

Zadanie nr 2 - Próbkowanie i kwantyzacja

Cyfrowe Przetwarzanie Sygnałów

Dominik Gałkowski, 247659 Jan Śladowski, 247806

29.04.2025

1 Cel zadania

Celem zadania jest zapoznanie się z praktycznymi zagadnieniami związanymi z konwersją sygnałów z postaci analogowej na cyfrową (A/C) oraz z cyfrowej na analogową (C/A), a także zaimplementowanie w programie z pierwszego zadania procesu konwersji analogowo-cyfrowej, obejmującego próbkowanie i kwantyzację, oraz procesu konwersji cyfrowo-analogowej.

2 Wstęp teoretyczny

Na podstawie instrukcji [1] do programu z zadania pierwszego zostały dodane funkcjonalności do procesu konwersji analogowo-cyfrowej (A/C) i cyfrowo-analogowej (C/A) sygnałów. Warto zaznaczyć, że zostały wykonane wszystkie dostępne warianty z instrukcji do zadania i zostały one przedstawione poniżej:

- Konwersja A/C - próbkowanie
 - (S1) Próbkowanie równomierne
- Konwersja A/C - kwantyzacja
 - (Q1) Kwantyzacja równomierna z obcięciem
 - (Q2) Kwantyzacja równomierna z zaokrągleniem
- Konwersja C/A - rekonstrukcja sygnału
 - (R1) Ekstrapolacja zerowego rzędu
 - (R2) Interpolacja pierwszego rzędu
 - (R3) Rekonstrukcja w oparciu o funkcję sinc

Co więcej należało zaimplementować miary, które służą do oceny zrekonstruowanego sygnału z oryginalnym na podstawie porównania częstotliwości próbkowania i progu kwantyzacji oraz wyboru metody interpolacji. Miary zostały przedstawione poniżej:

- (C1) Błąd średniokwadratowy (MSE):
- (C2) Stosunek sygnał - szum (SNR):
- (C3) Szczytowy stosunek sygnał - szum (PSNR):
- (C4) Maksymalna różnica (MD):
- Efektywna liczba bitów (ENOB)

3 Materiały i metody

Pojedynczy eksperyment składał się z kilku kroków. W przypadku badania jakości rekonstrukcji sygnału wykonywaliśmy generowanie sygnału, następnie jego próbkowanie, następnie jego rekonstrukcję i porównanie sygnału pierwotnego z uzyskanym po rekonstrukcji. Dla badania kwantyzacji kroki były analogiczne

z tą różnicą, że krok rekonstrukcji był zastępowany przez kwantyzację. Kolorem zielonym został oznaczony sygnał pierwotny natomiast kolorem niebieskim sygnał po rekonstrukcji lub kwantyzacji zależnie od przeprowadzanego eksperymentu.

4 Eksperymenty i wyniki

4.1 Eksperyment 1

Celem eksperymentu było zbadanie wpływu zależności między częstotliwością sygnału a częstotliwością próbkowania na jakość rekonstrukcji

4.1.1 Założenia

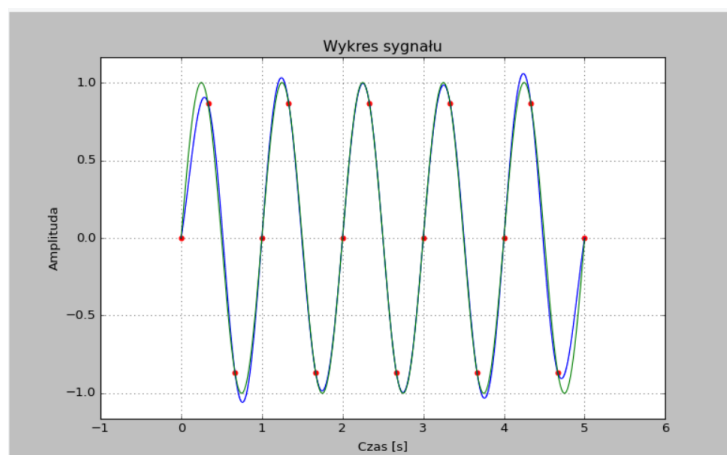
Funkcja	Czas trwania	Okres	Amplituda	Czas początkowy
Sinusoidalna	5	1	1	0

Tabela 1: Parametry wejściowe

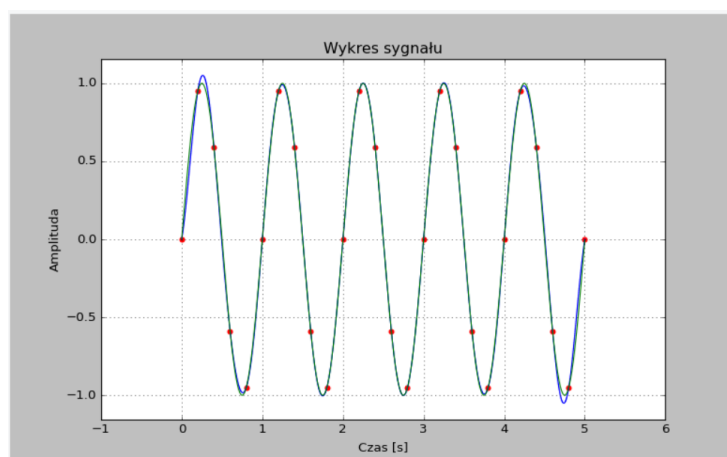
4.1.2 Eksperyment

Nr	Częstotliwość próbkowania	Metoda rekonstrukcji	MSE	SNR	PSNR	MD	ENOB
1	3	Sinc (100)	0.570	-0.608	2.689	1.645	-0.393
2	5	Sinc (100)	0.233	3.374	6.544	1.096	0.268
3	10	Sinc (100)	0.062	9.138	12.062	0.582	1.226
4	3	Zero_order	0.573	-0.590	1.793	1.727	-0.390
5	5	Zero_order	0.223	3.513	6.300	1.170	0.291
6	10	Zero_order	0.048	10.189	12.988	0.583	1.400
7	3	First_order	0.460	-2.645	2.749	1.644	-0.732
8	5	First_order	0.211	2.651	6.539	1.083	0.148
9	10	First_order	0.060	8.992	12.004	0.582	1.201

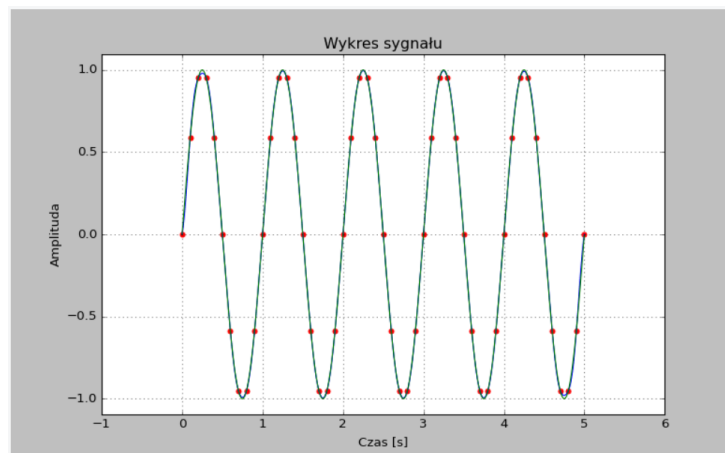
Tabela 2: Wyniki eksperymentu



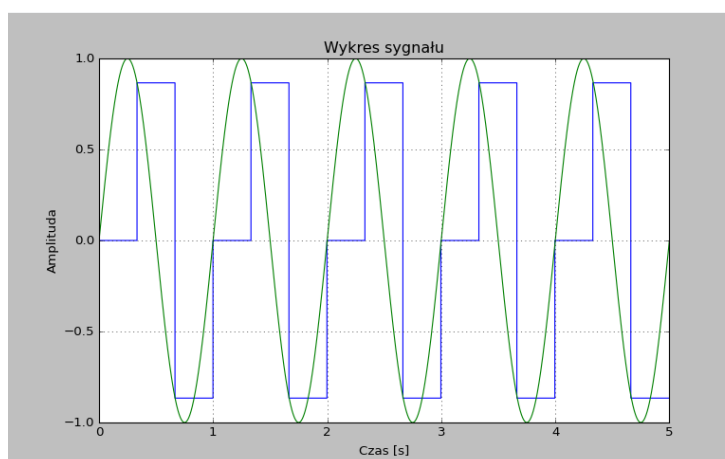
Rysunek 1: Wykres sygnałów dla częstotliwości próbkowania = 3 Hz oraz metodzie rekonstrukcji Sinc z parametrem 100



