4.6 函数的定义与性质

- 函数的定义
  - 函数定义
  - 从*A*到*B*的函数
  - 函数的像
- 函数的性质
  - 函数的单射、满射、双射性
  - 构造双射函数
- 应用实例：问题描述

函数定义

定义 设 F 为二元关系, 若 $\forall x \in \mathrm{dom}F$ 都存在唯一的$y \in \mathrm{ran}F$ 使 xFy 成立, 则称 F 为函数. 对于函数F, 如果有 xFy, 则记作 $y=F(x)$, 并称 y 为 F 在 x 的值.

例1 $F_1=\{<x_1,y_1>,<x_2,y_2>,<x_3,y_2>\}$

$F_2=\{<x_1,y_1>,<x_1,y_2>\}$

F_1是函数, F_2不是函数

函数相等

定义 设F, G为函数, 则

$$F = G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$$

如果两个函数 F 和 G 相等, 一定满足下面两个条件:

(1) $\mathrm{dom}F = \mathrm{dom}G$

(2) $\forall x \in \mathrm{dom}F = \mathrm{dom}G$ 都有 $F(x) = G(x)$

实例 函数

$$F(x)=(x^2-1)/(x+1),\ G(x)=x-1$$

不相等, 因为 $\mathrm{dom}F \subset \mathrm{dom}G$.

从 A 到 B 的函数

定义　设A, B为集合, 如果

f 为函数

$\mathrm{dom}f = A$

$\mathrm{ran}f \subseteq B$,

则称 f 为从A到B的函数, 记作 f: $A \to B$.

实例

f: $N \to N$, $f(x)=2x$ 是从 N 到 N 的函数

g: $N \to N$, $g(x)=2$也是从 N 到 N 的函数

B上A

定义　所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A，读作“B上A”，符号化表示为

$$B^A=\{\, f \mid f: A\to B \,\}$$

计数：

$|A|=m$, $|B|=n$, 且$m, n>0$, $|B^A|=n^m$.

$A=\varnothing$, 则 $B^A=B^{\varnothing}=\{\varnothing\}$.

$A\neq\varnothing$且$B=\varnothing$, 则 $B^A=\varnothing^A=\varnothing$.

实例

例2 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 求B^A.

解 $B^A = \{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$, 其中

$f_0=\{<1,a>,<2,a>,<3,a>\}$, $f_1=\{<1,a>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_2=\{<1,a>,<2,b>,<3,a>\}$, $f_3=\{<1,a>,<2,b>,<3,b>\}$

$f_4=\{<1,b>,<2,a>,<3,a>\}$, $f_5=\{<1,b>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_6=\{<1,b>,<2,b>,<3,a>\}$, $f_7=\{<1,b>,<2,b>,<3,b>\}$

函数的像

定义　设函数 f：$A \to B$, $A_1 \subseteq A$.

A_1 在 f 下的像：$f(A_1) = \{\, f(x) \mid x \in A_1 \,\}$

函数的像 $f(A)$

注意：函数值 $f(x) \in B$, 而像 $f(A_1) \subseteq B$.

例3　设 f：$N \to N$, 且 $f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{若}x\text{为偶数} \\ x+1 & \text{若}x\text{为奇数} \end{cases}$

令$A=\{0,1\}$, $B=\{2\}$, 那么有

$f(A) = f(\{0,1\}) = \{\, f(0), f(1) \,\} = \{0, 2\}$

函数的性质

定义 设 $f: A \to B$,

（1）若 $\mathrm{ran} f = B$, 则称 $f: A \to B$ 是满射的.

（2）若 $\forall y \in \mathrm{ran} f$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x)=y$, 则称 $f: A \to B$ 是单射的.

