第 12 章 （之 1）（总第 65 次）

教学内容: §12．1 多元函数积分的概念与性质

**1．选择题:

(1). 设 $I=\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+\cos^2 x+\sin^2 y}$ 则 I 满足 （　　）

(A) $\dfrac{2}{3}\le I\le 2$　　　　(B) $2\le I\le 3$

(C) $D\le I\le\dfrac{1}{2}$　　　　(D) $-1\le I\le 0$

答：(A).

(2). 设 $I_1=\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$ 及 $I_3=\iint\limits_D (x+y)d\sigma$，

其中 D 是由直线 x=0，y=0，$x+y=\dfrac{1}{2}$ 及 $x+y=1$ 所围成的区域，

则 I_1，I_2，I_3 的大小顺序为 （　　）

(A) $I_3<I_2<I_1$；　(B) $I_1<I_2<I_3$；　(C) $I_1<I_3<I_2$；　(D) $I_3<I_1<I_2$.

答：（B）.

(3). 设 $D: x^2+y^2\le a^2 (a>0)$, 且有 $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=\pi$,则 $a=$(　　).

（A） 1；　(B) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$；　(C) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$；　(D) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$.

答：（B）.

**2．填空题:

(1). 若 D 是以 $O=(0,0), A=(1,0), B=(0,1)$ 为顶点的三角形区域，

则利用二重积分的几何意义可得到 $\iint\limits_D (1-x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

答：$\dfrac{1}{6}$

(2). 设 $f(t)$为连续函数，则由平面 z=0，柱面 $x^2+y^2=1$ 和曲面 $z=f^2(xy)$

所围立体的体积可用二重积分表示为________________.

答：$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f^2(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

**3．解下列问题：

(1). 利用二重积分性质，比较二重积分 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$ 的大小，

其中 D 为任一有界闭区域.

解：在 D 上，有 $e^{x^2+y^2} \geq 1 + x^2 + y^2$，　　因此 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2} d\sigma \geq \iint\limits_D \left(1 + x^2 + y^2\right) d\sigma$.

(2). 利用二重积分的性质，

估计二重积分 $\iint\limits_D (1+\dfrac{x^2+y^2}{16})\mathrm{d}\sigma$ 的值，其中 $D=\{(x,y)|9x^2+16y^2 \leq 144\}$.

解：在 D 上，有 $1 \leq 1+\dfrac{x^2+y^2}{16} \leq 2$，　$\therefore$ $12\pi \leq \iint\limits_D f(x,y) d\sigma \leq 17\times 12\pi = 24\pi$.

***4．试利用积分值与积分变量名称无关，解下列问题：

(1). $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt[3]{\sin(x-y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：因为 $I = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt[3]{\sin(x-y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{y^2+x^2\leq 1} \sqrt[3]{\sin(y-x)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -I$，所以 $I = 0$.

(2). $\iint\limits_{x^2\leq 1, y^2\leq 1} \dfrac{a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：$I = \iint\limits_{x^2\leq 1, y^2\leq 1} \dfrac{a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{y^2\leq 1, x^2\leq 1} \dfrac{a\mathrm{e}^y + b\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$，

$$I = \frac{1}{2}\left[\iint\limits_{x^2\leq 1, y^2\leq 1} \frac{a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{y^2\leq 1, x^2\leq 1} \frac{a\mathrm{e}^y + b\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{x^2\leq 1, y^2\leq 1} \frac{(a+b)\mathrm{e}^x + (a+b)\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a+b}{2}\iint\limits_{x^2\leq 1, y^2\leq 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2(a+b) .$$

***5.　设 $f(x,y)$ 是连续函数，试利用积分中值定理求极限 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leq r^2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

解：积分区域　$D: x^2+y^2 \leq r^2$　为有界区域，且　$f(x,y)$　连续，

$\therefore$ 由积分中值定理可知：存在点 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $\iint\limits_D f(x,y) d\sigma = f(\xi,\eta) S_D$，

即：$\iint\limits_{x^2+y^2\leq r^2} f(x,y) d\sigma = \pi r^2 f(\xi,\eta)$，

又 $\because$ 当 $r\to 0$ 时，$(\xi,\eta)\to(0,0)$，且 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续.

