第4章 二元关系与函数

- 4.1 集合的笛卡儿积与二元关系
- 4.2 关系的运算
- 4.3 关系的性质
- 4.4 关系的闭包
- 4.5 等价关系和偏序关系
- 4.6 函数的定义和性质
- 4.7 函数的复合和反函数

4.1 集合的笛卡儿积和二元关系

- 有序对
- 笛卡儿积及其性质
- 二元关系的定义
- 二元关系的表示

有序对

定义 由两个元素 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组称为有序对，记作$\langle x,y\rangle$

实例：点在平面直角坐标系中的坐标(3,–4)

有序对性质

有序性 $\langle x,y\rangle \neq \langle y,x\rangle$ （当$x\neq y$时）

$\langle x,y\rangle$ 与 $\langle u,v\rangle$ 相等的充分必要条件是

$$\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle \Leftrightarrow x=u \wedge y=v$$

例1 $\langle 2, x+5\rangle = \langle 3y-4, y\rangle$，求 x, y.

解 $3y-4 = 2,\ x+5 = y \Rightarrow y = 2,\ x = -3$

有序 n 元组

定义 一个有序 n ($n \geq 3$) 元组 $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$ 是一个有序对，其中第一个元素是一个有序 n-1元组，即

$$<x_1, x_2, \ldots, x_n> = < <x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}>, x_n>$$

当 n=1时, $<x>$ 形式上可以看成有序 1 元组.

实例 n 维向量是有序 n元组.

笛卡儿积

定义　设A,B为集合，A与B 的笛卡儿积记作$A\times B$，

即　　$A\times B =\{ <x,y> \mid x\in A \wedge y\in B \}$

例　$A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$

$A\times B =\{<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>,$

$<3,a>,<3,b>,<3,c>\}$

$B\times A =\{<a,1>,<b,1>,<c,1>,<a,2>,<b,2>,<c,2>,$

$<a,3>, <b,3>,<c,3>\}$

$A=\{\varnothing\}$,　$P(A)\times A=\{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$

从笛卡尔积的定义和逻辑演算的知识可以看出，若$<x,y>\in A\times B$，则有$x\in A \wedge y\in B$。若$<x,y>\notin A\times B$，则有$x \notin A \vee y \notin B$。

笛卡儿积的性质

若$|A|=m$, $|B|=n$, 则 $|A\times B|=mn$

若A或B中有一个为空集，则$A\times B$就是空集.

$$A\times\varnothing=\varnothing\times B=\varnothing$$

不适合交换律 $A\times B\neq B\times A$ $(A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$

不适合结合律 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$ $(A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing\ ,\ C\neq\varnothing)$

对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

性质的证明

证明　$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

证 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in A\times(B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B\vee<x,y>\in A\times C$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$$

所以有$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

例题

设 $A=\{1,2\}$，求 $P(A)\times A$.

解 $P(A)\times A$

$=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}\times\{1,2\}$

$=\{\langle\varnothing,1\rangle,\langle\varnothing,2\rangle,\langle\{1\},1\rangle,\langle\{1\},2\rangle,\langle\{2\},1\rangle,\langle\{2\},2\rangle,\langle\{1,2\},1\rangle,\langle\{1,2\},2\rangle\}$.

例题

设 A,B,C,D 为任意集合，判断以下命题是否为真，并说明理由：

(1) $A\times B=A\times C\Rightarrow B=C$.

(2) $A-(B\times C)=(A-B)\times(A-C)$.

(3) $A=B\wedge C=D\Rightarrow A\times C=B\times D$.

(4) 存在集合 A，使得 $A\subseteq A\times A$.

解 (1) 不一定为真. 当 $A=\varnothing, B=\{1\}, C=\{2\}$ 时有 $A\times B=\varnothing=A\times C$，但 $B\neq C$.

(2) 不一定为真. 当 $A=B=\{1\}, C=\{2\}$ 时有

$$A-(B\times C)=\{1\}-\{\langle 1,2\rangle\}=\{1\},$$

$$(A-B)\times(A-C)=\varnothing\times\{1\}=\varnothing.$$

(3) 为真. 由等量代入的原理可证.

