5.2 通路、回路、图的连通性

- 简单通(回)路, 初级通(回)路, 复杂通(回)路
- 无向图的连通性

  无向连通图, 连通分支
- 有向连通图

  弱连通图, 单向连通图, 强连通图
- 点割集与割点
- 边割集与割边(桥)

通路与回路

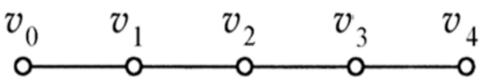
定义 给定图$G=<V,E>$（无向或有向的），G中顶点与边的交替序列$\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$,

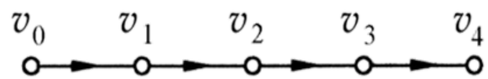
(1) 若$\forall i(1\le i\le l)$, v_{i-1}, v_i是e_i的端点(对于有向图, 要求v_{i-1}是始点, v_i是终点), 则称Γ为通路, v_0是通路的起点, v_l是通路的终点, l为通路的长度. 又若$v_0=v_l$，则称Γ为回路.

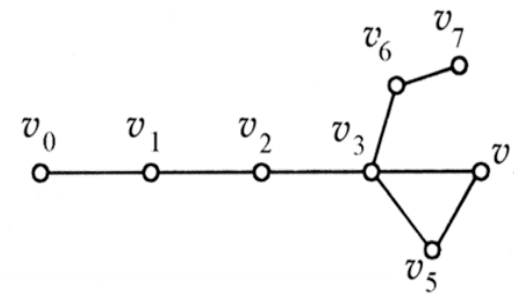
(2) 若通路(回路)中所有顶点(对于回路, 除$v_0=v_l$)各异，则称为初级通路(初级回路).初级通路又称作路径, 初级回路又称作圈.

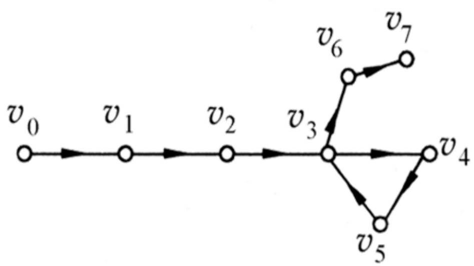
(3) 若通路(回路)中所有边各异, 则称为简单通路(简单回路), 否则称为复杂通路(复杂回路).

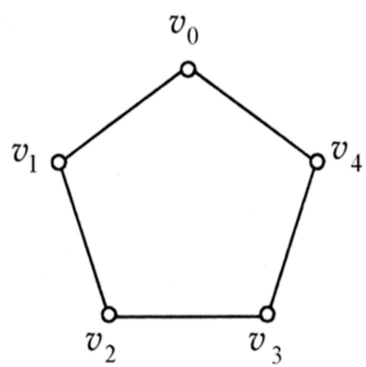
通路与回路实例

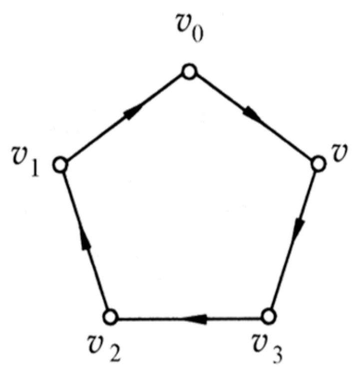

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4

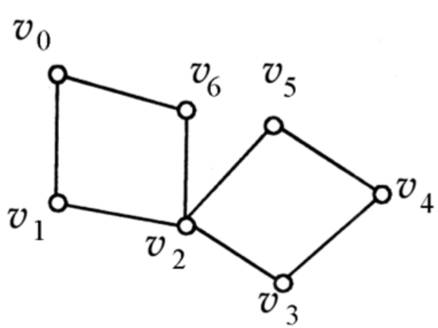

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4

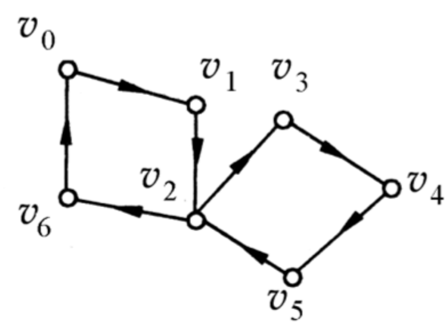

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6

通路与回路(续)

