# 数学分析（上）

数学学院

靳勇飞

2024 年 9 月

实数集上定义了加法，且加法满足下面的性质：

1. 【封闭的】$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x + y \in \mathbb{R}$.
2. 【交换的】$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x + y = y + x$.
3. 【结合的】$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.
4. 【加法有幺元】$\exists \theta \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + \theta = x$. 满足这个条件的 $\theta$ 是唯一的，记为 0.
5. 【每个元素有加法逆元】$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x + y = 0$. 满足这个条件的 $y$ 是唯一的，记为 $-x$.

实数集 $\mathbb{R}$ 在加法下是一个交换群。

减法的定义为：

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$，$x - y \triangleq x + (-y)$.

实数集上定义了乘法，且乘法满足下面的性质：

1. 【封闭的】$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y \in \mathbb{R}$.
2. 【交换的】$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y = y \cdot x$.
3. 【结合的】$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
4. 【乘法有幺元】$\exists e \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \cdot e = x$. 满足这个条件的 $e$ 是唯一的，记为 $1$.
5. 【非零元有乘法逆元】$\forall x \in \mathbb{R}$, 若 $x \neq 0$, $\exists y \in \mathbb{R}$, 使得 $x \cdot y = 1$. 满足这个条件的 $y$ 是唯一的，记为 $\frac{1}{x}$.

非零实数集 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 在乘法下是一个交换群。
除法的定义为：
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$，$y \neq 0$, $x \div y = \frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$.

实数集上的加法、乘法还满足下面的性质：

1. 【分配的】$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}$,
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

实数集在加法、乘法下是一个域，称为实数域。

# 实数的性质

实数集上定义了“小于 $<$”，满足下面的性质：

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},$
$$x < y,\ x = y,\ y < x \text{ 三者有并且只有一个成立。}$$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R},$
$$\text{如果 } x < y,\ y < z, \text{ 那么 } x < z.$$

符号 $y > x$ 等价于 $x < y$.
符号 $x \leqslant y$ 表示“$y < x$ 的否定”，也就是“$x < y$ 或 $x = y$”
符号 $x \geqslant y$ 表示“$x < y$ 的否定”，也就是“$y < x$ 或 $x = y$”，也就是“$x > y$ 或 $x = y$”

实数集上的加法、乘法、小于之间满足下面的性质：

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R},$
$$\text{如果 } x < y, \text{ 那么 } x + z < y + z.$$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R},$
$$\text{如果 } x > 0,\ y > 0, \text{ 那么 } x \cdot y > 0.$$

实数集在加法、乘法、小于下是有序域。

实数集上的加法、乘法、小于之间满足下面的性质：

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, 如果 $x > 0$, 那么 $-x < 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}$,
$$\text{如果 } x > 0,\ y < z,\ \text{那么 } x \cdot y < x \cdot z.$$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, 如果 $x \neq 0$, 那么 $x^2 = x \cdot x > 0$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$,
$$\text{如果 } 0 < x < y,\ \text{那么 } 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$,
$$\text{如果 } x < y,\ \text{那么存在 } z \in \mathbb{R},\ \text{使得 } x < z < y.$$

实数集上定义了一个绝对值函数 $|\cdot|$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \begin{cases} x, & \text{如果} x > 0 \\ 0, & \text{如果} x = 0 \\ -x, & \text{如果} x < 0 \end{cases}$$

满足下面的性质：

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant 0.$ $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = 0$ 当且仅当 $x = 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ |\lambda x| = |\lambda||x|$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x + y| \leqslant |x| + |y|$

这些性质使得定义为

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$$

的函数 $d(\cdot, \cdot)$ 是一个距离。

# 实数的性质

实数集有下面的性质：

1. 实数集的任何一个有上界的非空子集都有上确界。（确界存在定理）
2. 实数集的任何一个单调有界数列都是收敛的。（单调有界原理）
3. 实数集上成立区间套定理。（区间套定理）
4. 实数集的任何一个有界数列都有收敛子列。（Weierstrass 定理）
5. 实数集的任何一个数列收敛的充分必要条件是这个数列是基本数列。（Cauchy 收敛原理）
6. 实数集的任何闭区间的任意开覆盖都有有限的子覆盖。（有限覆盖定理）

对任意正整数 $n$，对任意 $n$ 个正数: $a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 成立不等式

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

也就是

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

目前可以严格地在实数集子集上定义的函数：

1. 常数函数
2. 正整数 $n$ 次幂：对任意的 $x\in\mathbb{R}$, $x^n \triangleq \prod_{i=1}^{n} x$；
   负整数 $n$ 次幂：对任意的 $x\in\mathbb{R}, x\neq 0$ 时，$x^{-n} \triangleq \frac{1}{x^n}$；
   0 次幂：形式符号 $x^0 \triangleq 1$.（注：$0^0$ 不是实数，表示其它意思）
3. 开正整数 $n$ 次根：$n$ 为奇数时定义为 $n$ 次幂的反函数；$n$ 为偶数时定义为 $n$ 次幂在非负实数上的反函数；
   开负整数 $-n$ 次根：开正整数 $n$ 次根在定义域去掉 $\{0\}$ 的地方的倒数
4. 有理数次幂：一般情况下，只考虑在 $[0,+\infty)$ 或 $(0,+\infty)$ 的情形，对任意的 $x$, $x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$

# 实数的性质

到学完《数学分析 (中)》才可以严格地在实数集子集上定义的函数：

1. $e$ 的指数函数：对任意的 $x \in \mathbb{R}$, $e^x$
2. 对数函数 ln: $e$ 的指数函数的反函数
3. 一般的幂指数：$a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $a^b \triangleq e^{b \ln a}$
   (注：此定义在有理数指数时跟刚才的定义一致，需要底数小于 0 时进行自然拓展)
4. 三角函数：sin, cos,
   $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, $\cot = \frac{\cos}{\sin}$, $\sec = \frac{1}{\cos}$, $\csc = \frac{1}{\sin}$,
5. 反三角函数：arcsin 为 sin 限制在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的反函数；
   arccos 为 cos 限制在 $[0, \pi]$ 的反函数；
   arctan 为 tan 限制在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的反函数；

**定义 (数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛)**

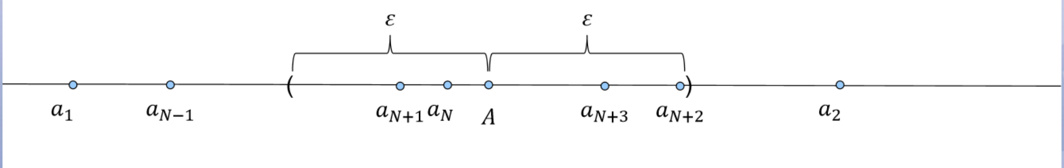
存在实数 $A$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时，$|a_n - A| < \varepsilon$. 称为：数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）收敛。

同义词有：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在；$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 收敛；数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）有极限。

**定义（数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 $A$）**

对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，$|a_n - A| < \varepsilon$. 称为：数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）收敛到 $A$。

同义词有：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$；数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）极限是 $A$.



**例**

$a \in \mathbb{R}$, 对任意的自然数 $n$, $x_n = a$. 则: $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$.

