第2章 一阶逻辑

2.1 一阶逻辑基本概念

2.2 一阶逻辑合式公式及解释

2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

2.1 一阶逻辑基本概念

- 个体词
- 谓词
- 量词
- 一阶逻辑中命题符号化

命题逻辑的局限性

苏格拉底三段论:

凡是人都要死的.

苏格拉底是人.

所以苏格拉底是要死的.

受教育者努力学习是一条法律规定。（《中华人民共和国教育法》：受教育者应当履行努力学习，完成规定学习任务的义务。）

大学生是受教育者

大学生不努力学习是违法的

在命题逻辑中，只能用p、q、r表示以上例子中的3个命题，

上述2个推理都可表成 $(p \wedge q) \rightarrow r$

这不是重言式

基本概念——个体词、谓词、量词

个体词（个体）: 所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的客体

个体常项：具体的事物，用*a*, *b*, *c*表示（苏格拉底）

个体变项：抽象的事物，用*x*, *y*, *z*表示（凡是人）

个体域（论域）: 个体变项的取值范围（人类）

有限个体域，如{*a*, *b*, *c*}, {1, 2}

无限个体域，如N, Z, R, …

全总个体域：宇宙间一切事物组成

基本概念 (续)

谓词: 表示个体词性质或相互之间关系的词

（常用大写字母表示：**F,G,H…**）

例如：$F(x)$：个体变项x具有性质F； $F(a)$：a是人

谓词常项：表示具体性质或关系的谓词

谓词变项：表示抽象的或泛指的谓词

基本概念 (续)

元数: 谓词中包含的个体词数

一元谓词: 通常表示事物的性质

多元谓词(n元谓词, $n\geq 2$): 通常表示事物之间的关系

如 $L(x,y)$：x与y有关系L，$L(x,y)$：$x\geq y$，…

0元谓词: 不含个体变项的谓词, 即命题常项或命题变项

注意：单独的个体词和谓词都不能构成命题。

另外，谓词变项$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$不是命题，真值无法确定，需要给P指定谓词常项、用n个个体常项代替n个个体变项$x_1, x_2, \ldots, x_n$

基本概念(续)

量词: 表示数量的词

全称量词∀: 表示任意的, 所有的, 一切的等

如 $\forall x$ 表示对个体域中所有的x

存在量词∃: 表示存在, 有的, 至少有一个等

如 $\exists x$ 表示在个体域中存在x

一阶逻辑中命题符号化

例 将命题符号化

要求：先将它们在命题逻辑中符号化，再在一阶逻辑中符号化

(1) 墨西哥位于南美洲

在命题逻辑中, 设 p: 墨西哥位于南美洲

符号化为 p

在一阶逻辑中，设a：墨西哥，$F(x)$：x位于南美洲，符号化为$F(a)$

例(续)

(2) 如果$\sqrt{2}$是无理数，那么$\sqrt{3}$ 是有理数

在命题逻辑中, 设 p:$\sqrt{2}$ 是无理数，q: $\sqrt{3}$ 是有理数.

符号化为 $p \to q$

在一阶逻辑中, 设$F(x)$: x是无理数, $G(x)$: x是有理数

符号化为 $F(\sqrt{2}) \to G(\sqrt{3})$

(3) 如果2>3，则3<4

在命题逻辑中, 设 p：2>3，q：3<4.

符号化为 $p \to q$

在一阶逻辑中, 设 $F(x,y)$：$x>y$，$G(x,y)$：$x<y$,

符号化为 $F(2,3) \to G(3,4)$

一阶逻辑中命题符号化(续)

例 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 人都爱美; (2) 有人用左手写字

分别取(a) D为人类集合, (b) D为全总个体域 .

