令 $a_{ij}^{(1)}$为顶点v_i邻接到顶点v_j边的条数，称$(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$为**D的邻接矩阵**, 记作$A(D)$, 简记为$A$.

实例：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$



有向图邻接矩阵的性质

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i), \quad i = 1,2,\ldots,n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j), \quad j = 1,2,\ldots,n$

(3) $\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$ ---- D中长度为1的通路数

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ ---- D中长度为1的回路数

D中的通路及回路数

定理 设A为n阶有向图D的邻接矩阵, 则$A^l(l\geq 1)$中元素

$a_{ij}^{(l)}$为D中v_i到v_j长度为 l 的通路数，

$a_{ii}^{(l)}$为v_i到自身长度为 l 的回路数，

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的通路总数，

$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的回路总数.

D中的通路及回路数(续)

推论 设$B_l=A+A^2+\ldots+A^l(l\geq 1)$, 则$B_l$中元素

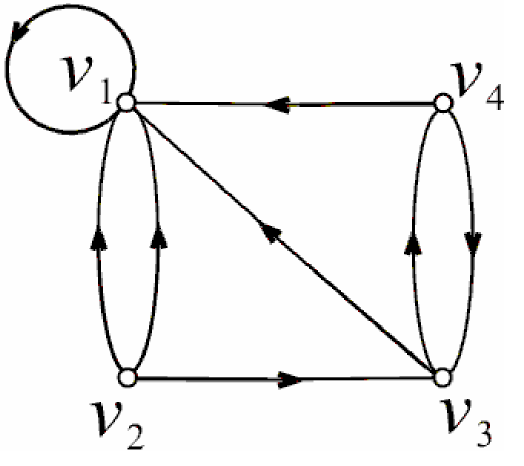
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{(l)}$为$D$中长度小于或等于$l$ 的通路数,

$\sum_{i=1}^{n}b_{ii}^{(l)}$为$D$中长度小于或等于$l$ 的回路数.

例 问在有向图D中

(1) 长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条? 其中回路分别为多少条?

(2) 长度小于或等于4的通路为多少条? 其中有多少条回路?



例(续)

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

长度	通路	回路
1	8	1
2	11	3
3	14	1
4	17	3
合计	50	8

有向图的可达矩阵

定义 设$D=\langle V,E\rangle$为有向图, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{可达}v_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

称$(p_{ij})_{n\times n}$为D的可达矩阵, 记作$P(D)$, 简记为P.

性质:

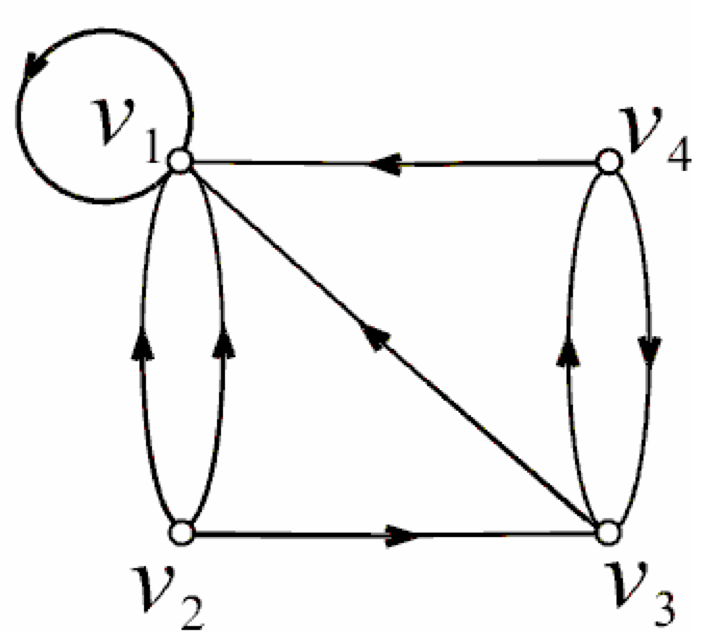
$P(D)$主对角线上的元素全为1.

D强连通当且仅当$P(D)$的元素全为1.

有向图的可达矩阵实例

例

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$$



5.4 最短路径,关键路径与着色

- 带权图
- 最短路径与Dijkstra标号法
- 项目网络图与关键路径
- 着色问题

最短路径

带权图$G=<V,E,w>$, 其中$w:E\to \mathbf{R}$.

$\forall e\in E$, $w(e)$称作e的权. $e=(v_i,v_j)$, 记$w(e)=w_{ij}$. 若v_i,v_j不相邻, 记$w_{ij}=\infty$.

