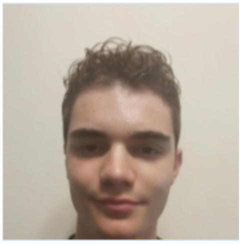
Investigação Operacional
Problema de Corte

1º Trabalho

23 de março de 2024

Trabalho realizado por:
Alexandre de Oliveira Monsanto
Margarida Cunha da Silva
Maria Inês da Rocha Pinto Gracias Fernandes
Vasco João Timóteo Gonçalves



a104358
Alexandre de Oliveira Monsanto

a104357
Margarida Cunha da Silva

a104522
Maria Inês da Rocha Pinto
Gracias Fernandes

a104527
Vasco João Timóteo Gonçalves

Índice

1 Introdução 3

2 Alterações ao Problema 4

3 Formulação do Problema 5

4 Modelo de Programação Linear 6

5 Ficheiros Input e Output 8

6 Solução Ótima 9

7 Validação do Modelo 9

1 Introdução

Este trabalho aborda um problema de corte (*cutting stock problem*) onde existem contentores de capacidades diferentes, itens de diferentes tamanhos e limite de contentores e itens. O objetivo de resolver este problema é minimizar a soma dos comprimentos dos contentores usados, através de um modelo de programação linear.

O objetivo deste trabalho é resolver o problema utilizando o modelo de 'um-corte' de Dyckhoff, designado na literatura anglo-saxónica por *one-cut model*, em que cada variável de decisão corresponde a uma única operação de corte efetuada numa única peca.

As operações de 'um-corte' podem ser efetuadas em objetos grandes, ou em peças intermédias que resultam de operações de 'um-corte' anteriores. Dada uma peça de uma determinada largura, um 'um-corte' é uma operação de divisão da peça em duas peças menores. Cada 'um-corte' deve produzir, pelo menos, uma peça da largura de um item pedido. Uma das peças resultante de um 'um-corte' pode não ser da largura de um item pedido (é, por vezes, designada por peça residual), porque ela própria pode ser cortada posteriormente para obter uma largura mais pequena, ou então ser simplesmente perda do processo de corte.

2 Alterações ao Problema

Seja 104527 o número de inscrição do estudante do grupo com maior número de inscrição, escrito no formato xABCDE, temos que:

x = 1 A = 0 B = 4 C = 5 D = 2 E = 7

O número de contentores disponíveis de cada comprimento e o número de itens de cada comprimento a empacotar são dados pelas seguintes tabelas:

contentores

comprimento	quantidade disponível
11	ilimitada
10	B+1 5
7	D+1 3

itens

comprimento	quantidade
1	k_1 0
2	k_2 13
3	k_3 0
4	k_4 15
5	5

- se o algarismo B for par, então $k_1 = 0$, senão $k_1 = 2$;
- se o algarismo C for par, então $k_2 = C + 2$, senão $k_2 = C + 8$;
- se o algarismo D for par, então $k_3 = 0$, senão $k_3 = 10$;
- se o algarismo E for par, então $k_4 = E + 2$, senão $k_4 = E + 8$;

Conforme os itens disponibilizados, ficamos com 1 × 0 + 2 × 13 + 3 × 0 + 4 × 15 + 5 × 5 = 111 unidades de comprimento a serem empacotadas.

3 Formulação do Problema

Neste problema de corte, é pretendido determinar como melhor efetuar cortes em contentores (*bins*) de diferentes capacidades, de modo a otimizar uma dada medida de eficiência. A medida de eficiência é a soma dos comprimentos dos contentores usados.

Tal como calculado no capítulo anterior, contamos com uma quantidade ilimitada de contentores de comprimento 11, 5 contentores de comprimento 10 e 3 contentores de comprimento 7. O objetivo será empacotar, no mínimo, 13 itens de comprimento 2, 15 itens de comprimento 4 e 5 itens de comprimento 5.

Decidimos utilizar como variáveis de decisão $y_{x,z}$, onde a variável x representa o tipo de contentores usado, que pode ser ou não um contentor residual (contentor resultante das sobras de um corte a um determinado contentor), e a variável z representa o comprimento do corte que será efetuado nesse contentor.

Num contexto real, cada variável de decisão representa a utilização de um, ou mais, contentores conforme a combinação escolhida.