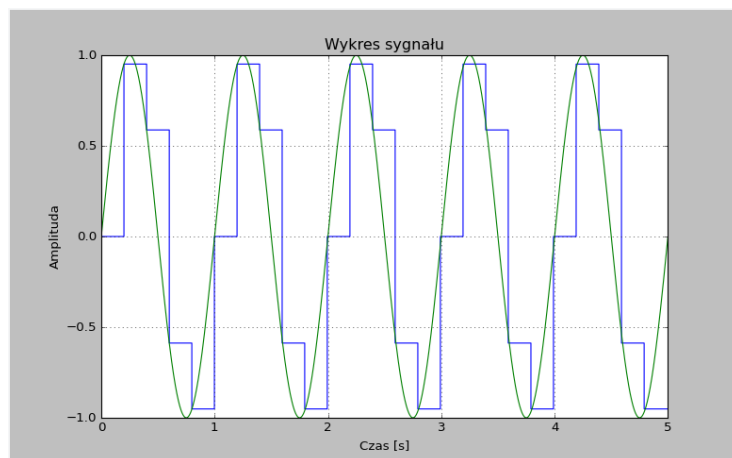
Rysunek 2: Wykres sygnałów dla częstotliwości próbkowania = 5 Hz oraz metodzie rekonstrukcji Sinc z parametrem 100



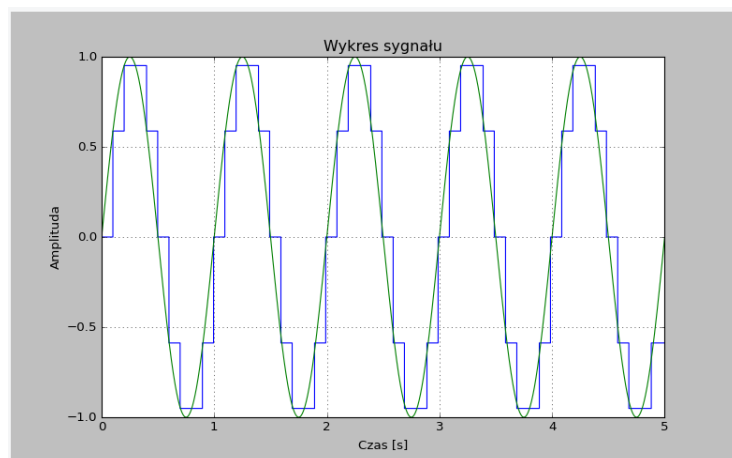
Rysunek 3: Wykres sygnałów dla częstotliwości próbkowania = 10 Hz oraz metodzie rekonstrukcji Sinc z parametrem 100



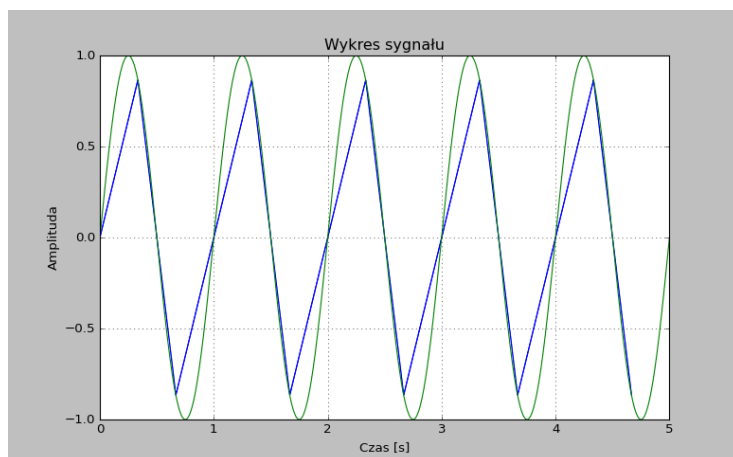
Rysunek 4: Wykres sygnałów dla częstotliwości próbkowania = 3 Hz oraz metodzie rekonstrukcji Zero Order Hold



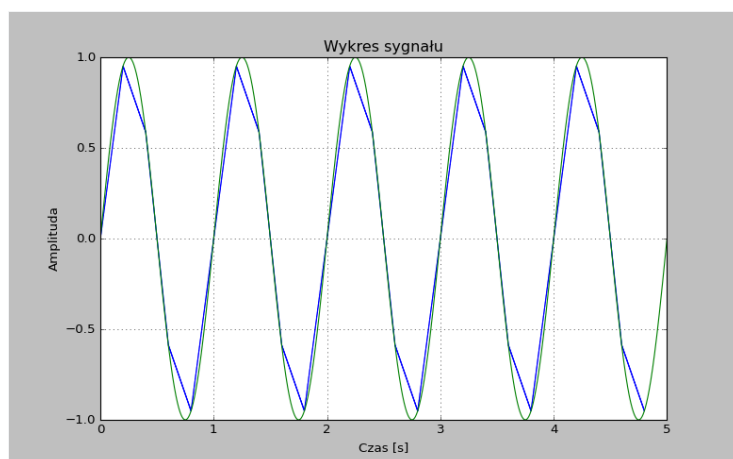
Rysunek 5: Wykres sygnałów dla częstotliwości próbkowania = 5 Hz oraz metodzie rekonstrukcji Zero Order Hold



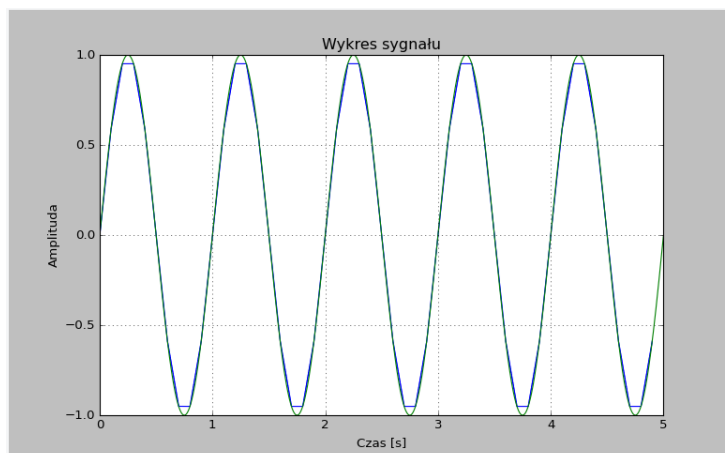
Rysunek 6: Wykres sygnałów dla częstotliwości próbkowania = 10 Hz oraz metodzie rekonstrukcji Zero Order Hold



Rysunek 7: Wykres sygnałów dla częstotliwości próbkowania = 3 Hz oraz metodzie rekonstrukcji First Order Hold



Rysunek 8: Wykres sygnałów dla częstotliwości próbkowania = 5 Hz oraz metodzie rekonstrukcji First Order Hold



Rysunek 9: Wykres sygnałów dla częstotliwości próbkowania = 10 Hz oraz metodzie rekonstrukcji First Order Hold

4.2 Eksperyment 2

Celem eksperymentu było zbadanie wpływu rodzaju sygnału na jakość rekonstrukcji

4.2.1 Założenia

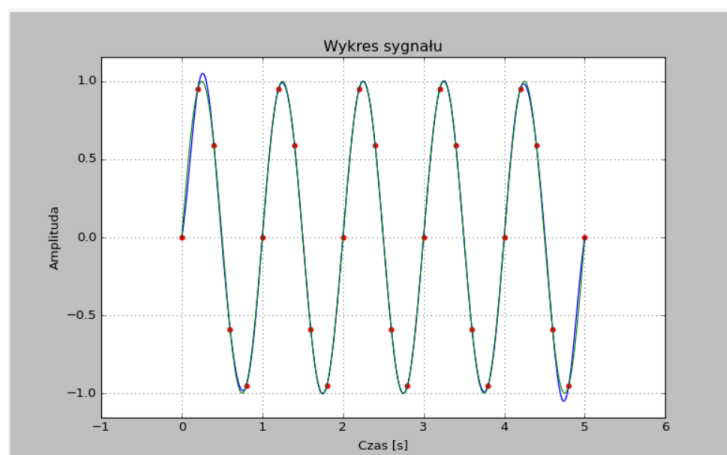
Częstotliwość próbkowania	Czas trwania	Okres	Amplituda	Czas początkowy	Współczynnik wypełnienia
5	5	1	1	0	0.6

Tabela 3: Parametry wejściowe

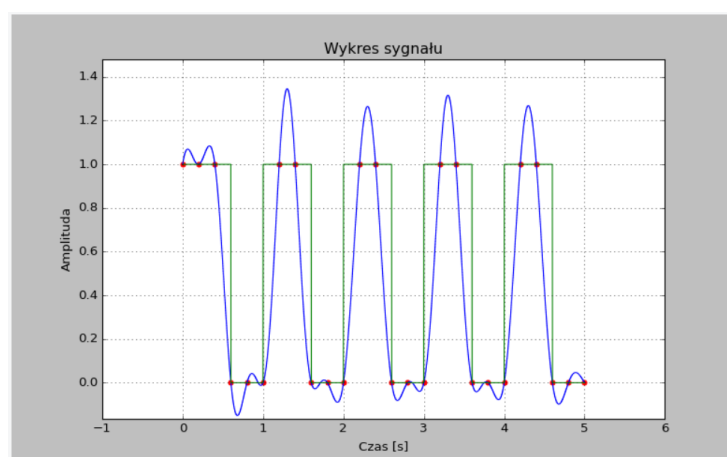
4.2.2 Eksperyment

Nr	Funkcja	Metoda rekonstrukcji	MSE	SNR	PSNR	MD	ENOB
1	Sinusoidalna	Sinc (100)	0.233	3.374	6.544	1.096	0.268
2	Prostokątny	Sinc (100)	0.201	3.409	8.259	1.090	0.274
3	Trójkątny	Sinc (100)	0.057	8.192	12.474	0.593	1.068
4	Sinusoidalna	Zero_order	0.223	3.513	6.300	1.170	0.291
5	Prostokątny	Zero_order	0.160	4.385	7.959	1.000	0.436
6	Trójkątny	Zero_order	0.051	8.530	12.958	0.497	1.125
7	Sinusoidalna	First_order	0.211	2.651	6.539	1.083	0.148
8	Prostokątny	First_order	0.172	3.385	7.645	1.000	0.270
9	Trójkątny	First_order	0.046	8.707	13.344	0.497	1.154

