# 图论

# 图论部分

- 第5章 图的基本概念
- 第6章 特殊的图
- 第7章 树

# 第5章 图的基本概念

5.1 无向图及有向图

5.2 通路, 回路和图的连通性

5.3 图的矩阵表示

5.4 最短路径, 关键路径和着色

# 5.1 无向图及有向图

- 无向图与有向图
- 顶点的度数
- 握手定理
- 简单图
- 完全图
- 子图
- 补图

# 无向图

多重集合: 元素可以重复出现的集合

无序积: $A\&B=\{(x,y) \mid x\in A\wedge y\in B\}$

例如，设$A = \{a_1, a_2\}$，$B = \{b_1, b_2\}$，则

$$A\&B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\},$$

$$A\&A = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_2)\}。$$

# 无向图

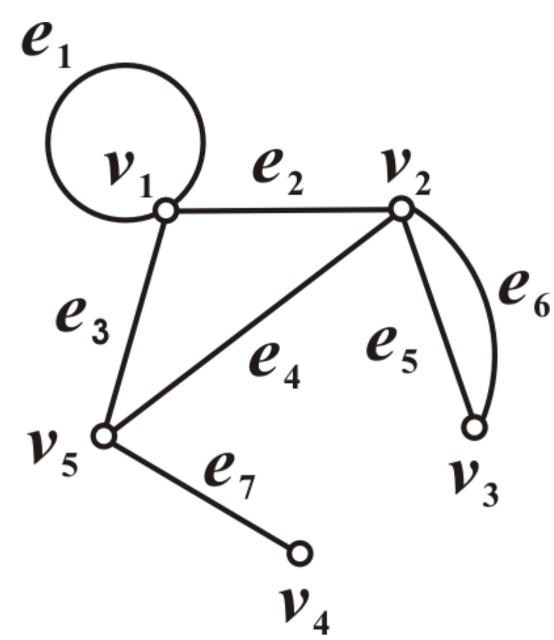
定义 无向图$G=<V,E>$, 其中

(1) 顶点集$V$是非空有穷集合,

其元素称为顶点（结点）

(2) 边集$E$为$V\&V$的多重子集,

其元素称为无向边，简称边.




例如, $G=<V,E>$, 其中

$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$,

$E=\{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3), (v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$

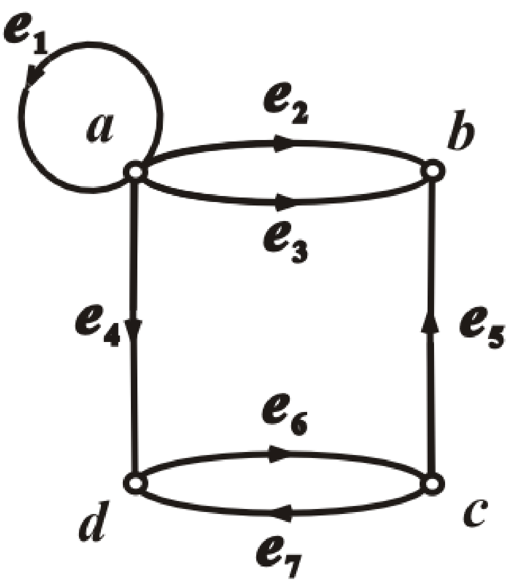
# 有向图

定义 有向图$D=\langle V,E\rangle$, 其中

(1)顶点集$V$是非空有穷集合,
其元素称为顶点

(2) 边集$E$为$V\times V$的多重子集，其
元素称为有向边，简称边.

$D$的基图:用无向边代替有向边




如$D=\langle V,E\rangle$, 其中

$V=\{a,b,c,d\}$

$E=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$

图的数学定义与图形表示,在同构意义下一一对应

# 无向图与有向图(续)

通常用$G$表示无向图, $D$表示有向图, 也常用$G$泛指无向图和有向图.

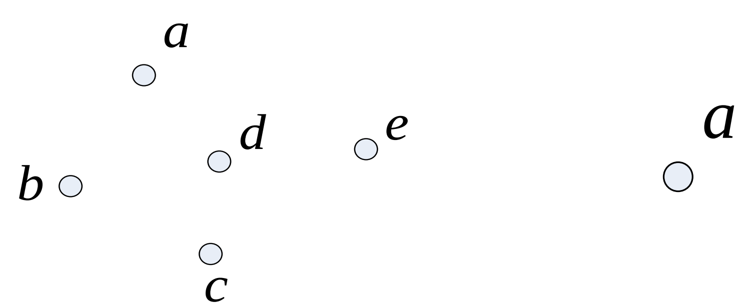
$V(G)$, $E(G)$, $V(D)$, $E(D)$: $G$和$D$的顶点集, 边集.

