4.5 等价关系与偏序关系

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应
- 偏序关系
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特定元素

等价关系的定义与实例

定义　设 R 为非空集合上的关系. 如果 R 是自反的、对称的和传递的, 则称 R 为 A 上的等价关系. 设 R 是一个等价关系, 若 $<x,y>\in R$, 称 x 等价于 y, 记做 $x\sim y$.

实例　设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$, 如下定义 A 上的关系 R:

$$R = \{ <x,y> \mid x,y\in A \wedge x\equiv y \pmod 3 \}$$

其中 $x\equiv y \pmod 3$ 叫做 x 与 y 模3相等, 即 x 除以3的余数与 y 除以3的余数相等.

等价关系的验证

验证模 3 相等关系 R 为 A上的等价关系, 因为

$\forall x \in A$, 有$x \equiv x \pmod 3$

$\forall x, y \in A$, 若 $x \equiv y \pmod 3$, 则有 $y \equiv x \pmod 3$

$\forall x, y, z \in A$, 若$x \equiv y \pmod 3$, $y \equiv z \pmod 3$,

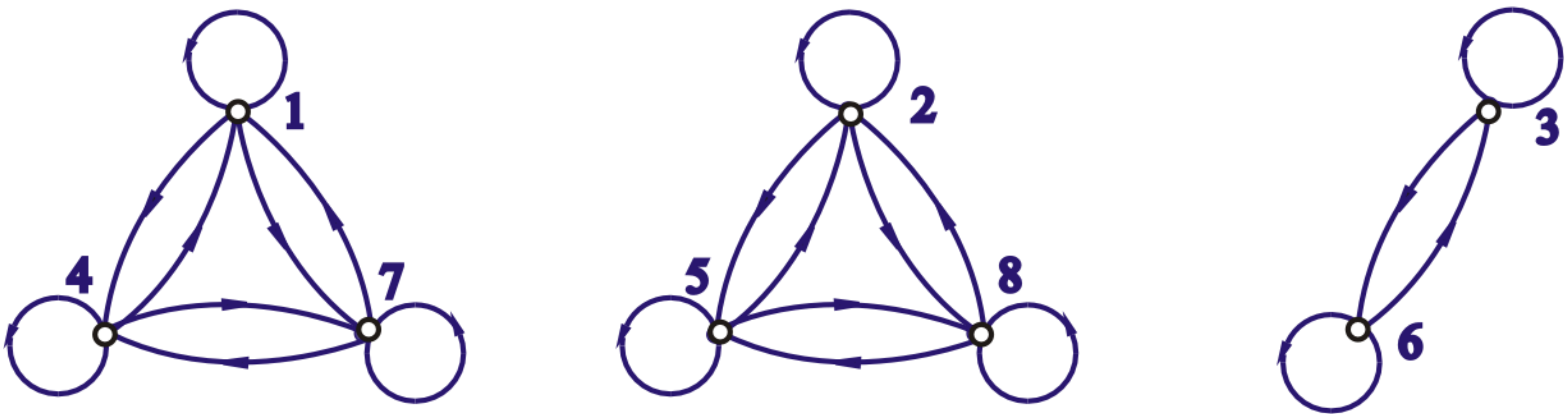
则有 $x \equiv z \pmod 3$

自反性、对称性、传递性得到验证

A上模3等价关系的关系图

设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$,

$R=\{ \langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\equiv y \pmod 3) \}$



例：设R是A上的自反和传递的关系，证明$R \cap R^{-1}$是A上的等价关系。

证：

自反性：

任取x，有

$x \in A$

$\Rightarrow < x, x > \in R$

$\Rightarrow < x, x > \in R \wedge < x, x > \in R$

$\Rightarrow < x, x > \in R \wedge < x, x > \in R^{-1}$

$\Rightarrow < x, x > \in R \cap R^{-1}$

对称性：

任取$< x, y >$，有

$< x, y > \in R \cap R^{-1}$

$\Rightarrow < x, y > \in R \wedge < x, y > \in R^{-1}$

$\Rightarrow < y, x > \in R \wedge < y, x > \in R^{-1}$

$\Rightarrow < y, x > \in R \cap R^{-1}$

例：设$\boldsymbol{R}$是$\boldsymbol{A}$上的自反和传递的关系，证明$\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{R}^{-1}$是$\boldsymbol{A}$上的等价关系。

证：

传递性：

任取$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>,<\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}>$，有

