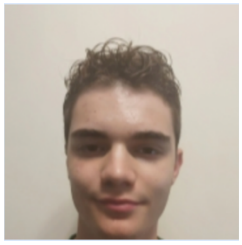
Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Investigação Operacional
Problema de Maximização do Fluxo em Rede

TP2

4 de maio de 2024

Trabalho realizado por:
Alexandre de Oliveira Monsanto
Margarida Cunha da Silva
Maria Inês da Rocha Pinto Gracias Fernandes
Vasco João Timóteo Gonçalves



a104358
Alexandre de Oliveira Monsanto

a104357
Margarida Cunha da Silva

a104522
Maria Inês da Rocha Pinto Gracias Fernandes

a104527
Vasco João Timóteo Gonçalves

Índice

0. Alterações ao Problema

Seja 104527 o número de inscrição do estudante do grupo com maior número de inscrição, escrito no formato xABCDE, temos que:

x = 1 A = 0 B = 4 C = 5 D = 2 E = 7

Seja k o resto da divisão do número DE por 14. Como DE = 27, o resto da divisão de 27 por 14 é 13 (27 = 1×14+13). Assim, **k = 13**.

Segundo o enunciado, para k = 13, temos que **(O,D) = (6,3)**. Assim, os vértices origem *O* e destino *D* são, respetivamente, 6 e 3.

As capacidades dos vértices são dadas pela seguinte tabela. Quando o vértice é a origem *O* ou o destino *D*, o valor da sua capacidade é substituído por +∞.

vértice	capacidade	
1	$10 \times (A + C + 1)$	= 60
2	$10 \times (B + D + 1)$	= 70
3	$10 \times (C + 1)$	= +∞
4	$10 \times (D + 1)$	= 30
5	$10 \times (E + 1)$	= 80
6	$10 \times (D + E + 1)$	= +∞

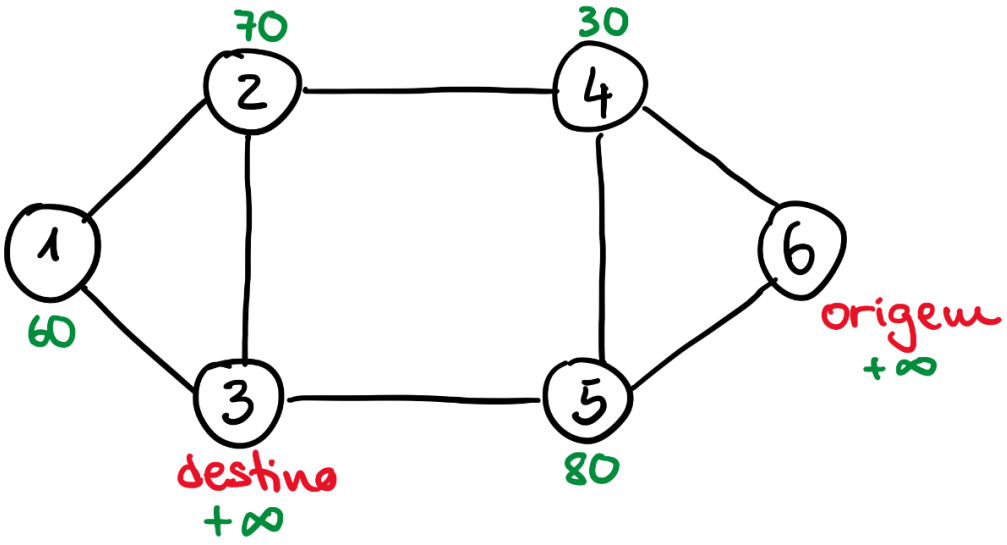


Figura 1 - Grafo resultante da aplicação das regras e capacidades dos vértices

1. Formulação do Problema

Este trabalho aborda um problema de fluxos em rede, que tem inerentes dois tipos de restrições: conservação de fluxo e de capacidade.

O objetivo de resolver este problema é determinar o fluxo máximo entre dois vértices não adjacentes através de um modelo de programação que contém:

- o custo unitário do fluxo c_{ij} do arco (i, j), $\forall (i, j) \in A$;
- a capacidade u_{ij} do arco (i, j), $\forall (i, j) \in A$;
- oferta ou consumo em cada vértice b_j, $\forall j \in V$.

