

**Zadanie nr 4 - Przekształcenie Fouriera,  
Walsha-Hadamarda, kosinusowe i falkowe,  
szybkie algorytmy**  
Cyfrowe Przetwarzanie Sygnałów

Dominik Gałkowski, 247659      Jan Śladowski, 247806

10.06.2025

## 1 Cel zadania

Celem zadania jest zapoznanie się z operacjami transformacji sygnałów dyskretnych przy użyciu wybranych metod oraz zaimplementowanie ww. operacji transformacji w programie z zadania trzeciego.

## 2 Wstęp teoretyczny

Na podstawie instrukcji do zadania 4, do programu z zadania trzeciego zostały dodane funkcjonalności możliwości rysowania wykresów sygnałów dyskretnych o wartościach zespolonych w postaci dwóch wykresów o wspólnej dziedzinie. Wykresy są umieszczone jeden nad drugim oraz zostało przyjęte założenie, że sygnały zespolone będą tylko wynikiem transformacji Fouriera, więc będą prezentować funkcje w dziedzinie częstotliwości. Zostały zapewnione dwa tryby wyświetlania wykresu:

- (W1) – górny wykres prezentuje część rzeczywistą amplitudy w funkcji częstotliwości, a wykres dolny część urojoną
- (W2) – górny wykres prezentuje moduł liczby zespolonej, a dolny argument liczby w funkcji częstotliwości

Ponadto zostały zaimplementowane transformacje przedstawione poniżej:

- dyskretna transformacja Fouriera - algorytm z definicji o złożoności  $O(N^2)$ , gdzie wyliczenie każdej próbki wyniku wymaga wymnożenia i zsumowania wszystkich próbek sygnału wejściowego przez odpowiednie, wyliczane na bieżąco współczynniki
- dyskretna transformacja Fouriera - algorytm szybki w miejscu (*in situ*) z decymacją w dziedzinie czasu (DIT FFT) o złożoności  $O(N \log(N))$ , nie wymaga alokacji dodatkowej pamięci na bufor próbek podczas obliczeń, ponadto wszystkie współczynniki są wyliczone przed obliczeniami w tablicy o długości równej połowie długości bufora próbek
- dyskretna transformacja kosinusowa typu drugiego - algorytm z definicji
- dyskretna transformacja Walsha-Hadamarda - algorytm z definicji
- dyskretna szybka transformacja Walsha-Hadamarda - algorytm szybki

## 3 Materiały i metody

Pierwszym krokiem w czasie dokonywania eksperymentów było wygenerowanie trzech sygnałów sinusoidalnych. Ich równania zostały przedstawione poniżej: Następnie zostały przeprowadzone dla każdego z nich transformaty przedstawione poniżej:

1. Dyskretna transformacja Fouriera z definicji
2. Dyskretna transformacja Fouriera wariant szybki
3. Transformacja kosinusowa z definicji

- (S1) -  $S(t) = 2 \sin(\frac{2\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}) + 5 \sin(\frac{2\pi}{0,5}t + \frac{\pi}{2}) f_{pr} = 16$
- (S2) -  $S(t) = 2 \sin(\frac{2\pi}{2}t) + \sin(\frac{2\pi}{1}t) + 5 \sin(\frac{2\pi}{0,5}t) f_{pr} = 16$
- (S3) -  $S(t) = 5 \sin(\frac{2\pi}{2}t) + \sin(\frac{2\pi}{0,25}t) f_{pr} = 16$

4. Transformacja Walsha-Hadamarda z definicji

5. Transformacja Walsha-Hadamarda wariant szybki

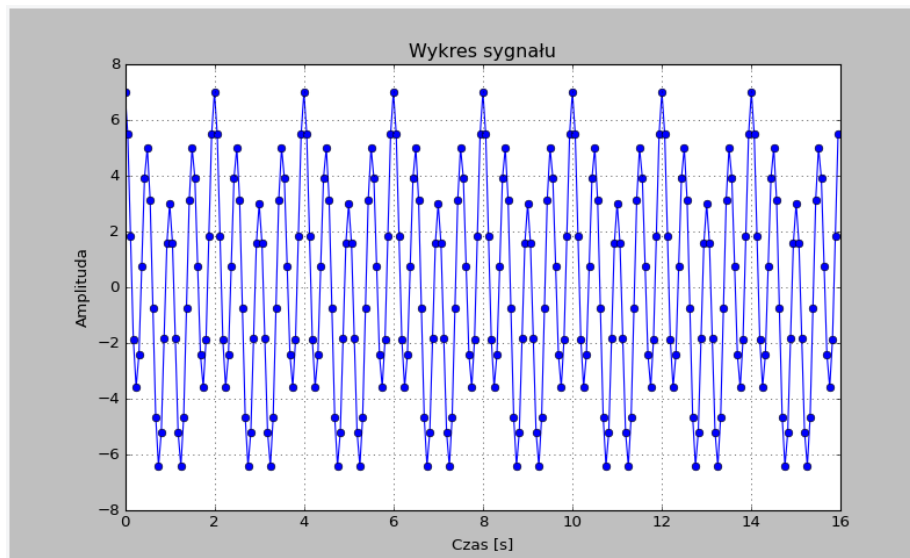
Wyniki transformat zostały przedstawione poniżej łącznie z wykresami sygnałów oznaczonych symbolami S1, S2, S3.

## 4 Eksperymenty i wyniki

### 4.1 Sygnał S1

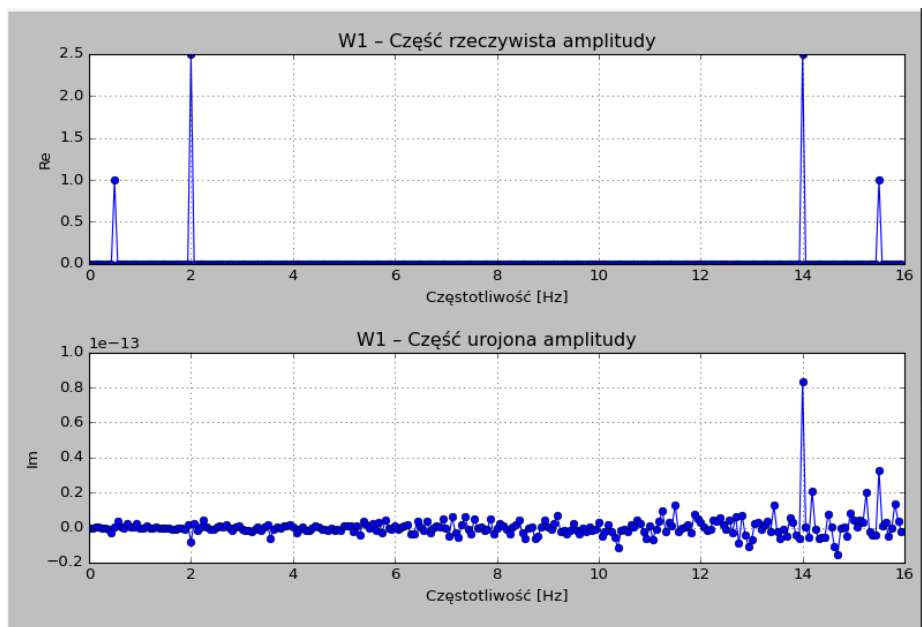
Czas początkowy	Czas trwania sygnału	Częstotliwość próbkowania
0	16s	16Hz