**例**

$a \in \mathbb{R}$, 对任意的自然数 $n$, $x_n = a$. 则: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

**定理**

对任意实数 $a$, 存在一个数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

**例**

$a \in \mathbb{R}$, 对任意的自然数 $n$, $x_n = a$. 则: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

**定理**

对任意实数 $a$, 存在一个数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

**证明.**

对任意实数 $a$, 对任意的自然数 $n$, 令 $x_n = a$. 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. □

**定义**（$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$）

对任意的 $M > 0$，存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，$|a_n| > M$. 称为：数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）发散到 $\infty$.

同义词有：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$；数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）极限是 $\infty$；数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）是无穷大量。

**例**

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n n=\infty.$$

**例**

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n n=\infty.$$

**例**

$$\lim_{n\to+\infty} n=\infty.$$

**例**

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n n=\infty.$$

**例**

$$\lim_{n\to+\infty} n=\infty.$$

**例**

$$\lim_{n\to+\infty} -n=\infty.$$

**定义（$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$）**

对任意的 $M>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$a_n>M$. 称为：数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）发散到 $+\infty$.

同义词有：$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$；数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）极限是 $+\infty$; 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）是正无穷大量。

**例**

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty.$$

**例**

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty.$$

**例**

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty.$$

**定义（$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$）**

对任意的 $M>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时，$a_n<-M$. 称为：数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）发散到 $-\infty$.

同义词有: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$；数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）极限是 $-\infty$; 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）是负无穷大量。

**例**

$$\lim_{n\to+\infty} -n = -\infty.$$

**定义 (无穷小量)**

若数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）极限是 0，称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）是无穷小量。

**定义 (无穷小量)**

若数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）极限是 0，称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）是无穷小量。

**事实**

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ 的充分必要条件是数列 $\{a_n - a\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）是无穷小量，
充分必要条件是数列 $\{a - a_n\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）是无穷小量，
充分必要条件是数列 $\{|a_n - a|\}_{n=1}^{+\infty}$（当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时）是无穷小量。

**例**

证明： $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0.$

**例**

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0.$

**例**

证明：对任意实数 $a$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a}{n}=0.$

**例**

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0.$

**例**

证明：对任意实数 $a$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a}{n}=0.$

**例 (课本第 29 页例 2.2.1)**

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+3}=1.$

**例 (课本第 32 页例 2.2.6)**

证明：若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = a$.

**证明.**

对任意的 $\varepsilon>0$, 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$，存在 $N_1>0$, 当 $k>N_1$ 时，$|x_k-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sum_{i=1}^{N_1}(x_i-a)}{n}=0$, 存在 $N_2>0$, 当 $n>N_2$ 时，$\left|\dfrac{\sum_{i=1}^{N_1}(x_i-a)}{n}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}-a\right| &= \left|\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)}{n}\right| \leqslant \left|\frac{\sum_{i=1}^{N_1}(x_i-a)}{n}\right| + \left|\frac{\sum_{i=N_1+1}^{n}(x_i-a)}{n}\right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\sum_{i=N_1+1}^{n}|x_i-a|}{n} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

## 作业

1. 分别写出“数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛”“数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 $A$”“$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$”否定的定义。
2. 教材第 37 页，1(1)(4)(6)(7)
3. 教材第 38 页，5，6
4. 教材第 43 页，2(1)

## 思考讨论

1. 教材第 38 页，3，4

**作业**

证明：如果数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛，则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $m > N, n > N$ 时，$|a_n - a_m| < \varepsilon$.

**提示.**

设出极限 $A$, 然后借助三角不等式 $|a_n - a_m| \leqslant |a_n - A| + |a_m - A|$. $\square$

**定理**

收敛数列的极限是唯一的。

**定理**

收敛数列的极限是唯一的。

**定理**

收敛数列是有界的。

**定理**

$a > b$，$\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时，$x_n > b$.

**定理**

$a > b$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时，$x_n > b$.

**推论**

$a > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时，$x_n > \dfrac{a}{2}$.

**推论**

$a < 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时，$x_n < \dfrac{a}{2}$.

**推论**

$a > b$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, $x_n > y_n$.

**推论**

$a > b$， $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时， $x_n > y_n$.

**推论**

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 且存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时， $x_n > y_n$， 则 $a \geqslant b$.

**定理 (数列的控制性收敛定理)**

对任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$，若存在正整数 $N$，使得当 $n > N$ 时，$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. 且当 $n$ 趋于无穷时，数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 都收敛到 $a$，则当 $n$ 趋于无穷时，数列 $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 也收敛到 $a$.

**证明.**

对任意的实数 $\varepsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, 存在正整数 $N_1$，使得当 $n > N_1$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$, 则 $x_n > a - \varepsilon$. 又由 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$, 存在正整数 $N_2$，使得当 $n > N_2$ 时，$|z_n - a| < \varepsilon$, 则 $z_n < a + \varepsilon$. 令 $N' = \max\{N, N_1, N_2\}$, 则 $N'$ 是正整数，$N' > 0$，且当 $n > N'$ 时，因为 $n > N$, $n > N_1$, $n > N_2$, 所以必有

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon$$

从而

当 $n > N'$ 时，$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ (即 $|y_n - a| < \varepsilon$)。

所以当 $n$ 趋于无穷时，数列 $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 $a$. □

**例 (课本第 31 页例 2.2.3)**

对任意实数 $a > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

**例 (课本第 31 页例 2.2.3)**

对任意实数 $a>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

**证明.**

对任意实数 $a>1$, 对任意的正整数 $n$, $\sqrt[n]{a}>1$, 所以

$$a=\left(1+(\sqrt[n]{a}-1)\right)^n=1+C_n^1(\sqrt[n]{a}-1)+\sum_{i=2}^{n}C_n^i(\sqrt[n]{a}-1)^i>1+n(\sqrt[n]{a}-1)$$

所以 $0<\sqrt[n]{a}-1<\dfrac{a-1}{n}$. 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a-1}{n}=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$. □

**例 (课本第 35 页例 2.2.8)**

$k$ 是正自然数，对任意正自然数 $i$, 当 $1 \leqslant i \leqslant k$ 时，$a_i \geqslant 0$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{k} a_i^n} = \max_{1\leqslant i\leqslant k} a_i.$$

**例 (课本第 35 页例 2.2.8)**

$k$ 是正自然数，对任意正自然数 $i$，当 $1 \leqslant i \leqslant k$ 时，$a_i \geqslant 0$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{k} a_i^n} = \max_{1\leqslant i\leqslant k} a_i.$$

**证明.**

对任意的正整数 $n$，$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} a_i \leqslant \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{k} a_i^n} \leqslant \sqrt[n]{k \cdot \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} a_i^n} \leqslant \sqrt[n]{k} \cdot \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} a_i$. 而 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^n} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} a_i$. □

**定理 (数列的控制性收敛定理)**

对任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 若存在正整数 $N$, 使得当 $n > N$ 时, $x_n \leqslant y_n$. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

**定理 (数列的控制性收敛定理)**

对任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 若存在正整数 $N$, 使得当 $n > N$ 时, $x_n \leqslant y_n$. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

**证明.**

对任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 若存在正整数 $N$, 使得当 $n > N$ 时, $x_n \leqslant y_n$. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