O vértice de origem (vértice 6) apenas poderá enviar fluxo e, por sua vez, o vértice de destino (vértice 3) apenas poderá receber fluxo.

Como tal, estes dois vértices têm capacidade $+\infty$ e os restantes têm capacidades variadas, apresentadas na figura 1 e 2, a verde.

O máximo de fluxo (das arestas) que poderá ser enviado entre os vértices está representado a vermelho na figura 2. É calculado através do mínimo entre as capacidades dos dois vértices que formam a aresta (exemplo: a aresta formada pelos vértices 2 e 4 é dada por min(70,30) = 30), pois não é possível existir um fluxo que ultrapasse a capacidade de um dos vértices.

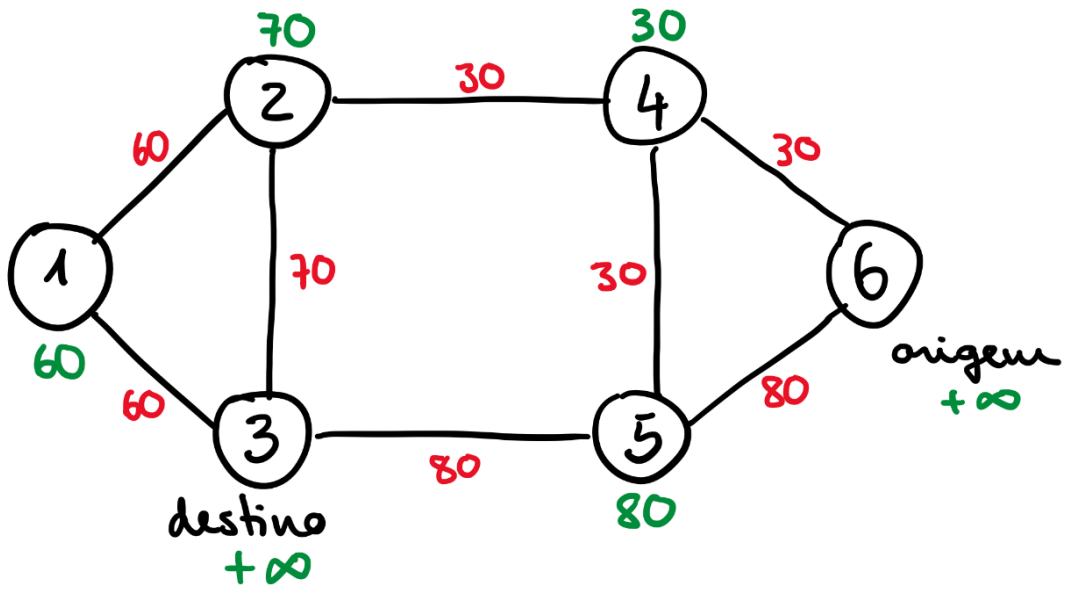


Figura 2 – Grafo que representa as capacidades dos vértices e máximo de fluxo das arestas

Para resolução do problema dividiu-se cada vértice em dois vértices diferentes: um que só envia fluxo e outro que só recebe fluxo. Os vértices de origem e destino não sofreram alterações porque o vértice de origem apenas envia fluxo e o de destino apenas recebe fluxo.

Observando a Figura 3, os vértices "linha" apenas enviam fluxo, enquanto os outros apenas recebem fluxo.

A capacidade da aresta entre dois vértices (“normais” e “linha”) é a própria capacidade do vértice original.

Entre vértices diferentes, não se justificou o valor da capacidade da aresta por ser a mesma apresentada na Figura 2, facilitando assim a interpretação do novo grafo.

