4.4 关系的闭包

- 闭包定义
- 闭包的构造方法
  - 集合表示
  - 矩阵表示
  - 图表示
- 闭包的性质

- 考虑下列关系，$A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{< 1,2 >< 2,4 >< 2,3 >\}$
- 如何增加最少的元素，使得R成为
  - 自反关系？
  - 对称关系？
  - 传递关系？

闭包定义

定义 设R是非空集合A上的关系, R的自反（对称或传递）闭包是A上的关系R', 使得R'满足以下条件:

（1）R'是自反的（对称的或传递的）

（2）$R\subseteq R'$

（3）对A上任何包含R的自反（对称或传递）关系 R'' 有 $R'\subseteq R''$.

一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$, 对称闭包记作 $s(R)$, 传递闭包记作 $t(R)$.

闭包的构造方法

定理1 设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R) = R \cup R^0$

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

(3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

说明:

- 对于有穷集合A ($|A|=n$) 上的关系, (3)中的并最多不超过 R^n.
- 若 R是自反的，则 $r(R)=R$; 若R是对称的，则 $s(R)=R$; 若R是传递的，则 $t(R)=R$.

闭包的构造方法

- 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$, 求r(R),s(R),T(R)

闭包的构造方法（续）

(1) $r(R) = R \cup R^0$
(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$
(3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r, M_s 和 M_t, 则

$$M_r = M + E$$

$$M_s = M + M'$$

$$M_t = M + M^2 + M^3 + \ldots$$

E 是和 M 同阶的单位矩阵, M'是 M 的转置矩阵.

注意在上述等式中矩阵的元素相加时使用逻辑加.

闭包的构造方法（续）

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为G, G_r, G_s, G_t , 则G_r, G_s, G_t 的顶点集与G 的顶点集相等. 除了G 的边以外, 以下述方法添加新边：

考察G的每个顶点, 如果没有环就加上一个环，最终得到G_r .

考察G的每条边, 如果有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i \neq j$, 则在G中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边，最终得到G_s.

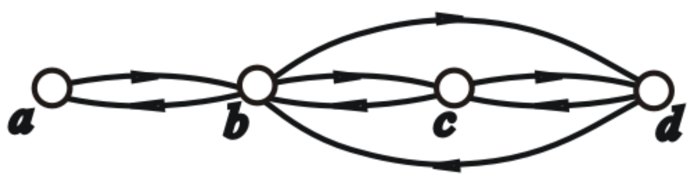
考察G的每个顶点 x_i, 找从 x_i 出发长度不超过n的每一条路径，如果从 x_i 到路径任何终点 x_j 没有边，就加上这条边. 当检查完所有的顶点后就得到图G_t .

实例

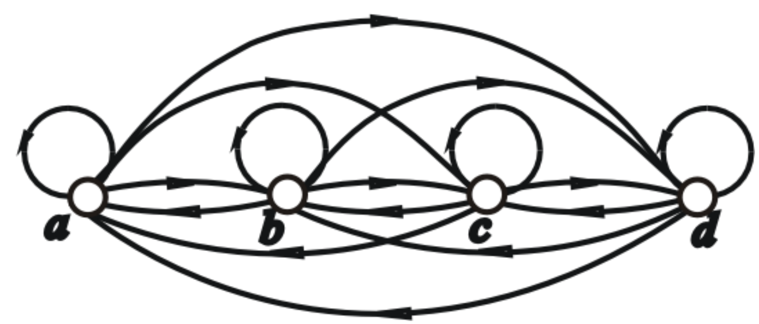
例1 设*A*={*a*,*b*,*c*,*d*}, *R*={<*a*,*b*>,<*b*,*a*>,<*b*,*c*>,<*c*,*d*>, <*d*,*b*>}, *R*和 *r*(*R*), *s*(*R*), *t*(*R*)的关系图如下图所示.

R

r(*R*)



s(*R*)



t(*R*)

定理 设R_1，R_2是非空集合A上的关系，且$R_1 \subseteq R_2$，则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明：

(1)任取$< x, y >$

$< x, y > \in r(R_1)$

$\Rightarrow < x, y > \in R_1 \cup I_A$

$\Rightarrow < x, y > \in R_1 \vee < x, y > \in I_A$

$\Rightarrow < x, y > \in R_2 \vee < x, y > \in I_A$

$\Rightarrow < x, y > \in R_2 \cup I_A$

$\Rightarrow < x, y > \in r(R_2)$

定理 设R_1，R_2是非空集合A上的关系，且$R_1 \subseteq R_2$，则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明:

(2)任取$<x, y>$

$$
\begin{aligned}
& <x, y> \in s(R_1) \\
\Rightarrow & <x, y> \in R_1 \cup R_1^{-1} \\
\Rightarrow & <x, y> \in R_1 \vee <y, x> \in R_1 \\
\Rightarrow & <x, y> \in R_2 \vee <y, x> \in R_2 \\
\Rightarrow & <x, y> \in R_2 \vee <x, y> \in R_2^{-1} \\
\Rightarrow & <x, y> \in R_2 \cup R_2^{-1} \\
\Rightarrow & <x, y> \in s(R_2)
\end{aligned}
$$

