第6章 特殊的图

6.1 二部图

6.2 欧拉图

6.3 哈密顿图

6.4 平面图

6.1 二部图

- 二部图
- 完全二部图
- 匹配

  极大匹配,最大匹配,完美匹配,完备匹配
- **Hall定理**

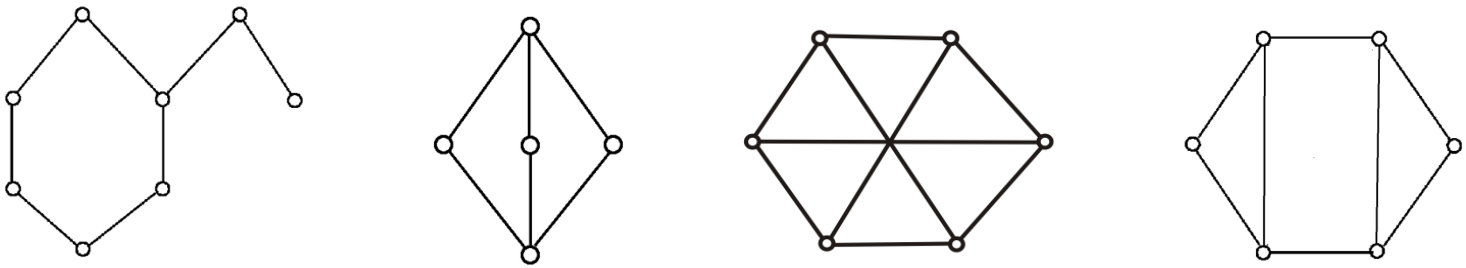
二部图

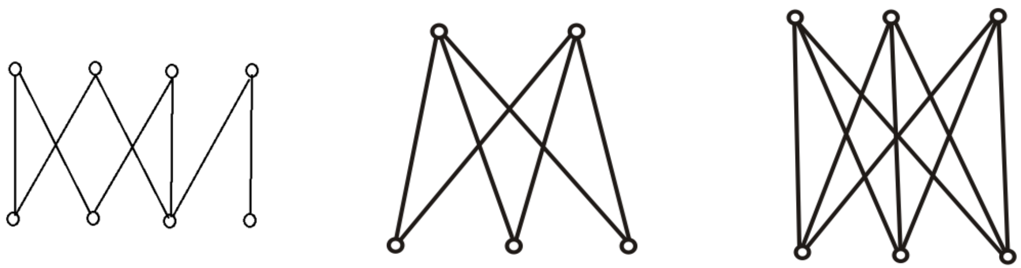
定义 设无向图 $G=<V,E>$, 若能将V 划分成V_1 和 V_2 ($V_1 \cup V_2=V$, $V_1 \cap V_2=\varnothing$), 使得G中的每条边的两个端点都一个属于V_1, 另一个属于V_2, 则称G为二部图, 记为$<V_1,V_2,E>$, 称V_1和V_2为互补顶点子集. 又若G是简单图, 且V_1中每个顶点都与V_2中每个顶点相邻, 则称G为完全二部图（完全偶图）, 记为$K_{r,s}$, 其中 $r=|V_1|$, $s=|V_2|$.

注意: n 阶零图为二部图.

二部图(续)

例 下述各图是否是二部图?





不是

定理 无向图$G=<V,E>$是二部图当且仅当G中无奇圈

定理 无向图G=<V,E>是二部图当且仅当G中无奇圈

必要性：

若G中无回路，结论显然成立。若G中有回路，只需证明G中无奇圈。设C是G中任意一圈，令$C = v_{i_1}v_{i_2}\ldots v_{i_l}v_{i_1}$，易知$l \geq 2$，不妨设$v_{i_1} \in V_1$，则必有$v_{i_l} \in V - V_1 = V_2$，所以$l$必为偶数，于是$C$为偶圈，由$C$的任意性可知结论成立。