说明:

- 表示方法

  ① 用顶点和边的交替序列(定义), 如$\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$

  ② 用边的序列, 如$\Gamma=e_1e_2\ldots e_l$

  ③ 简单图中, 用顶点的序列, 如$\Gamma=v_0v_1\ldots v_l$

- 环是长度为1的圈, 两条平行边构成长度为2的圈.
- 在无向简单图中, 所有圈的长度≥3; 在有向简单图中, 所有圈的长度≥2.

思考：

1. n阶无向完全图中有几种非同构的圈？

2. $n(n \geq 4)$阶无向完全图中有几种非同构的偶圈，长度分别为多少。

3. $n(n \geq 2)$阶有向完全图中有几种非同构的圈，长度分别为多少。

通路与回路(续)

- 在两种意义下计算圈的个数

① 定义意义下

在无向图中，一个长度为$l(l\geq 3)$的圈看作$2l$个不同的圈. 如$v_0v_1v_2v_0$，$v_1v_2v_0v_1$，$v_2v_0v_1v_2$, $v_0v_2v_1v_0$，$v_1v_0v_2v_1$，$v_2v_1v_0v_2$看作6个不同的圈.

在有向图中，一个长度为$l(l\geq 3)$的圈看作l个不同的圈.

② 同构意义下

所有长度相同的圈都是同构的, 因而是1个圈.

通路与回路(续)

定理 在n阶图G中，若从顶点u到v（$u \neq v$）存在通路，则从u到v存在长度小于等于$n-1$的通路.

推论 在n阶图G中，若从顶点u到v（$u \neq v$）存在通路，则从u到v存在长度小于等于$n-1$的初级通路.

定理 在一个n阶图G中，若存在v到自身的回路，则一定存在v到自身长度小于等于n的回路.

推论 在一个n阶图G中，若存在v到自身的简单回路，则存在v到自身长度小于等于n的初级回路.

证明：在n阶图G中，若从顶点u到v（$u\neq v$）存在通路，则从u到v存在长度小于等于$n-1$的通路.

- 设$v_0e_1v_1e_2v_2\ldots e_lv_l$是从$u=v_0$到$v=v_l$的一条通路。如果$l > n\text{-}1$，由于图中只有$n$个顶点，在$v_0,v_1,\ldots,v_l$中一定有2个是相同的。设$v_i=v_j$，$i<j$，那么$v_ie_{i+1}v_{i+1}\ldots e_jv_j$是一条回路，删去这条回路，得到$v_0e_1v_1\ldots v_ie_{j+1}\ldots e_lv_l$仍然是从$u=v_0$到$v=v_l$的一个通路，其长度减小$j\text{-}i$。如果它的长度仍大于$n$-1，则可以重复上述做法，直到得到长度不超过$n$-1的通路为止。

例：假设无向简单图中无悬挂顶点，证明G中必定含有长度为$l(l \geq 3)$的回路。

思路：

(1)只讨论连通图；

(2) $\delta(G) \geq 2$ ；

(3)图中顶点数至少为3；

(4)在G中找一条的最长通路Γ， Γ的起点和终点都一定和Γ上的某两个点相邻。从而找到$l >= 3$的回路。

无向图的连通性

设无向图$G=<V,E>$,

u与v连通: 若u与v之间有通路. 规定u与自身总连通.

