4.3 关系的性质

- 自反性
- 反自反性
- 对称性
- 反对称性
- 传递性

自反性与反自反性

定义　设R为A上的关系,

(1) 若$\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\in R)$, 则称$R$在$A$上是自反的.

(2) 若$\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\notin R)$, 则称$R$在$A$上是反自反的.

实例:

自反关系：A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A

小于等于关系L_A, 整除关系D_A

反自反关系：实数集上的小于关系

幂集上的真包含关系

实例

例1　$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle\}$

$R_3=\{\langle 1,3\rangle\}$

R_1既不是自反也不是反自反的,

R_2自反,

R_3反自反

对称性与反对称性

定义 设R为A上的关系,

(1) 若$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge \langle x,y \rangle \in R \rightarrow \langle y,x \rangle \in R)$, 则称$R$为$A$上对称的关系.

(2) 若$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge \langle x,y \rangle \in R \wedge \langle y,x \rangle \in R \rightarrow x=y)$, 则称$R$为$A$上的反对称关系.

实例:

对称关系：A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A和空关系$\varnothing$

反对称关系：恒等关系I_A，空关系是A上的反对称关系.

实例

例2　设A＝{1,2,3}, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系，

其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$，　$R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_3=\{<1,2>,<1,3>\}$，　$R_4=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$

R_1 对称、反对称.

R_2 对称，不反对称.

R_3 反对称，不对称.

R_4 不对称、也不反对称.

传递性

定义　设R为A上的关系, 若

$\forall x \forall y \forall z(x,y,z \in A \wedge <x,y> \in R \wedge <y,z> \in R \rightarrow <x,z> \in R)$,

则称R是A上的传递关系.

实例:

A上的全域关系E_A,恒等关系I_A和空关系$\varnothing$

小于等于关系, 小于关系，整除关系，包含关系，真包含关系

实例

例3 设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$

$R_2=\{<1,2>,<2,3>\}$

$R_3=\{<1,3>\}$

R_1 和 R_3 是A上的传递关系

R_2不是A上的传递关系

关系性质的充要条件

设R为A上的关系, 则

(1) R在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R在A上对称当且仅当 $R = R^{-1}$

(4) R在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

自反性证明

证明模式 证明R在A上自反

任取x,

$x \in A \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R$

前提　　　　推理过程　　　　结论

例4 证明若 $I_A \subseteq R$，则 R在A上自反.

证 任取x,

$$x \in A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R$$

因此 R 在 A 上是自反的.

对称性证明

证明模式 证明R在A上对称

任取$<x, y>$

$<x,y>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow <y,x>\in R$

前提 推理过程 结论

例5 证明若 $R=R^{-1}$, 则R在A上对称.

证 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in R \Rightarrow <y,x>\in R^{-1} \Rightarrow <y,x>\in R$$

因此 R 在 A 上是对称的.

反对称性证明

证明模式 证明R在A上反对称

任取$<x, y>$

$<x,y>\in R \wedge <y,x>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow x=y$

前提 推理过程 结论

例6 证明若 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$，则$R$在$A$上反对称.

证 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in R \wedge <y, x>\in R \Rightarrow <x,y>\in R \wedge <x,y>\in R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow <x,y>\in I_A \Rightarrow x=y$$

因此 R 在 A 上是反对称的.

传递性证明

证明模式 证明R在A上传递

任取$<x, y>$，$<y, z>$

$<x,y>\in R \wedge <y, z>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow <x,z>\in R$

前提 推理过程 结论

例7 证明若 $R\circ R\subseteq R$，则R在A上传递.

证 任取$<x,y>$，$<y, z>$

$<x,y>\in R \wedge <y,z>\in R \Rightarrow <x,z>\in R\circ R \Rightarrow <x,z>\in R$

