第 12 章　（之 4）（总第 68 次）

教学内容： §12．3 三重积分的概念与性质；§12．4．1 直角坐标系下三重积分的计算

1．　选择题与填空题:

*(1)．设

$$I_1=\iiint\limits_{\Omega} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}v,\ I_2=\iiint\limits_{\Omega}(1+x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v,\ I_3=\iiint\limits_{\Omega}(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}v,$$

Ω是由 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 所确定的区域，

则用不等号表达I_1,I_2,I_3三者大小关系是　　　　　　　　　　　（　　）

(A)．$I_1>I_2>I_3$；　(B)．$I_1>I_3>I_2$；　(C)．$I_2>I_1>I_3$；　(D)．$I_3>I_2>I_1$。

答：（B）

***(2)设Ω_1：$x^2+y^2+z^2\le R^2$，$z\ge 0$；

Ω_2：$x^2+y^2+z^2\le R^2$，$x\ge 0$，$y\ge 0$，$z\ge 0$．则　　　　　　（　　）

(A)．$\iiint\limits_{\Omega_1} z^{99}\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2} x^{99}\mathrm{d}V$;　　　　(B)．$\iiint\limits_{\Omega_1} y^{99}\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2} z^{99}\mathrm{d}V$;

(C)．$\iiint\limits_{\Omega_1} x^{99}\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2} y^{99}\mathrm{d}V$;　　　　(D)．$\iiint\limits_{\Omega_1} (xyz)^{99}\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2} (xyz)^{99}\mathrm{d}V$.

答：(A)

**(3)．$I=\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ -1\leqslant z\leqslant 1}}[x^3e^z\ln(1+x^2)+ye^{y^2}+2]\mathrm{d}v$ =____________________.

答：$I=4\pi$.

2．***（1）．试将三重积分$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$表达成先对 x，再对 y，最后对 z 积分的三次积分, 其中Ω 由上半圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面$z=1$围成.

解答:
$$\int_0^1\mathrm{d}z\int_{-z}^{z}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\mathrm{d}x$$

***（2）．把三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$化为三次积分,

其中Ω 由曲面$z=2x^2+y^2-1$和$z=1-y^2$围成.

解：$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{2x^2+y^2-1}^{1-y^2} f(x,y,z)dz\ .$$

**3．(1)．计算$\iiint\limits_{\Omega} x\sin(y+z)dv$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le\sqrt{y},\ 0\le z\le\dfrac{\pi}{2}-y\right\}$.

解：Ω 由柱面 $y=x^2$、平面 $y+z=\dfrac{\pi}{2}$ 及坐标面 xoy、yoz 所围而成.

$$\iiint\limits_{\Omega} x\sin(y+z)dv=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_0^{\frac{\pi}{2}-y} x\sin(y+z)dz=\iint\limits_{D_{xy}} x\cos ydxdy$$

$$=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} xdx\int_{x^2}^{\frac{\pi}{2}}\cos ydy=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x(1-\sin x^2)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cos x^2\right)_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

这里 $D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|\, 0\le x\le\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\quad x^2\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$。

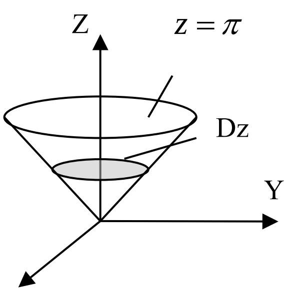
(2). 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z)dv$，其中 Ω 为第一象限中由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与圆柱面 $x^2+y^2=1$ 围成的部分.

解： $$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_0^{x^2+y^2}(x^2+y^2+z)dz=\frac{3}{2}\iint\limits_{D}(x^2+y^2)^2dxdy$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\rho^5d\rho=\frac{\pi}{8}$$

**4．用先重后单方法计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\sin z\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=\pi$ 围成.