（3）若 $f: A \to B$ 既是满射又是单射的, 则称 $f: A \to B$ 是双射的

f 满射意味着：$\forall y \in B$, 都存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$.

f 单射意味着：$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

实例

例4

判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(1) f: $\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$, $f(x) = -x^2+2x-1$

(2) f: $\mathbf{Z}^+\rightarrow\mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$, $\mathbf{Z}^+$**为正整数集**

(3) f: $\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{Z}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$

(4) f: $\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$, $f(x) = 2x+1$

(5) f: $\mathbf{R}^+\rightarrow\mathbf{R}^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$, **其中**$\mathbf{R}^+$**为正实数集.**

实例（续）

解 (1) f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=-x^2+2x-1$

在$x=1$取得极大值0. 既不单射也不满射.

(2) f：$\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln x$

单调上升, 是单射. 但不满射, $\mathrm{ran}f=\{\ln 1, \ln 2, \ldots\}$.

(3) f：$\mathbf{R}\to\mathbf{Z}$, $f(x)=\lfloor x\rfloor$

满射, 但不单射, 例如 $f(1.5)=f(1.2)=1$.

(4) f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x+1$

满射、单射、双射, 因为它是单调的并且$\mathrm{ran}f=\mathbf{R}$.

(5) f：$\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$

有极小值$f(1)=2$. 该函数既不单射也不满射.

定理 设$f: A \to B$，且A和B是有限集，

（1）若 f 是满射，则$|A| \geq |B|$。

（2）若 f 是单射，则$|A| \leq |B|$。

（3）若 f 是双射，则$|A| = |B|$。

习题

- 1.设A，B是元数相同的有限集，试证f：A→B是单射的充要条件是f为满射

- 2.设A=[a,b]为闭区间,a ≠b,B=[0,1], $f(x)=\dfrac{\mathrm{x}-a}{b-a}$,试证f是A到B的双射

构造从A到B的双射函数

有穷集之间的构造

例5 $A=P(\{1,2,3\})$, $B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

解 $A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

$B=\{ f_0, f_1, \dots , f_7 \}$, 其中

$f_0=\{<1,0>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_1=\{<1,0>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_2=\{<1,0>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_3=\{<1,0>,<2,1>,<3,1>\}$,

$f_4=\{<1,1>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_5=\{<1,1>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_6=\{<1,1>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_7=\{<1,1>,<2,1>,<3,1>\}$.