O problema pode ser formulado da seguinte forma:

Min: $7\ y_{7,2} + 7\ y_{7,4} + 7\ y_{7,5} - 7\ y_{9,2} - 7\ y_{11,4} + 10\ y_{10,2} + 10\ y_{10,4} + 10\ y_{10,5} + 11\ y_{11,2} + 11\ y_{11,4} + 11\ y_{11,5}$

A função objetivo tem o custo de cada contentor associado a cada variável de decisão. A título de exemplo, uma variável de decisão que exija um corte num contentor de comprimento 10 terá um custo associado de 10. Retira-se o custo associado às variáveis de decisão $7\ y_{9,2}$ e $7\ y_{11,4}$ por se tratarem de contentores residuais provenientes de cortes noutros contentores.

4 Modelo de Programação Linear

Variáveis de Decisão

- $y_{x,z}$ – x é a variável que contém o contentor e z é o comprimento do corte
- Tipo de variável: inteira não negativa ($y_{x,z}$ >= 0)

Parâmetros e Restrições

- **Cortes:**

$y_{6,5} + y_{5,4} + y_{3,2} >= 0$
(o nº de contentores residuais de comprimentos 6, 5 e 3 ou é um número positivo, ou nulo)

$y_{11,2} + y_{10,2} + y_{9,2} + y_{8,2} + y_{7,2} + y_{6,2} + y_{5,2} + 2\ y_{4,2} + y_{3,2} + y_{7,5} + y_{6,4} >= 13$
(o nº de cortes efetuados em contentores, quer sejam ou não residuais, de comprimento x, tem de ser superior ou igual a 13. Para $y_{7,5}$ e $y_{6,4}$, irá sobrar um contentor residual de 2 devido aos cortes efetuados, que também poderá ser usado como quantidade)

$y_{3,2} <= y_{8,5} + y_{7,4} + y_{5,2}$
(o nº de contentores que, através de um corte de comprimento x, dará origem a um contentor residual de comprimento 3, tem de ser maior que o número de contentores desse comprimento)

$y_{11,4} + y_{10,4} + y_{9,4} + 2\ y_{8,4} + y_{7,4} + y_{6,4} + y_{5,4} + y_{9,5} + y_{6,2} – y_{4,2} >= 15$
(o nº de cortes efetuados em contentores, quer sejam ou não residuais, de comprimento x, tem de ser superior ou igual a 15. Para $y_{8,4}$, multiplica-se por 2 porque um corte de 4 num contentor residual de 8, originará dois contentores de 4. Como visto em $-y_{4,2}$, retiram-se os casos em que 4 não é utilizado como uma quantidade empacotada, mas sim como um contentor residual que será utilizado para efetuar outro corte)

$y_{11,5} + 2\ y_{10,5} + y_{9,5} + y_{8,5} + y_{7,5} + y_{6,5} + y_{9,4} + y_{7,2} – y_{5,4} – y_{5,2} >= 5$
(o nº de cortes efetuados em contentores, quer sejam ou não residuais, de comprimento x, tem de ser superior ou igual a 5. Para $y_{10,5}$, multiplica-se por 2 porque um corte de 5 num contentor residual de 10, originará dois contentores de 5. Como visto em $-y_{5,4}$ e $-y_{5,2}$, retiram-se os casos em que 5 não é utilizado como uma quantidade empacotada, mas sim como um contentor residual que será utilizado para efetuar outros cortes)

$y_{6,5} + y_{6,4} + y_{6,2} <= y_{11,5} + y_{10,4} + y_{8,2}$
(o nº de contentores que, através de um corte de comprimento x, dará origem a um contentor residual de comprimento 6, tem de ser maior que o número de contentores desse comprimento)

$y_{8,5} + y_{8,4} + y_{8,2} <= y_{10,2}$
(o nº de contentores de comprimento 10 que, através de um corte de comprimento 2, dará origem a um contentor residual de comprimento 8, tem de ser maior que o número de contentores desse comprimento)

$y_{9,5} + y_{9,4} + y_{9,2} <= y_{11,2}$
(o nº de contentores de comprimento 11 que, através de um corte de comprimento 2, dará origem a um contentor residual de comprimento 9, tem de ser maior que o número de contentores desse comprimento)

- **Contentores:**

$y_{7,5} + y_{7,4} + y_{7,2} - y_{11,4} - y_{9,2} <= 3$
(o nº de contentores de comprimento 7, excluindo o nº de contentores que, através de um corte, dão origem a um contentor residual de comprimento 7, não pode exceder 3 contentores)

$y_{7,5} + y_{7,4} + y_{7,2} - y_{11,4} - y_{9,2} >= 0$
(o nº de contentores de comprimento 7, excluindo o nº de contentores que, através de um corte, dão origem a um contentor residual de comprimento 7, tem de ser, no mínimo, nulo)