对任意的 $M > 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 存在 $N_1 > 0$, 使得当 $n > N_1$ 时, $x_n > M$. 令 $N' = \max\{N, N_1\}$, 则当 $n > N'$ 时, $y_n \geqslant x_n > M$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. □

**例 (对比课本第 39 页，例 2.3.1)**

对任意实数 $q > 1$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

**例 (对比课本第 39 页，例 2.3.1)**

对任意实数 $q>1$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

**证明.**

对任意实数 $q>1$, 因为对任意的正整数 $n$,

$$q^n = (1+(q-1))^n = 1 + C_n^1(q-1) + \sum_{i=2}^{n}(q-1)^i > n(q-1)$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} n(q-1) = +\infty$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$. □

**定理 (数列的控制性收敛定理)**

对任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 若存在正整数 $N$, 使得当 $n > N$ 时, $x_n \leqslant y_n$. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

**证明.**

留做作业。 □

**思考讨论 (条件可以怎么写, 尝试证明你的写法)**

对任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, ______________________, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

**定理 (极限的线性运算)**

对任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 都存在. 则对任意的实数 $\alpha, \beta$, 都成立

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n + \beta \lim_{n\to\infty} y_n.$$

**证明.**

对任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 都存在, 令 $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $B = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 因为 $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 存在 $N_1 > 0$, 使得对任意的 $n > N_1$, $|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|+1}$. 因为 $B = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, 存在 $N_2 > 0$, 使得对任意的 $n > N_2$, $|y_n - B| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|+1}$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned}|(\alpha x_n + \beta y_n) - (\alpha A + \beta B)| &\leqslant |\alpha||x_n - A| + |\beta||y_n - B| \\ &\leqslant (|\alpha| + |\beta|)\frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n + \beta \lim_{n\to\infty} y_n.$$

□

**定理**

对任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 都存在. 则成立

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

**定理**

对任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 都存在. 则成立

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n.$$

**定理**

对任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 都存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n\neq 0$, 则成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}.$$

**例**

如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = a^2$.

**例**

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = a^2$.

**例**

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则对任意正自然数 $k$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = a^k$.

**例 (课本第 36 页例 2.2.10)**

对任意实数 $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

**例 (课本第 36 页例 2.2.10)**

对任意实数 $a>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

**证明.**

对任意实数 $a>0$,

1. 如果 $a>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

□

**例 (课本第 36 页例 2.2.10)**

对任意实数 $a>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

**证明.**

对任意实数 $a>0$,

1. 如果 $a>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.
2. 如果 $a=1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$.

$\square$

**例 (课本第 36 页例 2.2.10)**

对任意实数 $a>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

**证明.**

对任意实数 $a>0$,

1. 如果 $a>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.
2. 如果 $a=1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$.
3. 如果 $0<a<1$, 则 $\dfrac{1}{a}>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1$.

□

**定理**

无穷小量乘以有界量还是是无穷小量。

**定理**

无穷小量乘以有界量还是是无穷小量。

**定理**

对任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 若对任意的 $n$, $x_n \neq 0$. 则数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是无穷大量的充分必要条件是数列 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 是无穷小量。

**定理**

对任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 如果数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是无穷大量，存在 $\delta > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|y_n| \geqslant \delta$. 则数列 $\{x_n y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是无穷大量。

**推论**

对任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 如果数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是无穷大量，数列 $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 每一项非零且数列收敛到非零的实数。则数列 $\{x_n y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 和数列 $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 都是无穷大量。

**例**

如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 则 $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = +\infty$.

**例**

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = +\infty$.

**例**

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 则对任意正自然数 $k$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = +\infty$.

**例**

求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+3}$.

**例**

求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+3}$.

**解**

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)}=1.$$

**例**

求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2+4n-1}{n^2+1}$.

**例**

求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2+4n-1}{n^2+1}$.

**解**

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+4n-1}{n^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=3.$$

**例 (课本第 41 页例 2.3.3)**

$k,l$ 都是正整数，$a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$. 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{i=0}^{k}a_{k-i}n^i}{\sum_{i=0}^{l}b_{l-i}n^i}.$$

## 思考讨论（下面计算过程中，极限的线性运算使用是否正确）

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2}$$

$$=0$$

## 思考讨论（下面计算过程中，极限的线性运算使用是否正确）

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2}$$
$$=0$$

## 解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}i}{n^2}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

## 作业

1. 对实数 $q$ 分情况讨论 $\{q^n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的极限。
2. 课本第 38 页，习题 8(1)(3), 9(2)(4)(6)(7)(8)(9)
3. 课本第 39 页，习题 10 ,11

## 思考讨论

1. 课本第 38 页，习题 8(2)(4)
2. 课本第 39 页，习题 12,13,14
3. 课本第 44 页，习题 3
4. 数列 $\{\sin n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的极限是否存在？

## 思考讨论 (极限的线性运算)

对任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 都发散到无穷大（正无穷，负无穷，或者一个存在一个发散到无穷）. 则对任意的实数 $\alpha, \beta$, 下面的式子是否还成立？为什么？请尝试写出正确的叙述，并证明你的叙述。

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n + \beta \lim_{n\to\infty} y_n.$$

## 思考讨论

在极限的乘除运算中，除了已经写出的结论外，就两数列一个收敛，一个发散到无穷大（正无穷，负无穷），或者两个都发散到无穷大（正无穷，负无穷）的情形，尝试写出一些正确的叙述，并证明你的叙述。

到目前为止，课本上例题课后题中一些重要的、将来会用到的结果：

1. 课本第 31 页，例 2.2.3，例 2.2.4
2. 课本第 32 页，例 2.2.6
3. 课本第 35 页，例 2.2.7 的方法（分母有理化），例 2.2.8
4. 课本第 36 页，例 2.2.10
5. 课本第 37 页，例 2.2.12
6. 课本第 38 页，习题 1(7), 4,5, 9(7),10,11
7. 课本第 39 页，例 2.3.1

# 待定型的极限

1. $\infty+\infty,\ \infty-\infty$:

   $\lim\limits_{n\to+\infty} n+(-n),\ \lim\limits_{n\to+\infty} n+(-n+1),\ \lim\limits_{n\to+\infty} n-(n+1),\ \lim\limits_{n\to+\infty} n-(n-1)$

2. $(+\infty)-(+\infty),\ (-\infty)-(-\infty),(+\infty)+(-\infty)$:

   $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n)-(-n+1),\ \lim\limits_{n\to+\infty}(-n)-(-n-1)$

3. $0\cdot\infty$:

   $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot n,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}\cdot n$

4. $\dfrac{0}{0}$:

   $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}},\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}$

5. $\dfrac{\infty}{\infty}$:

   $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n},\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{n}$

6. $1^\infty,\ 0^0,\ 0^\infty,\ \infty^0$

**例**

求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

**例**

求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

**解**

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=0.$$

**例**

求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

**例**

求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

**解**

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}\\ &= 1.\end{aligned}$$

**例**

求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}}$.

**例**

求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}}$.

**解**

因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

由课本第 38 页习题 11，

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=0.$$

**定理 (Stolz 定理, 课本第 42 页)**

设数列 $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是每一项非零的严格单调递增的正无穷大量，数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 使得数列 $\left\{\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 极限存在，或发散到正无穷，或发散到负无穷，则

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

**例**

证明：若 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = a$.

