

1.5 联结词全功能集

- 联结词全功能集
- 与非联结词, 或非联结词

联结词的全功能集

定义 设 S 是一个联结词集合，如果任何 $n(n \geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含 S 中的联结词构成的公式表示，则称 S 是**联结词全功能集**.

说明：若 S 是联结词全功能集，则任何命题公式都可用 S 中的联结词表示.

设 S_1, S_2 是两个联结词集合，且 $S_1 \subseteq S_2$. 若 S_1 是全功能集，则 S_2 也是全功能集. 反之，若 S_2 不是全功能集，则 S_1 也不是全功能集.

联结词全功能集实例

定理 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 、 $\{\neg, \wedge\}$ 、 $\{\neg, \vee\}$ 、 $\{\neg, \rightarrow\}$ 都是联结词全功能集.

证明 每一个真值函数都可以用一个主析取范式表示, 故 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是联结词全功能集.

$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$, 故 $\{\neg, \wedge\}$ 是全功能集.

$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$, 故 $\{\neg, \vee\}$ 是全功能集.

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$, 故 $\{\neg, \rightarrow\}$ 也是全功能集.

复合联结词

与非式: $p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$

或非式: $p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$

\uparrow 和 \downarrow 与 \neg , \wedge , \vee 有下述关系:

$$\neg p \Leftrightarrow \neg(p \wedge p) \Leftrightarrow p \uparrow p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \uparrow q) \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$$

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p) \uparrow (\neg q) \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$$

复合联结词 (续)

$$\neg p \Leftrightarrow p \downarrow p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$$

$$p \vee q \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

定理 $\{\uparrow\}, \{\downarrow\}$ 是联结词全功能集.

可以证明: $\{\wedge, \vee\}$ 不是全功能集, 从而 $\{\wedge\}, \{\vee\}$ 也不是全功能集.

例

例 将公式 $p \wedge \neg q$ 化成只含下列各联结词集中的联结词的等值的公式.

(1) $\{\neg, \vee\}$; (2) $\{\neg, \rightarrow\}$; (3) $\{\uparrow\}$; (4) $\{\downarrow\}$.

解 (1) $p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$.

(2) $p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q)$.

(3) $p \wedge \neg q \Leftrightarrow p \wedge (q \uparrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge (q \uparrow q)))$
 $\Leftrightarrow \neg(p \uparrow (q \uparrow q)) \Leftrightarrow (p \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow (p \uparrow (q \uparrow q))$.

(4) $p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \downarrow q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow q$.

习题

- 1.将公式 $A=(p \rightarrow q) \vee r$ 转换成只含 $\{\neg, \wedge\}$ 中联结词的公式
- 2.将公式 $B=(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg r$ 转换成只含 $\{\neg, \vee\}$ 中联结词的公式
- 3.将公式 $C=(p \wedge \neg q) \vee r$ 转换成只含 $\{\neg, \rightarrow\}$ 中联结词的公式
- 4.将公式 $D=p \rightarrow q$ 转换成只含 $\{\uparrow\}$ 中联结词的公式