Tabela 1: Parametry wejściowe dla sygnału S1

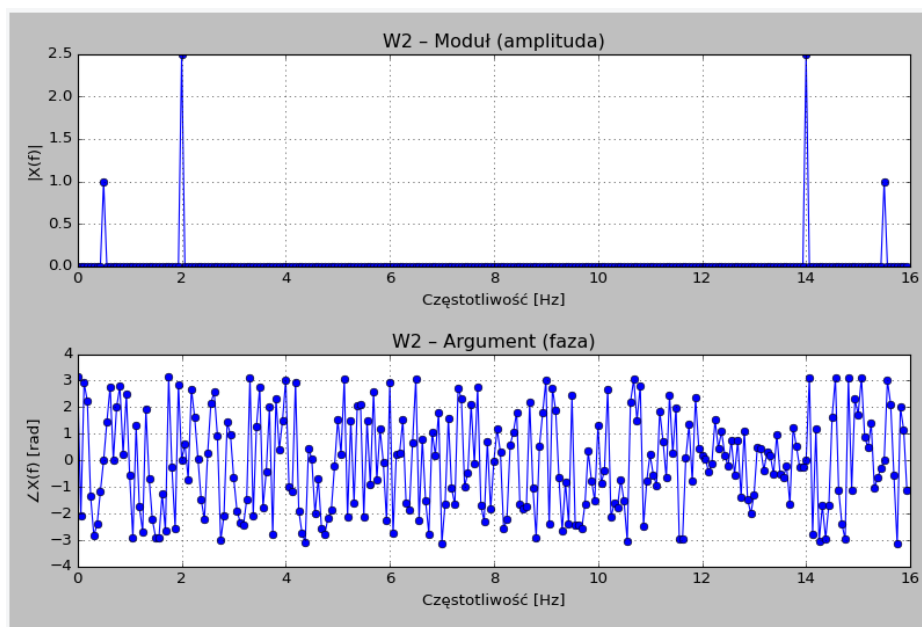


Rysunek 1: Wykres sygnału S1

#### 4.1.1 Dyskretna transformacja Fouriera z definicji



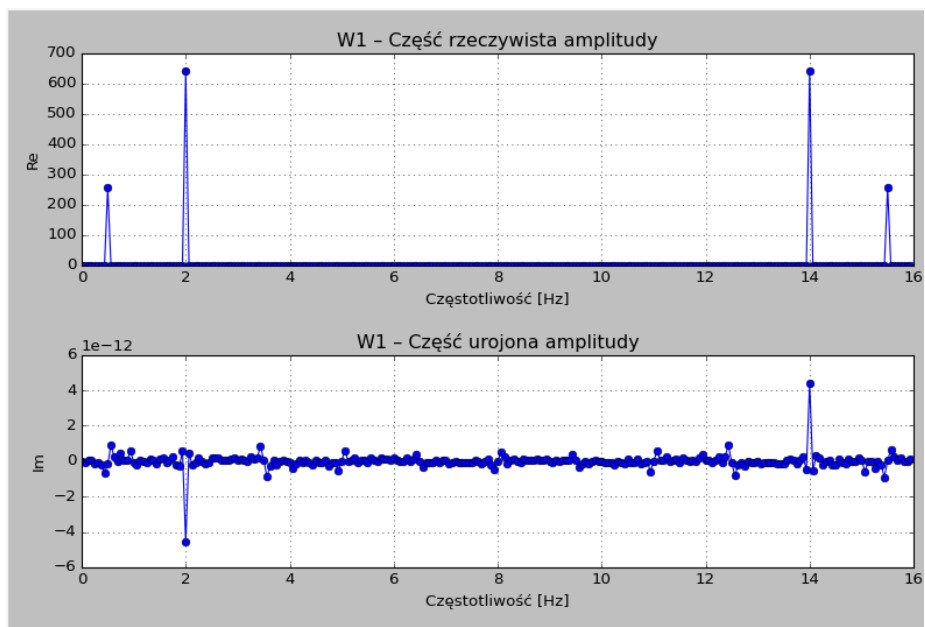
Rysunek 2: Wykresy W1 dla sygnału S1



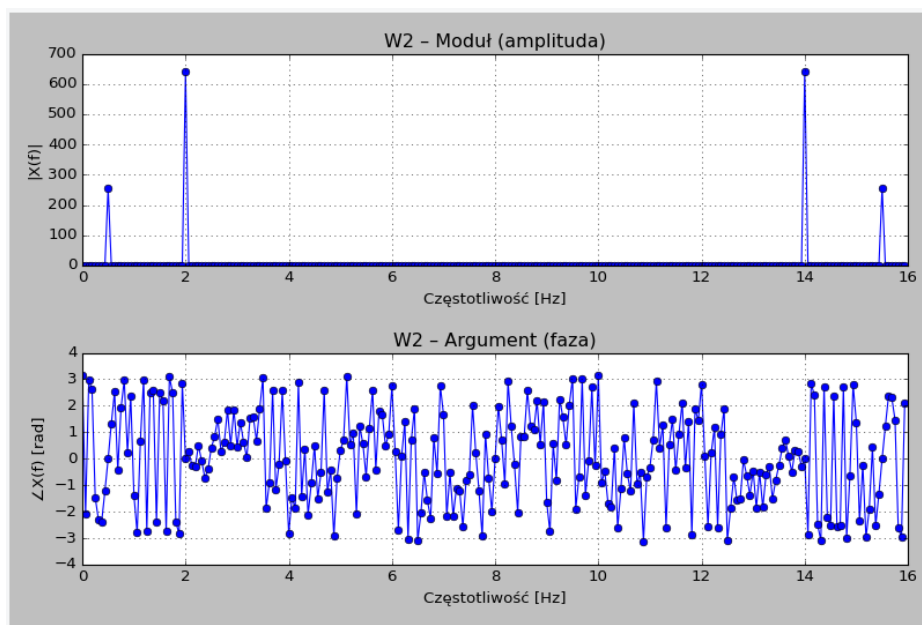
Rysunek 3: Wykresy W2 dla sygnału S1

Czas wykonania obliczeń (s): 0.020