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>\in \boldsymbol{R}\cap \boldsymbol{R}^{-1} \wedge <\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}>\in \boldsymbol{R}\cap \boldsymbol{R}^{-1}$$

$$\Rightarrow <\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>\in \boldsymbol{R} \wedge <\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>\in \boldsymbol{R}^{-1} \wedge <\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}>\in \boldsymbol{R} \wedge <\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}>\in \boldsymbol{R}^{-1}$$

$$\Rightarrow (<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>\in \boldsymbol{R} \wedge <\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}>\in \boldsymbol{R}) \wedge (<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>\in \boldsymbol{R}^{-1} \wedge <\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}>\in \boldsymbol{R}^{-1})$$

$$\Rightarrow (<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>\in \boldsymbol{R} \wedge <\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}>\in \boldsymbol{R}) \wedge (<\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}>\in \boldsymbol{R} \wedge <\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}>\in \boldsymbol{R})$$

$$\Rightarrow <\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}>\in \boldsymbol{R} \wedge <\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}>\in \boldsymbol{R}$$

$$\Rightarrow <\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}>\in \boldsymbol{R} \wedge <\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}>\in \boldsymbol{R}^{-1}$$

$$\Rightarrow <\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}>\in \boldsymbol{R}\cap \boldsymbol{R}^{-1}$$

例：设$\boldsymbol{R}$是$\boldsymbol{A}$上的自反关系，证明$\boldsymbol{R}$是$\boldsymbol{A}$上的等价关系的充要条件是：若$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>\in \boldsymbol{R}$且$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>\in \boldsymbol{R}$，则有$<\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}>\in \boldsymbol{R}$。

证：

充分性：

任取$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>,<\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}>$，

根据自反性有$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>\in \boldsymbol{R}$。

$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>\in \boldsymbol{R}$

$\Rightarrow <\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>\in \boldsymbol{R} \wedge <\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>\in \boldsymbol{R}$

$\Rightarrow <\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}>\in \boldsymbol{R}$，

对称性得证。

$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>\in \boldsymbol{R} \wedge <\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}>\in \boldsymbol{R}$

$\Rightarrow <\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}>\in \boldsymbol{R} \wedge <\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}>\in \boldsymbol{R}$

$\Rightarrow <\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}>\in \boldsymbol{R}$，

传递性得证。

必要性：

任取$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>,<\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>$，有

$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>\in \boldsymbol{R} \wedge <\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>\in \boldsymbol{R}$

$\Rightarrow <\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}>\in \boldsymbol{R} \wedge <\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>\in \boldsymbol{R}$

$\Rightarrow <\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}>\in \boldsymbol{R}$

思考：

假设R_1和R_2是非空集合A上的等价关系

(1) $R_1 \cap R_2$是不是等价关系？

(2) $R_1 \cup R_2$是不是等价关系？

(3) 如何将$R_1 \cup R_2$改造成包含$R_1 \cup R_2$的最小等价关系？

等价类

定义 设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$， 令

$$[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge xRy \}$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于R 的等价类, 简称为 x 的等价类, 简记为$[x]$.

实例 A={ 1, 2, … , 8 }上模 3 等价关系的等价类:

$[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\}$

$[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\}$

$[3]=[6]=\{3,6\}$

等价类的性质

定理1　设R是非空集合A上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A$, $[x]$ 是A的非空子集.

(2) $\forall x, y \in A$, 如果 $x\ R\ y$, 则 $[x]=[y]$.

(3) $\forall x, y \in A$, 如果 $x \not R\ y$, 则 $[x]$与$[y]$不交.

(4) $\cup\{ [x] \mid x \in A\}=A$，即所有等价类的并集就是$A$.

实例

A={ 1, 2, … , 8 }上模 3 等价关系的等价类:

$[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\}$,

$[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\}$,

$[3]=[6]=\{3,6\}$

以上3 类两两不交,

$\{1,4,7\}\cup\{2,5,8\}\cup\{3,6\} = \{1,2, \ldots ,8\}$

商集

定义　设R为非空集合A上的等价关系, 以R的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的商集, 记做 A/R, $A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$

实例 $A=\{1,2,\ldots,8\}$,A关于模3等价关系R的商集为

$$A/R = \{ \{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\} \}$$

A关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{ \{1\},\{2\}, \ldots ,\{8\}\}$$

$$A/E_A = \{ \{1, 2, \ldots ,8\} \}$$

集合的划分

定义　设A为非空集合, 若A的子集族$\pi(\pi\subseteq P(A))$满足下面条件:

(1) $\varnothing\notin\pi$

(2) $\forall x\forall y\ (x,y\in\pi\wedge x\neq y\rightarrow x\cap y=\varnothing)$

(3) $\cup\pi=A$

则称π是A的一个划分, 称π中的元素为A的划分块.