$n$ 阶图: $n$个顶点的图

零图: $E=\varnothing$

平凡图: 1 阶零图

空图: $V=\varnothing$




(*a*) 零图　　b）平凡图

无论有向图或是无向图，如果它的顶点或边被字母标定了，称其为标定图，否则为非标定图。

# 顶点和边的关联与相邻

定义 设$e=(u,v)$是无向图$G=<V,E>$的一条边, 称$u,v$为$e$的端点, $e$与$u\,(v)$关联. 若$u\neq v$, 则称$e$与$u\,(v)$的关联次数为1;若$u=v$, 则称$e$为环, 此时称$e$与$u$的关联次数为2; 若$w$不是$e$端点, 则称$e$与$w$的关联次数为0. 无边关联的顶点称作孤立点.

定义 设无向图$G=<V,E>$, $u,v\in V$, $e,e'\in E$, 若$(u,v)\in E$, 则称$u,v$相邻; 若$e,e'$至少有一个公共端点, 则称$e,e'$相邻.

对有向图有类似定义. 设$e=\langle u,v\rangle$是有向图的一条边,又称$u$是$e$的始点, $v$是$e$的终点, $u$邻接到$v$, $v$邻接于$u$.

# 顶点的度数

设$G=\langle V,E\rangle$为无向图, $v\in V$,

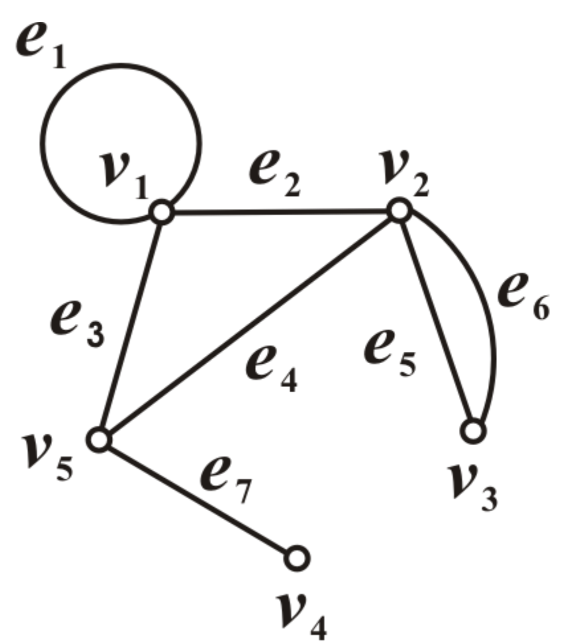
$v$的度数(度) $d(v)$: $v$作为边的端点次数之和

悬挂顶点: 度数为1的顶点

悬挂边: 与悬挂顶点关联的边

$G$的最大度$\Delta(G)=\max\{d(v)|\ v\in V\}$

$G$的最小度$\delta(G)=\min\{d(v)|\ v\in V\}$




例如 $d(v_5)=3$, $d(v_2)=4$, $d(v_1)=4$,

$\Delta(G)=4$, $\delta(G)=1$,

$v_4$是悬挂顶点, $e_7$是悬挂边, $e_1$是环

# 顶点的度数(续)

设$D=<V,E>$为有向图, $v \in V$,

$v$的出度$d^+(v)$: $v$作为边的始点次数之和

$v$的入度$d^-(v)$: $v$作为边的终点次数之和

$v$的度数(度) $d(v)$: $v$作为边的端点次数之和

$$d(v)= d^+(v)+ d^-(v)$$

$D$的最大出度$\Delta^+(D) =\max\{d^+(v)|v \in V\}$

最小出度$\delta^+(D) =\min\{d^+(v)|v \in V\}$

最大入度$\Delta^-(D) =\max\{d^-(v)|v \in V\}$

最小入度$\delta^-(D) =\min\{d^-(v)|v \in V\}$

最大度$\Delta(D) =\max\{d(v)|v \in V\}$

最小度$\delta(D) =\min\{d(v)|v \in V\}$

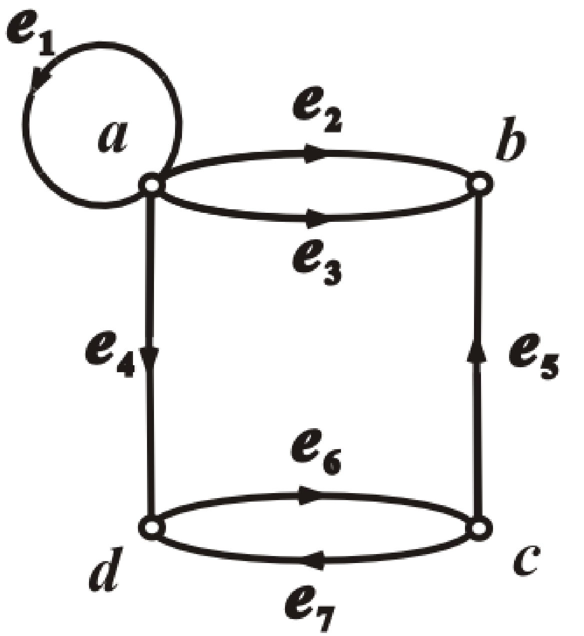
# 例

例 $d^+(a)=4$, $d^-(a)=1$, $d(a)=5$,

$d^+(b)=0$, $d^-(b)=3$, $d(b)=3$,

$\Delta^+(D)=4$, $\delta^+(D)=0$, $\Delta^-(D)=3$,

$\delta^-(D)=1$, $\Delta(D)=5$, $\delta(D)=3$.



