第五章 连续系统的复频域分析

5.1 拉普拉斯变换

5.2 拉普拉斯变换的性质

5.3 拉普拉斯变换逆变换

5.4 复频域分析

第五章 连续系统的复频域分析

频域分析以虚指数信号$e^{j\omega t}$为基本信号，任意信号可分解为众多不同频率的虚指数分量之和。使响应的求解得到简化，物理意义清楚，但也有不足：

（1）有些重要信号不存在傅里叶变换，如$e^{2t}\varepsilon(t)$;

（2）对于给定初始状态的系统难以利用频域分析。

在这一章将通过把频域中的傅里叶变换推广到复频域来解决这些问题。

本章引入复频率 $s=\sigma+j\omega$,以复指数函数e^{st}为基本信号，任意信号可分解为不同复频率的复指数分量之和。这里用于系统分析的独立变量是复频率 s，故称为s域分析。所采用的数学工具为拉普拉斯变换。

5.1 拉普拉斯变换

一、从傅里叶到拉普拉斯变换

有些函数不满足绝对可积条件，求解傅里叶变换困难。为此，可用一衰减因子$e^{-\sigma t}$(σ为实常数）乘信号f(t)，适当选取σ的值，使乘积信号f(t) $e^{-\sigma t}$当$t\to\infty$时信号幅度趋近于0，从而使f(t) $e^{-\sigma t}$的傅里叶变换存在

$$F_b(\sigma+j\omega)=\mathscr{F}[f(t)\,e^{-\sigma t}]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\mathrm{d}t$$

相应的傅里叶逆变换 为

$$f(t)\,e^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_b(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_b(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}\mathrm{d}\omega$$ 令$s=\sigma+j\omega$，$d\omega=ds/j$，有

5.1 拉普拉斯变换

$$F_b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

双边拉普拉斯变换对

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}} \int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F_b(s)\,\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s$$

$F_b(s)$称为f(t)的双边拉氏变换（或象函数）

f(t)称为$F_b(s)$ 的双边拉氏逆变换（或原函数）

二、收敛域

只有选择适当的σ值才能使积分收敛，信号**f(t)**的双边拉普拉斯变换存在。

使 **f(t)**拉氏变换存在σ的取值范围称为$\mathbf{F_b(s)}$的收敛域。

下面举例说明$\mathbf{F_b(s)}$收敛域的问题。

5.1 拉普拉斯变换

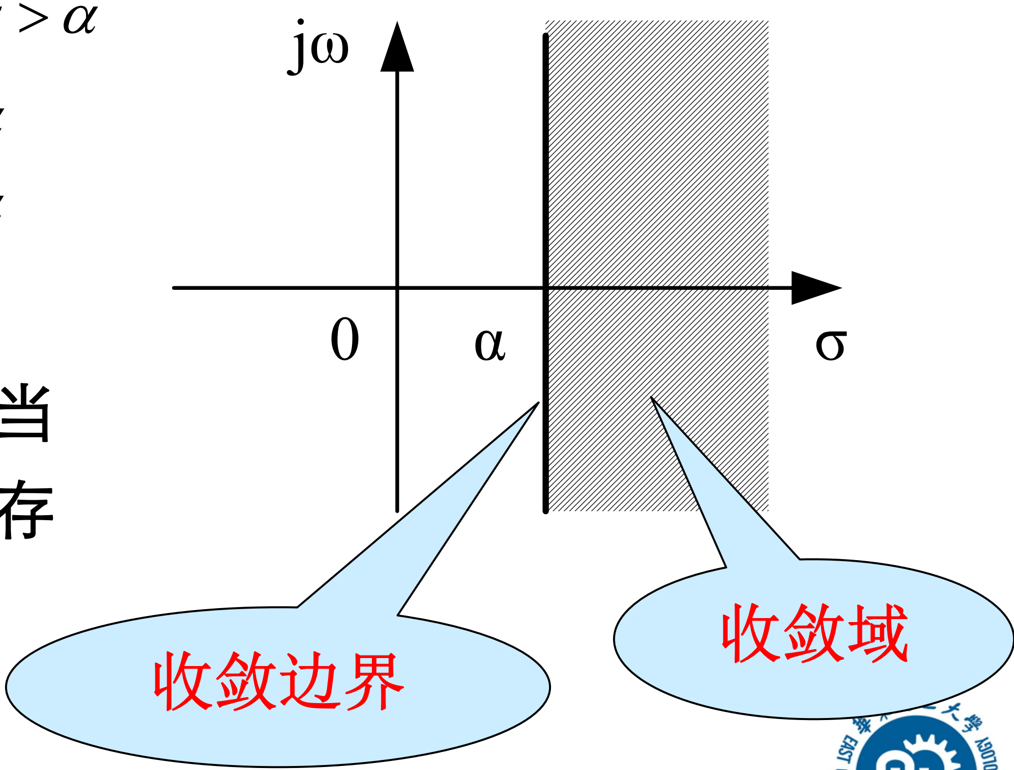
例1 因果信号$f_1(t)= e^{\alpha t}\varepsilon(t)$，求其拉普拉斯变换。

解

$$F_{1b}(s)=\int_0^{\infty} e^{\alpha t}\,e^{-st}\,dt=\left.\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{(s-\alpha)}[1-\lim_{t\to\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t}\,e^{-j\omega t}]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{s-\alpha}, & \mathrm{Re}[s]=\sigma>\alpha\\ \text{不定}, & \sigma=\alpha\\ \text{无界}, & \sigma<\alpha\end{cases}$$