#### 4.1.2 Szybka tranformacja Fouriera



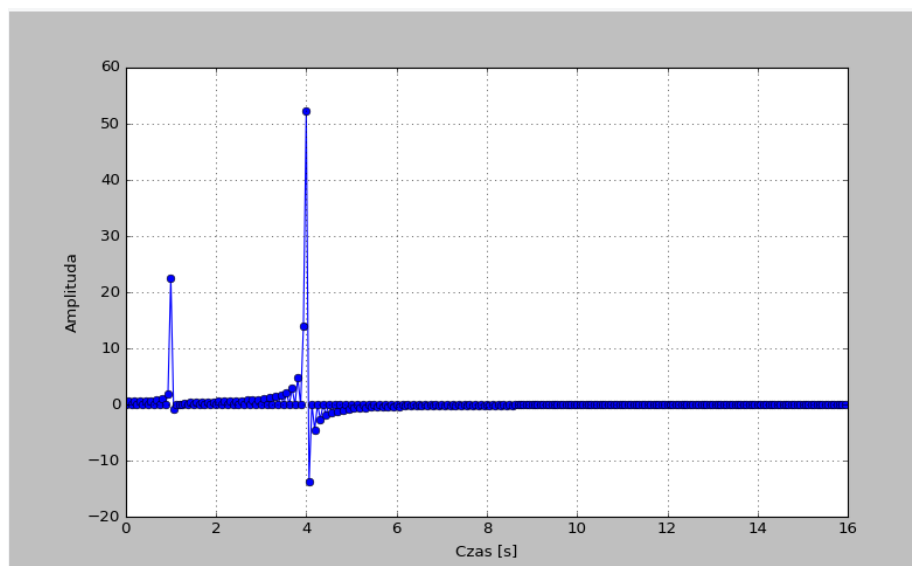
Rysunek 4: Wykresy W1 dla sygnału S1



Rysunek 5: Wykresy W2 dla sygnału S1

Czas wykonania obliczeń (s): 0.002

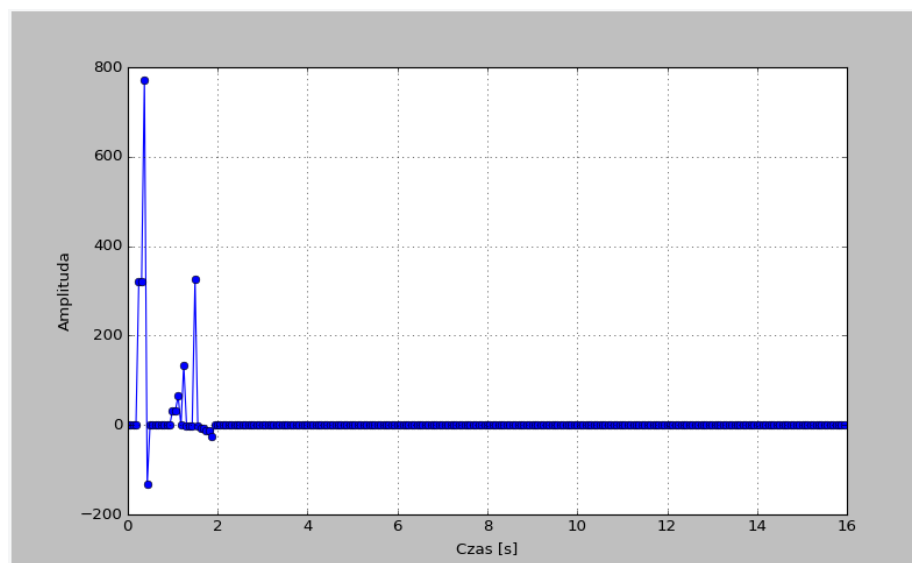
#### 4.1.3 Transformacja kosinusowa z definicji



Rysunek 6: Wykresy dla sygnału S1

Czas wykonania obliczeń (s): 0.045

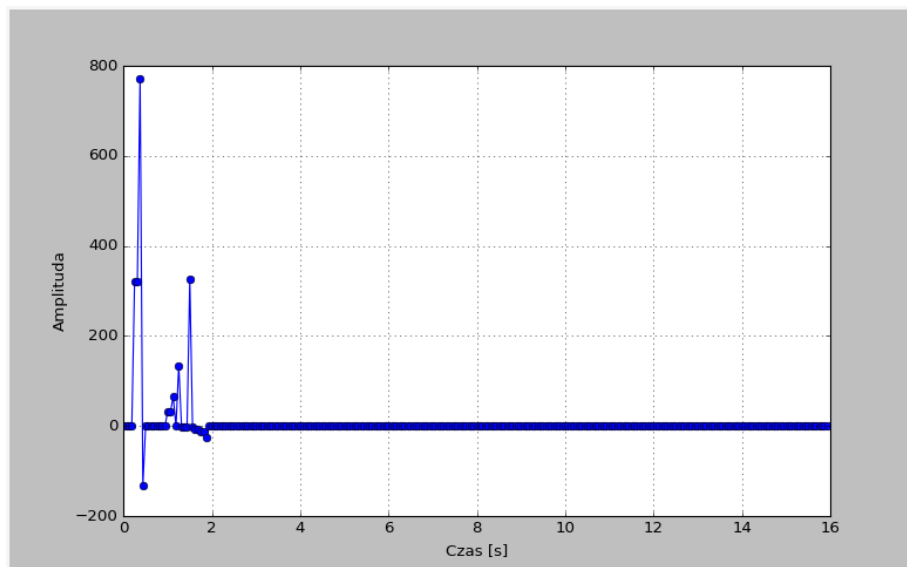
#### 4.1.4 Transformacja Walsh-Hadamarda z definicji



