TD 3

Gaz de Van der Waals et rayonnement du corps noir

1. Gaz de Van der Waals

On rappelle l'équation d'état du gaz de Van der Waals

$$\left(P + \frac{aN^2}{V^2}\right)(V - bN) = Nk_BT,$$

avec P la pression, V le volume, N le nombre de particules, T la température et k_B la constante de Boltzmann. Les coefficients a et b sont des constantes.

1. Donner l'équation d'état du gaz parfait et comparer avec l'équation d'état de Van der Waals. Comment interpréter physiquement les coefficients a et b?

On considère un gaz classique constitué de N particules, dans une enceinte de volume V fixé, à température T. Deux particules i et j interagissent entre elles à travers un potentiel d'interaction de paires $u(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = u(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$.

2. Dans quel ensemble statistique se place-t-on pour étudier le système?

3. Quelle est l'expression de l'énergie $H(\{\vec{r}_i, \vec{p}_i\})$ du système de particules?

4. Écrire l'expression de la fonction de partition Z sous la forme d'une intégrale sur toutes les positions $\vec{r}_i$ et les impulsions $\vec{p}_i$. On donne l'élément d'intégration $\prod_{i=1}^{N} \frac{d^3\vec{r}_i d^3\vec{p}_i}{h^{3N}}$ avec h la constante de Planck.

5. Factoriser la fonction de partition en $Z = Z_{GP}/V^N \times Y$ où Z_{GP} est la fonction de partition du gaz parfait et Y est appelée intégrale de configuration.

Pour calculer Y, on effectue une approximation de champ moyen. On remplace l'énergie d'interaction U_{int} du système de particules par un potentiel effectif d'interaction u_{eff}

$$U_{int} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} u_{eff}(\vec{r}_i)$$

où

$$u_{eff}(\vec{r}_i) = \begin{cases} \infty & \text{si } |\vec{r}_i| < r_0, \\ -U_0 & \text{si } |\vec{r}_i| \geq r_0. \end{cases}$$

avec r_0 une constante et $U_0 > 0$ qui peut dépendre de N et V.

6. Interpréter la forme du profil d'énergie potentielle effective u_{eff}.

7. Calculer l'intégrale de configuration Y puis en déduire la fonction de partition Z. On rappelle l'expression de la fonction de partition du gaz parfait $Z_{GP} = \frac{1}{N!}\left(\frac{V}{\Lambda^3}\right)^N$ avec $\Lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_BT}}$ la longueur d'onde thermique de de Broglie (voir TD2).

8. Calculer l'énergie libre F. On donne la formule de Stirling : $\ln N! \approx N \ln N$ lorsque $N \gg 1$.

9. Rappeler la différentielle de l'énergie libre dF. En déduire le lien entre la pression P à l'énergie libre F.

10. Calculer la pression P et en déduire l'équation d'état du gaz de Van der Waals, où on exprimera a et b en fonction de r_0 et $U_0(N, V)$.

2. Effet de serre

Données :

- Constante de Stefan $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W · m^{-2} · K^{-4}
- Température de surface du Soleil $T_S = 5800$ K
- Distance de la Terre au Soleil $d_{TS} = 1.5 \times 10^8$ km
- Rayon solaire $R_S = 7.0 \times 10^5$ km, rayon terrestre $R_T = 6.4 \times 10^3$ km

L'objectif de cet exercice est de modéliser la température d'équilibre thermique de la Terre.

1. En modélisant le Soleil par un corps noir sphérique de température T_S et de rayon R_S, exprimer et calculer la puissance totale rayonnée P_S par le Soleil.

2. Exprimer la puissance surfacique de rayonnement solaire qui arrive sur Terre ϕ_i en fonction la distance Terre-Soleil d_{TS}, puis exprimer la puissance totale reçue P_i par la Terre, en fonction de son rayon R_T. Effectuer l'application numérique.

3. Dans un premier modèle, on considère que la Terre se comporte comme un corps noir, mais réfléchit une fraction A, appelée *albedo*, du rayonnement solaire. Comment relier P_i et la puissance de rayonnement de corps noir émis P_e?

4. En déduire la température d'équilibre de la Terre T_1 (ou température de surface) dans ce premier modèle, en utilisant $A = 0,31$. Sa valeur paraît-elle satisfaisante?

