ECUST

Mécanique des Fluides

Partie A

Introduction

Prof. René Muller
01/22

Introduction

-Grandeurs caractéristiques en mécanique des fluides

-Champs scalaires et vectoriels

-Notion de particule fluide

-Outils mathématiques fondamentaux

Grandeurs caractéristiques en mécanique des fluides

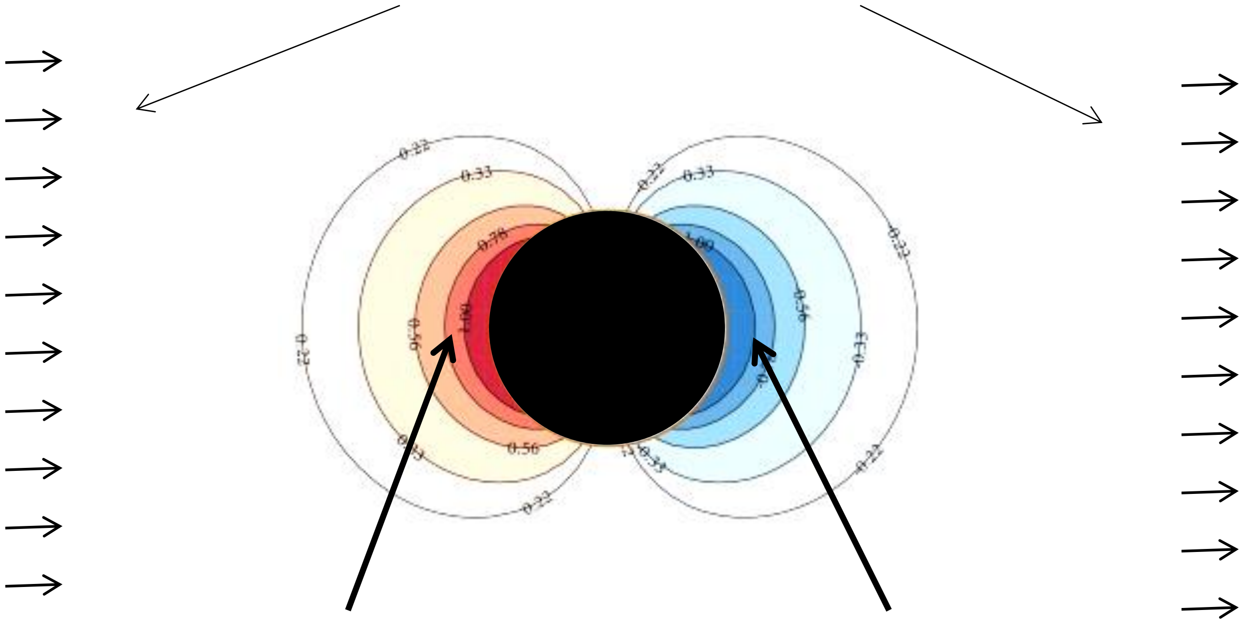
Grandeurs liées à l'écoulement		Unités SI	Dimensions
Vitesse du fluide:	vecteur $\vec{v}$	$m \cdot s^{-1}$	LT^{-1}
Accélération du fluide:	vecteur $\vec{a}$	$m \cdot s^{-2}$	LT^{-2}
Pression dans le fluide:	scalaire p	$Pa = N \cdot m^{-2}$	MLT^{-2}
Température dans le fluide	scalaire T	K	Θ
Propriétés du fluide			
Masse volumique :	scalaire ρ	$kg \cdot m^{-3}$	ML^{-3}
Viscosité dynamique:	scalaire η	$Pa \cdot s$	MLT^{-1}
Viscosité cinématique:	scalaire $\nu \left(= \frac{\eta}{\rho}\right)$	$m^2 \cdot s^{-1}$	L^2T^{-1}
Autres grandeurs			
Accélération de la pesanteur:	vecteur $\vec{g}$	$m \cdot s^{-2}$	LT^{-2}

Un exemple typique: écoulement d’un fluide autour d’une sphère fixe

On se place à un instant donné

Vitesse incidente uniforme loin de la sphère

Pression uniforme loin de la sphère



Pression uniforme loin de la sphère

Surpression en amont de la sphère

Dépression en aval de la sphère

La pression (à l’instant considéré) dépend des coordonnées d’espace:

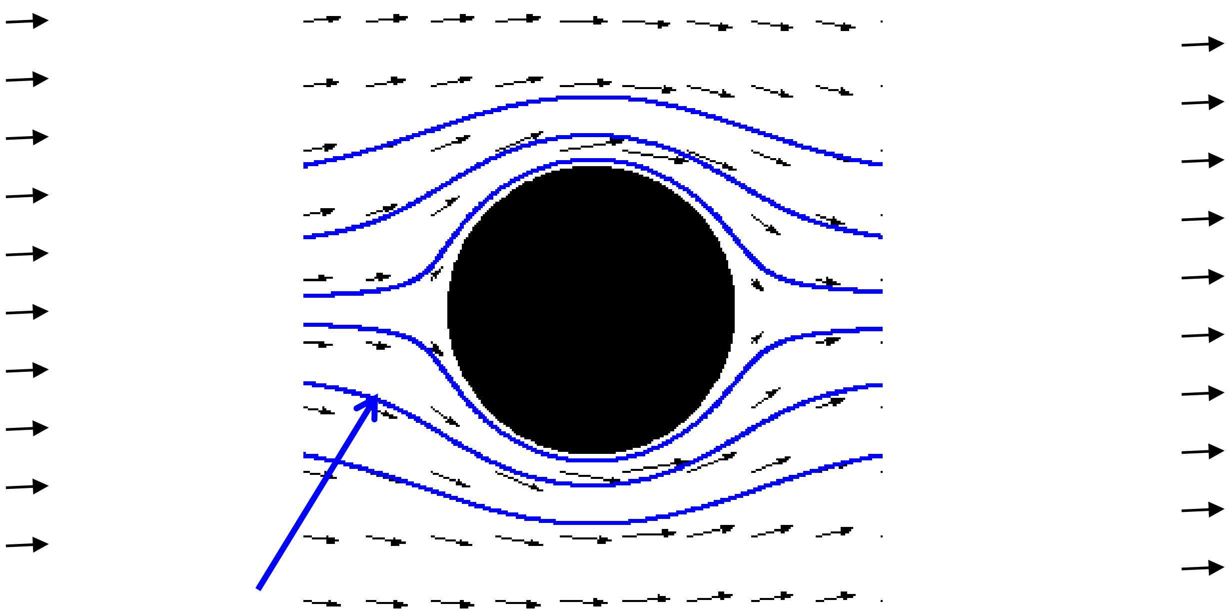
$$p = p(x, y, z)$$

Champ (scalaire) de pression à un instant donné

Un exemple typique: écoulement d'un fluide autour d'une sphère fixe

On se place à un instant donné

vitesse uniforme
loin de la sphère



vitesse uniforme
loin de la sphère

Lignes de courant
(tangentes à la vitesse en tout point)

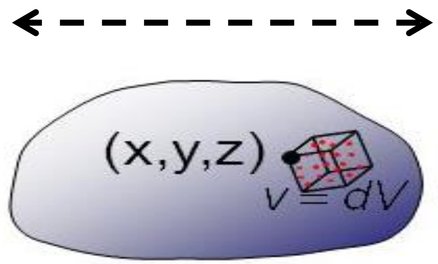
La vitesse (à l'instant considéré) dépend des coordonnées d'espace:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Champ (vectoriel) de vitesse
à un instant donné

Notion de particule fluide

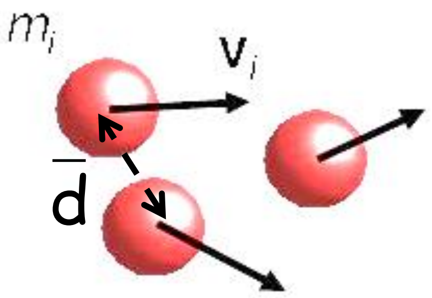
L: échelle macroscopique



volume: V

Échelle du système étudié
(conduite, pompe, obstacle
dans un flux, ..)

$\bar{d}$: **échelle microscopique ou moléculaire**



$\bar{\mathbf{d}}$: distance intermoléculaire dans un liquide libre
parcours moyen dans un gaz

$\vec{v}, \rho, p$ sont discontinus à cette échelle

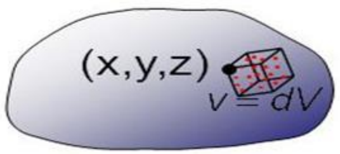
En mécanique des fluides on ne définit pas
les grandeurs à l'échelle moléculaire

Notion de particule fluide

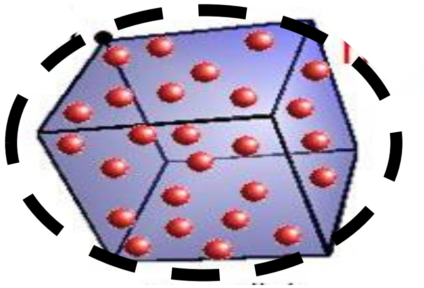
L_p: **méchelle mésoscopique**

$$\mathbf{L} \gg \mathbf{L_p} \gg \bar{\mathbf{d}}$$

L: **échelle macroscopique**

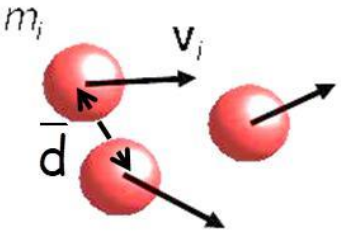


volume: V



volume: dV

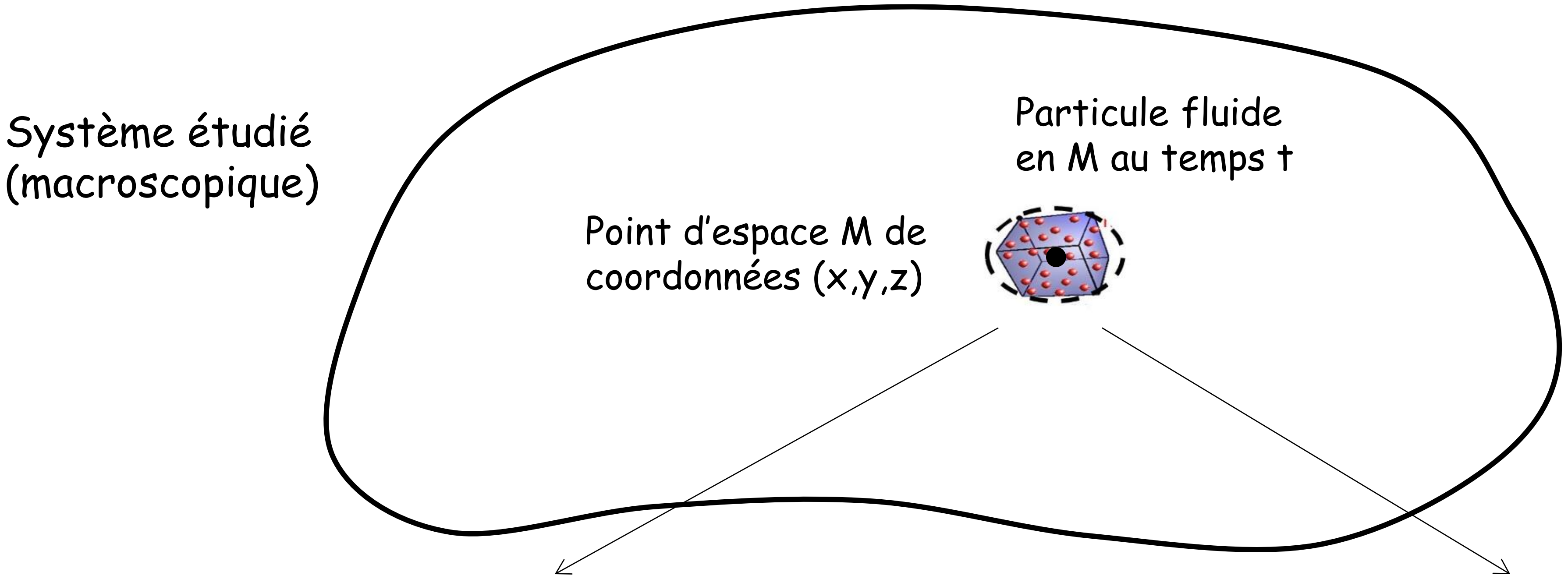
$\bar{d}$: **échelle microscopique**



Une particule fluide contient un grand nombre de molécules mais sa taille reste très inférieure à celle du système étudié

Les propriétés du fluide en un point d'espace sont les moyennes des propriétés des molécules contenues dans la particule fluide

Les grandeurs physiques sont continues dans le fluide



dV: volume de la particule fluide $M(x,y,z) \in dV$

dm: masse de la particule fluide

$$\rho(x, y, z, t) = \frac{dm}{dV}$$: masse volumique du fluide en (x,y,z) et au temps t

$\vec{v}(x, y, z, t)$: vitesse moyenne des molécules dans la particule fluide

Outils mathématiques en mécanique des fluides

L'opérateur gradient (ou « nabla »): $\vec{\nabla}$

C'est un <u>vecteur</u> de coordonnées cartésiennes: $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ $\quad \vec{\nabla} = \overrightarrow{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{e_z}\frac{\partial}{\partial z}$

$\vec{\nabla}$ peut opérer sur un champ scalaire (par exemple le champ de pression p(x,y,z,t))

$$\vec{\nabla}p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \text{à } y,z,t \text{ constants} \\ \frac{\partial p}{\partial y} & \text{à } x,z,t \text{ constants} \\ \frac{\partial p}{\partial z} & \text{à } y,z,t \text{ constants} \end{pmatrix} = \overrightarrow{e_x}\frac{\partial p}{\partial x} + \overrightarrow{e_y}\frac{\partial p}{\partial y} + \overrightarrow{e_z}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Le gradient du champ scalaire p
est un champ vectoriel

Définition: *Un champ de vitesse* $\vec{v}(x, y, z)$ *dérive d'un potentiel* Φ *s'il existe un champ scalaire* Φ*(x,y,z) tel que* $\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$