(4) 为真. 当 $A=\varnothing$ 时有 $A\subseteq A\times A$ 成立.

例题

例4.2 设A,B,C,D为任意集合。判断以下等式是否成立，说明原因

(1) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

(2) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$

(3) $(A - B) \times (C - D) = (A \times C) - (B \times D)$

(4) $(A \oplus B) \times (C \oplus D) = (A \times C) \oplus (B \times D)$

例题

例 (1) 证明 $A=B \land C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C=B\times D$是否推出 $A=B \land C=D$? 为什么？

解 (1) 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in A\times C \Leftrightarrow x\in A \land y\in C$$

$$\Leftrightarrow x\in B \land y\in D \Leftrightarrow <x,y>\in B\times D$$

(2) 不一定. 反例如下：

$A=\{1\}$，$B=\{2\}$, $C=D=\varnothing$, 则 $A\times C=B\times D$ 但是 $A\neq B$.

例题

定理 设A,B,C,D为四个非空集合，则 $A\times B\subseteq C\times D$的充要条件为$A\subseteq C$，$B\subseteq D$

证明 ：必要性

若$A\times B\subseteq C\times D$,对任意$x\in A$和$y\in B$有

$(x\in A)\wedge(y\in B)\Leftrightarrow(\langle x,y\rangle\in A\times B)$

$\Rightarrow(\langle x,y\rangle\in C\times D)$

$\Leftrightarrow(x\in C)\wedge(y\in D)$

即$A\subseteq C$且$B\subseteq D$

充分性：

若$A\subseteq C$且$B\subseteq D$，设任意$x\in A$和$y\in B$，我们有

$\langle x,y\rangle\in A\times B\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)$

$\Rightarrow(x\in C\wedge y\in D)$

$\Leftrightarrow(\langle x,y\rangle\in C\times D)$

因此$A\times B\subseteq C\times D$

n阶笛卡尔积

定义4.4 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是集合（n≥2），它们的n阶笛卡尔积记作$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，其中

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{ < x_1, x_2, \ldots, x_n > \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n \}$$

当$A_1=A_2=\ldots=A_n=A$时，可将它们的n阶笛卡尔积简记为 A^n。

二元关系的定义

定义 如果一个集合满足以下条件之一：

（1）集合非空, 且它的元素都是有序对

（2）集合是空集

则称该集合为一个二元关系, 简称为关系， 记作R.

若$<x,y>\in R$, 可记作 xRy； 如果$<x,y>\notin R$, 则记作$x \not R y$

实例： $R=\{<1,2>,<a,b>\}$, $S=\{<1,2>,a,b\}$.

R是二元关系, 当a, b不是有序对时， S不是二元关系

根据上面的记法， 可以写 $1R2$, aRb, $a \not R c$ 等.

从A到B的关系与A上的关系

定义 设A,B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系叫做从A到B的二元关系，当$A=B$时则叫做 A上的二元关系.

例 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, $R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A\times B$, $R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$. 那么 R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系, R_3和R_4同时也是 A上的二元关系.

计数

$|A|=n$, $|A\times A|=n^2$, $A\times A$的子集有2^{n^2}个. 所以 A上有 2^{n^2}个不同的二元关系.

例如 $|A|=3$, 则 A上有=512个不同的二元关系.

A上重要关系的实例

设 A 为任意集合，

$\varnothing$是 A 上的关系，称为空关系

E_A, I_A 分别称为全域关系与恒等关系，定义如下：

$$E_A=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$$

$$I_A=\{<x,x>|x\in A\}$$

例如, $A=\{1,2\}$, 则

$$E_A=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$$

$$I_A=\{<1,1>,<2,2>\}$$

A上重要关系的实例（续）

小于等于关系 L_A, 整除关系D_A, 包含关系$R_{\subseteq}$定义：

R为实数集合， $A\subseteq$R，则

$$L_A=\{<x,y>|\ x,y\in A\land x\le y\}$$

Z^+为正整数集， $B\subseteq Z^+$,则

$$D_B=\{<x,y>|\ x,y\in B\land x\text{整除}y\},$$

A是集合族

$$R_{\subseteq}=\{<x,y>|\ x,y\in A\land x\subseteq y\},.$$

类似的还可以定义大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等等.