例题

例1 设$A=\{a, b, c, d\}$,

给定$\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6$如下：

$\pi_1=\{\{a, b, c\}, \{d\}\}$, $\pi_2=\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$

$\pi_3=\{\{a\}, \{a, b, c, d\}\}$, $\pi_4=\{\{a, b\}, \{c\}\}$

$\pi_5=\{\varnothing,\{a, b\}, \{c, d\}\}$, $\pi_6=\{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}$

则π_1和π_2 是A的划分, 其他都不是 A 的划分.

为什么？

等价关系与划分的一一对应

商集 A/R 就是 A 的一个划分 （由R所诱导的划分）

不同的商集对应于不同的划分

任给 A 的一个划分π, 如下定义 A 上的关系 R:

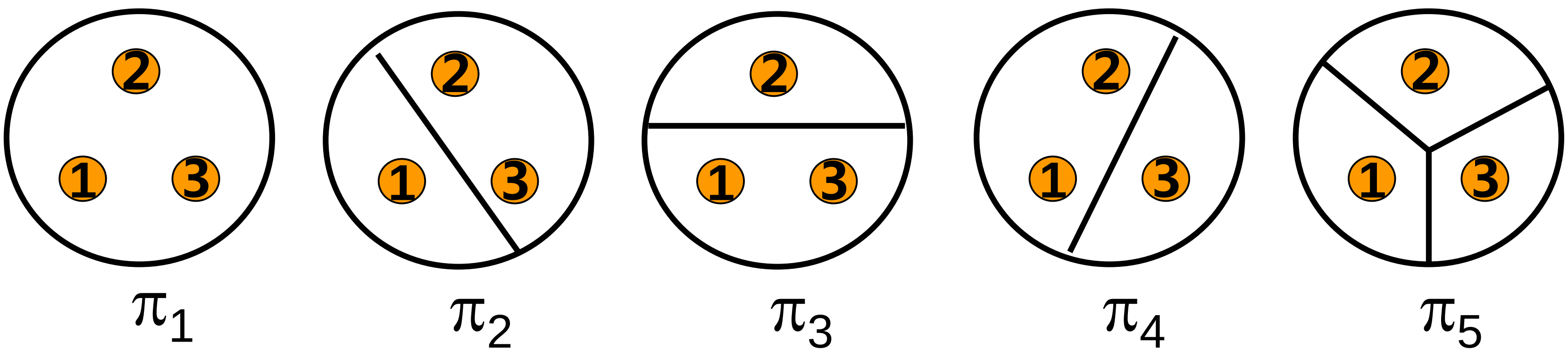
$R = \{<x,y> \mid x,y \in A \wedge x$ 与 y 在π的同一划分块中$\}$

则 R 为 A上的等价关系（由划分π 所诱导的等价关系）, 且该等价关系确定的商集就是π.

例2 给出$A=\{1,2,3\}$上所有的等价关系

求解思路：先做出A的所有划分, 然后根据划分写出对应的等价关系.

等价关系与划分之间的对应



π_1对应于全域关系 E_A，π_5 对应于恒等关系 I_A

π_2,π_3和π_3分别对应等价关系 R_2, R_3 和 R_4.

$R_2=\{<2,3>,<3,2>\}\cup I_A$,

$R_3=\{<1,3>,<3,1>\}\cup I_A$,

$R_4=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$

实例

例3 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，在 $A\times A$上定义二元关系R：

$$<<x,y>,<u,v>>\in R \Leftrightarrow x+y = u+v,$$

求 R 导出的划分.

解 $A\times A=\{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <2,1>, <2,2>, <2,3>,<2,4>,<3,1>, <3,2>, <3,3>, <3,4>, <4,1>, <4,2>, <4,3>, <4 ,4>\}$

实例（续）

根据 $\langle x,y\rangle$ 的 $x+y=2,3,4,5,6,7,8$ 将$A\times A$划分成7个等价类:

$$
\begin{aligned}
(A\times A)/R=\{ & \{\langle 1,1\rangle\},\\
& \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\},\\
& \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle\},\\
& \{\langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle\},\\
& \{\langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle\},\\
& \{\langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle\},\\
& \{\langle 4,4\rangle\} \}
\end{aligned}
$$

偏序关系

定义 非空集合A上的自反、反对称和传递的关系，称为A上的偏序关系，记作$\preccurlyeq$. 设$\preccurlyeq$为偏序关系, 如果$\langle x, y\rangle \in \preccurlyeq$, 则记作 $x \preccurlyeq y$, 读作 x“小于或等于” y.

实例

集合A上的恒等关系 I_A是A上的偏序关系.