Outils mathématiques en mécanique des fluides

L'opérateur $\vec{\nabla}$ peut opérer de différentes façons sur un champ vectoriel (par exemple $\vec{v}$):

La divergence de $\vec{v}$ est le produit scalaire de $\vec{\nabla}$ et de $\vec{v}$:

$$\mathrm{div}(\vec{v}) = \vec{\nabla}.\vec{v} = \left(\overrightarrow{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{e_z}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(v_x\overrightarrow{e_x} + v_y\overrightarrow{e_y} + v_z\overrightarrow{e_z}\right) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

La divergence d'un champ vectoriel est un (champ) scalaire

L'expression est simple en coordonnées cartésiennes car les vecteurs de base $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_Z}$ sont indépendants des coordonnées

Outils mathématiques en mécanique des fluides

L'opérateur $\vec{\nabla}$ peut opérer de différentes façons sur un champ vectoriel :

$$\mathrm{rot}(\vec{\mathrm{v}}) = \vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{v_x} \\ \mathrm{v_y} \\ \mathrm{v_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} \end{pmatrix}$$

L'expression est simple en coordonnées cartésiennes car les vecteurs de base $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_Z}$ sont indépendants des coordonnées

Le rotationnel de $\vec{\mathrm{v}}$ est le produit vectoriel de $\vec{\nabla}$ et de $\vec{\mathrm{v}}$:

Définition: un champ de vitesse est irrotationnel si $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ en tout point de l'espace

Outils mathématiques en mécanique des fluides

Le Laplacien est le produit scalaire de $\vec{\nabla}$ par lui-même. C'est un opérateur et un scalaire :

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2 = \Delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}^2}$$

L'expression est simple en coordonnées cartésiennes car les vecteurs de base $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_Z}$ sont indépendants des coordonnées

Le Laplacien peut opérer sur un champ scalaire (comme la température) :

$$\vec{\nabla}^2 \mathrm{T} = \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{z}^2}$$

Le résultat est un champ scalaire

Le Laplacien peut opérer sur un champ vectoriel (comme la vitesse) :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{\mathrm{v}} = \vec{\nabla}^2 \begin{pmatrix} \mathrm{v_x} \\ \mathrm{v_y} \\ \mathrm{v_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{z}^2} \\ \frac{\partial^2 \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{z}^2} \\ \frac{\partial^2 \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{z}^2} \end{pmatrix}$$

Le résultat est un champ vectoriel

ECUST

Mécanique des Fluides

Partie B

Equation de Bernoulli / première approche

Equation de Bernoulli / première approche

-Conservation de l'énergie mécanique d'un fluide parfait

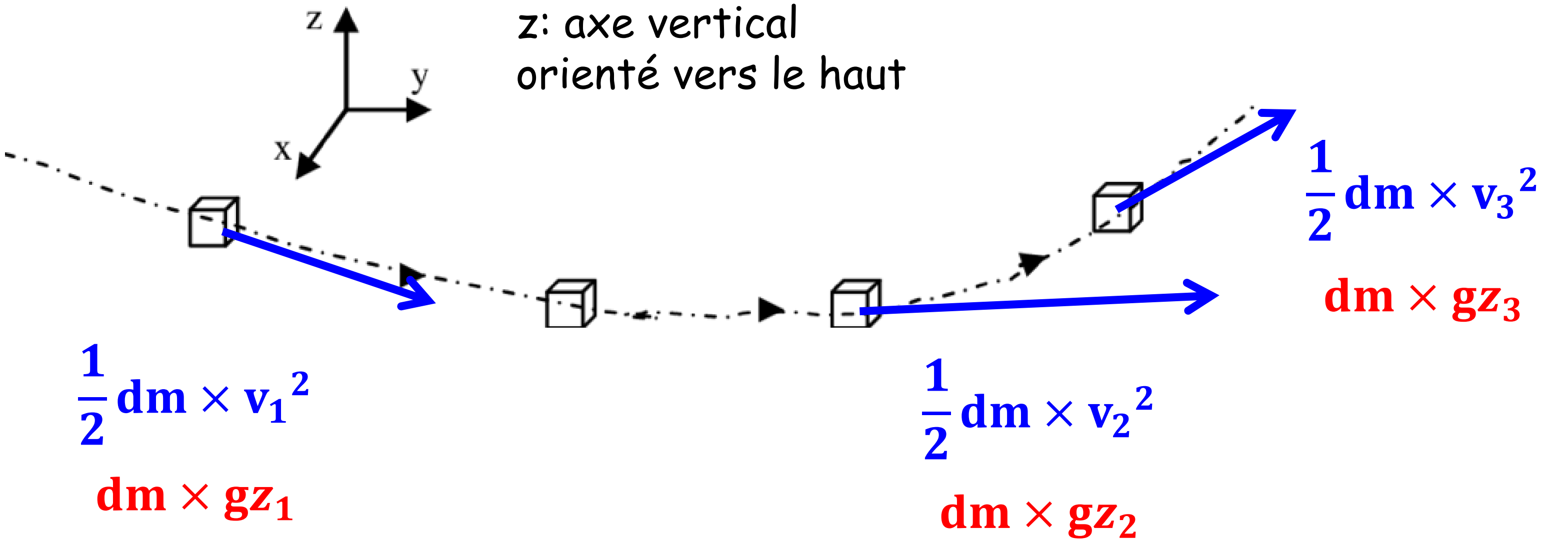
-Application aux écoulements externes

- Pression d'arrêt, force de traînée

-Application aux écoulements internes

- Débitmètre de Venturi, conduite cylindrique de section constante

Energie mécanique d'une particule fluide le long de sa trajectoire



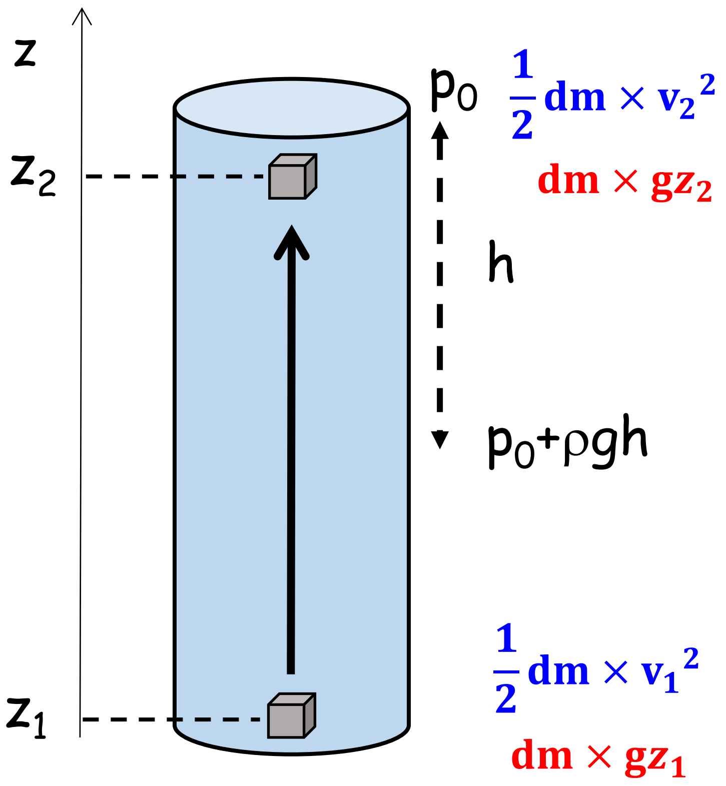
dm: masse de la particule fluide

Energie cinétique par unité de masse: $\frac{1}{2}\mathbf{v^2}$ $(v^2 = \vec{v}.\vec{v} = ||\vec{v}||^2)$ *Unités:* $m^2 \cdot s^{-2} = J \cdot kg^{-1}$

Energie potentielle de pesanteur par unité de masse: $\mathbf{g \times z}$ $J \cdot kg^{-1}$

Une troisième forme d'énergie mécanique est liée au travail des forces de pression

Travail des forces de pression



Ecoulement vertical d'un fluide incompressible (d'un liquide) dans une conduite de section constante: $\Rightarrow v_1=v_2$

Si l'écoulement est très lent (frottements négligeables), la pression est la pression hydrostatique: $p=p_0+\rho gh$

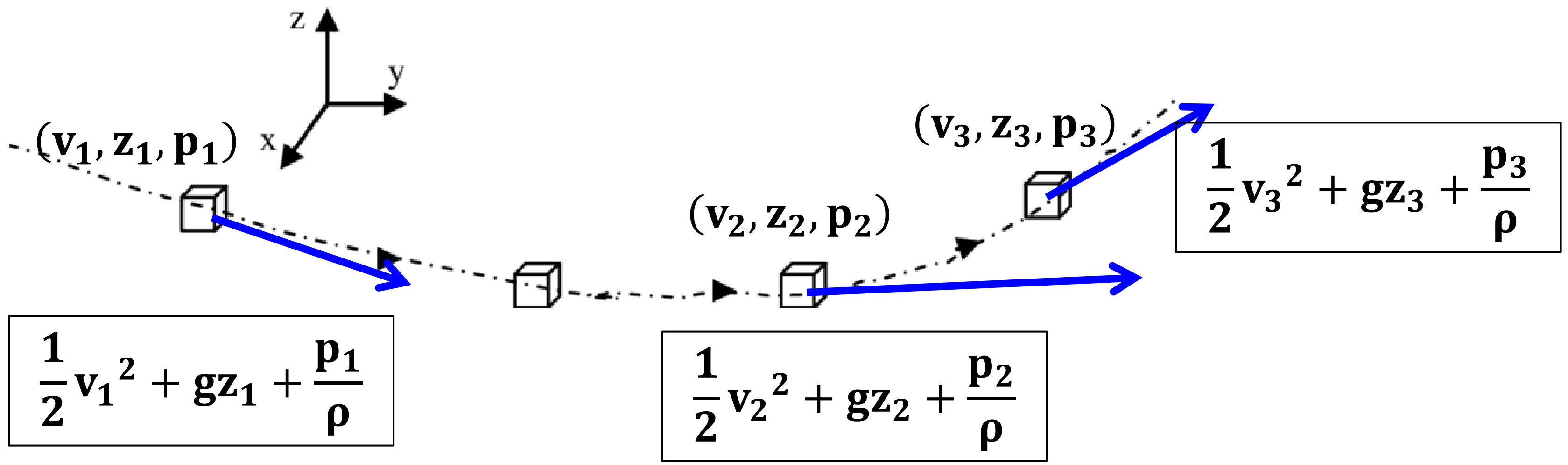
Variation d'énergie potentielle massique entre 1 et 2: $g(z_2 - z_1) > 0$

Variation de pression entre 1 et 2: $p_2 - p_1 = \rho g(z_1 - z_2) < 0$

$$\frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \frac{p_1}{\rho} + gz_1$$

Si la vitesse est constante, la quantité: $\frac{p}{\rho} + gz$ se conserve

Equation de Bernoulli



Si on vérifie les deux hypothèses:

fluide « incompressible »: $\rho \cong Cst$
c'est en pratique le cas d'un liquide ou d'un gaz à faible vitesse

fluide « parfait »: viscosité nulle
en pratique c'est une approximation car tous les fluides réels ont une viscosité

$$\frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = Cst$$

le long d'une trajectoire

Cette forme simplifiée de l'équation de Bernoulli ne s'applique que si les frottements visqueux sont négligeables . Le cas des fluides visqueux sera discuté plus loin.

Equation de Bernoulli

On peut montrer que si l'écoulement est de plus <u>irrotationnel</u> et <u>stationnaire</u>:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0} \qquad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

Alors: $$\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \mathbf{gz} + \frac{\mathbf{p}}{\boldsymbol{\rho}}$$ est **<u>uniforme</u>** (identique pour toutes les particules fluides)

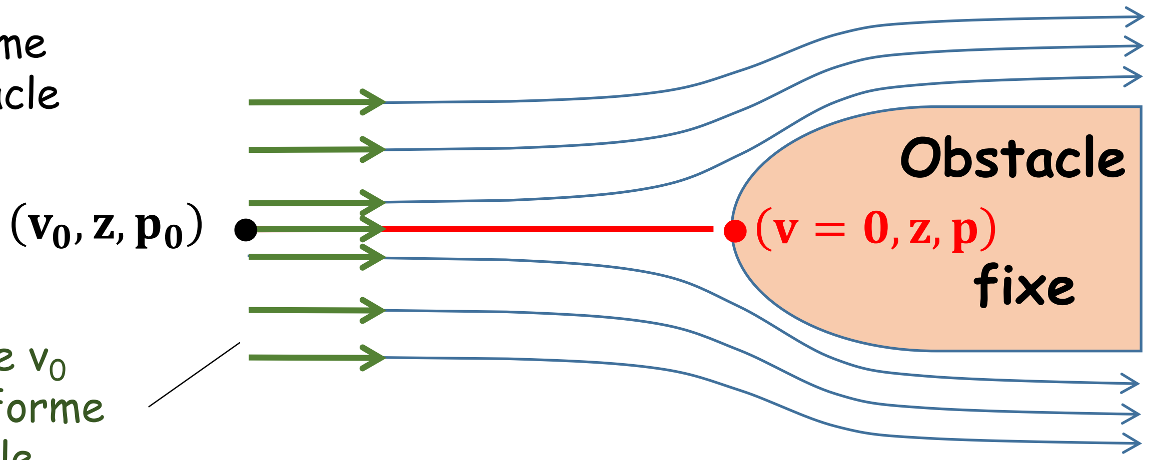
$$\left.\begin{array}{c} \rho = \mathrm{Cst, frottements\ négligeables} \\ \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0} \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho}\right) = \vec{0}$$

L'énergie mécanique massique est <u>uniforme</u> dans le fluide, c'est-à-dire identique pour toutes les trajectoires

Applications de l'équation de Bernoulli **Ecoulements externes**

Ecoulement horizontal stationnaire d'un fluide autour d'un obstacle fixe:

Pression uniforme
p_0 loin de l'obstacle



Vitesse incidente v_0
horizontale et uniforme
loin de l'obstacle

Point d'arrêt:

Pour une trajectoire particulière,
la vitesse s'annule sur l'obstacle

Equation de Bernoulli pour cette trajectoire:

$$\frac{1}{2}v_0^2 + gz + \frac{p_0}{\rho} = gz + \frac{p}{\rho}$$

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2$$

Pression d'arrêt

Applications de l'équation de Bernoulli **Ecoulements externes**

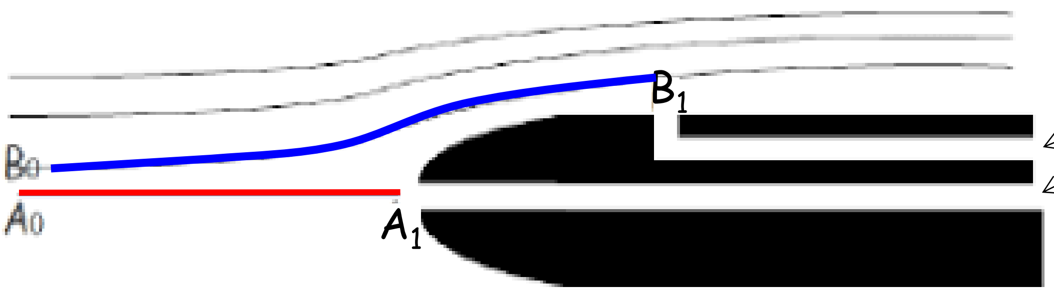
Sonde ou anémomètre de Pitot (mesure de la vitesse d'un fluide):

Trajectoire A: $p_{A_1} = p_{A_0} + \frac{1}{2}\rho\, v_{A_0}^{\;2}$

A_1: point d'arrêt

Trajectoire B: $p_{B_1} + \frac{1}{2}\rho\, v_{B_1}^{\;2} = p_{B_0} + \frac{1}{2}\rho\, v_{B_0}^{\;2}$

$$\Rightarrow \mathbf{p_{A_1} - p_{B_1} = \frac{1}{2}\rho\, v_{B_1}^{\;2}}$$



On mesure p_{A1} et p_{B1}

On en déduit: $v_{B_1} = \sqrt{\dfrac{2(p_{A_1} - p_{B_1})}{\rho}}$

Si $v_{B1} \cong v_{B0}$ on mesure la vitesse incidente:

$$\boxed{v_{B_0} = \sqrt{\dfrac{2(p_{A_1} - p_{B_1})}{\rho}}}$$

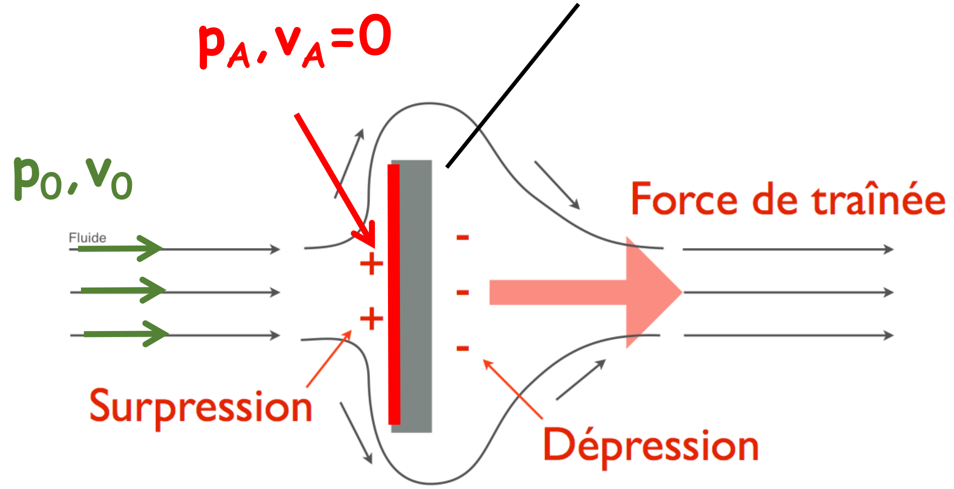
Vitesse incidente uniforme: $v_{A_0} = v_{B_0}$

Pression uniforme loin de l'obstacle: $p_{A_0} = p_{B_0} = p_0$

Applications de l'équation de Bernoulli **Ecoulements externes**

Force de traînée

Soit un obstacle fixe, ici une plaque plane perpendiculaire au flux incident



Si tous les points sur la surface amont étaient des points d'arrêt et en ne prenant en compte que la surpression, on aurait:

$$F_{traînée} = S \times (p_A - p_0) = S \times \frac{1}{2}\rho {v_0}^2$$

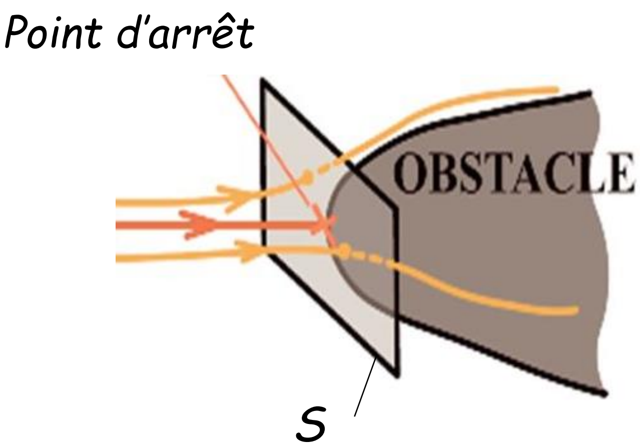
S: aire de la surface amont

Cette expression de la force de traînée correspond à un fluide parfait ou lorsque les forces visqueuses sont négligeables

Applications de l'équation de Bernoulli **Ecoulements externes**

Force de traînée et coefficient de traînée

En réalité, on doit tenir compte de la forme de l'obstacle



La pression n'est pas partout égale à la pression d'arrêt et on doit également tenir compte de la dépression en aval:

On introduit un coefficient de traînée adimensionnel C_x:

$$F_{\text{traînée}} = S(p_A - p_0) \times C_x = \boxed{S} \times \boxed{\frac{1}{2}\rho {v_0}^2} \times \boxed{C_x}$$

Surface projetée de l'obstacle

Pression d'arrêt

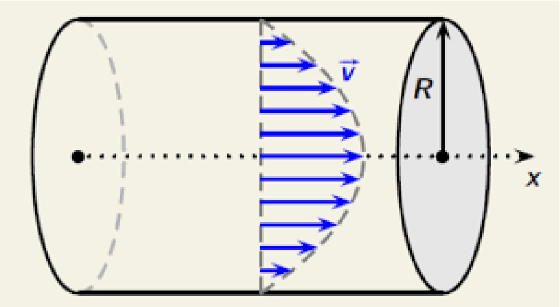
Coefficient de traînée

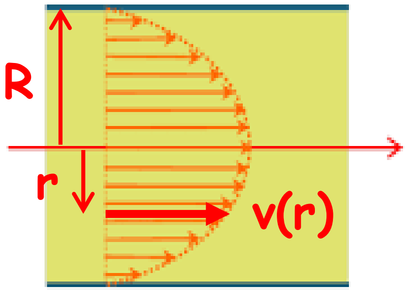
Ce coefficient de traînée tiendra également compte des forces de frottement visqueuses et donc de la viscosité du fluide

Applications de l'équation de Bernoulli **Ecoulements internes**

Ecoulement stationnaire dans une conduite cylindrique horizontale

Débits faibles – écoulement laminaire





Pour des débits suffisamment faibles, la vitesse du fluide varie avec le rayon suivant une loi parabolique.

Forces visqueuses prédominantes

Débit volumique: $D_v = \iint_S v\, dS = \int_0^R 2\pi r \times v(r) dr$

Débit massique: $D_m = \iint_S \rho v\, dS$

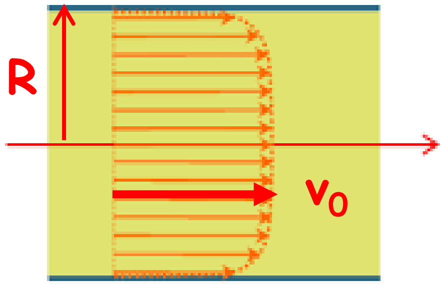
Vitesse moyenne: $\overline{v} = \frac{D_v}{S}$

Fluide incompressible: $D_m = \rho \times D_v$

Applications de l'équation de Bernoulli **Ecoulements internes**

Ecoulement stationnaire dans une conduite cylindrique horizontale

Débits élevés – écoulement turbulent



$v(r) \cong Cst$

Pour des débits plus élevés la vitesse du fluide varie peu avec le rayon et peut être considérée comme uniforme.

Fluide parfait ou forces visqueuses négligeables

Débit volumique: $$D_v = \iint_S v\, dS = \pi R^2 v_0$$

Vitesse moyenne: $$\bar{v} = \frac{D_v}{S} = v_0$$

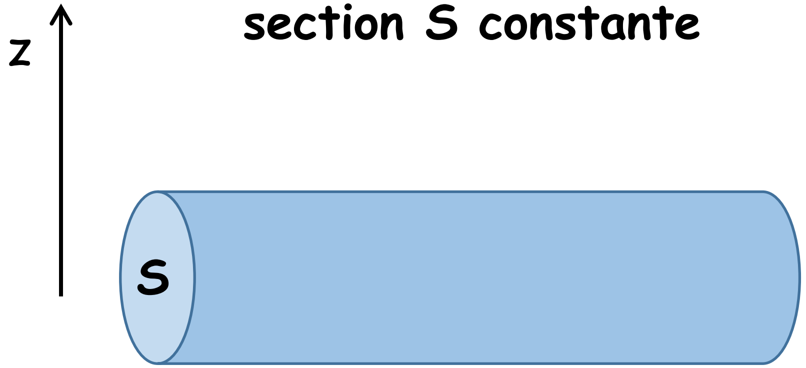
Fluide incompressible:

$$D_m = \rho \times S \times v_0$$

Applications de l'équation de Bernoulli **Ecoulements internes**

Ecoulement dans une conduite cylindrique – Fluide parfait

conduite horizontale de section S constante



$v_1 \, , p_1 \, , z_1$ $\qquad$ $v_2 = v_1 \, , p_2 \, , z_2 = z_1$

Ecoulement stationnaire: $\quad D_{m_2} = D_{m_1}$

Fluide incompressible: $\quad \rho_2 = \rho_1 \Rightarrow D_{v_2} = D_{v_1} \Rightarrow v_2 = v_1$

Bernoulli: $$\cancel{\frac{1}{2}v_1{}^2} + \cancel{g}z_1 + \frac{p_1}{\cancel{\rho_1}} = \cancel{\frac{1}{2}v_2{}^2} + \cancel{g}z_2 + \frac{p_2}{\cancel{\rho_2}}$$

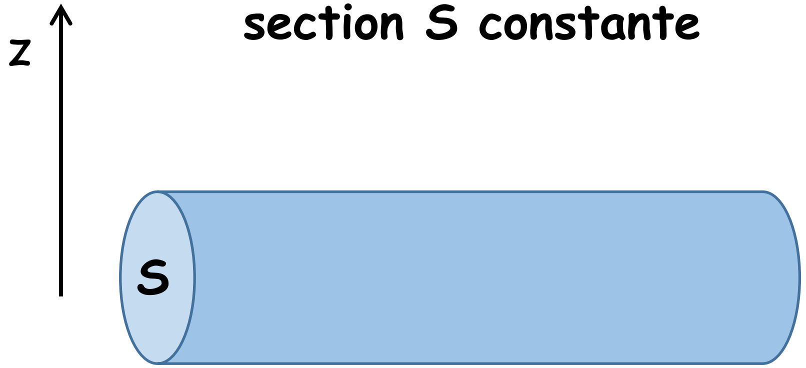
$$\Rightarrow \quad \mathbf{p_2 = p_1}$$

Pas de perte de charge pour un fluide parfait

Applications de l'équation de Bernoulli **Ecoulements internes**

Ecoulement dans une conduite cylindrique – Fluide parfait

conduite horizontale de section S constante



$v_1 \, , p_1 \, , z_1$ $\qquad$ $v_2 = v_1 \, , p_2 \, , z_2 = z_1$

Ecoulement stationnaire: $\quad D_{m_2} = D_{m_1}$

Fluide incompressible: $\quad \rho_2 = \rho_1 \Rightarrow D_{v_2} = D_{v_1} \Rightarrow v_2 = v_1$

Bernoulli:

$$\cancel{\frac{1}{2}{v_1}^2} + \cancel{g z_1} + \frac{p_1}{\cancel{\rho_1}} = \cancel{\frac{1}{2}{v_2}^2} + \cancel{g z_2} + \frac{p_2}{\cancel{\rho_2}}$$

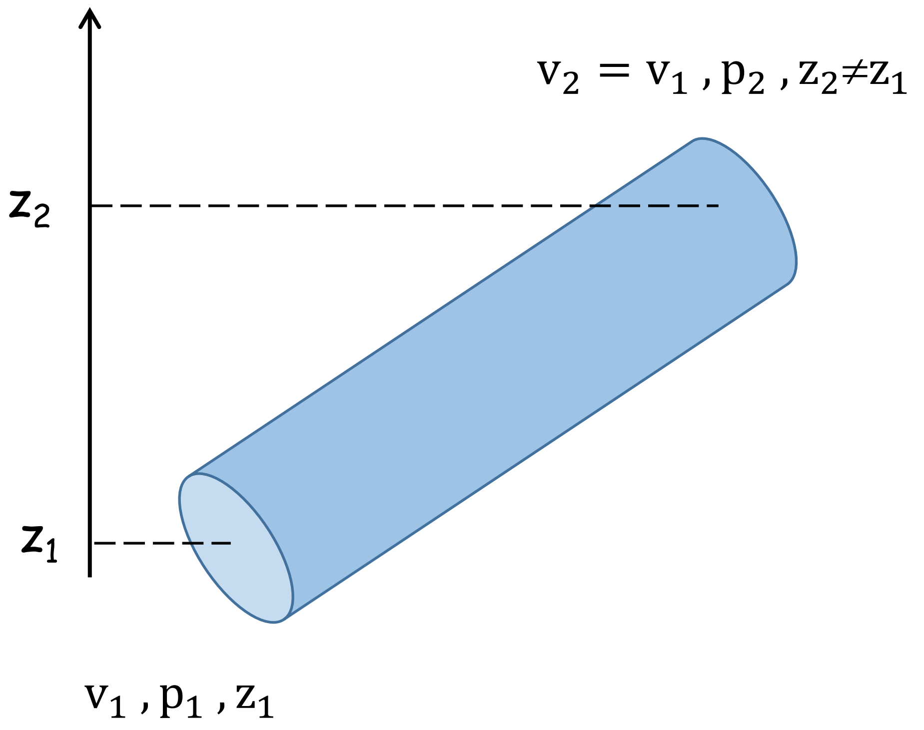
$$\Rightarrow \quad \mathbf{p_2 = p_1}$$