可见，对于因果信号，仅当$\mathrm{Re}[s]=\sigma>\alpha$时，其拉氏变换存在。收敛域如图所示。



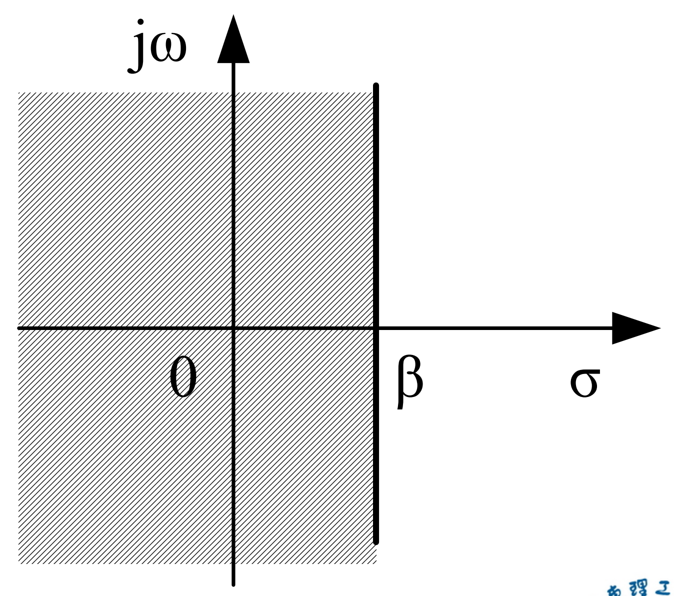
例2 反因果信号$f_2(t)= e^{\beta t}\varepsilon(-t)$， 求其拉普拉斯变换。

解

$$F_{2b}(s)=\int_{-\infty}^{0}e^{\beta t}e^{-st}dt=\frac{e^{-(s-\beta)t}}{-(s-\beta)}\bigg|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{-(s-\beta)}[1-\lim_{t\to-\infty}e^{-(\sigma-\beta)t}e^{-j\omega t}]$$

$$=\begin{cases}\text{无界}, & \mathrm{Re}[s]=\sigma.>\beta\\ \text{不定}, & \sigma=\beta\\ \dfrac{1}{-(s-\beta)}, & \sigma<\beta\end{cases}$$

可 见， 对 于 反 因 果 信 号， 仅 当 Re[s]=σ<β时，其拉氏变换存在，收敛域如图所示。

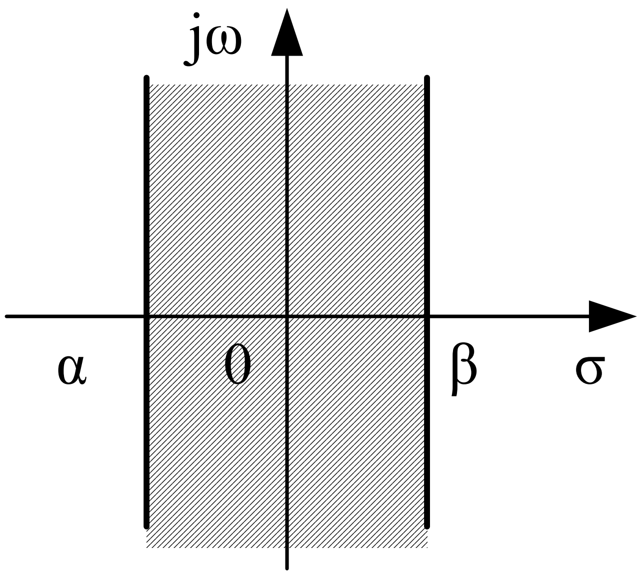


例3 双边信号求其拉普拉斯变换

$$f_3(t) = f_1(t) + f_2(t) = \begin{cases} e^{\beta t}, & t < 0 \\ e^{\alpha t}, & t > 0 \end{cases}$$

解　其双边拉普拉斯变换 $F_b(s)=F_{b1}(s)+F_{b2}(s)$

仅当β>α时，其收敛域为α<**Re[s]**<β的一个带状区域，如图所示。



例4 求下列信号的双边拉氏变换

$f_1(t)= e^{-3t}\varepsilon(t) + e^{-2t}\varepsilon(t)$

$f_2(t)= - e^{-3t}\varepsilon(-t) - e^{-2t}\varepsilon(-t)$

$f_3(t)= e^{-3t}\varepsilon(t) - e^{-2t}\varepsilon(-t)$

解

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s)=\frac{1}{s+3}+\frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}[s]=\sigma>-2$$

$$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s)=\frac{1}{s+3}+\frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}[s]=\sigma<-3$$

$$f_3(t) \longleftrightarrow F_3(s)=\frac{1}{s+3}+\frac{1}{s+2} \qquad -3<\sigma<-2$$

可见，象函数相同，但收敛域不同。双边拉氏变换必须标出收敛域。

5.1　拉普拉斯变换

通常遇到的信号都有初始时刻，不妨设其初始时刻为坐标原点。这样，**t<0**时，**f(t)=0**，从而拉氏变换式写为

$$F(s)=\int_{0-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

称为单边拉氏变换，简称拉氏变换，其收敛域一定是**Re[s]>α**，可以省略，本课程主要讨论单边拉氏变换。

三、单边拉氏变换

$$F(s)\overset{\text{def}}{=}\int_{0-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$f(t)\overset{\text{def}}{=}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s\right]\varepsilon(t)$$

简记为F(s)=£[f(t)]

f(t)=£ $^{-1}$[F(s)]

或

$$f(t)\longleftrightarrow F(s)$$

四、常见函数的拉普拉斯变换

1、$\delta(t) \longleftrightarrow 1$，$\sigma > -\infty$

2、$\varepsilon(t)$或$1 \longleftrightarrow 1/s$，$\sigma > 0$

3、指数函数 $e^{-s_0 t} \longleftrightarrow \dfrac{1}{s+s_0}$　　$\sigma > -\mathrm{Re}[s_0]$

$t \longleftrightarrow 1/s^2$

$\cos\omega_0 t = (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})/2 \longleftrightarrow \dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$

$\sin\omega_0 t = (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})/2j \longleftrightarrow \dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

5. 2 拉普拉斯变换性质

一、线性性质

若 $\mathbf{f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s) \quad Re[s]>\sigma_1 , f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s) \quad Re[s]>\sigma_2}$

则 $\mathbf{a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t) \longleftrightarrow a_1 F_1(s)+a_2 F_2(s) \quad Re[s]>max(\sigma_1,\sigma_2)}$