Dans un deuxième modèle, on prend en compte la présence de l'atmosphère, d'épaisseur $e \ll R_T$.

5. Estimer les longueurs d'onde d'émission maximale du Soleil et de la Terre, notées respectivement λ_S et λ_T.

Ces deux longueurs d'onde λ_S et λ_T sont assez différentes pour justifier de supposer que l'atmosphère transmet tout le rayonnement solaire et absorbe tout le rayonnement issu de la Terre (c'est essentiellement les molécules d'eau qui absorbent ce rayonnement). On note T_a la température de l'atmosphère et T_2 la température de la Terre, qu'on assimile à des corps noirs. L'albedo A de la Terre est le même que dans le premier modèle.

6. Représenter sur un schéma les différents systèmes et flux énergétiques mis en jeu.

7. En effectuant un bilan d'énergie sur la Terre, à l'équilibre thermique, relier P_i, T_2, T_a, R_T et A.

8. En effectuant un bilan d'énergie sur le système {Terre + atmosphère} à l'équilibre thermique, relier P_i, T_a, R_T et A.

9. À l'aide des équations précédentes, exprimer la température d'équilibre de la Terre T_2 dans ce modèle en fonction de P_i, R_T et A.

10. Faire l'application numérique avec un albedo $A = 0,31$ et commenter le résultat.

Dans un troisième modèle, on suppose que l'atmosphère absorbe une fraction $\alpha = 0,33$ du rayonnement solaire : une partie du rayonnement ultraviolet est absorbé par l'ozone stratosphérique. On suppose aussi que l'atmosphère transmet intégralement le rayonnement solaire réfléchi par la Terre.

11. Comment sont modifiés les bilans d'énergie sur la Terre et sur le système {Terre + atmosphère} ? Déduire la nouvelle température d'équilibre T_3 de la Terre et commenter.

Correction - Gaz de Van der Waals

1. L'équation d'état du gaz parfait est $PV = Nk_BT$. On interprète le terme en bN comme le volume exclu par les particules et le terme en aN^2/V^2 comme une pression dynamique venant des interactions attractives entre particules. L'interaction attractive entre les particules diminue la quantité de mouvement transférée par les particules aux parois de l'enceinte et donc la pression P est aussi diminuée.

2. Les paramètres fixés sont la température T, le volume V et le nombre de particules N. Donc on se place dans l'ensemble canonique.

3. L'énergie du système de particules est
$$H(\{\vec{r}_i, \vec{p}_i\}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} u(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + \sum_{i<j} u(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

4. On déduit la fonction de partition Z pour des particules indiscernables, en notant $\beta = 1/k_BT$
$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^{N} \frac{d^3\vec{r}_i d^3\vec{p}_i}{h^{3N}} \exp(-\beta H(\{\vec{r}_i, \vec{p}_i\})) \\ &= \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^{N} \frac{d^3\vec{r}_i d^3\vec{p}_i}{h^{3N}} \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} - \beta \sum_{i<j} u(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)\right) \end{aligned} \tag{1}$$

5. On factorise
$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^{N} \frac{d^3\vec{r}_i d^3\vec{p}_i}{h^{3N}} \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} - \beta \sum_{i<j} u(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{N!h^{3N}} \left(\int \prod_{i=1}^{N} d^3\vec{p}_i \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m}\right)\right)}_{Z_{GP}/V^N} \underbrace{\left(\int \prod_{i=1}^{N} d^3\vec{r}_i \exp\left(-\beta \sum_{i<j} u(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)\right)\right)}_{Y} \\ &= \frac{Z_{GP}}{V^N} \times Y \end{aligned} \tag{2}$$
On reconnaît dans le terme de gauche la fonction de partition du gaz parfait Z_{GP}, où l'énergie est purement cinétique. Le terme de droite Y, qui intègre sur les positions $\vec{r}_i$, est appelé intégrale de configuration.

6. Le potentiel modélise une répulsion de sphères dures à courte portée $|\vec{r}_i| < r_0$ et une interaction attractive (car $u_{eff} < 0$) dans le reste du volume.