$\therefore$ $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leq r^2} f(x,y) d\sigma = f(0,0)$.

第 12 章 （之 2）（总第 66 次）

教学内容 ： §12．2．1 二重积分在直角坐标系下的计算方法

**1. 选择题:

（1）.设 $f(x,y)$ 是连续函数，则二次积分 $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{x+1}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y =$ （ ）

(A). $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-1}^{y-1} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^2\mathrm{d}y\int_{-1}^{\sqrt{y^2-1}} f(x,y)\mathrm{d}x$； (B). $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-1}^{y-1} f(x,y)\mathrm{d}x$；

(C). $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-1}^{y-1} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_{-1}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)\mathrm{d}x$； (D). $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-1}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

答：(C)

（2）.设 $f(x,y)$ 是连续函数，则二次积分 $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy=$ （ ）

（A）. $\int_1^e dy\int_0^{\ln x} f(x,y)dx$； (B). $\int_1^e dy\int_0^{\ln x} f(x,y)dx$；

(C). $\int_1^e dy\int_0^{\ln x} f(x,y)dx$； (D). $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$.

答：(D)

（3）.设 $f(x,y)$ 是连续函数，则交换积分次序后,

二次积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y=$ （ ）

（A）. $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx + \int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx$；

（B）. $\int_0^1 dy\int_0^{x^2} f(x,y)dx + \int_1^2 dy\int_0^{2-x} f(x,y)dx$；

（C）. $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$； （D）. $\int_0^1 dy\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dx$.

答： (C)

（4）.设函数 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上连续，使 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy = 4\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

成立的充分条件是 （ ）

（A）. $f(-x,y)=f(x,y)$， $f(x,-y)=-f(x,y)$；

（B）. $f(-x,y)=-f(x,y)$， $f(x,-y)=f(x,y)$；

（C）. $f(-x,y)=-f(x,y)$， $f(x,-y)=-f(x,y)$；

（D）. $f(-x,y)=f(x,y)$， $f(x,-y)=f(x,y)$.

答：（D）.

2．画出下列各题中给出的区域 D，并将二重积分化成两种不同次序的二次积分（假定被积函数 f(x,y)在积分区域 D 上连续）.

**（1）.D 由曲线 $xy=1, y=x, x=2$ 围成；

解：$I=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$

**（2）. $D=\{(x,y)|\max(1-x,x-1)\le y\le 1\}$

解：$I=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{1} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_{x-1}^{1} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{1-y}^{1+y} f(x,y)dx$

**（3）. D：$x+y\le 1$，$x-y\le 1$，$x\ge 0$.

解：原式$=\int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)dy=\int_{-1}^{0} dy\int_0^{y+1} f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx$.

3．计算二重积分：

**(1). $\iint\limits_D \frac{d\sigma}{\sqrt{2-y}}$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2y\}$；

解：原式$=2\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{2-y}}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

**(2). 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是第一象限中由 $y=x$ 和 $y=x^3$ 所围成的区域.

解：原式$=\int_0^1 e^{x^2}dx\int_{x^3}^{x} dy=\int_0^1 (xe^{x^2}-x^3e^{x^2})dx\ =\frac{1}{2}e-1$.

**(3). 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2\sqrt{1-y}d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|\ 0\le y\le 1-x^2\}$.

解：$D=\{(x,y)|0\le y\le 1-x^2\}\Rightarrow D:0\le y\le 1$，

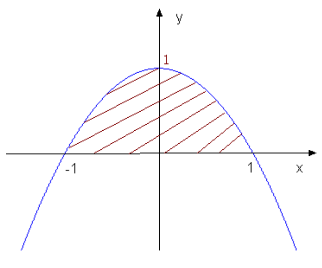
$$原式=\int_0^1\sqrt{1-y}dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}x^2dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{1-y}dy\frac{1}{3}x^3\Big|_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\sqrt{1-y}\left[(1-y)\sqrt{1-y}+(1-y)\sqrt{1-y}\right]dy$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1(1-y)^2dy=-\frac{2}{3}\int_0^1(1-y)^2d(1-y)$$

$$=-\frac{2}{9}(1-y)^3\Big|_0^1=\frac{2}{9}$$



**(4). 计算二重积分 $\iint\limits_D |x-y|\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$.

解：直线 $y=x$ 把区域 D 分成 D_1（上）、D_2（下）两个部分，

$$\iint_D |x-y|\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}(y-x)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}(x-y)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^2(y-x)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x-y)\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{2}(y-x)^2\Big|_x^2\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{1}{2}(x-y)^2\Big|_0^x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(x^2-2x+2)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\Big|_0^1=\frac{4}{3}.$$