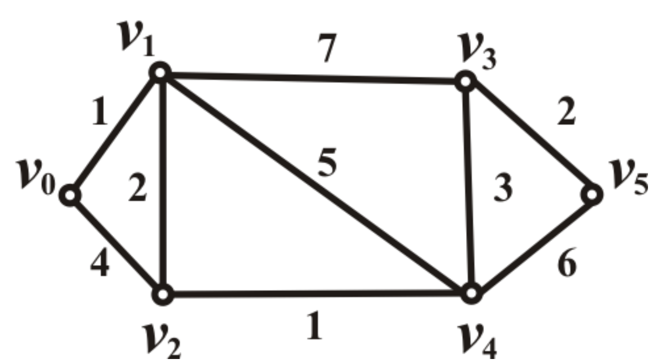
通路L的权: L的所有边的权之和, 记作$w(L)$.

u和v之间的最短路径: u和v之间权最小的通路.

例 $L_1=v_0v_1v_3v_5$, $w(L_1)=10$,

$L_2=v_0v_1v_4v_5$, $w(L_2)=12$,

$L_3=v_0v_2v_4v_5$, $w(L_3)=11$.



标号法(E.W.Dijkstra, 1959)

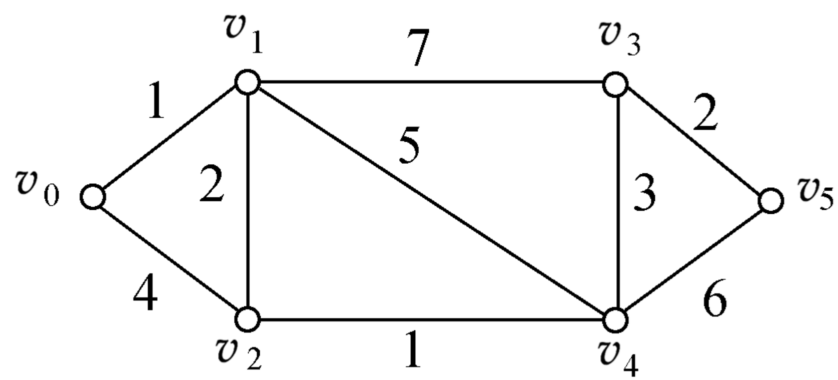
设带权图$G=<V,E,w>$, 其中$\forall e\in E$, $w(e)\geq 0$.

设$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, 求v_1到其余各顶点的最短路径

1. 令 $l_1\leftarrow 0$, $p_1\leftarrow\lambda$, $l_j\leftarrow +\infty$, $p_j\leftarrow\lambda$, $j=2,3,\ldots,n$,
   $P=\{v_1\}$, $T=V-\{v_1\}$, $k\leftarrow 1$, $t\leftarrow 1$. / λ表示空
2. 对所有的$v_j\in T$且$(v_k,v_j)\in E$
   令$l\leftarrow\min\{l_j, l_k+w_{kj}\}$,
   若$l=l_k+w_{kj}$, 则令$l_j\leftarrow l$, $p_j\leftarrow v_k$.
3. 求$l_i=\min\{l_j| v_j\in T_t\}$.
   令$P\leftarrow P\cup\{v_i\}$, $T\leftarrow T-\{v_i\}$, $k\leftarrow i$.
4. 令$t\leftarrow t+1$,
   若$t<n$, 则转2.

Dijkstra标号法实例

例 求v_0到v_5的最短路径



t	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
1	$(0, \lambda)^*$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$
2		$(1,v_0)^*$	$(4,v_0)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$
3			$(3,v_1)^*$	$(8,v_1)$	$(6,v_1)$	$(+\infty, \lambda)$
4				$(8,v_1)$	$(4,v_2)^*$	$(+\infty, \lambda)$
5				$(7,v_4)^*$		$(10,v_4)$
6						$(9,v_3)^*$

v_0到v_5的最短路径长度$d(v_0,v_5)=9$

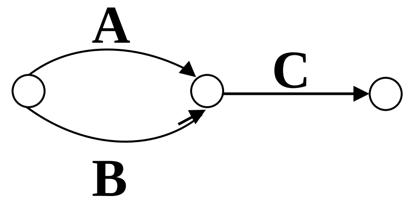
最短路径：$v_0v_1v_2v_4v_3v_5$，

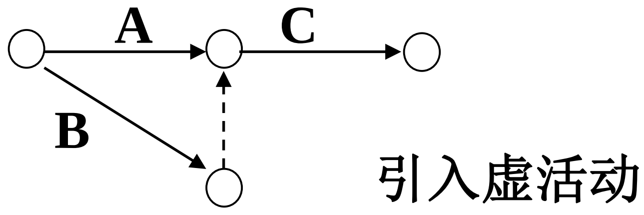
项目网络图

项目网络图: 表示项目的活动之间前后顺序一致的带权有向图. 边表示活动, 边的权是活动的完成时间,顶点表示事项(项目的开始和结束、活动的开始和结束).