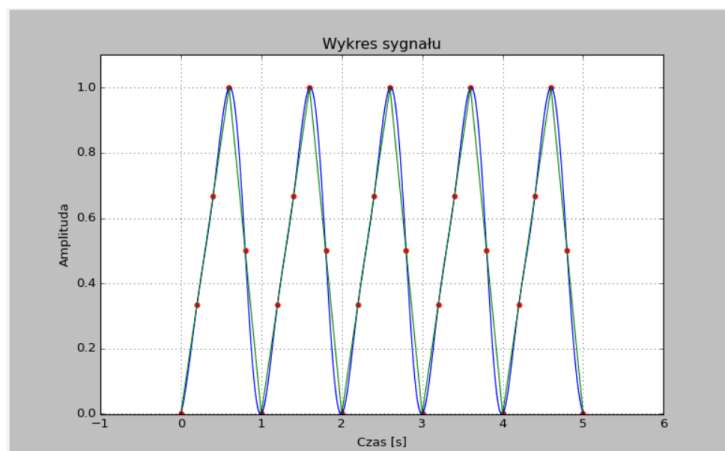
Tabela 4: Wyniki eksperymentu



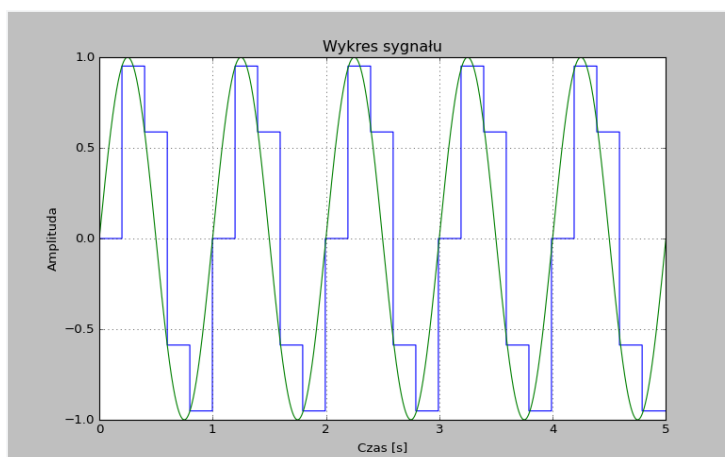
Rysunek 10: Wykres sygnałów dla funkcji Sinusoidalnej oraz metodzie rekonstrukcji Sinc z parametrem 100



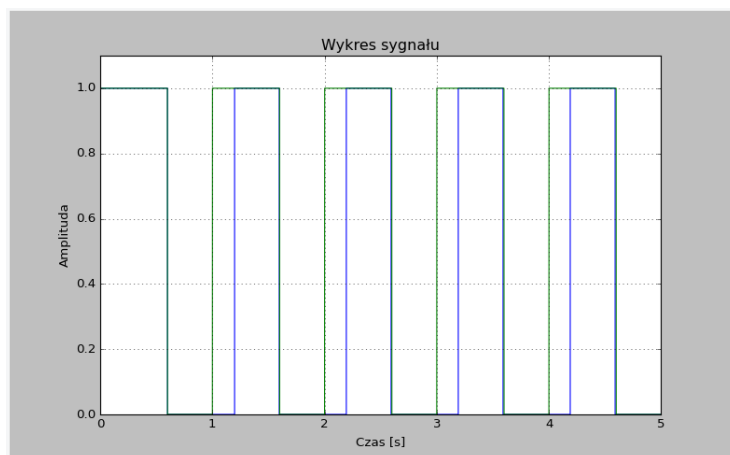
Rysunek 11: Wykres sygnałów dla funkcji Prostokątnej oraz metodzie rekonstrukcji Sinc z parametrem 100



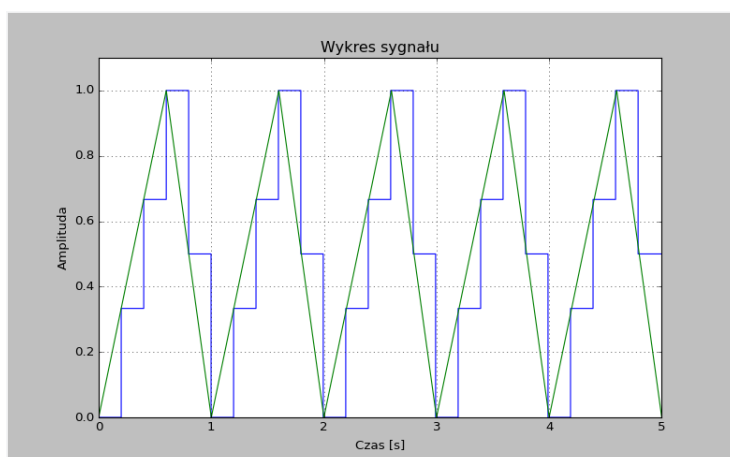
Rysunek 12: Wykres sygnałów dla funkcji Trójkątnej oraz metodzie rekonstrukcji Sinc z parametrem 100



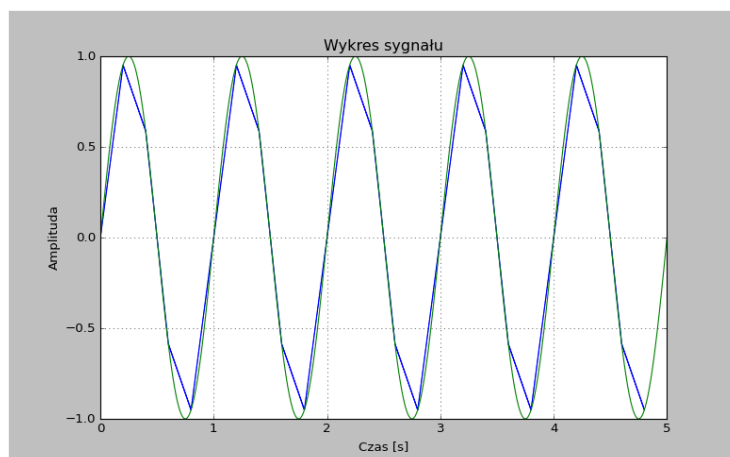
Rysunek 13: Wykres sygnałów dla funkcji Sinusoidalnej oraz metodzie rekonstrukcji Zero Order Hold



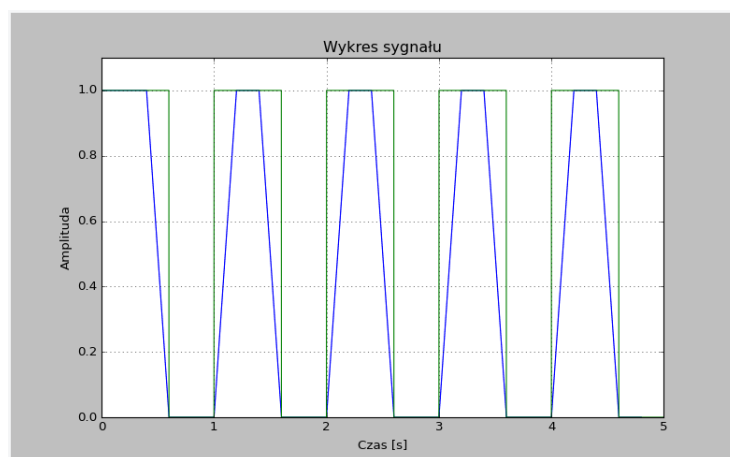
Rysunek 14: Wykres sygnałów dla funkcji Prostokątnej oraz metodzie rekonstrukcji Zero Order Hold



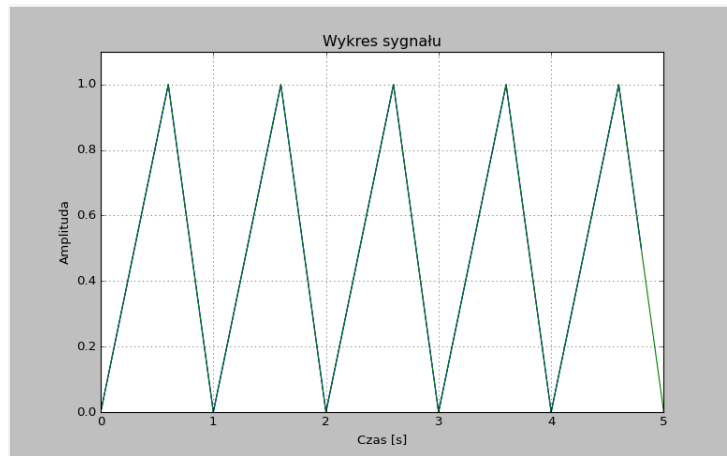
Rysunek 15: Wykres sygnałów dla funkcji Trójkątnej oraz metodzie rekonstrukcji Zero Order Hold