Pas de perte de charge pour un fluide parfait

Applications de l'équation de Bernoulli **Ecoulements internes**

Ecoulement dans une conduite cylindrique – Fluide parfait

conduite inclinée de section S constante



Ecoulement stationnaire: $D_{m_2} = D_{m_1}$

Fluide incompressible: $\rho_2 = \rho_1 \Rightarrow D_{v_2} = D_{v_1} \Rightarrow v_2 = v_1$

Bernoulli: $$\cancel{\frac{1}{2}v_1^2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \cancel{\frac{1}{2}v_2^2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{p_2 + \rho g z_2 = p_1 + \rho g z_1}$$

Pression motrice constante pour un fluide parfait

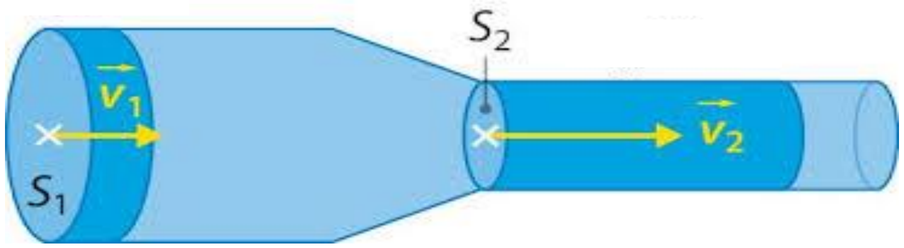
Applications de l'équation de Bernoulli **Ecoulements internes**

Ecoulement dans une conduite cylindrique – Fluide parfait

conduite horizontale de section variable

Ecoulement stationnaire: $D_{m_2} = D_{m_1}$

Fluide incompressible: $\rho_2 = \rho_1 \Rightarrow D_{v_2} = D_{v_1} \Rightarrow \mathbf{S_2 v_2 = S_1 v_1}$



$v_1\,,p_1\,,z_1$ $\qquad$ $v_2 \neq v_1\,,p_2\,,z_2 = z_1$

Bernoulli: $\frac{1}{2}v_1{}^2 + \cancel{g z_1} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}v_2{}^2 + \cancel{g z_2} + \frac{p_2}{\rho}$

$$\Rightarrow \mathbf{p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2{}^2 - v_1{}^2\right) = \frac{v_2{}^2}{2}\rho\left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right)}$$

Ici, pour un rétrécissement: $\mathbf{S_2 < S_1}$ $\quad$ $\mathbf{v_2 > v_1}$ $\quad$ $\mathbf{p_2 < p_1}$

Effet Venturi

ECUST

Mécanique des Fluides

Partie C

Equation d'Euler / forme locale et forme macroscopique

Equation d'Euler   Forme locale

Principe fondamental de la dynamique pour une particule fluide

Seconde loi de Newton pour une particule fluide: $$\mathbf{dm} \times \vec{\mathbf{a}} = \sum \mathbf{d}\vec{\mathbf{F}}$$

$\vec{v}$ vitesse

$\vec{a}$ accéleration

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

Dérivée « particulaire » de la vitesse

Dérivée par rapport au temps de la vitesse **<u>d'une particule fluide</u>**

$\overrightarrow{dF}$ forces exercées sur la particule fluide

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{dm} \times \vec{g} \text{ : poids} \\ \text{Forces de pression}\end{array}\right\} \textit{hydrostatique}$$

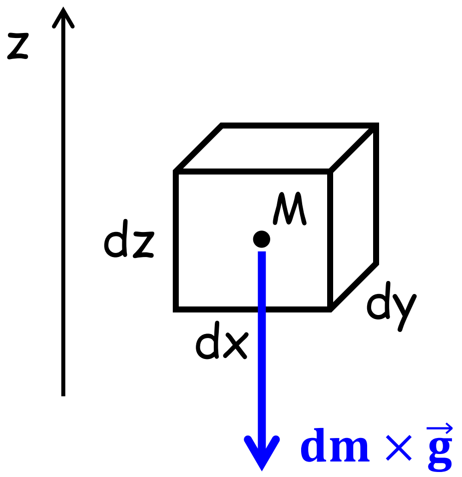
$$\left.\begin{array}{l}\text{Forces de pression} \\ \text{Forces de frottement (fluides réels)}\end{array}\right\} \textit{hydrodynamique}$$

Equation d'Euler   Forme locale

Fluide au repos - hydrostatique

Particule fluide de volume dxdydz

au point d'espace M(x,y,z)



Hydrostatique ⇒ accélération = 0

$$\mathbf{dm} \times \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}} = \mathbf{dm} \times \vec{\mathbf{g}} + \mathbf{d\vec{F}(pression)}$$

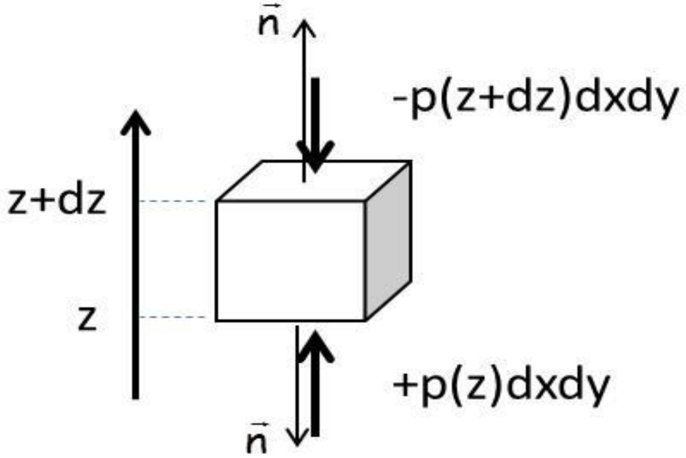
Poids dirigé selon l'axe vertical z

⇒ **Résultante des forces de pression dirigée selon z**

Equation d'Euler Forme locale

Fluide au repos - hydrostatique

Forces de pression sur une particule fluide dxdydz:



Projection suivant z:

$$-p(z+dz)dxdy + p(z)dxdy = -\frac{\partial p}{\partial z}dxdydz$$

Projections suivant x et y:

$$p(x+dx) = p(x) \quad p(y+dy) = p(y)$$

Pression uniquement fonction de z: $\Rightarrow \quad d\vec{F}(\text{pression}) = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{dp}{dz} \end{pmatrix} dV$

Equation d'Euler Forme locale

Fluide au repos - hydrostatique

Equation d'Euler
(hydrostatique)

$$\mathrm{dm} \times \vec{g} + \mathrm{d}\vec{F}(\text{pression}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{dm}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dz}} \end{pmatrix} \mathrm{dV} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dV}} = \rho$$

masse volumique de
la particule fluide

Projection selon z: $\rho g + \dfrac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dz}} = 0$

Si ρ=Cst (liquides), l'intégration est évidente: $\mathbf{p + \rho g z = Cst}$

Définition: $\mathcal{P}$= p+ρgz est appelée "pression motrice"

$\mathcal{P}$ est définie à une constante près

*z est toujours un axe vertical
orienté vers le haut*

Equation d'Euler   Forme locale

Fluide parfait en mouvement - hydrodynamique

Equation d'Euler (fluide parfait=: $\mathrm{dm} \times \vec{\mathrm{g}} + \mathrm{d}\vec{\mathrm{F}}(\mathrm{pression}) = \mathrm{dm} \times \vec{\mathrm{a}}$

Pression a priori fonction de x, y et z: $\Rightarrow \mathrm{d}\vec{\mathrm{F}}(\mathrm{pression}) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} \mathrm{dV} \quad = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{p} \times \mathbf{dV}$

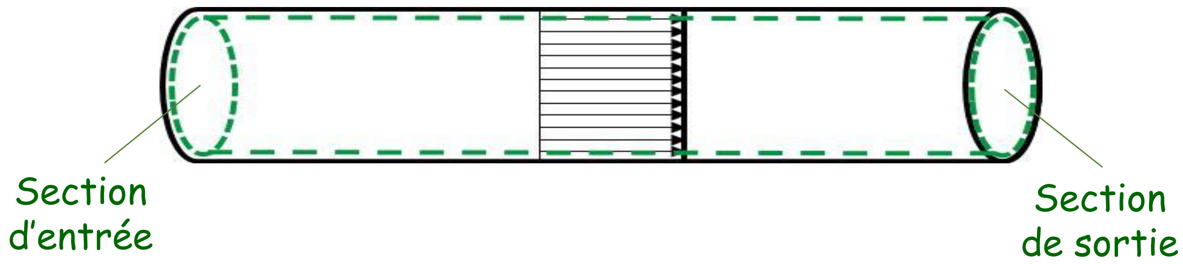
Equation d'Euler: $\mathrm{dm} \times \vec{\mathrm{a}} = \mathrm{dm} \times \vec{\mathrm{g}} - \mathrm{dV} \times \vec{\nabla}\mathrm{p}$

En divisant par dV: $\boxed{\boldsymbol{\rho}\vec{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\rho}\vec{\mathbf{g}} - \vec{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{p}}$

Equation d'Euler   Forme macroscopique

On écrit la deuxième loi de Newton sur un système macroscopique

Pour l'écoulement d'un fluide dans une conduite, le système est le volume de contrôle correspondant au contenu de la conduite



L'équation d'Euler prend une forme simple avec les hypothèses suivantes:

- Vitesse uniforme sur les sections d'entrée et de sortie
- Ecoulement stationnaire
- Une seule entrée – une seule sortie

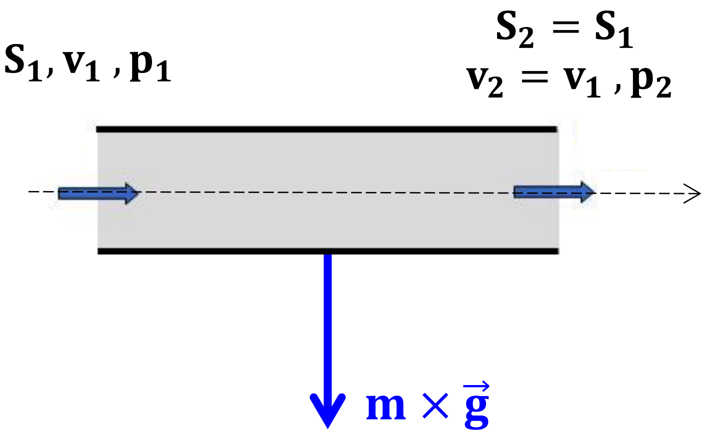
$$D_m \times (\vec{v}_{sortie} - \vec{v}_{entrée}) = \boxed{\sum_{\text{sur le système}} \vec{F}}$$

Toutes les forces exercées sur le système:

- Le poids du fluide
- Les forces de pression en entrée et en sortie
- La force $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{x}}$ (pression et frottement) exercée par la paroi interne de la conduite sur le fluide

Equation d'Euler Forme macroscopique

Conduite droite horizontale de section constante $S_1=S_2=S$



Si le fluide est incompressible: $\vec{v}_{\text{entrée}} = \vec{v}_1 = \vec{v}_{\text{sortie}} = \vec{v}_2$

$$D_m \times (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \sum_{\text{sur le système}} \vec{F} = \vec{0}$$

Projection des forces suivant l'axe de l'écoulement:

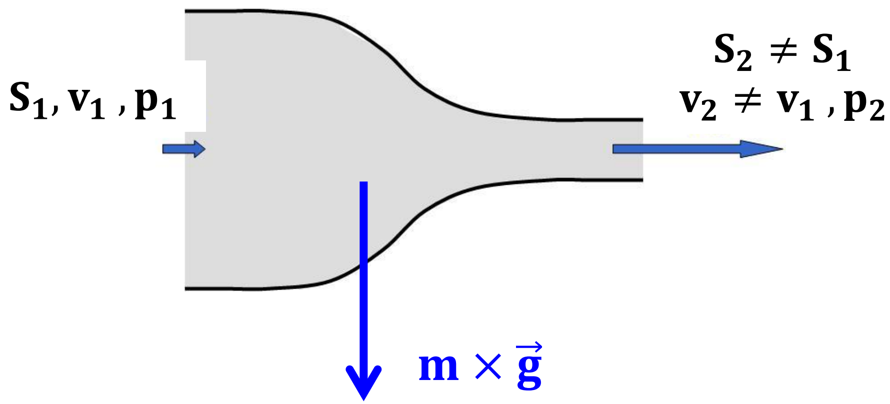
$$p_1 \times S - p_2 \times S + F_x = 0$$

Si le fluide est **parfait**: $p_2 = p_1$ (Bernoulli) et $F_x=0$ Pas de force dans le sens de l'écoulement

Pour un fluide **réel**: $p_2 < p_1$ et $F_x < 0$ Le fluide exerce une force de frottement $-F_x = S(p_1-p_2)$ dans le sens de l'écoulement sur la paroi interne de la conduite

Equation d'Euler   Forme macroscopique

Conduite droite horizontale de section variable, exemple d'une contraction



Si le fluide est incompressible: $S_1 v_1 = S_2 v_2$

$$D_m \times (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \sum_{\text{sur le système}} \vec{F} \neq \vec{0}$$