令 f: $A\to B$,

$f(\varnothing)=f_0$, $f(\{1\})=f_1$, $f(\{2\})=f_2$, $f(\{3\})=f_3$,

$f(\{1,2\})=f_4$, $f(\{1,3\})=f_5$, $f(\{2,3\})=f_6$, $f(\{1,2,3\})=f_7$

构造从*A*到*B*的双射函数（续）

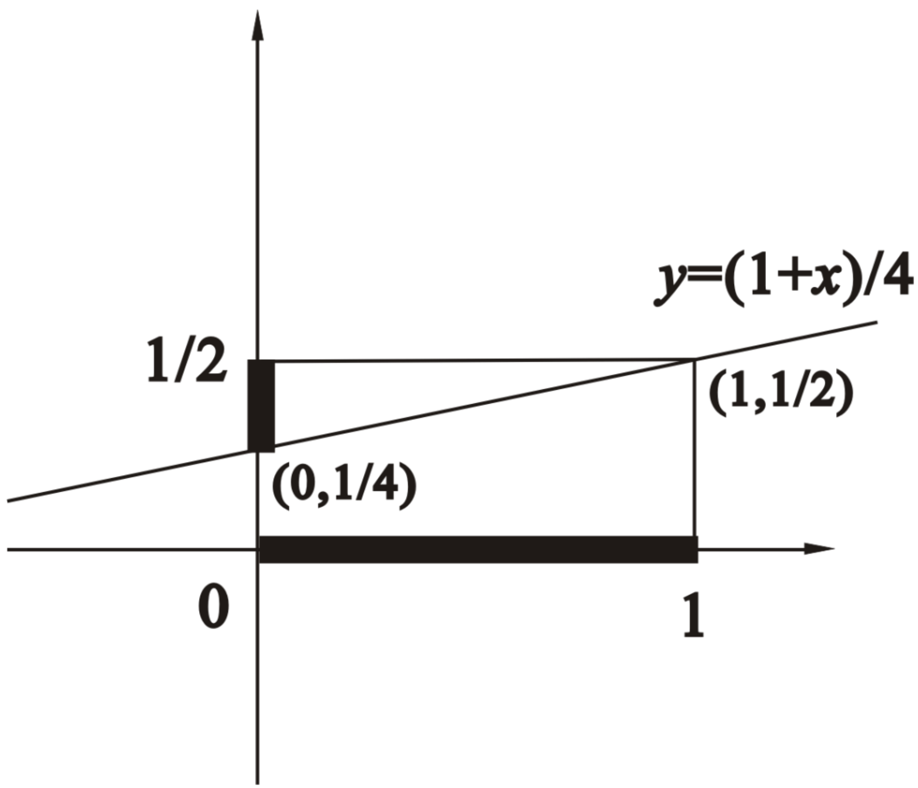
实数区间之间构造双射

构造方法：直线方程

例6 $A=[0,1]$

$B=[1/4,1/2]$

构造双射 $f:A\to B$



解

令 f: $[0,1]\to[1/4,1/2]$

$f(x)=(x+1)/4$

构造从A到B的双射函数（续）

A 与自然数集合之间构造双射

方法：将A中元素排成有序图形，然后从第一个元素开始按照次序与自然数对应

例7 A=Z, B=N，构造双射 f：$A\to B$

将Z中元素以下列顺序排列并与N中元素对应：

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{Z:} & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3\ \ldots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{N:} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ \ldots
\end{array}
$$

则这种对应所表示的函数是：

$$f\text{：}\ \mathrm{Z}\to\mathrm{N},\ f(x)=\begin{cases} 2x & \geq 0 \\ -2x-1 & x<0 \end{cases}$$

常函数、恒等函数、单调函数

1. 设f：$A \to B$, 若存在 $c \in B$ 使得 $\forall x \in A$ 都有 $f(x)=c$, 则称 f：$A \to B$是常函数.
2. 称 A 上的恒等关系 I_A为 A 上的恒等函数, 对所有的 $x \in A$ 都有 $I_A(x)=x$.
3. 设 f：$R \to R$，如果对任意的 $x_1, x_2 \in R$，$x_1 < x_2$, 就有 $f(x_1) \le f(x_2)$, 则称 f 为单调递增的；如果对任意的 $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, 就有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 f 为 严格单调递增 的.

   类似可以定义单调递减 和严格单调递减 的函数.

集合的特征函数

4. 设 A 为集合, $\forall A' \subseteq A$, A' 的 **特征函数** $\chi_{A'}$： $A \to \{0,1\}$ 定义为

