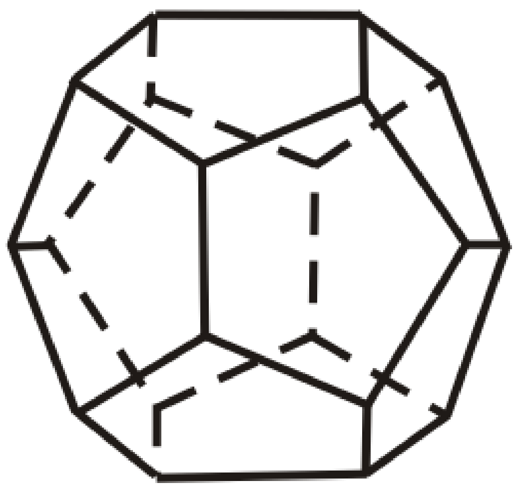
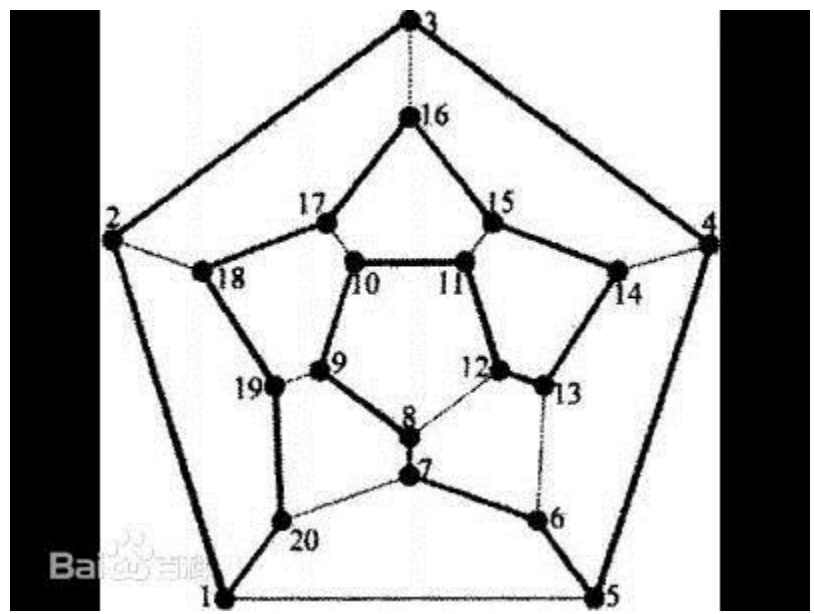
6.3 哈密顿图

- 哈密顿通路和哈密顿回路
- 存在哈密顿通路和哈密顿回路的充分条件与必要条件
- 格雷码

哈密顿周游世界问题

每个顶点是一个城市，有20个城市，要求从一个城市出发，恰好经过每一个城市一次，回到出发点.





哈密顿图的定义

哈密顿通路：经过图中所有顶点一次且仅一次的通路.

哈密顿回路：经过图中所有顶点一次且仅一次的回路.

哈密顿图：具有哈密顿回路的图.

半哈密顿图：具有哈密顿通路而无哈密顿回路的图.

几点说明:

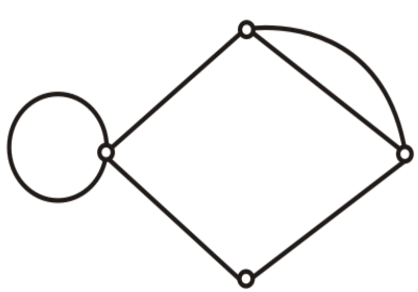
平凡图是哈密顿图.

哈密顿通路是初级通路，哈密顿回路是初级回路.

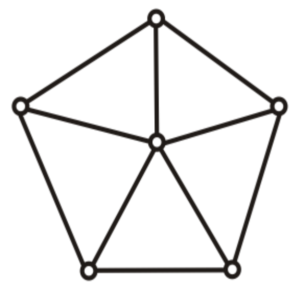
环与平行边不影响图的哈密顿性.