Rysunek 7: Wykresy dla sygnału S1

Czas wykonania obliczeń (s): 0.029

#### 4.1.5 Szybka transformacja Walsh-Hadamarda



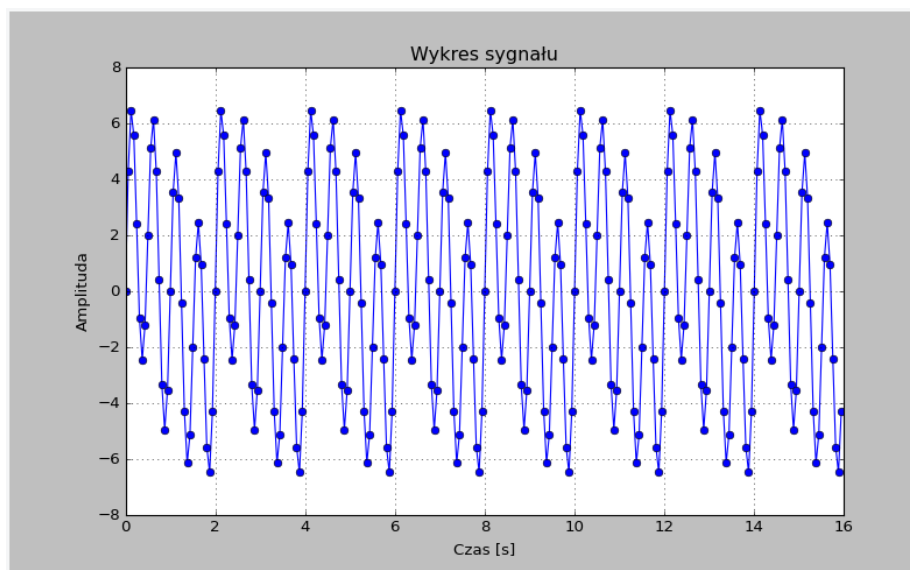
Rysunek 8: Wykresy dla sygnału S1

Czas wykonania obliczeń (s): 0.001

#### 4.2 Sygnał S2

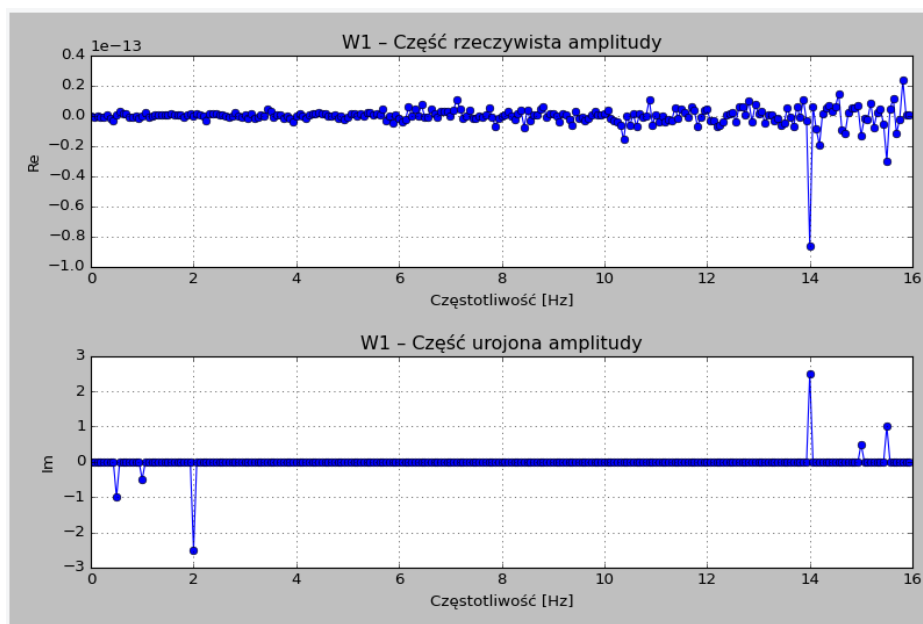
Czas początkowy	Czas trwania sygnału	Częstotliwość próbkowania
0	16s	16Hz

