华东理工大学 2019 - 2020 学年第一学期

《空间解析几何》课程期末考试试卷　A　2020. 1. 8

开课学院：理学院，　专业：数学类，　考试形式：闭卷，　所需时间 120 分钟

考生姓名：________　学号：________　班级：________　任课教师：杨勤民

题序	一	二	三	四	五	六	总　分
得分							
评卷人	杨	勤	民				

一、填空题（请将最简结果直接填在横线上，每小题5分，共50分）

1. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\vec{p}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{q}$, 若用向量 $\vec{p}$ 和 $\vec{q}$ 表示向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BC}$, 则 $\overrightarrow{AB}=$ ____________，$\overrightarrow{BC}=$ ____________.

2. 某线段被点 $(1,-2,6)$ 和 $(3,-5,11)$ 分成三等份，则该线段的两个端点坐标分别为 ____________，____________.

3. 已知三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 两两之间的夹角都为 $\dfrac{\pi}{3}$, 且 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, 则 $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=$ ____________.

4. $(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})\cdot[(\vec{a}-\vec{b})\times(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})]=$ ____ $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$.

5. 平面 $\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=\lambda-2\mu \\ z=1+2\lambda-\mu \end{cases}$ 的普通方程为 ____________.

6. 经过 z 轴和点 $(1,-2,3)$ 的平面的普通方程为 ____________.

7. 点 $(1,-1,2)$ 到直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z}{1}$ 的距离为 ________.

8. 直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z-7}{6}$ 和平面 $6x-2y+3z=0$ 之间的夹角为 ________.

9. 抛物线 $\begin{cases} z^2=2y \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转产生的旋转面的方程为 ____________.

10. 设 $OABC$ 为一个四面体，点 L,M,N 依次是 ΔABC 的三边 AB, BC, CA 的中点. 则在坐标系 $[O;\overrightarrow{OL},\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}]$ 中向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 的坐标分别为 ____________ 和 ____________.

(请将以下各题的详细解答写在后面的空白处或试卷背面，标明题号，不用抄题目)

二、(10分) 设 M 是线段 AB 的中点, 证明对于空间任意一点 P 有 $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$.

三、(10分) 若向量 $\vec{v}_1$ 与 $\vec{v}_2$ 不共线, 证明 $\vec{v}_1 \times (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$ 与 $\vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$ 也不共线.

四、(10分) 设有两条直线 l_1: $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$ 和 l_2: $\begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ x + 2y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$. 求

(1) 这两条直线之间的距离; (2)这两条直线的公垂线的方程.

五、(10分) 求经过三条平行直线 $x = y = z$, $x - 1 = y = z + 1$, $x = y + 1 = z - 1$ 的圆柱面的方程.

六、(10分) 设 $\mathbb{R}^3$中定点 P 到定直线 l 的距离为 1. 一族球面中的每个球面都过点 P, 且截直线 l 得到的弦长都是定值 2. 问该球面族的球心的轨迹是什么类型的曲面?

华东理工大学 2019 - 2020 学年第一学期

《空间解析几何》课程期末考试试卷　B　2020. 1. 8

开课学院：理学院，　专业：数学类，　考试形式：闭卷，　所需时间 120 分钟

考生姓名：__________　学号：__________　班级：__________　任课教师：杨勤民

题序	一	二	三	四	五	六	总　分
得分							
评卷人	杨		勤		民		

一、填空题（请将最简结果直接填在横线上，每小题5分，共50分）

1. 已知一个正六边形 $ABCDEF$ 的两个相邻边 $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{v}$, 若用向量 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 表示向量 $\overrightarrow{CE}$ 和 $\overrightarrow{EF}$, 则有 $\overrightarrow{CE}=$ ________, $\overrightarrow{EF}=$ ________.

2. 某线段的两个端点坐标分别为 $(-1,1,1)$ 和 $(5,-8,16)$, 则该线段的两个三等分点的坐标分别为 ________ 和 ________.

3. 设两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=4$, 则以 $2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+2\vec{b}$ 为相邻边的平行四边形的两条对角线的长度分别为 ________ 和 ________.

4. $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c})\cdot(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})=$ ____ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

5. 曲面 $\begin{cases} x=u+v \\ y=u-v \\ z=4uv \end{cases}$ 的普通方程为 ________.

6. 过点 $(2,3,-1)$, 与向量 $(3,-2,1)$ 平行的直线的点向式方程为 ________.

7. 在 z 轴上到两个平面 $2x+3y+6z-6=0$ 和 $3x-6y-2z-18=0$ 有相等距离的点的坐标为 ________ 或 ________.