定理 设R_1，R_2是非空集合A上的关系，且$R_1 \subseteq R_2$，则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明：

(3)留作课后思考。

提示：先用归纳法证明$R_1^n \subseteq R_2^n$……

定理 设R_1，R_2是非空集合A上的关系，则

(1) $r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$

(2) $s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$

(3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

证明：

(1)$R_1 \cup R_2$

$\subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$

$\subseteq r(R_1 \cup R_2)$

又因为$r(R_1) \cup r(R_2)$是包含了$R_1 \cup R_2$的自反关系，

所以$r(R_1 \cup R_2) \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$

(2)可以类似证明

(3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

但是$t(R_1) \cup t(R_2)$不一定传递，

所以没有$t(R_1 \cup R_2) \subseteq t(R_1) \cup t(R_2)$

定理 设R是非空集合A上的关系，

(1) 若R是自反的，则$s(R)$和$t(R)$也是自反的

(2) 若R是对称的，则$r(R)$和$t(R)$也是对称的

(3) 若R是传递的，则$r(R)$也是传递的

证

(1) 设R是非空集合A上的关系，由于R是自反的，故

$$I_A \subseteq R \subseteq s(R)$$

从而证明了$s(R)$ 是自反的。

同理可证$t(R)$也是自反的

定理 设R是非空集合A上的关系，
(1) 若R是自反的，则$s(R)$和$t(R)$也是自反的
(2) 若R是对称的，则$r(R)$和$t(R)$也是对称的
(3) 若R是传递的，则$r(R)$也是传递的

证

(2) 设R是A上的对称关系，则$R = R^{-1}$，根据前例有

$$(R \cup I_A)^{-1} = R^{-1} \cup I_A^{-1}$$

从而推出

$$\begin{aligned} & r(R)^{-1} \\ = & (R \cup I_A)^{-1} \\ = & R^{-1} \cup I_A^{-1} \\ = & R \cup I_A \\ = & r(R) \end{aligned}$$

这就证明了$r(R)$ 是对称的。

定理 设R是非空集合A上的关系，
(1) 若R是自反的，则$s(R)$和$t(R)$也是自反的
(2) 若R是对称的，则$r(R)$和$t(R)$也是对称的
(3) 若R是传递的，则$r(R)$也是传递的
证
(2) 为了证明$t(R)$是对称的，先证明下述命题：
若R是对称的，则R^n也是对称的，其中n为任意正整数。
用归纳法。
$n=1$，$R^1=R$显然是对称的。
假设R^n是对称的，则对任意的$<x,y>$，有

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in R^{n+1} \\
\Leftrightarrow & <x,y>\in R^n\circ R \\
\Leftrightarrow & \exists t(<x,t>\in R^n \wedge <t,y>\in R) \\
\Rightarrow & \exists t(<t,x>\in R^n \wedge <y,t>\in R) \\
\Rightarrow & <y,x>\in R\circ R^n \\
\Rightarrow & <y,x>\in R^{1+n}=R^{n+1}
\end{aligned}
$$

这就证明了R^{n+1}是对称的。

下面证明$t(R)$的对称性
任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in t(R) \\
\Rightarrow & \exists n(<x,y>\in R^n) \\
\Rightarrow & \exists n(<y,x>\in R^n) \\
\Rightarrow & <y,x>\in t(R)
\end{aligned}
$$

从而证明了$t(R)$是对称的

定理 设R是非空集合A上的关系，

(1) 若R是自反的，则$s(R)$和$t(R)$也是自反的

(2) 若R是对称的，则$r(R)$和$t(R)$也是对称的

(3) 若R是传递的，则$r(R)$是传递的

证

(3)

$$
\begin{aligned}
& r(R) \circ r(R) \\
= & (R \cup I_A) \circ (R \cup I_A) \\
= & (R \circ R) \cup (I_A \circ R) \cup (R \circ I_A) \cup (I_A \circ I_A) \\
= & (R \circ R) \cup R \cup R \cup I_A \\
\subseteq & R \cup R \cup R \cup I_A \\
= & R \cup I_A \\
= & r(R)
\end{aligned}
$$

根据传递性的充要条件，$r(R)$是传递的。

定理 设R是非空集合A上的关系，则

(1) $r\big(s(R)\big)=s(r(R))$

(2) $r\big(t(R)\big)=t(r(R))$

(3) $s\big(t(R)\big)\subseteq t(s(R))$

证 (1)

由闭包的定义，有

$R\subseteq s(R)$

所以$r(R)\subseteq r(s(R))$

由于$s(R)$具有对称性，所以$r(s(R))$也具有对称性。

又因为$s(r(R))$是$r(R)$的对称闭包，

所以$s(r(R))\subseteq r(s(R))$

由闭包的定义，有

$R\subseteq r(R)$

所以$s(R)\subseteq s(r(R))$

由于$r(R)$具有自反性，所以$s(r(R))$也具有自反性。

又因为$r(s(R))$是$s(R)$的自反闭包，

所以$r(s(R))\subseteq s(r(R))$

(2)(3)留作课后思考。