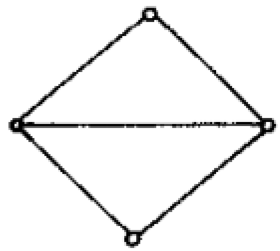
定理 无向图$G=<V,E>$是二部图当且仅当G中无奇圈

充分性：

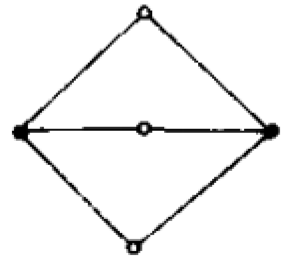
不妨设G为连通图，否则可以对每个连通分支进行讨论，孤立点可以根据需要分别属于V_1和V_2。设v_0为G中任意一个顶点，令$V_1=\{v|v\in V(G)\wedge d(v_0,v)是偶数\}$，$V_2=\{v|v\in V(G)\wedge d(v_0,v)是奇数\}$。易知$V_1\neq\emptyset$，$V_2\neq\emptyset$，$V_1\cap V_2=\emptyset$。

下面只要证明V_1中任意两个顶点不相邻，V_2中任意两个顶点也不相邻。若存在v_i，$v_j\in V_1$相邻，令$e=(v_i,v_j)$，设v_0到v_i，v_j的短程线（v_0到v_i，v_j最短通路）分别为Γ_i，Γ_j，则它们的长度$d(v_0,v_i)$，$d(v_0,v_j)$，都是偶数。

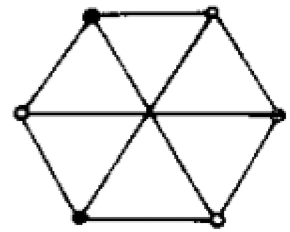
于是$\Gamma_i\cup\Gamma_j\cup e$中一定含有路径长度为奇数的圈，这与已知条件矛盾。类似可证明V_2中也不存在相邻的顶点。得证G为二部图。



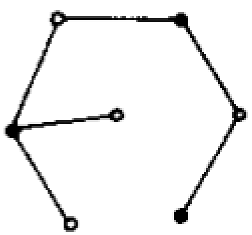
(1)



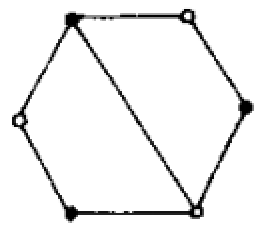
(2)



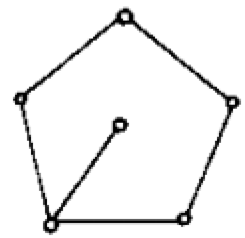
(3)



(4)



(5)



(6)

匹配

设$G=<V,E>$,

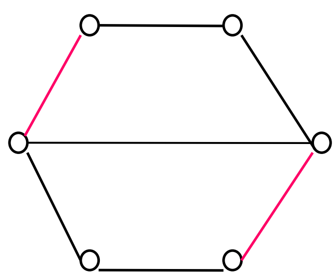
匹配(边独立集): 任2条边均不相邻的E的子集M

极大匹配: 添加任一条边后都不再是匹配的匹配

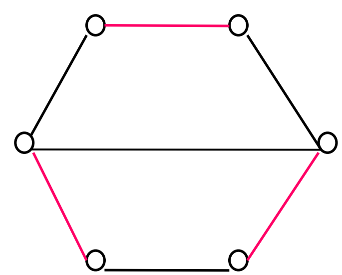
最大匹配: 边数最多的匹配

匹配数: 最大匹配中的边数, 记为β_1

例



极大匹配



最大匹配 $\beta_1=3$

匹配 (续)