**例**

证明：若 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} = a.$

**例**

证明：对任意数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$，若 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} = +\infty.$

**例 (课本第 43 页例 2.3.4)**

$k$ 是正整数，求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sum_{i=1}^{n} i^k}{n^{k+1}}$.

**例 (课本第 43 页例 2.3.4)**

$k$ 是正整数，求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sum_{i=1}^{n} i^k}{n^{k+1}}$.

**解**

$k$ 是正整数，所以 $\{n^{k+1}\}_{n=1}^{+\infty}$ 是每一项非零的严格单调递增的正无穷大量，由 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} i^k}{n^{k+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-\sum_{i=0}^{k+1}C_{k+1}^{i}(-1)^i n^{k+1-i}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{C_{k+1}^{1}n^k-\sum_{i=2}^{k+1}C_{k+1}^{i}(-1)^i n^{k+1-i}}=\frac{1}{k+1}.$$

**例 (课本第 43 页例 2.3.5)**

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} i a_i}{n^2}$.

**例 (课本第 43 页例 2.3.5)**

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} i a_i}{n^2}$.

**解**

$\{n^2\}_{n=1}^{+\infty}$ 是每一项非零的严格单调递增的正无穷大量，由 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} i a_i}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n a_n}{n^2-(n-1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n a_n}{2n-1}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n-1} \cdot \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{a}{2}.$$

## 作业

1. 课本第 44 页，习题 4,5(2),7,8

## 思考讨论

1. 课本第 44 页，习题 5(1), 6
2. 对任意的 $\varepsilon>0$, 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\varepsilon}}=0.$
3. 对任意的正整数 $k>0$, 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln^k n}{n}=0.$
4. 结合习题 5 的结论及上面两个结论，有什么发现？

到目前为止，课本上例题课后题中一些重要的、将来会用到的结果：

1. 课本第 44 页，习题 5
2. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n^{\varepsilon}} = 0.$
3. 对任意的正整数 $k > 0$, 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln^k n}{n} = 0.$

# 实数基本定理

1. 实数集的任何一个有上界的非空子集都有上确界。（确界存在定理）
2. 实数集的任何一个单调有界数列都是收敛的。（单调有界原理）
3. 实数集上成立区间套定理。（区间套定理）
4. 实数集的任何一个有界数列都有收敛子列。（Weierstrass 定理）
5. 实数集的任何一个数列收敛的充分必要条件是这个数列是基本数列。（Cauchy 收敛原理）
6. 实数集的任何闭区间的任意开覆盖都有有限的子覆盖。（有限覆盖定理）

全部都是存在性定理！

**定理 (单调有界原理, 课本第 45 页)**

单调上升有上界的数列收敛。

**定理 (单调有界原理, 课本第 45 页)**

单调上升有上界的数列收敛。

**用确界存在定理证明.**

设 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 任意单调上升有上界的数列，则集合 $T=\{x_n : n\in\mathbb{N}^+\}$ 有上界，根据确界存在定理，集合 $T$ 有上确界，令 $\beta=\sup T=\sup\{x_n : n\in\mathbb{N}^+\}$.
对任意的 $\varepsilon>0$, 因为 $\beta$ 是 $T$ 的上确界，所以 $\beta-\varepsilon$ 不是 $T$ 的上确界，因此存在 $N>0$, 使得 $x_N>\beta-\varepsilon$. 又由 $\beta$ 是 $T$ 的上确界，所以对任意的 $n\in\mathbb{N}$, $x_n\leqslant\beta$. 所以当 $n>N$ 时，因为 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 单调上升，所以

$$\beta-\varepsilon<x_N\leqslant x_n\leqslant\beta.$$

于是 $|x_n-\beta|<\varepsilon$. 所以数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 $\beta$. □

## 作业

1. 单调下降有下界的数列收敛。
2. 证明：单调上升无上界的数列收敛到正无穷大。

常用来证明数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 从某项开始单调上升的办法：

1. 存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$x_{n+1}-x_n \geqslant 0.$
2. 存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$x_n>0$，且 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 1.$
3. 存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$x_n<0$，且 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant 1.$

可用来证明数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 从某项开始单调的办法：

1. 存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$x_{n+1}-x_n$ 与 $x_n-x_{n-1}$ 同号
2. 存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 1.$
3. 存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$0<\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant 1.$

还可以通过证明数列奇子列单调有界、偶子列单调有界、奇子列偶子列收敛到相同的极限来说明数列收敛。

**例 (课本第 45 页，例 2.4.1)**

设 $x_1 > 0$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1 + x_n}$. 证明数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛，并求它的极限。

**例 (课本第 45 页，例 2.4.1)**

设 $x_1 > 0$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1 + x_n}$. 证明数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛，并求它的极限。

**证明.**

因为 $x_1 > 0$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, 由 $x_n > 0$，可得 $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1 + x_n} > 0$, 有数学归纳法，对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $x_n > 0$. 于是，对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $1 < x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1 + x_n} < 2$, 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 有界。对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$,

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \left(1 + \frac{x_{n+1}}{1 + x_{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{x_n}{1 + x_n}\right) = \frac{x_{n+1} - x_n}{(1 + x_{n+1})(1 + x_n)}$$

$x_{n+2} - x_{n+1}$ 与 $x_{n+1} - x_n$ 同号，所以数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 单调。所以数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛。 □

**例 (课本第 45 页，例 2.4.1)**

设 $x_1 > 0$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1 + x_n}$. 证明数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛，并求它的极限。

**续.**

因为数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛，令 $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, 因为对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $1 < x_{n+1} < 2$, 所以 $1 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \leqslant 2$.
而

$$a = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x_n}{1 + x_n}\right) = 1 + \frac{a}{1 + a}$$

所以 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

**例 (课本第 44 页，习题 5(2))**

设 $a > 1$, $k \in \mathbb{N}^+$, 证明：$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$

**例 (课本第 44 页，习题 5(2))**

设 $a>1$, $k\in\mathbb{N}^+$, 证明： $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$.

**证明.**

因为 $a>1$, $k\in\mathbb{N}^+$, 对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$, $\frac{n^k}{a^n}>0$. 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}\cdot\frac{a^n}{n^k}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a}\cdot\frac{(n+1)^k}{n^k}=\frac{1}{a}<1$$

所以存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时， $\frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}}<1$, 数列 $\left\{\frac{n^k}{a^n}\right\}_{n=N+1}^{+\infty}$ 单调下降。

由数列 $\left\{\dfrac{n^k}{a^n}\right\}_{n=N+1}^{+\infty}$ 单调下降有下界，所以数列 $\left\{\dfrac{n^k}{a^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛。 □

**例 (课本第 44 页，习题 5(2))**

设 $a>1$, $k\in\mathbb{N}^+$, 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$.