连通关系 $R=\{<u,v>|\ u,v \in V$且$u \sim v\}$是V上的等价关系

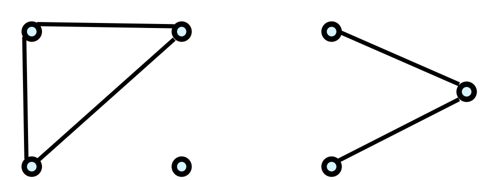
连通图:任意两点都连通的图. 平凡图是连通图.

连通分支: V关于连通关系R的等价类的导出子图

设$V/R=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$, $G[V_1]$, $G[V_2]$, …,$G[V_k]$是G的连通分支, 其个数记作$p(G)=k$.

G是连通图$\Leftrightarrow p(G)=1$

例



例：若无向图G中恰有两个奇度顶点，证明这两个奇度顶点必连通。

思路：反证法 + 握手定理

点割集

记 $G-v$: 从G中删除v及关联的边

$G-V'$: 从G中删除V'中所有的顶点及关联的边

$G-e$: 从G中删除e

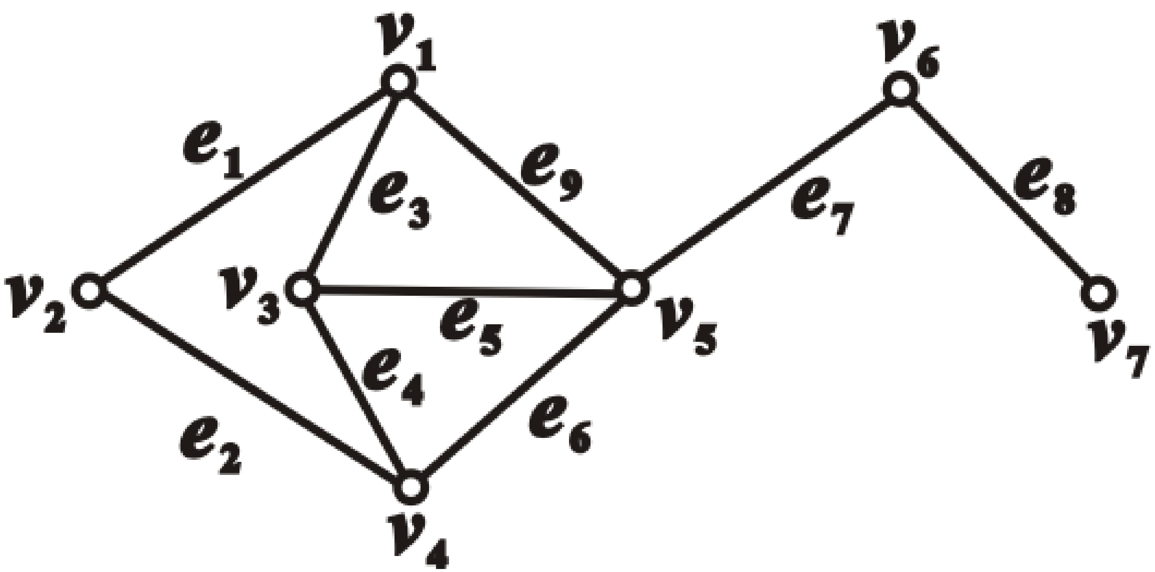
$G-E'$: 从G中删除E'中所有边

定义 设无向图$G=\langle V,E\rangle$, $V'\subset V$, 若$p(G-V')>p(G)$且$\forall V''\subset V'$, $p(G-V'')=p(G)$, 则称V'为G的点割集. 若$\{v\}$为点割集, 则称v为割点.

点割集实例

例 $\{v_1,v_4\}$, $\{v_6\}$是点割集, v_6是割点.

$\{v_2,v_5\}$不是点割集



边割集

定义 设无向图$G=\langle V,E\rangle$, $E'\subseteq E$, 若$p(G-E')>p(G)$且$\forall E''\subset E'$, $p(G-E'')=p(G)$, 则称E'为G的边割集. 若$\{e\}$为边割集, 则称e为割边或桥.