# 图论基本定理——握手定理

定理 任意无向图和有向图的所有顶点度数之和都等于边数的2倍，并且有向图的所有顶点入度之和等于出度之和等于边数.

证 *G*中每条边（包括环）均有两个端点，所以在计算*G*中各顶点度数之和时，每条边均提供2度，*m*条边共提供2*m*度. 有向图的每条边提供一个入度和一个出度, 故所有顶点入度之和等于出度之和等于边数.

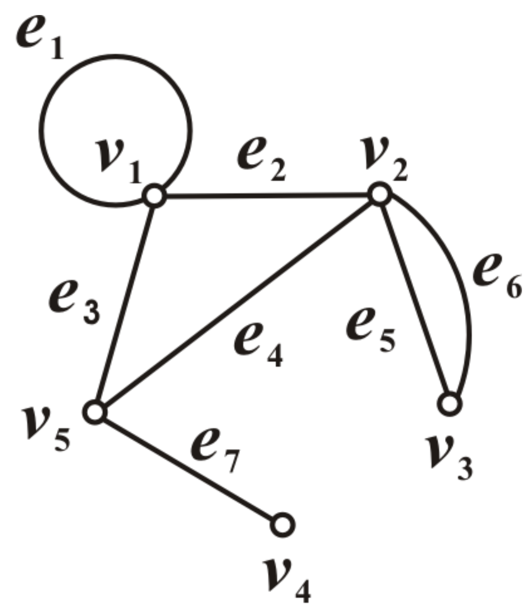
推论 任意无向图和有向图的奇度顶点个数必为偶数.

# 图的度数列

设无向图$G$的顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$G$的度数列: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

如右图度数列:4,4,2,1,3

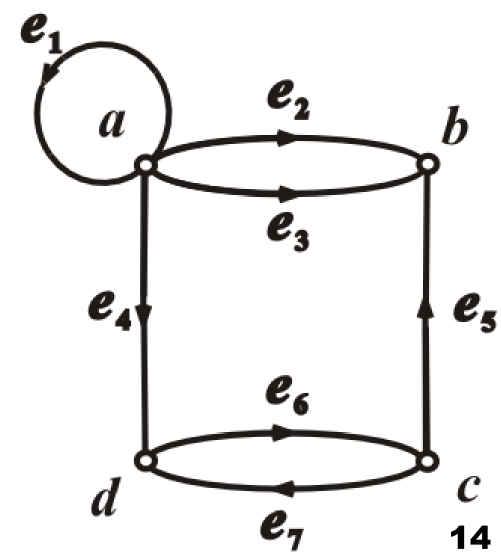



设有向图$D$的顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$D$的度数列: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

$D$的出度列: $d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

$D$的入度列: $d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$




如右图度数列:5,3,3,3

出度列:4,0,2,1

入度列:1,3,1,2

# 握手定理的应用

**例1 (3,3,3,4), (2,3,4,6,8)能成为图的度数列吗?**

**解 不可能. 它们都有奇数个奇度顶点.**

**例2 已知图*G*有10条边, 4个3度顶点, 其余顶点的度数均小于等于2, 问*G*至少有多少个顶点?**

**解 设*G*有*n*个顶点. 由握手定理,**

$$4\times3+2\times(n-4)\geq2\times10$$

**解得** $n\geq8$

# 握手定理的应用(续)

例3 证明不存在具有奇数个面且每个面都具有奇数条棱的多面体.

证 用反证法. 假设存在这样的多面体,

作无向图$G=\langle V,E\rangle$, 其中$V=\{v \mid v$为多面体的面$\}$,

$E=\{(u,v) \mid u,v\in V \wedge u$与$v$有公共的棱$\wedge u\neq v\}$.

根据假设, $|V|$为奇数且$\forall v\in V$, $d(v)$为奇数. 这与握手定理的推论矛盾.

