集合论

集合论部分

- 第3章 集合的基本概念和运算
- 第4章 二元关系和函数

第3章 集合的基本概念和运算

- 3.1 集合的基本概念
- 3.2 集合的基本运算
- 3.3 集合中元素的计数

3.1 集合的基本概念

- 集合的定义与表示
- 集合与元素
- 集合之间的关系
- 空集
- 全集
- 幂集

集合定义与表示

集合 没有精确的数学定义

理解：一些离散个体组成的全体

组成集合的个体称为它的元素或成员

集合的表示(通常用大写字母来标记)

列元素法 $A=\{ a, b, c, d \}$

谓词表示法 $B=\{ x \mid P(x) \}$

B 由使得 $P(x)$ 为真的 x 构成

常用数集

N, Z, Q, R, C 分别表示自然数、整数、有理数、实数和复数集合，注意 0 是自然数.

集合与元素

元素与集合的关系：隶属关系

属于$\in$，不属于 $\notin$

实例

$A=\{\, x \mid x\in \mathrm{R} \wedge x^2-1=0 \,\}$, $A=\{-1,1\}$

则 $1\in A$, $2\notin A$

注意：对于任何集合 A 和元素 x (可以是集合)，

$x\in A$和 $x\notin A$ 两者成立其一，且仅成立其一.

集合与元素

- 集合的元素具有的性质
- 无序性：元素列出的顺序无关
- 相异性：集合的每个元素只计数一次
- 确定性：对任何元素和集合都能确定这个元素是否为该集合的元素
- 任意性：集合的元素也可以是集合

隶属关系的层次结构

例 3.1

$A=\{ a, \{b,c\}, d, \{\{d\}\} \}$

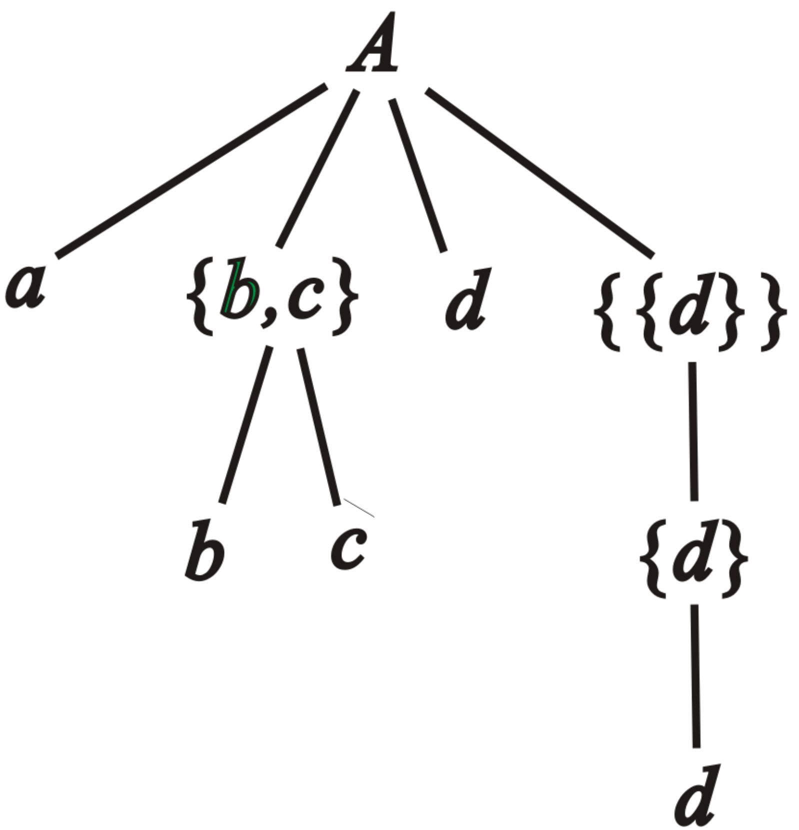
$\{b,c\}\in A$

$b\notin A$

$\{\{d\}\}\in A$

$\{d\}\notin A$

$d\in A$



集合之间的关系

包含（子集） $A \subseteq B$

$\Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in B)$

不包含 $A \nsubseteq B$

$\Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$

相等 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

不相等 $A \neq B$

真包含 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

不真包含 $A \not\subset B$

思考： $\neq$ 和 $\not\subset$ 的定义

注意 $\in$ 和 $\subseteq$ 是不同层次的问题

空集与全集

空集 $\varnothing$ 不含任何元素的集合

实例 $\{x \mid x^2+1=0 \wedge x \in \mathbf{R}\}$ 就是空集

定理 空集是任何集合的子集

证 $\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in \varnothing \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T$