**(5). 计算二重积分 $\iint_D x\sin(x+y)d\sigma$，

其中 D 由直线 $x=\sqrt{\pi}$、抛物线 $y=x^2-x$ 及其在（0，0）点的切线围成.

解：抛物线 $y=x^2-x$ 在（0，0）处切线斜率 $y'(0)=-1$，此切线方程为 $y=-x$，

区域 D: $0\le x\le\sqrt{\pi}$， $-x\le y\le x^2-x$，

$$\iint_D x\sin(x+y)d\sigma$$

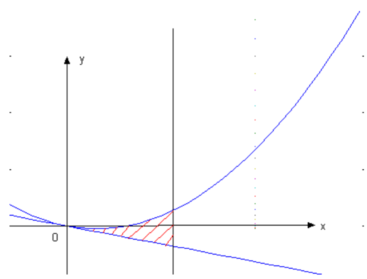
$$=\int_0^{\sqrt{\pi}}dx\int_{-x}^{x^2-x}x\sin(x+y)dy$$

$$=\int_0^{\sqrt{\pi}}dx\int_{-x}^{x^2-x}x\sin(x+y)d(x+y)$$

$$=-\int_0^{\sqrt{\pi}}dx[x\cos(x+y)]\Big|_{y=-x}^{y=x^2-x}$$

$$=\int_0^{\sqrt{\pi}}x(\cos 0-\cos x^2)dx\quad=\int_0^{\sqrt{\pi}}x(1-\cos x^2)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{2}\sin x^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}}=\frac{\pi}{2}.$$



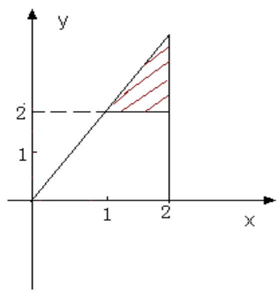
4．计算下列二次积分:

**(1). $\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^2 e^{x^2-2x}dx$.

解：$D:2\le y\le 4,\frac{y}{2}\le x\le 2$， 变换积分次序得 $D^*:1\le x\le 2,\quad 2\le y\le 2x$，

$$原式=\int_1^2 e^{x^2-2x}dx\int_2^{2x}dy=\int_1^2 e^{x^2-2x}(2x-2)dx$$

$$=\int_1^2 e^{x^2-2x}\mathrm{d}(x^2-2x)=e^{x^2-2x}\Big|_1^2=1-\frac{1}{e}.$$



**(2). $\int_{-1}^1 dx\int_{-1}^x x\sqrt{1-x^2+y^2}dy$.

解：原式$=\int_{-1}^{1}dy\int_{y}^{1}x\sqrt{1-x^2+y^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{3}(1-|y|^3)dy=\frac{1}{2}$.

5．试利用积分区域的对称性和被积函数(关于某个单变量)的奇偶性,计算二重积分：

**(1). $\iint\limits_D(ax+by+c)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$，$a,b,c$ 为常数.

解：$\iint\limits_D(ax+by+c)d\sigma=\iint\limits_D axd\sigma+\iint\limits_D byd\sigma+\iint\limits_D cd\sigma$，

$\because D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$，既关于 y 轴对称，又关于 x 轴对称.

又$\because$ $f(x)=ax$为奇函数，$g(y)=by$ 也为奇函数.

$\therefore$由积分区域对称性及被积函数的奇偶性可知：$\iint\limits_D axd\sigma=0,\quad \iint\limits_D byd\sigma=0$.

原式$=\iint_D c\,d\sigma=c\pi R^2$.