例.设$\boldsymbol{G}$是$\boldsymbol{n}$阶$\boldsymbol{n}+\mathbf{1}$条边的无向图，证明$\boldsymbol{G}$中存在顶点$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{v})\geq\mathbf{3}$。

证：反证法

否则，$\forall\boldsymbol{v}\in \mathrm{V}(\boldsymbol{G})$，均有$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{v})\leq\mathbf{2}$，由握手定理可得

$$\mathbf{2}\boldsymbol{m}=\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{2}\leq\mathbf{2}\boldsymbol{n}$$

其中，$\boldsymbol{m}$为边数，显然矛盾。

例.设9阶无向图G中，每个顶点的度数不是5就是6，证明G中至少有5个6度顶点或者至少有6个5度顶点。

方法一:反证法。否则，G中至多有4个6度顶点且至多有5个5度顶点，但5个5度顶点违背握手定理推论，因而至多有4个5度顶点，这样一来， G至多有8个项点，这与已知G为9阶图矛盾

方法二:枚举法。将违背握手定理推论的情况去掉，5度与6度顶点个数分配只有下面四种情况:

① 2个5度顶点，7个6度顶点;

② 4个5度顶点，5个6度顶点;

③ 6个5度顶点， 3个6度顶点;

④ 8个5度顶点，1个6度顶点。

在①②情况下,至少有5个6度顶点，在③④情况下至少有6个5度顶点。

# 多重图与简单图

定义 （1） 在无向图中，如果有2条或2条以上的边关联同一对顶点，则称这些边为平行边，平行边的条数称为重数.

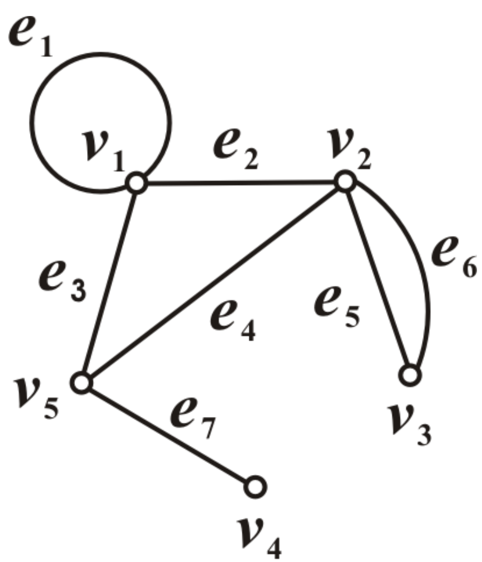
(2) 在有向图中，如果有2条或2条以上的边具有相同的始点和终点，则称这些边为有向平行边，简称平行边，平行边的条数称为重数.

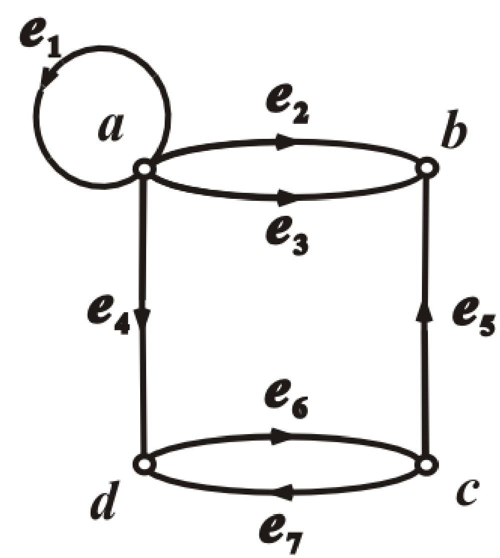
（3） 含平行边的图称为多重图.

（4） 既无平行边也无环的图称为简单图.

注意:简单图是极其重要的概念

# 实例




$e_5$和$e_6$是平行边
重数为2
不是简单图

$e_2$和$e_3$是平行边,重数为2
$e_6$和$e_7$不是平行边
不是简单图

# 图的同构

定义 设$G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$为两个无向图(有向图), 若存在双射函数 $f: V_1\to V_2$, 使得对于任意的 $v_i,v_j\in V_1$,

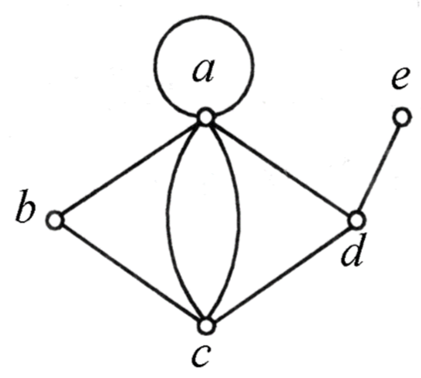
$(v_i,v_j)\in E_1$（$<v_i,v_j>\in E_1$）当且仅当

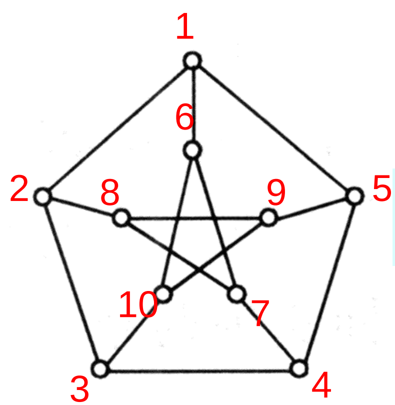
$(f(v_i),f(v_j))\in E_2$（$<f(v_i),f(v_j)>\in E_2$），

并且, $(v_i,v_j)$（$<v_i,v_j>$）与 $(f(v_i),f(v_j))$（$<f(v_i),f(v_j)>$）的重数相同，则称$G_1$与$G_2$是同构的，记作$G_1\cong G_2$.