解：(a) (1) 设$G(x)$: x爱美, 符号化为 $\forall x\, G(x)$

(2) 设$G(x)$: x用左手写字, 符号化为 $\exists x\, G(x)$

(b) 设$F(x)$: x为人（特性谓词）, $G(x)$: 同(a)中

(1) $\forall x\, (F(x) \rightarrow G(x))$

(2) $\exists\, x\, (F(x) \wedge G(x))$

这是两个基本公式, 注意它们的使用

一阶逻辑中命题符号化(续)

例 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 正数都大于负数

(2) 有的无理数大于有的有理数

解 注意: 题目中没给个体域, 使用全总个体域

(1) 令$F(x)$: x为正数, $G(y)$: y为负数, $L(x,y)$: $x>y$

$$\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow L(x,y)))$$

或 $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow L(x,y))$ 两者等值

(2) 令$F(x)$: x是无理数, $G(y)$: y是有理数,

$L(x,y)$: $x>y$

$$\exists x(F(x)\wedge\exists y(G(y)\wedge L(x,y)))$$

或 $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))$ 两者等值

一阶逻辑中命题符号化(续)

几点注意：

（1）个体域不同，命题符号化的形式可能不同

（2）没给出个体域时, 应使用全总个体域

（3）引入特性谓词之后，全称量词和存在量词的符号化形式是不同的（$\forall x\ (F(x)\rightarrow G(x))$和$\exists\ x\ (F(x)\wedge G(x))$）

（4）个体域和谓词的含义确定之后，***n***元谓词要转化为命题，至少需要***n***个量词

（5）个体域为有限集{***a1，a2…an***}时，

$$\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a1) \wedge A(a2) \wedge \ldots \wedge A(an)$$

$$\exists\ x A(x) \Leftrightarrow A(a1) \vee A(a2) \vee \ldots \vee A(an)$$

一阶逻辑中命题符号化(续)

（6）量词顺序一般不能随便颠倒

假设个体域为实数集，$H(x,y)$：$x+y=5$，

对任意x存在y，使得$x+y=5$，可以符号化为

$$\forall x \exists y\, H(x,y)$$（真命题）

$$\exists y \quad x\, H(x,y)$$（假命题）

（7）否定的表示，如

“没有不呼吸的人”等同于“所有的人都呼吸”

“不是所有的人都喜欢吃糖”等同于“存在不喜欢吃糖的人”

【例 2.2】 在一阶逻辑中将下面命题符号化：

(1) 自然数皆为整数.

(2) 有的自然数是负数.

要求：① 个体域为自然数集合 N.

② 个体域为实数集合 R.

③ 个体域为全总个体域.

解 ① (1),(2)均讨论个体域自然数集 N 中全体元素的性质，因而不用引入特性谓词.

(1) $\forall xF(x)$，其中 $F(x)$：x 为整数.

(2) $\exists xG(x)$，其中 $G(x)$：x 为负数.

② (1),(2)均讨论的是个体域实数集 R 的真子集自然数集 N 的性质，因而应引入特性谓词：$N(x)$：x 为自然数.

(1) $\forall x(N(x)\rightarrow F(x))$，$F(x)$的涵义同①.

(2) $\exists x(N(x)\wedge G(x))$，$G(x)$的涵义同①.

③ 与②中形式相同.

在各不同的 3 个个体域中，(1)为真命题，(2)为假命题.

【例 2.3】 将下面命题符号化：

(1) 对于任意的 x，均有 $x^2-1=(x+1)(x-1)$.

(2) 存在 x，使得 $x+10=8$.

要求：① 个体域为自然数集合 N.

② 个体域为实数集合 R.

解 ① 不用引入特性谓词.

(1) $\forall xF(x)$，其中 $F(x)$：$x^2-1=(x+1)(x-1)$.

(2) $\exists xG(x)$，其中 $G(x)$：$x+10=8$.

这里，(1)为真命题，而(2)为假命题.

② 也不引入特性谓词.(1)，(2)符号化的形式同①，但此时(1)，(2)均为真命题.

【例 2.4】 在一阶逻辑中将下列命题符号化：

(1) 凡正数都大于 0；

(2) 存在小于 3 的素数；

(3) 没有不能表示成分数的有理数；

(4) 参加考试的人未必都能取得好成绩.

解 在本题中，没有指定个体域，因而应该使用全总个体域.

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，其中 $F(x)$：x 是正数，$G(x)$：x 大于 0.

(2) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$，其中 $F(x)$：x 小于 3，$G(x)$：x 是素数.

(3) $\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$，其中 $F(x)$：x 为有理数，$G(x)$：x 能表示成分数.