**续.**

因为数列 $\left\{\dfrac{n^k}{a^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛，而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a}\cdot\frac{n^k}{a^n}\cdot\frac{(n+1)^k}{n^k}=\frac{1}{a}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}$$

而 $a>1$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$. □

**例**

对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 收敛，且极限不是有理数。

**例**

对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. 则 $\lim_{n\to+\infty} x_n$ 收敛，且极限不是有理数。

**证明.**

对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)!} > x_n$. 因此数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 严格单调上升。 $\square$

**续.**

对任意的 $m, n \in \mathbb{N}^+$, 若 $m > n$, 则

$$x_m - x_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots + \frac{1}{m!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{(n+1)!}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{(n+1)!}{m!}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{1}{(n+2)^i} = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1 - \left(\frac{1}{n+2}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{n+2}} \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$$

□

**续.**

因此，对任意的 $m \in \mathbb{N}^+$,

$$x_m - x_1 \leqslant \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2!},$$

于是

$$x_m \leqslant x_1 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4} = 2.75.$$

所以数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 单调上升有上界，因此数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 当 $n$ 趋于无穷时收敛。 □

**续.**

若有理数 $\xi$ 使得 $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$，则对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $0 < \xi - x_n \leqslant \dfrac{n+2}{n+1} \cdot \dfrac{1}{(n+1)!}$. 一定存在互质的正自然数 $p, q$ 使得 $\xi = \dfrac{q}{p}$. 在等式 $\xi = x_p + (\xi - x_p)$ 两边同时乘以 $p!$ 得

$$p!\xi = p!x_p + p!(\xi - x_p)$$

此时，$p!\xi = q(p-1)!$ 是整数，$p!x_p = p!\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{p}\frac{p!}{k!}$ 也是整数，所以 $p!(\xi - x_p)$ 是整数。然而

$$0 < p!(\xi - x_p) \leqslant p! \cdot \frac{p+2}{p+1} \cdot \frac{1}{(p+1)!} = \frac{p+2}{(p+1)^2} < \frac{1}{p} \leqslant 1$$

所以 $p!(\xi - x_p)$ 不是整数，这与 $p!(\xi - x_p)$ 是整数矛盾。
所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 不是有理数。 $\square$

**例**

对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. 证明：数列 $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 当 $n$ 趋于无穷时收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

**例**

对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. 证明：数列 $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 当 $n$ 趋于无穷时收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

**证明.**

对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $n > 2$ 时

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{1}{n^i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{1}{n^i} = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} \left(\frac{n-j}{n}\right)\right] = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\cdots$$

$$\leqslant x_n$$

**续.**

因数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛因此必有上界，可得数列 $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 有上界。
又对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，由有限个正数的几何平均数不超过算术平均数，得

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 \cdot \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \left(\frac{1+n(1+\frac{1}{n})}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = y_{n+1}$$

所以数列 $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 单调上升，因此数列 $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 当 $n$ 趋于无穷时收敛。 □

**续.**

对任意的 $m,n\in\mathbb{N}^+$, 若 $m>n>1$, 则

$$x_m \geqslant y_m = 1+\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{i!}\prod_{j=0}^{i-1}\left(\frac{m-j}{m}\right)\right] \geqslant 1+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{i!}\prod_{j=0}^{i-1}\left(\frac{m-j}{m}\right)\right]$$

所以

$$\lim_{m\to+\infty} x_m \geqslant \lim_{m\to+\infty} y_m \geqslant \lim_{m\to+\infty}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{i!}\prod_{j=0}^{i-1}\left(\frac{m-j}{m}\right)\right]\right) = x_n$$

所以

$$\lim_{m\to+\infty} x_m \geqslant \lim_{m\to+\infty} y_m \geqslant \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

这个共同的极限，不是一个有理数，把这个数记为 $e$, 就是自然对数的底，即

$$e=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots.$$

大约是 $2.71828182845904523536028747135266\cdots$.

## 作业

1. 课本第 58 页，习题 2(2)(6), 3(2), 4, 5
2. 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. 证明：$\lim_{n\to+\infty} x_n$ 收敛。

## 思考讨论

1. 课本第 58 页，习题 3(2)(3)
2. $p \geqslant 2$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$. 能否证明：$\lim_{n\to+\infty} x_n$ 收敛？
3. 对任意的 $a > 0$, 利用课本第 58 页习题 4 的形式，构造一个收敛到 $\sqrt{a}$ 的数列，并证明你的结论。

**定理 (闭区间套定理, 课本第 52 页)**

两个数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足

1. 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$

则存在唯一的一个实数 $\xi$ 满足：对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$. 且 $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

**定理 (闭区间套定理, 课本第 52 页)**

两个数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足

1. 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$

则存在唯一的一个实数 $\xi$ 满足：对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$. 且 $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

**用单调有界原理证明.**

因为对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$，所以

$$\text{对任意的 } n \in \mathbb{N}^+, a_1 \leqslant a_n \leqslant b_1.$$

所以数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 有上界，又因为对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $a_n \leqslant a_{n+1}$，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 单调上升。由单调有界原理，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛。 □

**续.**

令 $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, 则因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, 所以

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n + a_n) = \lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) + \lim_{n\to+\infty} a_n = \xi.$$

由对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$, 可得:

$$\text{对任意的 } m, n \in \mathbb{N}^+,\ \text{若 } m > n,\ \text{则 } a_n \leqslant a_m \leqslant b_m \leqslant b_n.$$

所以对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, 则 $a_n \leqslant \lim\limits_{m\to+\infty} a_m = \xi = \lim\limits_{m\to+\infty} b_m \leqslant b_n$.

如果实数 $\xi' \in \mathbb{R}$ 也满足: 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $a_n \leqslant \xi' \leqslant b_n$。则对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $|\xi - \xi'| \leqslant b_n - a_n$, 而 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, 因此 $|\xi - \xi'| = \lim\limits_{n\to+\infty} |\xi - \xi'| = 0$, 所以 $\xi = \xi'$. □

闭区间套的另一种叙述形式是：

**定义 (闭区间套)**

一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足条件：

1. 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$。

称这列闭区间形成一个闭区间套。

闭区间套的另一种叙述形式是：

**定义 (闭区间套)**

一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足条件：

1. 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$；
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$。

称这列闭区间形成一个闭区间套。

**例**

$\left\{\left[0, \frac{1}{n}\right]\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 是一个闭区间套。

闭区间套的另一种叙述形式是：

**定义 (闭区间套)**

一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足条件：

1. 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$。

称这列闭区间形成一个闭区间套。

**例**

$\left\{\left[0, \frac{1}{n}\right]\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 是一个闭区间套。

**例 (开区间套)**

$\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}$

**定理 (闭区间套定理, 课本第 52 页)**

一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足

1. 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$。

则存在唯一的一个实数 $\xi$ 满足：对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $\xi \in [a_n, b_n]$. 且 $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

**判断（“开区间套定理”，对比课本第 59 页，习题 12)**

一列开区间 $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足

1. 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $(a_{n+1}, b_{n+1}) \subset (a_n, b_n)$;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$。

则存在唯一的一个实数 $\xi$ 满足：对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $\xi \in (a_n, b_n)$. 且 $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

**作业**

1. 课本第 59 页，习题 12

使用区间套定理，通常是先选第一个闭区间，然后把这个区间分成小份（两份三份有限份，根据需要确定），选其中一个（满足某个需要的条件的）作为第二个闭区间；然后把第二个区间按照一样的方法分成小份，选其中一个（满足某个需要的条件的）作为第三个闭区间；依次类推，来得到一个闭区间套。通过把区间分成小份的方法（比如每次都等分），来保证区间长度趋于 0. 从而找到存在各闭区间中的那个实数来满足我们的需要。