例 $f(t) = \delta(t) + \varepsilon(t) \longleftrightarrow 1 + 1/s$， $\sigma > 0$

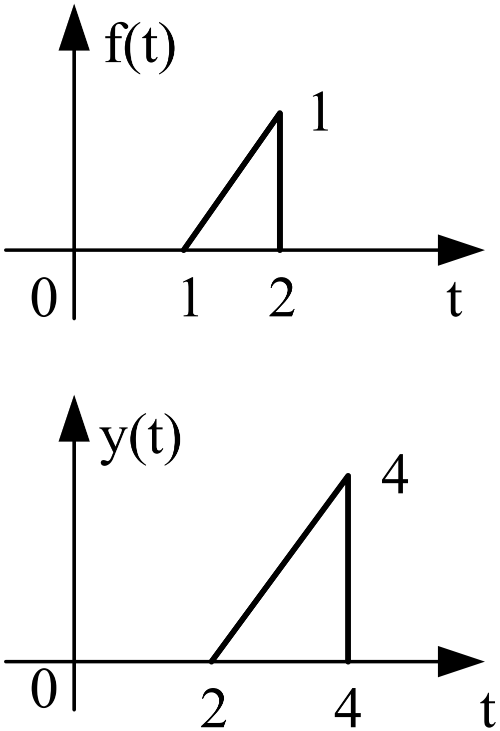
二、尺度变换

若$f(t) \longleftrightarrow F(s)$, $Re[s]>\sigma_0$，且有实数$a>0$,

则$f(at) \longleftrightarrow \dfrac{1}{a} F(\dfrac{s}{a})$ $\quad Re[s]>a\sigma_0$

例：如图信号f(t)的拉氏变换$F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2}(1 - e^{-s} - s e^{-s})$

求图中信号y(t)的拉氏变换Y(s)



解：

$$y(t) = 4f(0.5t)$$

$$Y(s) = 4 \times 2\, F(2s)$$

$$= \frac{8e^{-2s}}{(2s)^2}(1 - e^{-2s} - 2s\, e^{-2s})$$

$$= \frac{2e^{-2s}}{s^2}(1 - e^{-2s} - 2s\, e^{-2s})$$

5.2 拉普拉斯变换性质

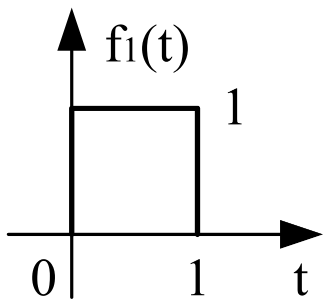
三、时移（延时）特性

若 $f(t) \longleftrightarrow F(s)$, $Re[s]>\sigma_0$, 且有实常数$t_0>0$,

则 $f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-st_0}F(s)$, $Re[s]>\sigma_0$

与尺度变换相结合

$$f(at-t_0)\varepsilon(at-t_0) \longleftrightarrow \frac{1}{a}e^{-\frac{t_0}{a}s}F\left(\frac{s}{a}\right)$$



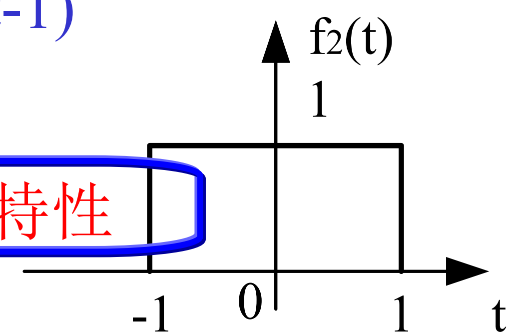
例1: 求如图信号的单边拉氏变换。

解： $f_1(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)$， $f_2(t) = \varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)$

$$F_1(s) = \frac{1}{s}(1-e^{-s})$$

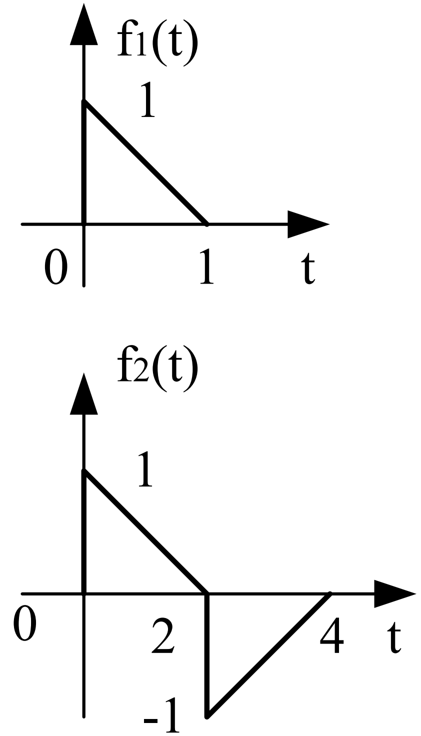
不能用时移特性

$$F_2(s) = F_1(s)$$



5.2 拉普拉斯变换性质

例2:已知$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s)$，求$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s)$



解： $f_2(t) = f_1(0.5t) - f_1[0.5(t-2)]$

$f_1(0.5t) \longleftrightarrow 2F_1(2s)$

$f_1[0.5(t-2)] \longleftrightarrow 2F_1(2s)e^{-2s}$

$f_2(t) \longleftrightarrow 2F_1(2s)(1-e^{-2s})$

例3: 求$\mathbf{f(t)= e^{-2(t-1)}\,\varepsilon(t) \longleftrightarrow F(s)=?}$

5.2 拉普拉斯变换性质

四、复频移（s域平移）特性

若　$f(t) \longleftrightarrow F(s)$, $\mathrm{Re}[s]>\sigma_0$, 且有复常数$s_a=\sigma_a+j\omega_a$,

则　$f(t)e^{s_a t} \longleftrightarrow F(s-s_a)$, $\mathrm{Re}[s]>\sigma_0+\sigma_a$

例1: 已知因果信号f(t)的象函数$F(s)=\dfrac{s}{s^2+1}$　求$e^{-t}f(3t-2)$的象函数。

解：$e^{-t}f(3t-2) \longleftrightarrow \dfrac{s+1}{(s+1)^2+9}e^{-\frac{2}{3}(s+1)}$　　时移、尺度、复频移

例2: $f(t)=\cos(2t-\pi/4) \longleftrightarrow F(s)=?$

解：$\cos(2t-\pi/4)=\cos(2t)\cos(\pi/4)+\sin(2t)\sin(\pi/4)$

$$F(s)=\frac{s}{s^2+4}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{s^2+4}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{s+2}{s^2+4}$$

