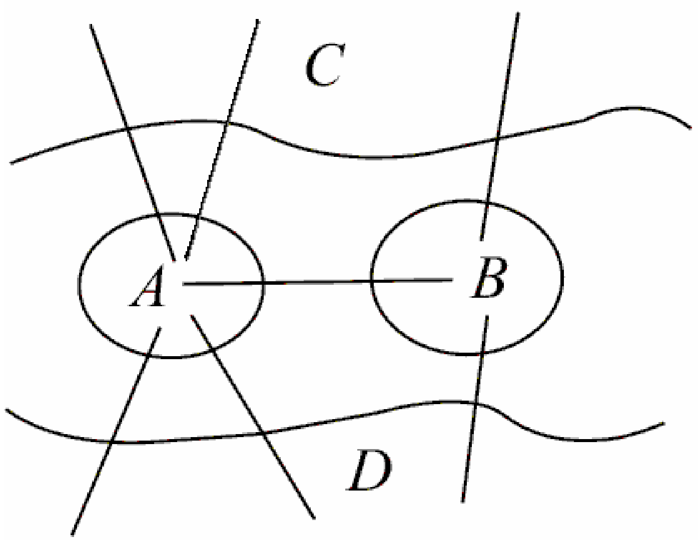
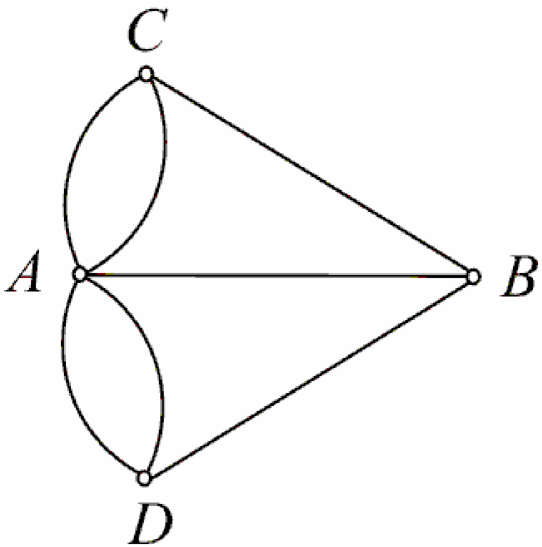
6.2 欧拉图

- 欧拉通路与欧拉回路
- 存在欧拉通路和欧拉回路的充分必要条件

哥尼斯堡七桥问题





要求边不重复地一笔画出整个图

欧拉图

欧拉通路：图中行遍所有顶点且恰好经过每条边一次的通路.

欧拉回路：图中行遍所有顶点且恰好经过每条边一次的回路.

欧拉图: 有欧拉回路的图.

半欧拉图: 有欧拉通路,但无欧拉回路的图.

几点说明：上述定义对无向图和有向图都适用.

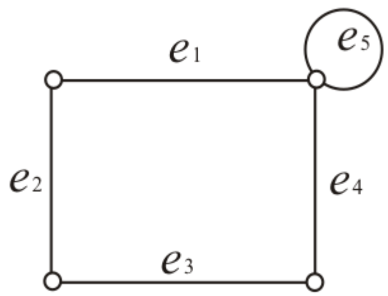
规定平凡图为欧拉图.

欧拉通路是简单通路, 欧拉回路是简单回路.

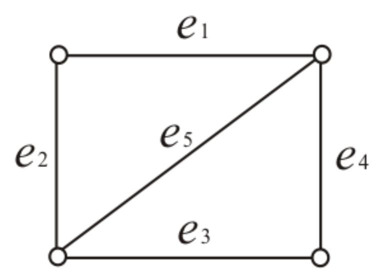
环不影响图的欧拉性.

欧拉图实例

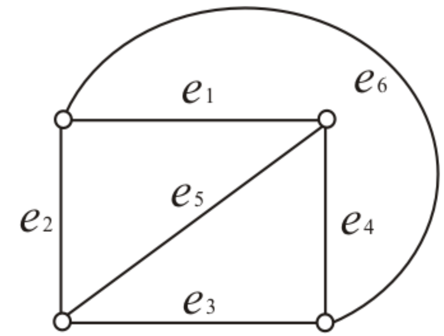
例 是否是欧拉图或半欧拉图?