小于或等于关系, 整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

相关概念

x与 y 可比：设R为非空集合A上的偏序关系,

$x,y\in A$, x与y可比 $\Leftrightarrow$ $x\preccurlyeq y \vee y\preccurlyeq x$.

$x\prec y$：设R为非空集合A上的偏序关系,

$x,y\in A$, $x\prec y \Leftrightarrow x\preccurlyeq y \wedge x \neq y$

结论：任取两个元素x和y, 可能有下述情况：

$x\prec y$ (或$y\prec x$), $x=y$, x与y不是可比的.

全序关系：

R为非空集合A上的偏序, $\forall x,y\in A$, x与 y 都是可比的，则称 R 为全序（或 线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系

整除关系不是正整数集合上的全序关系

相关概念（续）

覆盖：设R为非空集合A上的偏序关系，$x, y\in A$, 如果 $x \prec y$且不存在 $z\in A$ 使得 $x \prec z \prec y$, 则称 y 覆盖x.

实例：{ 1, 2, 4, 6 }集合上的整除关系,

2 覆盖 1,

4 和 6 覆盖 2.

4 不覆盖 1.

偏序集与哈斯图

定义 集合A和A上的偏序关系$\preccurlyeq$一起叫做偏序集, 记作 $<A,\preccurlyeq>$.

实例：整数集和小于等于关系构成偏序集$<Z,\leq>$，幂集$P(A)$和包含关系构成偏序集$<P(A),R_{\subseteq}>$.

哈斯图：利用偏序自反、反对称、传递性简化的关系图

哈斯图中，每个节点代表A中的一个元素，节点位置按它们在偏序中的关系从底向上排列，如果y覆盖x，则在x和y之间连一条线

哈斯图画法

1.确定偏序集<A,≼>中的极小元，并将这些极小元放在哈斯图的最底层，记作第0层。

2.若第n层的元素已经确定完毕，从A中剩余的元素中选中至少能覆盖住第n层中一个元素的元素，将这些元素放在哈斯图的第n+1层。

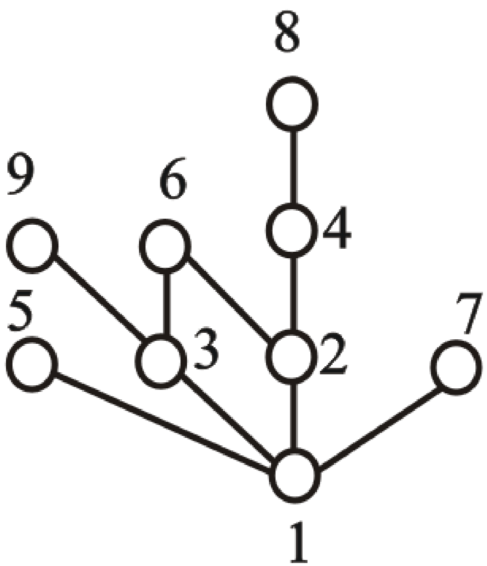
在排列第n+1层结点的位置时，注意把覆盖较多元素的结点放在中间，将只覆盖一个元素的结点放在两边，以减少交叉。