Rysunek 16: Wykres sygnałów dla funkcji Sinusoidalnej oraz metodzie rekonstrukcji First Order Hold



Rysunek 17: Wykres sygnałów dla funkcji Prostokątnej oraz metodzie rekonstrukcji First Order Hold



Rysunek 18: Wykres sygnałów dla funkcji Trójkątnej oraz metodzie rekonstrukcji First Order Hold

4.3 Eksperyment 3

Celem eksperymentu było zbadanie wpływu wartości N na jakość rekonstrukcji przy wykorzystaniu metody sinc

4.3.1 Założenia

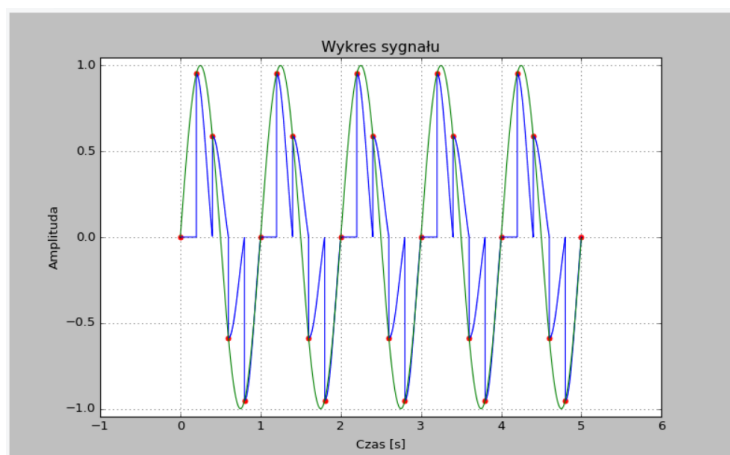
Funkcja	Częstotliwość próbkowania	Czas trwania	Okres	Amplituda	Czas początkowy
Sinusoidalna	5	5	1	1	0

Tabela 5: Parametry wejściowe

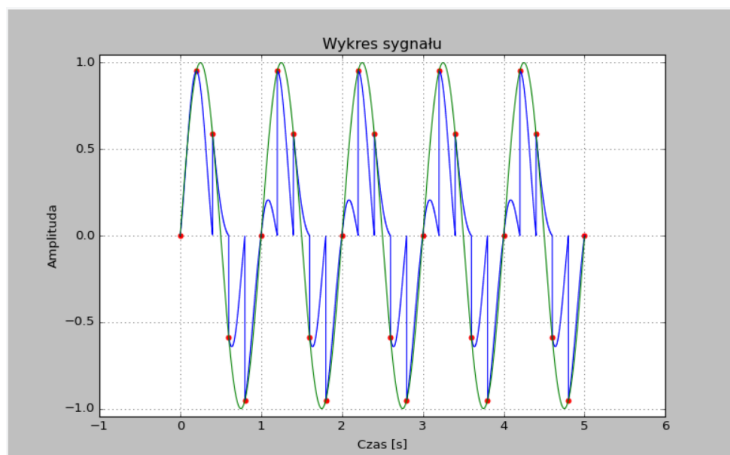
4.3.2 Eksperyment

Nr	N	Metoda rekonstrukcji	MSE	SNR	PSNR	MD	ENOB
1	1	Sinc	0.453	-3.176	3.220	1.308	-0.820
2	2	Sinc	0.329	-1.717	4.610	1.106	-0.578
3	3	Sinc	0.191	4.792	7.331	1.082	0.504
4	4	Sinc	0.173	4.674	8.150	1.082	0.484
5	5	Sinc	0.237	3.435	6.387	1.085	0.278
6	10	Sinc	0.214	3.674	6.976	1.105	0.318
7	25	Sinc	0.233	3.374	6.544	1.096	0.268
8	50	Sinc	0.233	3.374	6.544	1.096	0.268
9	100	Sinc	0.233	3.374	6.544	1.096	0.268

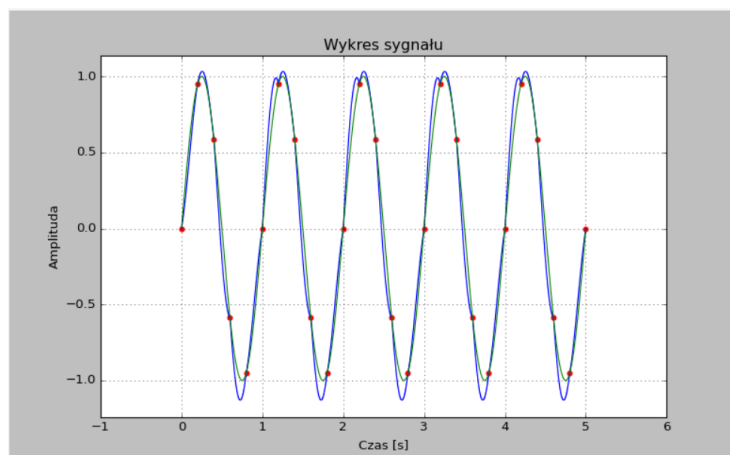
Tabela 6: Wyniki eksperymentu



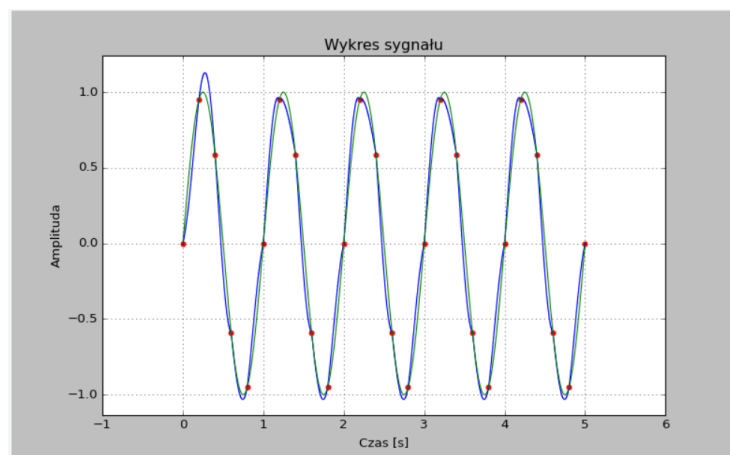
Rysunek 19: Wykres sygnałów dla parametru $N = 1$ dla metody rekonstrukcji Sinc



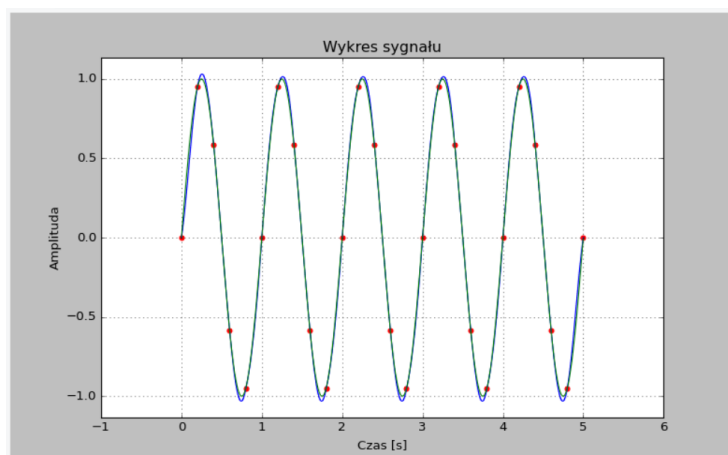
Rysunek 20: Wykres sygnałów dla parametru $N = 2$ dla metody rekonstrukcji Sinc



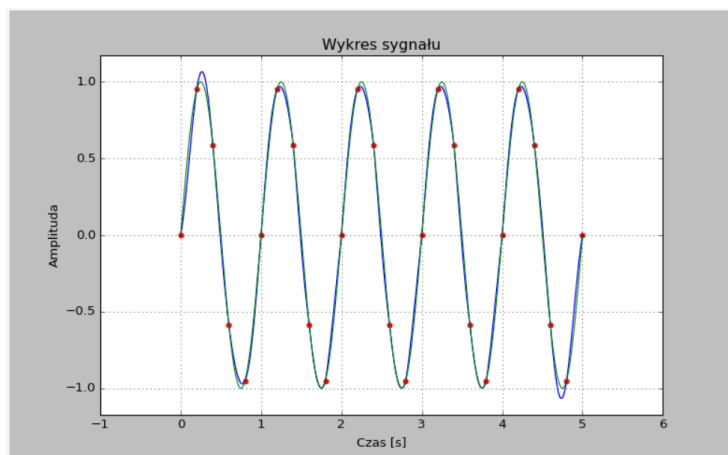
Rysunek 21: Wykres sygnałów dla parametru $N = 3$ dla metody rekonstrukcji Sinc