Projection de l'équation d'Euler suivant l'axe de l'écoulement:

$$D_m(v_2 - v_1) = p_1 S_1 - p_2 S_2 + F_x$$

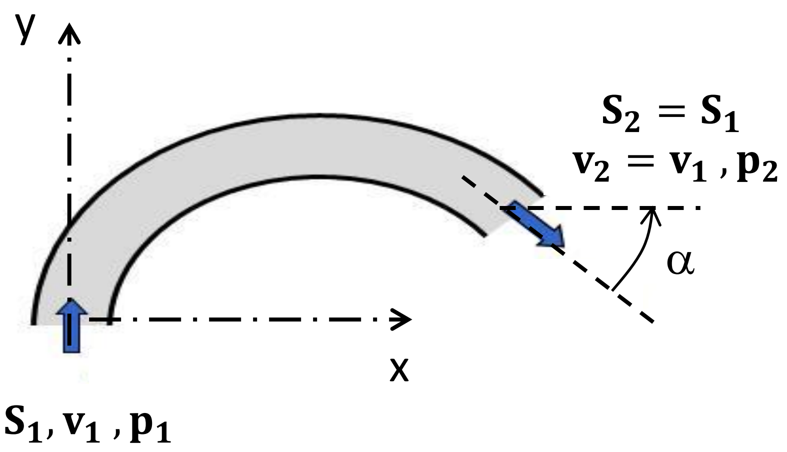
Si le fluide est **parfait**: $p_1 - p_2 = \frac{{v_2}^2}{2} \rho \left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right)$

On peut calculer $F_x(p_1, S_1, S_2, \rho, D_m) \neq 0$

Le fluide exerce une force sur la paroi interne de la conduite même s'il est parfait

Equation d'Euler   Forme macroscopique

Coude de section constante dans un plan horizontal xy



Si le fluide est incompressible: $\|v_1\| = \|v_2\|$

$$\boxed{\text{mais ici } \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}} \neq \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}}}$$

$$D_m \times (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \sum_{\text{sur le système}} \vec{F} \neq \vec{0}$$

Projection de l'équation d'Euler suivant deux axes:

x: $D_m v_2 \cos(\alpha) = -p_2 S \times \cos(\alpha) + F_x$

y: $-D_m v_2 \sin(\alpha) - D_m v_1 = p_1 S + p_2 S \times \sin(\alpha) + F_y$

Si le fluide est **parfait**: $p_2 = p_1$ (Bernoulli)

On peut calculer F_x et $F_y \neq 0$ en fonction de D_m, S, α

Le fluide exerce une force sur la paroi interne de la conduite même s'il est parfait

ECUST

Mécanique des Fluides

Partie D

Cinématique / description d'Euler et de Lagrange

Cinématique

Description d'Euler du champ de vitesse

Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes: $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$

Dans une description d'Euler, la vitesse est donnée en fonction en fonction des **coordonnées d'espace** et du temps:

$$\vec{v} = \vec{v}(x,y,z,t) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} v_x = v_x(x,y,z,t) \\ v_y = v_y(x,y,z,t) \\ v_z = v_z(x,y,z,t) \end{cases}$$

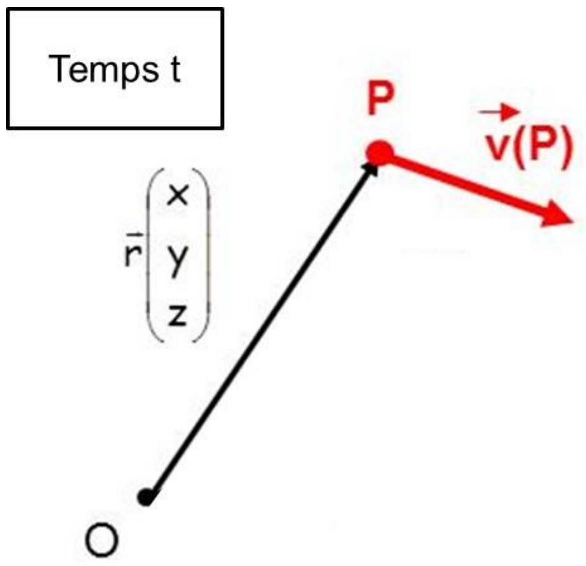
Il faut bien faire la différence entre une particule fluide (P) et un point d'espace (M)

Cinématique

Description d'Euler du champ de vitesse

$\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{P})$ est la vitesse d'une particule P située au point d'espace M(x,y,z) au temps t

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



$$\vec{v}(P) = \begin{pmatrix} v_x(x,y,z,t) \\ v_y(x,y,z,t) \\ v_z(x,y,z,t) \end{pmatrix}$$

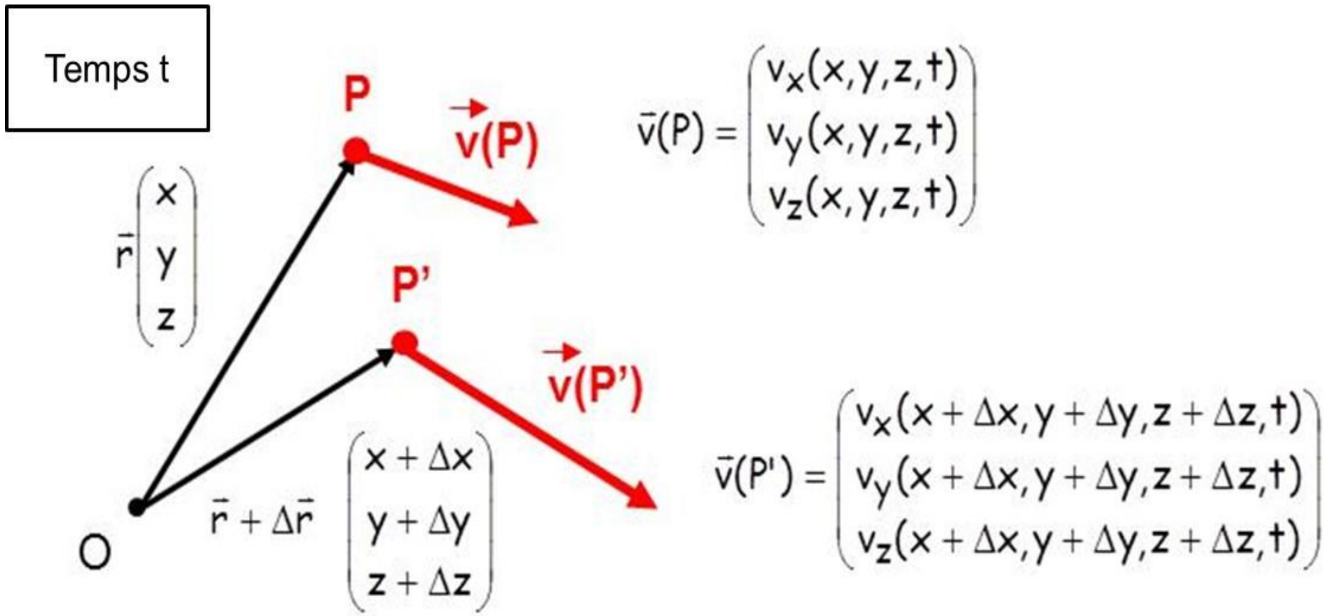
Cinématique

Description d'Euler du champ de vitesse

$\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{P}')$ est la vitesse d'une **autre particule** P' située au point d'espace M' **au même temps t**

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM'} = \vec{r} + \Delta\vec{r}\begin{pmatrix} x + \Delta x \\ y + \Delta y \\ z + \Delta z \end{pmatrix}$$



→ *Les lignes tangentes en tout point au vecteur vitesse sont les* ***lignes de courant*** *au temps t*

Cinématique

Description d'Euler du champ de vitesse

<u>Ecoulement stationnaire:</u>

Soit une description d'Euler: $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ ou $\begin{cases} v_x = v_x(x, y, z, t) \\ v_y = v_y(x, y, z, t) \\ v_z = v_z(x, y, z, t) \end{cases}$

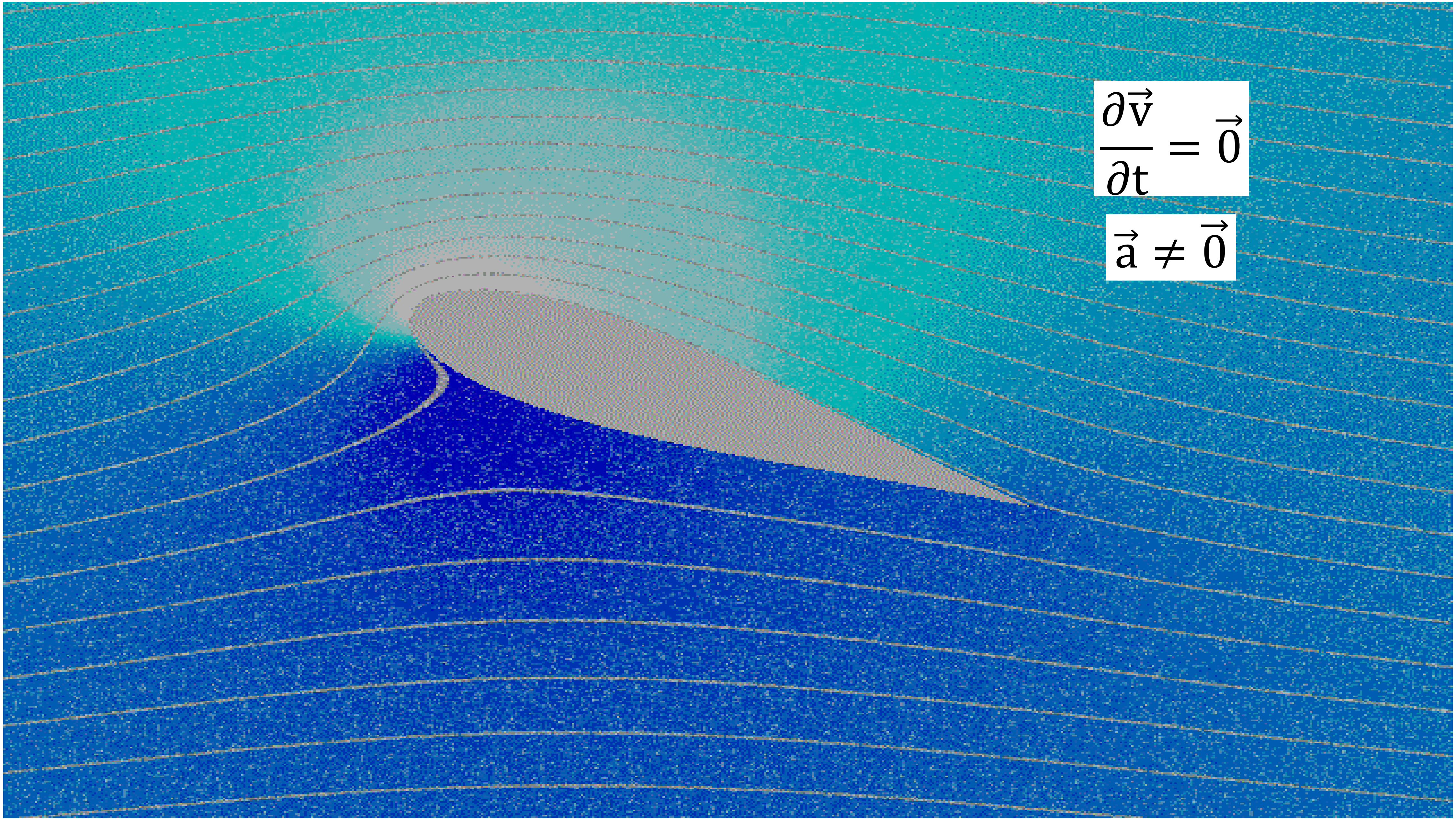
L'écoulement est stationnaire si: $$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{x,y,z} = \vec{0}$$

Cette condition est facile à énoncer dans une description d'Euler

Pour un écoulement stationnaire, l'accélération est en général non nulle: $$\left(\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{t}}\right)_{x,y,z} \neq \vec{\mathbf{a}}$$

l'accélération ne se calcule pas directement dans une description d'Euler

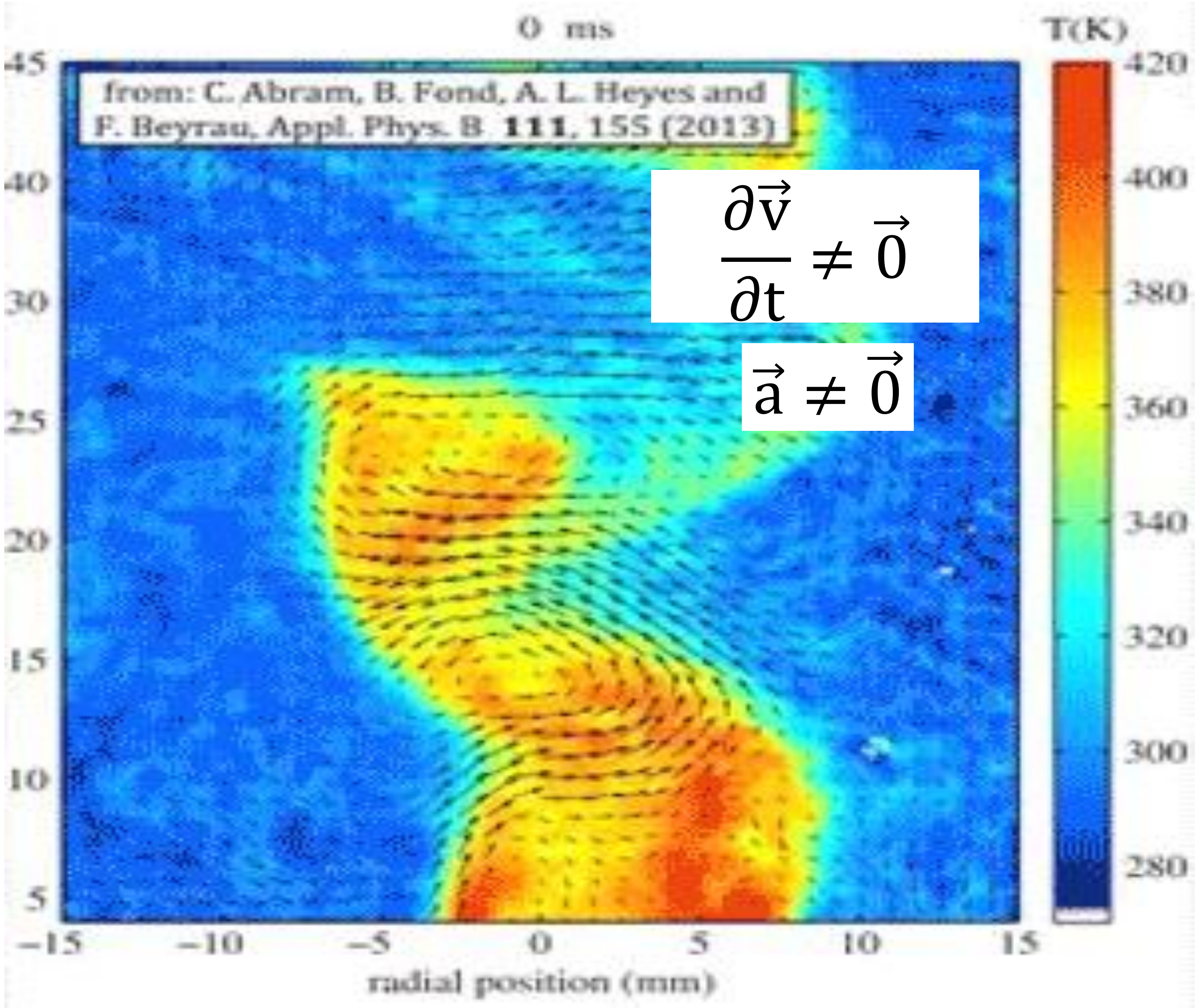
Exemple d'un écoulement stationnaire à accélération non nulle