5.2 拉普拉斯变换性质

五、时域的微分特性（微分定理）

若 $f(t) \longleftrightarrow F(s)$, $Re[s]>\sigma_0$,

则 $f'(t) \longleftrightarrow sF(s) - f(0_-)$

$$f''(t) \longleftrightarrow s^2F(s) - sf(0_-) - f'(0_-)$$

$$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^nF(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^{n-1-m} f^{(m)}(0_-)$$

若 f(t)为因果信号，则$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^nF(s)$

例1: $\delta^{(n)}(t) \longleftrightarrow ?$

例2: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\cos 2t\varepsilon(t)] \longleftrightarrow ?$

例3: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\cos 2t] \longleftrightarrow ?$

5.2 拉普拉斯变换性质

六、时域积分特性（积分定理）

若 f(t) $\longleftrightarrow$ F(s) , Re[s]>σ_0，则

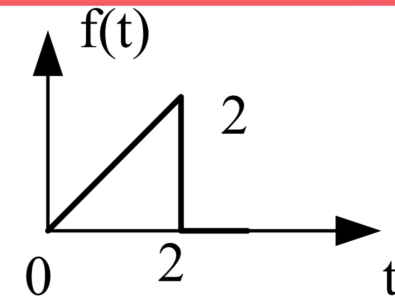
$$\left(\int_{0-}^{t}\right)^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \longleftrightarrow \frac{1}{s^{n}}F(s)$$

$$f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \longleftrightarrow s^{-1}F(s)+s^{-1}f^{(-1)}(0\_)$$

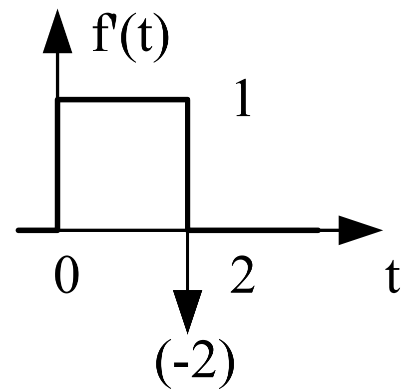
例1: $t^2\varepsilon(t)$<---->?　　$\int_0^t \varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = t\varepsilon(t)$

$$\left(\int_0^t\right)^2 \varepsilon(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^t x\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x=\frac{t^2}{2}\varepsilon(t) \qquad t^2\varepsilon(t)\longleftrightarrow\frac{2}{s^3}$$

例2:已知因果信号f(t)如图 ,求F(s)



解：对f(t)求导得f'(t)，如图



$$\int_{0-}^{t} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(t) - f(0_-)$$

由于f(t)为因果信号，故

$f(0-)=0$

$$f(t) = \int_{0-}^{t} f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$f'(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2) - \delta(t-2) \longleftrightarrow F_1(s) = \frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-2s}) - \mathrm{e}^{-2s}$$

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{s}$$

结论：若f(t)为因果信号，已知$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow F_n(s)$

则 $f(t) \longleftrightarrow F_n(s)/s^n$

5.2 拉普拉斯变换性质

七、卷积定理

时域卷积定理

若因果函数 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s)$, $\mathrm{Re}[s]>\sigma_1$,

$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s)$, $\mathrm{Re}[s]>\sigma_2$

则 $f_1(t)*f_2(t) \longleftrightarrow F_1(s)F_2(s)$

复频域（s域）卷积定理

$$f_1(t)\,f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\eta)F_2(s-\eta)\,\mathrm{d}\eta$$

较少应用

例：p227 例5.2-10

八、s域微分和积分

若f(t) $\longleftrightarrow$ F(s) , Re[s]>σ_0, 则

$$(-t)f(t) \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}$$

$$(-t)^n f(t) \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}s^n}$$

$$\frac{f(t)}{t} \longleftrightarrow \int_s^{\infty} F(\eta)d\eta$$

例1： $t^2e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow$?

$$e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow 1/(s+2)$$

$$t^2e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{1}{s+2}\right) = \frac{2}{(s+2)^3}$$

5.2 拉普拉斯变换性质

例2：

$$\frac{\sin t}{t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow ?$$

$$\sin t\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s^2+1}$$

$$\frac{\sin t}{t}\varepsilon(t) <-> \int_s^{\infty}\frac{1}{\eta^2+1}\mathrm{d}\eta = \arctan\eta\Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan\frac{1}{s}$$

九、初值定理和终值定理

初值定理和终值定理常用于由F(s)直接求f(0+)和f(∞)，而不必求出原函数f(t)。

初值定理

设函数f(t)不含δ(t)及其各阶导数（即F(s)为真分式，若F(s)为假分式化为真分式），则

$$f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

终值定理

若f(t)当t $\to\infty$时存在，并且 f(t) $\longleftrightarrow$ F(s) , Re[s]>σ_0, σ_0<0，则

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

例1：$F(s)=\dfrac{2s}{s^2+2s+2}$

$$f(0+)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{2s^2}{s^2+2s+2}=2$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{2s^2}{s^2+2s+2}=0$$

5.2　拉普拉斯变换性质

例2：

$$F(s)=\frac{s^2}{s^2+2s+2}$$

$$F(s)=1-\frac{2s+2}{s^2+2s+2}$$

$$f(0+)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{-2s^2-2s}{s^2+2s+2}=-2$$

5.3 拉普拉斯逆变换

直接利用定义式求反变换---复变函数积分，比较困难

通常的方法：

（1）查表法

（2）利用性质

（3）部分分式展开 -----结合

若象函数F(s)是s的有理分式，可写为

$$F(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots.+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

若m≥n （假分式）,可用多项式除法将象函数F(s)分解为有理多项式P(s)与有理真分式之和

$$F(s)=P(s)+\frac{B_0(s)}{A(s)}$$

5.3　拉普拉斯逆变换

$$F(s)=\frac{s^4+8s^3+25s^2+31s+15}{s^3+6s^2+11s+6}=s+2+\frac{2s^2+3s+3}{s^3+6s^2+11s+6}$$

由于$L^{-1}[1]=\delta(t)$， $L^{-1}[s^n]=\delta^{(n)}(t)$，故多项式P(s)的拉普拉斯逆变换由冲激函数构成

下面主要讨论有理真分式的情形：

部分分式展开法

若F(s)是s的实系数有理真分式（m<n)，则可写为

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+....+a_1 s+a_0}{s^n+b_{n-1}s^{n-1}+...+b_1 s+b_0}$$

