1.3 命题逻辑等值演算

- 等值式
- 基本等值式
- 等值演算
- 置换规则

给定n(n≥1)个命题变项，按公式的形成规则，可以形成无穷多个命题公式。

事实上，n个命题变项只能生成2^{2^n}个真值不同的真值表。

所以这无穷多个命题公式中，有些公式具有相同的真值表

例如： $p \to q$ ， $\neg p \vee q$， $(\neg p \vee q) \vee (\neg (p \to q) \wedge q)$

需要判断哪些命题公式真值相同。

等值式

定义 若等价式$A\leftrightarrow B$是重言式，则称A与B等值，记作$A\Leftrightarrow B$，并称$A\Leftrightarrow B$是等值式

说明：定义中，$A,B,\Leftrightarrow$均为元语言符号, A或B中可能有哑元出现.

例如，在 $(p\rightarrow q)\Leftrightarrow((\neg p\vee q)\vee(\neg r\wedge r))$中，$r$为左边公式的哑元.

用真值表可验证两个公式是否等值

请验证：$A\vee(A\wedge B)$和$A\wedge(A\vee B)$*是否等值*

课后验证： $p\rightarrow(q\rightarrow r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\rightarrow r$

$$p\rightarrow(q\rightarrow r)\not\Leftrightarrow(p\rightarrow q)\rightarrow r$$

基本等值式

双重否定律：$\neg\neg A \Leftrightarrow A$

等幂律: $A \lor A \Leftrightarrow A$, $A \land A \Leftrightarrow A$

交换律: $A \lor B \Leftrightarrow B \lor A$, $A \land B \Leftrightarrow B \land A$

结合律: $(A \lor B) \lor C \Leftrightarrow A \lor (B \lor C)$

$(A \land B) \land C \Leftrightarrow A \land (B \land C)$

分配律: $A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$

$A \land (B \lor C) \Leftrightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$

基本等值式(续)

德·摩根律: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

零律: $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$, $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

同一律: $A \vee 0 \Leftrightarrow A$, $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$

吸收律: $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

排中律: $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

矛盾律: $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

基本等值式(续)

蕴涵等值式: $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

等价等值式: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

假言易位: $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$

等价否定等值式: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

归谬论: $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

注意:

A,*B*,*C*代表任意的命题公式

牢记这些等值式是继续学习的基础

等值演算与置换规则

等值演算:

由已知的等值式推演出新的等值式的过程

置换规则：若$A \Leftrightarrow B$, 则$\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$

等值演算的基础:

(1) 等值关系的性质：自反、对称、传递

(2) 基本的等值式

(3) 置换规则

应用举例——证明两个公式等值

例1 证明 $p\rightarrow(q\rightarrow r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\rightarrow r$

证 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$

$\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee r)$ （蕴涵等值式，置换规则）

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （结合律，置换规则）

$\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\vee r$ （德·摩根律，置换规则）

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\rightarrow r$ （蕴涵等值式，置换规则）

说明:也可以从右边开始演算（请做一遍）

因为每一步都用置换规则，故可不写出

熟练后，基本等值式也可以不写出

应用举例——证明两个公式不等值

例2 证明: $p\to(q\to r) \nLeftrightarrow (p\to q)\to r$

用等值演算不能直接证明两个公式不等值,证明两个公式不等值的基本思想是找到一个赋值使一个公式成真,另一个公式成假.

方法一 真值表法（自己证）

方法二 观察赋值法. 容易看出000, 010等是左边的的成真赋值，是右边的成假赋值.

方法三 用等值演算先化简两个公式，再观察.

应用举例——判断公式类型

例3 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q\wedge\neg(p\to q)$

(2) $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

应用举例——判断公式类型

例3 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$

解 $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$

$\Leftrightarrow q \wedge \neg(\neg p \vee q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow q \wedge (p \wedge \neg q)$ （德·摩根律）

$\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \neg q)$ （交换律，结合律）

$\Leftrightarrow p \wedge 0$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0$ （零律）

由最后一步可知，该式为矛盾式.