**例 (课本第 52 页，定理 2.4.3)**

实数集 $\mathbb{R}$ 的任何长度非零的闭区间都是不可数集。

**证明要点.**

假设是可数的，从而把区间的点写成一个数列，每次把区间三等分，找不包含第 $k$ 个元素的那个作为第 $k+1$ 个闭区间。这样可以使根据闭区间套定理找到的实数不在列出来的数中。 □

**定理 (Bolzano-Weierstrass 定理, 课本第 53 页)**

有界数列必有收敛子列。

**定义 (自然数列的子列)**

一个自然数集 $\mathbb{N}$ 到自然数集 $\mathbb{N}$ 的一个严格单调上升的函数，称为自然数列的一个子列。

**定义 (自然数列的子列)**

一个自然数集 $\mathbb{N}$ 到自然数集 $\mathbb{N}$ 的一个严格单调上升的函数，称为自然数列的一个子列。

**定理**

若 $n$ 是自然数列的一个子列，则

1. 对任意 $i \in \mathbb{N}$, 任意 $j \in \mathbb{N}$, 若 $i < j$, 则 $n(i) < n(j)$.
2. 对任意 $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n(k)$.

**定义 (自然数列的子列)**

一个自然数集 $\mathbb{N}$ 到自然数集 $\mathbb{N}$ 的一个严格单调上升的函数，称为自然数列的一个子列。

**定理**

若 $n$ 是自然数列的一个子列，则

1. 对任意 $i \in \mathbb{N}$, 任意 $j \in \mathbb{N}$, 若 $i < j$, 则 $n(i) < n(j)$.
2. 对任意 $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n(k)$.

**证明.**

因为 $n(0) \in \mathbb{N}$, 所以 $0 \leqslant n(0)$. 对任意的 $k \in \mathbb{N}$, 若 $k \leqslant n(k)$，则因为 $k < k+1$, 而 $n$ 严格单调上升，所以 $k \leqslant n(k) < n(k+1)$, 所以 $k+1 \leqslant n(k+1)$.
由数学归纳法，对任意 $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n(k)$. □

**例**

对任意 $k \in \mathbb{N}$, $n(k) = k + 1$. 就是：$1, 2, 3, 4, 5, \cdots$

**例**

对任意 $k \in \mathbb{N}$, $n(k) = k + 1$. 就是：$1, 2, 3, 4, 5, \cdots$

**例**

$N \in \mathbb{N}$, $N > 0$, 对任意 $k \in \mathbb{N}$, $n(k) = k + N$. 就是：$N, N + 1, N + 2, N + 3, N + 4, \cdots$

**例**

对任意 $k \in \mathbb{N}$, $n(k) = k + 1$. 就是：$1, 2, 3, 4, 5, \cdots$

**例**

$N \in \mathbb{N}$, $N > 0$, 对任意 $k \in \mathbb{N}$, $n(k) = k + N$. 就是：$N, N + 1, N + 2, N + 3, N + 4, \cdots$

**例**

对任意 $k \in \mathbb{N}$, $n(k) = 2k$. 就是：$0, 2, 4, 6, 8, \cdots$

**例**

对任意 $k \in \mathbb{N}$, $n(k) = k + 1$. 就是：$1, 2, 3, 4, 5, \cdots$

**例**

$N \in \mathbb{N}$, $N > 0$, 对任意 $k \in \mathbb{N}$, $n(k) = k + N$. 就是：$N, N + 1, N + 2, N + 3, N + 4, \cdots$

**例**

对任意 $k \in \mathbb{N}$, $n(k) = 2k$. 就是：$0, 2, 4, 6, 8, \cdots$

**例**

对任意 $k \in \mathbb{N}$, $n(k) = 2k + 1$. 就是：$1, 3, 5, 7, 9, \cdots$

**例**

对任意 $k \in \mathbb{N}$, $n(k) = k + 1$. 就是：$1, 2, 3, 4, 5, \cdots$

**例**

$N \in \mathbb{N}$, $N > 0$, 对任意 $k \in \mathbb{N}$, $n(k) = k + N$. 就是：$N, N + 1, N + 2, N + 3, N + 4, \cdots$

**例**

对任意 $k \in \mathbb{N}$, $n(k) = 2k$. 就是：$0, 2, 4, 6, 8, \cdots$

**例**

对任意 $k \in \mathbb{N}$, $n(k) = 2k + 1$. 就是：$1, 3, 5, 7, 9, \cdots$

**例**

对任意 $k \in \mathbb{N}$, $n(k) = 2^k$. 就是：$1, 2, 4, 8, 16, \cdots$

**定义 (数列的子列)**

一个数列和自然数列的一个子列的复合，称为这个数列的子列。

数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 是从自然数集 $\mathbb{N}$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射 $x$, 数列 $\{n_k\}_{k=0}^{+\infty}$ 是自然数集 $\mathbb{N}$ 到自然数集 $\mathbb{N}$ 的一个严格单调上升的函数 $n$，他们的复合 $x \circ n$ 是从自然数集 $\mathbb{N}$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射, 一般用数列表示为 $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{+\infty}$, 亦即

$$\text{对任意的 } k \in \mathbb{N}, (x \circ n)(k) = x(n(k)) = x_{n_k}.$$

一个数列的子列就是这个数列中的无穷多个元素按照原来在数列中的顺序组成的新的数列。

**定义 (数列的子列)**

一个数列和自然数列的一个子列的复合，称为这个数列的子列。

数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 是从自然数集 $\mathbb{N}$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射 $x$, 数列 $\{n_k\}_{k=0}^{+\infty}$ 是自然数集 $\mathbb{N}$ 到自然数集 $\mathbb{N}$ 的一个严格单调上升的函数 $n$，他们的复合 $x \circ n$ 是从自然数集 $\mathbb{N}$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射，一般用数列表示为 $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{+\infty}$, 亦即

$$\text{对任意的 } k \in \mathbb{N}, (x \circ n)(k) = x(n(k)) = x_{n_k}.$$

一个数列的子列就是这个数列中的无穷多个元素按照原来在数列中的顺序组成的新的数列。

**例**

$\{x_{2^k}\}_{k=0}^{+\infty}$ 就是 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 中下标是 2 的整数次幂的项组成的数列。

**定义 (数列的子列的极限)**

数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{+\infty}$ 的极限是 $A$, 就是：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $k > N$ 时，$\left|x_{n_k} - A\right| < \varepsilon$. 用符号表示为：$\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = A$.

**定义 (数列的子列的极限)**

数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{+\infty}$ 的极限是 $A$, 就是：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $k > N$ 时，$\left|x_{n_k} - A\right| < \varepsilon$. 用符号表示为：$\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = A$.

**例**

设对任意的 $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (-1)^n$. 则 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{2k} = 1$, $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{2k+1} = -1$,

**定理**

对任意数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$，若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$，则

$$\text{对数列 } \{x_n\}_{n=0}^{+\infty} \text{ 的任何子列 } \{x_{n_k}\}_{k=0}^{+\infty}\text{，} \lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = A.$$

**定理**

对任意数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$，若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$, 则

$$\text{对数列 } \{x_n\}_{n=0}^{+\infty} \text{ 的任何子列 } \{x_{n_k}\}_{k=0}^{+\infty}\text{，} \lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = A.$$

**证明.**

对任意数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$, 对数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 的任何子列 $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{+\infty}$.