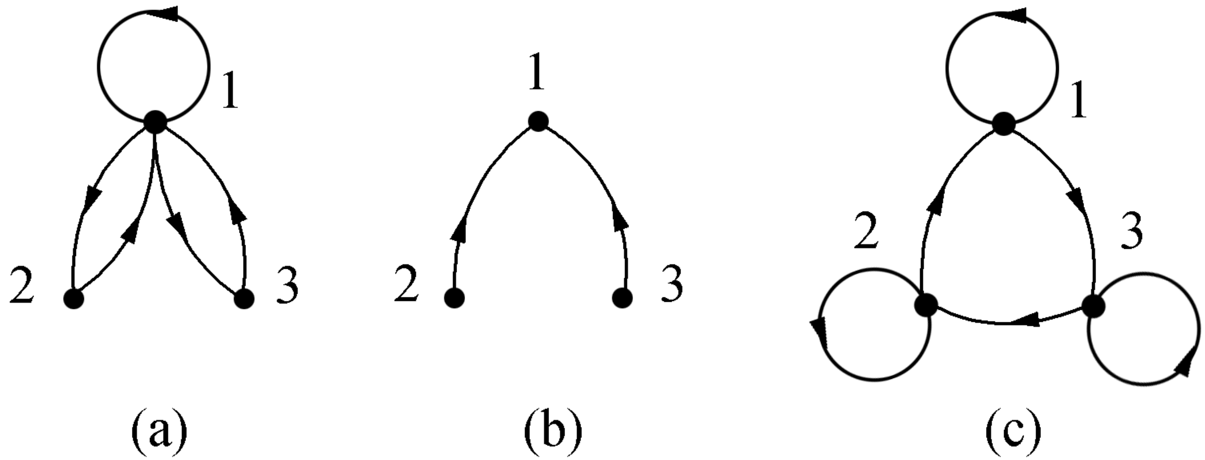
因此 R 在 A 上是传递的.

关系性质判别

	自反	反自反	对称	反对称	传递
表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$，且$i \neq j$, 则$r_{ji}=0$	对M^2中1所在位置，M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边，是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边，一定是一条有向边(无双向边)	如果顶点x_i到x_j有边，x_j到x_k有边，则从x_i到x_k有边

实例

例8 判断下图中关系的性质, 并说明理由.



(a)不自反也不反自反；对称, 不反对称；不传递.

(b)反自反，不是自反的；反对称，不是对称的；是传递的.

(c)自反，不反自反；反对称，不是对称；不传递.

运算与性质的关系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

例：设A是集合，R_1和R_2是A上的关系，
如果R_1和R_2是自反的，则$R_1 \cup R_2$也是自反的

证明：

由于R_1和R_2是A上的自反关系，故有

$$I_A \subseteq R_1 \text{和} I_A \subseteq R_2$$

从而$I_A \subseteq R_1 \cup R_2$，

所以$R_1 \cup R_2$也是自反的

例：设A是集合，R_1和R_2是A上的关系，
如果R_1和R_2是对称的，则$R_1 \cap R_2$也是对称的

证明：

对任意的$< x, y >$，有

$$< x, y > \in R_1 \cap R_2$$
$$\Leftrightarrow < x, y > \in R_1 \wedge < x, y > \in R_2$$
$$\Leftrightarrow < y, x > \in R_1 \wedge < y, x > \in R_2$$
$$\Leftrightarrow < y, x > \in R_1 \cap R_2$$

所以$R_1 \cap R_2$是对称的

例：设A是集合，R_1和R_2是A上的关系，
如果R_1和R_2是对称的，则$R_1 \cup R_2$也是对称的

证明：

由R_1和R_2的对称性有

$$R_1 = R_1^{-1} \text{和} R_2 = R_2^{-1}$$

$$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = R_1 \cup R_2$$

所以$R_1 \cup R_2$是对称的

例：设A是集合，R_1和R_2是A上的关系，
如果R_1和R_2是传递的，则$R_1 \cap R_2$也是传递的

证明：

由R_1和R_2的传递性有

$$R_1 \circ R_1 \subseteq R_1 \text{和} R_2 \circ R_2 \subseteq R_2$$

利用定理4.2，有

$$(R_1 \cap R_2) \circ (R_1 \cap R_2)$$
$$\subseteq (R_1 \circ R_1) \cap (R_1 \circ R_2) \cap (R_2 \circ R_1) \cap (R_2 \circ R_2)$$
$$\subseteq (R_1 \cap R_2) \cap (R_1 \circ R_2) \cap (R_2 \circ R_1)$$
$$\subseteq (R_1 \cap R_2)$$

所以$R_1 \cap R_2$也是传递的