实例

例如 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 则A上的小于等于关系和整除关系为:

$$L_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$$

$$D_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$$

$A=P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 则 A上的包含关系是

$$R_{\subseteq}=\{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a\}>,$$
$$<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$$

设 $A=\{1,2,3,4\}$，下面各式定义的 R 都是 A 上的关系，分别列出 R 的元素：

(1) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x$ 是 y 的倍数$\}$.

(2) $R=\{\langle x,y\rangle \mid (x-y)^2\in A\}$.

(3) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x/y$ 是素数$\}$.

(4) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x\neq y\}$.

解 (1) $R=\{\langle 4,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,1\rangle\}$.

(2) $R=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,2\rangle\}$.

(3) $R=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$.

(4) $R=E_A-I_A$.

关系的表示

表示方式：关系的集合表达式、关系矩阵、关系图

关系矩阵：若$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$，$R$是从$A$到$B$的关系，$R$的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = [\, r_{ij} \,]_{m\times n}$，其中 $r_{ij} = 1 \Leftrightarrow < a_i, b_j> \in R$，否则$r_{ij} = 0$.

关系图：若$A= \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$R$是$A$上的关系，$R$的关系图是$G_R=<A, R>$，其中$A$为结点集，$R$为边集.如果$<x_i,x_j>$属于关系$R$，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

注意：A, B为有穷集，关系矩阵适于表示从A到B的关系或者A上的关系，关系图适于表示A上的关系

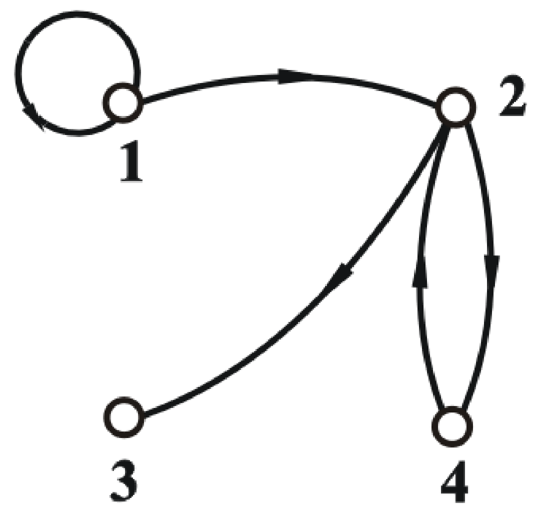
实例

A={1,2,3,4},

R={<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>},

R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下：

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



证明：若R和S是从集合A到B上的两个二元关系，则R和S的并、交、补、差也是A到B上的二元关系

证明：因为R和S是从集合A到B上的二元关系

所以有$R\subseteq A\times B$，$S\subseteq A\times B$。从而有

$$R\cup S\subseteq A\times B \qquad R\cap S\subseteq A\times B$$

即$A\cap B$和$A\cup B$都是A到B上的二元关系。

又因为

$$\sim R=(A\times B-R)\subseteq A\times B \qquad \sim S=(A\times B-S)\subseteq A\times B$$

所以$\sim R$和$\sim S$也是A到B上的二元关系。

由于

$$R-S=R\cap\sim S\subseteq A\times B$$

故$R-S$也是A到B上的二元关系。

4.2 关系的运算

- 基本运算定义
  - 定义域、值域、域
  - 逆、合成、限制、像
- 基本运算的性质
- 幂运算
  - 定义
  - 求法
  - 性质

关系的基本运算定义

定义域、值域 和 域

$\mathrm{dom}R = \{ x \mid \exists y (<x,y> \in R) \}$

$\mathrm{ran}R = \{ y \mid \exists x (<x,y> \in R) \}$

$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$

例1 $R=\{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<4,3>\}$, 则

$\mathrm{dom}R=\{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R=\{2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$

关系的基本运算定义（续）

逆与合成（右复合）

$$R^{-1} = \{\langle y,x\rangle \mid \langle x,y\rangle \in R\}$$

$$R\circ S = |\langle x,z\rangle \mid \exists y\, (\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in S)\ \}$$

例2　$R=\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$S=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$R^{-1}=\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$R\circ S=\{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

$S\circ R=\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

【例 4.7】 P 是所有人的集合，令

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in P\wedge x\text{ 是 }y\text{ 的父亲}\},$$

$$S=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in P\wedge x\text{ 是 }y\text{ 的母亲}\}.$$

(1) 说明 $R\circ R$, $R^{-1}\circ S^{-1}$, $R^{-1}\circ S$ 各关系的含义.