Tabela 2: Parametry wejściowe dla sygnału S2



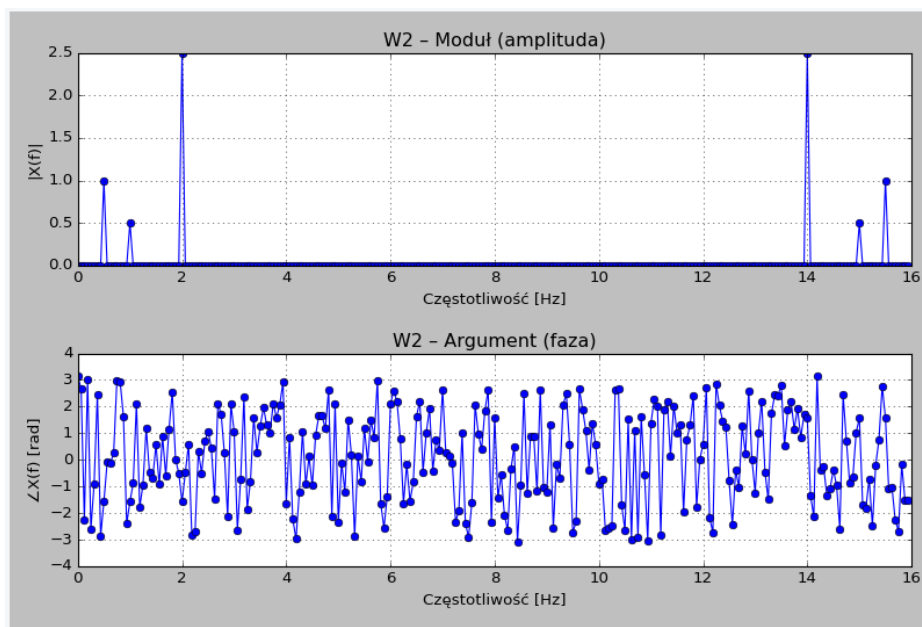
Rysunek 9: Wykres sygnału S2

#### 4.2.1 Dyskretna transformacja Fouriera z definicji



Rysunek 10: Wykresy W1 dla sygnału S2

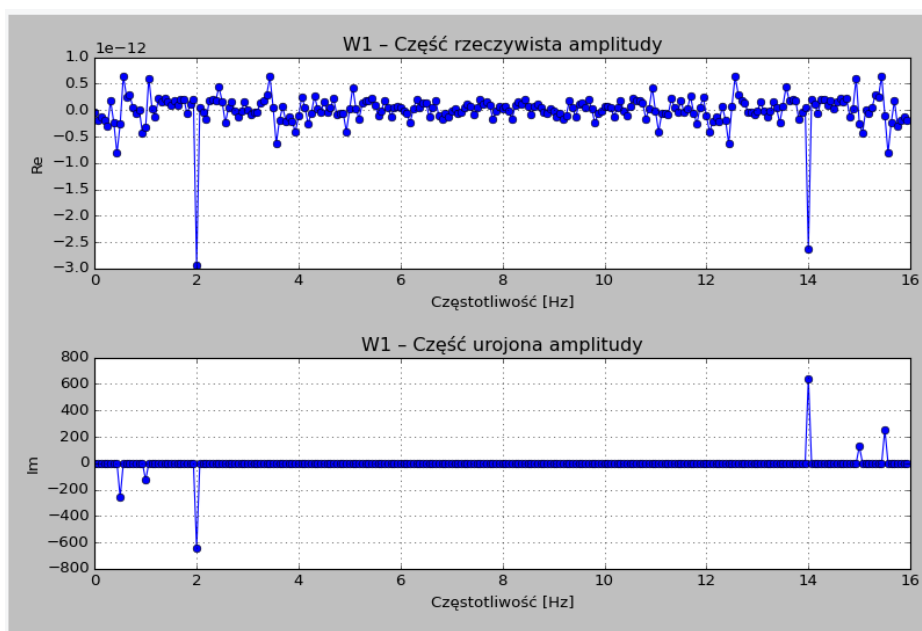




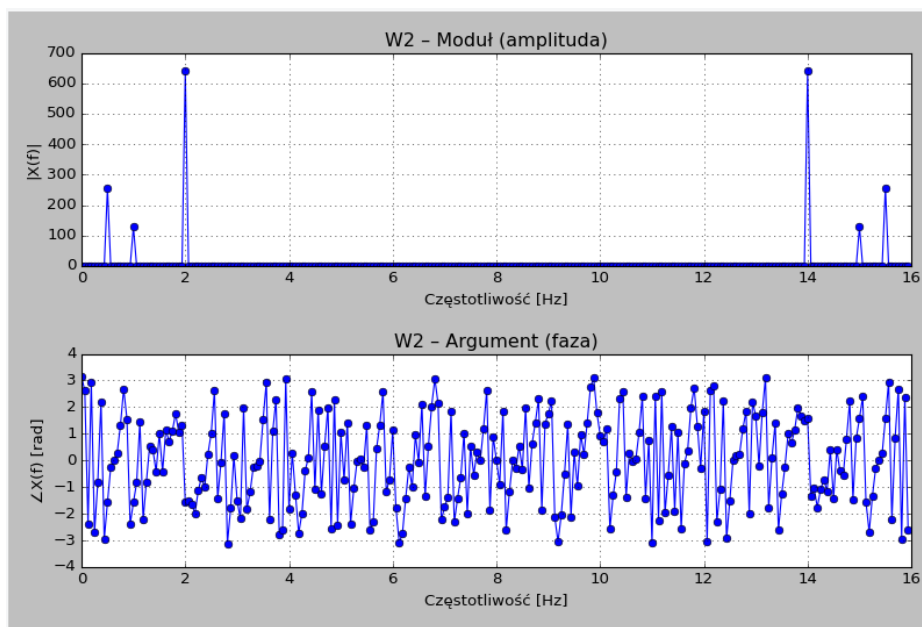
Rysunek 11: Wykresy W2 dla sygnału S2

Czas wykonania obliczeń (s): 0.021

#### 4.2.2 Szybka tranformacja Fouriera



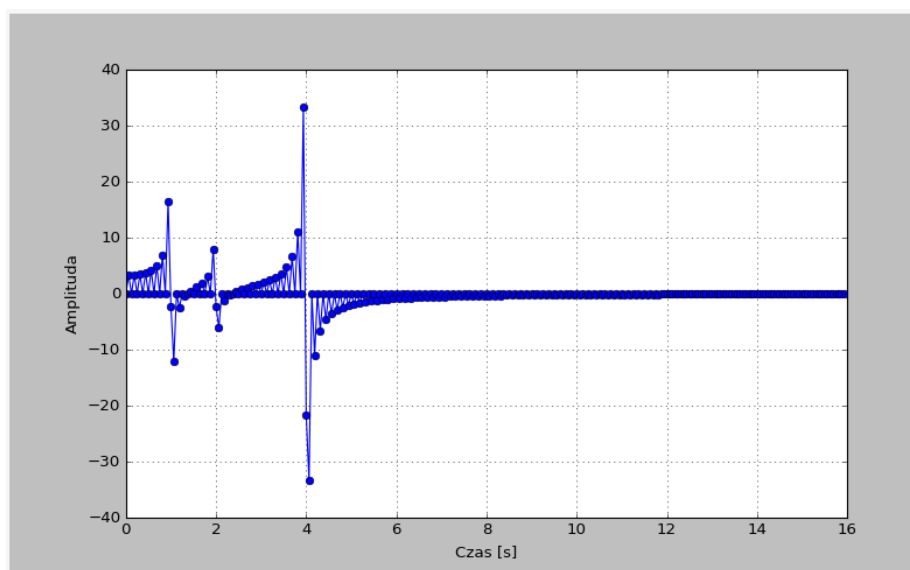
Rysunek 12: Wykresy W1 dla sygnału S2



Rysunek 13: Wykresy W2 dla sygnału S2

Czas wykonania obliczeń (s): 0.002

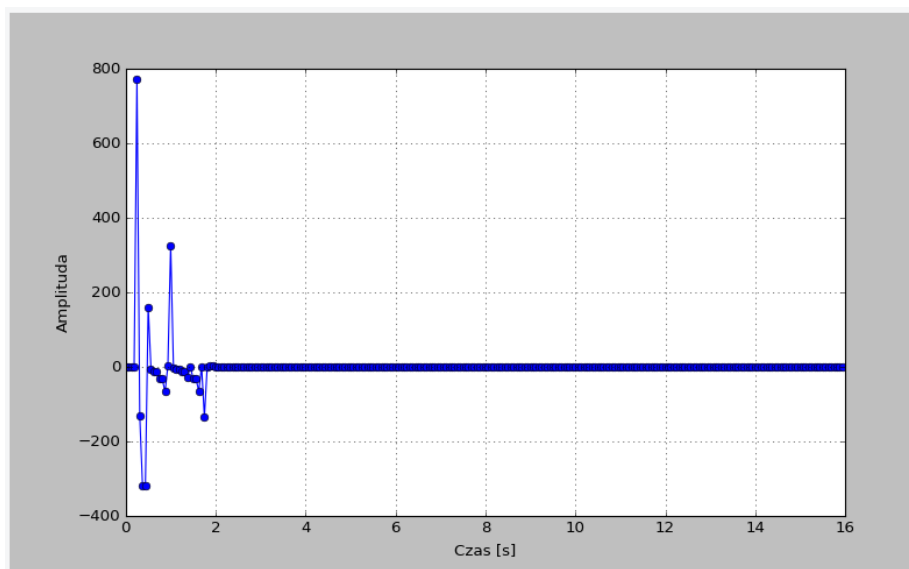
#### 4.2.3 Transformacja kosinusowa z definicji



Rysunek 14: Wykresy dla sygnału S2

Czas wykonania obliczeń (s): 0.026

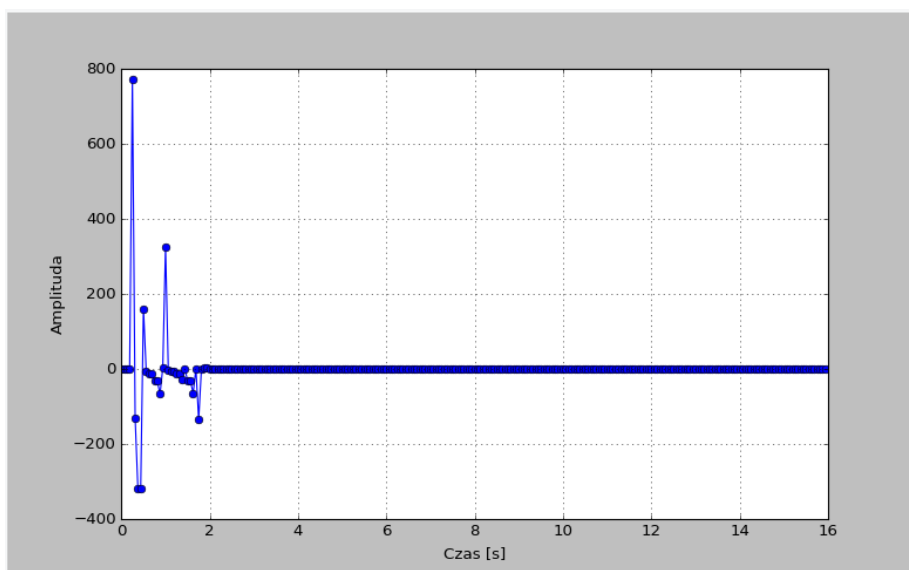
#### 4.2.4 Transformacja Walsha-Hadamarda z definicji