$$\chi_{A'}(a) = \begin{cases} 1, & a \in A' \\ 0, & a \in A - A' \end{cases}$$

实例 集合：X ={ A, B, C, D, E, F, G, H },

子集：T = { A, C, F, G, H }

T 的特征函数χ_T：

x	A	B	C	D	E	F	G	H
$\chi_T(x)$	1	0	1	0	0	1	1	1

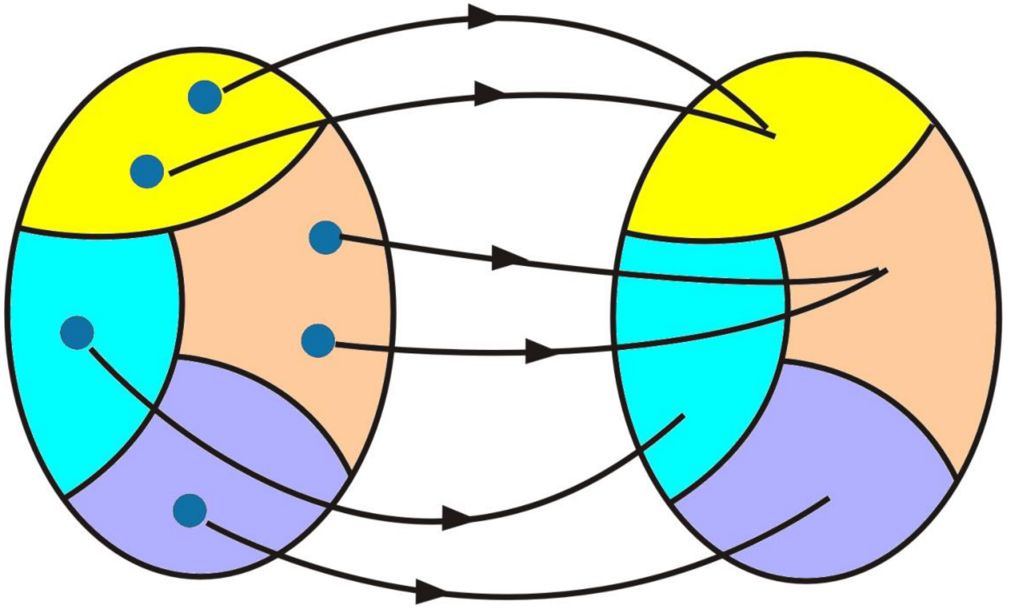
自然映射

5. 设 R 是 A 上的等价关系, 令

$$g: A \to A/R$$

$$g(a) = [a], \forall a \in A$$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射.



实例

例8 (1) A的每一个子集A'都对应于一个特征函数, 不同的子集对应于不同的特征函数. 例如 $A=\{a, b, c\}$, 则有

$$\chi_{\varnothing} = \{ \langle a,0\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,0\rangle \},$$

$$\chi_{\{a,b\}} = \{ \langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,0\rangle \}$$

(2) 给定集合 A， A 上不同的等价关系确定不同的自然映射, 其中恒等关系确定的自然映射是双射, 其他的自然映射一般来说只是满射. 例如

$$A=\{1, 2, 3\},\ R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}\cup I_A$$

$$g(1) = g(2) = \{1,2\},\ g(3) = \{3\}$$

4.7 函数的复合与反函数

- 函数的复合
  - 函数复合的定理
  - 函数复合的性质
- 反函数
  - 反函数存在的条件
  - 反函数的性质

函数复合的定理

定理　设F, G是函数, 则$F\circ G$也是函数, 且满足

(1) $\mathrm{dom}(F\circ G)=\{ x \mid x\in \mathrm{dom}F \wedge F(x)\in \mathrm{dom}G\}$

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$ 有 $F\circ G(x) = G(F(x))$

推论1　设F, G, H为函数, 则 $(F\circ G)\circ H$ 和 $F\circ(G\circ H)$ 都是函数, 且 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

推论2　设 $f: A\to B$, $g: B\to C$, 则 $f\circ g: A\to C$, 且 $\forall x\in A$ 都有 $f\circ g(x) = g(f(x))$.

函数复合运算的性质

定理 设 f：$A\to B$, g：$B\to C$.

(1) 如果 f：$A\to B$, g：$B\to C$ 都是满射的, 则 $f\circ g$：$A\to C$也是满射的.

(2) 如果 f：$A\to B$, g：$B\to C$ 都是单射的, 则 $f\circ g$：$A\to C$也是单射的.

(3) 如果 f：$A\to B$, g：$B\to C$ 都是双射的, 则 $f\circ g$：$A\to C$也是双射的.

证 (1) $\forall c\in C$, 由 g：$B\to C$ 的满射性, $\exists b\in B$ 使得 $g(b)=c$. 对这个b, 由 f：$A\to B$ 的满射性，$\exists a\in A$ 使得 $f(a)=b$. 由合成定理有 $f\circ g(a)=g(f(a))=g(b)=c$ 从而证明了 $f\circ g$：$A\to C$是满射的.

函数复合运算的性质

(2) 假设存在 $x_1, x_2 \in A$ 使得 $f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$

由合成定理有 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$.

因为 g：$B \to C$ 是单射的, 故 $f(x_1)=f(x_2)$. 又由于 f：$A \to B$ 也是单射的, 所以 $x_1=x_2$. 从而证明 $f \circ g$：$A \to C$ 是单射的.

(3) 由 (1) 和 (2) 得证.