推论 空集是惟一的.

证 假设存在$\varnothing_1$和$\varnothing_2$，则$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$且$\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$，因此$\varnothing_1 = \varnothing_2$

例： 判断命题真值 1. $\varnothing \subseteq \varnothing$； 2. $\varnothing \in \varnothing$； 3. $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$； 4. $\varnothing \in \{\varnothing\}$。

全集 E(或者U)：涉及的集合都是该集合的子集

在给定问题中，全集包含任何集合，即$\forall A\,(A \subseteq E)$

相对性:与问题有关，不存在绝对的全集

n元集

- 含有n个元素的集合称为n元集，它的含有m（m<=n）个元素的子集称为它的m元子集

【例3.1】 $A=\{0,1,2\}$，将 A 的子集分类：

0元子集，也就是空集，只有一个：$\varnothing$；

1元子集，即**单元集**：$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$；

2元子集：$\{0,1\}$，$\{0,2\}$，$\{1,2\}$；

3元子集：$\{0,1,2\}$.

一般地说，对于 n 元集 A，它的0元子集有 C_n^0 个，1元子集有 C_n^1 个，…，m 元子集有 C_n^m 个，…．n 元子集有 C_n^n 个．子集总数为

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$$

幂集

定义　A的全体子集构成的集合，称为A的幂集，记作$P(A) = \{ x \mid x \subseteq A \}$

计数

如果 $|A| = n$，则 $|P(A)| = 2^n$

实例

$P(\{a,b,c\})=?$

$P(\varnothing) = \{\varnothing\}$,

$P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$P(\{\varnothing,\{\varnothing\}\}) = \{\varnothing,\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

$P(\{1,\{2,3\}\})=\{\varnothing,\{1\},\{\{2,3\}\},\{1,\{2,3\}\}\}$

3.2 集合的基本运算

- 集合基本运算的定义

  $\cup$ $\cap$ $-$ $\sim$ $\oplus$
- 文氏图（John Venn）
- 例题
- 集合运算的算律
- 集合包含或恒等式的证明

集合基本运算的定义

并 $A \cup B = \{ x \mid x \in A \lor x \in B \}$

交 $A \cap B = \{ x \mid x \in A \land x \in B \}$

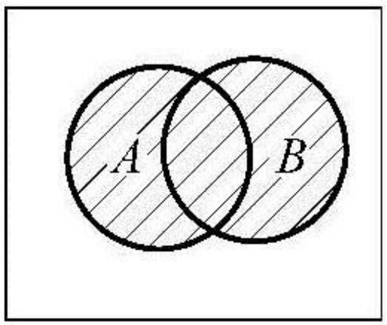
相对补 $A - B = \{ x \mid x \in A \land x \notin B \}$