Rysunek 15: Wykresy dla sygnału S2

Czas wykonania obliczeń (s): 0.025

#### 4.2.5 Szybka transformacja Walsha-Hadamarda



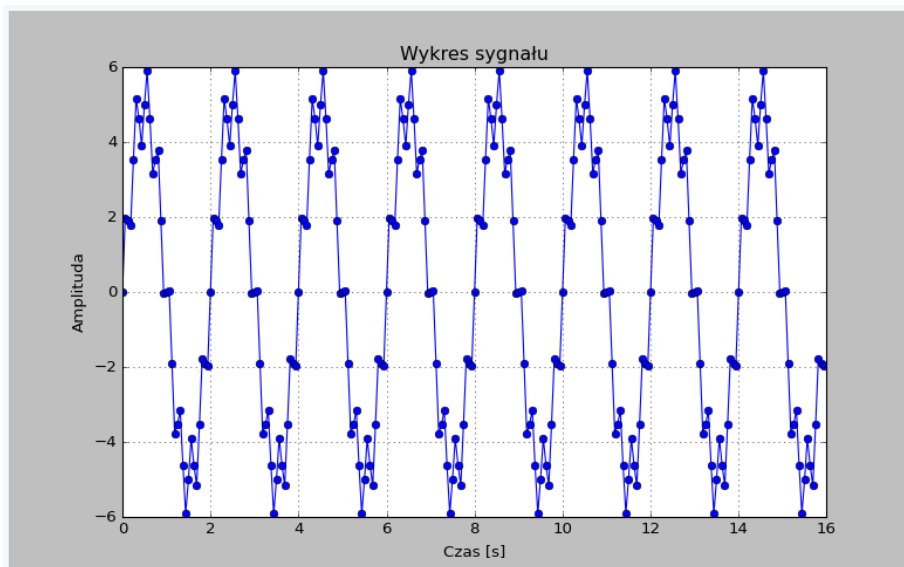
Rysunek 16: Wykresy dla sygnału S2

Czas wykonania obliczeń (s): 0.002

### 4.3 Sygnał S3

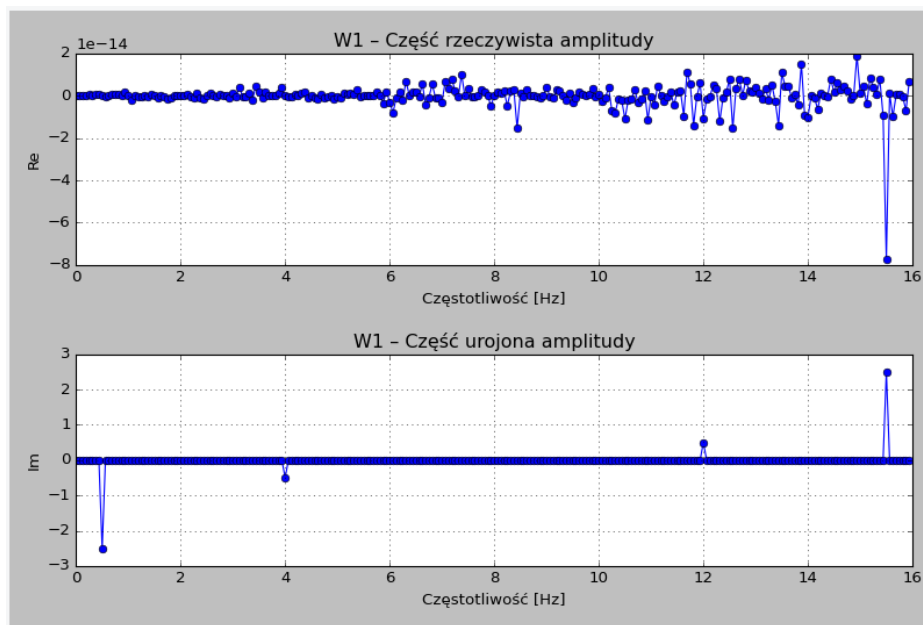
Czas początkowy	Czas trwania sygnalu	Częstotliwość próbkowania
0	16s	16Hz

