2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

- 等值式
- 基本等值式

  量词否定等值式

  量词辖域收缩与扩张等值式

  量词分配等值式
- 前束范式

等值式与基本等值式

定义 A和B是一阶逻辑中的公式，若$A \leftrightarrow B$为逻辑有效式，则称A与B是等值的，记作 $A \Leftrightarrow B$，并称$A \Leftrightarrow B$为等值式.

基本等值式:

命题逻辑中24个等值式及其代换实例

如，$\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y) \Leftrightarrow \neg \forall x F(x) \vee \exists y G(y)$

$\neg(\forall x F(x) \vee \exists y G(y)) \Leftrightarrow \neg \forall x F(x) \wedge \neg \exists y G(y)$ 等值

消去量词等值式 设$D=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$

$\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$

$\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n)$

基本的等值式(续)

量词否定等值式

设$A(x)$是含x自由出现的公式

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

例

例 将下面命题用两种形式符号化

(1) 没有不犯错误的人

(2) 不是所有的人都爱看电影

解 (1) 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：x犯错误.

$$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

$$\Leftrightarrow\forall x\neg(F(x)\wedge\neg G(x))$$

$$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

(2) 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：爱看电影.

$$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow\exists x\neg(F(x)\rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

基本等值式(续)

量词辖域收缩与扩张等值式

设$A(x)$是含x自由出现的公式，B中不含x的出现

关于全称量词的:

$\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$

$\forall x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge B$

$\forall x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\rightarrow B$

$\forall x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$

关于存在量词的:

$\exists x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B$

$\exists x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B$

$\exists x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow B$

$\exists x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$

基本的等值式(续)

量词分配等值式

$$\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$$

$$\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$$

注意：$\forall$对$\vee$无分配律，$\exists$对$\wedge$无分配律, 即

$$\forall x(A(x)\vee B(x))\not\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$$

$$\exists x(A(x)\wedge B(x))\not\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$$

用谓词公式F(x)，G(x)分别代替A(x)，B(x)
只要证明$\forall x(F(x)\vee G(x))$和$\forall xF(x)\vee\forall xG(x)$不等值，
$\exists x(F(x)\wedge G(x))$和$\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)$不等值，即可。
取解释I为：个体域D为N，F(x)：x是奇数，G(x)：x是偶数。此时
$\forall x(F(x)\vee G(x))$为真，但是$\forall xF(x)\vee\forall xG(x)$为假
$\exists x(F(x)\wedge G(x))$为假，但是$\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)$为真

基本的等值式(续)

$A(x,y)$是含x,y自由出现的谓词公式

$\forall x \forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$

$\exists x \exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$

前束范式

定义 设A为一个一阶逻辑公式, 若A具有如下形式 $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$, 则称$A$为前束范式, 其中$Q_i$ $(1\le i\le k)$为$\forall$或$\exists$，B为不含量词的公式.

例如，$\forall x\exists y(F(x)\rightarrow(G(y)\wedge H(x,y)))$

$\forall x\neg(F(x)\wedge G(x))$

是前束范式, 而

$\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$

$\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$

不是前束范式.

换名规则

换名规则：将量词辖域中出现的某个约束出现的个体变项及对应的指导变项，改成其他辖域中未曾出现过的个体变项符号，公式中其余部分不变，则所得公式与原来的公式等值.

$$\forall xF(x) \to G(x, y)$$

$$\forall zF(z) \to G(x, y)$$

公式的前束范式

定理（前束范式存在定理）一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式

求前束范式：使用重要等值式、置换规则、换名规则进行等值演算.

例 求下列公式的前束范式

(1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

解

$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x)\vee\neg F(x))$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$

两步结果都是前束范式，说明前束范式不惟一.