例3 (续)

(2) $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

解 $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(q\vee\neg p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ （交换律）

$\Leftrightarrow 1$

由最后一步可知，该式为重言式.

问：最后一步为什么等值于1?

例3 (续)

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

解 $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$ （分配律）

$\Leftrightarrow p\wedge 1\wedge r$ （排中律）

$\Leftrightarrow p\wedge r$ （同一律）

这不是矛盾式，也不是重言式，而是非重言式的可满足式. 如101是它的成真赋值, 000是它的成假赋值.

总结：A为矛盾式当且仅当$A\Leftrightarrow 0$

A为重言式当且仅当$A\Leftrightarrow 1$

说明：演算步骤不惟一, 应尽量使演算短些

应用举例4

- We know that Bill, Jim and Sam are from Boston, Chicago and Detroit, respectively. Each of following sentence is half right and half wrong:

- **Bill is from Boston, and Jim is from Chicago. Sam is from Boston, and Bill is from Chicago. Jim is from Boston, and Bill is from Detroit.**

- Tell the truth about their home town.

- **Bill is from Boston, and Jim is from Chicago. Sam is from Boston, and Bill is from Chicago. Jim is from Boston, and Bill is from Detroit.**

- **We set :**
  p1 = Bill is from Boston
  p2 = Jim is from Chicago.
  p3 = Sam is from Boston
  p4 = Bill is from Chicago.
  p5 = Jim is from Boston
  p6 = Bill is from Detroit.

- **So, We have:**
  $((p1\wedge\neg p2)\vee(\neg p1\wedge p2))\wedge((p3\wedge\neg p4)\vee(\neg p3\wedge p4))\wedge((p5\wedge\neg p6)\vee(\neg p5\wedge p6))$ 应该是可满足的

p1 = Bill is from Boston
p2 = Jim is from Chicago.
p3 = Sam is from Boston
p4 = Bill is from Chicago.
p5 = Jim is from Boston
p6 = Bill is from Detroit.

- $((p1 \wedge \neg p2) \vee (\neg p1 \wedge p2)) \wedge ((p3 \wedge \neg p4) \vee (\neg p3 \wedge p4))$
  $\Leftrightarrow (((p1 \wedge \neg p2) \vee (\neg p1 \wedge p2)) \wedge (p3 \wedge \neg p4)) \vee$
  $(((p1 \wedge \neg p2) \vee (\neg p1 \wedge p2)) \wedge (\neg p3 \wedge p4))$
  $\Leftrightarrow (p1 \wedge \neg p2 \wedge p3 \wedge \neg p4) \vee (\neg p1 \wedge p2 \wedge p3 \wedge \neg p4) \vee (p1 \wedge \neg p2 \wedge \neg p3 \wedge p4) \vee (\neg p1 \wedge p2 \wedge \neg p3 \wedge p4))$
  $\Leftrightarrow 0 \vee (\neg p1 \wedge p2 \wedge p3 \wedge \neg p4) \vee 0 \vee 0$
  $\Leftrightarrow \neg p1 \wedge p2 \wedge p3 \wedge \neg p4$
- 继续:
  $(\neg p1 \wedge p2 \wedge p3 \wedge \neg p4) \wedge ((p5 \wedge \neg p6) \vee (\neg p5 \wedge p6))$
  $\Leftrightarrow (\neg p1 \wedge p2 \wedge p3 \wedge \neg p4 \wedge \neg p5 \wedge p6)$ 可满足
  So, Jim is from Chicago, Sam is from Boston, and Bill is from Detroit.

1.4 范式

- 析取范式与合取范式

- 主析取范式与主合取范式

析取范式与合取范式

文字:命题变项及其否定的总称

简单析取式:有限个文字构成的析取式

如 $p, \neg q, p\vee\neg q, p\vee q\vee r, \ldots$

简单合取式:有限个文字构成的合取式

如 $p, \neg q, p\wedge\neg q, p\wedge q\wedge r, \ldots$

析取范式:由有限个简单合取式组成的析取式

$A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_r$, 其中$A_1,A_2,\ldots,A_r$是简单合取式

合取范式:由有限个简单析取式组成的合取式

$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_r$, 其中$A_1,A_2,\ldots,A_r$是简单析取式

析取范式与合取范式(续)

范式:析取范式与合取范式的总称

公式A的析取范式: 与A等值的析取范式

公式A的合取范式: 与A等值的合取范式

说明:

单个文字既是简单析取式，又是简单合取式

$p\wedge\neg q\wedge r$, $\neg p\vee q\vee\neg r$既是析取范式，又是合取范式

(为什么?)