实例

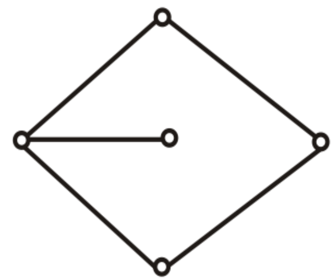
例 是否是哈密顿图,半哈密顿图?



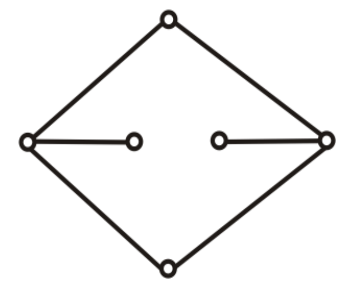
哈密顿图



哈密顿图



半哈密顿图



不是

无向哈密顿图的一个必要条件

定理 设无向图$G=<V,E>$是哈密顿图, 则对于任意$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$, 均有 $p(G-V_1) \leq |V_1|$.

证 设C为G中一条哈密顿回路, 有$p(C-V_1) \leq |V_1|$. 又因为$C \subseteq G$, 故 $p(G-V_1) \leq p(C-V_1) \leq |V_1|$.

推论 设无向图$G=<V,E>$中有哈密顿通路,则对于任意$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$, 均有 $p(G-V_1) \leq |V_1|+1$.

几点说明

定理中的条件是哈密顿图的必要条件, 但不是充分条件.

可利用该定理判断某些图不是哈密顿图.

由定理可知, $K_{r,s}$当$s \geq r+1$时不是哈密顿图.

当$r \geq 2$时, $K_{r,r}$是哈密顿图, 而$K_{r,r+1}$是半哈密顿图.

实例

例 设G为n阶无向连通简单图, 若G中有割点或桥, 则G不是哈密顿图.

证 (1) 设v为割点, 则$p(G-v) \geq 2>|\{v\}|=1$. 根据定理, G不是哈密顿图.

(2) 若G是K_2(K_2有桥), 它显然不是哈密顿图. 除K_2外, 其他的有桥连通图均有割点. 由(1), 得证G不是哈密顿图.

无向哈密顿图的一个充分条件

定理 设G是n阶无向简单图, 若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于$n-1$, 则G中存在哈密顿通路. 当$n\geq 3$时, 若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于n, 则G中存在哈密顿回路.

定理中的条件是充分条件, 但不是必要条件.
例如, $n(\geq 6)$个顶点的路径存在哈密顿通路, 但不满足条件. $n(\geq 5)$个顶点的圈是哈密顿图, 不满足条件.

扩大路径法

- 设$G=<V,E>$为 n 阶无向图，$E\neq\varnothing$. 设 Γ为G中一条路径，若Γ的始点或终点与Γ外的顶点不相邻，则称Γ是一条极大路径。
- 任意给一条路径，若此路径的始点或终点与通路外的顶点相邻，就将它们扩到通路中来，继续这一过程，直到最后得到的通路的两个端点不与通路外的顶点相邻为止.，最后总能得到一条极大路径，这种构造方法叫做“扩大路径法”。

定理 设G是n阶无向简单图，若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于$n-1$，则G中存在哈密顿通路.

证明：首先证明G是连通图。否则G至少有两个连通分支,设G_1,G_2是阶数为n_1,n_2的两个连通分支,设$v_1 \in V(G_1),v_2 \in V(G_2)$,因为$G$是简单图,所以$d_G(v_1)+d_G(v_2)=d_{G_1}(v_1)+d_{G_2}(v_2) \le n_1-1+n_2-1 \le n-2$，这与已知矛盾,所以$G$必为连通图。

下面证明G中存在哈密顿通路。设$\Gamma=v_1v_2\ldots v_l$为G中用“扩大路径法”得到的“极大路径”，即Γ的始点v_1和终点v_l不与Γ外的顶点相邻。显然有$l \le n$.