设M为G中一个匹配

v_i与v_j被M匹配: $(v_i,v_j)\in M$

v为M饱和点: M中有边与v关联

v为M非饱和点: M中没有边与v关联

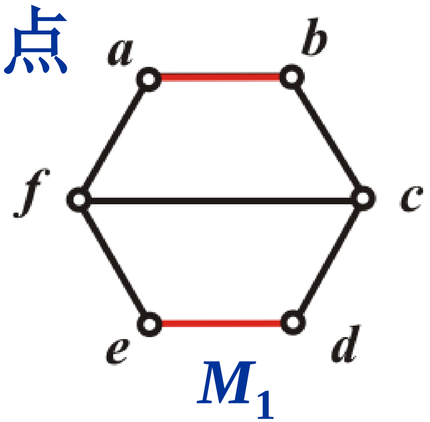
M为完美匹配: G的每个顶点都是M饱和点

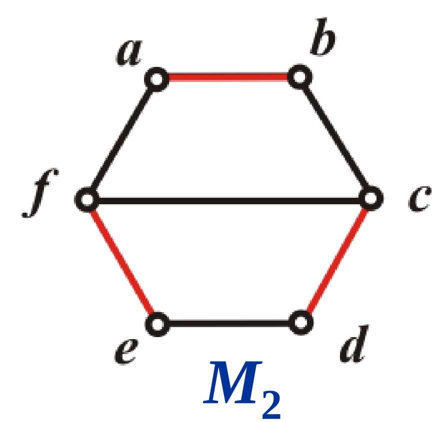
例 关于M_1, a,b,e,d是饱和点

f,c是非饱和点

M_1不是完美匹配

M_2是完美匹配





匹配 (续)

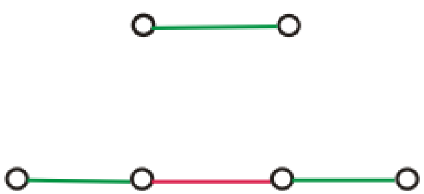
设M为$G=<V,E>$中一个匹配

M的交错路径:从M与$E-M$中交替取边构成的G中路径

M的可增广交错路径:起、终点都是M非饱和点的交错路径

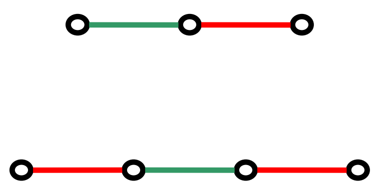
M的交错圈:由M与$E-M$中的边交替出现构成的G中圈

设红色边为匹配M中



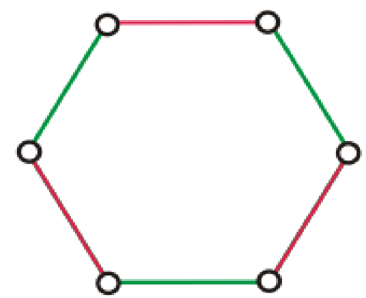
(1)

均可增广



(2)

均不可增广



(3)

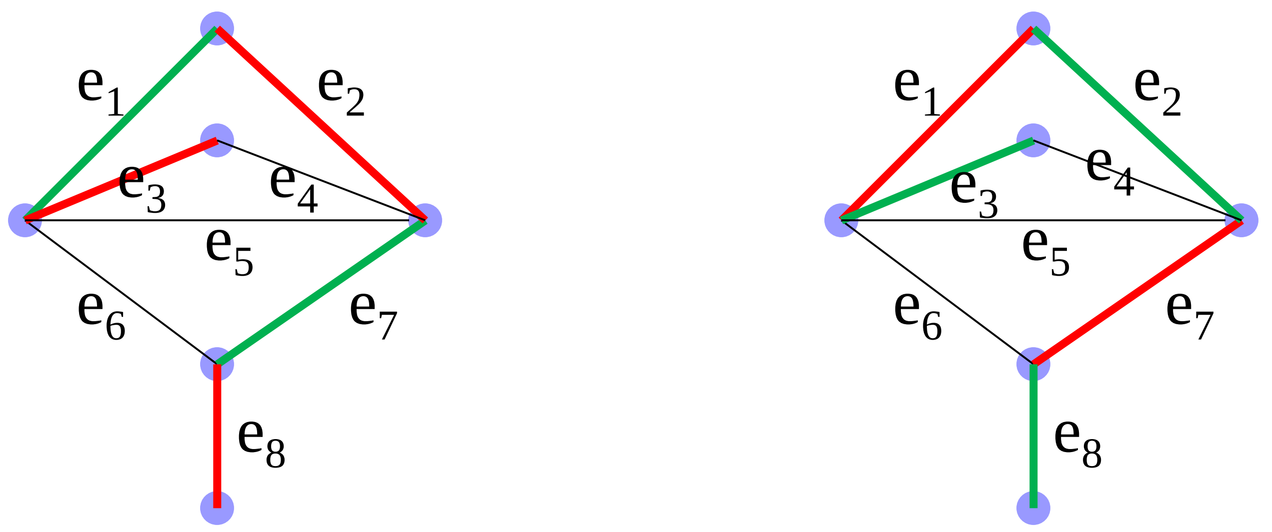
交错圈

匹配 (续)