对称差 $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

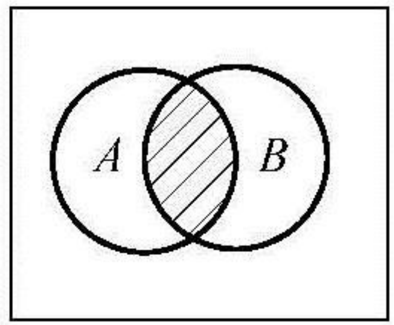
$= (A \cup B) - (A \cap B)$

绝对补 $\sim A = E - A$

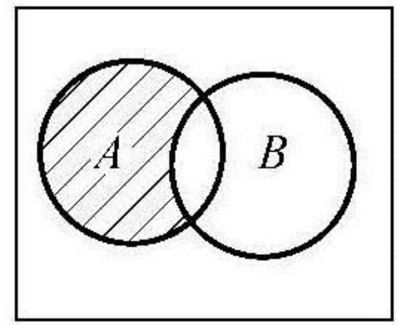
文氏图表示



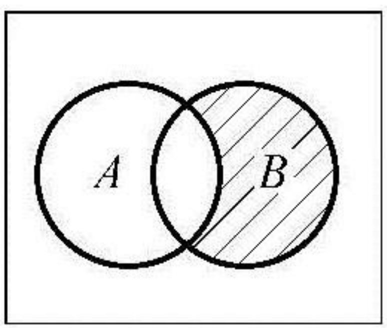
$A \cup B$



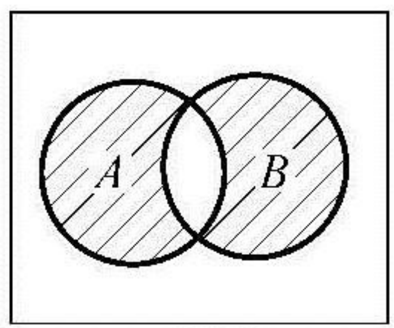
$A \cap B$



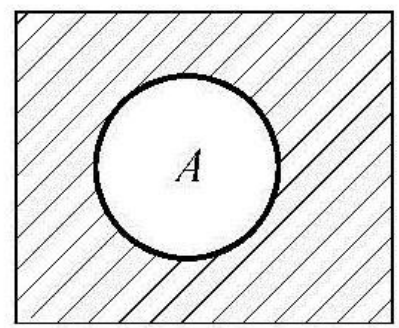
$A - B$



$B - A$



$A \oplus B$



$\sim A$

关于运算的说明

- 运算顺序：~和幂集优先，其他由括号确定
- 并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}$$

- 某些重要结果

$$\varnothing \subseteq A - B \subseteq A$$

$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$（后面证明）

$$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A - B = A$$

例1

F:一年级大学生的集合　　S：二年级大学生的集合

R：计算机系学生的集合　　M：数学系学生的集合

T：选修离散数学的学生的集合

L：爱好文学学生的集合　　P：爱好体育运动学生的集合

所有计算机系二年级学生都选修离散数学

数学系一年级的学生都没有选修离散数学

数学系学生或爱好文学或爱好体育运动

只有一、二年级的学生才爱好体育运动

除去数学和计算机系二年级学生外都不选修离散数学

$T \subseteq (M \cup R) \cap S$

$R \cap S \subseteq T$

$(M \cap F) \cap T = \varnothing$

$M \subseteq L \cup P$

$P \subseteq F \cup S$

$S-(M \cup R) \subseteq P$

例2

分别对条件(1)到(5)，确定 X 集合与下述那些集合相等。

$S_1 = \{ 1, 2, \ldots, 8, 9 \}$, $S_2 = \{ 2, 4, 6, 8 \}$, $S_3 = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$,

$S_4 = \{ 3, 4, 5 \}$, $S_5 = \{ 3, 5 \}$

(1) 若 $X \cap S_3 = \varnothing$, 则 X $= S_2$

(2) 若 $X \subseteq S_4$, $X \cap S_2 = \varnothing$, 则 X $= S_5$

(3) 若 $X \subseteq S_1$，$X \not\subseteq S_3$, 则 X $= S_1, S_2, S_4$

(4) 若 $X - S_3 = \varnothing$, 则 X $= S_3, S_5$

(5) 若 $X \subseteq S_3$，$X \not\subseteq S_1$, 则 X 与 $S_1, \ldots, S_5$ 都不等

1.2.2 集合运算算律

任何代数运算都遵从一定的算律，集合运算也不例外。下面给出集合运算的主要算律，其中A，B，C表示任意的集合。

幂等律 $A\cup A=A$，$A\cap A=A$

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

同一律 $A\cup\varnothing=A$，$A\cap U=A$

零　律 $A\cup U=U$，$A\cap\varnothing=\varnothing$

排中律 $A\cup\sim A=U$

矛盾律 $A\cap\sim A=\varnothing$

吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$

双重否定律 $\sim(\sim A)=A$

德·摩根律 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$　　$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$　　$\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$