要求: (1) 有一个始点(入度为0)和一个终点(出度为0).

(2) 任意两点之间只能有一条边.



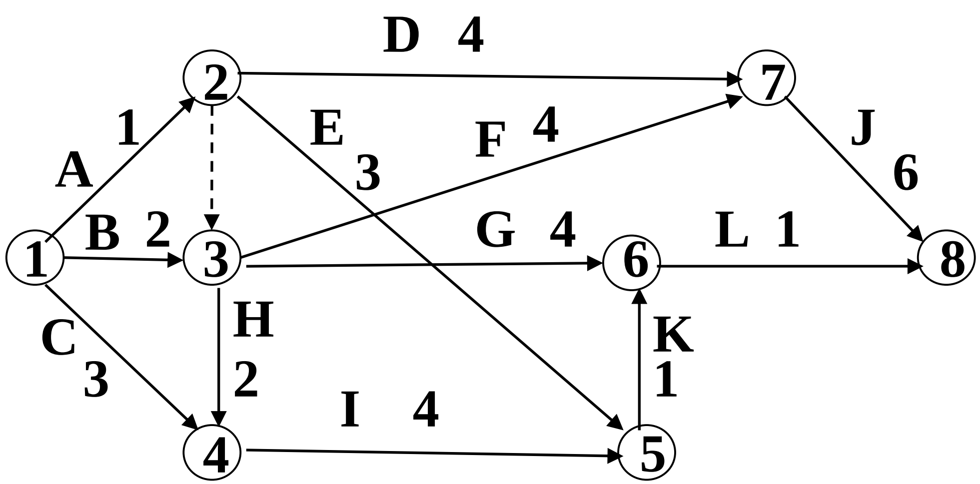


(3) 没有回路.

(4) 每一条边始点的编号小于终点的编号.

例

活动	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
紧前活动	–	–	–	A	A	A,B	A,B	A,B	C,H	D,F	E,I	G,K
时间(天)	1	2	3	4	3	4	4	2	4	6	1	1



关键路径

关键路径: 项目网络图中从始点到终点的最长路径

关键活动: 关键路径上的活动

设$D=<V,E,W>$, $V=\{1,2,\ldots,n\}$, 1是始点, n是终点.

(1)**事项i的最早开始时间$ES(v_i)$**: i最早可能开始的时间, 即从始点到i的最长路径的长度.

$$ES(1)=0$$

$$ES(i)=\max\{ES(j)+w_{ji} \mid <j,i>\in E\}, \quad i=2,3,\ldots,n$$

(2)**事项i的最晚完成时间$LF(i)$**: 在不影响项目工期的条件下, 事项i最晚必须完成的时间.

$$LF(n)=ES(n)$$

$$LF(i)=\min\{LF(j)-w_{ij} \mid <i,j>\in E\}, \quad i=n-1,n-2,\ldots,1$$

关键路径(续)

(3) 活动<*i,j*>的最早开始时间*ES*(*i,j*): <*i,j*>最早可能开始时间.

(4) 活动<*i,j*>的最早完成时间*EF*(*i,j*): <*i,j*>最早可能完成时间.

(5) 活动<*i,j*>的最晚开始时间*ES*(*i,j*): 在不影响项目工期的条件下, <*i,j*>最晚必须开始的时间.

(6) 活动<*i,j*>的最晚完成时间*ES*(*i,j*): 在不影响项目工期的条件下, <*i,j*>最晚必须完成的时间.