$y_{10,5} + y_{10,4} + y_{10,2} <= 5$
(o nº de contentores de comprimento 10, não pode exceder 5 contentores)

$y_{10,5} + y_{10,4} + y_{10,2} >= 0$
(o nº de contentores de comprimento 10, tem de ser, no mínimo, nulo)

$y_{11,5} + y_{11,4} + y_{11,2} >= 0$
(o nº de contentores de comprimento 11 é ilimitado e tem de ser, no mínimo, nulo)

Função Objetivo

Como explicado no capítulo anterior, a função objetivo tem o custo de cada contentor associado a cada variável de decisão. Trata-se de um problema de minimização, em que o objetivo é que a soma dos comprimentos dos diversos contentores seja a menor possível.

5 Ficheiros Input e Output

Ficheiro *Input*:

Source | Matrix | Options | Result

```
/* Objective function */
min: 7 y72 + 7 y74 + 7 y75 - 7 y92 - 7 y114 + 10 y102 + 10 y104 + 10 y105 + 11 y112 + 11 y114 + 11 y115;

/* Variable bounds */
Cortes1: y65 + y54 + y32 >= 0;
Cortes2: y112 + y102 + y92 + y82 + y72 + y62 + y52 + 2 y42 + y32 + y75 + y64 >= 13;
Cortes3: y32 <= y85 + y74 + y52;
Cortes4: y114 + y104 + y94 + 2 y84 + y74 + y64 + y54 + y95 + y62 - y42  >= 15;
Cortes5: y115 + 2 y105 + y95 + y85 + y75 + y65 + y94 + y72 - y54 - y52 >= 5;
Cortes6: y65 + y64 + y62 <= y115 + y104 + y82;
Cortes8: y85 + y84 + y82 <= y102;
Cortes9: y95 + y94 + y92 <= y112;



Contentor7: y75 + y74 + y72 - y114 - y92 <= 3;
COntentor7: y75 + y74 + y72 - y114 - y92 >= 0;

Contentor10: y105 + y104 + y102 <= 5;
COntentor10: y105 + y104 + y102 >= 0;

Contentor11: y115 + y114 + y112 >= 0;

int y32, y42, y54, y52, y65, y64, y62, y75, y74, y72, y85, y84, y82, y95, y94, y92, y105, y104, y102, y115, y114, y115;

```

Ficheiro *Output*:

Variables	MILP ...	result
	112	112
y72	5	5
y74	1	1
y75	0	0
y92	0	0
y114	5	5
y102	2	2
y104	3	3
y105	0	0
y112	0	0
y115	0	0
y65	0	0
y54	0	0
y32	1	1
y82	1	1
y62	4	4
y52	0	0

6 Solução Ótima

Ao analisar o *output* do programa *lpsolve* reparamos que:

• São necessários 11 contentores (5 contentores de comprimento 11, 5 de contentores de comprimento 10 e 1 contentor de comprimento 7), que ocupam 5 × 11 + 5 × 10 + 1 × 7 = 112 unidades de comprimento.

• Sendo que temos 111 unidades de comprimento a serem empacotadas (calculadas no capítulo 2) a solução fornece-nos mais unidades de comprimento do que aquelas que necessitamos de empacotar, o que se traduz, num contexto real e prático, numa unidade de espaço não utilizado.

7 Validação do Modelo

Para o modelo ser válido terá de respeitar as restrições impostas:

• O espaço (comprimento) disponibilizado pelos contentores tem de ser igual ou superior ao espaço ocupado pelos itens. Como demonstrado no capítulo anterior, são necessários 11 contentores que disponibilizam 112 unidades de espaço, que é superior às 111 unidades necessárias pelos itens a ser empacotados.

• Tanto o tipo como o número de contentores utilizados têm de ser iguais ou menores aos valores impostos no capítulo 2. Novamente, como demonstrado no capítulo anterior, foram utilizados 5 contentores de comprimento 11, que é menor que a infinidade disponível desse tipo, 5 contentores de comprimento 10 que é igual ao número disponível de contentores desse tipo e ainda 1 contentor de comprimento 7, que é menor que o número de contentores disponíveis desse tipo (3).

Assim, podemos concluir que o modelo é válido e a solução obtida pelo programa *lpsolve* é uma decisão admissível e correta do modelo, podendo ser traduzida numa decisão adequada ao sistema real.