$\sim\varnothing=U$　　$\sim U=\varnothing$

1.2.2 集合运算算律续

除了以上算律，还有一些关于集合运算性质的重要结论，在此一并给出。

$$A \cap B \subseteq A \quad A \cap B \subseteq B \qquad A \subseteq A \cup B \quad B \subseteq A \cup B$$

$$A - B \subseteq A \qquad A - B = A \cap \sim B$$

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$$

$$A \oplus B = B \oplus A \qquad (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

$$A \oplus \varnothing = A \quad A \oplus A = \varnothing \qquad A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C$$

$A - B = A \cap \sim B$ 建立了相对补运算和交运算之间的联系，可以利用它将相对补转变成交。 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$ 给出了$A \subseteq B$的三种等价的定义，为证明两个集合之间包含关系提供了新方法，同时也可以用于集合公式的化简。

集合运算的算律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C=$ $A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C=$ $A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

	$\cup$与$\cap$	$\cap$与$\oplus$
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

集合运算的算律（续）

	$-$	$\sim$
$D.M$ 律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

例3.4 证明3.17 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

证明 对任意的 x，

$$
\begin{aligned}
& x\in A-(B\cup C)\\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge x\notin B\cup C\\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge\neg(x\in B\cup C)\\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)\\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge(\neg x\in B\wedge\neg x\in C)\\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C\\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow\ & x\in A-B\wedge x\in A-C\\
\Leftrightarrow\ & x\in(A-B)\cap(A-C),
\end{aligned}
$$

例 证明3.10，即$A\cap E=A$

证明 对任意的 x，

$$x\in A\cap E\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in E\Leftrightarrow x\in A \text{（因为 } x\in E \text{ 是恒真命题），}$$

例 证明3.15，即 $A\cup(A\cap B)=A$,

证明

$$
\begin{aligned}
A\cup(A\cap B) &= (A\cap E)\cup(A\cap B) && \text{（由等式(3.10)）}\\
&= A\cap(E\cup B) && \text{（由等式(3.8)）}\\
&= A\cap(B\cup E) && \text{（由等式(3.5)）}\\
&= A\cap E && \text{（由等式(3.11)）}\\
&= A && \text{（由等式(3.10)）}
\end{aligned}
$$

例3.5 证明$(A-B)\cup B=A\cup B$

证明 $(A-B)\cup B=(A\cap\sim B)\cup B=(A\cup B)\cap(\sim B\cup B)=(A\cup B)\cap E=A\cup B$.

【例 3.6】 化简

$$((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A).$$

解 因为 $A\cup B\subseteq A\cup B\cup C$, $A\subseteq A\cup(B-C)$, 由式 3.28 有

$$((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)=(A\cup B)-A=B-A.$$

例3.7 若$A\subseteq B$，证明$\sim B\subseteq\sim A$

解：已知$A\subseteq B$，由3.28知，$B\cap A=A$，所以$\sim B\cup\sim A=\sim(B\cap A)=\sim A$，再由3.28，有$\sim B\subseteq\sim A$

证明：$A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$

-
- 先证：$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 事实上，$\forall x \in A \cup (B \cap C)$，则 $x \in A$ 或 $x \in B \cap C$
- 1.若 $x \in A$，则 $x \in A \cup B$，$x \in A \cup C$，于是 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 2.若 $x \in B \cap C$，则 $x \in B$ 且 $x \in C$，于是 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$
- 我们仍有 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 所以 $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 总成立
- 反之：设 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$，故 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$
- 若 $x \in A$，则 $x \in A \cup (B \cap C)$
- 若 $x \notin A$，则 $x \in B$ 且 $x \in C$
- 我们仍有 $x \in A \cup (B \cap C)$
- 得：$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$
- 因此：$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