解：$$\iiint\limits_{\Omega}\sin zdv=\int_0^{\pi} dz\iint\limits_{D_z}\sin zdxdy$$



$$=\int_0^{\pi}\pi\ z^2\sin zdz=\pi^3-4\pi,$$

这里 $D_z=\{(x,y)|\,0\le x^2+y^2\le z^2\}$.

***5．试利用积分区域 Ω 表达式对变量名称轮换的不变性，及被积函数的对称关系，并根据积分与积分变量名称无关的性质计算三重积分

$$\iiint\limits_{\Omega}[(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z]dv,$$

其中 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le R^2,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0\}$.

解：由积分值与积分变量无关，并且积分区域对 x、y、z 具有轮换不变性，从而

$$\iiint\limits_{\Omega} xdv=\iiint\limits_{\Omega} ydv=\iiint\limits_{\Omega} zdv,$$

故 $\iiint\limits_{\Omega}[(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z]dv$

$$=(b-c)\iiint\limits_{\Omega}xdv+(c-a)\iiint\limits_{\Omega}ydv+(a-b)\iiint\limits_{\Omega}zdv$$

$$=(b-c)\iiint\limits_{\Omega}xdv+(c-a)\iiint\limits_{\Omega}xdv+(a-b)\iiint\limits_{\Omega}xdv=0.$$

***6．设 $f(z)$ 在 $[-1,1]$ 上有连续的导函数，试证：

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f'(z)\mathrm{d}v=2\pi\int_{-1}^{1} zf(z)\mathrm{d}z$$

解：

$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\iint\limits_{D(z)} f'(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}\pi(1-z^2)f'(z)\mathrm{d}z$$

$$=\pi f(z)(1-z^2)\Big|_{-1}^{1}+2\pi\int_{-1}^{1}zf(z)\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1}zf(z)\mathrm{d}z$$

第 12 章 （之 5）（总第 69 次）

教学内容： §12.4.2 ~ §12.4.3 用柱面坐标，球面坐标计算三重积分

1．**（1）．设 Ω 是由 $0\le z\le\sqrt{3(x^2+y^2)}$，$x^2+y^2-y\le 0$ 所确定的闭区域，

试将 $\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$ 化成柱面坐标下的三次积分.

解： $I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}r\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{3}r}f(r^2+z^2)\mathrm{d}z$

***（2）．设 Ω 是由 $x^2+y^2\le 2z$，$1\le z\le 2$ 所确定的闭区域，

试将 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$ 化成柱面坐标下的三次积分.

解： $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\mathrm{d}r\int_1^2 f(r^2+z^2)\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{2}}^{2}r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^{2} f(r^2+z^2)\mathrm{d}z$

或 $I=\int_1^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}f(r^2+z^2)r\,\mathrm{d}r$。

2．**（1）．设 Ω 是由 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}$，$0\le x\le y\le\sqrt{3}x$ 所确定的立体，

试将 $\iiint_{\Omega} f(y,z)\mathrm{d}v$ 化成球面坐标下的三次积分.

解：　　$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$

**（2）. Ω 是由 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$（$R>0$）所确定的立体，

试将 $\iiint\limits_{\Omega} f(x\ y)\mathrm{d}v$ 化成球面坐标下的三次积分.

解：　　$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} f(r^2\sin\theta\cdot\cos\theta\sin^2\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$

3．**（1）. 将三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 化成柱面坐标和球面坐标下的三次积分，

其中 Ω 由上半圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 围成.

解：柱面坐标：　　$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 d\rho\int_\rho^1 f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho dz$，

球面坐标：　　$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta dr$.

**（2）. 设 Ω 是由 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 及 $z=0$ 所围的闭区域，

试将 $\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2)\mathrm{d}v$ 分别化成球面坐标和柱面坐标下的三次积分.