定理 设 f: $A \to B$，则

$$f = f \circ I_B = I_A \circ f$$

思考：设 f：$A\to B$，g：$B\to C$.

(1) 如果 $f\circ g$：$A\to C$是单射的，则

f：$A\to B$？ g：$B\to C$？

(2) 如果 $f\circ g$：$A\to C$是满射的，则

f：$A\to B$？ g：$B\to C$？

(3) 如果 $f\circ g$：$A\to C$是双射的，则

f：$A\to B$？ g：$B\to C$？

反函数存在的条件

任给函数 F, 它的逆F^{-1}不一定是函数, 只是二元关系.

实例：$F=\{<a,b>,<c,b>\}$， $F^{-1}=\{<b,a>,<b,c>\}$

任给单射函数 f：$A\to B$, 则 f^{-1}是函数, 且是从 $\mathrm{ran}f$ 到 A的双射函数, 但不一定是从 B 到 A 的双射函数.

实例：$f: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$, $f(x) = 2x$,

$f^{-1}: \mathrm{ran}f \to \mathrm{N}$, $f^{-1}(x) = x/2$

反函数

定理　设 $f: A\to B$是双射的, 则$f^{-1}: B\to A$也是双射的.

证　因为 f 是函数, 所以 f^{-1} 是关系, 且

$$\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{ran} f = B\,, \qquad \mathrm{ran}\, f^{-1} = \mathrm{dom} f = A,$$

对于任意的 $y\in B = \mathrm{dom}\, f^{-1}$, 假设有$x_1, x_2\in A$使得

$$\langle y,x_1\rangle\in f^{-1}\wedge\langle y,x_2\rangle\in f^{-1}$$

成立, 则由逆的定义有

$$\langle x_1,y\rangle\in f\wedge\langle x_2,y\rangle\in f$$

根据 f 的单射性可得 $x_1 = x_2$, 从而证明了f^{-1}是函数，且是满射的. 下面证明 f^{-1} 的单射性.

若存在 $y_1, y_2\in B$ 使得 $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$, 从而有

$$\langle y_1,x\rangle\in f^{-1}\wedge\langle y_2,x\rangle\in f^{-1}$$

$$\Rightarrow \langle x,y_1\rangle\in f\wedge\langle x,y_2\rangle\in f \Rightarrow y_1 = y_2$$

反函数的定义及性质

对于双射函数f：$A\to B$, 称 f^{-1}：$B\to A$是它的反函数.

反函数的性质

定理　设 f：$A\to B$是双射的, 则

$$f^{-1}\circ f = I_B,\quad f\circ f^{-1} = I_A$$

对于双射函数 f：$A\to A$, 有

$$f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = I_A$$

函数复合与反函数的计算

例 设 f: R→R, g: R→R

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 3 \\ -2 & x<3 \end{cases} \qquad g(x)=x+2$$

求 $f\circ g$, $g\circ f$. 如果 f 和 g 存在反函数, 求出它们的反函数.

解 $f\circ g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $\qquad$ $g\circ f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$f\circ g(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\geq 3 \\ 0 & x<3 \end{cases} \qquad g\circ f(x)=\begin{cases} (x+2)^2 & x\geq 1 \\ -2 & x<1 \end{cases}$$

f: R→R不是双射的, 不存在反函数. g: R→R是双射的, 它的反函数是 g^{-1}: R→R, $g^{-1}(x) = x-2$

问题描述——多机调度

问题：

有2台机器c_1, c_2;