交错路径：在匹配中和在匹配外交替取边的路径

可增广交错路径：两端都是非饱和点的交错路径

例: $e_3\, e_1\, e_2\, e_7\, e_8$ $e_3\, e_1\, e_2\, e_7\, e_8$



匹配 (续)

定理：设M_1,M_2是G中2个不同匹配, 则$G[M_1 \oplus M_2]$的每个连通分支是M_1和M_2中的边组成的交错圈或交错路径

证：设G_1是$G[M_1 \oplus M_2]$的任一连通分支，$\forall v \in V(G_1)$,

$$0 < d_{G_1}(v) = d_{G[M_1 \oplus M_2]}(v) \le 2,$$

即

$$d_{G_1}(v) = 1 \text{ 或 } 2,$$

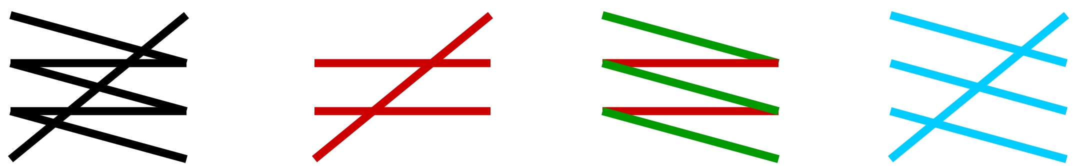
所以G_1是交错圈或交错路径

匹配 (续)

定理：设$\boldsymbol{M}$是$\boldsymbol{G}$中匹配, $\boldsymbol{\Gamma}$是$\boldsymbol{M}$的可增广交错路径, 则

$$\boldsymbol{M'} = \boldsymbol{M} \oplus \boldsymbol{\Gamma}$$

也是$\boldsymbol{G}$中匹配, 且 $|\boldsymbol{M'}| = |\boldsymbol{M}| + \mathbf{1}$



Berge定理： $\boldsymbol{M}$为$\boldsymbol{G}$中最大匹配当且仅当$\boldsymbol{G}$中不含$\boldsymbol{M}$的可增广交错路径

证明：必要性

设$\boldsymbol{M}$为$\boldsymbol{G}$中最大匹配，若$\boldsymbol{G}$中存在$\boldsymbol{M}$的可增广的交错路径$\boldsymbol{\Gamma}$，则$\boldsymbol{\Gamma}$中在$\boldsymbol{M}$中的边比不在$\boldsymbol{M}$中的少$\mathbf{1}$.

设$\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} \oplus \boldsymbol{\Gamma}$，则$\boldsymbol{M}'$中边彼此不邻，且$\boldsymbol{M}'$比$\boldsymbol{M}$多一条边，即$\boldsymbol{M}'$是比$\boldsymbol{M}$多一条边的匹配，这与$\boldsymbol{M}$是最大匹配相矛盾，所以$\boldsymbol{M}$不含可增广的交错路径

Berge定理： M为G中最大匹配当且仅当G中不含M的可增广交错路径

证明：充分性

设M是G中不含可增广交错路径的匹配，M_1是G中的最大匹配，只要证明$|M| = |M_1|$。

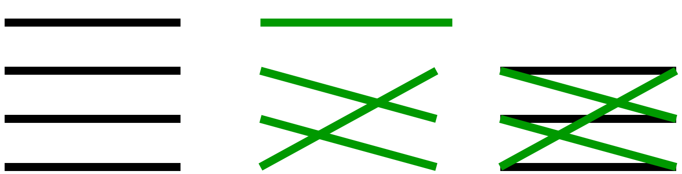
为此,考虑$M_1 \oplus M$的导出子图，设$H = G[M_1 \oplus M]$。