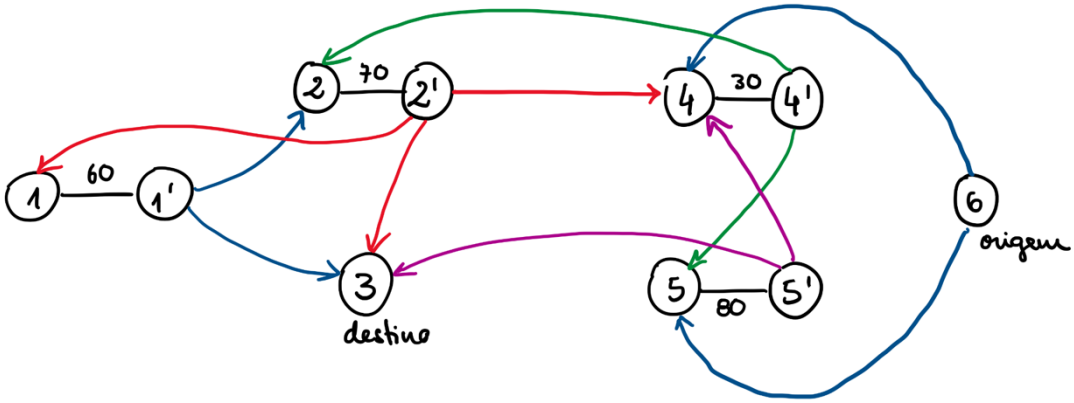


Figura 3 – Grafo que representa o fluxo e a distribuição do fluxo em rede

2. Ficheiro *Input*

De seguida, apresentamos o ficheiro de *input* submetido ao *software* de otimização de fluxo em rede, o Relax4.

```
10
16
7 2 0 60
7 3 0 60
1 7 0 60
8 1 0 60
2 8 0 70
8 3 0 70
8 4 0 30
9 5 0 30
4 9 0 30
9 2 0 30
5 10 0 80
10 4 0 30
10 3 0 80
6 4 0 30
6 5 0 80
3 6 -1 1000
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
```

Figura 4 - Input do Relax4

O número 10 representa o número de vértices da figura 3 e o número 16 representa o número de arcos, 15 dos quais representados na figura 3. O 16º arco trata-se apenas de um arco de validação para que os fluxos se dirijam para o destino que se pretende (3 6 -1 1000).

Cada linha do input do Relax4 representa origem, destino, custo e capacidade.

Como o input do Relax4 não reconhece os vértices "linha" da Figura 3, alterou-se o vértice 1' para 7, 2' para 8, 4' para 9 e 5' para 10.

No input do Relax4, envia-se o fluxo do vértice "normal" para o vértice "linha" porque, de outra forma, o programa não forneceria o output esperado, ou seja, para os próprios vértices, neste software, os vértices que recebem são os que enviam o fluxo e vice-versa.

Iremos analisar cada linha do input:

1. 7 2 0 60 – O vértice 1' (agora 7) possui um arco com capacidade de 60 unidades de fluxo com destino ao vértice 2.
2. 7 3 0 60 – O vértice 1' (agora 7) possui um arco com capacidade de 60 unidades de fluxo com destino ao vértice 2.
3. 1 7 0 60 – O vértice 1 possui um arco com capacidade de 60 unidades de fluxo (capacidade do vértice original) com destino ao vértice 1' (agora 7).
4. 8 1 0 60 – O vértice 2' (agora 8) possui um arco com capacidade de 60 unidades de fluxo com destino ao vértice 1.
5. 2 8 0 70 – O vértice 2 possui um arco com capacidade de 70 unidades de fluxo (capacidade do vértice original) com destino ao vértice 2' (agora 8).
6. 8 3 0 70 – O vértice 2' (agora 8) possui um arco com capacidade de 70 unidades de fluxo com destino ao vértice 3 (destino).
7. 8 4 0 30 – O vértice 2' (agora 8) possui um arco com capacidade de 30 unidades de fluxo com destino ao vértice 4.
8. 9 5 0 30 – O vértice 4' (agora 9) possui um arco com capacidade de 30 unidades de fluxo com destino ao vértice 5.
9. 4 9 0 30 – O vértice 4 possui um arco com capacidade de 30 unidades de fluxo (capacidade do vértice original) com destino ao vértice 4' (agora 9).
10. 9 2 0 30 – O vértice 4' (agora 9) possui um arco com capacidade de 30 unidades de fluxo com destino ao vértice 2.
11. 5 10 0 80 – O vértice 5 possui um arco com capacidade de 80 unidades de fluxo (capacidade do vértice original) com destino ao vértice 5' (agora 10).
12. 10 4 0 30 – O vértice 5' (agora 10) possui um arco com capacidade de 30 unidades de fluxo com destino ao vértice 4.
13. 10 3 0 80 – O vértice 5' (agora 10) possui um arco com capacidade de 80 unidades de fluxo com destino ao vértice 3 (destino).
14. 6 4 0 30 – O vértice 6 (origem) possui um arco com capacidade de 30 unidades de fluxo com destino ao vértice 4.
15. 6 5 0 80 – O vértice 6 (origem) possui um arco com capacidade de 80 unidades de fluxo com destino ao vértice 5.