（1）若$l=n$，则Γ为G中哈密顿通路。

（2）若$l<n$，这说明Γ不是哈密顿通路，即G中还存在Γ外的顶点。但可以证明G中存在经过Γ上所有顶点的圈。

（a）若v_1和v_l相邻，即$(v_1,v_l)\in E(G)$，则$\Gamma\cup(v_1,v_l)$为满足要求的圈。

（b）若v_1和v_l不相邻，设v_1与Γ上的$v_{i_1}=v_2,v_{i_2},\ldots v_{i_k}$相邻（$k\ge 2$，否则$d(v_1)+d\,(v_l)\le 1+l-2=l-1<n-1$，这与已知矛盾），此时$v_l$至少与$v_{i_2},v_{i_3},\ldots v_{i_k}$相邻的顶点$v_{i_2-1},v_{i_3-1},\ldots v_{i_k-1}$之一相邻（否则，$d(v_1)+d\,(v_l)\le k+l-2-(k-1)=l-1<n-1$），设$v_l$与$v_{i_r-1}$相邻（$2\le r\le k$）。于是，回路$C=v_1v_2\ldots v_{i_r-1}v_lv_{l-1}\ldots v_i\ldots v_{i_r}v_1$通过$\Gamma$上的所有顶点。

（c）下面证明存在比Γ更长的路径。因为$l<n$，所以C外还有顶点，由G的连通性可知存在$v_{l+1}\in V(G)-V(C)$与C上的某点v_t相邻。当$t<i_r-1$时，删除边(v_{t-1},v_t)得路径$\Gamma'=v_{t-1}\ldots v_1v_{i_r}\ldots v_lv_{i_{r-1}}\ldots v_tv_{l+1}$比$\Gamma$的长度大1，当$t>i_r-1$或者$t=i_r$时，可以类似构造出比$\Gamma$的长度大1 的路径$\Gamma'$。对$\Gamma'$上的顶点重新排序，使其成为$\Gamma'=v_1v_2\ldots v_lv_{l+1}$，对$\Gamma'$重复（a）~（c），在有限步内一定得到$G$的一条哈密顿 通路。

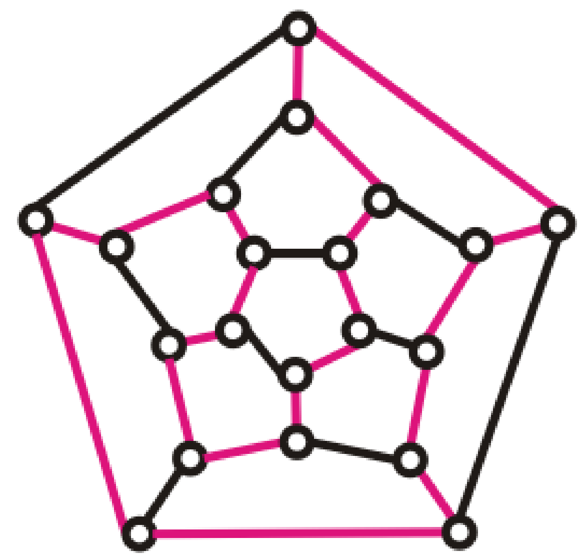
推论 当$n \geq 3$时，若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于n，则G中存在哈密顿回路.

证明：由以上定理可知，G中存在哈密顿通路，设$\Gamma = v_1 v_2 \dots v_n$为$G$中一条哈密顿通路，若$v_1$和$v_n$相邻，设边$e = (v_1, v_n)$，则$\Gamma \cup \{e\}$为$G$中哈密顿回路。若$v_1$和$v_n$不相邻，应用$d(v_i) + d\left(v_j\right) \geq n$，同前面定理证明中的（2）类似，可以证明存在过$\Gamma$上各顶点的圈，此圈即为$G$中的哈密顿回路。

判断是否是哈密顿图的可行方法

- 观察出一条哈密顿回路

例如 右图(周游世界问题)中红边给出一条哈密顿回路, 故它是哈密顿图.