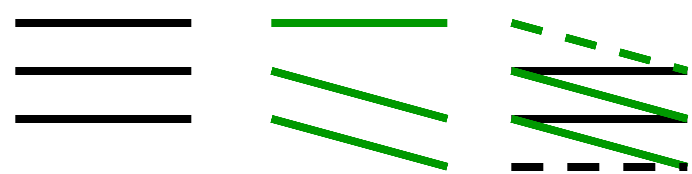
(1)当$H = \emptyset$(空图)时，$M = M_1$，于是M为G中最大匹配。

(2)若$H \neq \emptyset$，由于M和M_1都是匹配，所以H各连通分支

Ⅰ.是由M和M_1中的边组成的交错圈。在交错圈上M和M_1中的边数相等，

Ⅱ.为由M和M_1中的边组成的交错路径。由已知条件可知M不含可增广的交错路径，M_1是最大匹配，由必要性可知，M_1中也无可增广的交错路径，于是在M和M_1组成的交错路径上，M和M_1的边也相等，总之M与M_1边的个数相同，所以M为最大匹配。

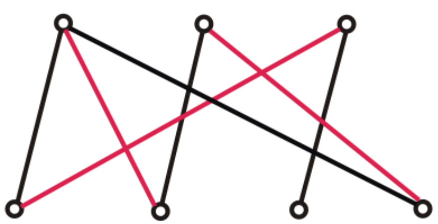




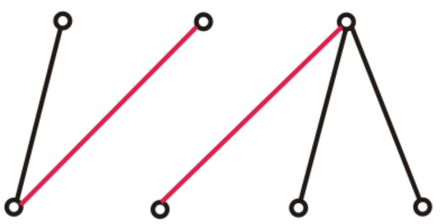
二部图中的匹配

定义 设$G=<V_1,V_2,E>$为二部图, $|V_1|\le|V_2|$, M是G中最大匹配, 若V_1中顶点全是M饱和点, 则称M为G中V_1到V_2的完备匹配. 当$|V_1|=|V_2|$时, 完备匹配变成完美匹配.

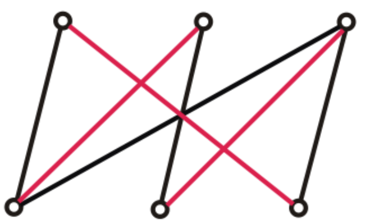
例



完备,不完美



不完备



完美

Hall定理

定理(Hall定理) 设二部图$G=<V_1,V_2,E>$中，$|V_1|\le|V_2|$. G中存在从V_1到V_2的完备匹配当且仅当V_1中任意k 个顶点至少与V_2中的k个顶点相邻(k=1,2,…,$|V_1|$). —相异性条件

由Hall定理, 上一页第2个图没有完备匹配.

定理 设二部图$G=<V_1,V_2,E>$中, 如果存在$t\ge1$, 使得V_1中每个顶点至少关联 t 条边, 而V_2中每个顶点至多关联t条边，则G中存在V_1到V_2的完备匹配. —t 条件

证 V_1中任意k个顶点至少关联kt条边, 这kt条边至少关联V_2中的k个顶点, 即V_1中任意k个顶点至少邻接V_2中的k个顶点. 由Hall定理, G中存在V_1到V_2的完备匹配.

定理(Hall定理) 设二部图$G=<V_1,V_2,E>$中，$|V_1|\le|V_2|$. G中存在从V_1到V_2的完备匹配当且仅当V_1中任意k 个顶点至少与V_2中的k个顶点相邻($k=1,2,\ldots,|V_1|$). ——相异性条件