Todos estas linhas têm um custo de 0.

Para o 16º arco, colocou-se um arco com capacidade de 1000 unidades de fluxo pelo facto da aresta apresentar uma capacidade infinita.

Todas as linhas seguintes tomam o valor 0 por não haver nem oferta nem procura.

3. Ficheiro *Output*

```
NUMBER OF NODES = 10, NUMBER OF ARCS = 16
 DEFAULT INITIALIZATION USED
 **********************************
 Total algorithm solution time =   0.0031349659 sec.
 OPTIMAL COST =  -110.
 NUMBER OF ITERATIONS =  4
 NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS =  1
 NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS =  0
 NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS =  1
 **********************************
```

Figura 5 – Output do Relax4

4. Solução Ótima

O valor ótimo é 110. O valor apresentado no *output* do Relax4 é negativo porque o Relax4 trabalha com mínimos e como o valor que pretendemos é um máximo, utiliza-se o seu simétrico.

Realisticamente falando, o fluxo máximo entre dois vértices não adjacentes ser 110 significa que a capacidade do arco entre dois vértices não poderá exceder esse valor por se tratar da sua capacidade máxima. Efetivamente, somando as capacidades dos dois arcos que saem da origem (80+30, como podemos verificar na Figura 1), vamos obter então o valor ótimo e o fluxo máximo, que era o pretendido.

5. Validação do Modelo

```
/* Função objetivo */
max: x63;

/* Conservação de Fluxo */
VERTICE_1: - 1 x21 - 1 x31 + 1 x12 + 1 x13 = 0;
VERTICE_2: - 1 x32 - 1 x42 - 1 x12 + 1 x21 + 1 x23 + 1x24 = 0;
VERTICE_3: - 1 x13 - 1 x23 - 1 x53 + 1 x31 + 1 x32 + 1 x35 = - 1 x63;
VERTICE_4: - 1 x54 - 1 x64 - 1 x24 + 1 x42 + 1 x45 + 1 x46 = 0;
VERTICE_5: - 1 x35 - 1 x45 - 1 x65 + 1 x53 + 1 x54 + 1 x56 = 0;
VERTICE_6: - 1 x46 - 1 x56 + 1 x64 + 1 x65 = 1 x63;

/* Capacidade dos arcos */
ARCO12: x12 <= 70;
ARCO21: x21 <= 60;
ARCO13: x13 >= 0;
ARCO31: x31 <= 60;
ARCO23: x23 >= 0;
ARCO32: x32 <= 70;
ARCO35: x35 <= 80;
ARCO53: x53 >= 0;
ARCO24: x24 <= 30;
ARCO42: x42 <= 70;
ARCO45: x45 <= 80;
ARCO54: x54 <= 30;
ARCO46: x46 >= 0;
ARCO64: x64 <= 30;
ARCO56: x56 >= 0;
ARCO65: x65 <= 80;
```

Figura 6 - Input do lpsolve

A função objetivo é x_{63} porque a nossa origem é 6 e o nosso destino é 3. Com esse *input*, é possível validar o valor ótimo, que é o nosso objetivo.

Variables	result
	110
x63	110
x21	0
x31	0
x12	0
x13	0
x32	0
x42	30
x23	30
x24	0
x53	80
x35	0
x54	0
x64	30
x45	0
x46	0
x65	80
x56	0

Figura 7 - Output do lpsolve

Como é possível verificar na Figura 7, o output do lpsolve é igual ao valor ótimo do Relax4, sendo 110 então o valor do fluxo máximo entre dois vértices não adjacentes.