

# 华东理工大学

## 复变函数与积分变换作业 (第5册)

### 第九次作业

教学内容: 5.1 孤立奇点    5.2.1 留数的定义    5.2.2 极点处留数的计算

1. 填空题:

(1) 函数  $f(z) = \frac{1}{e^z - (1+i)}$  的全部孤立奇点是  $\frac{1}{2} \ln 2 + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \dots$

(2)  $z = 0$  是  $\frac{1}{\sin z - z}$  的 三 级极点.

(3)  $z = -2$  是  $\frac{z^3 - 8}{(z^2 - 4)^3}$  的 三 级极点.

(4) 函数  $f(z) = \frac{1}{z^4 + a^4} (a > 0)$  在上半平面内奇点的留数之和为  $-\frac{\sqrt{2}i}{4a^3}$  或  $-\frac{e^{\frac{\pi}{4}i} + e^{\frac{3\pi}{4}i}}{4a^3} \dots$

(5)  $\text{Res}[z \cos \frac{1}{z}, 0] = -\frac{1}{2}$

2. 指出下列函数的奇点及其类型 (不考虑  $\infty$  点), 若是极点, 指出它的级.

(1)  $\frac{z^{2n}}{1+z^n}$ ;

解: 由  $z^n + 1 = 0, z^n = -1$ , 得  $z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}i} (k = 0, 1, \dots, n-1)$  为原式一级极点。

(2)  $\frac{\ln(1+z)}{z}$

解 1:  $\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, 0 < |z| < 1, \frac{\ln(1+z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n+1}$  无负幂项, 故  $z = 0$

为其可去奇点。

解 2:  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(1+z)} = 1$ , 故  $z = 0$  为可去奇点。

(3)  $e^{\frac{z}{1-z}}$

解：由于  $e^{\frac{z}{1-z}} = e^{\frac{z-1+1}{1-z}} = e^{-1} e^{\frac{1}{1-z}} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}$ ，所以  $z=1$  为本性奇点。

$$(4) \frac{\sin z}{z^3};$$

解： $z=0$  为  $\sin z$  的一级零点，而  $z=0$  为  $z^3$  的三级零点，故  $z=0$  为  $\frac{\sin z}{z^3}$  的二级极点。

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \frac{\sin z}{z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \neq 0, \text{ 故 } z=0 \text{ 为 } \frac{\sin z}{z^3} \text{ 的二级极点。}$$

$$(5) \frac{1}{z^2(e^z - 1)};$$

解：因  $e^z - 1 = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = z(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \dots)$ ，故  $z=0$  为  $\frac{1}{z^2(e^z - 1)}$  的三级极点，而

$z = 2k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \dots$  均为一级极点。

$$(6) \frac{e^z \sin z}{z^2}$$

$$\text{解：由于 } \frac{e^z \sin z}{z^2} = \frac{e^z(z - \frac{z^3}{3!} + \dots)}{z^2} = \frac{e^z(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots)}{z}$$

$$\text{所以 } \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^z \sin z}{z^2} = 1, \text{ 因此 } z=0 \text{ 是一级极点}$$

**3 证明：**如果  $z_0$  是  $f(z)$  的  $m(m > 1)$  级零点，那么  $z_0$  是  $f'(z)$  的  $m-1$  级零点。

证明： $z_0$  是  $f(z)$  的  $m(m > 1)$  级零点，可设  $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$ ，

其中  $\varphi(z)$  在  $z_0$  点解析，且  $\varphi'(z_0) \neq 0$ ，

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} \varphi(z) + (z - z_0)^m \varphi'(z)$$

$$\text{令 } \phi(z) = m\varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z),$$

$$\text{则 } f'(z) = (z - z_0)^{m-1} \phi(z),$$

因为  $\varphi(z)$  在  $z_0$  点解析, 所以  $\phi(z)$  也在  $z_0$  点解析, 且  $\varphi(z_0) \neq 0$ , 所以

$\phi(z_0) = m\varphi(z_0) \neq 0$ , 即  $z_0$  是  $f'(z)$  的  $m-1$  级零点。

4 求下列函数在各有限奇点的留数.

$$(1) \frac{1-e^{2z}}{z^4};$$

$$\text{解: } \frac{1-e^{2z}}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left( -2z - \frac{4z^2}{2!} - \frac{8z^3}{3!} - \dots \right)$$

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = c_{-1} = -\frac{4}{3};$$

$$(2) \frac{\cos z}{z-i};$$

解:  $z=i$  为一级极点

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\cos z}{z-i}, i\right] = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{\cos z}{z-i} = \cos i = \cosh 1$$

$$(3) \frac{1}{(1+z^2)^3};$$

解:  $z = \pm i$  为三级极点

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^3}, i\right] = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} [(z-i)^3 \frac{1}{(1+z^2)^3}] = \frac{-3i}{16}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^3}, -i\right] = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d^2}{dz^2} [(z+i)^3 \frac{1}{(1+z^2)^3}] = \frac{3i}{16}$$

$$(4) z^2 \sin \frac{1}{z};$$

$$\text{解: } z^2 \sin \frac{1}{z} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$

$$\operatorname{Res}\left[z^2 \sin \frac{1}{z}, 0\right] = c_{-1} = -\frac{1}{6}$$

$$(5) e^{\frac{z}{z-1}}, \quad z=1;$$

解:  $e^{\frac{z}{z-1}} = e^{1+\frac{1}{z-1}} = e(1+\frac{1}{z-1}+....)$

故  $a_{-1} = e$

即  $\text{Res}[e^{\frac{z}{z-1}}, 1] = e$ .