8. 曲线 $\begin{cases} x^2+y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转产生的旋转面的方程为 ________.

9. 两条直线 $\begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 2x-y+z+1=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x-y-2z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 之间的夹角为 ________.

10. 设 $OABC$ 为一个四面体, L, M, N 依次是 ΔABC 的三边 AB, BC, CA 的中点. 取坐标系 $\mathrm{I}[O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]$, $\mathrm{II}[O;\overrightarrow{OL},\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}]$. 则从坐标系II到I的仿射坐标变换公式为 $x'=$ __ $x+$ __ $y+$ __ z, $y'=$ __ $x+$ __ $y+$ __ z, $z'=$ __ $x+$ __ $y+$ __ z.

(请将以下各题的详细解答写在后面的空白处或试卷背面，标明题号，不用抄题目)

二、(10分) 证明 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

三、(10分) 证明 $[\vec{v}_1\times(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)]\times[\vec{v}_2\times(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)]=\left|\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right|^2(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)$.

四、(10分) 求光线 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ 照在镜面 $x+y+z+1=0$ 上所产生的反射光线的方程.

五、(10分) 求经过三条平行直线 $x=y=z$, $x+1=y=z-1$, $x-1=y+1=z-2$ 的圆柱面的方程.

六、(10分) 设 S 为$\mathbb{R}^3$中的抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$, $P=(a,b,c)$ 为 S 外一固定点, 满足 $a^2+b^2>2c$. 过 P 作 S 的所有切线. 证明: 这些切线的切点落在同一张平面上.

华东理工大学 2019 - 2020 学年第一学期
《空间解析几何》课程期末考试标准答案 A 2020. 1. 8

一、填空题（每小题5分，共50分）

1. $\dfrac{\vec{p}-\vec{q}}{2}$, $\dfrac{\vec{p}+\vec{q}}{2}$.
2. $(-1,1,1)$, $(5,-8,16)$
3. 5
4. 2
5. $3x+y-2z+5=0$
6. $2x+y=0$
7. $\dfrac{\sqrt{91}}{7}$ 或写为 $\sqrt{\dfrac{13}{7}}$
8. $\arcsin\dfrac{24}{49}$
9. $x^2+z^2=2y$
10. $(0,2,-2)$ $(-2,2,0)$

二、(10分)

证：由 M 是线段 AB 的中点知 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$. ....(5分)

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB})=\frac{1}{2}(2\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})=\overrightarrow{PM}$. ....(5分)

三、(10分)

证：由 $\vec{v}_1$ 与 $\vec{v}_2$ 不共线知 $\vec{v}_1\times\vec{v}_2\neq\vec{0}$. ....(2分)

$[\vec{v}_1\times(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)]\times[\vec{v}_2\times(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)]$

$=\{\vec{v}_1\cdot[\vec{v}_2\times(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)]\}(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)-\{(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)\cdot[\vec{v}_2\times(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)]\}\vec{v}_1$ ....(4分)

$=\{(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)\cdot(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)]\}(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)-0\vec{v}_1$ ....(3分)

$=|\vec{v}_1\times\vec{v}_2|^2(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)\neq\vec{0}$ ....(1分)

因此 $\vec{v}_1\times(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)$ 与 $\vec{v}_2\times(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)$ 不共线.

四、(10分)

解: l_1 的方向向量为 $\vec{v}_1=(1,1,-1)\times(2,1,-1)=(0,-1,-1)$.

在 l_1 上可取一点 $M_1(1,0,0)$.

l_2 的方向向量为 $\vec{v}_2=\frac{1}{3}(1,2,-1)\times(1,2,2)=(2,-1,0)$.

在 l_1 上可取一点 $M_2(0,0,-2)$.

它们的公垂线的方向向量为 $\vec{v}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=(-1,-2,2)$. ....(5分)

(1)这两条直线之间的距离为

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right|=\frac{|(-1,0,-2)\cdot(-1,-2,2)|}{|(-1,-2,2)|}=1.\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2分)$$

(2)设点 $P(x,y,z)$ 为这两条直线的公垂线上任意一点,

则 $\overrightarrow{PM_1},\vec{v}_1,\vec{v}$ 共面, 因此 $(\overrightarrow{PM_1},\vec{v}_1,\vec{v})=0$, 即 $4x-y+z-4=0$.

$\overrightarrow{PM_2},\vec{v}_2,\vec{v}$ 共面, 因此 $(\overrightarrow{PM_2},\vec{v}_2,\vec{v})=0$, 即 $2x+4y+5z+10=0$.