对任意的 $\varepsilon > 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$, 存在 $N > 0$, 使得当 $k > N$ 时，$|x_k - A| < \varepsilon$, 则因为 $n_k \geqslant k > N$, 所以 $\left|x_{n_k} - A\right| < \varepsilon$.

所以 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = A$. □

**推论**

数列有一个子列发散，则这个数列发散。

**推论**

数列有一个子列发散，则这个数列发散。

**推论**

数列有两个子列收敛到不同的极限，则这个数列发散。

**推论**

数列有一个子列发散，则这个数列发散。

**推论**

数列有两个子列收敛到不同的极限，则这个数列发散。

**例**

证明数列 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{4}\right\}_{n=0}^{+\infty}$ (当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时) 发散。

**推论**

数列有一个子列发散，则这个数列发散。

**推论**

数列有两个子列收敛到不同的极限，则这个数列发散。

**例**

证明数列 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{4}\right\}_{n=0}^{+\infty}$ (当 $n$ 趋于 $+\infty$ 时) 发散。

**证明.**

因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\dfrac{4n\pi}{4}=0$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\sin\dfrac{(8n+2)\pi}{4}=1\neq\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\dfrac{4n\pi}{4}$, 所以数列 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{4}\right\}_{n=0}^{+\infty}$ 发散。 □

**定理 (Bolzano-Weierstrass 定理, 课本第 53 页)**

有界数列必有收敛子列。

**定理 (Bolzano-Weierstrass 定理, 课本第 53 页)**

有界数列必有收敛子列。

**用闭区间套定理证明 Bolzano-Weierstrass 定理要点.**

先用二分法构造闭区间套，找到可以作为子列的极限的点，然后再去构造一个收敛到这个点的子列。 □

**定理 (Bolzano-Weierstrass 定理的等价叙述：聚点原理)**

实数集的任一有界无穷集都有聚点。

实数 $a$ 实数集的子集 $A$ 聚点，指的是：对任意的 $\varepsilon > 0$, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (A - \{a\}) \neq \varnothing$.
或者等价的说：$A$ 中有一个任意两项互不相同的点列极限是 $a$.
Bolzano-Weierstrass 定理又称为致密性定理。
使用 Bolzano-Weierstrass 定理，一般是先构造一个有界点列（或先说明某数列是有界的），然后利用该定理找到一个子列的极限点，然后证明这个极限点是就想要找的。

**定理 (课本第 54 页, 定理 2.4.6)**

无界数列必有趋于无穷的子列。
无上界的数列必有趋于正无穷的子列。
无下界的数列必有趋于负无穷的子列。

## 作业

1. 课本第 59 页，习题 8

## 思考讨论

1. 课本第 58 页，习题 9,10

**定义 (数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 是基本点列)**

如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $m > N$, 且 $n > N$ 时, $|x_m - x_n| < \varepsilon$, 就称数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 是基本点列。

基本点列又称为柯西 (Cauchy) 点列。

**定义 (数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 是基本点列)**

如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $m > N, n > N$, 且 $m > n$ 时, $|x_m - x_n| < \varepsilon$, 就称数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 是基本点列。

**例 (课本第 55 页，例 2.4.12)**

数列 $\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 是基本点列。

**例 (课本第 55 页，例 2.4.12)**

数列 $\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 是基本点列。

**证明.**

对任意的 $\varepsilon>0$，令 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则 $N>\frac{1}{\varepsilon}$，于是，当 $m>N, n>N$，且 $m>n$ 时，

$$
\begin{aligned}
0<x_m-x_n &= \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(m-1)m}\\
&\leqslant \sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)\\
&=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

□

**定义（数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 是基本点列）**

如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $m > N$, 且 $n > N$ 时, $|x_m - x_n| < \varepsilon$, 就称数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 是基本点列。

**定义 (数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 是基本点列)**

如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $m > N$, 且 $n > N$ 时, $|x_m - x_n| < \varepsilon$, 就称数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 是基本点列。

**定义 (数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 不是基本点列)**

如果存在 $\varepsilon > 0$, 对任意的 $N > 0$, 使得存在 $m > N$, 存在 $n > N$, 使得 $|x_m - x_n| \geqslant \varepsilon$, 就称数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 不是基本点列。

**例 (课本第 55 页，例 2.4.13)**

数列 $\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 不是基本点列。

**例 (课本第 55 页，例 2.4.13)**

数列 $\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 不是基本点列。

**证明.**

对任意的 $N>0$, 任取 $n>N$，则 $2n>N$，于是

$$x_{2n}-x_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}>\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

所以数列 $\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 不是基本点列。 □

**定理 (Cauchy 收敛原理)**

实数集的任何数列收敛的充分必要条件是这个数列是基本数列。

Cauchy 收敛原理又称为实数的完备性定理。

**定理 (Cauchy 收敛原理)**

实数集的任何数列收敛的充分必要条件是这个数列是基本数列。

Cauchy 收敛原理又称为实数的完备性定理。

**用 Bolzano-Weierstrass 定理证明 Cauchy 收敛原理要点.**

收敛数列是基本数列由收敛的定义借助极限点用三角不等式就可得到。
先由基本数列的定义证基本数列是有界的，然后由 Bolzano-Weierstrass 定理找一个子列的极限点，再去证这个极限点就是基本数列的极限。 □

**定理 (压缩收敛原理，课本第 56 页，例 2.4.14)**

数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足：存在 $0 < r < 1$，使得对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，

$$\left|x_{n+2} - x_{n+1}\right| \leqslant r\left|x_{n+1} - x_n\right|.$$

证明：数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛。

**用 Cauchy 收敛原理证明闭区间套定理要点.**

利用区间左端点（或者右端点）序列被区间端点序列控制的特点，证明端点序列是 Cauchy 列，从而是收敛的，其极限就是区间套定理所要找的那个点。剩下的部分和用确界存在定理证明一样。 □

**用 Cauchy 收敛原理证明闭区间套定理要点.**

利用区间左端点（或者右端点）序列被区间端点序列控制的特点，证明端点序列是 Cauchy 列，从而是收敛的，其极限就是区间套定理所要找的那个点。剩下的部分和用确界存在定理证明一样。 □

**用闭区间套定理证确界存在定理要点.**

利用二分法构造区间套，让区间套中每个区间的左端点在集合中，右端点总是集合的上界，然后证明由区间套确定的那个元素就是集合的上确界。 □

## 作业

1. 课本第 58 页，习题 13(1)

## 思考讨论

1. 课本第 58 页，习题 14
2. 满足以下条件的数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是否一定是基本数列。若不是，请给出反例。
   1. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，有 $|x_n - x_N| < \varepsilon$;
   2. 对任意的 $n, p \in \mathbb{N}$，成立 $\left|x_{n+p} - x_n\right| \leqslant \dfrac{p}{n}$;
   3. 对任意的 $n, p \in \mathbb{N}$，成立 $\left|x_{n+p} - x_n\right| \leqslant \dfrac{p}{n^2}$;
   4. 对任意的 $p \in \mathbb{N}$，成立 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - x_{n+p}) = 0$.