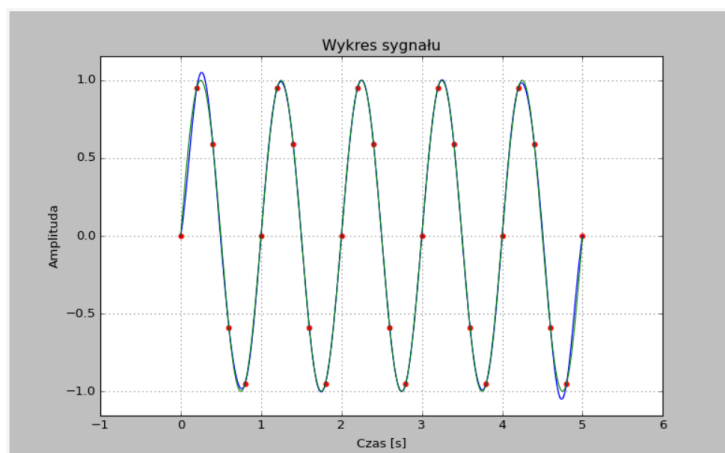
Rysunek 22: Wykres sygnałów dla parametru $N = 4$ dla metody rekonstrukcji Sinc



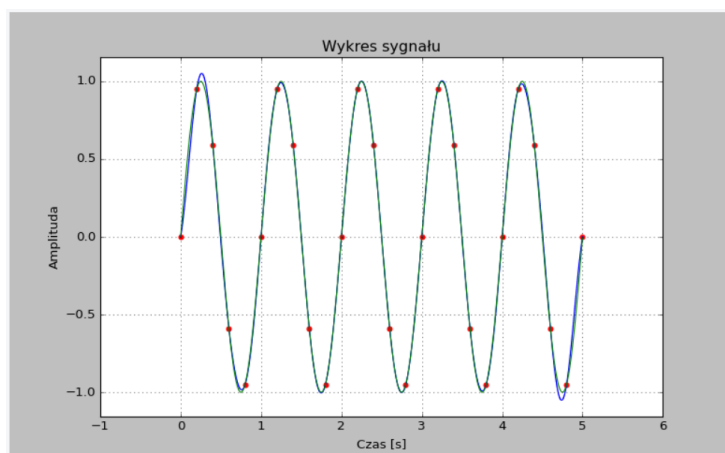
Rysunek 23: Wykres sygnałów dla parametru $N = 5$ dla metody rekonstrukcji Sinc



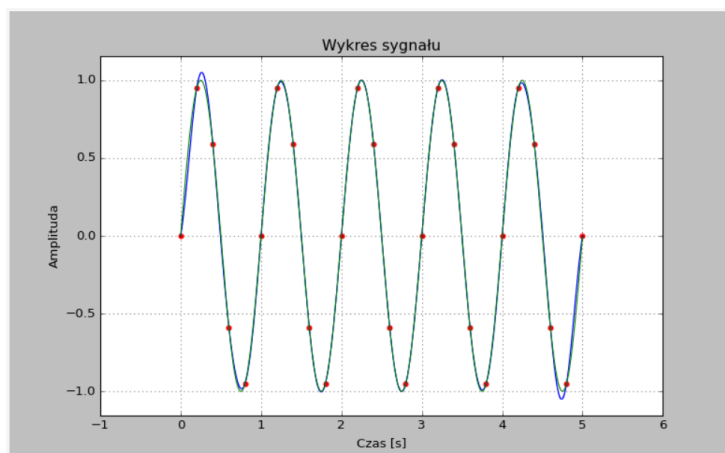
Rysunek 24: Wykres sygnałów dla parametru $N = 10$ dla metody rekonstrukcji Sinc



Rysunek 25: Wykres sygnałów dla parametru $N = 25$ dla metody rekonstrukcji Sinc



Rysunek 26: Wykres sygnałów dla parametru $N = 50$ dla metody rekonstrukcji Sinc



Rysunek 27: Wykres sygnałów dla parametru $N = 100$ dla metody rekonstrukcji Sinc

4.4 Eksperyment 4

Celem eksperymentu było zbadanie wpływu liczby poziomów kwantyzacji sygnału na błąd kwantyzacji dla różnych sygnałów

4.4.1 Założenia

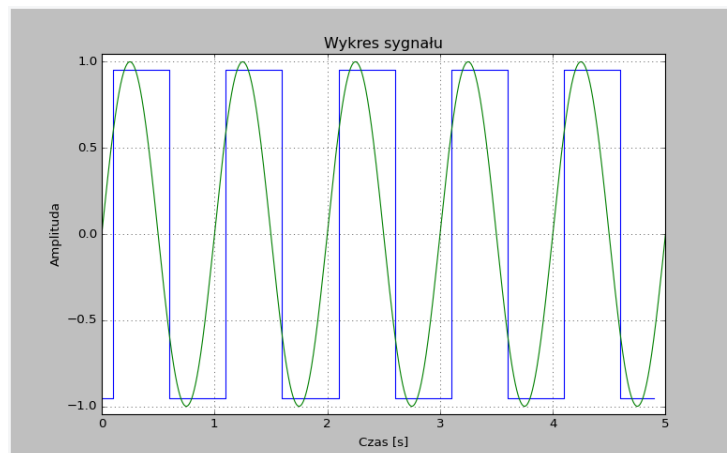
Częstotliwość próbkowania	Czas trwania	Okres	Amplituda	Czas początkowy	Współczynnik wypełnienia
5	5	1	1	0	0.6

Tabela 7: Parametry wejściowe

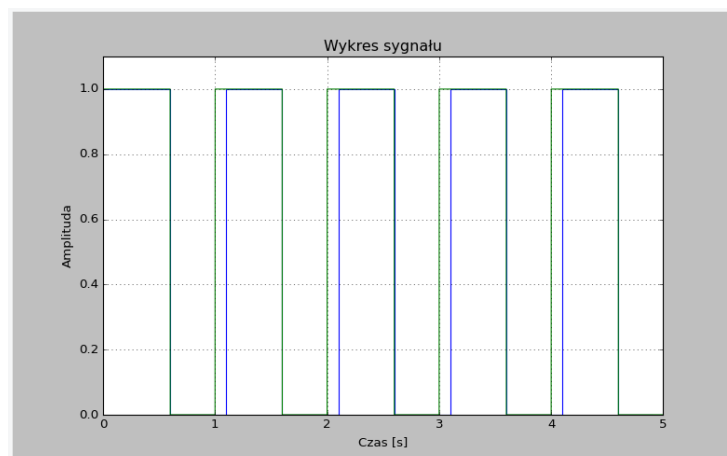
4.4.2 Eksperyment

Nr	Funkcja	Poziom	MSE	SNR	PSNR	MD	ENOB
1	Sinusoidalna	2	0.234	5.878	6.096	0.951	0.684
2	Prostokątny	2	0.000	inf	inf	0.000	inf
3	Trójkątny	2	0.090	7.604	10.444	0.500	0.971
4	Sinusoidalna	5	0.005	19.529	22.757	0.112	2.952
5	Prostokątny	5	0.000	inf	inf	0.000	inf
6	Trójkątny	5	0.003	20.846	25.563	0.083	3.170
7	Sinusoidalna	10	0.004	21.156	24.164	0.106	3.222
8	Prostokątny	10	0.000	inf	inf	0.000	inf
9	Trójkątny	10	0.001	24.109	28.573	0.056	3.713

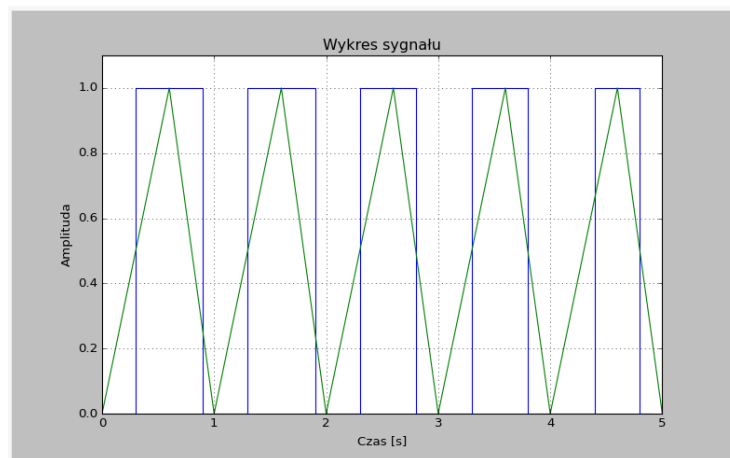
Tabela 8: Wyniki eksperymentu



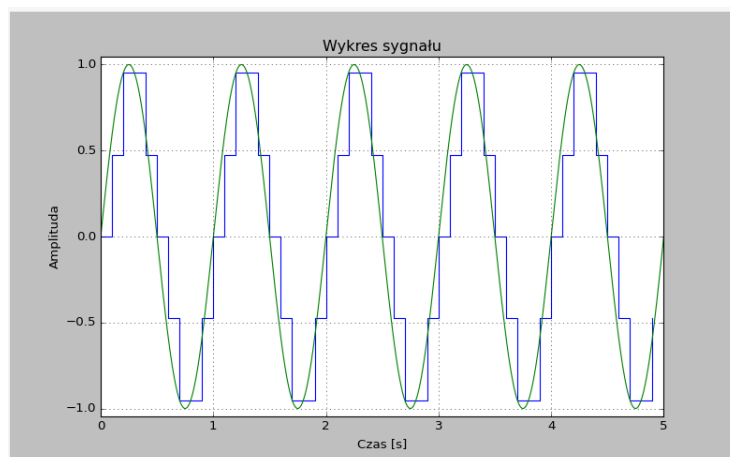
Rysunek 28: Wykres sygnałów dla funkcji sinusoidalnej oraz poziomu kwantyzacji = 2