Tabela 3: Parametry wejściowe dla sygnału S3

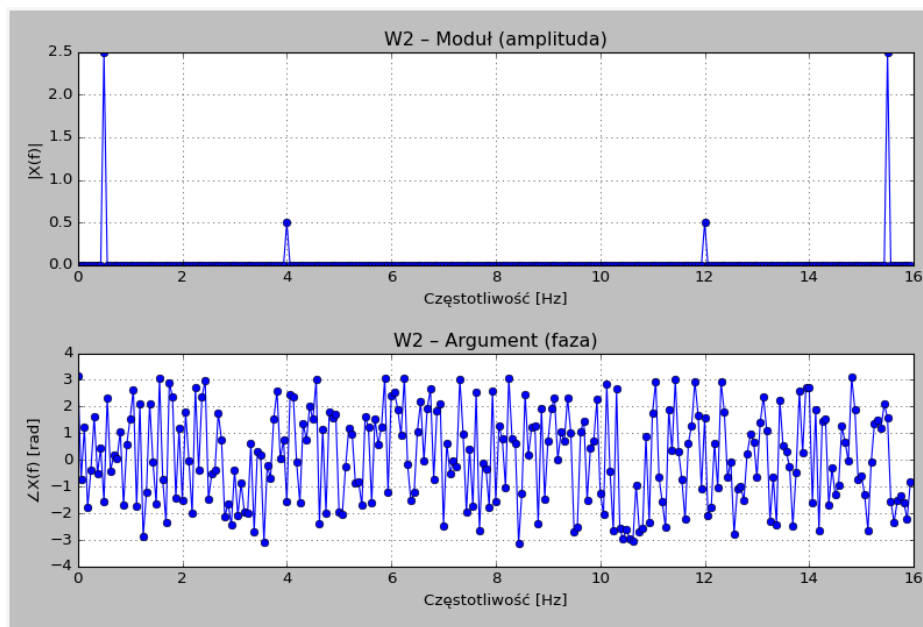


Rysunek 17: Wykres sygnału S3

#### 4.3.1 Dyskretna transformacja Fouriera z definicji



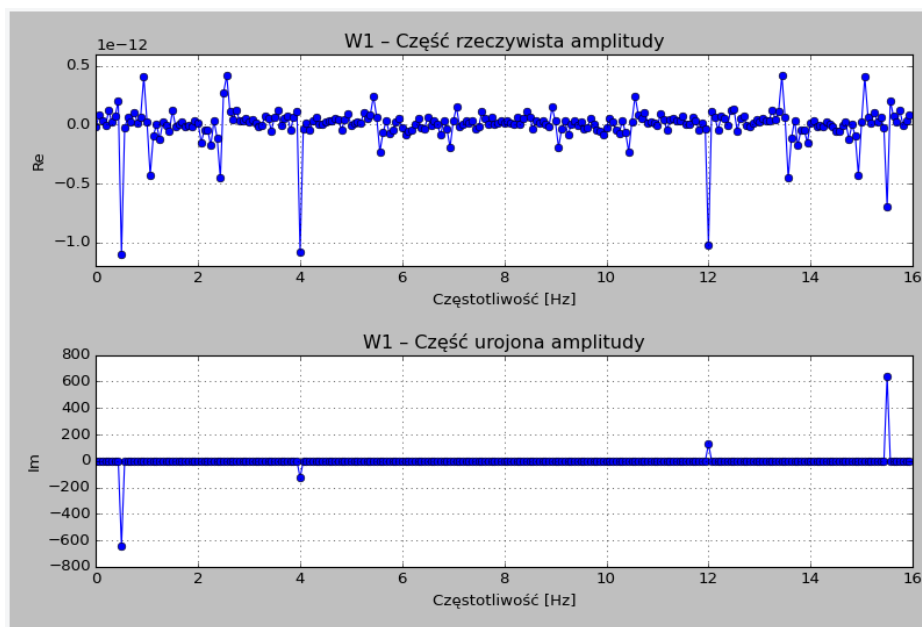
Rysunek 18: Wykresy W1 dla sygnału S3



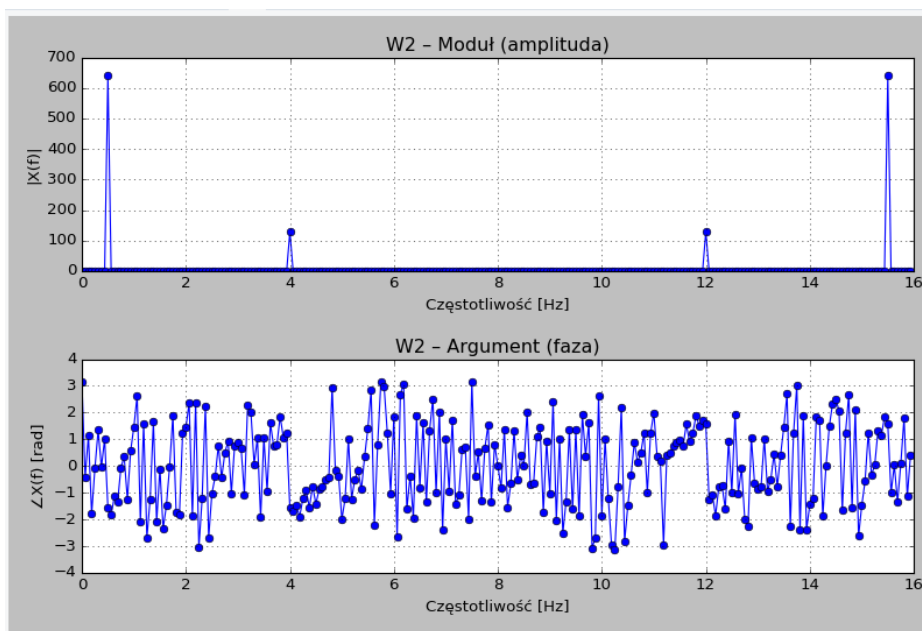
Rysunek 19: Wykresy W2 dla sygnału S3

Czas wykonania obliczeń (s): 0.015

#### 4.3.2 Szybka transformacja Fouriera



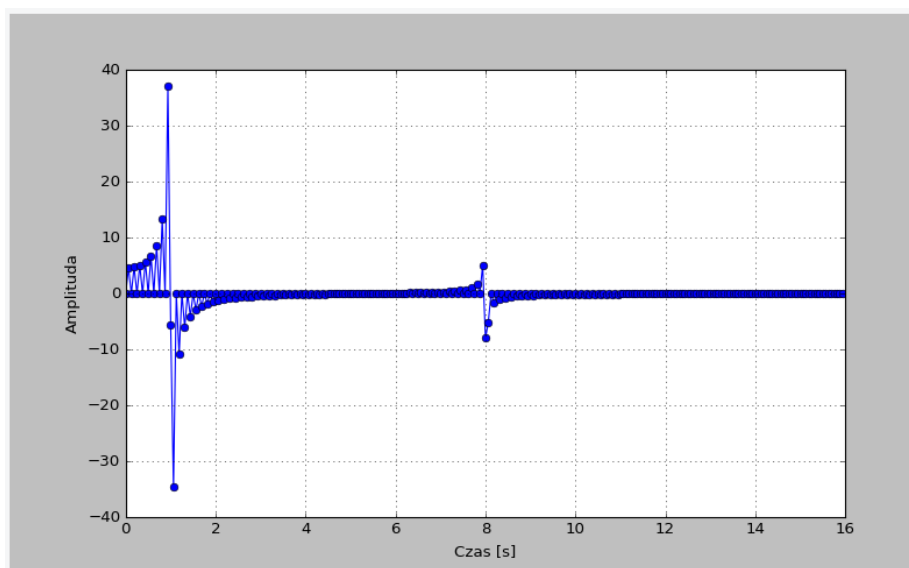
Rysunek 20: Wykresy W1 dla sygnału S3



Rysunek 21: Wykresy W2 dla sygnału S3

Czas wykonania obliczeń (s): 0.001

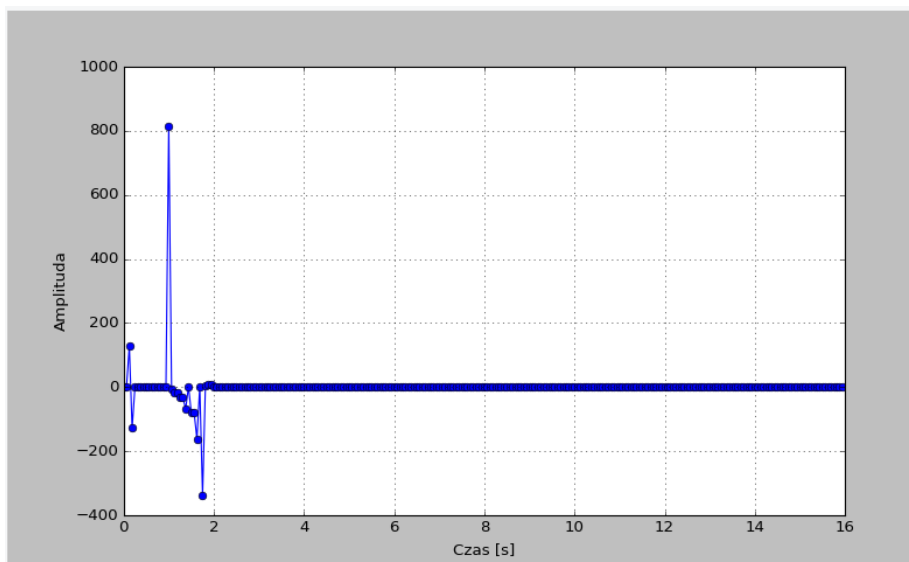
#### 4.3.3 Transformacja kosinusowa z definicji