证明：定理的必要性显然。下面证明充分性。

即证明只要满足相异性条件，G中最大匹配一定是完备匹配。

设M为G中一个最大匹配。若M不是完备匹配，必存在$v_x\in V_1$为M的非饱和点。

且必存在$e\in E_1=E-M$与v_x关联，否则v_x将是孤立点，这与相异性条件矛盾。

并且V_2中与v_x相邻的顶点都是M饱和点，若存在$v_y\in V_2$(与v_x相邻)为非饱和点，则$M'=M\cup(v_x,v_y)$也是匹配，这显然与M为最大匹配矛盾。

考虑从v_x出发的尽可能长的所有交错路径，由于M是最大匹配，又由$Berge$定理可知，这些交错路径都不是可增广的，即每条路径异于v_x的端点一定是M饱和点，于是这些端点全在V_1中，

令$S=\{v|v\in V_1\wedge v$在从v_x出发的交错路径上$\}$，$T=\{v|v\in V_2\wedge v$在从v_x出发的交错路径上$\}$，由于各条交错路径的两个端点全在S中，所以$|S|=|T|+1$。

这正说明V_1中$|T|+1$个顶点只与V_2中T个顶点相邻，这矛盾于相异性条件，因而V_1中不可能存在M非饱和点，故M是完备匹配。

某中学有3个课外活动小组：数学组，计算机组和生物组．今有赵、钱、孙、李、周5名学生．已知：

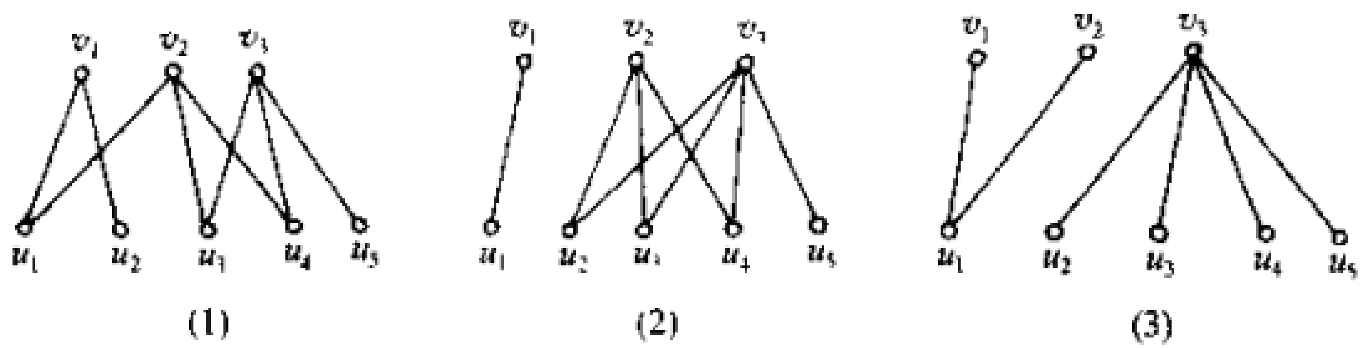
(1) 赵、钱为数学组成员，赵、孙、李为计算机组成员，孙、李、周为生物组成员；

(2) 赵为数学组成员，钱、孙、李为计算机组成员，钱、孙、李、周为生物组成员；

(3) 赵为数学组和计算机组成员，钱、孙、李、周为生物组成员．

问在以上3种情况下，能否选出3名不兼职的组长？

解 用 v_1, v_2, v_3 分别表示数学组、计算机组和生物组．u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 分别表示赵、钱、孙、李、周．若 u_i 是 v_j 的成员，就在 u_i 与 v_j 之间连边．每种情况都对应一个二部图，见图



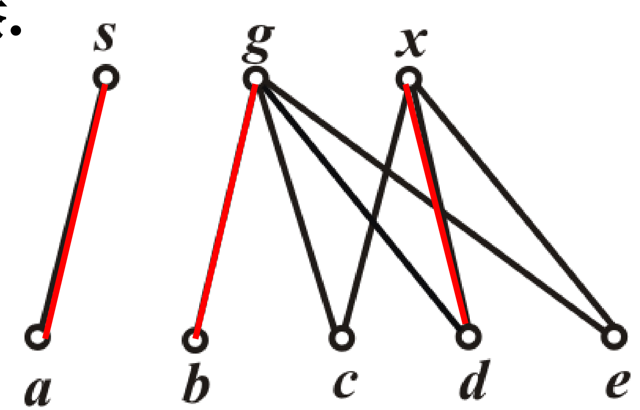
一个应用实例

例 某课题组要从*a*, *b*, *c*, *d*, *e* 5人中派3人分别到上海、广州、香港去开会. 已知*a*只想去上海，*b*只想去广州，*c*, *d*, *e*都表示想去广州或香港. 问该课题组在满足个人要求的条件下，共有几种派遣方案？