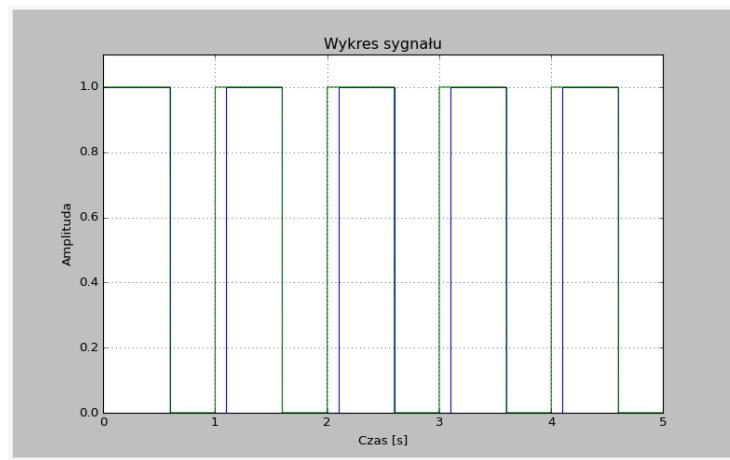
Rysunek 29: Wykres sygnałów dla funkcji Prostokątnej oraz poziomu kwantyzacji = 2



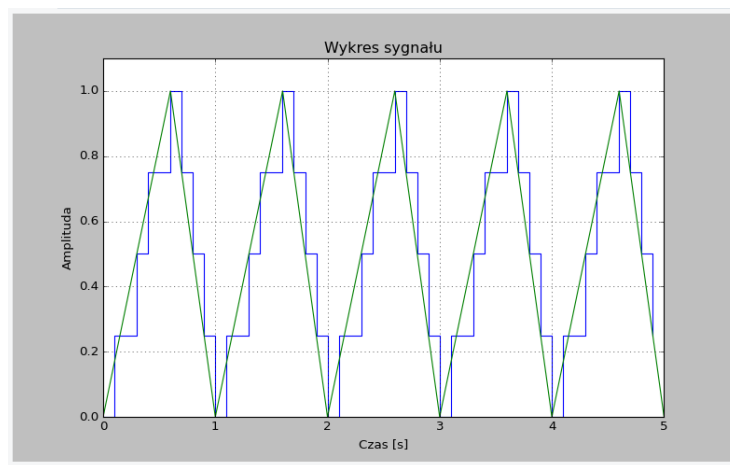
Rysunek 30: Wykres sygnałów dla funkcji Trójkątnej oraz poziomu kwantyzacji $= 2$



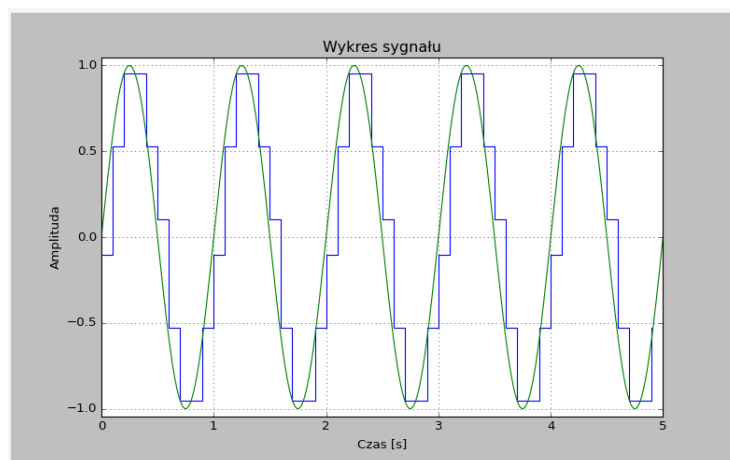
Rysunek 31: Wykres sygnałów dla funkcji Sinusoidalnej oraz poziomu kwantyzacji $= 5$



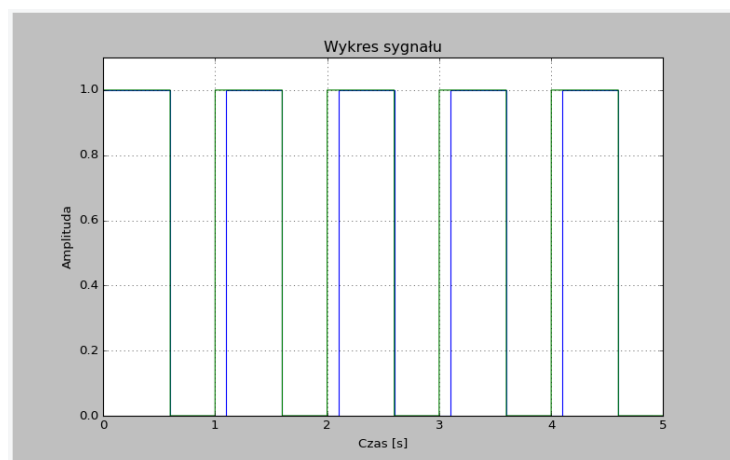
Rysunek 32: Wykres sygnałów dla funkcji Prostokątnej oraz poziomu kwantyzacji $= 5$



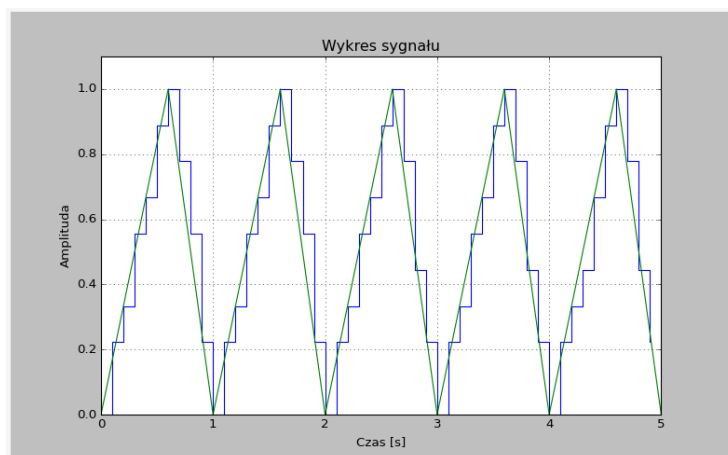
Rysunek 33: Wykres sygnałów dla funkcji Trójkątnej oraz poziomu kwantyzacji $= 5$



Rysunek 34: Wykres sygnałów dla funkcji Sinusoidalnej oraz poziomu kwantyzacji = 10



Rysunek 35: Wykres sygnałów dla funkcji Prostokątnej oraz poziomu kwantyzacji = 10



Rysunek 36: Wykres sygnałów dla funkcji Trójkątnej oraz poziomu kwantyzacji $= 10$

4.5 Eksperyment 5

Celem eksperymentu było zbadanie zjawiska aliasingu

4.5.1 Założenia

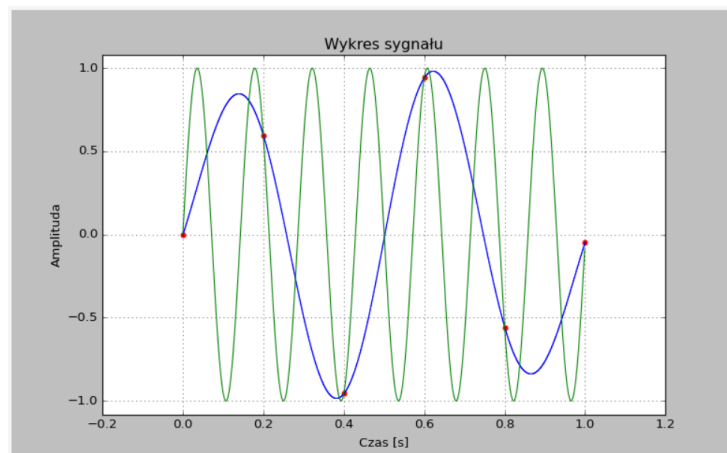
Funkcja	Częstotliwość próbkowania	Czas trwania	Metoda rekonstrukcji	Amplituda	Czas początkowy
Sinusoidalna	5	1	Sinc (100)	1	0

Tabela 9: Parametry wejściowe

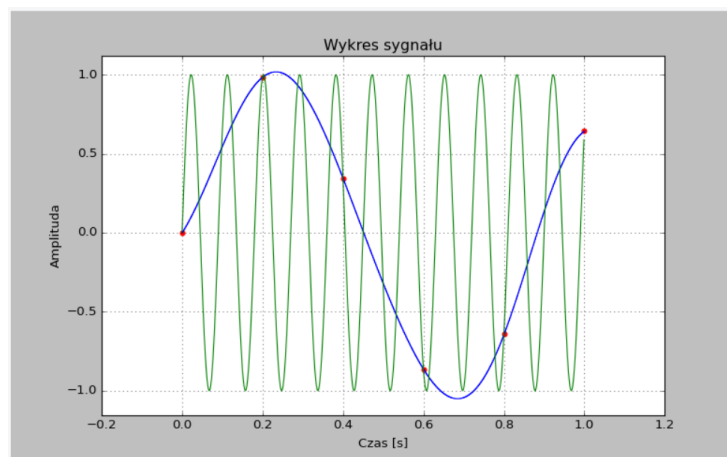
4.5.2 Eksperyment

Nr	Okres	MSE	SNR	PSNR	MD	ENOB
1	0.143	0.915	-3.452	0.306	1.785	-0.866
2	0.09	0.984	-3.181	0.145	2.024	-0.821
3	0.083	0.920	-3.466	0.346	1.942	-0.868