**定义 (集合 $A$ 开区间覆盖)**

如果一组开区间组成的集合 $\mathcal{U}$ 满足 $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$，称 $\mathcal{U}$ 是集合 $A$ 的一个开区间覆盖。

**定义 (集合 $A$ 开区间覆盖)**

如果一组开区间组成的集合 $\mathcal{U}$ 满足 $A \subset \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$, 称 $\mathcal{U}$ 是集合 $A$ 的一个开区间覆盖。

**例**

开区间的集合

$$\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right): n\in\mathbb{N}^+\right\}\cup\left\{\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right): n\in\mathbb{N}^+\right\}$$

是闭区间 $[0,1]$ 的一个开区间覆盖。

**例**

对任意的 $x \in [a,b]$, 则 $x \in (x-1, x+1)$, 因此

$$[a,b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]} (x-1, x+1).$$

所以，开区间的集合 $\{(x-1, x+1) : x \in [a,b]\}$ 是闭区间 $[a,b]$ 的一个开区间覆盖。

**例**

对任意的 $x\in[a,b]$, 则 $x\in(x-1,x+1)$, 因此

$$[a,b]\subset\bigcup_{x\in[a,b]}(x-1,x+1).$$

所以，开区间的集合 $\{(x-1,x+1):x\in[a,b]\}$ 是闭区间 $[a,b]$ 的一个开区间覆盖。

**例**

对任意的 $x\in[a,b]$, 任取 $\delta_x>0$, 则 $x\in(x-\delta_x,x+\delta_x)$, 因此

$$[a,b]\subset\bigcup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x).$$

所以，开区间的集合 $\{(x-\delta_x,x+\delta_x):x\in[a,b]\}$ 是闭区间 $[a,b]$ 的一个开区间覆盖。

**例**

开区间的集合

$$\{(x - R(x), x + R(x)) : x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]\}$$

是闭区间 $[a, b]$ 的一个开区间覆盖。

**例**

两个数列 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$ 是一个闭区间套，如果 $\bigcap_{n=1}^{+\infty}[a_n,b_n]=\varnothing$, 则

$$
\begin{aligned}
[a_1,b_1]\subset(a_1-1,b_1+1) &= (a_1-1,b_1+1)-\bigcap_{n=1}^{+\infty}[a_n,b_n]\\
&=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\Big((a_1-1,b_1+1)-[a_n,b_n]\Big)\\
&=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\Big((a_1-1,a_n)\cup(b_n,b_1+1)\Big)
\end{aligned}
$$

因此开区间的集合 $\mathcal{U}=\{(a_1-1,a_n):n\in\mathbb{N}^+\}\cup\{(b_n,b_1+1):n\in\mathbb{N}^+\}$ 是闭区间 $[a_1,b_1]$ 的一个开区间覆盖。

**定理 (有限覆盖定理)**

对闭区间 $[a,b]$ 的任何一个开区间覆盖 $\mathcal{U}$, 都存在 $\mathcal{U}$ 的有限子集 $\mathcal{U}'$ 也是闭区间 $[a,b]$ 的覆盖。

**定理 (有限覆盖定理)**

对闭区间 $[a,b]$ 的任何一个开区间覆盖 $\mathcal{U}$, 都存在 $\mathcal{U}$ 的有限子集 $\mathcal{U}'$ 也是闭区间 $[a,b]$ 的覆盖。

**用闭区间套定理证明有限覆盖定理要点.**

闭区间 $[a,b]$ 的任何一个开区间覆盖 $\mathcal{U}$, 都是闭区间 $[a,b]$ 的任何子集的开覆盖，从而是半个区间的覆盖。如果 $\mathcal{U}$ 的有限子集都不能覆盖 $[a,b]$, 则把区间 $[a,b]$ 分成两半以后，两个半区间中至少有一个不能被 $\mathcal{U}$ 的有限子集覆盖。如果每次都取半个区间，就可以构造一个区间套，区间套中每一个都不能被 $\mathcal{U}$ 的有限子集覆盖。根据区间套定理，区间套的端点有一个共同的极限 $\xi$, $\xi$ 必然在 $\mathcal{U}$ 的某一个元素（一个开区间）中，从而会使得区间套中某项开始以后都在这个开区间中，这就与不能被有限个覆盖矛盾了（其中的一个就可以覆盖了）。 □

**用有限覆盖定理证明闭区间套定理要点.**

利用闭区间的补集由开区间的并表示，如果闭区间套定理不对，可以得到一个开区间覆盖，利用有限覆盖定理取一个有限的开区间覆盖，利用只有有限个开区间再结合闭区间套的性质得出矛盾，从而推出闭区间套里一定要做共同点，这些点就是区间套端点的极限。 □

**定理 (有限覆盖定理)**

对闭区间 $[a,b]$ 的任何一个开区间覆盖 $\mathcal{U}$, 都存在 $\mathcal{U}$ 的有限子集 $\mathcal{U}'$ 也是闭区间 $[a,b]$ 的覆盖。

**例**

对任意的 $x\in[a,b]$, 任取 $\delta_x>0$, 则开区间的集合 $\{(x-\delta_x,x+\delta_x):x\in[a,b]\}$ 是闭区间 $[a,b]$ 的一个开区间覆盖, 由有限覆盖定理，集合 $\{(x-\delta_x,x+\delta_x):x\in[a,b]\}$ 有一个有限子集也是闭区间 $[a,b]$ 的一个开区间覆盖，也就是说，存在 $[a,b]$ 的有限子集 $I$, 使得集合 $\{(x-\delta_x,x+\delta_x):x\in I\}$ 是闭区间 $[a,b]$ 的一个开区间覆盖:

$$[a,b]\subset\bigcup_{x\in I}(x-\delta_x,x+\delta_x).$$

使用有限覆盖定理，可以把一些在点附近成立的性质，变成在有限的几个开区间上成立，从而就有可能把这个性质扩展到整个区间上。

**定理 (实数的 10 进制表示)**

1. $p_0 \in \mathbb{Z}$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $p_n \in \mathbb{N}$ 且 $0 \leqslant p_n \leqslant 9$, 则数列 $\left\{ \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{p_k}{10^k} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛。
2. 对任意的实数 $x \geqslant 0$, 都存在唯一的一个数列 $\{p_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 满足
   1. $p_0 \in \mathbb{N}$;
   2. 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $p_n \in \mathbb{N}$ 且 $0 \leqslant p_n \leqslant 9$;
   3. 对任意的 N>0, 存在整数 $n > N$ 使得 $p_n \neq 9$;
   4. $x = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{p_k}{10^k}$。

## 定理（实数的 8 进制表示）

1. $p_0 \in \mathbb{Z}$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $p_n \in \mathbb{N}$ 且 $0 \leqslant p_n \leqslant 7$, 则数列 $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{p_k}{8^k}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛。
2. 对任意的实数 $x \geqslant 0$, 都存在唯一的一个数列 $\{p_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 满足
   1. $p_0 \in \mathbb{N}$;
   2. 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $p_n \in \mathbb{N}$ 且 $0 \leqslant p_n \leqslant 7$;
   3. 对任意的 N>0, 存在整数 $n > N$ 使得 $p_n \neq 7$;
   4. $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{p_k}{8^k}$。