

实验二：二连杆的正逆运动学及雅可比矩阵

1. 实验目的

本实验介绍如何使用 matlab 的 m 语言建立二连杆机器人运动学模型、微分运动学（雅可比）、逆运动学模型。

2. 实验内容

二连杆机器人是进行机器人控制中常用的模型，虽然机械臂大多是六轴，但是为了减轻求解复杂度，方便对算法的验证，仍会将六轴机械臂简化为两轴或者三轴的形式。

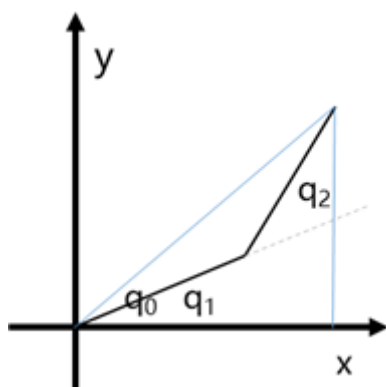


图 1 二连杆机器人模型

① 二连杆机器人的正运动学模型

基于几何学分析，二连杆机器人的运动学模型为：

$$\begin{aligned}x &= a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2) \\y &= a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1 + q_2)\end{aligned}$$

其中，关节角逆时针旋转为正。

② 二连杆机器人的微分雅可比模型

$$\begin{bmatrix} \partial x \\ \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \sin(q_1) - a_2 \sin(q_1 + q_2) & -a_2 \sin(q_1 + q_2) \\ a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2) & +a_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial q_1 \\ \partial q_2 \end{bmatrix}$$

③ 二连杆机器人的逆运动学模型

如图，由第二连杆末端向 x 轴做垂线，并连接第二连杆和原点，形成一个边长为 $x, y, a_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的直角三角形：

$$q_0 = \arctan \frac{y}{x}, \quad x = a_0 \cos q_0, \quad y = a_0 \sin q_0$$

$$\text{求 } q_1: \begin{cases} x - a_1 \cos(q_1) = a_2 \cos(q_1 + q_2) \\ y - a_1 \sin(q_1) = a_2 \sin(q_1 + q_2) \end{cases}$$

取平方并相加: $x^2 + y^2 + a_1^2 - 2a_1(x\cos q_1 + y\sin q_1) = a_2^2$

对 x 和 y 进行替换并移项, 可得:

$$x^2 + y^2 + a_1^2 - a_2^2 = 2a_0a_1(\cos q_0\cos q_1 + \sin q_0\sin q_1)$$

应用三角公式, 可得:

$$x^2 + y^2 + a_1^2 - a_2^2 = 2a_0a_1\cos(q_1 - q_0)$$

$$q_1 = \pm \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 + a_1^2 - a_2^2}{2a_0a_1}\right) + q_0 \quad (1)$$

求解 q_2 (求解 $q_1 + q_2$ 的过程和求解 q_1 的过程类似):

$$q_1 + q_2 = \pm \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 + a_2^2 - a_1^2}{2a_0a_2}\right) + q_0$$

$$q_2 = \pm \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 + a_2^2 - a_1^2}{2a_0a_2}\right) + q_0 - q_1 \quad (2)$$

由于 $(q_1 - q_0)(q_1 + q_2 - q_0) \leq 0$, 公式(1)和公式(2)中的+/-号始终是相反的, 仅有两组解。代码编写仅需考虑 $q_2 > 0$ 的情形。

3. 实验设计要求

- 利用 m 语言分别建立二连杆机器人正运动学模型、微分运动学 (雅可比)、逆运动学模型。
- 计算 $x=1$ 、 $y=2$ 的时候, q_1 、 q_2 的值。
- 计算 $q_1 = 20\text{deg}$ 、 $q_2 = 30\text{deg}$ 的时候, x 、 y 的值。
- 设计 matlab 的 gui 界面, 可以完成二连杆机器人的运动学解算。