命题公式的范式

定理 任何命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式.

求公式A的范式的步骤:

(1) 消去A中的$\rightarrow$, $\leftrightarrow$（若存在）

(2) 否定联结词$\neg$的内移或消去

(3) 使用分配律

$\wedge$对$\vee$分配（析取范式）

$\vee$对$\wedge$分配（合取范式）

公式的范式存在，但不惟一

求公式的范式举例

例 求下列公式的析取范式与合取范式

(1) $A=(p\to\neg q)\vee\neg r$

解 $(p\to\neg q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee\neg r$ （消去→）

$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee\neg r$ （结合律）

这既是A的析取范式（由3个简单合取式组成的析取式），又是A的合取范式（由一个简单析取式组成的合取式）

求公式的范式举例(续)

(2) $B=(p\to\neg q)\to r$

解 $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\to r$ （消去第一个→）

$\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （消去第二个→）

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee r$ （否定号内移——德·摩根律）

这一步已为析取范式（两个简单合取式构成）

继续： $(p\wedge q)\vee r$

$\Leftrightarrow(p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （∨对∧分配律）

这一步得到合取范式（由两个简单析取式构成）

极小项与极大项

定义 在含有n个命题变项的简单合取式(简单析取式)中，若每个命题变项均以文字的形式出现且仅出现一次，称这样的简单合取式(简单析取式)为极小项(极大项)．

说明：

- n个命题变项产生2^n个极小项和2^n个极大项
- 2^n个极小项（极大项）均互不等值
- 在极小项和极大项中文字均按下标或字母顺序排列
- 用m_i表示第i个极小项，其中i是该极小项成真赋值的十进制表示. 用M_i表示第i个极大项，其中i是该极大项成假赋值的十进制表示, $m_i(M_i)$称为极小项(极大项)的名称.
- m_i与M_i的关系： $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$， $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

极小项与极大项(续)

由p, q两个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

由p, q, r三个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

主析取范式与主合取范式

主析取范式：由极小项构成的析取范式

主合取范式：由极大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变项为p, q, r时，

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ 是主析取范式

$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1\wedge M_5$ 是主合取范式

A的主析取范式：与A等值的主析取范式

A的主合取范式：与A等值的主合取范式.

主析取范式与主合取范式(续)

定理 任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式, 并且是唯一的.

用等值演算法求公式的主范式的步骤:

(1) 先求析取范式（合取范式）

(2) 将不是极小项（极大项）的简单合取式（简单析取式）化成与之等值的若干个极小项的析取（极大项的合取），需要利用同一律（零律）、排中律（矛盾律）、分配律、幂等律等.

(3) 极小项（极大项）用名称m_i（M_i）表示，并按角标从小到大顺序排序.

求公式的主范式

例 求公式 $A=(p\to\neg q)\to r$ 的主析取范式与主合取范式.

(1) 求主析取范式

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$,　　（析取范式）　①

$(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_6\vee m_7$,　　②

求公式的主范式(续)

$$r$$

$$\Leftrightarrow(\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$$

$$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7 \qquad ③$$

②, ③代入①并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$（主析取范式）

求公式的主范式(续)

(2) 求A的主合取范式

$(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$,　　（合取范式）　①

$p\vee r$

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2,$　②

求公式的主范式(续)

$$
\begin{aligned}
& q \vee r \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge \neg p) \vee q \vee r \\
\Leftrightarrow\ & (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & M_0 \wedge M_4 \qquad \text{③}
\end{aligned}
$$

②, ③代入①并排序，得

$(p \to \neg q) \to r \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$ （主合取范式）

主范式的用途——与真值表相同

(1) 求公式的成真赋值和成假赋值

例如 $(p \to \neg q) \to r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$，

其成真赋值为**001, 011, 101, 110, 111**，

其余的赋值 **000, 010, 100**为成假赋值.