$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \neq \vec{0}$$

Ecoulement instationnaire:



$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \neq \vec{0}$$

$$\vec{a} \neq \vec{0}$$

Cinématique

Description de Lagrange du champ de vitesse

Dans une description de Lagrange, on donne la vitesse **d'une particule fluide** en fonction du temps

On repère une particule fluide par ses coordonnées x_0, y_0, z_0 à un instant $t=t_0$

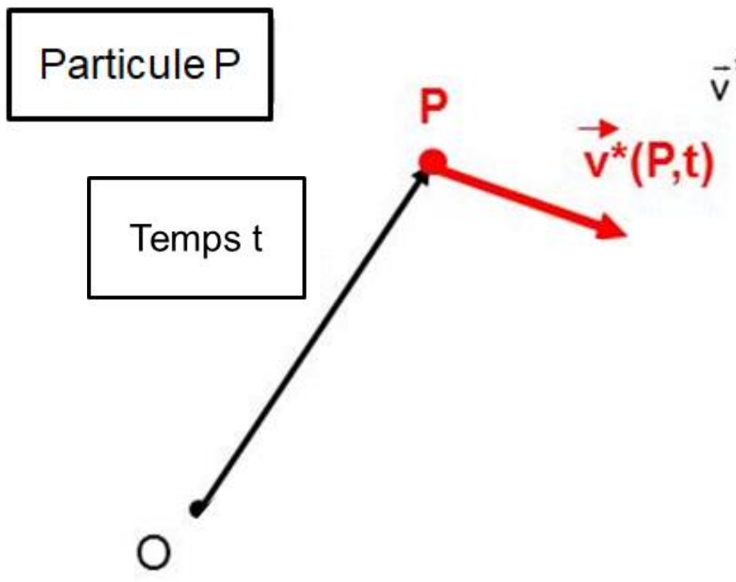
$$\vec{v} = \vec{v}(x_0, y_0, z_0, t) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} v_x = {v_x}^*(x_0, y_0, z_0, t) \\ v_y = {v_y}^*(x_0, y_0, z_0, t) \\ v_z = {v_z}^*(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

${v_x}^*$, ${v_y}^*$, ${v_z}^*$: composantes de la vitesse **au temps t** d'une particule située en $M_0(x_0,y_0,z_0)$ **au temps t_0**

Dans la description d'Euler, v_x, v_y, v_z sont les composantes de la vitesse ***au temps t***
d'une particule située en M(x,y,z) ***au temps t***

Cinématique

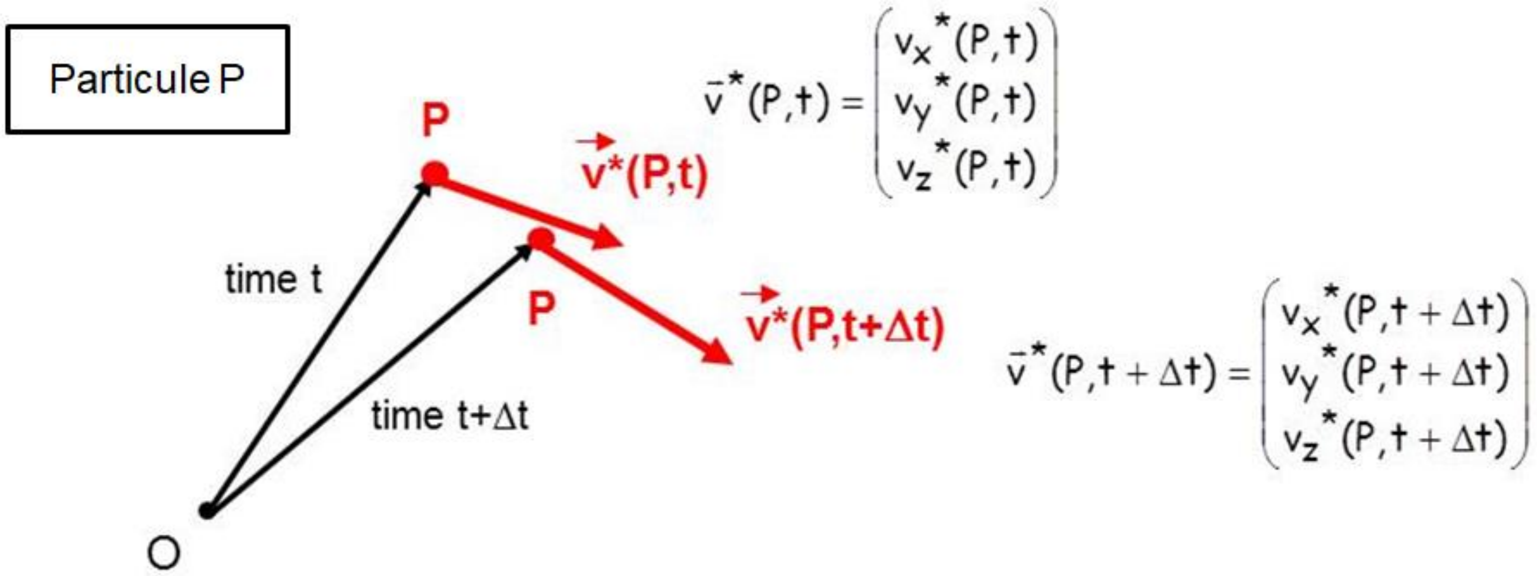
Description de Lagrange du champ de vitesse



$$\vec{v}^*(P,t) = \begin{pmatrix} v_x^*(P,t) \\ v_y^*(P,t) \\ v_z^*(P,t) \end{pmatrix}$$

Cinématique

Description de Lagrange du champ de vitesse



Positions de la même particule P à différents instants $\rightarrow$ trajectoire de P

Expression simple de l'accélération dans la description de Lagrange:

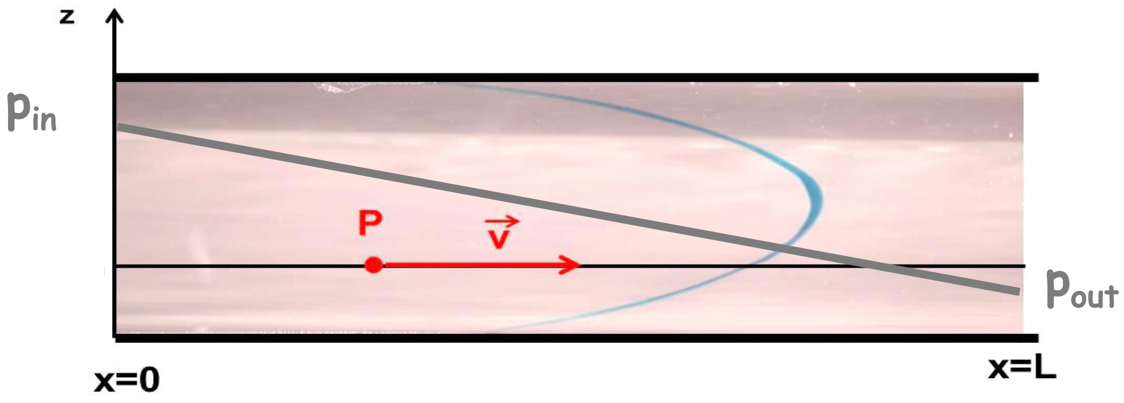
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}^*}{dt}$$

Expression de l'accélération dans la description d'Euler ?

Cinématique

Dérivée particulaire d'une grandeur scalaire

Soit une particule fluide P se déplaçant à la vitesse $\begin{pmatrix} v_x = v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans un gradient de pression selon x



Comment varie la pression de la particule P au cours du temps ?

Avec une description d'Euler du champ de pression: p(x,y,z,t)

La variation de p **de la particule** pendant le temps dt vaut: $\frac{\partial p}{\partial t}dt + \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$

Où $\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ est le vecteur déplacement de P pendant le temps dt

Cinématique

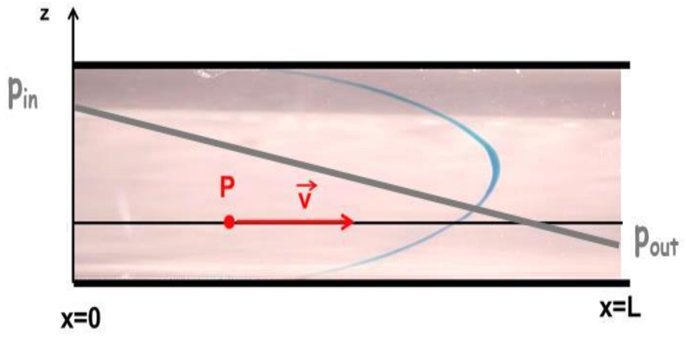
Dérivée particulaire d'une grandeur scalaire

En divisant par dt on introduit la **dérivée particulaire** de la pression:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{dt} \quad = \quad \frac{\partial p}{\partial t}+v_x\frac{\partial p}{\partial x}+v_y\frac{\partial p}{\partial y}+v_z\frac{\partial p}{\partial z}$$

L'opérateur: $\frac{\partial}{\partial t}+\left(v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)=\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial t}}+\vec{\mathbf{v}}.\vec{\boldsymbol{\nabla}}=\mathbf{\frac{D}{Dt}}$ est l'opérateur dérivée particulaire

Pour l'écoulement stationnaire:



$\frac{\partial p}{\partial t}=0$ la pression en un point d'espace est constante mais:

$$\frac{Dp}{Dt} \quad = \quad 0+\begin{pmatrix}v_x\\0\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}p \quad =v_x\frac{\partial p}{\partial x}=v_x\frac{p_{out}-p_{in}}{L}\neq \mathbf{0}$$

la pression de la particule varie !

Cinématique

Dérivée particulaire

Attention à ne pas confondre l'opérateur scalaire: $\vec{v}.\vec{\nabla} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$

Avec la divergence du vecteur vitesse: $\vec{\nabla}.\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ ***qui n'est pas un opérateur !***

L'opérateur $\vec{v}.\vec{\nabla}$ peut être appliqué à un champ vectoriel $\vec{u}$:

$$(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{u} = (\vec{v}.\vec{\nabla})\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{v}.\vec{\nabla})u_x \\ (\vec{v}.\vec{\nabla})u_y \\ (\vec{v}.\vec{\nabla})u_z \end{pmatrix}$$

Expression de l'accélération dans la description d'Euler:

L'accélération est la dérivée particulaire de la vitesse:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Equation d'Euler:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p$$

