# 1.7 推理理论

- 推理的形式结构
- 判断推理是否正确的方法
- 推理定律与推理规则
- 构造证明

  直接证明法, 附加前提证明法, 归缪法

# 推理的形式结构—问题的引入

推理举例:

(1) 正项级数收敛当且仅当部分和有上界.

(2) 若$A \cup C \subseteq B \cup D$，则$A \subseteq B$且$C \subseteq D$.

推理: 从前提出发推出结论的思维过程

上面(1)是正确的推理，而(2)是错误的推理.

证明: 描述推理正确的过程.

# 推理的形式结构

定义 若对于每组赋值，或者$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为假，或者当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时, $B$也为真, 则称由$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出$B$的推理正确，并称B是$A_1, A_2, \ldots, A_k$的有效结论（逻辑结论），否则推理不正确（错误）.

称 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$ 为 由前提 $A_1, A_2, \ldots, A_k$推出结论$B$ 的推理的形式结构.

"$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出$B$" 的推理正确

当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式.

若推理正确，则记作：$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$.

# 判断推理是否正确的方法

- 真值表法
- 等值演算法
- 主析取范式法
- 构造证明法

判断推理是否正确

证明推理正确

说明：用前3个方法时采用形式结构

$$“A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B”.$$

用构造证明时, 采用

“前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$, 结论: $B$”.

# 实例

例 判断下面推理是否正确

**(1)** 若今天是**1**号，则明天是**5**号**.** 今天是**1**号**.** 所以明天是**5**号**.**

解 设 $p$：今天是**1**号，$q$：明天是**5**号**.**

推理的形式结构为：$(p\to q)\wedge p\to q$

证明（用等值演算法）

$$(p\to q)\wedge p\to q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee q \Leftrightarrow 1$$

得证推理正确

# 实例 (续)

(2) 若今天是1号，则明天是5号. 明天是5号. 所以今天是1号.

解 设$p$：今天是1号，$q$：明天是5号.

推理的形式结构为：$(p\to q)\wedge q\to p$

证明（用主析取范式法）

$$(p\to q)\wedge q\to p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge q\to p$$

$$\Leftrightarrow \neg\ ((\neg p\vee q)\wedge q)\vee p$$

$$\Leftrightarrow \neg q\vee p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee (p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_3$$

结果不含$m_1$, 故01是成假赋值，所以推理不正确.

# 推理定律——重言蕴涵式

重要的推理定律

| | |
|---|---|
| $A \Rightarrow (A \vee B)$ | 附加律 |
| $(A \wedge B) \Rightarrow A$ | 化简律 |
| $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ | 假言推理 |
| $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ | 拒取式 |
| $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ | 析取三段论 |
| $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$ | 假言三段论 |
| $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ | 等价三段论 |
| $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ | 构造性二难 |

# 推理定律 (续)

① $r \to s$　　前提引入
② $\neg s$　　前提引入
③ $\neg r$　　①②拒取式
④ $(p \vee q) \to r$　　前提引入
⑤ $\neg(p \vee q)$　　③④拒取式
⑥ $\neg p \wedge \neg q$　　⑤置换

$(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$　　构造性二难（特殊形式）

$(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$

破坏性二难

**证明**是一个描述推理过程的命题公式序列，其中每个命题公式或者是已知的前提，或者是由前面的命题公式应用推理规则得到的结论.

# 推理规则

课本：如果B是$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 的逻辑结论，也表示为 $A_1, A_2, \ldots, A_k \models B$

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

(4) 假言推理规则

$$\frac{A\rightarrow B \qquad A}{\therefore B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A\vee B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A\wedge B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{A\rightarrow B \qquad \neg B}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{A\rightarrow B \qquad B\rightarrow C}{\therefore A\rightarrow C}$$

# 推理规则(续)

(9) 析取三段论规则

$$\begin{array}{c} A\vee B \\ \neg B \\ \hline \therefore A \end{array}$$

(10)构造性二难推理规则

$$\begin{array}{c} A\to B \\ C\to D \\ A\vee C \\ \hline \therefore B\vee D \end{array}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\begin{array}{c} A\to B \\ C\to D \\ \neg B\vee\neg D \\ \hline \therefore \neg A\vee\neg C \end{array}$$

(12) 合取引入规则

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline \therefore A\wedge B \end{array}$$

# 构造证明之一——直接证明法

例 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我就有课. 若有课，今天必备课. 我今天没备课. 所以，明天不是星期一和星期三.