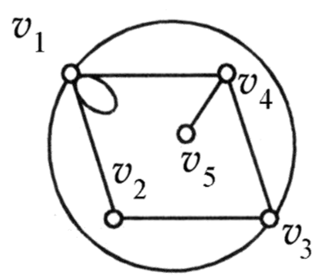
# 同构实例

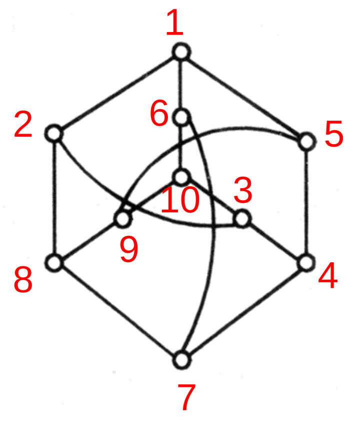
例1 证明下述2对图是同构的



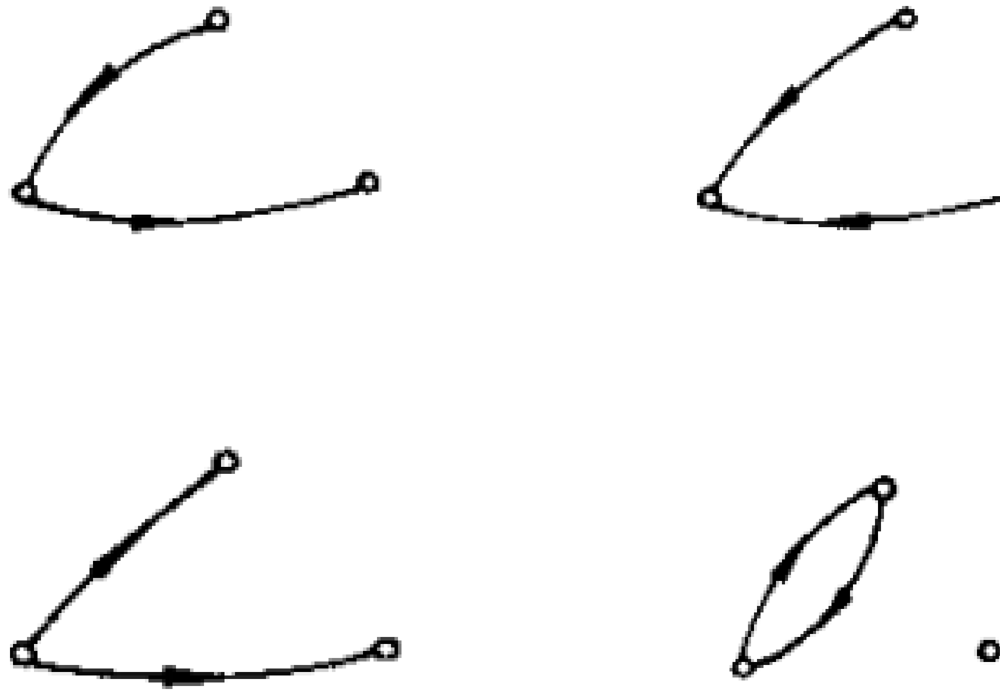




彼得森图



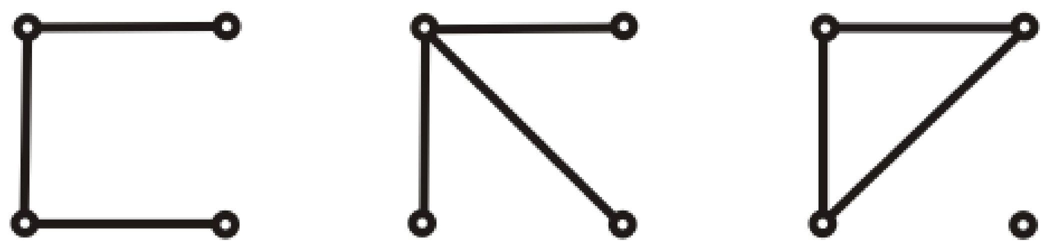



画出 3 阶 2 条边的所有非同构的有向简单图



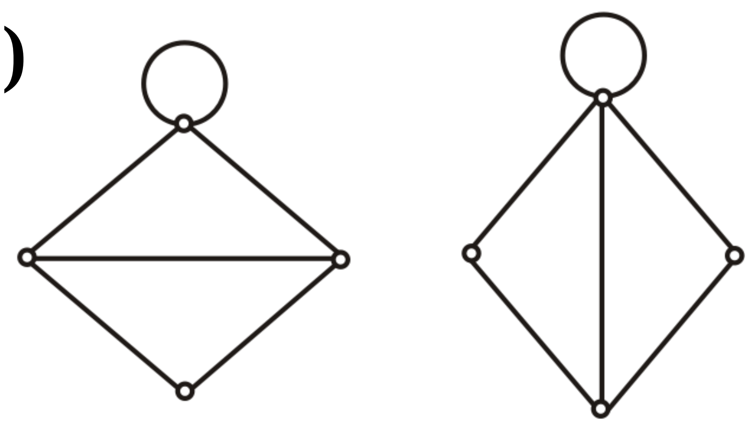
# 同构实例(续)

例2 试画出4阶3条边的所有非同构的无向简单图



例3 判断下述每一对图是否同构:

(1)

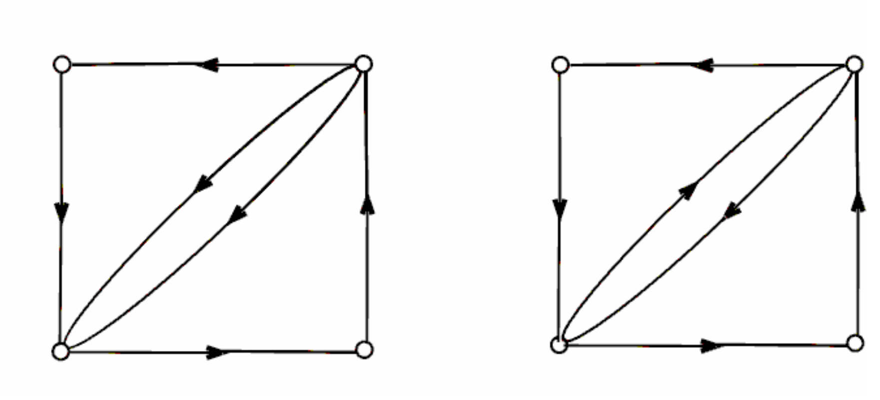


度数列不同

不同构

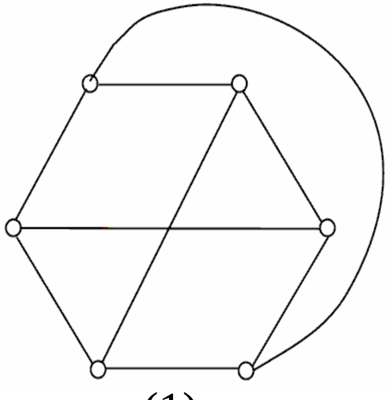
# 同构实例(续)

(2)

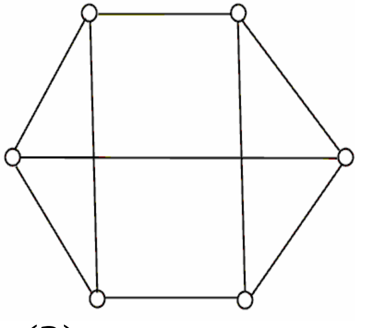


不同构
入(出)度列不同

(3)



(1)



(2)

不同构(左边没有三角形,右边有三角形)