**(2). $\iint\limits_D\frac{x^2(1+x^5\sqrt{1+y})}{1+x^6}dxdy$，其中$D=\{(x,y)||x|\le1,0\le y\le2\}$.

解：$\iint\limits_D\frac{x^2(1+x^5\sqrt{1+y})}{1+x^6}dxdy=\iint\limits_D\frac{x^2}{1+x^6}dxdy+\iint\limits_D\frac{x^7\sqrt{1+y}}{1+x^6}dxdy$，

$\because D=\{(x,y)||x|\le1,0\le y\le2\}$，关于 y 轴对称，

又$u(x,y)=\frac{x^7\sqrt{1+y}}{1+x^6}$，关于 x 为奇函数，　　$\therefore\iint\limits_D\frac{x^7\sqrt{1+y}}{1+x^6}dxdy=0$，

$$\therefore\ \iint\limits_D\frac{x^2(1+x^5\sqrt{1+y})}{1+x^6}dxdy=\iint\limits_D\frac{x^2}{1+x^6}dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_0^2\frac{x^2}{1+x^6}dy$$

$$=2\int_0^1\frac{2x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\int_0^1\frac{1}{1+(x^3)^2}\mathrm{d}x^3=\frac{4}{3}\arctan x^3\Big|_0^1=\frac{\pi}{3}.$$

**6.计算由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x+2$ 围成区域的面积.

解：$\because x^2=x+2$ 即　$x=-1$,　$x=2$.　$\therefore$交点为$(-1,1)$与$(2,4)$

A$=\iint_D d\sigma=\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}dy=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx=4\frac{1}{2}$.

**7. 计算由曲面 $z=x^2+y^2$, $y=1$, $z=0$, $y=x^2$ 所围成的曲顶柱体的体积.

解：$V=\iint_D(x^2+y^2)d\sigma=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)dy=2\int_0^1(x^2(1-x^2)+\frac{1}{3}(1-x^6))dx=\frac{88}{105}$.

第 12 章（之 3）（总第 67 次）

教学内容： §12．2．2 二重积分在极坐标系下的计算方法

1．选择题:

**(1). 若区域 D 为$(x-1)^2+y^2\leqslant 1$，设$F(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho$，

则二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$化成二次积分为 （　　）

(A). $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho$ ；　　(B). $\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho$；

(C). $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho$；　　(D). $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho$.

答：（C）.

** (2). 若区域 D 为$x^2+y^2\leqslant 2x$,则二重积分$\iint\limits_D (x+y)\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$化成二次积分为(　　)

(A). $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}(\cos\theta+\sin\theta)\sqrt{2\rho\cos\theta}\rho\mathrm{d}\rho$；

(B). $\int_0^{\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$；

(C). $2\int_0^{\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$；　(D). $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$.

答：（D）.

2．填空题:

**(1). 设 D：$0\le\rho\le 1, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，根据二重积分的几何意义，

则$\iint\limits_{\mathrm{D}}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=$____________ .

答：$\frac{1}{6}\pi$.

**(2). 设区域 D 是 $x^2+y^2\leqslant 1$ 与 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 的公共部分，试写出$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

在极坐标系下先对 ρ 积分的二次积分________________.

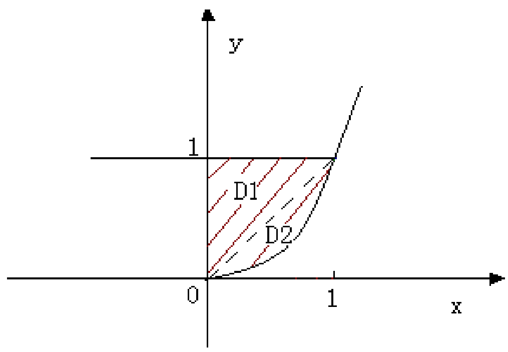
解：记$F(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho$，则

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho+\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho .$$

3．化下列二重积分为极坐标系下的二次积分:

**(1) $\iint\limits_D f(xy)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1, x^2\le y\le 1\}$.

解：令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$



在区域 D1 上 $\rho\sin\theta=(\rho\cos\theta)^2$ 即

$$\rho=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\quad(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}),$$