设A,B,C为任意3个集合，试证$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

证明：$A-(B\cap C)=A\cap\sim(B\cap C)$

$=A\cap(\sim B\cup\sim C)$

$=(A\cap\sim B)\cup(A\cap\sim C)$

$=(A-B)\cap(A-C)$

设A,B,C为任意3个集合，试证$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

证明：（$A\cap B)-(A\cap C)=$ （$A\cap B)\cap\sim(A\cap C)$

$=(A\cap B)\cap(\sim A\cup\sim C)$

$=(A\cap B\cap\sim A)\cup(A\cap B\cap\sim C)$

$=\varnothing\cup(A\cap B\cap\sim C)$

$=A\cap B\cap\sim C$

$=A\cap(B-C)$

例1.4.3 设A,B,C为任意3个集合，试证（A ∩B) ∪C=A ∩(B ∪C)的充要条件是C⊆A

证明：

必要性 设 $\mathrm{x} \in C$, 则 $x \in (A \cap B) \cup C$

因为（A ∩B) ∪C=A ∩(B ∪C) 则

$\mathrm{x} \in A \cap (B \cup C)$, 即 $x \in A$, 于是 $C \subseteq A$

充分性 若 $C \subseteq A$ 则由分配律

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = A \cap (B \cup C)$$

集合包含或相等的证明方法

- 证明 $X \subseteq Y$
  - 命题演算法
  - 包含传递法
  - 等价条件法
  - 反证法
  - 并交运算法
- 证明 $X=Y$
  - 命题演算法
  - 等式代入法
  - 反证法
  - 运算法

以上的 X, Y 代表集合公式

命题演算法证 $X\subseteq Y$

任取 x，

$$x\in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x\in Y$$

例3 证明$A\subseteq B \Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$

任取x

$$x\in P(A) \Rightarrow x\subseteq A \Rightarrow x\subseteq B \Rightarrow x\in P(B)$$

任取x

$$x\in A \Rightarrow \{x\}\subseteq A \Rightarrow \{x\}\in P(A) \Rightarrow \{x\}\in P(B)$$

$$\Rightarrow \{x\}\subseteq B \Rightarrow x\in B$$

包含传递法证 $X \subseteq Y$

找到集合T 满足 $X \subseteq T$ 且 $T \subseteq Y$，从而有$X \subseteq Y$

例4 $A-B \subseteq A \cup B$

证 $A-B \subseteq A$

$A \subseteq A \cup B$

所以 $A-B \subseteq A \cup B$

利用包含的等价条件证 $X \subseteq Y$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \phi$$

例5 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证 $A \subseteq C \Rightarrow A \cup C = C$

$B \subseteq C \Rightarrow B \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$

命题得证

反证法证 $X\subseteq Y$

欲证$X\subseteq Y$, 假设命题不成立，必存在 x 使得 $x\in X$ 且 $x\notin Y$. 然后推出矛盾.

例6 证明 $A\subseteq C \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\cup B\subseteq C$

证 假设 $A\cup B \subseteq C$ 不成立,

则 $\exists x\ (x\in A\cup B\wedge x\notin C)$

因此 $x\in A$ 或 $x\in B$，且 $x\notin C$

若 $x\in A$, 则与 $A\subseteq C$ 矛盾;

若 $x\in B$, 则与 $B\subseteq C$ 矛盾.

利用已知包含式并交运算

由已知包含式通过运算产生新的包含式

$$X\subseteq Y \Rightarrow X\cap Z\subseteq Y\cap Z,\ X\cup Z\subseteq Y\cup Z$$

例7 证明 $A\cap C\subseteq B\cap C \wedge A-C\subseteq B-C \Rightarrow A\subseteq B$