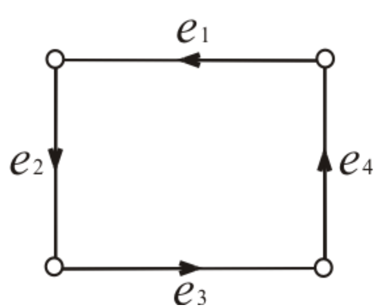
欧拉图



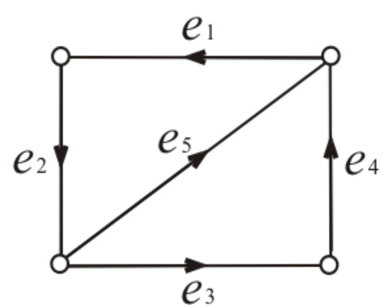
半欧拉图



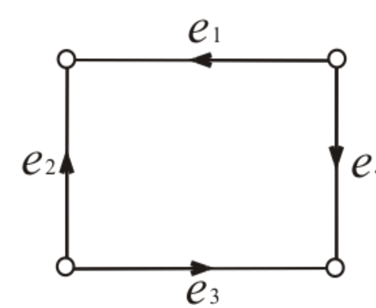
不是



欧拉图



半欧拉图



不是

欧拉图的判别法

定理6.4 无向图*G*为欧拉图当且仅当*G*连通且无奇度顶点. *G*是半欧拉图当且仅当*G*连通且恰有两个奇度顶点.

定理6.5 有向图*D*是欧拉图当且仅当*D*连通且每个顶点的入度都等于出度. *D*是半欧拉图当且仅当*D*连通且恰有两个奇度顶点, 其中一个入度比出度大1, 另一个出度比入度大1, 其余顶点的入度等于出度.

定理 **无向图G为欧拉图当且仅当G连通且无奇度顶点.**

证明：若G为平凡图，结论显然成立，下面设G是非平凡图。设G是m条边的n阶无向图。并设G的顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

必要性：

因为G为欧拉图，所以G中存在欧拉回路，设C为G中任意一条欧拉回路，$\forall v_i, v_j \in V$，v_i, v_j都在C上，因而v_i, v_j连通，所以G为连通图。又$v_i \in V$，v_i在C上每出现一次获得2度，若出现k次就获得$2k$度，即$d(v_i)=2k$，所以G中无奇度顶点。

定理 无向图G为欧拉图当且仅当G连通且无奇度顶点.

充分性：

由G为非平凡的连通图可知，G中边数$m \geq 1$.对m作归纳法。

(1)$m = 1$时，由G的连通性及无奇度顶点可知，G只能是一个环，因而G为欧拉图。

(2)设 $m \leq k(k \geq 1)$ 时结论成立，要证明 $m = k + 1$ 时，结论也成立。由G的连通性及无奇度顶点可知，$\delta(G) \geq 2$。无论G是否是简单图，都可以证明G中存在圈，设C为G中一个圈，删除C上的全部边，得G的生成子图G'。

设G'有s个连通分支$G_1', G_2', \ldots, G_s'$，每个连通分支至多有k条边，且无奇度顶点，并且设G_i'与C的公共顶点为$v_{j_i}^*$，$i = 1,2, \ldots, s$，由归纳假设可知，$G_1', G_2', \ldots, G_s'$都是欧拉图，因而都存在欧拉回路C_i'，$i = 1,2, \ldots, s$。

最后将C还原（即将删除的边重新加上），并从C上的某顶点v_r开始行遍，每遇到 $v_{j_i}^*$，就行遍G_i'中的欧拉回路C_i'，$i = 1,2, \ldots, s$，最后回到v_r，得回路$v_r \ldots v_{j_1}^* \ldots v_{j_1}^* \ldots v_{j_2}^* \ldots v_{j_2}^* \ldots v_{j_s}^* \ldots v_{j_s}^* \ldots v_r$，此回路经过$G$中每条边一次且仅一次并行遍$G$中所有顶点，因而它是$G$中的欧拉回路，故$G$为欧拉图。

定理无向图G是半欧拉图当且仅当G连通且恰有两个奇度顶点.