(2) 用 R, S 及其逆和右复合运算表示以下关系：

$$\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in P\wedge y\text{ 是 }x\text{ 的外祖母}\},$$

$$\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in P\wedge x\text{ 是 }y\text{ 的祖母}\}.$$

解 (1) $R\circ R$ 表示关系 $\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in P\wedge x$ 是 y 的祖父$\}$；

$R^{-1}\circ S^{-1}$ 表示关系 $\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in P\wedge y$ 是 x 的祖母$\}$；

$R^{-1}\circ S$ 表示空关系 $\varnothing$.

(2) $\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in P\wedge y$ 是 x 的外祖母$\}$ 的表达式是 $S^{-1}\circ S^{-1}$；

$\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in P\wedge x$ 是 y 的祖母$\}$ 的表达式是 $S\circ R$.

合成运算的图示方法

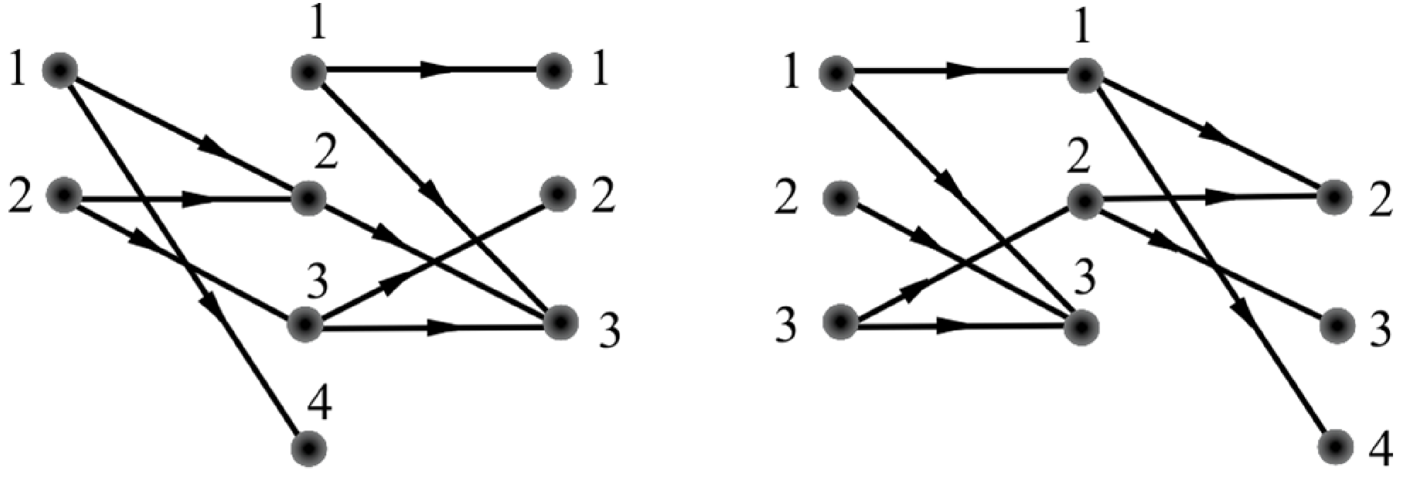
R={<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>}

S={<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>}

利用图示（不是关系图）方法求合成

$R \circ S$ ={<1,3>, <2,2>, <2,3>}

$S \circ R$ ={<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>}



$R \circ S$　　　　$S \circ R$

限制与像

定义 F 在A上的限制

$$F\restriction A = \{<x,y> \mid xFy \land x\in A\}$$

A 在F下的像

$$F[A] = \mathrm{ran}(F\restriction A)$$

实例 $R=\{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$

$R\restriction\{1\}=\{<1,2>,<1,4>\}$

$R[\{1\}]=\{2,4\}$

$R\restriction\varnothing=\varnothing$

$R[\{1,2\}]=\{2,3,4\}$

注意：$F\restriction A\subseteq F$，$F[A]\subseteq \mathrm{ran}F$

关系基本运算的性质

定理1 设F是任意的关系, 则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 (1) 任取$<x,y>$, 由逆的定义有

$$<x,y>\in(F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in F^{-1} \Leftrightarrow <x,y>\in F$$