(6)  $e^{\frac{1}{z}} \sin \frac{1}{z}, z = 0$ .

解:  $e^{\frac{1}{z}} \sin \frac{1}{z} = (1 + \frac{1}{z} + \dots)(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots$

故  $\text{Res}[e^{\frac{1}{z}} \sin \frac{1}{z}, 0] = 1$

5. 判断  $e^{z+\frac{1}{z}}$  的孤立奇点的类型, 并求其留数.

解: 函数  $e^{z+\frac{1}{z}}$  有孤立奇点  $0, \infty$ , 而且在  $0 < |z| < +\infty$  内有如下展开式:

$$\begin{aligned} e^{z+\frac{1}{z}} &= e^z e^{\frac{1}{z}} = (1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots)(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \dots) \\ &= \dots + \{1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{3!4!} + \dots\} \frac{1}{z} + \dots \end{aligned}$$

所以  $\text{Res}[e^{z+\frac{1}{z}}, 0] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$

$\text{Res}[e^{z+\frac{1}{z}}, \infty] = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$

6. 设  $\varphi(z)$  在  $z_0$  解析,  $z_0$  为  $f(z)$  的一级极点, 且  $\text{Res}[f(z), z_0] = A$ , 证明:

$$\text{Res}[f(z)\varphi(z), z_0] = A\varphi(z_0)$$

证明: 因为  $z_0$  为  $f(z)$  的一级极点, 设  $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$ ,  $g(z)$  在  $z_0$  解析,  $g(z_0) \neq 0$

$$\text{所以 } \operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{z - z_0} = g(z_0) = A$$

又由于  $\varphi(z)$  在  $z_0$  解析所以  $z_0$  为  $f(z)\varphi(z)$  的一级极点。

$$\operatorname{Res}[f(z)\varphi(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)\varphi(z)}{z - z_0} = A\varphi(z_0)$$

7. 已知  $z = 0$  是函数  $f(z)$  的  $n$  级极点, 证明  $\operatorname{Res}[\frac{f'(z)}{f(z)}, 0] = -n$ .

证明: 设  $f(z) = z^{-n}g(z)$ ,  $g(z)$  在  $z = 0$  解析, 且  $g(0) \neq 0$ , 于是

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-nz^{-n-1}g(z) + z^{-n}g'(z)}{z^{-n}g(z)} = \frac{-n}{z} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

$$\frac{g'(z)}{g(z)} \text{ 在 } z = 0 \text{ 解析, 故 } \operatorname{Res}[\frac{f'(z)}{f(z)}, 0] = -n.$$

## 第十次作业

**教学内容** 5.2.3 留数定理; 5.2.4 函数在无穷远点的留数

1. 填空题

(1)  $\cos z - \sin z$  在  $z = \infty$  的留数为 0.

(2)  $\frac{2z}{3+z^2}$  在  $z = \infty$  的留数为 -2.

(3)  $e^{\frac{1}{z^2}}$  在  $z = \infty$  的留数为 0.

(4)  $\frac{e^z}{z^2 - 1}$  在  $z = \infty$  的留数为  $i \sin i$ .

2 利用留数定理计算下列积分.

$$(1) \oint_C \frac{1}{1+z^4} dz, \quad C: x^2 + y^2 = 2x;$$

解: 被积函数有四个一级极点,  $z_k = e^{\frac{2k\pi + \pi}{4}i}$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) 其中只有  $z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i}$ ,  $z_3 = e^{\frac{7}{4}\pi i}$  在  $C$  内

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{1}{1+z^4} dz &= 2\pi i [\operatorname{Res}(\frac{1}{1+z^4}, e^{\frac{\pi}{4}i}) + \operatorname{Res}(\frac{1}{1+z^4}, e^{\frac{7}{4}\pi i})]; \\
&= 2\pi i \left[ \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{\pi}{4}i}} + \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{7}{4}\pi i}} \right] \\
&= 2\pi i \left[ -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i) + \frac{\sqrt{2}}{8}(i-1) \right] \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi i.
\end{aligned}$$

$$(2) \oint_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)} dz, \quad C: |z|=4;$$