证明：

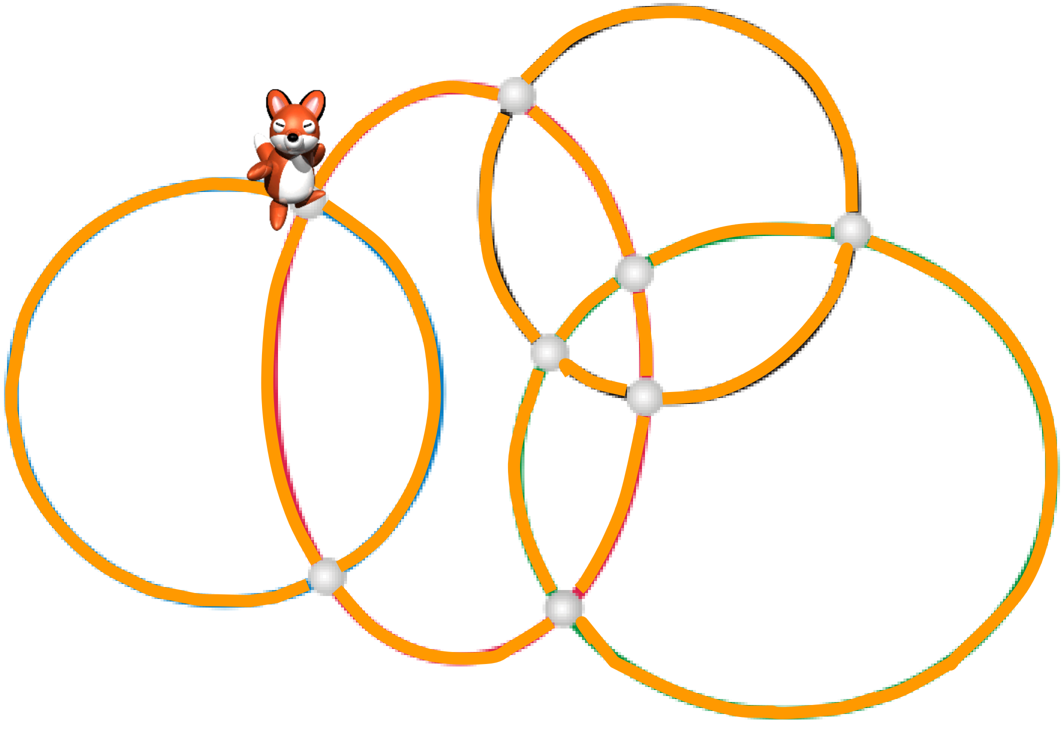
必要性：

设G是m条边的n阶无向图，因为G为半欧拉图，因而G中存在欧拉通路（但不存在欧拉回路），设$\Gamma = v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}\dots v_{i_{m-1}}e_{j_m}v_{i_m}$为$G$中一条欧拉通路，$v_{i_0} \neq v_{i_m}$．任意$v \in V(G)$，若$v$不在$\Gamma$的端点出现，则$d(v)$为偶数，若$v$在端点出现过，则$d(v)$为奇数。因为$\Gamma$只有两个端点且不同，因而$G$中只有两个奇度顶点。另外，$G$的连通性是显然的。

充分性：

设G的两个奇度顶点分别为u_0和v_0，对G加新边(u_0, v_0)，得$G' = G \cup (u_0, v_0)$，则G'是连通且无奇度顶点的图，由定理6.4可知，G'为欧拉图，因而存在欧拉回路C'，而$C = C' - (u_0, v_0)$为G中一条欧拉通路，所以G为半欧拉图。