Rysunek 22: Wykresy dla sygnału S3

Czas wykonania obliczeń (s): 0.024

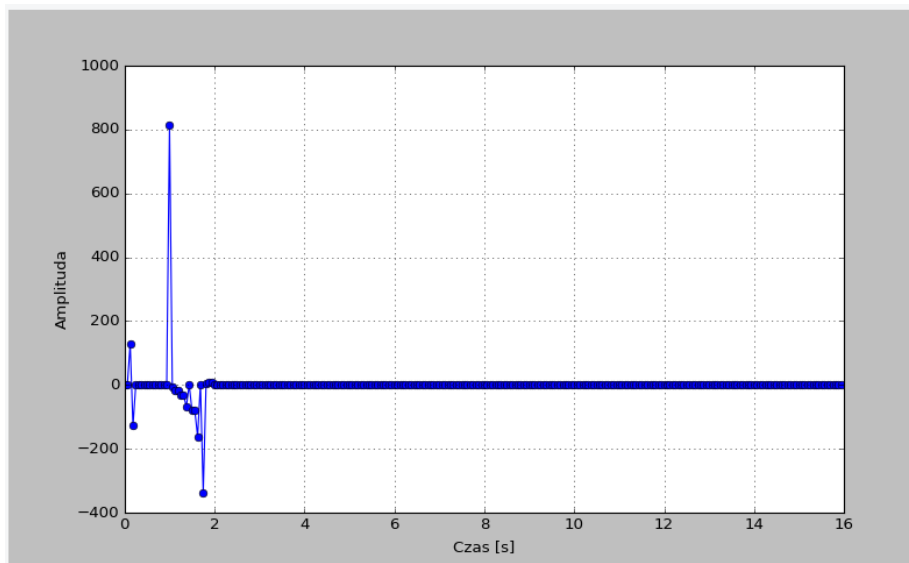
#### 4.3.4 Transformacja Walsh-Hadamarda z definicji



Rysunek 23: Wykresy dla sygnału S3

Czas wykonania obliczeń (s): 0.026

#### 4.3.5 Szybka transformacja Walsha-Hadamarda



Rysunek 24: Wykresy dla sygnału S3

Czas wykonania obliczeń (s): 0.001

#### 4.4 Tabela czasu wykonywania obliczeń

	S1	S2	S3
Dyskretna transformacja Fouriera z definicji	0.020	0.021	0.015
Szybka transformacja Fouriera	0.002	0.002	0.001
Transformacja kosinusowa z definicji	0.045	0.026	0.024
Transformacja Walsha-Hadamarda z definicji	0.029	0.025	0.026
Szybka transformacja Walsha-Hadamarda	0.001	0.002	0.001

### 5 Dyskusja i wnioski

Eksperymenty zostały podzielone na trzy grupy, każda grupa przedstawia wyniki transformacji jednego z sygnałów S1, S2 i S3. Większa liczba eksperymentów pozwala lepiej potwierdzić wysnuwane wnioski, które są w tym przypadku takie same, dla każdej serii doświadczeń.

Jeżeli chodzi o wyniki transformacji, to wydają się one być poprawne dla wszystkich przeprowadzonych eksperymentów, w wynikach transformacji Fouriera, kosinusowej i Walsha-Hadamarda, zawsze można odnaleźć tyle składowych, ile rzeczywiście tworzyło transformowaną funkcję. I tak kolejno dla serii eksperymentów znaleziono 2, 3 i znowu 2 składowe. Warto jeszcze wspomnieć, że wyniki transformacji Fouriera, która była przeprowadzana różnymi metodami,



również różnią się od siebie. Widać, że dla każdej z dwóch metod część rzeczywista wyniku wygląda inaczej. Natomiast moduł zawsze wygląda tak samo i jako, że jest przeniesiony w dziedzinę częstotliwości a oś X odpowiednie przeskalowana, pozwala bezpośrednio odczytać, jakie częstotliwości składowe tworzyły transformowany sygnał. Oczywiście należy pamiętać, że druga połowa (w osi X) wykresu jest zawsze symetryczna do pierwszej i nie niesie dodatkowej informacji.

Ostatnim rozważanym aspektem jest czas obliczeń. Pierwszym oczywistym wnioskiem potwierdzonym przez prawie wszystkie doświadczenia jest to, że algorytmy szybkie działają znacznie szybciej, niż algorytmy zbudowane na podstawie definicji. Widać to wyraźnie na przykładach transformacji Walsha-Hadamarda oraz kosinusowej. FFT okazała się za każdym razem około dziesięciokrotnie szybsza niż transformacja z definicji. W przypadku transformacji Walsha-Hadamarda ponad trzydzieści razy. Warto zwrócić tutaj uwagę, że w ogóle transformacja Walsha-Hadamarda okazała się najszybsza, druga w kolejności jest transformacja kosinusowa, najwolniejsza natomiast jest transformacja Fouriera. Należy wziąć pod uwagę, że zależności pomiędzy czasem trwania różnych algorytmów zmieniają się dla większej bądź mniejszej liczby próbek. Zysk czasowy, który otrzymujemy dla algorytmów szybkich, zawsze jest coraz bardziej zauważalny przy obliczeniach, na większej ilości danych. Ponadto trzeba wspomnieć, że czas obliczeń może zmieniać się w zależności od chwilowego obciążenia procesora komputera i konkretnych szczegółów implementacyjnych, które nie są charakterystyczne dla algorytmu ale dla danej jego implementacji.

## Literatura

- [1] Politechnika Łódzka, *Instrukcja do zadania 4*, Dostęp online: <https://ftims.edu.p.lodz.pl/mod/url/view.php?id=6495>, [dostęp: 10 maja 2025].
- [2] Python Software Foundation, *Python Documentation*, Dostęp online: <https://docs.python.org/3/>, [dostęp: 10 maja 2025].
- [3] Python Software Foundation, *Tkinter Documentation*, Dostęp online: <https://docs.python.org/3/library/tkinter.html>, [dostęp: 10 maja 2025].