注意:度数列相同

# 图的同构(续)

几点说明:

图之间的同构关系具有自反性、对称性和传递性.

能找到多条同构的必要条件, 但它们都不是充分条件:

① 边数相同，顶点数相同

② 度数列相同(不计度数的顺序)

③ 对应顶点的关联集及邻域的元素个数相同，等等

若破坏必要条件，则两图不同构

至今没有找到便于判断图同构的充要条件，也没有判断两个图同构的多项式时间算法，只能通过定义。

例：假设$G_1$，$G_2$，$G_3$均为4阶无向简单图，它们均有2条边。它们能彼此不同构吗?

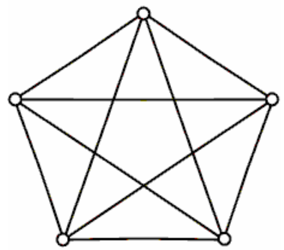
解：不能。

因为只有两个非同构的4阶2条边的简单无向图

# 完全图

*n*阶无向完全图$K_n$：每个顶点都与其余顶点相邻的*n*阶无向简单图.

简单性质: 边数$m=n(n-1)/2$, $\Delta=\delta=n-1$

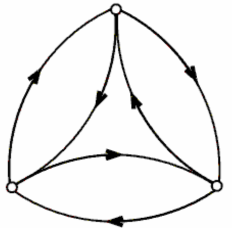


$K_5$

*n*阶有向完全图：每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的*n*阶有向简单图.