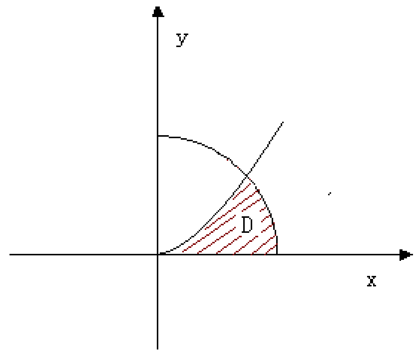
在区域 D2 上 $\rho\sin\theta=1$ 即

$$\rho=\frac{1}{\sin\theta}\quad(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}),$$

$$\iint_D f(xy)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}f(\rho^2\sin\theta\cos\theta)\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}f(\rho^2\sin\theta\cos\theta)\rho d\rho .$$

**(2). $\iint_D f(x+y)d\sigma$，其中

$$D=\{(x,y)|\ \sqrt{y}\le x\le\sqrt{2-y^2},0\le y\le 1\}.$$



解：令 $x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta$，由

$$y=x^2\Rightarrow\rho\sin\theta=(\rho\cos\theta)^2\Rightarrow\rho=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta},$$

由 $x^2+y^2=2\Rightarrow\rho=\sqrt{2}$，

$$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\sqrt{2}\Rightarrow\sin\theta=\sqrt{2}\cos^2\theta,$$

$1-\cos^2\theta=2\cos^4\theta$，解得：$\cos^2\theta=\frac{1}{2}$，$\theta=\frac{\pi}{4}$，

$$\iint_D f(x+y)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{\sqrt{2}}f(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)\rho d\rho .$$

**4．设 $f(x,y)$ 是连续函数，将二次积分

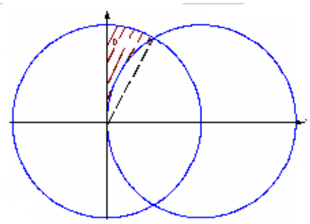
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^a f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho,\quad(a>0)$$

化为在直角坐标系下先对 y 后对 x 的二次积分．

解：原式= $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0}dx\int_{-x}^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)dy+\int_0^a dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)dy$.

5．用极坐标计算下列积分：

**(1) $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy$；



解：将二次积分 $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy$ 看作二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 化来，

$D:0\le x\le 1$，$\sqrt{4x-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}$，

令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，则： $4\cos\theta\le\rho\le 2$，

如图，两圆交点 $(x,y)=(1,\sqrt{3})$，即 $(\rho,\theta)=(2,\frac{\pi}{3})$，所以

$$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{4\cos\theta}^{2}\rho\cdot\rho d\rho$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{3}\rho^3)\Big|_{4\cos\theta}^{2}d\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{8}{3}-\frac{64}{3}\cos^3\theta)d\theta=\frac{8}{3}\times\frac{\pi}{6}-\frac{64}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta$$

$$=\frac{4}{9}\pi-\frac{64}{3}(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3})+\frac{64}{3}\cdot\frac{1}{3}[(\sin\frac{\pi}{2})^3-(\sin\frac{\pi}{3})^3]$$

$$=\frac{4}{9}\pi-\frac{128}{9}+8\sqrt{3}.$$

**(2) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\arctan\frac{y}{x}dx$.

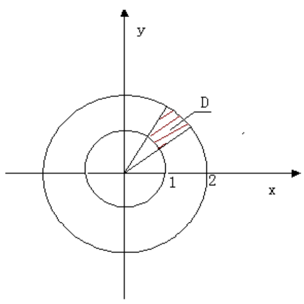
解：$D=\left\{(x,y)\middle|y\le x\le\sqrt{1-y^2},0\le y\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}=\left\{(\rho,\theta)\middle|0\le\rho\le 1,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$,

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\arctan\frac{y}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=\frac{\pi^2}{64}.$$

6. 计算下列二重积分

***(1) $\iint\limits_D\frac{e^{\arctan\frac{y}{x}}}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$，其中

$D=\{(x,y)|\ 1\le x^2+y^2\le 4, x\le y\le\sqrt{3}x\}$.