类似地，由主合取范式也可立即求出成假赋值和成真赋值.

主范式的用途(续)

(2) 判断公式的类型

设A含n个命题变项，则

A为重言式$\Leftrightarrow A$的主析取范式含2^n个极小项

$\Leftrightarrow A$的主合取范式为1.

A为矛盾式$\Leftrightarrow A$的主析取范式为0

$\Leftrightarrow A$的主合取范式含2^n个极大项

A为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow A$的主析取范式中至少含一个且不含全部极小项

$\Leftrightarrow A$的主合取范式中至少含一个且不含全部极大项

主范式的用途(续)

(3) 判断两个公式是否等值

例 用主析取范式判断下述两个公式是否等值：

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\wedge q)\to r$

(2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

解 $p\to(q\to r) = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\to r = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\to q)\to r = m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

故(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.

主范式和真值表之间的关系

说明：

公式A的真值表和A的主范式之间可以相互转换.

思考：如何转换？

主范式和真值表之间的关系

说明：

公式A的主析取范式和主合取范式之间可以相互转换.

思考：怎么转换？

m_i与M_i的关系：$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$

假设命题公式A含有n个命题变项，且$A \Leftrightarrow m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \ldots \vee m_{i_k}$，则$\neg A$的主析取范式中必定含有剩余的$2^n$-k个极小项。

即$\neg A \Leftrightarrow m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \ldots \vee m_{j_{2^n-k}}$

$A \Leftrightarrow \neg\neg A$

$\Leftrightarrow \neg m_{j_1} \wedge \neg m_{j_2} \wedge \ldots \wedge \neg m_{j_{2^n-k}}$

$\Leftrightarrow M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \ldots \wedge M_{j_{2^n-k}}$

$A \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_5 \vee m_7$

$\Leftrightarrow M_2 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_6$

主范式的用途(续)

例 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习.选派必须满足以下条件：

(1)若赵去，钱也去；

(2)李、周两人中至少有一人去；

(3)钱、孙两人中有一人去且仅去一人；

(4)孙、李两人同去或同不去；

(5)若周去，则赵、钱也去.

试用主析取范式法分析该公司如何选派他们出国？

例 (续)

解此类问题的步骤为：

① 将简单命题符号化

② 写出各复合命题

③ 写出由②中复合命题组成的合取式

④ 求③中所得公式的主析取范式

例 (续)

解 ① 设p：派赵去，q：派钱去，r：派孙去，

s：派李去，u：派周去.

② (1) $(p\to q)$

(2) $(s\vee u)$

(3) $((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))$

(4) $((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))$

(5) $(u\to(p\wedge q))$

(1) 若赵去，钱也去；
(2) 李、周两人中至少有一人去；
(3) 钱、孙两人中有一人去且仅去一人；
(4) 孙、李两人同去或同不去；
(5) 若周去，则赵、钱也去.

③ (1) ~ (5)构成的合取式为

$$A=(p\to q)\wedge(s\vee u)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))\wedge((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))\wedge(u\to(p\wedge q))$$

例 (续)

④ $A \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$

结论：由④可知，*A*的成真赋值为00110和11001，因而派孙、李去（赵、钱、周不去）或派赵、钱、周去（孙、李不去）.

*A*的演算过程如下：

$A \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge (s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q)) \wedge$
$((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))$ （交换律）

$B_1 = (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$

$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r))$ （分配律）

例 (续)

$B_2 = (s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q))$

$\Leftrightarrow ((s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge u))$ （分配律）

$B_1 \wedge B_2 \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u)$

$\vee (q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge u)$

再令 $B_3 = ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))$

得 $A \Leftrightarrow B_1 \wedge B_2 \wedge B_3$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$

注意：在以上演算中多次用矛盾律

要求：自己演算一遍