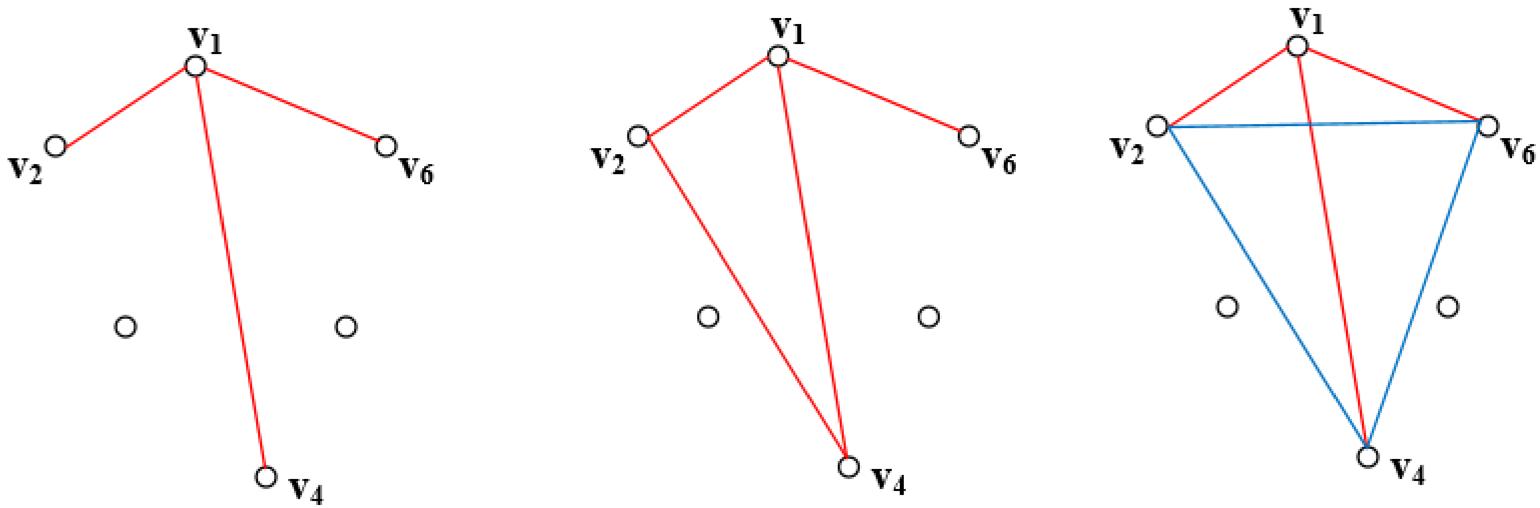
简单性质: 边数$m=n(n-1)$, $\Delta=\delta=2(n-1)$,

$$\Delta^+=\delta^+=\Delta^-=\delta^-=n-1$$



3阶有向完全图

例：在$K_6$的边上涂红色或者蓝色，证明对于任意一种随意的涂法，总存在红色$K_3$或者蓝色$K_3$。



# 子图

定义 设$G=\langle V,E\rangle$, $G'=\langle V',E'\rangle$是两个图

(1) 若$V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$, 则称$G'$为$G$的子图, $G$为$G'$的母图，记作$G'\subseteq G$

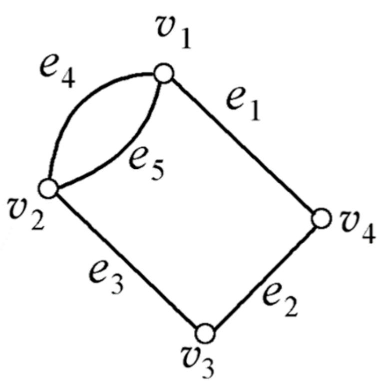
(2)若$V'\subset V$ 或$E'\subset E$，称$G'$为$G$的真子图

(3)若$G'\subseteq G$ 且$V'=V$，则称$G'$为$G$的生成子图

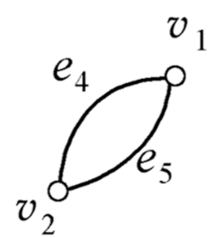
(4) 设$V'\subseteq V$ 且$V'\neq\varnothing$, 以$V'$为顶点集, 以两端点都在$V'$中的所有边为边集的$G$的子图称作$V'$的导出子图，记作 $G[V']$

(5) 设$E'\subseteq E$且$E'\neq\varnothing$, 以$E'$为边集, 以$E'$中边关联的所有顶点为顶点集的$G$的子图称作$E'$的导出子图, 记作 $G[E']$