式中A(s)称为F(s)的**特征多项式**，方程A(s)=0称为**特征方程**，它的根称为**特征根**，也称为F(s)的**固有频率**（或自然频率），n个特征根p_i称为F(s)的**极点**。

5.3 拉普拉斯逆变换

（1）F(s)为单极点（单根）

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+\dots+\frac{K_i}{s-p_i}+\dots+\frac{K_n}{s-p_n}$$

$$K_i=(s-p_i)F(s)\big|_{s=p_i} \qquad L^{-1}[\frac{1}{s-p_i}]=\mathrm{e}^{p_i t}\,\varepsilon(t)$$

例1: 已知 $F(s)=\dfrac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)}$，求其逆变换

解：部分分解法

$$F(s)=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+1}+\frac{k_3}{s+3} \quad （m<n）$$

其中

$$k_1=sF(s)\big|_{s=0}=\frac{10(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+3)}\bigg|_{s=0}=\frac{100}{3}$$

5.3 拉普拉斯逆变换

解： $k_2 = (s+1)F(s)\big|_{s=-1}$

$$= \left.\frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+3)}\right|_{s=-1} = -20$$

$k_3 = (s+3)F(s)\big|_{s=-3}$

$$= \left.\frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)}\right|_{s=-3} = -\frac{10}{3}$$

$$\therefore\ F(s) = \frac{100}{3s} - \frac{20}{s+1} - \frac{10}{3(s+3)}$$

$$\therefore\ f(t) = \left(\frac{100}{3} - 20\mathrm{e}^{-t} - \frac{10}{3}\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

例2: 已知 $F(s)=\dfrac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}$，

求其逆变换

解：长除法 $F(s)$

$$
\because\quad
\begin{array}{r}
s+2 \\
s^2+3s+2\overline{\big)\,s^3+5s^2+9s+7} \\
\underline{s^3+3s^2+2s} \\
2s^2+7s+7 \\
\underline{2s^2+6s+4} \\
s+3
\end{array}
$$

5.3 拉普拉斯逆变换

分式分解法 $F(s) = s + 2 + \dfrac{k_1}{s+1} + \dfrac{k_2}{s+2}$

其中 $k_1 = (s+1) \cdot \left.\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=-1} = 2$

$$k_2 = \left.\frac{s+3}{s+1}\right|_{s=-2} = -1$$

$$\therefore F(s) = s + 2 + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\therefore f(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + (2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

5.3 拉普拉斯逆变换

特例：若F(s)包含共轭复根时($p_{1,2}=-\alpha\pm j\beta$)

$$F(s)=\frac{B(s)}{D(s)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}=\frac{B(s)}{D(s)(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha-j\beta)}$$

$$=\frac{K_1}{s+\alpha-j\beta}+\frac{K_2}{s+\alpha+j\beta}+F_2(s)$$

$$K_1=[(s+\alpha-j\beta)F(s)]\big|_{s=-\alpha+j\beta}=|K_1|e^{j\theta}=A+jB \qquad \mathbf{K_2=K_1^*}$$

$$F_1(s)=\frac{K_1}{s+\alpha-j\beta}+\frac{K_2}{s+\alpha+j\beta}=\frac{|K_1|e^{j\theta}}{s+\alpha-j\beta}+\frac{|K_1|e^{-j\theta}}{s+\alpha+j\beta}$$

$$f_1(t)=2|K_1|e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)\varepsilon(t)$$

若写为$k_{1,2}=A\pm jB$，$f_1(t)=2e^{-\alpha t}[A\cos(\beta t)-B\sin(\beta t)]\varepsilon(t)$

5.3 拉普拉斯逆变换

例3 已知 $F(s)=\dfrac{s^2+3}{(s^2+2s+5)(s+2)}$， 求其逆变换

解：$F(s)=\dfrac{s^2+3}{(s+1+j2)(s+1-j2)(s+2)}$

$$=\frac{k_1}{s+1-j2}+\frac{k_2}{s+1+j2}+\frac{k_0}{s+2}$$

$$p_{1,2}=-\alpha\pm j\beta,\ (\alpha=1,\beta=2)$$

解:其中 $k_1=\left.\dfrac{s^2+3}{(s+1+j2)(s+2)}\right|_{s=-1+j2}=\dfrac{-1+j2}{5}$

5.3 拉普拉斯逆变换

即 $k_{1,2} = A \pm jB$, ($A = -\dfrac{1}{5}$, $B = \dfrac{2}{5}$)

$$k_0 = \left.\frac{s^2+3}{(s+1+j2)(s+1-j2)}\right|_{s=-2} = \frac{7}{5}$$

解： $$\therefore F(s) = \frac{-\frac{1}{5}+j\frac{2}{5}}{s+1+j2} + \frac{-\frac{1}{5}-j\frac{2}{5}}{s+1-j2} + \frac{7}{5(s+2)}$$

$\because \alpha = 1, \beta = 2$ $\quad A = -\dfrac{1}{5}$, $B = \dfrac{2}{5}$

$$\therefore f(t) = \left\{2e^{-t}\left[-\frac{1}{5}\cos(2t) - \frac{2}{5}\sin(2t)\right] + \frac{7}{5}e^{-2t}\right\}\varepsilon(t)$$

5.3 拉普拉斯逆变换

例4： 求象函数F(s)的原函数f(t)

$$F(s)=\frac{s^3+s^2+2s+4}{s(s+1)(s^2+1)(s^2+2s+2)}$$

解：A(s)=0有6个单根，它们分别是$s_1=0$，$s_2=-1$，$s_{3,4}=\pm j1$，$s_{5,6}=-1\pm j1$，故

$$F(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1}+\frac{K_3}{s-j}+\frac{K_4}{s+j}+\frac{K_5}{s+1-j}+\frac{K_6}{s+1+j}$$

$K_1=sF(s)|_{s=0}=2$， $K_2=(s+1)F(s)|_{s=-1}=-1$

$K_3=(s-j)F(s)|_{s=j}=j/2=(1/2)e^{j(\pi/2)}$ ， $K_4=K_3^*=(1/2)e^{-j(\pi/2)}$

$K_5=(s+1-j)F(s)|_{s=-1+j}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{3}{4}\pi}$