在上一页的图中，$\{e_1,e_2\}$，$\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$，$\{e_8\}$等是边割集，e_8是桥，$\{e_7,e_9,e_5,e_6\}$不是边割集

说明：K_n无点割集

n阶零图既无点割集，也无边割集.

若G连通，E'为边割集，则$p(G-E')=2$

若G连通，V'为点割集，则$p(G-V')\geq 2$

例.设E'为连通图G的边割集，则$G-E'$的连通分支数 $p(G-E')=2$

证：若$p(G-E')=k\geq 3$，设$G-E'$的k个连通分支为 $G_i=<V_i,E_i>, i=1,2,\ldots,k$

E'中边的两个端点一定分属于两个不同的连通分支。令 $E_{ij}=\{(u,v)|(u,v)\in E\wedge u\in E_i\wedge v\in E_j\}, i\neq j, 1\leq i,j\leq k$

由于每个连通分支都有与E'中的边相关联的顶点，故必有t使得$E_{1t}\neq\phi$。

于是，$E''=E'-E_{1t}\subset E'$，且$p(G-E'')=k-1$，这与E'为边割集矛盾

例.设$e=(u,v)$为无向图G中的一条边，证明：e为桥当且仅当e不在任何圈中。

证：(1)先证必要性：若e为桥，则e不在任何圈中。

反证法：否则，G中存在一个包含边e的圈$C=uevv_1v_2\ldots v_su$。在G中含边e，$G-e$中，顶点v到u有通路$vv_1v_2\ldots v_su$，于是$p(G-e)=p(G)$，这与e为桥矛盾。

(2)再证充分性：已知$e=(u,v)$不在任何圈中，证明e为桥。

反证法：若e不是桥，则$G-e$中，u与v仍然连通，设$uv_1v_2\ldots v_sv$为u到v的在$G-e$中的路径，于是在G中$uv_1v_2\ldots v_sveu$为含e的圈，这与e不在任何圈中矛盾。

例.设$e=(u,v)$为无向图G一桥，证明u(或v)是割点当且仅当u(或v)不是悬挂顶点。

证：(1)必要性：

不妨设u是割点，下面证明u不是悬挂顶点。

用反证法。若u是悬挂顶点，u只关联桥e，将u从G中删除，只去掉了u和e，并没有生成新的连通分支，即$p(G-u)=p(G)$，与u是割点矛盾。所以割点u不是悬挂顶点。

(2)充分性：

若u不是悬挂顶点，下面证明u是割点。

u不是悬挂顶点，所以除与桥e关联外，还与其它至少一条边关联。不妨设除v之外，还与$w_1,w_2\dots w_s(s\ge 1)$相邻，于是$G-u$至少产生一个新的连通分支，即$p(G-u)>p(G)$，所以u是割点。

设G为n阶m条边的无向连通图，证明$m \geq n-1$ 。

证：只需证明对于n阶m条边的无向简单连通图中结论成立。

设G为n阶m条边的无向简单连通图，对n做归纳。

(1)$n=1$，G为平凡图，$m=n-1$，命题为真。

(2)设$n \leq k(k \geq 1)$时命题为真，下面证明$n=k+1$时命题为真。

取v在G中，令$G'=G-v$，G'有s个连通分支：$G_1, G_2 \ldots G_s$，$1 \leq s \leq d(v)$。

设n_i, m_i分别为G_i的阶数和边数，由假设可知，

$$m_i \geq n_i - 1 \tag{a}$$

对(a)两边求和，得

$$\sum_{i=1}^{s} m_i \geq \sum_{i=1}^{s} n_i - s \tag{b}$$

而

$$\sum_{i=1}^{s} m_i = m - d(v), \qquad \sum_{i=1}^{s} n_i = n - 1$$

带入(b)得

$$m - d(v) \geq n - 1 - s$$

由此可得

$$m \geq n - 1 + (d(v) - s) \geq n - 1$$

故命题为真。

有向图的连通性

设有向图$D=\langle V,E\rangle$

*u*可达*v*: *u*到*v*有通路. 规定*u*到自身总是可达的.