7. L'intégrale de configuration Y s'exprime
$$\begin{aligned} Y &= \int \prod_{i=1}^{N} d^3\vec{r}_i \exp\left(-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^{N} u_{eff}(|\vec{r}_i|)\right) \\ &= \left(\int d^3\vec{r} \exp\left(-\frac{\beta}{2} u_{eff}(|\vec{r}|)\right)\right)^N \\ &= \left(\int_{\vec{r} \in V, |\vec{r}| > r_0} d^3\vec{r} \exp\left(\frac{\beta}{2} U_0\right)\right)^N \\ &= \left(\left(V - \frac{4}{3}\pi r_0^3\right) \exp\left(\frac{\beta}{2} U_0\right)\right)^N \end{aligned} \tag{3}$$

donc on déduit la fonction de partition Z_{GP}

$$\begin{aligned} Z &= \frac{Z_{GP}}{V^N} \times Y \\ &= \frac{1}{N!}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right)^N \left(V - \frac{4}{3}\pi r_0^3\right)^N \exp\left(\frac{\beta}{2} N U_0\right) \end{aligned} \tag{4}$$

avec $\Lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_BT}}$

8. On déduit l'énergie libre

$$F = -k_BT\ln Z = k_BT\left(\ln N! - N\ln\left(\frac{V - \frac{4}{3}\pi r_0^3}{\Lambda^3}\right) - \frac{\beta N U_0}{2}\right) \tag{5}$$

En utilisant la formule de Stirling, $\ln N! \approx N\ln N - N$ lorsque $N \gg 1$, on trouve:

$$F = -Nk_BT\left(\ln\left(\frac{V - \frac{4}{3}\pi r_0^3}{N\Lambda^3}\right) + 1\right) - \frac{NU_0}{2} \tag{6}$$

9. La première identité thermodynamique est $dU = TdS - PdV$ donc

$$dF = d(U - TS) = dU - TdS - SdT = -SdT - PdV.$$

On a donc

$$P = -\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T.$$

10. Sachant que Λ ne dépend pas de V, on a

$$P = -\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \frac{Nk_BT}{V - \frac{4}{3}\pi r_0^3} + \frac{N}{2}\frac{\partial U_0}{\partial V} \tag{7}$$

Donc

$$\left(P - \frac{N}{2}\frac{\partial U_0}{\partial V}\right)\left(V - \frac{4}{3}\pi r_0^3\right) = Nk_BT \tag{8}$$

Pour identifier à l'équation d'état de Van der Waals, on doit prendre

$$\frac{4}{3}\pi r_0^3 = Nb$$

et

$$-\frac{N}{2}\frac{\partial U_0}{\partial V} = a\frac{N^2}{V^2}$$

donc

$$U_0 = \frac{2aN}{V} + cte$$

Correction - Effet de serre

D'après Sanz, Vandenbrouck, Salamito, Chardon, Physique PC-PC*, Dunod.

1. D'après la loi de Stefan, la puissance surfacique émise par le Soleil est $M = \sigma T_S^2$. Sa surface est $S = 4\pi R_S^2$. Donc, la puissance totale rayonnée par le Soleil est égale à $P_S = M \times S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4 = 4,0 \times 10^{26}$ W.

2. Le Soleil émet de la puissance sous forme de rayonnement dans toutes les directions. La puissance surfacique au niveau de la Terre est $\phi_i = \frac{P_S}{4\pi d_{TS}^2}$ avec d_{TS} la distance Terre-Soleil. En supposant que les rayons solaires arrivent parallèles entre eux au niveau de la Terre (légitime car $R_S, R_T \ll d_{TS}$), la Terre reçoit la même puissance que celle que reçoit un disque de rayon R_T placé perpendiculairement à l'axe Terre-Soleil. La puissance reçue par la Terre est donc:

$$P_i = \sigma T_S^4 \pi \frac{R_T^2 R_S^2}{d_{TS}^2} = 1,8 \times 10^{17} \text{ W}$$

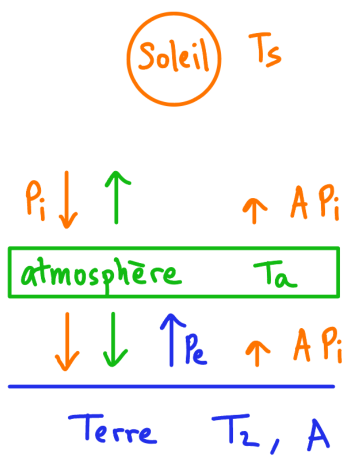
3. La puissance absorbée est $P_a = (1 - A)P_i$. Cette puissance est intégralement réémise sous forme de rayonnement de corps noir : $P_e = P_a = (1 - A)P_i$. Alternativement, on peut aussi dire qu'on équilibre la puissance qui arrive sur Terre P_i et la puissance qui sort de la Terre $P_e + AP_i$.