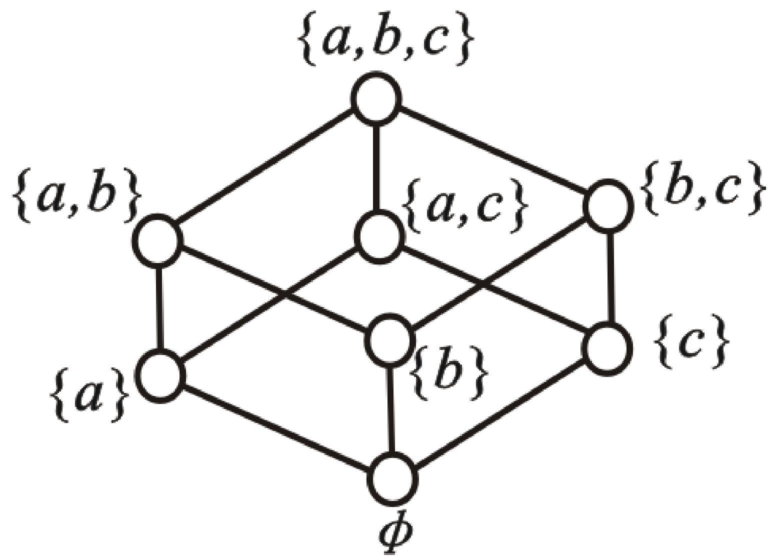
3.将相邻两层的结点根据覆盖关系连线。

哈斯图实例

例4 $<\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, R_{整除}>$

$<P(\{a, b, c\}), R_{\subseteq}>$





哈斯图实例（续）

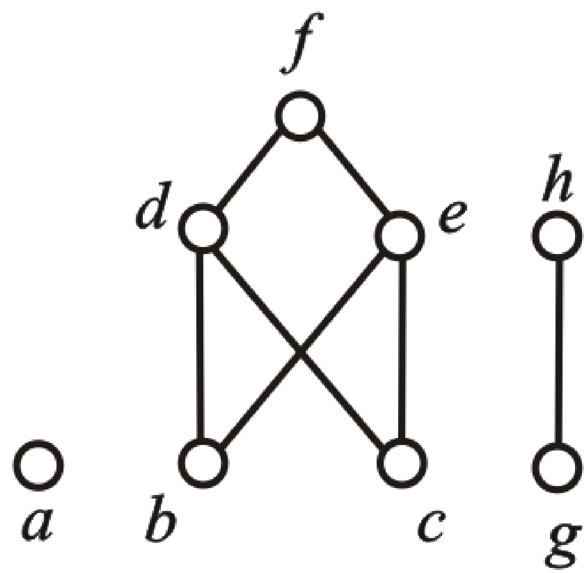
例5

已知偏序集$<A,R>$

的哈斯图如右图所示,

试求出集合A和关系

R的表达式.



$A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$R=\{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,$

$<c,e>,<c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\}\cup I_A$

偏序集的特定元素

定义 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$.

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的**最小元**.

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**最大元**.

(3) 若$\neg\exists x\ (x\in B\wedge x\prec y)$ 成立, 则称 y 为B的**极小元**.

(4) 若$\neg\exists x\ (x\in B\wedge y\prec x)$ 成立, 则称 y 为B的**极大元**.

特殊元素的性质

- 对于有穷集，极小元和极大元必存在，可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.
- 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元，也是极大元.

偏序集的特定元素(续)

定义 设 $<A, \preccurlyeq>$ 为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$.

(1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的上界.

(2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的下界.

(3) 令 $C = \{y \mid y$为B的上界$\}$, 则称 C 的最小元为 B 的最小上界 或 上确界.

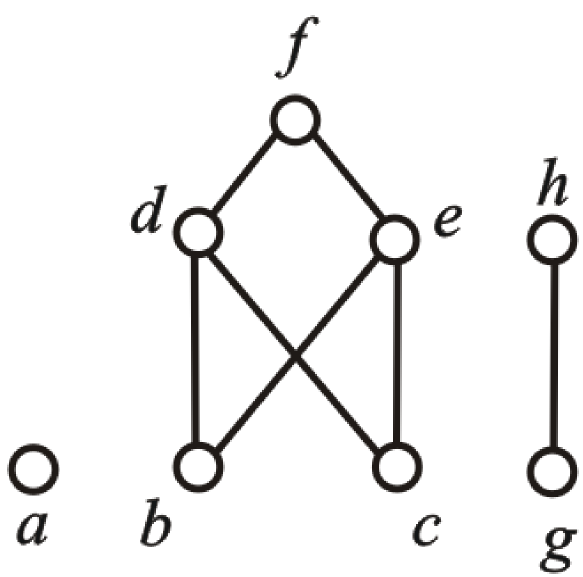
(4) 令 $D = \{y \mid y$为B的下界$\}$, 则称 D 的最大元为 B 的最大下界 或 下确界.

特殊元素的性质

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界存在不一定惟一
- 下确界、上确界如果存在，则惟一
- 集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对.

实例

例6 设偏序集<A,≼>如下图所示，求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元. 设 B＝{b,c,d}, 求 B 的下界、上界、下确界、上确界.



极小元：a, b, c, g;

极大元：a, f, h;

没有最小元与最大元.

B的下界和最大下界都不存在, 上界有d 和 f, 最小上界为 d.

如何在哈斯图中确定极大/小，最大/小元，最小上界，最小下界?

1.如果图中有孤立结点,那么这个结点既是极小元,也是极大元,并且图中既无最小元,也无最大元(除了图中只有唯一孤立结点且不含其他结点的特殊情况)。

2.除了孤立结点以外,其他的极小元是图中所有向下通路的终点,其他的极大元是图中所有向上通路的终点。

3.图中唯一的极小元是最小元,唯一的极大元是最大元,否则最小元和最大元不存在.

4.设B为偏序集<A, $\preccurlyeq$ >的子集,若B中存在最大元,它就是B的最小上界,否则从 A-B中选择那些向下可达B中每一个元素的结点,它们都是B的上界,其中的最小元是B的最小上界.类似地可以确定B的最大下界.