可达具有自反性和传递性

*D*弱连通(连通): 基图为无向连通图

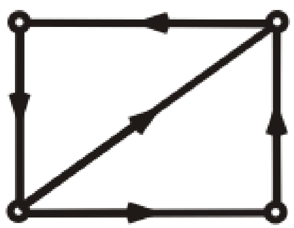
*D*单向连通: $\forall u,v\in V$，*u*可达*v* 或*v*可达*u*

*D*强连通: $\forall u,v\in V$，*u*与*v*相互可达

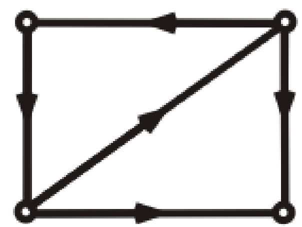
强连通$\Rightarrow$单向连通$\Rightarrow$弱连通

有向图的连通性(续)

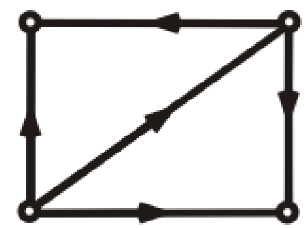
例



强连通



单向连通



弱连通

定理(强连通判别法) *D*强连通当且仅当*D*中存在经过每个顶点至少一次的回路

定理(单向连通判别法) *D*单向连通当且仅当*D*中存在经过每个顶点至少一次的通路

扩大路径法

- 设$G=<V,E>$为 n 阶无向图，$E\neq\varnothing$. 设 Γ 为G中一条路径，若Γ的始点和终点与 Γ 外的顶点不相邻，则称 Γ 是一条极大路径。
- 任意给一条路径，若此路径的始点或终点与通路外的顶点相邻，就将它们扩到通路中来，继续这一过程，直到最后得到的通路的两个端点不与通路外的顶点相邻为止.，最后总能得到一条极大路径，这种构造方法叫做“扩大路径法”。

定理：设$\boldsymbol{G}$是无向简单图，$\boldsymbol{\delta(G)\geq 2}$，证明$\boldsymbol{G}$中存在大于或等于$\boldsymbol{\delta(G)+1}$的圈。

证：用扩大路径法证明。

因为$\boldsymbol{G}$是无向简单图，且$\boldsymbol{\delta(G)\geq 2}$，所以$\boldsymbol{|V|\geq 3}$。

$\boldsymbol{V}$中任取一个顶点$\boldsymbol{u_0}$，必有$\boldsymbol{u_1\in V}$，使得$\boldsymbol{(u_0,u_1)\in E}$，

对$\boldsymbol{\Gamma_0=u_0u_1}$采用扩大路径法，得到一条极大路径$\boldsymbol{\Gamma=v_0v_1\dots v_l}$，

则必有$\boldsymbol{l\geq\delta(G)}$。

因为$\boldsymbol{d(v_0)\geq\delta(G)}$，所以$\boldsymbol{v_0}$与$\boldsymbol{\Gamma}$上至少$\boldsymbol{\delta(G)}$个顶点相邻，

设这些顶点为$\boldsymbol{v_{i_1}=v_1,v_{i_2}\dots v_{i_s}}$，其中$\boldsymbol{s\geq\delta(G)}$。

于是$\boldsymbol{G}$中存在圈$\boldsymbol{C=v_0v_{i_1}\dots v_{i_2}\dots v_{i_s}v_0}$， $\boldsymbol{C}$的长度为$\boldsymbol{s+1}$

$\boldsymbol{C}$即为长度大于或者等于$\boldsymbol{\delta(G)+1}$的圈。