解：被积函数有三个一级极点， $z=1, z=\pm 3i$ ，且都在  $C$  内

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)} dz, &= 2\pi i [\operatorname{Res}(\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}, 1) + \operatorname{Res}(\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}, 3i) \\
&\quad + \operatorname{Res}(\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}, -3i)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi i \left[ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{3z^3+2}{z^2+9} + \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{3z^3+2}{(z-1)(z+3i)} + \lim_{z \rightarrow -3i} \frac{3z^3+2}{(z-1)(z-3i)} \right] \\
&= 2\pi i \left[ \frac{1}{2} + \frac{2-81i}{-18-6i} + \frac{2+81i}{-18+6i} \right] = 6\pi i
\end{aligned}$$

$$(3) \oint_C \frac{\sin z}{z} dz, \quad C: |z| = \frac{3}{2};$$

解：  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ，  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$ ，所以  $z=0$  是  $\frac{\sin z}{z}$  的可去奇点，则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sin z}{z}, 0\right] = 0, \quad \oint_C \frac{\sin z}{z} dz = 0$$

$$(4) \oint_C \frac{2 \cos z}{(e+e^{-1})(z-i)^3} dz, \quad C: |z-i|=1;$$

解：被积函数在  $C$  内有一个三级极点  $z=i$ 。由留数定理

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{2 \cos z}{(e + e^{-1})(z-i)^3} dz &= 2\pi i \left[ \frac{2 \cos z}{(e + e^{-1})(z-i)^3}, i \right] \\
&= 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{2}{(e + e^{-1})} \cdot (z-i)^3 \cdot \frac{\cos z}{(z-i)^3} \right] \\
&= \frac{2\pi i}{e + e^{-1}} [-\cos i] = -\pi i.
\end{aligned}$$

(5)  $\oint_{|z|=1} z^n \cos \frac{1}{z} dz$   $n$  是正整数.

解:  $z^n \cos \frac{1}{z} = z^n \left( 1 - \frac{1}{2!z^2} + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!z^{2k}} + \dots \right).$

$$\operatorname{Res} \left[ z^n \cos \frac{1}{z}, 0 \right] = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ (-1)^k \frac{2\pi i}{(2k)!}, & n = 2k-1. \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

3 计算下列积分,  $C$  为正向圆周:

(1)  $\oint_C \frac{z^{13}}{(z^2 + 5)^3 (z^4 + 1)^2} dz, \quad C: |z| = 3;$

解: 函数  $\frac{z^{13}}{(z^2 + 5)^3 (z^4 + 1)^2}$  在  $|z| = 3$  的外部, 除  $\infty$  点外没有其他奇点, 故

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{z^{13}}{(z^2 + 5)^3 (z^4 + 1)^2} dz &= -2\pi i \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 2\pi i \operatorname{Res} \left[ f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0 \right] \\
&= 2\pi i \operatorname{Res} \left[ \frac{1}{z(1 + 5z^2)^3 (1 + z^4)^2}, 0 \right] = 2\pi i
\end{aligned}$$

(2)  $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz.$

$$f(z) = \frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}} = z^2 \frac{1}{1 + \frac{1}{z}} e^{\frac{1}{z}}$$

$$= z^2 \left( 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \cdots \right) \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots \right)$$

$$= z^2 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3z} + \frac{5}{24z^2} + \cdots \quad (1 < |z| < \infty)$$

$$\text{所以 } \operatorname{Res}[f(z), \infty] = \frac{1}{3},$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}} dz = -\frac{2}{3} \pi i$$

$$(3) \oint_C \frac{2i}{z^2 + 2az - 1} dz, a > 1, C: |z| = 1$$

解:  $|z|=1$  内只有一个一级极点:  $-a + \sqrt{a^2 + 1}$ ,

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{2i}{z^2 + 2az - 1} dz &= 2\pi i \operatorname{Res} \left[ \frac{2i}{z^2 + 2az - 1}, -a + \sqrt{a^2 + 1} \right] \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow -a + \sqrt{a^2 + 1}} \frac{2i}{2z + 2a} \\ &= -\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$(4) \oint_{|z|=8} \frac{1 - \cos z}{z(e^z - 1)} dz.$$

解: 在  $|z|=8$  内,  $z=0$  是被积函数的可去奇点, 留数为 0; 而  $z = \pm 2\pi i$  是一级极点:

$$\operatorname{Res} \left[ \frac{1 - \cos z}{z(e^z - 1)}, 2\pi i \right] = \frac{(1 - \cos z)/z}{e^z} = \frac{1 - \cos 2\pi i}{2\pi i}$$

$$\operatorname{Res} \left[ \frac{1 - \cos z}{z(e^z - 1)}, -2\pi i \right] = \frac{(1 - \cos z)/z}{e^z} = \frac{1 - \cos 2\pi i}{-2\pi i}$$

$$\text{所以, } \oint_{|z|=8} \frac{1 - \cos z}{z(e^z - 1)} dz = 0.$$