6项任务$t_1, t_2, \ldots, t_6$. 每项任务的加工时间分别为：

$$l(t_1)=l(t_3)=l(t_5)=l(t_6)=1,\ l(t_2)=l(t_4)=2$$

任务之间的顺序约束是：

任务t_3只有在t_6和t_5完成之后才能开始加工；

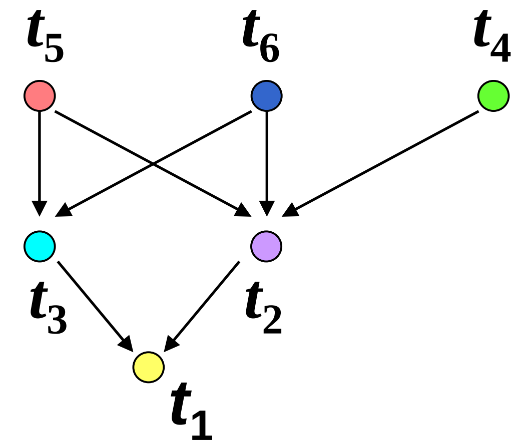
任务t_2只有在t_6, t_5和t_4都完成后才能开始加工；

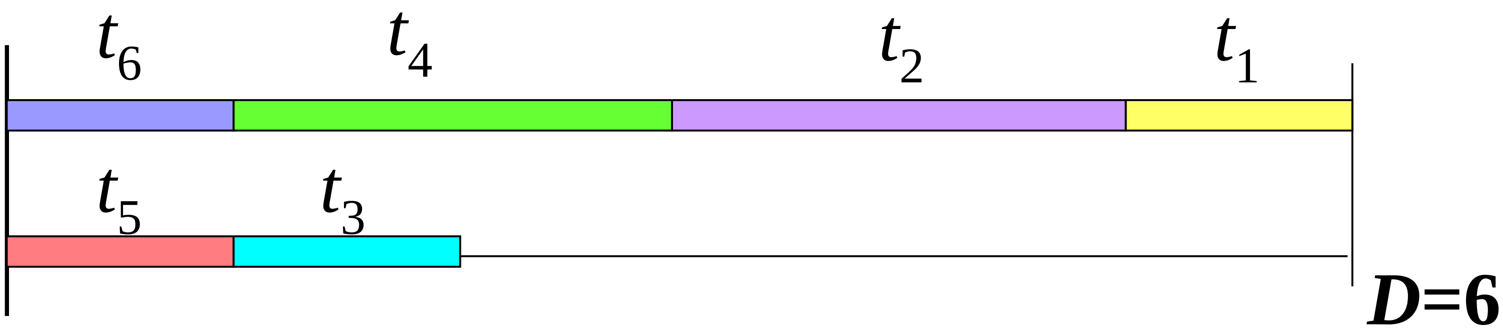
任务t_1只有在t_3和t_2完成之后才能开始加工.

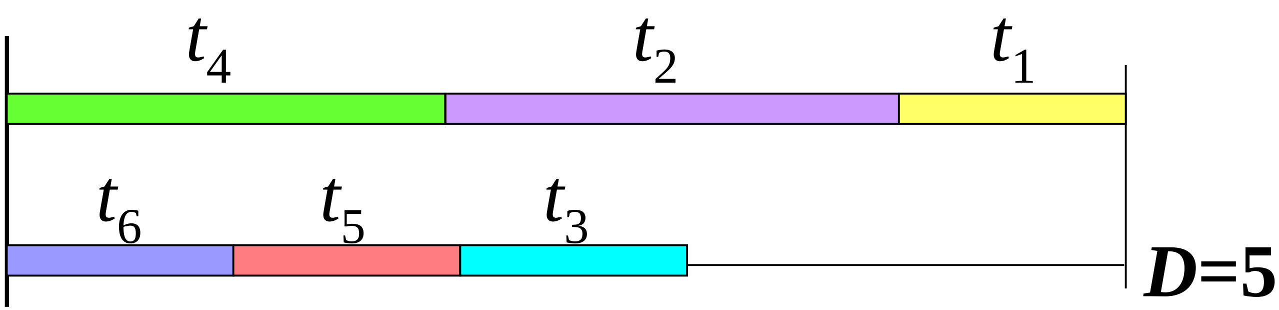
调度：任务安排在机器上加工的方案

截止时间：开始时刻0，最后停止加工机器的停机时刻

两个调度方案







问题描述

- 集合

  任务集 $T=\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}, n\in Z^+$

  机器集 $M=\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$， $m\in Z^+$

  时间集 N

- 函数和关系

  加工时间——函数 $l:T\rightarrow Z^+$.