"没有不能表示成分数的有理数"与"所有的有理数都能表示成分数"是同一个命题的不同的叙述方法，因而本命题也可以符号化为

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)).$$

(4) $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，其中 $F(x)$：x 是参加考试的人，$G(x)$：x 取得好成绩.

类似于(3)，本命题也可以符号化为

$$\exists x(F(x)\wedge\neg G(x)).$$

【例 2.5】 在一阶逻辑中将下列命题符号化：

(1) 兔子比乌龟跑得快.

(2) 有的兔子比所有的乌龟跑得快.

(3) 并不是所有的兔子比所有的乌龟跑得快.

(4) 不存在同样高的两个人.

解 在题中没有指明个体域，因而采用全总个体域. (1)—(3)都与兔子，乌龟有关. 设 $F(x)$: x 是兔子，$G(y)$: y 是乌龟，$H(x,y)$: x 比 y 跑得快.

(1) $\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \to H(x,y))$.

(2) $\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \to H(x,y)))$.

(3) $\neg \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \to H(x,y))$或者$\exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x,y))$.

(4) $F(x)$: x 是人，$G(x,y)$: $x \neq y$, $H(x,y)$: x 与 y 一样高.

$$\neg \exists x \exists y(F(x) \wedge F(y) \wedge G(x,y) \wedge H(x,y)).$$

或者

$$\forall x \forall y(F(x) \wedge F(y) \wedge G(x,y) \to \neg H(x,y)).$$

2.2 一阶逻辑公式及解释

- 合式公式(简称公式)
- 个体变项的自由出现和约束出现
- 解释与赋值
- 公式分类

  永真式，矛盾式，可满足式

字母表

定义 字母表包含下述符号：

(1) 个体常项：$a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$

(2) 个体变项：$x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$

(3) 函数符号：$f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$

(4) 谓词符号：$F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$

(5) 量词符号：$\forall, \exists$

(6) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(7) 括号与逗号：(,), ,

项

定义 项的定义如下：

(1) 个体常项和个体变项是项.

(2) 若$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的$n$元函数，$t_1,t_2,\ldots,t_n$是任意的$n$个项，则$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项.

(3) 所有的项都是有限次使用 (1), (2) 得到的.

个体常项、变项是项，由它们构成的n元函数和复合函数还是项

a,b,x,y,z，$f(x,y)=x\cdot y$，$g(x,y)=x^2+y^2,h(x,y)=2x-y$ 等都是项；

$f(x,g(x,y))=x(x^2+y^2),g(f(x,y),h(x,y))=x^2y^2+(2x-y)^2$ 等也都是项.

原子公式

定义 设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的n元谓词，$t_1,t_2,\ldots, t_n$是任意的n个项，则称$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是原子公式.

原子公式是由项组成的n元谓词.

例如，$F(x,y)$, $F(f(x_1,x_2),g(x_3,x_4))$等均为原子公式

以上2个定义中φ和R不是字母表中的符号，分别表示任意的函数和任意的谓词，属于元语言（描述语言的语言）

合式公式

定义 合式公式（简称公式）定义如下：

(1) 原子公式是合式公式.

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式

(4) 若A是合式公式，则$\forall xA$, $\exists xA$也是合式公式

(5) 只有有限次地应用(1)~(4)形成的符号串是合式公式.

如 $x\geq 0$, $\forall x\,(F(x)\rightarrow G(x))$, $\forall x\exists y(x+y=1)$

个体变项的自由出现与约束出现

定义 在公式$\forall xA$和$\exists xA$中，称x为指导变元，A为相应量词的辖域. 在$\forall x$和$\exists x$的辖域中，x的所有出现都称为约束出现，A中不是约束出现的其他变项均称为是自由出现.

例如, 在公式 $\forall x(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$ 中,

$A=(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$为$\forall x$的辖域,

x为指导变元, A中x的两次出现均为约束出现,

y与z均为自由出现.

闭式（封闭的合式公式）：不含自由出现的个体变项的公式.