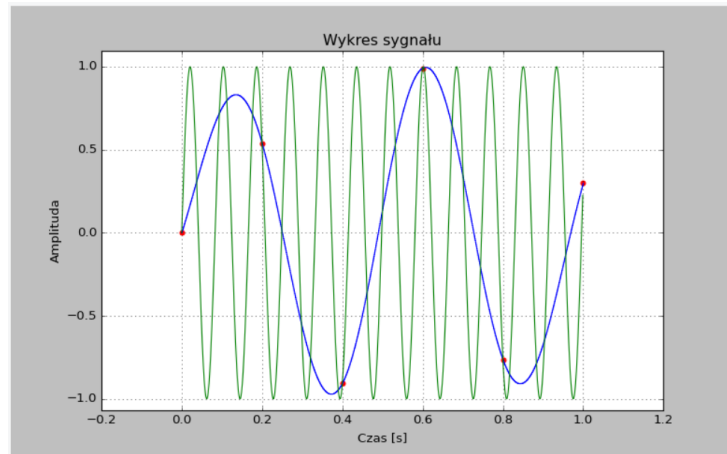
Tabela 10: Wyniki eksperymentu



Rysunek 37: Wykres sygnałów dla okresu = 0.143



Rysunek 38: Wykres sygnałów dla okresu = 0.09



Rysunek 39: Wykres sygnałów dla okresu = 0.083

5 Dyskusja

5.1 Eksperyment 1

W pierwszej serii eksperymentów przeanalizowano wpływ stosunku częstotliwości sygnału do częstotliwości próbkowania na jakość rekonstrukcji sygnału przy zastosowaniu różnych metod. W badaniach rozważano sygnały okresowe. We wszystkich przypadkach generowano sygnał sinusoidalny o okresie 1, s i czasie trwania 5, s. Zmiennymi w eksperymentach były metoda rekonstrukcji oraz częstotliwość próbkowania, przy czym wartość częstotliwości próbkowania zawsze przekraczała dwukrotność częstotliwości sygnału, co miało na celu eliminację zjawiska aliasingu (omówionego w dalszej części opracowania).

Analiza wyników eksperymentów 1–3, w których zastosowano rekonstrukcję opartą na funkcji *sinc*, wykazała jednoznaczną zależność: zwiększenie częstotliwości próbkowania skutkuje poprawą jakości odtworzonego sygnału. Tendencję tę potwierdzają wartości wskaźników jakości: obserwuje się spadek wartości miar błędów, takich jak MSE oraz MD, oraz wzrost wartości miar takich jak SNR i PSNR. Wzrost ze wzrostem częstotliwości próbkowania poprawiały się wyniki oraz powodowały poprawę rekonstrukcji, co było widoczne w analizie błędów średniokwadratowego. Wnioski te są również spójne z obserwacjami jakościowymi wykresów — im bardziej częstotliwość próbkowania zbliżała się do minimalnej wymaganej wartości (dwukrotność częstotliwości sygnału), tym bardziej zauważalne były zmiany jakości rekonstrukcji. W dalszej kolejności zmiany te stawały się pomijalnie małe. Należy jednocześnie podkreślić, że na jakość rekonstrukcji wpływ ma również liczba próbek oraz czas trwania analizowanego sygnału.

Eksperymenty 4–6 obejmowały rekonstrukcję sygnału metodą ekstrapolacji zerowego rzędu. W wyniku tej rekonstrukcji otrzymano funkcje złożone z odcinków o stałej wartości. Zarówno analiza wartości miar jakości, jak i obserwacje wizualne wykazały, że metoda ta charakteryzuje się znacznie niższą skutecznością niż rekonstrukcja oparta na funkcji *sinc*. Choć wzrost częstotliwości próbkowania również powodował poprawę jakości odtworzonego sygnału, skala tej poprawy była wyraźnie mniejsza w porównaniu do wyników uzyskanych

metodą *sinc*.

Ostatnią analizowaną metodą rekonstrukcji była interpolacja pierwszego rzędu, w której do odtworzenia sygnału wykorzystano funkcje liniowe. Wyniki eksperymentów wykazały, że metoda ta pozwala na uzyskanie lepszej jakości rekonstrukcji niż ekstrapolacja zerowego rzędu, choć nadal pozostaje mniej efektywna niż rekonstrukcja oparta na funkcji *sinc*. Co istotne, wyniki uzyskane w eksperymencie 9 sugerują, że przy odpowiednio dużej liczbie próbek interpolacja pierwszego rzędu może osiągnąć jakość porównywalną z wynikami uzyskanymi metodą *sinc*.

5.2 Eksperyment 2

W drugiej serii eksperymentów przeanalizowano wpływ typu sygnału na jakość jego rekonstrukcji przy wykorzystaniu różnych metod odtwarzania. Badaniu poddano trzy rodzaje sygnałów okresowych: sinusoidalny, prostokątny oraz trójkątny. Dla każdego z nich zastosowano wszystkie wcześniej opisane techniki rekonstrukcji, co umożliwiło dokonanie porównania ich efektywności w zależności od charakterystyki sygnału źródłowego. Eksperymenty oznaczone jako 1–3 koncentrowały się na zastosowaniu rekonstrukcji opartej na funkcji *sinc*. Wyniki potwierdziły wysoką skuteczność tej metody w przypadku sygnału sinusoidalnego, co jest zgodne z jej teoretycznymi właściwościami – funkcja *sinc* stanowi bowiem idealny interpolator w przypadku sygnałów będących kombinacją składowych harmonicznych. Z kolei dla sygnału prostokątnego metoda ta wykazała niską jakość odwzorowania, co wynika z obecności nieciągłości oraz dużej liczby wyższych harmonicznych, których precyzyjna rekonstrukcja wymaga znacznie większej liczby próbek. Dla sygnału trójkątnego odnotowano nieco lepsze rezultaty niż w przypadku sygnału prostokątnego, jednak jakość rekonstrukcji pozostawała zauważalnie niższa niż w przypadku sygnału sinusoidalnego. Eksperyment 4 obejmował rekonstrukcję sygnału sinusoidalnego przy zastosowaniu ekstrapolacji zerowego rzędu. Jak wykazały wyniki, metoda ta nie jest odpowiednia dla sygnałów gładkich i ciągłych, takich jak sinusoida. Interesujące rezultaty uzyskano w eksperymencie 5, w którym rekonstruowano sygnał prostokątny metodą ekstrapolacji zerowego rzędu. Choć metoda ta wydaje się intuicyjnie dopasowana do charakterystyki badanego sygnału, analiza ilościowa wykazała jedynie umiarkowaną skuteczność. Wysoki błąd średniokwadratowy oraz niski współczynnik sygnał–szum (SNR) wynikały z faktu, że wszelkie rozbieżności pomiędzy sygnałem oryginalnym a zrekonstruowanym miały charakter skokowy i odpowiadały pełnej amplitudzie sygnału, co znacząco obniżało jakość odwzorowania. Porównanie z eksperymentem 2 potwierdza, że rekonstrukcja oparta na funkcji *sinc*, mimo ograniczeń, zapewniała wyższą precyzję. Można przypuszczać, że istotne zwiększenie częstotliwości próbkowania znacząco poprawiłoby jakość rekonstrukcji metodą zerowego rzędu.

Eksperyment 6 dotyczył rekonstrukcji sygnału trójkątnego przy użyciu tej samej metody. Wyniki okazały się niezadowolające, choć nieco lepsze niż w przypadku sygnału prostokątnego, co można tłumaczyć bardziej łagodnym charakterem zmian sygnału.

Ostatni zestaw eksperymentów (7–9) dotyczył rekonstrukcji za pomocą interpolacji liniowej (pierwszego rzędu). W eksperymencie 7 potwierdzono, że metoda ta pozwala uzyskać lepszą jakość rekonstrukcji sygnału sinusoidalnego niż ekstrapolacja zerowego rzędu, choć nadal ustępuje pod względem dokładności

metodzie *sinc*. Szczególnie interesujące wyniki uzyskano w eksperymentach 8 i 9. W przypadku sygnału prostokątnego (eksperyment 8) interpolacja liniowa okazała się najskuteczniejszą spośród analizowanych metod, przewyższając zarówno ekstrapolację zerowego rzędu, jak i funkcję *sinc*. Jest to nieintuicyjny, lecz istotny wniosek, wskazujący na dopasowanie lokalnego charakteru funkcji liniowych do struktury badanego sygnału. W przypadku sygnału trójkątnego (eksperyment 9), analiza błędu średniokwadratowego nie pozwoliła na jednoznaczne rozstrzygnięcie skuteczności metody, co wynikało prawdopodobnie z ograniczonej częstotliwości próbkowania. Jednak dopiero wskaźnik SNR dostarczył wyraźnych informacji – metoda interpolacji liniowej okazała się tylko nieznacznie mniej dokładna niż metoda *sinc*, a jednocześnie wyraźnie przewyższała efektywność ekstrapolacji zerowego rzędu (ponad dwukrotnie wyższy współczynnik SNR).