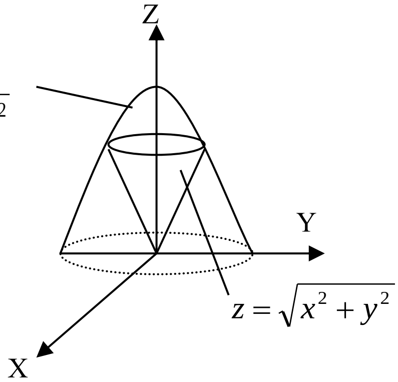
解：

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(r^2\sin^2\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{1-r^2}} f(r^2)\mathrm{d}z\end{aligned}$$

4．**（1）. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dv$，其中 Ω 是单位球 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 内

满足 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 的部分.

解：用球面坐标



$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{\Omega} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dv\\&=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 e^r r^2\sin\theta dr\\&=\pi(2-\sqrt{2})(e-2)\end{aligned}$$

***（2）设 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2ax$，$x^2+y^2=2az$ （$a>0$）以及 $z=-1$ 所围的有界闭区域，试计算 $\iiint\limits_{\Omega}(xy+1)\mathrm{d}v$

解：由对称性 $\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}v=0$

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\mathrm{d}r\int_{-1}^{\frac{r^2}{2a}}\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\left(\frac{r^2}{2a}+1\right)\mathrm{d}r$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos^4\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi a^2}{4}(3a+4)$$

***（3）. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z^2dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围在第一卦限内的部分.

解：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^4\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{5}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$$

亦可用柱面坐标解出如下：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{2-r^2}}z^2\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi}{6}\int_0^1[r(2-z^2)^{3/2}-r^4]\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{30}\left[-(2-r^2)^{5/2}\Big|_0^1-r^5\Big|_0^1\right]=\frac{\pi}{30}(4\sqrt{2}-2)=\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$$

***(4). 设 Ω 是半径为 R 的球体：$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，试求积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}v$.

解：由对称性 $\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}zx\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}yz\mathrm{d}v=0$，故

$$I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^4\sin\varphi\mathrm{d}r$$
$$=\frac{4}{5}\pi R^5$$

***5．设 $F(t)=\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant t^2\\0\leqslant z\leqslant t}}z^2f(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，求 $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{F(t)}{t^5}$.

解：

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{t}r\mathrm{d}r\int_0^{t}z^2f(r^2)\mathrm{d}z$$
$$=\frac{2\pi}{3}t^3\int_0^{t}f(r^2)r\mathrm{d}r$$
$$\lim_{t\to+0}\frac{F(t)}{t^5}=\frac{\pi}{3}f(0)$$

第 12 章 （之 6） （总第 70 次）

教学内容：§12.4 第一型曲线积分的计算

**1. 选择题：

（1）．设 L 为 $y=x^2$ 上从点 $O=(0,0)$ 到 $A=(1,1)$ 的一段弧．则 $I=\int_L\sqrt{y}\,\mathrm{d}s=$ （ ）．

（A）$\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$ （B）$\int_0^1\sqrt{y}\sqrt{1+y}\,\mathrm{d}y$

（C）$\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$ （D）$\int_0^1\sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{y}}\,\mathrm{d}y$

答 ： (C)

（2）．设曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x=y\end{cases}$，则 $\int_\Gamma\sqrt{2y^2+z^2}ds=$ （ ）.

（A）$\frac{1}{2}\pi R^2$ ； （B）$2\pi R^2$； （C）$2\pi R^3$； （D）$\sqrt{2}\pi R^3$.

答： （B）

** 2．填空题：

（1）. 若已知椭圆 $L:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的周长为 l，则 $\oint_L(b^2x^2+a^2y^2)\mathrm{d}s=$__________.

答：a^2b^2l . $\oint_L(b^2x^2+a^2y^2)\mathrm{d}s=a^2b^2\oint_L(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2})\mathrm{d}s=a^2b^2\oint_L\mathrm{d}s$.