例如，$\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$，$\exists x \exists y L(x, y)$等都是闭式，而 $F(x) \rightarrow \forall y(G(y) \rightarrow H(x, y))$，$F(x) \wedge G(x)$等都不是闭式. 要想使含 $n(n \geqslant 1)$个自由出现的个体变项的公式变成闭式，至少要加 n 个量词. 例如要使$(F(x) \rightarrow G(x, y) \wedge L(x, y, z))$成为闭式，可加 3 个量词，例如$\forall x(F(x) \rightarrow \exists y(G(x, y) \wedge \forall z L(x, y, z)))$就已成为闭式了.

换名规则：将一个指导变项及其在辖域中所有约束出现替换成公式中没有出现的个体变项符号，其余部分保持不变。所得公式和原公式等值。

$$\forall x F(x) \rightarrow G(x, y)$$

$$\forall z F(z) \rightarrow G(x, y)$$

公式的解释与分类

给定闭式 $A=\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

取个体域N, $F(x)$: $x>2$, $G(x)$: $x>1$

代入得$A=\forall x(x>2\rightarrow x>1)$　　真命题

给定非闭式 $B=\forall xF(x,y)$

取个体域N, $F(x,y)$: $x\geq y$

代入得$B=\forall x(x\geq y)$　　不是命题

令$y=1$, $B=\forall x(x\geq 1)$　　假命题

解释和赋值

定义 解释I由下面4部分组成:

(a) 非空个体域D_I

(b) 对每一个个体常项a 指定一个元素 $\bar{a} \in D_I$

(c) 对每一个函数符号f指定一个D_I上的函数 $\bar{f}$

(d) 对每一个谓词符号F指定一个D_I上的谓词 $\bar{F}$

赋值σ: 给定解释I，对公式中每一个自由出现的个体变项x指定个体域D_I中的一个元素$\sigma(x)$

公式A在解释I和赋值σ下的含义: 取个体域D_I，并将公式中出现的a、f、F 分别解释成 $\bar{a}$、$\bar{f}$、$\bar{F}$，把自由出现的x换成$\sigma(x)$后所得到的命题.

在给定的解释和赋值下, 任何公式都成为命题.

【例 2.7】 给定解释 I_1 如下：

(i) $D_1=\{2,3\}$；

(ii) D_1 中特定元素 $a=2$；

(iii) 函数 $f(x)$ 为 $f(2)=3, f(3)=2$；

(iv) 谓词 $F(x)$ 为 $F(2)=0, F(3)=1$；

$G(x,y)$ 为 $G(2,2)=G(2,3)=G(3,2)=1, G(3,3)=0$；

$L(x,y)$ 为 $L(2,2)=L(3,3)=1, L(2,3)=L(3,2)=0$.

在这个解释下，求下列各式的真值：

(1) $\forall x(F(x)\wedge G(x,a))$.

(2) $\exists x(F(f(x))\wedge G(x,f(x)))$.

(3) $\forall x\exists yL(x,y)$.

(4) $\exists y\forall xL(x,y)$.

解 设以上公式分别为 A,B,C,D.

(1) $A\Leftrightarrow(F(2)\wedge G(2,2))\wedge(F(3)\wedge G(3,2))$

$\Leftrightarrow(0\wedge 1)\wedge(1\wedge 1)\Leftrightarrow 0.$

(2) $B\Leftrightarrow(F(f(2))\wedge G(2,f(2)))$

$\vee(F(f(3))\wedge G(3,f(3)))$

$\Leftrightarrow(F(3)\wedge G(2,3))\vee(F(2)\wedge G(3,2))$

$\Leftrightarrow(1\wedge 1)\vee(0\wedge 1)\Leftrightarrow 1.$

(3) $G\Leftrightarrow(L(2,2)\vee L(2,3))\wedge(L(3,2)\vee L(3,3))$

$\Leftrightarrow 1\wedge 1\Leftrightarrow 1.$

(4) $D\Leftrightarrow\exists y(L(2,y)\wedge L(3,y))$

$\Leftrightarrow(L(2,2)\wedge L(3,2))\vee(L(2,3)\wedge L(3,3))$

$\Leftrightarrow 0\vee 0\Leftrightarrow 0.$

实例

例 给定解释I 如下:

(*a*) 个体域 D=N

(*b*) $\bar{a}=2$

(*c*) $\bar{f}(x,y)=x+y$, $\bar{g}(x,y)=xy$

(*d*) 谓词 $\bar{F}(x,y): x=y$

以及赋值σ: $\sigma(x)=0$, $\sigma(y)=1$, $\sigma(z)=2$.