例(续)

(2) $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

解 $\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$ （量词分配等值式）

或者

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall y\neg G(y)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$ (量词辖域扩张)

例(续)

(3) $\exists xF(x)\vee\neg\forall xG(x)$

解 $\Leftrightarrow\exists xF(x)\vee\exists x\neg G(x)$

$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\vee\neg G(x))$

或 $\Leftrightarrow\exists xF(x)\vee\neg\forall yG(y)$

$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\vee\exists y\neg G(y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(F(x)\vee\neg G(y))$

(4) $\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$

解 $\Leftrightarrow\forall zF(z)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$

$\Leftrightarrow\exists z\exists y(F(z)\rightarrow(G(x,y)\wedge\neg H(y)))$

例(续)

(5) $\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,z)))$

解 $\Leftrightarrow\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists u(G(x,u)\wedge H(x,z)))$

$\Leftrightarrow\forall x\exists u(F(x,y)\rightarrow G(x,u)\wedge H(x,z)))$

注意：∀与∃不能颠倒

【例 2.14】 求下列各式的前束范式.

(1) $\forall xF(x) \land \neg \exists xG(x)$.

(2) $\forall xF(x) \lor \neg \exists xG(x)$.

(3) $\forall xF(x) \land \exists xG(x)$.

(4) $\forall xF(x) \to \exists xG(x)$.

(5) $\exists xF(x) \to \forall xG(x)$.

(6) $\forall xF(x) \to \exists yG(y)$.

(7) $(\forall xF(x,y) \to \exists yG(y)) \to \forall xH(x,y)$.

(8) $(\forall xF(x,y) \lor \forall yG(x,y)) \land \exists zH(x,y,z)$.

(2) $\forall xF(x) \vee \neg \exists xG(x)$.

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall x \neg G(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall y \neg G(y)$ （换名规则）

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \vee \forall y \neg G(y))$ （辖域扩张等值式）

$\Leftrightarrow \forall x \forall y(F(x) \vee \neg G(y))$ （辖域扩张等值式）

$\Leftrightarrow \forall x \forall y(G(y) \rightarrow F(x))$.

(3) $\forall xF(x) \wedge \exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \exists yG(y)$ （换名规则）

$\Leftrightarrow \forall x \exists y(F(x) \wedge G(y))$.

(4) $\forall xF(x) \rightarrow \exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \rightarrow \exists yG(y)$ （换名规则）

$\Leftrightarrow \exists x(F(x) \rightarrow \exists yG(y))$ （辖域扩张等值式）

$\Leftrightarrow \exists x \exists y(F(x) \rightarrow G(y))$. （辖域扩张等值式）

$$(5)\quad \exists xF(x)\to\forall xG(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists yF(y)\to\forall xG(x) \qquad \text{(换名规则)}$$

$$\Leftrightarrow \forall y(F(y)\to\forall xG(x)) \qquad \text{(辖域扩张等值式)}$$

$$\Leftrightarrow \forall y\forall x(F(y)\to G(x)). \qquad \text{(辖域扩张等值式)}$$

$$(6)\quad \forall xF(x)\to\exists yG(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(F(x)\to\exists yG(y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\to G(y)).$$

$$(7)\ (\forall xF(x,y)\to\exists y\,G(y))\to\forall xH(x,y).$$

$$\Leftrightarrow(\forall xF(x,y)\to\exists tG(t))\to\forall wH(w,y) \qquad \text{(换名规则)}$$

$$\Leftrightarrow \exists x\exists t(F(x,y)\to G(t))\to\forall wH(w,y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x\forall t\forall w((F(x,y)\to G(t))\to H(w,y)).$$

苏格拉底三段论的正确性

“凡是人都要死的. 苏格拉底是人. 所以苏格拉底是要死的.”

设$F(x)$：x是人，$G(x)$：x是要死的，a：苏格拉底.

$$\forall x(F(x)\to G(x))\land F(a)\to G(a)$$

设前件为真，即$\forall x(F(x)\to G(x))$与$F(a)$都为真.

由于$\forall x(F(x)\to G(x))$为真，故$F(a)\to G(a)$为真.

由$F(a)$ 与$F(a)\to G(a)$为真，根据假言推理得证$G(a)$为真.