解 设 $p$：明天是星期一，$q$：明天是星期三，

$r$：我有课，$s$：今天我备课

推理的形式结构为

前提：$(p\vee q)\rightarrow r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

# 直接证明法 (续)

前提：$(p\vee q)\to r$，$r\to s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

证明

| | | |
|---|---|---|
| ① | $r\to s$ | 前提引入 |
| ② | $\neg s$ | 前提引入 |
| ③ | $\neg r$ | ①②拒取式 |
| ④ | $(p\vee q)\to r$ | 前提引入 |
| ⑤ | $\neg(p\vee q)$ | ③④拒取式 |
| ⑥ | $\neg p\wedge\neg q$ | ⑤置换 |

# 构造证明之二——附加前提证明法

欲证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：$C\rightarrow B$

等价地证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

结论：$B$

理由：

$$(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k)\rightarrow(C\rightarrow B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k)\vee(\neg C\vee B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\wedge C)\vee B$$

$$\Leftrightarrow (A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\wedge C)\rightarrow B$$

# 附加前提证明法 (续)

例 构造下面推理的证明:

2是素数或合数. 若2是素数，则$\sqrt{2}$是无理数. 若$\sqrt{2}$是无理数，则4不是素数. 所以，如果4是素数，则2是合数.

用附加前提证明法构造证明

解 设 $p$：2是素数，$q$：2是合数，

$r$：$\sqrt{2}$是无理数，$s$：4是素数

推理的形式结构

前提：$p \vee q$, $p \to r$, $r \to \neg s$

结论：$s \to q$

# 附加前提证明法 (续)

前提：$p \vee q$，$p \to r$，$r \to \neg s$

结论：$s \to q$

证明

| | |
|---|---|
| ① $s$ | 附加前提引入 |
| ② $p \to r$ | 前提引入 |
| ③ $r \to \neg s$ | 前提引入 |
| ④ $p \to \neg s$ | ②③假言三段论 |
| ⑤ $\neg p$ | ①④拒取式 |
| ⑥ $p \vee q$ | 前提引入 |
| ⑦ $q$ | ⑤⑥析取三段论 |

# 构造证明之三——归谬法(反证法)

欲证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：$B$

将$\neg B$加入前提，若推出矛盾，则得证推理正确.

理由:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B)$为重言式 当且仅当 括号内部为矛盾式

# 归谬法 (续)

例 构造下面推理的证明

前提：$\neg(p\wedge q)\vee r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$，$p$

结论：$\neg q$

| | |
|---|---|
| ① $q$ | 结论否定引入 |
| ② $r\rightarrow s$ | 前提引入 |
| ③ $\neg s$ | 前提引入 |
| ④ $\neg r$ | ②③拒取式 |
| ⑤ $\neg(p\wedge q)\vee r$ | 前提引入 |
| ⑥ $\neg(p\wedge q)$ | ④⑤析取三段论 |
| ⑦ $\neg p\vee\neg q$ | ⑥置换 |
| ⑧ $\neg p$ | ①⑦析取三段论 |
| ⑨ $p$ | 前提引入 |
| ⑩ $\neg p\wedge p$ | ⑧⑨合取 |

# 习题:构造下列推理的证明

- **1.前提： $p \to (q \to r), p \wedge q$**
  **结论： $\neg r \to s$**
- **2.前提： $p \to q, \neg (q \wedge r), r$**
  **结论： $\neg p$**
- **3.前提： $p \to q,$**
  **结论： $p \to (p \wedge q)$**
- **4.前提： $q \to p, q \leftrightarrow s, s \leftrightarrow t, t \wedge r$**
  **结论： $p \wedge q$**