解 令$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$, 其中$V_1=\{s, g, x\}$, $V_2=\{a, b, c, d, e\}$,

$E=\{(u,v) \mid u\in V_1, v\in V_2, v\text{想去}u\}$,

其中*s*, *g*, *x*分别表示上海、广州和香港.



G 满足相异性条件，红边是一个完备匹配, 对应的派遣方案:

a–上海, b–广州, d–香港

现有4名教师，张、王、李、赵，要求他们去教4门课程：数学、物理、电工和计算机基础。已知张能胜任数学和计算机基础，王能胜任物理和电工，李能胜任数学、物理和电工;而赵只能胜任电工。如何安排，才能使每位教师都能教一门自己能胜任的课程？并且每门课都有人教。用定理说明原因，并讨论有几种安排方案。

解：作二部图，令$\boldsymbol{V_1 = \{\ldots\}}$，$\boldsymbol{V_2 = \{\ldots\}}$，$\boldsymbol{E = \{\ldots\}\ldots}$

n位教员要教n门课程，已知每个教员至少能教两门课程，而每门课程至多有两位教员能教，问能否每个教员教一门课而每门课都有人教？用定理说明原因。

解：作二部图，令$\boldsymbol{V_1 = \{\ldots\}}$，$\boldsymbol{V_2 = \{\ldots\}}$，$\boldsymbol{E = \{\ldots\}\ldots}$

完全二部图$\boldsymbol{K_{r,s}}$中，存在多少个不同的完备匹配，其中$\mathbf{1} \le \boldsymbol{r} \le \boldsymbol{s}$。

解：设$\boldsymbol{K_{r,s}} =< \boldsymbol{V_1}, \boldsymbol{V_2}, \boldsymbol{E} >$，其中$\boldsymbol{V_1} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots \boldsymbol{v_r}\}$，$\boldsymbol{V_2} = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots \boldsymbol{u_s}\}$。

$\boldsymbol{v_1}$有$\boldsymbol{s}$种选法选自己的匹配，$\boldsymbol{v_2}$有$\boldsymbol{s} - \mathbf{1}$种选法选自己的匹配…$\boldsymbol{v_r}$有$\boldsymbol{s} - \boldsymbol{r} + \mathbf{1}$种选法选自己的匹配。

于是在$\boldsymbol{K_{r,s}}$中共有$\boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{s} - \mathbf{1}) \times \cdots \times (\boldsymbol{s} - \boldsymbol{r} + \mathbf{1}) = \frac{\boldsymbol{s}!}{(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r})!}$种完备匹配。

证明：在国际象棋棋盘的一条主对角线上移去两端的1×1方格后，所得棋盘不能用1×2的长方形恰好填满 。

证：设$G=<V_1, V_2, E>$为二部图，若G中存在完美匹配，则$|V_1| = |V_2|$。记此命题为(*)。

在去掉主对角线两端的1×1方格（设为白格）后，棋盘的每个格内放置一个顶点，做二部图$G=<V_1, V_2, E>$，其中

$$V_1 = \{v|v\text{位于白格}\}，V_2 = \{v|v\text{位于黑格}\}$$

$$E = \{(u,v)|u \in V_1 \wedge v \in V_2 \wedge u,v\text{所在方格相邻}\}$$

则$|V_1| = 30$，$|V_2| = 32$。

易知，所得棋盘能用1×2的长方形恰好填满，当且仅当G中存在完美匹配，但$|V_1| \neq |V_2|$，由(*)可知， G中不存在完美匹配，因而棋盘不能用1×2的长方形恰好填满