故所求公垂线的方程为 $\begin{cases}4x-y+z-4=0\\2x+4y+5z+10=0\end{cases}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(3分)

(2)的其他答案: (i) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+\frac{4}{3}}{2}=\dfrac{z+\frac{4}{3}}{-2}$ (ii) $\begin{cases}y+z+\frac{8}{3}=0\\2x-y-\frac{10}{3}=0\end{cases}$

五、(10分)

解: 圆柱面的母线方向 $\vec{l}$ 即为三条平行直线的方向, 即 $\vec{l}=(1,1,1)$.

与母线垂直的一个平面 π 为: $x+y+z=0$.

该平面与题设中的三条直线的交点分别为: $O(0,0,0)$, $P(1,0,-1)$, $Q(0,-1,1)$.

设点 (x,y,z) 为圆柱面的轴线上的任意一点, 则该点到上述三个交点的距离相等,

即 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z+1)^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2+(z-1)^2}$,

化简得到轴线 L_0 的方程为: $x-1=y+1=z$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(5分)

再设点 (x,y,z) 为圆柱面上的任意一点, 则该点到直线 L_0 的距离与圆柱面上的一点 O 到轴线的距离相等, 即 $\dfrac{|(x-1,y+1,z)\times\vec{l}|}{|\vec{l}|}=\dfrac{|(0-1,0+1,0)\times\vec{l}|}{|\vec{l}|}$

化简得到所求圆柱面的方程为 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-3x+3y=0$. $\cdots\cdots\cdots$(5分)

注: $(x-y-2)^2+(x-z-1)^2+(y-z+1)^2=6$

六、(10分)

解: 建立坐标系使得 l 为 z 轴, 且点 P 的坐标为 $(1,0,0)$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(2分)

则直线 l 的参数方程为 $x=0,y=0,z=t$, 且其中的参数 t 刚好为它对应的点到直线 l 上的固定点 O 的有向距离.

设球心坐标为 (x_0,y_0,z_0), 则球面方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(1-x_0)^2+y_0^2+z_0^2$.

将 l 的参数方程代入上述球面方程得 $t^2-2z_0t+2x_0-1=0$.

由截得的弦长为定值 2 知道, 这个关于 t 的二次方程的两根之差等于 2,

即 $2\sqrt{z_0^2-2x_0+1}=2$, 化简得 $z_0^2-2x_0=0$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(5分)

反之,当球心坐标 (x_0,y_0,z_0) 满足 $z_0^2-2x_0=0$ 时可求得相应的球面在直线 l 上截得的弦长都是定值 2.

故球心的轨迹方程为 $z^2-2x=0$, 它是一个抛物柱面. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(3分)

华东理工大学 2019 - 2020 学年第一学期
《空间解析几何》课程期末考试标准答案 B 2020. 1. 8

一、填空题（每小题5分，共50分）

1. $\vec{v}-\vec{u}$ $\quad -\vec{u}-\vec{v}$

2. $(1,-2,6)$, $(3,-5,11)$

3. $3\sqrt{37}$ $\quad \sqrt{13}$

4. 7

5. $x^2-y^2-z=0$

6. $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$

7. $(0,0,6)$ $\quad (0,0,-\dfrac{3}{2})$

8. $x^2+y^2+z^2-2y=0$

9. $\arccos\dfrac{4\sqrt{910}}{455}$

10. 1 1 −1 −1 1 1 1 −1 1

二、(10分)

证: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$ ....(7分)

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ....(3分)

三、(10分)

证法一: 左边$=[\vec{v}_1\times(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)]\cdot(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)\vec{v}_2-[\vec{v}_1\times(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)]\cdot\vec{v}_2(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)$ ....(5 分)

$=0\vec{v}_2-(\vec{v}_1,\vec{v}_1\times\vec{v}_2,\vec{v}_2)(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)$ ....(2分)

$=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_1\times\vec{v}_2)(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)$ ....(1分)

$=(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)\cdot(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)=$ 右边 ....(2分)

证法二: 左边$=(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2\vec{v}_1-\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1\vec{v}_2)\times(\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2\vec{v}_1-\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1\vec{v}_2)$ ....(5分)

$=-(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)^2\vec{v}_1\times\vec{v}_2-(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1)(\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2)\vec{v}_2\times\vec{v}_1$ ....(2分)

$=[(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1)(\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2)-(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)^2]\vec{v}_1\times\vec{v}_2$ ....(1分)

$=[(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)\cdot(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)]\vec{v}_1\times\vec{v}_2=$ 右边 ....(2分)

四、(10分)

解: 在光线 L_1 上存在一点 $M_1(1,2,-1)$. ....(2分)

过 M_1 垂直于镜面 π: $x+y+z+1=0$ 的直线 L_2 为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$. .....(2分)

其参数方程为 $x=1+t$, $y=2+t$, $z=-1+t$. 代入镜面 π 的方程得到 $t=-1$. 即 L_2 与镜面 π 的交点在上述直线方程中对应参数 $t=-1$, 因此点 M_1 关于镜面 π 的对称

点 M_2 对应的参数为 $t=-1\times 2=-2$, 代入上述参数方程得到 M_2 的坐标为 $(-1,0,-3)$.