4. La loi de Stefan appliquée à la Terre donne $P_e = \sigma T_1^4 4\pi R_T^2$ où T_1 est sa température d'équilibre (ou température de surface). Le bilan énergétique de la Terre donne :

$$(1 - A)P_i = \sigma T_1^4 4\pi R_T^2 \quad \Leftrightarrow \quad T_1 = (1 - A)^{1/4} \sqrt{\frac{R_S}{2d_{TS}}} T_s.$$

Avec un albedo moyen de la Terre de $0,31$, la température de surface est alors : $T_0 = 255$ K $= -18$°C. Cette valeur est beaucoup trop faible. Il faut tenir compte de la présence de l'atmosphère.

5. On utilise la loi de Wien $\lambda_{max} T = 2,898 \cdot 10^{-3}$ K $\cdot$ m pour obtenir la longueur d'onde d'émission maximale du Soleil, qui vaut $\lambda_S \simeq 500$ nm (dans le visible). Pour la Terre, la température de surface est environ 17°C donc 300 K et la loi de Wien donne $\lambda_T \simeq 10\,\mu$m (dans l'infrarouge).

6. 

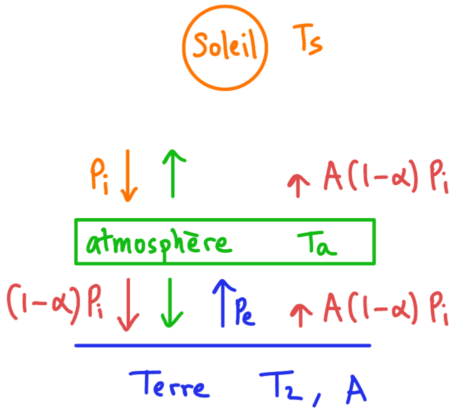
7. Le bilan énergétique pour la Terre s'écrit $(1 - A)P_i + \sigma T_a^4 4\pi R_T^2 = \sigma T_2^4 4\pi R_T^2$;

8. Le bilan énergétique pour le système {Terre + atmosphère} s'écrit : $(1-A)P_i = \sigma T_a^4 4\pi R_T^2$.

9. Le système d'équations constitué par les deux bilans précédents implique :
$T_a = (1-A)^{1/4}\sqrt{\frac{R_S}{2d_{TS}}}T_s = T_1$ et $T_2 = 2^{1/4}T_a$.

10. L'application numérique donne $T_a = T_1 = 255$ K puis $T_2 = 2^{1/4}T_a = 303$ K $= 30°$C. La nouvelle valeur de la température de surface de la Terre est trop élevée.

11. Le schéma des flux devient



Le bilan énergétique du système {Terre - atmosphère} devient :

$$(1-A(1-\alpha))P_i = \sigma T_a^4 4\pi R_T^2$$

.

Le bilan énergétique de la Terre seule devient

$$(1-A)(1-\alpha)P_i + \sigma T_a^4 4\pi R_T^2 = \sigma T_3^4 4\pi R_T^2,$$

ce qui donne : $T_a = (1-A(1-\alpha))^{1/4}\sqrt{\frac{R_S}{2d_{TS}}}T_s = 264\,\mathrm{K}$ et

$$T_3 = \left(\frac{\left[(1-A)(1-\alpha) + (1-A(1-\alpha))\right]P_i}{\sigma 4\pi R_T^2}\right)^{1/4} = 296 \text{ K} = 23°\text{C},$$

ce qui plus satisfaisant.

Nous pourrions cependant améliorer encore le modèle en prenant par exemple en compte les deux phénomènes suivants (i) l'atmosphère n'est pas totalement opaque au rayonnement terrestre, en particulier dans l'intervalle $[8\mu$ m$, 16\mu$ m$]$ (ii) la surface de la Terre ne fait pas qu'émettre du rayonnement, une partie de l'énergie reçue sert à l'évaporation des océans, laquelle est restituée lors de la condensation de la vapeur d'eau en altitude;