说明下列公式在 I 与σ下的涵义,并讨论真值

(1) $\forall xF(g(x,a),y)$

$\forall x(2x=1)$　　假命题

例(续)

例 给定解释 I 如下:

(a) 个体域 D=N

(b) $\bar{a}=2$

(c) $\bar{f}(x,y)=x+y$, $\bar{g}(x,y)=xy$

(d) 谓词 $\bar{F}(x,y): x=y$

以及赋值σ: $\sigma(x)=0$, $\sigma(y)=1$, $\sigma(z)=2$.

(2) $\forall xF(f(x,a),y)\rightarrow\forall yF(x,f(y,a)))$

$\forall x(x+2=1)\rightarrow\forall y(0=y+2)$ 真命题

(3) $\exists xF(f(x,y),g(x,z))$

$\exists x(x+1=2x)$ 真命题

(4) $\forall x\forall y\exists zF(f(x,y),z)$

$\forall x\forall y\exists z\,(x+y=z)$ 真命题

(5) $\exists x\forall y\forall zF(f(y,z),x)$

$\exists x\forall y\forall z\,(y+z=x)$ 假命题

闭式只需要解释，不需要赋值就可以构成命题, 如(4),(5)

公式的分类

一个谓词公式A是

永真式(逻辑有效式):在任何解释和赋值下为真命题

矛盾式(永假式):在任何解释和赋值下为假命题

可满足式：存在成真的解释和赋值

说明：

永真式为可满足式，但反之不真

谓词公式的可满足性（永真性,永假性)是不可判定的

代换

定义 设A_0是含命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个谓词公式，用A_i处处代替A_0中的p_i $(1 \le i \le n)$，所得公式A称为A_0的代换实例.

如 $F(x) \to G(x)$, $\forall x F(x) \to \exists y G(y)$是$p \to q$的代换实例

定理　命题公式中重言式的代换实例都是永真式，命题公式中矛盾式的代换实例都是矛盾式.

实例

例 判断下列公式的类型

(1) $\forall xF(x)\rightarrow\exists xF(x)$;

设I为任意的解释，若$\forall xF(x)$为假，则$\forall xF(x)\rightarrow\exists xF(x)$为真. 若$\forall xF(x)$为真，则$\exists xF(x)$也为真，所以$\forall xF(x)\rightarrow\exists xF(x)$也为真.

是逻辑有效式.

(2) $\forall xF(x)\rightarrow(\forall x\exists yG(x,y)\rightarrow\forall xF(x))$;

重言式$p\rightarrow(q\rightarrow p)$ 的代换实例，是逻辑有效式.

例(续)

(3) $\forall xF(x)\rightarrow(\forall xF(x)\vee\exists yG(y))$;

重言式$p\rightarrow(p\vee q)$的代换实例，是逻辑有效式.

(4) $\neg(F(x,y)\rightarrow R(x,y))\wedge R(x,y)$;

矛盾式$\neg(p\rightarrow q)\wedge q$的代换实例，是矛盾式.

例(续)

(5) $\forall x\exists yF(x,y)\rightarrow\exists x\forall yF(x,y)$.

取解释I：个体域N，$F(x,y)$为$x=y$.

公式被解释为$\forall x\exists y(x=y)\rightarrow\exists x\forall y(x=y)$，其值为假.

解释I'：个体域N, $F(x,y)$为$x\leq y$, 得到一个新的 在I'下,

公式被解释为$\forall x\exists y(x\leq y)\rightarrow\exists x\forall y(x\leq y)$，其值为真.

是非逻辑有效式的可满足式.

例(续)

(6) $\exists x F(x,y)$

取解释I：个体域N，$F(x,y)$为$x<y$. 赋值σ_1：$\sigma_1(y)=1$.

在I和σ_1下，$\exists x(x<1)$，真命题.

取解释I：个体域N, $F(x,y)$为$x<y$. 赋值σ_2：$\sigma_2(y)=0$.

在I和σ_2下，$\exists x(x<0)$，假命题

是非逻辑有效式的可满足式.