定理 G是非平凡的欧拉图当且仅当G是连通的，且为若干个边不重的圈之并

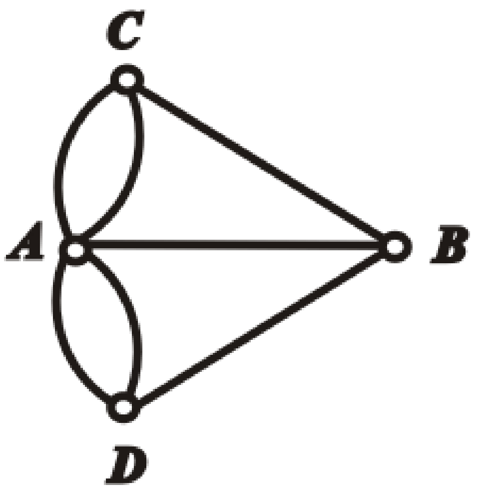


PLAY

实例

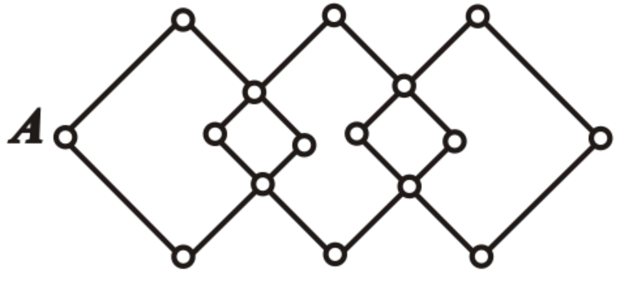
例1 哥尼斯堡七桥问题

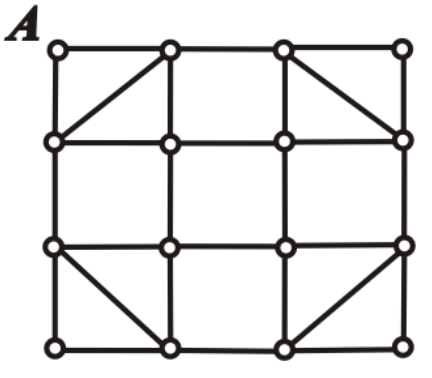
4个奇度顶点, 不存在欧拉通路, 更不存在欧拉回路,



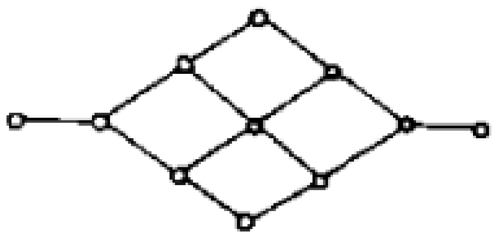
例2 下面两个图都是欧拉图.

从*A*点出发, 如何一次成功地走出一条欧拉回路来?

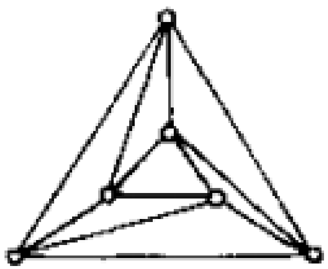




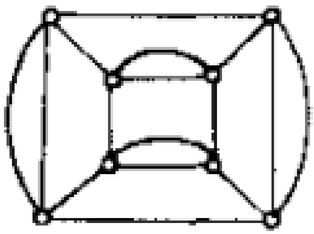
哪些图有欧拉通路，但是没有欧拉回路？哪些图是欧拉图？



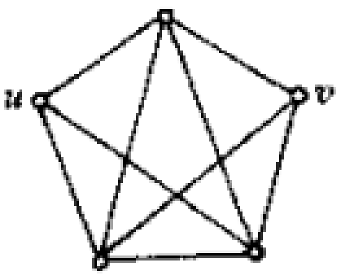
(1)



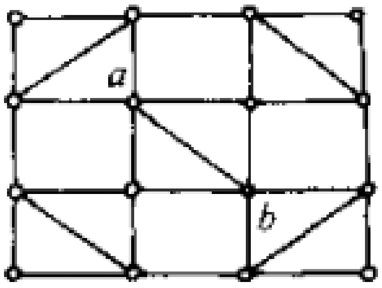
(2)



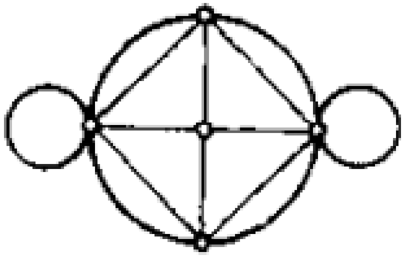
(3)