(7) 活动<*i,j*>的缓冲时间*SL*(*i,j*):

$$SL(i,j)= LS(i,j)-ES(i,j)=LF(i,j)-EF(i,j)$$

显然, $ES(i,j)= ES(i)$, $EF(i,j)= ES(i)+w_{ij}$,

$LF(i,j)=LF(j)$, $LS(i,j)=LF(j)-w_{ij}$,

例(续)

事项的最早开始时间

$ES(1)=0$

$ES(2)=\max\{0+1\}=1$

$ES(3)=\max\{0+2,1+0\}=2$

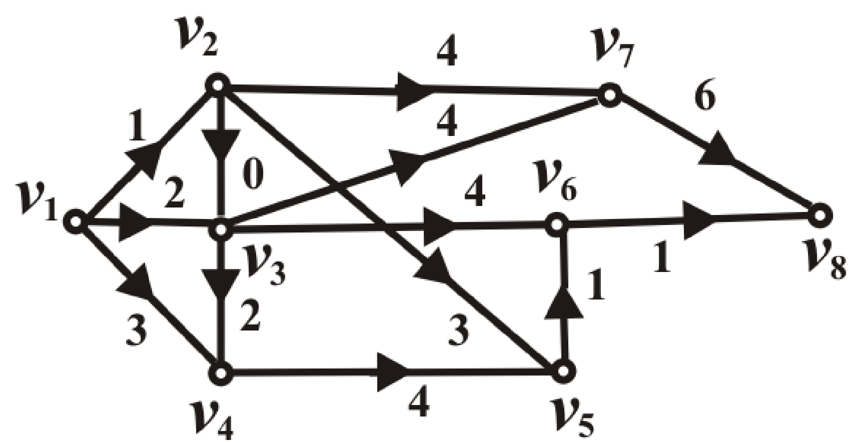
$ES(4)=\max\{0+3,2+2\}=4$

$ES(5)=\max\{1+3,4+4\}=8$

$ES(6)=\max\{2+4,8+1\}=9$

$ES(7)=\max\{1+4,2+4\}=6$

$ES(8)=\max\{9+1,6+6\}=12$



例(续)

事项的最晚完成时间

$LF(8)=12$

$LF(7)=\min\{12-6\}=6$

$LF(6)=\min\{12-1\}=11$

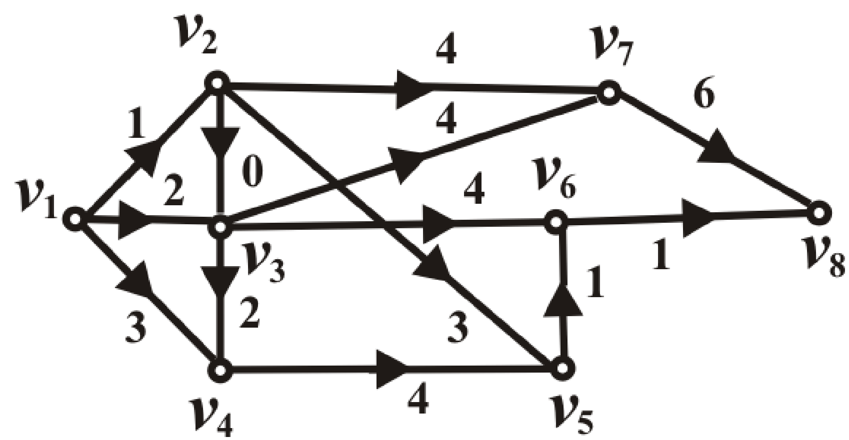
$LF(5)=\min\{11-1\}=10$

$LF(4)=\min\{10-4\}=6$

$LF(3)=\min\{6-2,11-4,6-4\}=2$

$LF(2)=\min\{2-0,10-3,6-4\}=2$

$LF(1)=\min\{2-1,2-2,6-3\}=0$



例(续)

活动	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
ES	0	0	0	1	1	2	2	2	4	6	8	9
EF	1	2	3	5	4	6	6	4	8	12	9	10
LS	1	0	3	2	7	2	7	4	6	6	10	11
LF	2	2	6	6	10	6	11	6	10	12	11	12
SL	1	0	3	1	6	0	5	2	2	0	2	2