  顺序约束 R ——T上的偏序关系，定义为

  $R=\{<t_i, t_j>|\ t_i, t_j\in T, i=j$ 或 t_i完成后t_j才可以开始加工$\}$

问题描述（续）

- 可行调度
  - 分配到机器：

T 的 划分 $\pi=\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$，划分块$T_j$是$T$ 的非空子集，由安排在机器c_j上加工的所有任务组成.

  - 每个机器上的任务开始时间

$\forall T_j\in\pi$，存在调度函数 $\sigma_j:T_j\to \mathrm{N}$， 满足以下条件：

(1) 任意时刻 i，每台机器上正在加工至多1个任务

$$\forall i, 0 \le i<D,$$

$$|\{ t_k \mid t_k\in T_j, \sigma_j(t_k)\le i<\sigma_j(t_k)+l(t_k) \}| \le 1, j=1, 2, \ldots, m$$

(2) 任务的安排满足偏序约束

$$\forall t_i\in T_i, t_j\in T_j, <t_i,t_j>\in R \Leftrightarrow \sigma_i(t_i)+l(t_i)\le\sigma_j(t_j) \quad i, j=1, 2, \ldots, m$$

问题描述（续）

机器 j 的停止时间

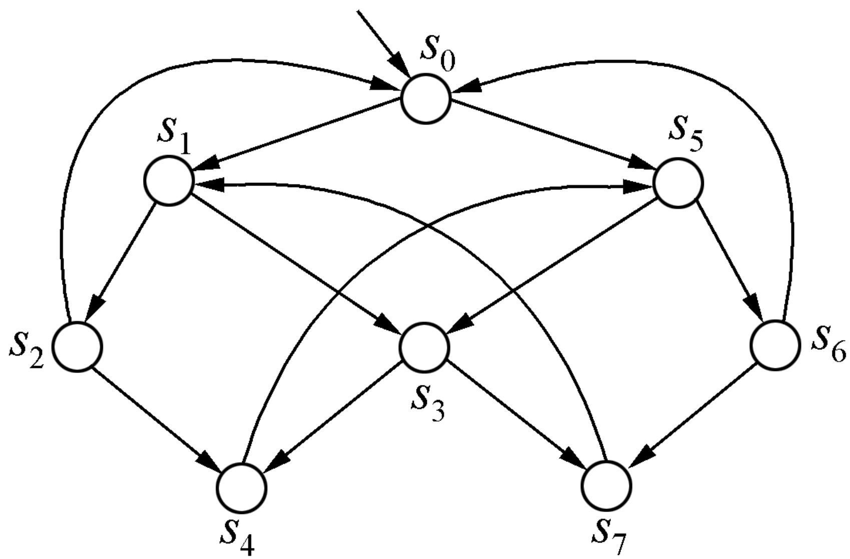
$$D_j = \max\{\sigma_j(t_k) \mid t_k \in T_j\} + l(t_k)$$

所有任务的截止时间

$$D = \max\{D_j \mid j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

我们的问题就是确定使得D达到最小的可行调度.