5.3 Eksperyment 3

W dotychczas przeprowadzonych eksperymentach z zastosowaniem rekonstrukcji sygnału metodą opartą na funkcji *sinc*, parametr N , oznaczający liczbę próbek wykorzystywanych przy rekonstrukcji jednego punktu sygnału, był ustawiany na stałą wartość równą 100. Taki dobór parametru miał na celu zapewnienie wysokiej dokładności odwzorowania, bez analizy jego wpływu na jakość procesu rekonstrukcji.

W niniejszej serii eksperymentów podjęto próbę szczegółowej analizy wpływu wartości parametru N na jakość rekonstrukcji sygnału. W tym celu przeprowadzono siedem eksperymentów, w których wartość N stopniowo zwiększano od 1 do 25. Dla każdego przypadku przeprowadzono analizę porównawczą pomiędzy sygnałem oryginalnym a jego rekonstrukcją, z wykorzystaniem zarówno oceny wizualnej, jak i obiektywnych miar jakości, takich jak błąd średniokwadratowy (MSE), stosunek sygnału do szumu (SNR), szczytowy stosunek sygnału do szumu (PSNR) oraz maksymalna różnica (MD).

Wyniki eksperymentów jednoznacznie wskazują, że dla niskich wartości parametru N (w szczególności $N = 1$ i $N = 2$) jakość rekonstrukcji jest istotnie niezadowalająca – zarówno w aspekcie ilościowym, jak i jakościowym. Począwszy od wartości $N = 3$, obserwuje się wyraźną poprawę jakości rekonstrukcji, przejawiającą się znacznym obniżeniem wartości błędów oraz wzrostem wskaźników jakości. Dalsze zwiększanie wartości parametru skutkuje już jedynie niewielkimi zmianami w wynikach, które z czasem stabilizują się i mieszczą w wąskim przedziale. Taka charakterystyka sugeruje istnienie wartości granicznej parametru N , powyżej której dalsze zwiększanie liczby próbek nie wpływa istotnie na poprawę jakości odwzorowania sygnału.

Wnioski płynące z tej serii eksperymentów mają istotne znaczenie praktyczne – pozwalają bowiem na optymalny dobór parametru N , minimalizując jednocześnie koszt obliczeniowy rekonstrukcji bez utraty jakości wynikowej.

5.4 Eksperyment 4

Ta seria eksperymentów została poświęcona analizie błędów powstających w wyniku procesu kwantyzacji. Badaniom poddano trzy różne sygnały okresowe: sinusoidalny, prostokątny oraz trójkątny, analogicznie jak w poprzednich doświadczeniach. Dla każdego z tych sygnałów przeprowadzono kwantyzację, zmieniając

liczbę poziomów kwantyzacji.

W pierwszej kolejności omówiono wyniki uzyskane dla funkcji prostokątnej. Ze względu na specyficzny charakter tego sygnału, który przyjmuje wyłącznie dwie wartości amplitudy, efekty kwantyzacji różnią się od wyników uzyskanych dla pozostałych sygnałów. Dla dwóch lub większej liczby poziomów kwantyzacji, wynik procesu pokrywa się z sygnałem próbkowanym. Na wykresach odpowiadających eksperymentom 4 i 5 widoczny jest wyłącznie wynik kwantyzacji, który całkowicie nakłada się na funkcję oryginalną. Ponadto, uzyskane wartości parametrów jakościowych, w szczególności obserwowana nieskończoność stosunku sygnał-szum (ang. Signal-to-Noise Ratio, SNR), potwierdzają tożsamość porównywanych sygnałów.

Eksperymenty 1–3 dotyczą procesu kwantyzacji funkcji sinusoidalnej. W pierwszym z nich zastosowano dwa poziomy kwantyzacji, w drugim pięć, a w trzecim dziesięć. Z uzyskanych wyników wynika, że wraz ze wzrostem liczby poziomów kwantyzacji maleje błąd średniokwadratowy (MSE), natomiast rośnie wartość SNR. Powyższe obserwacje wskazują jednoznacznie, że zwiększenie liczby poziomów kwantyzacji prowadzi do zmniejszenia błędu kwantyzacji. Analogiczne wnioski można sformułować na podstawie eksperymentów 6–8, w których analizowano sygnał trójkątny.

5.5 Eksperyment 5

W ostatniej serii eksperymentów zaprezentowano zjawisko aliasingu. Przeprowadzono trzy doświadczenia, w których częstotliwość generowanego sygnału sinusoidalnego znacząco przekraczała częstotliwość Nyquista, czyli połowę częstotliwości próbkowania. W rezultacie dochodziło do wzmocnienia oraz pojawienia się nowych składowych częstotliwościowych w paśmie użytecznym. Aby uzyskać nową częstotliwość f_0 , częstotliwość sygnału f_d ustawiano według wzoru $f_d = k \cdot f_s + f_0$, gdzie f_s oznacza częstotliwość próbkowania, a k jest liczbą całkowitą.

W pierwszym eksperymencie częstotliwość sygnału została ustalona na wartość 7, Hz, co odpowiada zależności $7, \text{Hz} = 1 \cdot 5, \text{Hz} + 2, \text{Hz}$, w wyniku czego w paśmie użytecznym pojawiła się częstotliwość $f_0 = 2, \text{Hz}$. Zjawisko to zostało zilustrowane na wykresie, potwierdzając, że sygnał zrekonstruowany na podstawie próbkowania rzeczywiście charakteryzuje się częstotliwością 2, Hz.

Analogicznie, w drugim eksperymencie częstotliwość f_d została ustawiona na 12, Hz, co również prowadzi do powstania składowej o częstotliwości $f_0 = 2, \text{Hz}$, zgodnie z wynikami przedstawionymi na wykresie.

Trzeci eksperyment w tej serii ilustruje powstanie częstotliwości $f_0 = 1, \text{Hz}$ w wyniku ustawienia częstotliwości sygnału na $f_d = 11, \text{Hz}$.

Dodatkowo warto odnieść się do porównania uzyskanych wartości SNR z wartościami teoretycznymi oczekiwanymi dla sygnału sinusoidalnego w przypadku idealnego przetwornika analogowo-cyfrowego (A/C). We wszystkich przypadkach zauważono, że wartości empiryczne są zbliżone do teoretycznych, choć nie osiągnięto pełnego ich poziomu. Prawdopodobnym powodem tych rozbieżności jest ograniczona liczba próbek oraz zastosowana częstotliwość próbkowania.

6 Wnioski

- Wzrost częstotliwości próbkowania w stosunku do częstotliwości sygnału wywiera pozytywny wpływ na jakość rekonstrukcji.
- Największy wzrost jakości rekonstrukcji przy zwiększaniu częstotliwości próbkowania występuje w początkowym zakresie tego parametru.
- Metoda oparta na funkcji *sinc* okazuje się najskuteczniejsza przy rekonstrukcji funkcji sinusoidalnej, natomiast najgorsze wyniki uzyskuje się przy zastosowaniu ekstrapolacji zerowego rzędu.
- Najlepsze wyniki rekonstrukcji funkcji prostokątnej uzyskuje się przy zastosowaniu interpolacji pierwszego rzędu.
- Zarówno metoda oparta na funkcji *sinc*, jak i interpolacja pierwszego rzędu dają satysfakcjonujące rezultaty przy rekonstrukcji funkcji trójkątnej.
- Błąd średniokwadratowy nie zawsze stanowi adekwatną miarę do oceny różnic w jakości rekonstrukcji uzyskanych za pomocą różnych metod.
- W przypadku, gdy częstotliwość sygnału przekracza połowę częstotliwości próbkowania, dochodzi do zjawiska *aliasingu*.
- Parametr N w metodzie rekonstrukcji opartej na funkcji *sinc* odgrywa kluczową rolę w jakości rekonstrukcji. Dla małych wartości N (1 lub kilku) jego wzrost prowadzi do poprawy jakości, jednak po osiągnięciu pewnej wartości dalsza zmiana parametru nie przynosi istotnych korzyści.
- Błąd kwantyzacji zmniejsza się proporcjonalnie do wzrostu liczby poziomów kwantyzacji.

Literatura

- [1] Politechnika Łódzka, *Instrukcja do zadania 2*, Dostęp online: <https://ftims.edu.p.lodz.pl/mod/url/view.php?id=6495>, [dostęp: 24 marca 2025].
- [2] Python Software Foundation, *Python Documentation*, Dostęp online: <https://docs.python.org/3/>, [dostęp: 24 marca 2025].
- [3] Python Software Foundation, *Tkinter Documentation*, Dostęp online: <https://docs.python.org/3/library/tkinter.html>, [dostęp: 24 marca 2025].