$K_6=K_5^*$

$$f(t)=[2-e^{-t}+\cos(t+\frac{\pi}{2})+\sqrt{2}e^{-t}\cos(t+\frac{3\pi}{4})]\varepsilon(t)$$

（2）F(s)有重极点（重根）

若A(s) = 0在s = p_1处有r重根，

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K_{11}}{(s-p_1)^r}+\frac{K_{12}}{(s-p_1)^{r-1}}+\ldots.+\frac{K_{1r}}{(s-p_1)}$$

$K_{11}=[(s-p_1)^r F(s)]|_{s=p1}$， $K_{12}=(d/ds)[(s-p_1)^r F(s)]|_{s=p1}$

$$K_{1r}=\frac{1}{(r-1)!}\frac{\mathrm{d}^{r-1}}{\mathrm{d}\,s^{r-1}}\left[(s-p_1)^r F(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

$$L[t^n\varepsilon(t)]=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

复频移特性 $L^{-1}[\frac{1}{(s-p_1)^{n+1}}]=\frac{1}{n!}t^n\,\mathrm{e}^{p_1 t}\,\varepsilon(t)$

5.3 拉普拉斯逆变换

举例:

已知 $F(s)=\dfrac{s-2}{s(s+1)^3}$，求其逆变换

解： $F(s)=\dfrac{k_{11}}{(s+1)^3}+\dfrac{k_{12}}{(s+1)^2}+\dfrac{k_{13}}{(s+1)}+\dfrac{k_2}{s}$

令 $F_1(s)=(s+1)^3F(s)=\dfrac{s-2}{s}$

其中 $k_{11}=F_1(s)\big|_{s=p_1}$

$$=\frac{s-2}{s}\bigg|_{s=-1}=3$$

$$k_{12}=\frac{d}{ds}F_1(s)\bigg|_{s=p_1}$$

$$=\frac{s-(s-2)\cdot 1}{s^2}\bigg|_{s=-1}=2$$

5.3 拉普拉斯逆变换

$$k_{13} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}F_1(s)\bigg|_{s=p_1} = \frac{1}{2}\frac{-4s}{s^4}\bigg|_{s=-1} = 2$$

$$k_2 = sF(s)\big|_{s=0} = \frac{s-2}{(s+1)^3}\bigg|_{s=0} = -2$$

$$\therefore F(s) = \frac{3}{(s+1)^3} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{s}$$

$$\therefore f(t) = (\frac{3}{2}t^2 e^{-t} + 2t\,e^{-t} + 2\,e^{-t} - 2)\varepsilon(t)$$

5.4 复频域系统分析

一、微分方程的变换解

描述n阶系统的微分方程的一般形式为

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j f^{(j)}(t)$$

系统的初始状态为$y(0_-)$,$y^{(1)}(0_-)$,…， $y^{(n-1)}(0_-)$

思路：用拉普拉斯变换微分特性

$$y^{(i)}(t) \longleftrightarrow s^i Y(s) - \sum_{p=0}^{i-1} s^{i-1-p} y^{(p)}(0_-)$$

若$f(t)$在$t = 0$时接入系统，则 $f^{(j)}(t) \longleftrightarrow s^j F(s)$

5.4 复频域系统分析

$$[\sum_{i=0}^{n} a_i s^i]Y(s) - \sum_{i=0}^{n} a_i [\sum_{p=0}^{i-1} s^{i-1-p} y^{(p)}(0_-)] = [\sum_{j=0}^{m} b_j s^j]F(s)$$

s域的代数方程

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i [\sum_{p=0}^{i-1} s^{i-1-p} y^{(p)}(0_-)]}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}}_{Y_x(s)} + \underbrace{\frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} F(s)}_{Y_f(s)} = \frac{M(s)}{A(s)} + \frac{B(s)}{A(s)} F(s)$$

$Y_f(s) \Rightarrow y(t)$， $y_x(t)$， $y_f(t)$

例1 描述某LTI系统的微分方程为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2f'(t) + 6f(t)$$

已知初始状态$y(0_-) = 1$，$y'(0_-) = -1$，激励$f(t) = 5\cos t\varepsilon(t)$，求系统的全响应$y(t)$。

解： 方程取拉氏变换，并整理得

$$Y(s)=\underbrace{\frac{sy(0_-)+y'(0_-)+5y(0_-)}{s^2+5s+6}}_{Y_x(s)}+\underbrace{\frac{2(s+3)}{s^2+5s+6}F(s)}_{Y_f(s)} \qquad F(s)=\frac{5s}{s^2+1}$$

$$=\frac{s+4}{(s+2)(s+3)}+\frac{2}{s+2}\frac{5s}{s^2+1}$$

$$=\frac{2}{s+2}+\frac{-1}{s+3}+\frac{-4}{s+2}+\frac{\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{-j26.6^\circ}}{s-j}+\frac{\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{j26.6^\circ}}{s+j}$$

$$y(t)=\overbrace{2\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)-\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)}^{y_x(t)}\overbrace{-4\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)+2\sqrt{5}\cos(t-26.6^\circ)]\varepsilon(t)}^{y_f(t)}$$

二、系统函数

零状态响应

$$Y_{f}(s)=\frac{B(s)}{A(s)}F(s)$$

系统函数***H*(s)**定义为 $H(s)\overset{\text{def}}{=}\frac{Y_{f}(s)}{F(s)}=\frac{B(s)}{A(s)}$

它只与系统的结构、元件参数有关，而与激励、初始状态无关。

$y_f(t) = h(t) * f(t) \longrightarrow Y_f(s) = \mathcal{L}[h(t)]F(s)$

$\boldsymbol{H(s) = \mathcal{L}[h(t)]}$

例2 已知当输入$f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$时，某LTI因果系统的零状态响应

$$y_f(t)=(3e^{-t}-4e^{-2t}+e^{-3t})\varepsilon(t)$$

求该系统的冲激响应和描述该系统的微分方程。

解

$$H(s)=\frac{Y_f(s)}{F(s)}=\frac{2(s+4)}{(s+2)(s+3)}=\frac{4}{s+2}+\frac{-2}{s+3}=\frac{2s+8}{s^2+5s+6}$$

$$h(t)=(4e^{-2t}-2e^{-3t})\,\varepsilon(t)$$

$$s^2Y_f(s)+5sY_f(s)+6Y_f(s)=2sF(s)+8F(s)$$

取逆变换　$y_f''(t)+5y_f'(t)+6y_f(t)=2f'(t)+8f(t)$

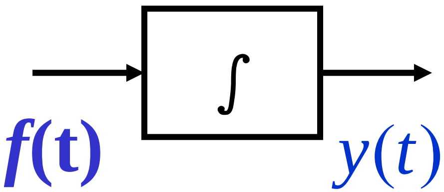
微分方程为　$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=2f'(t)+8f(t)$