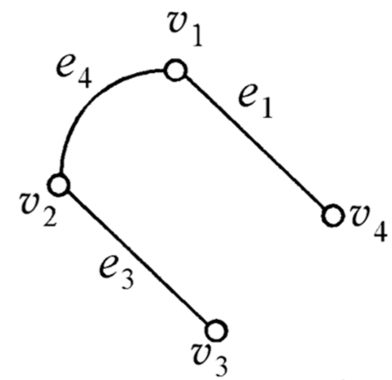
# 导出子图实例



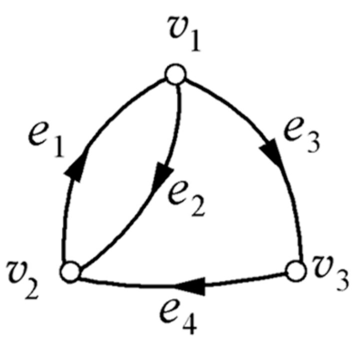

***G***



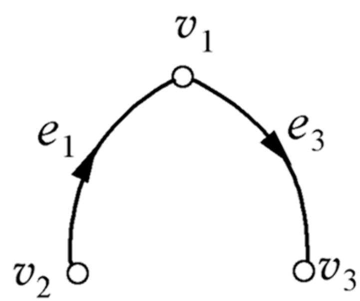

$G[\{v_1,v_2\}]$



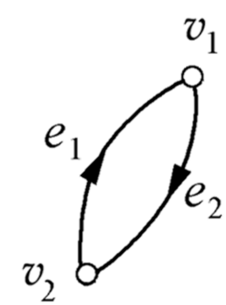

$G[\{e_1,e_3,e_4\}]$




***D***



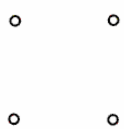
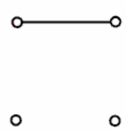
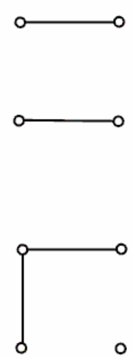
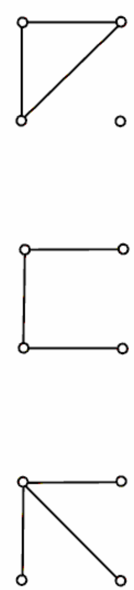
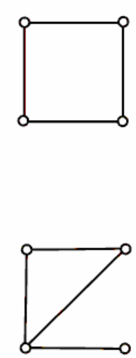
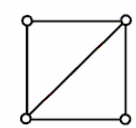
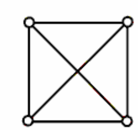

$D[\{e_1,e_3\}]$




$D[\{v_1,v_2\}]$

# 生成子图实例

## $K_4$的所有非同构的生成子图

| m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| |  |  |  |  |  |  |  | |

例：画出3阶有向完全图所有非同构的子图，其中有几个是生成子图？生成子图中有几个是自补图？

# 补图

定义 设$G=<V,E>$为$n$阶无向简单图，以$V$为顶点集，所有使$G$成为完全图$K_n$的添加边组成的集合为边集的图，称为$G$的补图，记作 $\overline{G}$.

若$G\cong\overline{G}$, 则称$G$是自补图.

例 对$K_4$的所有非同构子图，指出互为补图的每一对子图，并指出哪些是自补图.

例：设$G$是$n(n \geq 2)$阶无向简单图，$\overline{G}$是它的补图，已知$\Delta(G) = k_1$，$\delta(G) = k_2$，求$\Delta(\overline{G})$和$\delta(\overline{G})$。

解：由补图的定义可知$\forall v \in V(G), V(\overline{G})$

$$d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = d_{K_n}(v) = n - 1$$

$$\Delta(\overline{G}) = (n-1) - \delta(G) = n - k_2 - 1$$
$$\delta(\overline{G}) = (n-1) - \Delta(G) = n - k_1 - 1$$

例：设$G$为$n$阶无向简单图，$n \geq 3$且$n$为奇数，证明$G$和$\overline{G}$中奇度顶点的个数相等

证：

$\forall v \in V(G), V(\overline{G})$

$$d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = d_{K_n}(v) = n - 1$$

由于$n$为奇数，所以$n-1$为偶数。

于是，当$d_G(v)$为奇数时，$d_{\overline{G}}(v)$也必为奇数，反之亦然。

故$G$和$\overline{G}$中奇度顶点的个数相等。

例：$G$是$n$阶自补图，证明$n = 4k$或者$n = 4k + 1$，其中$k$为正整数。

证：

(1) $G \cup \overline{G} = K_n$

(2) $G \cong \overline{G}$，所以它们的边数相等，均设为$m$，

于是$m + m = 2m = \frac{n(n-1)}{2}$，即$4m = n(n-1)$

(3) $n$与$n-1$互素，故必有$n = 4k$或者$n - 1 = 4k$，即$n = 4k + 1$，$k \geq 1$

思考：

$G$是6阶无向简单图，证明$G$或它的补图中存在3个顶点彼此相邻。