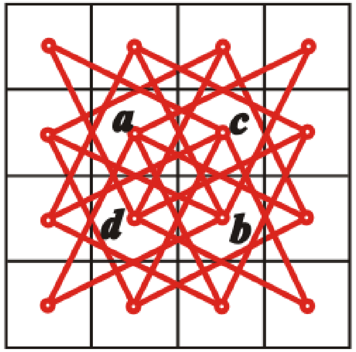
- 满足充分条件

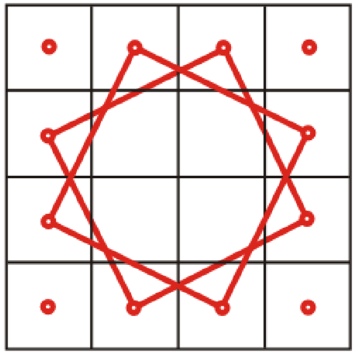
例如 当$n \geq 3$时, K_n中任何两个不同的顶点 u,v, 均有$d(u)+d(v) = 2(n-1) \geq n$, 所以$K_n$为哈密顿图.

判断是否是哈 密顿图的可行方法(续)

- 不满足必要条件

例 4×4国际象棋盘上的跳马问题: 马是否能恰好经过每一个方格一次后回到原处?





解 每个方格看作一个顶点, 2个顶点之间有边当且仅当马可以从一个方格跳到另一个方格, 得到16阶图G, 如左图红边所示. 取$V_1=\{a, b, c, d\}$, 则$p(G-V_1) = 6 >|V_1|$, 见右图. 由定理, 图中无哈密顿回路, 故问题无解.

在8×8国际象棋盘上, 跳马问题是否有解?

判断是否为哈密顿图是NP完全的

应用实例

例 某次国际会议8人参加，已知每人至少与其余7人中的4人有共同语言，问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座，使得每个人都能与两边的人交谈？

解 作无向图$G=\langle V,E \rangle$, 其中$V=\{v|v$为与会者$\}$,

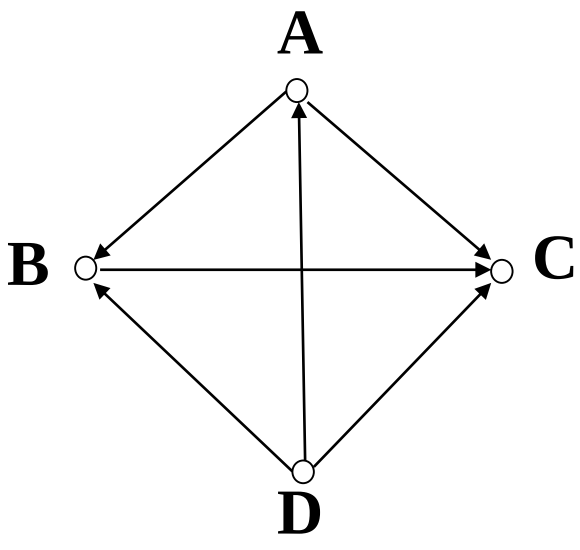
$E=\{(u,v) \mid u,v\in V$, u与v有共同语言, 且$u\neq v\}$.

G为简单图. 根据条件, $\forall v\in V$, $d(v)\geq 4$. 于是, $\forall u,v\in V$, 有$d(u)+d(v)\geq 8$. 由定理可知G为哈密顿图. 服务员在G中找一条哈密顿回路C，按C中相邻关系安排座位即可.

竞赛图

竞赛图: 任意两个顶点之间恰好有一条有向边.

在循环赛中, *n*个参赛队中的任意两个队比赛一次, 假设没有平局, 用有向图描述比赛结果: 顶点表示参赛队, A到B有一条边当且仅当A队胜B队.



竞赛图(续)

定理 在$n(n\geq 2)$阶有向图D中, 如果所有有向边均用无向边代替, 所得无向图中含生成子图K_n, 则有向图D中存在哈密顿通路.