总工期:12天

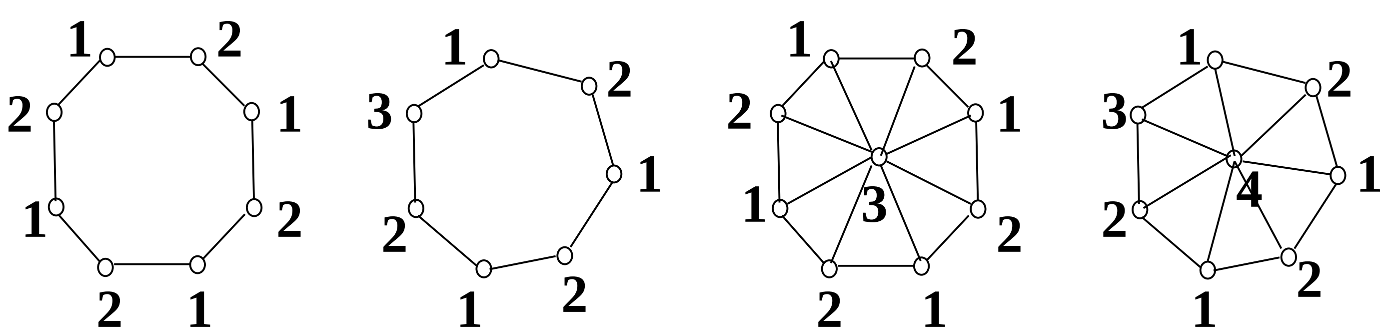
关键路径: $v_1v_3v_7v_8$ 关键活动: B,F,J

着色

定义 设无向图G无环, 对G的每个顶点涂一种颜色，使相邻的顶点涂不同的颜色，称为图G的一种**点着色**,简称**着色**. 若能用k种颜色给G的顶点着色， 则称G是**k-可着色**的.

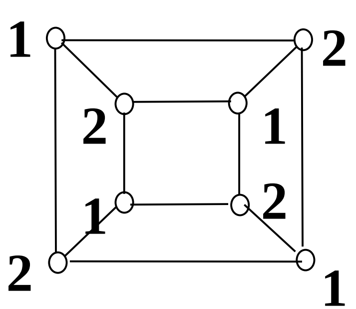
图的着色问题: 用尽可能少的颜色给图着色.

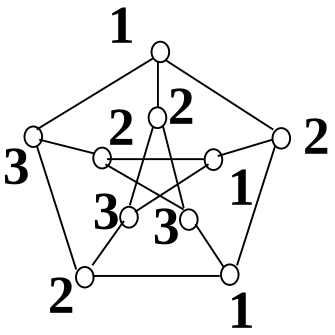
例1

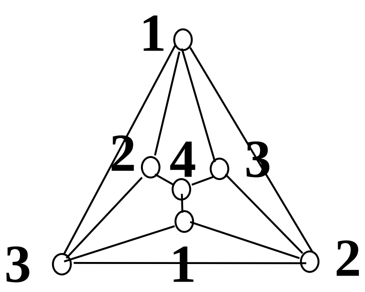


例

例2





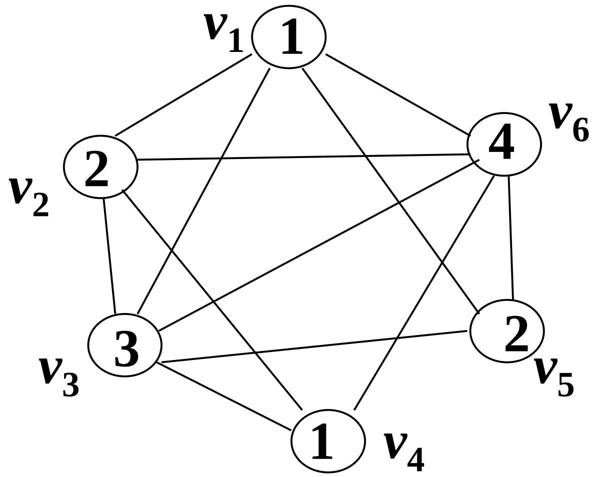


应用

- 有n项工作, 每项工作需要一天的时间完成. 有些工作由于需要相同的人员或设备不能同时进行, 问至少需要几天才能完成所有的工作?
- 计算机有k个寄存器, 现正在编译一个程序, 要给每一个变量分配一个寄存器. 如果两个变量要在同一时刻使用, 则不能把它们分配给同一个寄存器.如何给变量分配寄存器?
- 无线交换设备的波长分配. 有n台设备和k个发射波长, 要给每一台设备分配一个波长. 如果两台设备靠得太近, 则不能给它们分配相同的波长, 以防止干扰. 如何分配波长?

例

例3 学生会下设6个委员会, 第一委员会={张, 李, 王}, 第二委员会={李, 赵, 刘}, 第三委员会={张, 刘, 王}, 第四委员会={赵, 刘, 孙}, 第五委员会={张, 王}, 第六委员会={李, 刘, 王}. 每个月每个委员会都要开一次会, 为了确保每个人都能参加他所在的委员会会议, 这6个会议至少要安排在几个不同时间段?



至少要4个时段
第1时段:一,四
第2时段:二,五
第3时段:三
第4时段:六