所以有 $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) 任取x,

$$x\in\mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \exists y(<y,x>\in F) \Leftrightarrow x\in\mathrm{ran}F$$

所以有$\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$. 同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

关系基本运算的性质（续）

定理2 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1}= G^{-1}\circ F^{-1}$

证 (1) 任取$<x,y>$,

$<x,y>\in(F\circ G)\circ H \Leftrightarrow \exists t(<x,t>\in F\circ G\wedge<t,y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists t\ (\exists s(<x,s>\in F\wedge<s,t>\in G)\wedge<t,y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists t\ \exists s\ (<x,s>\in F\wedge<s,t>\in G\wedge<t,y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists s\ (<x,s>\in F\wedge\exists t\ (<s,t>\in G\wedge<t,y>\in H))$

$\Leftrightarrow \exists s\ (<x,s>\in F\wedge<s,y>\in G\circ H)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ(G\circ H)$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

关系基本运算的性质（续）

(2) $(F\circ G)^{-1}= G^{-1}\circ F^{-1}$

(2) 任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in(F\circ G)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow <y,x>\in F\circ G$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<y,t>\in F\wedge(t,x)\in G)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in G^{-1}\wedge(t,y)\in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in G^{-1}\circ F^{-1}$$

所以 $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

定理4.2 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $F\circ(G\cup H)=F\circ G\cup F\circ H$

(2) $F\circ(G\cap H)\subseteq F\circ G\cap F\circ H$

(3) $(G\cup H)\circ F=G\circ F\cup H\circ F$

(4) $(G\cap H)\circ F\subseteq G\circ F\cap H\circ F$

证 (1) 任取<x,y>,

$$<x,y>\in F\circ(G\cup H)$$

$$\Leftrightarrow \exists z(<x,z>\in F\wedge<z,y>\in G\cup H)$$

$$\Leftrightarrow \exists z(<x,z>\in F\wedge(<z,y>\in G\vee<z,y>\in H))$$

$$\Leftrightarrow \exists z((<x,z>\in F\wedge<z,y>\in G)\vee(<x,z>\in F\wedge<z,y>\in H))$$

$$\Leftrightarrow \exists z(<x,z>\in F\wedge<z,y>\in G)\vee\exists z(<x,z>\in F\wedge<z,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ G\vee<x,y>\in F\circ H$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ G\cup F\circ H$$

所以 $F\circ(G\cup H)=F\circ G\cup G\circ H$

证明(2) $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$

不等于的例子
$F=\{<2,1>,<2,2>\}$
$G=\{<1,4>\}$
$H=\{<2,4>\}$

证 (1) 任取$<x,y>$,

$<x,y>\in F\circ(G\cap H)$

$\Leftrightarrow \exists z(<x,z>\in F \wedge <z,y>\in G\cap H)$

$\Leftrightarrow \exists z(<x,z>\in F \wedge (<z,y>\in G \wedge <z,y>\in H))$

$\Leftrightarrow \exists z((<x,z>\in F \wedge <z,y>\in G) \wedge (<x,z>\in F \wedge <z,y>\in H))$

$\Rightarrow \exists z(<x,z>\in F \wedge <z,y>\in G) \wedge \exists z(<x,z>\in F \wedge <z,y>\in H)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ G \wedge <x,y>\in F\circ H$

$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ G\cap F\circ H$

所以 $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap G\circ H$

A上关系的幂运算

设R为A上的关系, n为自然数, 则 R 的 **n次幂**定义为:

(1) $R^0=\{<x,x> \mid x \in A\}=I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意:

(1)对于A上的任何关系R_1和R_2都有

$$R_1^0 = R_2^0 = I_A$$

(2)对于A上的任何关系 R 都有

$$R^0 \circ R = R \circ R^0 = R$$

(3) $R^1 = R$

幂的求法

- 对于集合表示的关系*R*，计算 R^n 就是*n*个*R*右复合
  - (1)集合运算法
  - (2)关系矩阵法
  - (3)关系图法

例3 设$A=\{a,b,c,d\}$,

$R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$,

求R^0， R^1， R^2， R^3， R^4， R^5

幂的求法（关系矩阵法）

例3 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$,

R^n就是n个关系矩阵M相乘, 两个矩阵相乘时，矩阵第i行第j列的元素为

$$r_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{4} r_{ik}^{(n-1)} * r_{kj}^{(1)}$$

其中相加采用逻辑加(0+0=0,0+1=1,1+0=1,1+1=1).

解 R与R^2的关系矩阵分别为

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

幂的求法（续）

同理，$R^0=I_A$, R^3和R^4的矩阵分别是：

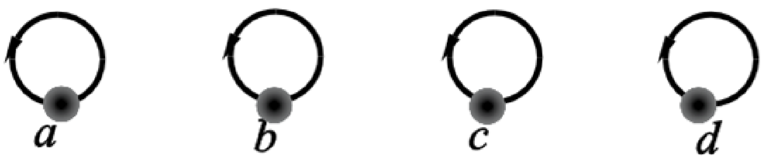
$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此$M^4=M^2$, 即$R^4=R^2$. 继续求可以得到

$$R^2=R^4=R^6=\ldots,\quad R^3=R^5=R^7=\ldots$$

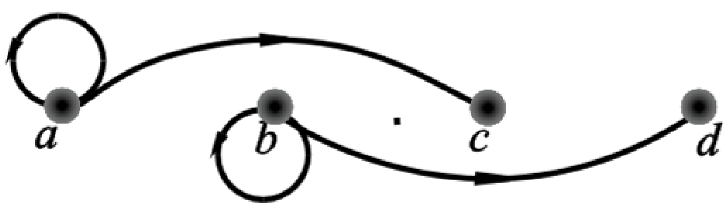
幂的求法（续）

R^0, ***R***^{1}, ***R***^{2}, ***R***^{3},…的关系图如下图所示

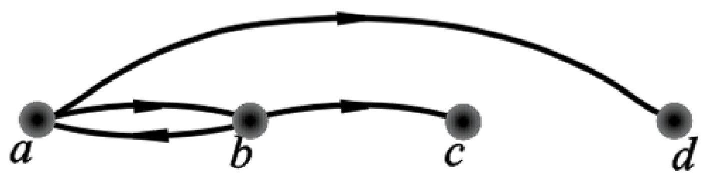


R^0

R^1



$R^2=R^4=\ldots$



$R^3=R^5=\ldots$

幂运算的性质

定理3 设A为n元集, R是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$.

证 R为A上的关系, 由于$|A|=n$, A上的不同关系只有 2^{n^2}个.

当列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \ldots, , \ldots,$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s=R^t$.

幂运算的性质（续）

定理4 设 R 是 A 上的关系, $m, n\in$ N, 则

(1) $R^m\circ R^n=R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n=R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的$m\in$ N, 施归纳于n.

若n=0, 则有

$$R^m\circ R^0=R^m\circ I_A=R^m=R^{m+0}$$

假设$R^m\circ R^n=R^{m+n}$, 则有

$$R^m\circ R^{n+1}=R^m\circ(R^n\circ R)=(R^m\circ R^n)\circ R=R^{m+n+1},$$

所以对一切$m, n\in$ N有$R^m\circ R^n=R^{m+n}$.

幂运算的性质（续）

(2) $(R^m)^n=R^{mn}$

(接上页证明)

(2) 对于任意给定的 $m\in\mathrm{N}$，施归纳于n.

若n=0, 则有

$$(R^m)^0=I_A=R^0=R^{m\times 0}$$

假设 $(R^m)^n=R^{mn}$，则有

$$(R^m)^{n+1}=(R^m)^n\circ R^m=(R^{mn})\circ R^m=R^{mn+m}=R^{m(n+1)}$$

所以对一切 $m,n\in\mathrm{N}$ 有 $(R^m)^n=R^{mn}$.