解：在极坐标变换 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 下，

$x\le y\le\sqrt{3}x$，有 $1\le\tan\theta\le\sqrt{3}$，即 $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$，

又 $\because$ $1\le x^2+y^2\le 4$， 则 $1\le\rho^2\le 4$，即 $1\le\rho\le 2$，所以

$$\iint_D \frac{e^{\arctan\frac{y}{x}}}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^2 \frac{e^{\arctan(\tan\theta)}}{\rho}\cdot\rho d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} e^{\theta} d\theta = e^{\theta}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = e^{\frac{\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{4}} .$$

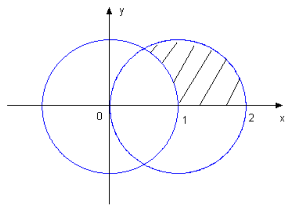
***(2). $\iint_D e^{xy}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|1\le xy\le 2, x\le y\le 2x\}$.

解：$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\theta \int_{\sqrt{\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{\cos\theta\sin\theta}}} e^{\rho^2\sin\theta\cos\theta}\rho d\rho$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}e^{\rho^2\cos\theta\sin\theta}\Bigg|_{\sqrt{\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{\cos\theta\sin\theta}}}\right]d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\frac{1}{2}\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\left(e^2-e\right)d\theta = \frac{e^2-e}{2}\ln 2$$

***(3). $\iint_D xyd\sigma$， 其中 $D=\{(x,y)|y\ge 0, x^2+y^2\ge 1, x^2+y^2-2x\le 0\}$.



解：$$I=\int_0^{\frac{1}{3}\pi}d\theta\int_1^{2\cos\theta}\rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\rho d\rho$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{3}\pi}\sin\theta\cos\theta\cdot\left[16(\cos\theta)^4-1\right]d\theta$$

$$=-\frac{2}{3}\cos^6\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{8}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{9}{16}.$$

***(4). 计算二重积分 $\iint\limits_{\substack{1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2\\ x\ge 0, y\ge 0}}|y-x|dxdy$.

解：因为 $|y-x|=\begin{cases} y-x, 当1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2, y\ge x确定的区域 \\ x-y, 当1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2, 0\le y\le x确定的区域 \end{cases}$.

原式$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta-\cos\theta)d\theta\int_1^2 r^2dr+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)d\theta\int_1^2 r^2dr$

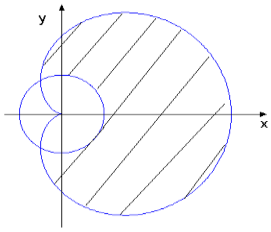
$$=\frac{7}{3}\{[-\cos\theta-\sin\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+[\sin\theta+\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}\}=\frac{7}{3}(-1+\sqrt{2}+\sqrt{2}-1)=\frac{14}{3}(\sqrt{2}-1).$$

**7. 计算平面区域 $D=\{(\rho,\varphi)|\frac{1}{2}\le\rho\le 1+\cos\varphi\}$ 的面积.

解：$A=\iint_D d\sigma$

$$= 2\left(\int_0^{\frac{2}{3}\pi} d\theta \int_0^{1+\cos\theta} \rho d\rho - \int_0^{\frac{2}{3}\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} \rho d\rho\right)$$

$$= \frac{5}{6}\pi + \frac{7}{8}\sqrt{3}\text{。}$$



**8. 计算立体 $\Omega = \left\{(x,y,z) \middle| x^2+y^2 \le z \le 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$ 的体积.

解：$V = \iint\limits_D \left(1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)d\sigma - \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)d\sigma$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(1+\sqrt{1-\rho^2}\right)\rho d\rho - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho d\rho$$

$$= 2\pi\left(\int_0^1 \left(1+\sqrt{1-\rho^2}\right)\rho d\rho - \frac{1}{4}\right) = 2\pi\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{6}\pi\text{。}$$

****9．设 $f(t)$ 是连续函数，证明 $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)dxdy = \int_{-1}^{1} f(u)du$.

证明：$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)dxdy = \int_{-1}^{0} dx \int_{-1-x}^{1+x} f(x+y)dy + \int_{0}^{1} dx \int_{x-1}^{1-x} f(x+y)dy$.

令 $x+y=u$， 则

$$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)dxdy = \int_{-1}^{0} dx \int_{-1}^{1+2x} f(u)du + \int_{0}^{1} dx \int_{2x-1}^{1} f(u)du$$

$$= \int_{-1}^{1} f(u)du \int_{\frac{u-1}{2}}^{\frac{u+1}{2}} dx = \int_{-1}^{1} f(u)du$$