5.4 复频域系统分析

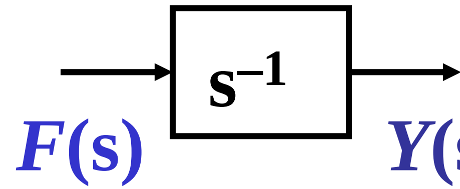
三、系统的s域框图

时域框图基本单元

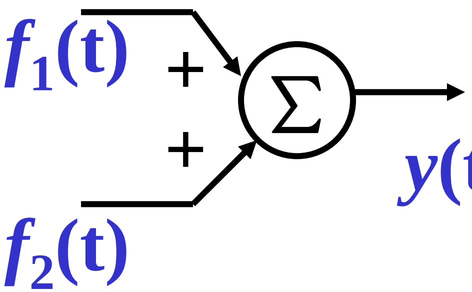
s域框图基本单元



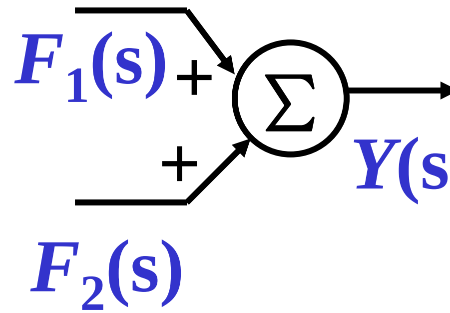
$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$



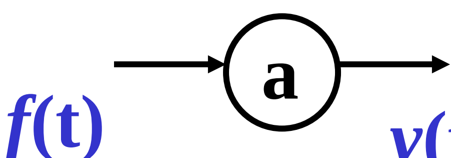
$$Y(s) = s^{-1}F(s)$$



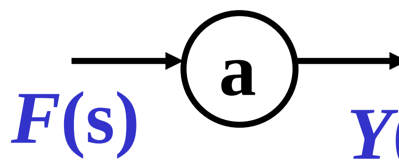
$$y(t) = f_1(t)+ f_2(t)$$



$$Y(s) = F_1(s)+F_2(s)$$



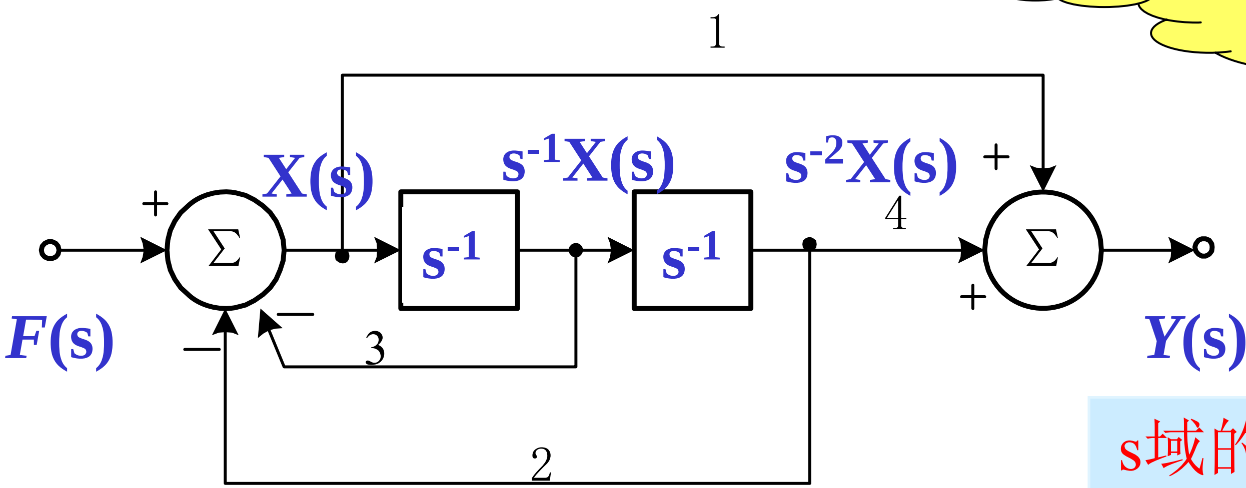
$$y(t) = a\,f(t)$$



$$Y(s) = a\,F(s)$$

例3 如图框图，列出其微分方程

再求$h(t)$?



s域的代数方程

解 画出s域框图，设左边加法器输出为X(s)，如图

$$X(s) = F(s) - 3s^{-1}X(s) - 2s^{-2}X(s)$$

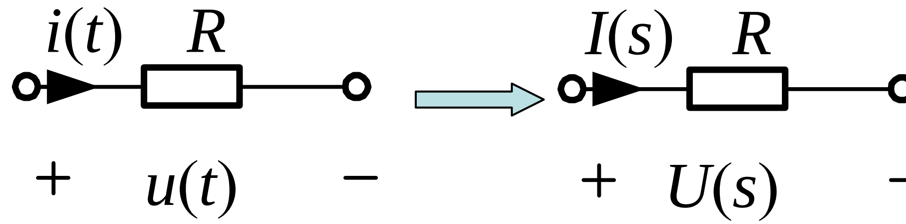
$$X(s) = \frac{1}{1+3s^{-1}+2s^{-2}}F(s)$$

$$Y(s) = X(s) + 4s^{-2}X(s) = \frac{1+4s^{-2}}{1+3s^{-1}+2s^{-2}}F(s) = \frac{s^2+4}{s^2+3s+2}F(s)$$