根据定理, 竞赛图中一定有哈密顿通路, 当然也可能有哈密顿回路. 当没有哈密顿回路时, 通常只有一条哈密顿通路, 这条通路给出参赛队的惟一名次.

例如, DABC是一条哈密顿通路, 它没有哈密顿回路, 比赛结果是D第一, A第二,B第三, C第四.

定理 在$n(n\geq 2)$阶有向图D中，如果所有有向边均用无向边代替，所得无向图中含生成子图K_n，则有向图D中存在哈密顿通路.

证明：对 n做归纳法。

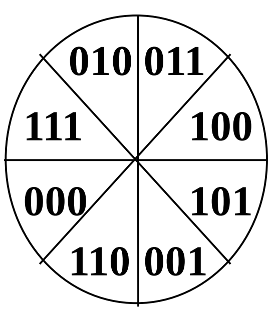
$n=2$时，D的基图为K_2，结论成立。

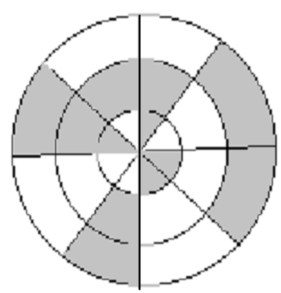
设$n=k$时结论成立。现在设$n=k+1$。设$V(D)=\{v_1,v_2,\dots v_k,v_{k+1}\}$。令$D_1=D-v_{k+1}$，易知$D_1$为$k$阶竞赛图，由归纳假设可知，$D_1$存在哈密顿通路，设$\Gamma_1=v_1'v_2'\dots v_k{}'$为其中一条。下面证明$v_{k+1}$可以扩到$\Gamma_1$中去。若存在$v_r{}'(1\leq r\leq k)$，有$<v_i',v_{k+1}>\in E(D), i=1,2,\dots r-1$，而$<v_{k+1},v_r{}'>\ \in E(D)$，则$\Gamma=v_1'v_2'\dots v_{r-1}{}'v_{k+1}{}'v_r{}'\dots v_k{}'$为$D$中哈密顿通路，否则，$\forall i\in\{1,2,\dots,k\}$，均有$<v_i',v_{k+1}>\in E(D)$，则$\Gamma=\Gamma_1\cup<v_i',v_{k+1}>=v_1'v_2'\dots v_k{}'v_{k+1}$为$D$中哈密顿通路。

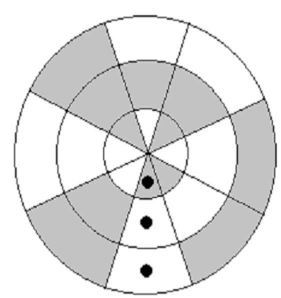
格雷码(gray code)

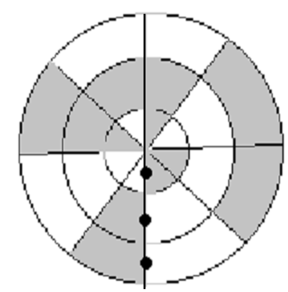
为了确定圆盘停止旋转后的位置, 把圆盘划分成2^n个扇区, 每个扇区分配一个n位0-1串. 要用某种电子装置读取扇区的赋值. 当圆盘停止旋转后, 如果电子装置处于一个扇区的内部, 它将能够正确的读出这个扇区的赋值, 如果电子装置恰好处于两个扇区的边界上, 就可能出问题.

如何赋值, 才能将可能出现的误差减少到最小?









格雷码(续)

格雷码: 相邻的两个以及最后一个和第一个之间只有一位不同的n位0-1串序列

例如，000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100是一个格雷码

构造n维立方体图: 2^n个顶点, 每个顶点表示一个n位串, 两个顶点之间有一条边当且仅当它们的n位串仅相差一位.

可以证明，当$n \geq 2$时, 图中一定存在哈密顿回路.