1.6 组合电路

- 组合电路

- 逻辑门

与门，或门，非门，与非门，或非门

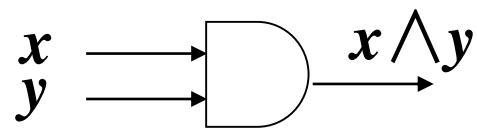
- 奎因-莫可拉斯基方法

组合电路

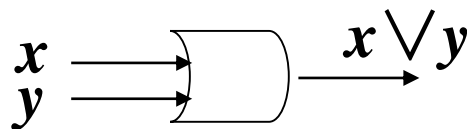
逻辑门：实现逻辑运算的电子元件。

与门，或门，非门。

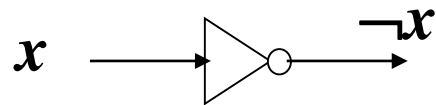
组合电路：实现命题公式的由电子元件组成的电路。



与门



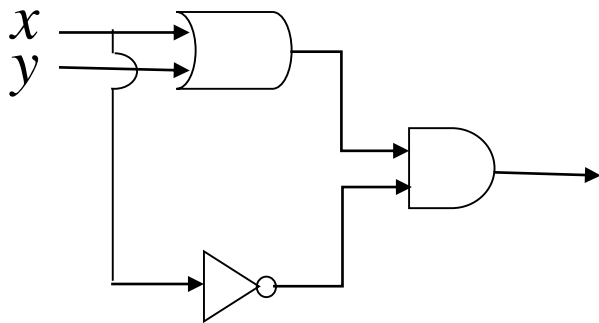
或门



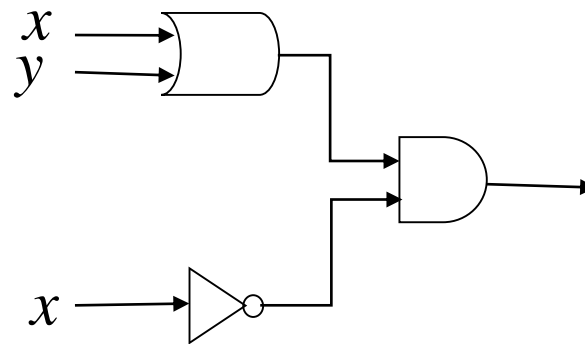
非门

组合电路的例子

$(x \vee y) \wedge \neg x$ 的组合电路



第一种画法



第二种画法

例

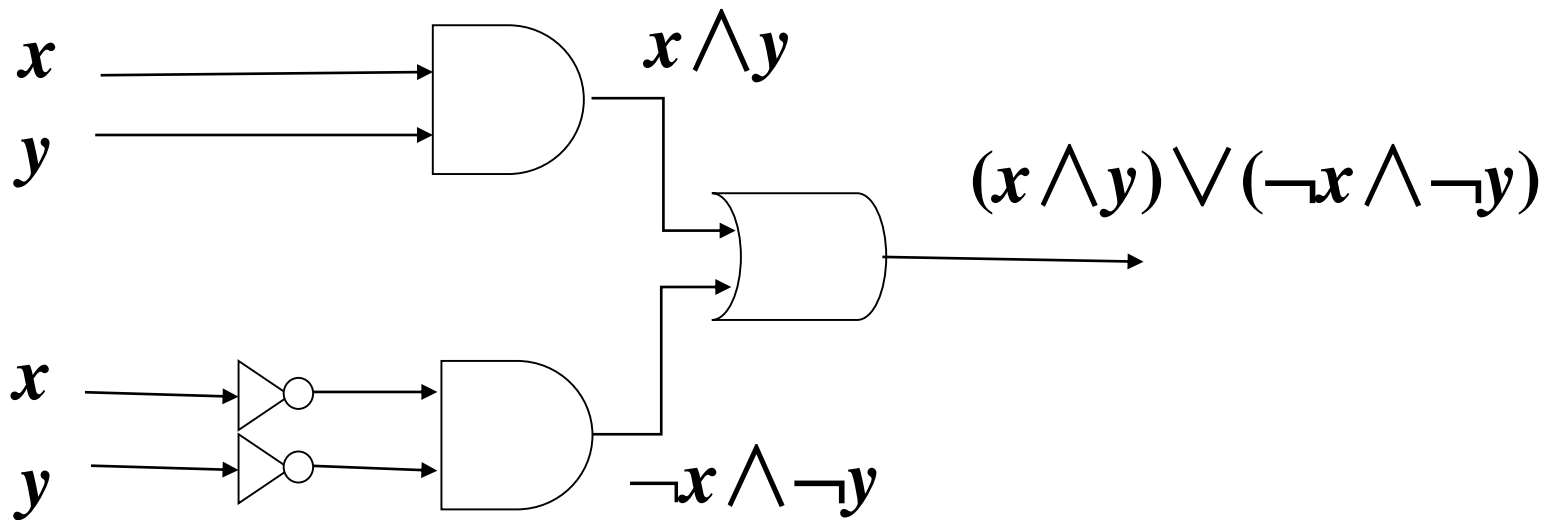
例 楼梯的灯由上下2个开关控制, 要求按动任何一个开关都能打开或关闭灯. 试设计一个这样的线路.

解 x, y : 开关的状态, F : 灯的状态, 打开为1, 关闭为0.
不妨设当2个开关都为0时灯是打开的.

$$F = m_0 \vee m_3 = (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y)$$

x	y	$F(x, y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例(续)



设计组合电路

步骤: 1.构造输入输出表(问题的真值函数),
2. 写出主析取范式,
3. 化简.

例 当且仅当 $x=y=z=1$ 或 $x=y=1$ 且 $z=0$ 时输出1.

$$F = m_6 \vee m_7 = (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

4个与门,1个或门和一个非门

$$F \Leftrightarrow x \wedge y \quad \text{一个与门}$$

最简展开式: 包含最少运算的公式

奎因-莫可拉斯基方法

1. 合并简单合取式生成所有可能出现在最简展开式中的项.
2. 确定最简展开式中的项.

例 求下述公式的最简展开式:

$$\begin{aligned} F = & (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \\ & \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \\ & \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \\ & \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \end{aligned}$$

例(续)

解

编号	极小项	角码	标记
1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	1110	*
2	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	1011	*
3	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	0111	*
4	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	1010	*
5	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$	0101	*
6	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	0011	*
7	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$	0001	*

例(续)

第一批				第二批		
合并项	项	表示串	标记	合并项	项	表示串
(1,4)	$x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	1-10		(3,5,6,7)	$\neg x_1 \wedge x_4$	0- -1
(2,4)	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$	101-				
(2,6)	$\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	-011				
(3,5)	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_4$	01-1	*			
(3,6)	$\neg x_1 \wedge x_3 \wedge x_4$	0-11	*			
(5,7)	$\neg x_1 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$	0-01	*			
(6,7)	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_4$	00-1	*			

标记*表示该项已被合并

例(续)

项	覆盖	运算符数
$x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	(1,4)	3
$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$	(2,4)	3
$\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	(2,6)	3
$\neg x_1 \wedge x_4$	(3,5,6,7)	2

选择(1,4), (2,4)和(3,5,6,7), 或者(1,4), (2,6)和(3,5,6,7).

最简展开式为

$$F \Leftrightarrow (x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_4)$$

或

$$F \Leftrightarrow (x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_4)$$