....(3分)

光线 L_1 的参数方程为 $x=1-t,\quad y=2+t,\quad z=-1+2t.$ 代入镜面 π 的方程得到 $t=-\frac{3}{2}$. 即 L_1 与镜面 π 的交点 M_0 在上述直线方程中对应参数 $t=-\frac{3}{2}$, 代回 L_1 的参数方程得到 M_0 的坐标为 $(\frac{5}{2},\frac{1}{2},-4)$. ....(2分)

所求反射光线为过 M_2 和 M_0 的直线: $\dfrac{x+1}{\frac{5}{2}+1}=\dfrac{y}{\frac{1}{2}}=\dfrac{z+3}{-4+3}$, 即 $\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{-2}$. (1分)

五、(10分)

解: 圆柱面的母线方向 $\vec{l}$ 即为三条平行直线的方向, 即 $\vec{l}=(1,1,1)$.

与母线垂直的一个平面 π 为: $x+y+z=0$.

该平面与题设中的三条直线的交点分别为: $O(0,0,0)$, $P(-1,0,1)$, $Q(\frac{1}{3},-\frac{5}{3},\frac{4}{3})$.

设点 (x,y,z) 为圆柱面的轴线上的任意一点, 则该点到上述三个交点的距离相等, 即 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x+1)^2+y^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-\frac{1}{3})^2+(y+\frac{5}{3})^2+(z-\frac{4}{3})^2}$,

化简得到轴线 L_0 的方程为: $\begin{cases} x-z+1=0, \\ x-5y+4z-7=0. \end{cases}$

化成点向式方程得 $x+1=y+\frac{8}{5}=z$. （注: 圆心 $(-\frac{2}{15},-\frac{11}{15},\frac{13}{15})$, 半径 $\frac{7\sqrt{6}}{15}$ ）.......(5分)

再设点 (x,y,z) 为圆柱面上的任意一点, 则该点到直线 L_0 的距离与圆柱面上的一点 O 到轴线的距离相等, 即 $\dfrac{|(x+1,y+\frac{8}{5},z)\times\vec{l}|}{|\vec{l}|}=\dfrac{|(0+1,0+\frac{8}{5},0)\times\vec{l}|}{|\vec{l}|}$

化简得到所求圆柱面的方程为 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx+\frac{2}{5}x+\frac{11}{5}y-\frac{13}{5}z=0$. ...(5 分)

注: $(y-z+\frac{8}{5})^2+(z-x-1)^2+(x-y-\frac{3}{5})^2=\frac{98}{25}$.

六、(10分)

证: 设这些切线的切点坐标为 (x,y,z), 则存在切线的方向向量 (u,v,w) 和相应的参数 t 使得 $(x,y,z)=(a,b,c)+t(u,v,w)$. ....(2分)

代入 S 的方程得 $(u^2+v^2)t^2+2(au+bv-w)t+a^2+b^2-2c=0$.

则该方程有二重实根, 因此 $\Delta=0$, 即 $(au+bv-w)^2=(u^2+v^2)(a^2+b^2-2c)$. .....(3分)

相应的二重根 $t=\dfrac{w-au-bv}{u^2+v^2}=\dfrac{a^2+b^2-2c}{w-au-bv}$.

由 $(x,y,z)=(a,b,c)+t(u,v,w)$ 得 $t=\dfrac{x-a}{u}=\dfrac{y-b}{v}=\dfrac{z-c}{w}$.

因此有 $\dfrac{a^2+b^2-2c}{w-au-bv}=\dfrac{x-a}{u}=\dfrac{y-b}{v}=\dfrac{z-c}{w}=\dfrac{z-c-a(x-a)-b(y-b)}{w-au-bv}$.........(3分)

比较左右两端的分子得到 $a^2+b^2-2c=z-c-a(x-a)-b(y-b)$,

即 $ax+by-z-c=0$. 这说明所有切点都在平面 $ax+by-z-c=0$ 上. ....(2分)