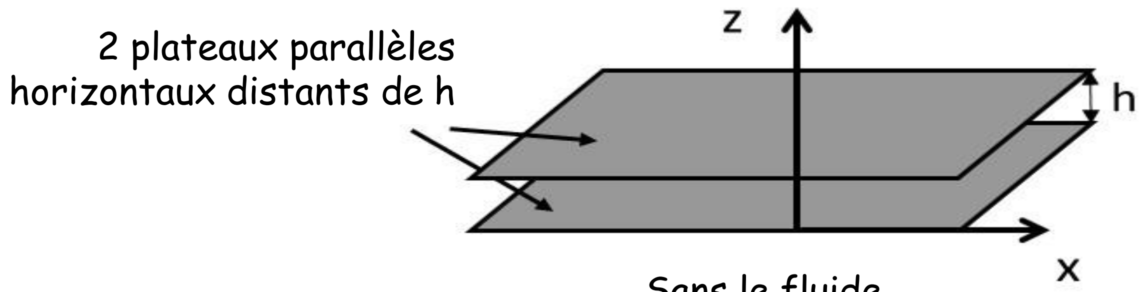
Mécanique des Fluides

Partie E

Notions sur la viscosité

Notions sur la viscosité

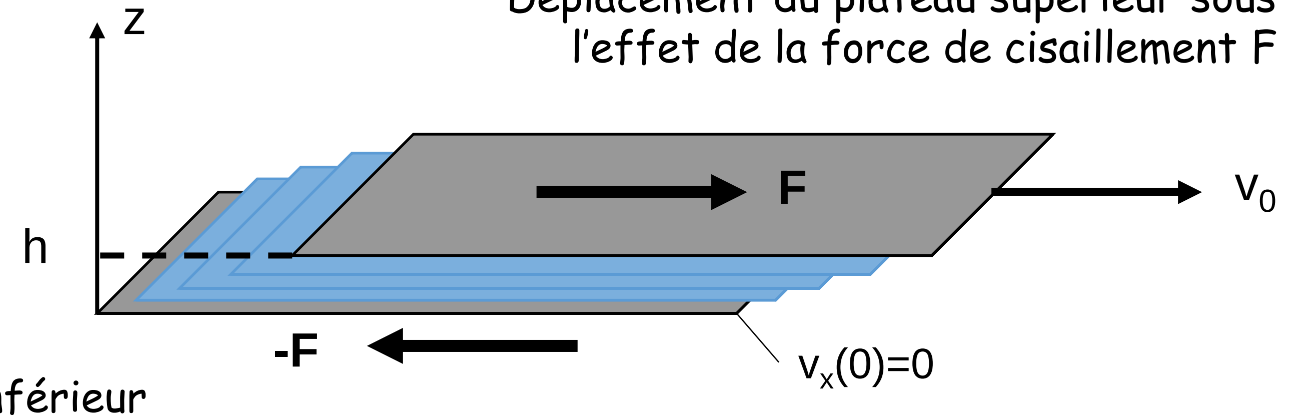
Ecoulement de cisaillement simple



Sans le fluide

Avec le fluide

Déplacement du plateau supérieur sous l'effet de la force de cisaillement F



Le plateau inférieur est maintenu fixe

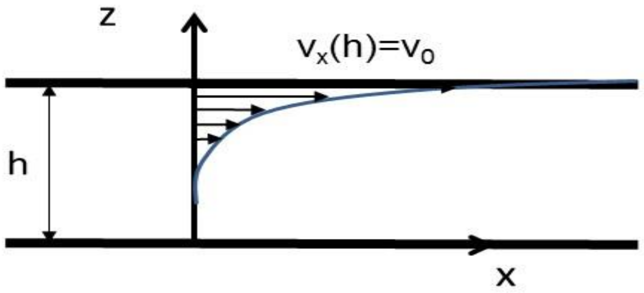
Champ de vitesse dans le fluide

$$\begin{cases} v_x = v_x(z) \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

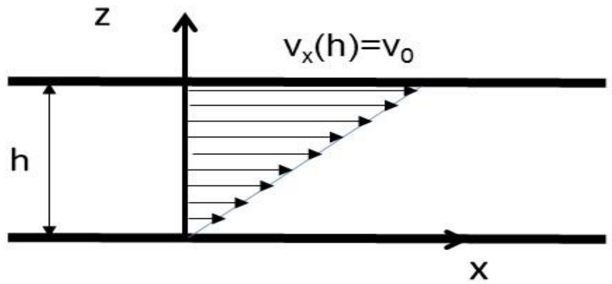
Notions sur la viscosité

Ecoulement de cisaillement simple

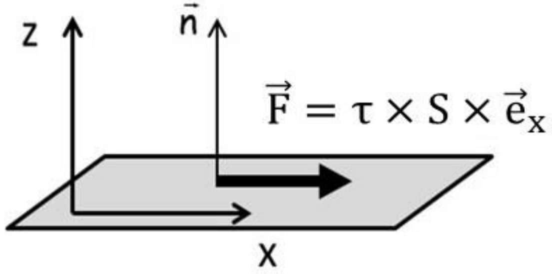
Régime transitoire



Régime stationnaire

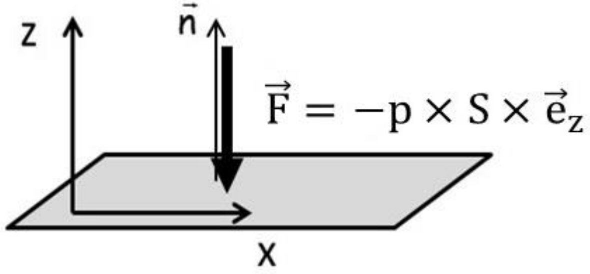


Comparaison force visqueuse de cisaillement – force de pression



cisaillement

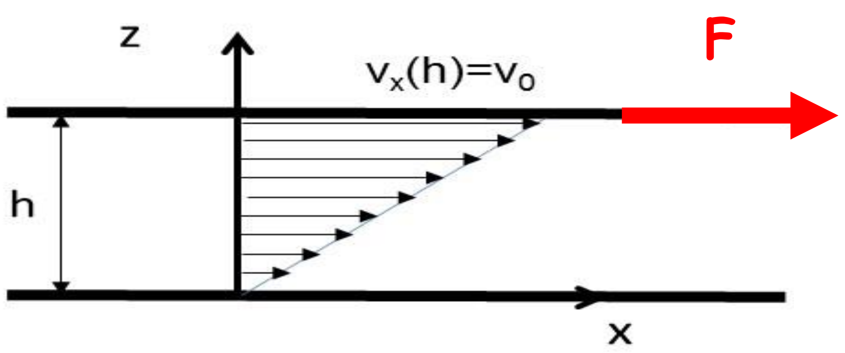
τ: contrainte de cisaillement
même unité que la pression (Pa)



pression

Notions sur la viscosité

Ecoulement de cisaillement simple



Force F proportionnelle à S et à v_0, inversement proportionnelle à h

$F \propto S$

$F \propto v_0$

$F \propto h^{-1}$

$$F = S \times \frac{v_0}{h} \times Cst$$

Ou: $$\boxed{\frac{F}{S}} = \boxed{\frac{v_0}{h}} \times \boxed{Cst}$$

Viscosité η

Contrainte de cisaillement τ

Gradient de vitesse ou taux de cisaillement $\dot{\gamma}$

Relation fondamentale des fluides visqueux: $$\boxed{\tau = \eta \times \dot{\gamma}}$$

Loi de Newton qui définit la viscosité dynamique η

Définition: un fluide **newtonien** est tel que sa viscosité est constante: η ne dépend pas de $\dot{\gamma}$

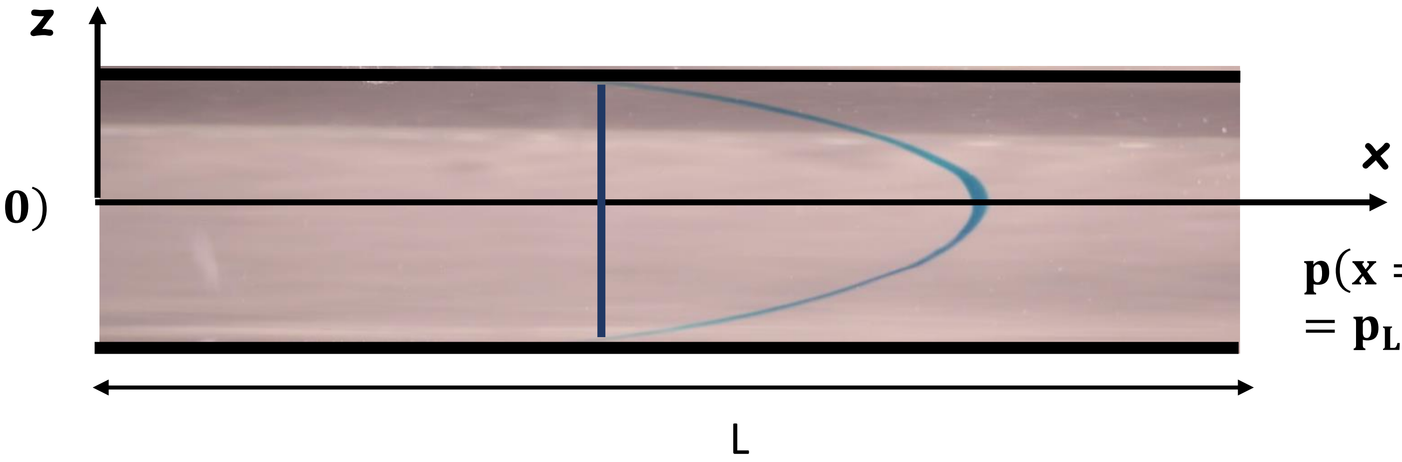
Notions sur la viscosité

Ecoulement de Poiseuille entre plans parallèles – fluides incompressibles

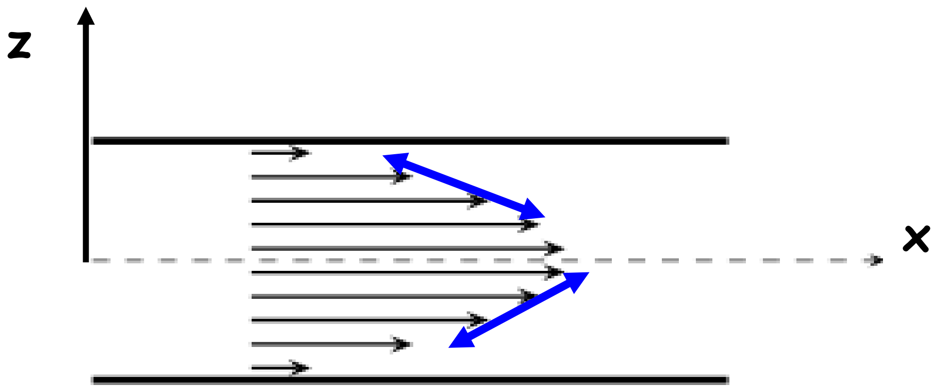
Si les plateaux sont fixes et en présence d'un gradient de pression dans la direction x

$$\begin{cases} v_x = v_x(z) \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

$\mathbf{p(x=0)}$
$\mathbf{= p_0}$



$\mathbf{p(x=L)}$
$\mathbf{= p_L < p_0}$



La vitesse est maximale au milieu des plateaux

Le taux de cisaillement $\dot{\gamma} = \frac{\mathbf{dv_x(z)}}{\mathbf{dz}}$ varie en fonction de z

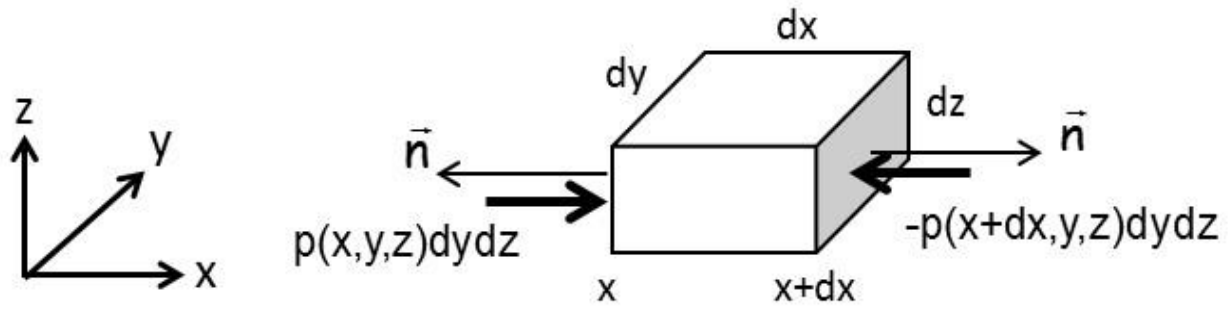
Pour un liquide newtonien $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\eta} \times \frac{\mathbf{dv_x(z)}}{\mathbf{dz}}$ avec η=Cst

Notions sur la viscosité

Ecoulement de Poiseuille entre plans parallèles – fluides incompressibles

Forces exercées sur une particule fluide dxdydz

<u>Forces de pression selon x</u>



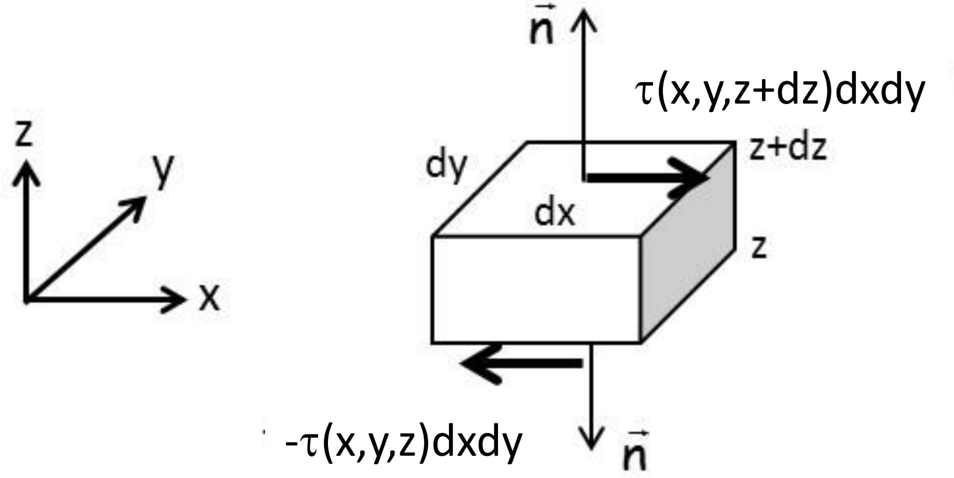
Somme des deux forces: $\big(p(x,y,z) - p(x+dx,y,z)\big)dydz = -\dfrac{\partial p}{\partial x}dxdydz = -\dfrac{\partial p}{\partial x}dV$

Notions sur la viscosité

Ecoulement de Poiseuille entre plans parallèles – fluides incompressibles

Forces exercées sur une particule fluide dxdydz

Forces de frottement selon x



Somme des deux forces: $$(\tau(z+dz)-\tau(z))dxdy = \frac{d\tau(z)}{dz}dxdydz = \eta\frac{d^2v_x(z)}{dz^2}\times dV$$