(4)

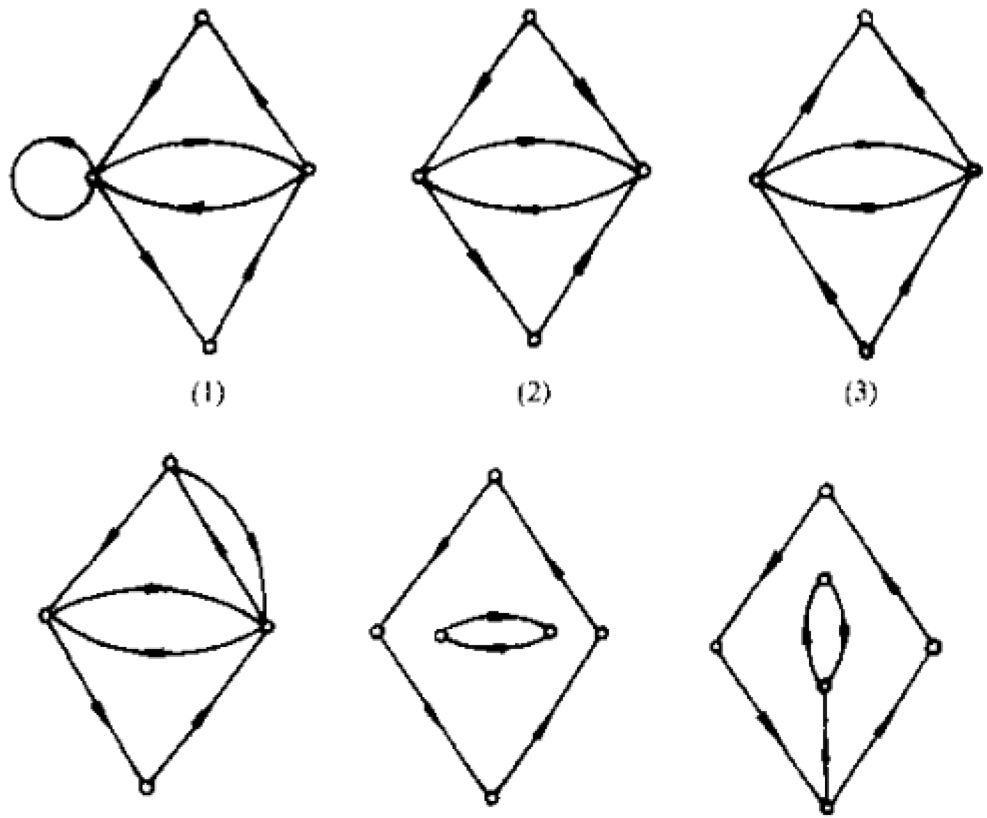


(5)



(6)

哪些图有欧拉通路？哪些图是欧拉图？

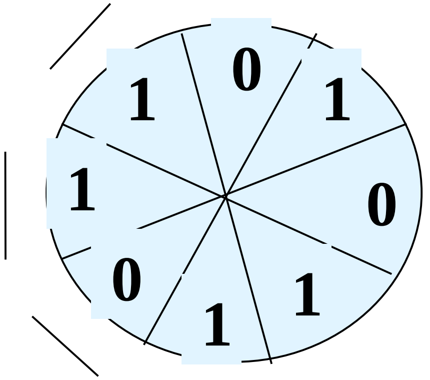


(1) (2) (3)

(4) (5) (6)

应用实例

例 设旋转磁鼓分成8个扇区, 每个扇区标记一个0或1, 有3个探测器能够读出连续的3个扇区的标记. 如何赋给扇区标记, 使得能够根据探测器的读数确定磁鼓的位置. 为了能够根据读数确定磁鼓的位置, 必须构造一个由8个0和1组成的圆环, 使得圆环上连续3个数字的序列都不相同.



应用实例(续)

构造一个4阶有向图，8条边的标记是不同的, 图中存在一条欧拉回路:000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100. 在这条回路上连续3条边的标记的第一位恰好与第一条边的标记相同. 顺着这条回路取每一条边标记的第一位得到00011101, 按照这个顺序标记磁鼓的扇区.