（2） 设 L 是 xoy 面上圆周 $x^2+y^2=1$ 的顺时针方向，

则 $I_1 = \oint_L x^3 \, \mathrm{d}s$ 与 $I_2 = \oint_L y^5 \, \mathrm{d}s$ 的大小关系是________________.

答：$\underline{I_1 = I_2}$（都等于 0）.

3．计算下列曲线积分：

**（1）．$\int_L x \, \mathrm{d}s$，其中 L 是星形线 $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$

经点 A(2，0)，C(0，2)，B$(-2,0)$ 的 ACB 弧段.

解 $\int_L x \, \mathrm{d}s$

$$= \int_0^{\pi} 2\cos^3 t \sqrt{(6\sin t\cos t)^2} \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^3 t . \ 6\sin t\cos t \, \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^3 t(-6\sin t\cos t) \, \mathrm{d}t$$

$$= 0.$$

**(2). $\int_L \sqrt{x+y}\, ds$，其中 L 为直线段 $y = \pi x, (0 \le x \le 1)$.

解：

$$\int_L \sqrt{x+y}\, ds$$

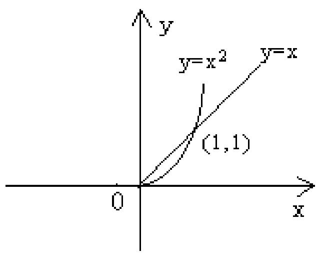
$$= \int_0^1 \sqrt{x+\pi x} \cdot \sqrt{1+\pi^2}\, dx = \sqrt{1+\pi}\sqrt{1+\pi^2}\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$$

$$= \sqrt{1+\pi}\sqrt{1+\pi^2}\, \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{1+\pi}\sqrt{1+\pi^2}}{3}.$$

**(3). $\int_L x\, ds$，其中 L 为区域 $D = \{(x, y) | x^2 \le y \le x\}$ 的整个边界曲线.

解：$\int_L x\, ds = \int_0^1 x \cdot \sqrt{1+(2x)^2}\, dx + \int_0^1 x \cdot \sqrt{2}\, dx$

$$= \frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



***(4). $\int_L |y|\, ds$，其中 $L: (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$，$a > 0$.

解: 利用极坐标计算，$L: \rho^2 = a^2\cos 2\theta$. 由对称性

$\int_L |y|\, ds = 4\int_{L_1} |y|\, ds$，其中 L_1 是 L 在第一象限的部分.

$$ds=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\theta=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\theta,$$

$$\int_L |\,y\,|\,ds=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\theta=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta=4a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

**4．计算曲线积分：$\int\limits_C\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}s$，

其中 C 为曲线 $x=e^t\cos t$， $y=e^t\sin t$， $z=e^t$ （$0\le t\le 2\pi$）.

解：$x'(t)=e^t(\cos t-\sin t)$， $y'(t)=e^t(\cos t+\sin t)$， $z'(t)=e^t$，

$$ds=\sqrt{e^{2t}(1+1+1)}dt=\sqrt{3}e^t dt,$$

$$\int_C\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{2t}+e^{2t}}\sqrt{3}e^t dt=\sqrt{6}\int_0^{2\pi}e^{2t}dt=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(e^{4\pi}-1\right).$$

**5．设圆柱面螺旋线 $\boldsymbol{r}\,(t)=\cos t\,\boldsymbol{i}+\sin t\,\boldsymbol{j}+t\,\boldsymbol{k}$ 上，任一点 $P=(x,y,z)$ 处的线密度为 $\mu(x,y,z)=z$，试表达并求出在点 $A=(1,0,0)$ 与点 $B=(0,1,\frac{\pi}{2})$ 之间这段曲线的弧长和质量.

解：弧长 $s=\int_L ds$，质量 $m=\int_L zds$.

$$\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=t\end{cases}\quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\qquad ds=\sqrt{1+1}dt=\sqrt{2}dt.$$

$$\therefore\quad s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi,\quad m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cdot tdt=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2.$$