证 $A\cap C\subseteq B\cap C$， $A-C \subseteq B-C$

上式两边求并，得

$(A\cap C)\cup(A-C) \subseteq (B\cap C)\cup(B-C)$

$\Rightarrow (A\cap C)\cup(A\cap{\sim}C) \subseteq (B\cap C)\cup(B\cap{\sim}C)$

$\Rightarrow A\cap(C\cup{\sim}C) \subseteq B\cap(C\cup{\sim}C)$

$\Rightarrow A\cap E \subseteq B\cap E$

$\Rightarrow A \subseteq B$

命题演算法证明$X=Y$

任取 x，

$x \in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in Y$

$x \in Y \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in X$

或者

$x \in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in Y$

例8 证明 $A \cup (A \cap B) = A$ （吸收律）

证 任取x,

$x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \cap B$

$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A$

等式替换证明$X=Y$

不断进行代入化简，最终得到两边相等

例9 证明$A\cup(A\cap B)=A$ （吸收律）

证 (假设交换律、分配律、同一律、零律成立)

$A\cup(A\cap B)$

$=(A\cap E)\cup(A\cap B)$ 同一律

$=A\cap(E\cup B)$ 分配律

$=A\cap(B\cup E)$ 交换律

$=A\cap E$ 零律

$=A$ 同一律

反证法证明$X=Y$

假设 $X=Y$ 不成立，则存在 x 使得 $x\in X$且$x\notin Y$，或者存在 x 使得 $x\in Y$且$x\notin X$，然后推出矛盾.

例10 证明以下等价条件

$$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$$

(1) (2) (3) (4)

证明顺序：

(1) ⇒(2), (2) ⇒(3), (3) ⇒(4), (4) ⇒(1)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$$
(1) (2) (3) (4)

(1) ⇒(2)

显然$B \subseteq A \cup B$，下面证明$A \cup B \subseteq B$.

任取x,

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B$$

因此有$A \cup B \subseteq B$. 综合上述（2）得证.

(2) ⇒(3)

$$A = A \cap (A \cup B) \Rightarrow A = A \cap B$$

（将$A \cup B$用B代入)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$$

(1) (2) (3) (4)

(3) $\Rightarrow$(4)

假设$A-B\neq\varnothing$, 即$\exists x\in A-B$，那么$x\in A$且$x\notin B$. 而

$$x\notin B \Rightarrow x\notin A\cap B.$$

从而与$A\cap B=A$矛盾.

(4) $\Rightarrow$(1)

假设$A\subseteq B$不成立，那么

$$\exists x\ (x\in A \wedge x\notin B) \Rightarrow x\in A-B \Rightarrow A-B\neq\varnothing$$

与条件（4）矛盾.

集合运算法证明$X=Y$

由已知等式通过运算产生新的等式

$X=Y \Rightarrow X\cap Z=Y\cap Z,\ X\cup Z=Y\cup Z$，$X-Z=Y-Z$

例11 证明$A\cap C=B\cap C \wedge A\cup C=B\cup C \Rightarrow A=B$

证 由 $A\cap C=B\cap C$ 和 $A\cup C=B\cup C$ 得到

$$(A\cup C)-(A\cap C)=(B\cup C)-(B\cap C)$$

从而有 $A\oplus C=B\oplus C$

因此

$$A\oplus C=B\oplus C \Rightarrow (A\oplus C)\oplus C=(B\oplus C)\oplus C$$

$$\Rightarrow A\oplus(C\oplus C)=B\oplus(C\oplus C) \Rightarrow A\oplus\varnothing=B\oplus\varnothing \Rightarrow A=B$$

习题：

1.设A，B为任意集合，证明: $(A-B) \cup (B-A)=(A \cup B)-(A \cap B)$.

2.设A，B为任意集合，证明:

(1) $(A-B)-C = A-(B \cup C)$

(2) $(A-B)-C =(A-C)-(B-C)$

(3) $(A-B)-C =(A-C)-B$

3.证明集合恒等式

(1) $A \cap (B \cup \sim A) = B \cap A$

(2) $\sim((\sim A \cup \sim B) \cap \sim A) = A$

4.设A，B为任意集合，证明如果$(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B)$，则$A \cap B= \varnothing$.

5.证明：$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

附加题：设A，B，C，D为任意集合，证明：

$A \cap C \subseteq B \cap C \wedge A - C \subseteq B - C \Rightarrow A \subseteq B$