资源共享协议描述



闲置状态 i
请求状态 r
访问状态 w

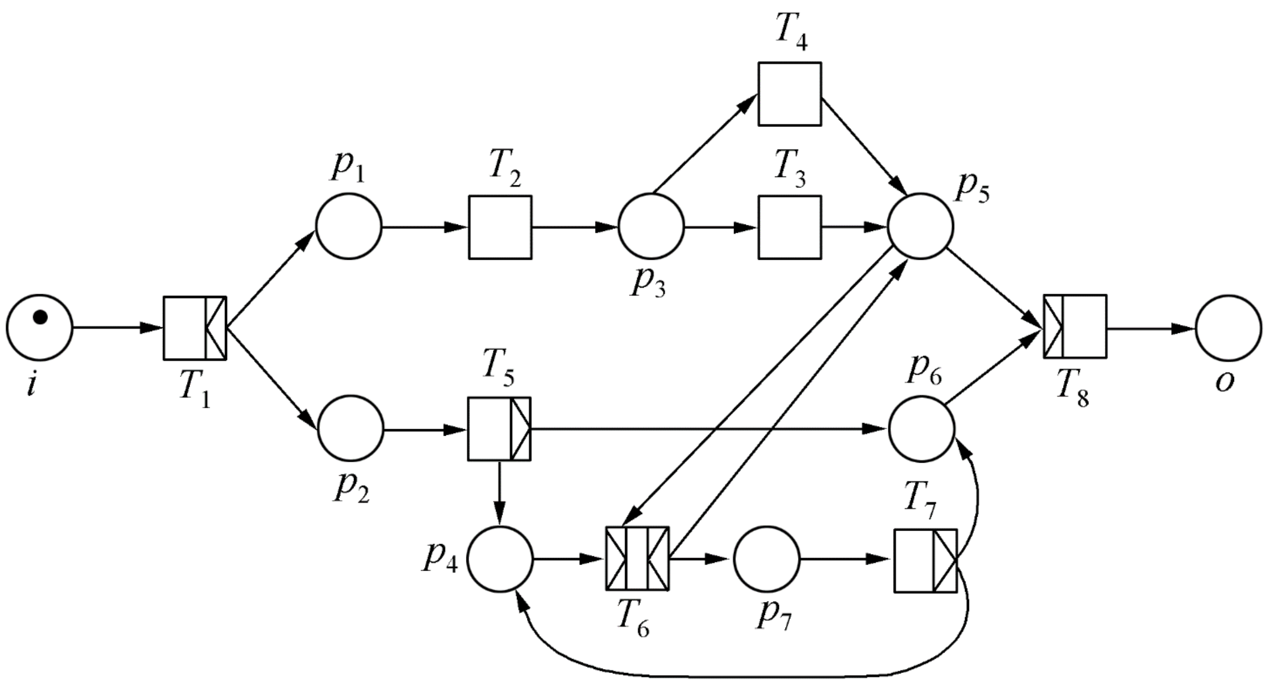
$s_0=<i_1,i_2>$， $s_1=<r_1,i_2>$，
$s_2=<w_1,i_2>$， $s_3=<r_1,r_2>$，
$s_4=<w_1,r_2>$， $s_5=<i_1,r_2>$，
$s_6=<i_1,w_2>$， $s_7=<r_1,w_2>$，

$S=\{i_1,r_1,w_1\}\times\{i_2,r_2,w_2\}-\{<w_1,w_2>\}=\{s_0,s_1,\ldots,s_7\}$

安全性：$\neg(w_1\wedge w_2)$，任何时刻至多一个进程访问资源.

活性：$r_1\rightarrow\Diamond w_1$，任何进程对资源的需求总会满足

投诉处理流程描述



T_1：登记； **T_2寄出调查表；** **T_3：调查表处理；**

T_4：过期处理； **T_5：投诉评估；** **T_6处理投诉；**

T_7检查处理结果； **T_8：归档保存.**

形式化描述

WF_net是三元组(P,T,F)，其中P是库所集合，T是变迁集合，F 称为流关系．满足以下条件：

(1) $P \cap T = \varnothing$;

(2) $P \cup T \neq \varnothing$;

(3) $F \subseteq P \times T \cup T \times P$;

(4) $\mathrm{dom}F \cup \mathrm{ran}F = P \cup T$，其中

$\mathrm{dom}F = \{x \mid \exists y(<x,y> \in F)\}$，$\mathrm{ran}F = \{y \mid \exists x(<x,y> \in F)\}$;

(5) 存在起始库所$i \in P$，$^\bullet i = \varnothing$，$^\bullet i = \{ j \mid <j,i> \in F\}$称为 i 的前集;

(6) 存在终止库所$o \in P$，$o^\bullet = \varnothing$，$o^\bullet = \{ j \mid <o,j> \in F\}$称为$o$的后集;

(7) 每个结点$x \in P \cup T$，都处在从 i 到 o 的一条路径上.