微分方程为 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f''(t) + 4f(t)$

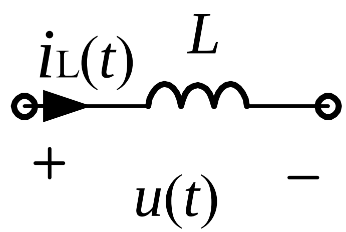
四、电路的s域模型

对时域电路取拉氏变换



1、电阻 $u(t)= R\, i(t)$ ⟶ $U(s)= R\, I(s)$

2、电感

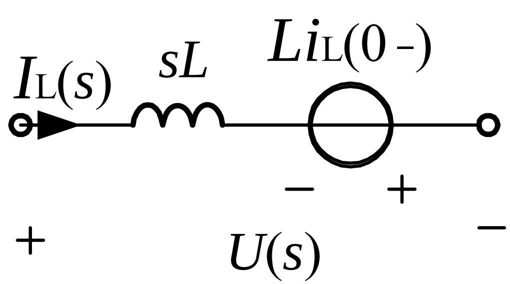


元件的s域模型

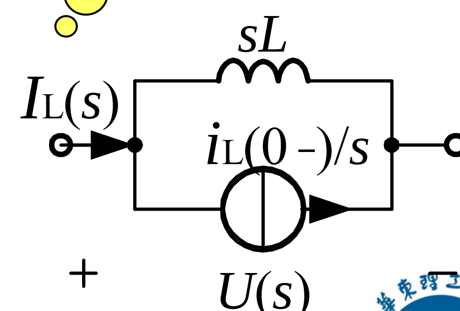
$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$U(s)= sLI_L(s) - Li_L(0\text{-})$$

$$I_L(s) = \frac{1}{sL}U(s) + \frac{i_L(0_-)}{s}$$

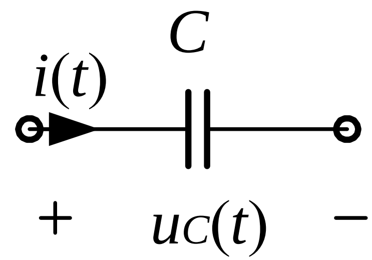


或



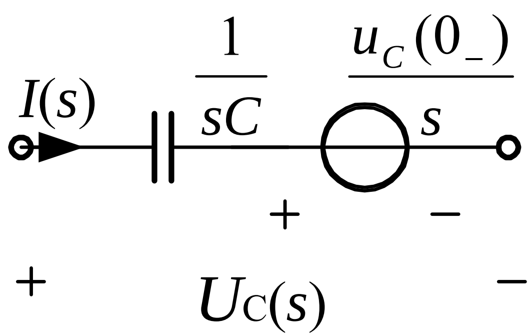
3、电容

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

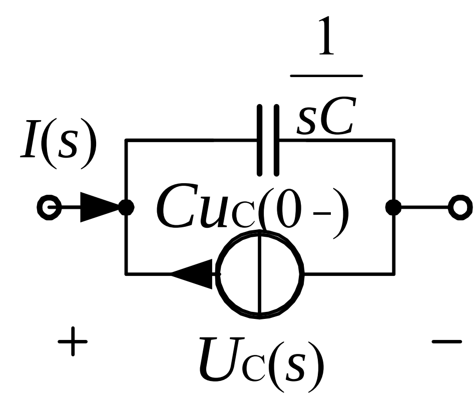


$I(s)=sCU_C(s) - Cu_C(0\text{-})$

$$U_C(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{u_C(0_-)}{s}$$



或



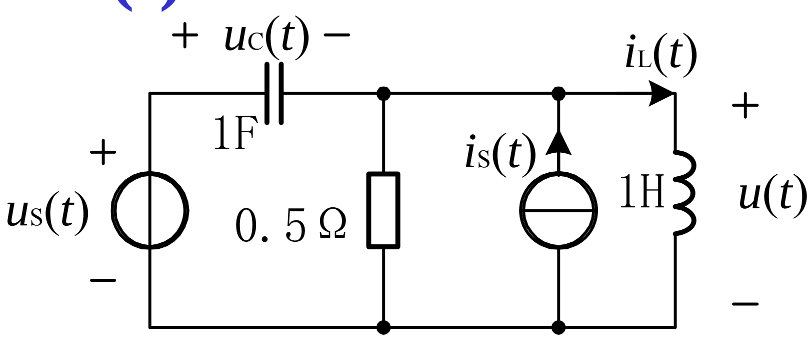
4、KCL、KVL方程

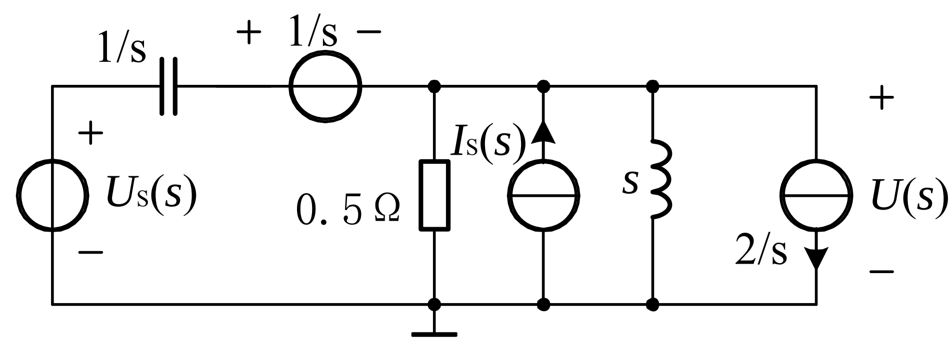
$$\sum i(t) = 0$$
$$\sum u(t) = 0$$

$$\sum I(s) = 0$$
$$\sum U(s) = 0$$

5.4 复频域系统分析

例4 如图所示电路，已知$u_S(t) = \varepsilon(t)$ V，$i_S(t) = \delta(t)$，起始状态$u_C(0\text{-}) = 1$V，$i_L(0\text{-}) = 2$A，求电压$u(t)$。





解 画出电路的s域模型　$U_s(s)=1/s$，$I_s(s)=1$

$$\left(s+2+\frac{1}{s}\right)U(s)=I_S(s)-\frac{2}{s}+s\left[U_S(s)-\frac{1}{s}\right]$$

$$U(s)=\frac{s-2}{s^2+2s+1}=\frac{1}{s+1}+\frac{-3}{(s+1)^2}$$

$$u(t) = e^{-t}\varepsilon(t) - 3te^{-t}\varepsilon(t)\ \text{V}$$

若求$u_x(t)$和$u_f(t)$