Liquide newtonien η=Cst

Notions sur la viscosité

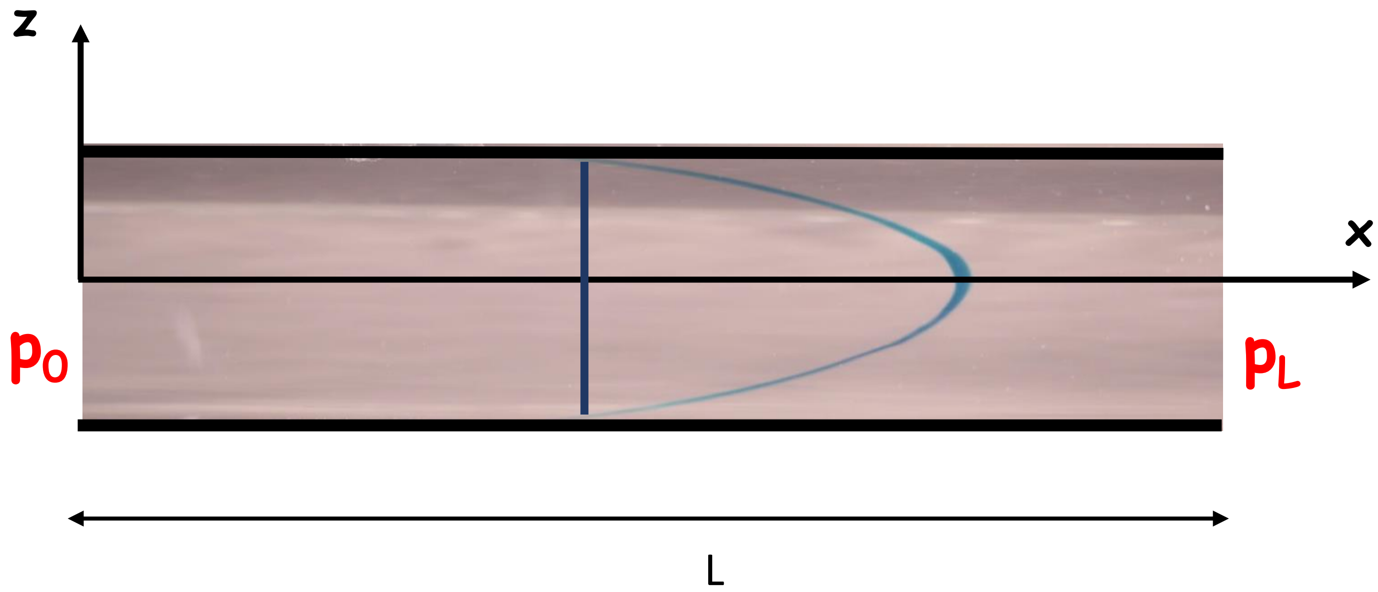
Ecoulement de Poiseuille entre plans parallèles – fluides incompressibles

2ème loi de Newton sur la particule fluide dxdydz:

$$\mathrm{dm} \times \vec{a} = \mathrm{dm} \times \vec{g} + \mathrm{d}\vec{F}(\mathrm{pression}) + \mathrm{d}\vec{F}(\mathrm{frottement})$$

Projection selon x (a_x=0):

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{dV} + \eta \frac{d^2 v_x(z)}{dz^2}\mathrm{dV}$$



Gradient de pression $\frac{\partial p}{\partial x}$ constant:

$$\eta \frac{d^2 v_x(z)}{dz^2} = \frac{P_L - P_0}{L}$$

Double intégration →
champ de vitesse parabolique

Notions sur la viscosité

Cas d'un écoulement quelconque – fluides incompressibles et newtoniens

2ème loi de Newton sur la particule fluide dxdydz:

$$\mathbf{dm} \times \vec{\mathbf{a}} = \mathbf{dm} \times \vec{\mathbf{g}} + \mathbf{d}\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{pression}) + \mathbf{d}\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{viscosit}\text{é})$$

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dV \rightarrow -\vec{\nabla} p \times dV$$

$$\eta \frac{d^2 v_x}{dz^2} dV \rightarrow \eta \nabla^2 \vec{v} \times dV$$

Laplacien de la vitesse

$$\vec{\nabla}^2 \vec{v} = \vec{\nabla}^2 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

En divisant par dV:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

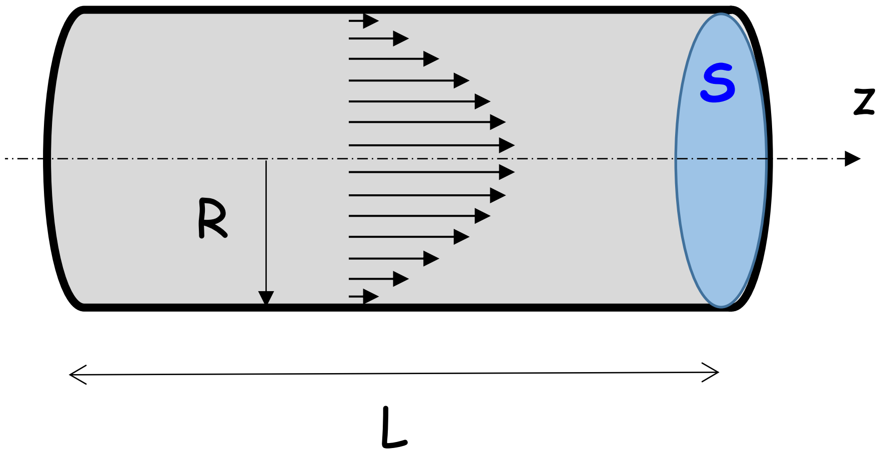
Équation de Navier-Stokes

Équivalent de l'équation d'Euler pour les fluides réels incompressibles et newtoniens

Notions sur la viscosité

Ecoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique horizontale

L'écoulement est décrit en coordonnées cylindriques (r,θ,z)



z est l'axe de la conduite

et non l'axe vertical !!

Hypothèses sur le champ de vitesse:

Vitesse selon l'axe z: $v_r = 0 \quad v_\theta = 0 \quad v_z$

Symétrie cylindrique : $v_z = v_z(r)$

v_z indépendant du temps (écoulement stationnaire)

Condition aux limites: $v_z(r = R) = 0$

« non-glissement » à la paroi

Hypothèses sur le fluide:

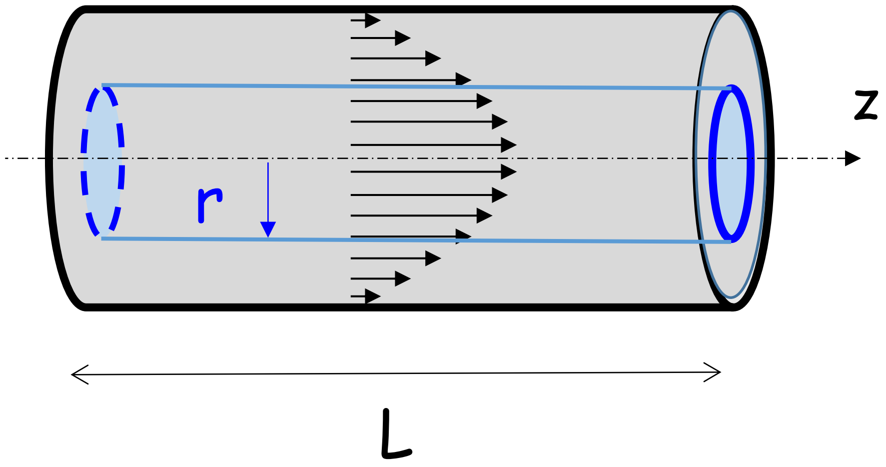
Incompressible: $\rho = Cst$

Newtonien : $\eta = Cst$

Notions sur la viscosité

Ecoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique horizontale

Bilan macroscopique
(équivalent équation d'Euler)



Système:

Volume de contrôle de rayon r (0≤r≤R) et de longueur L

Système ouvert

La vitesse de chaque particule est constante

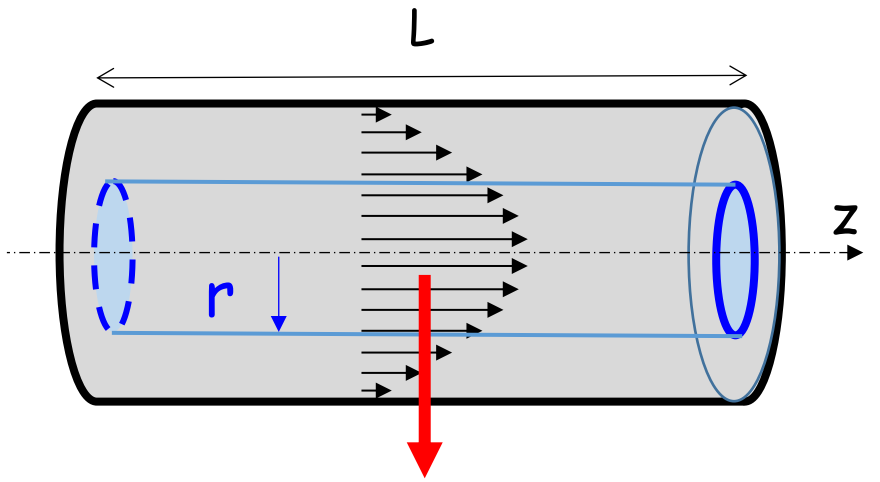
→ accélération nulle pour toutes les particules

→ Somme des forces exercées sur le système = 0

Forces pour un fluide réel: Poids, forces de pression, forces de frottement

Notions sur la viscosité

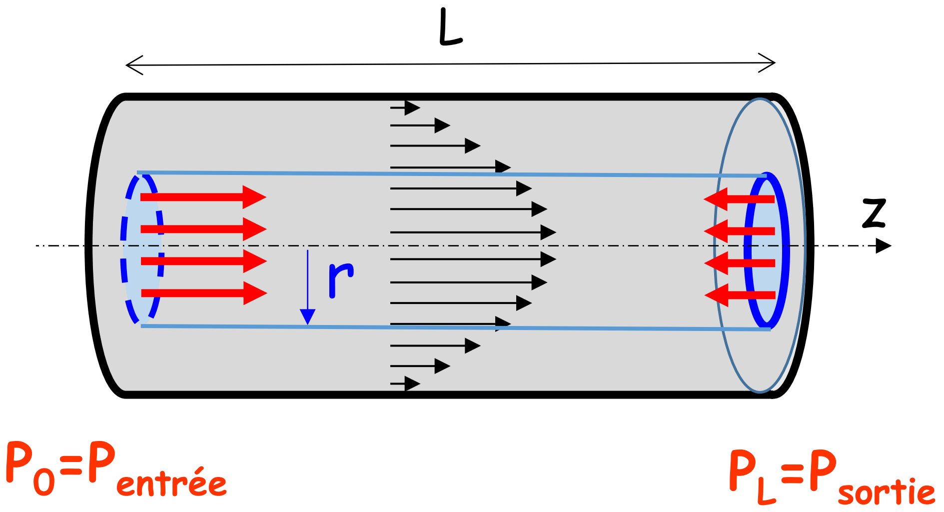
Ecoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique horizontale



Poids du fluide dans le système: $-\rho \times g \times \pi r^2 L$

Selon un axe vertical orienté vers le haut

Projection sur l'axe de la conduite = 0



Hypothèse: la pression dépend uniquement de z: $P = P(z)$

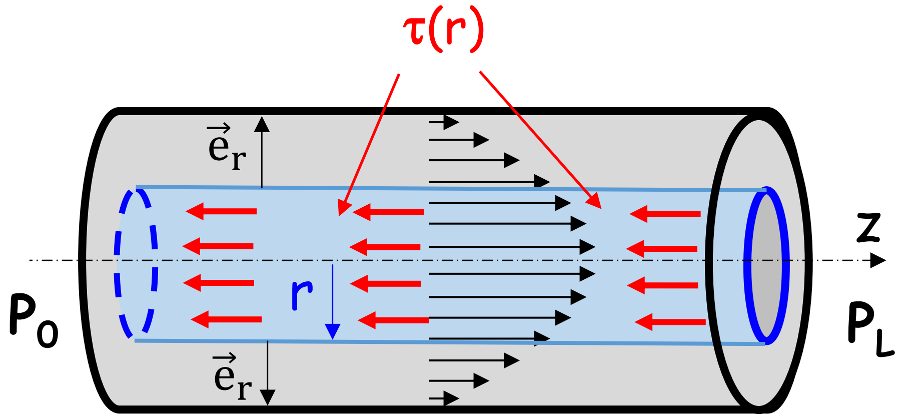
Résultante des forces de pression projetée sur l'axe z:

$$\mathbf{P_0 \times \pi r^2 - P_L \times \pi r^2}$$

Notions sur la viscosité

Ecoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique horizontale

Force de frottement visqueuse au rayon r:



surface: $S(r) = 2\pi r L$

Résultante des forces visqueuses projetée sur z

$$\mathbf{F(r) = \tau(r) \times S(r) = \tau(r) \times 2\pi r L}$$

Bilan des forces:

$$(P_0 - P_L)\pi r^2 + \tau(r) 2\pi r = 0$$

Permet de calculer la contrainte en fonction de r:

$$\tau(r) = \frac{r}{2} \times \frac{P_L - P_0}{L}$$

Résultat également valide pour des fluides non newtoniens

Notions sur la viscosité

Ecoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique horizontale

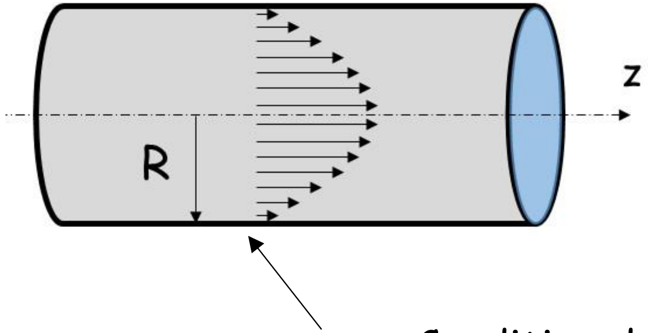
D'après la loi de Newton: $\tau = \eta\dot{\gamma} = \eta \frac{dv}{dr}$

$$\eta \frac{dv}{dr} = \left[\frac{p_L - p_0}{L}\right] \times \frac{r}{2}$$

Ce qui s'intègre si η=Cst

Pour un fluide newtonien: $v(r) = \left[\frac{p_L - p_0}{L}\right] \times \frac{r^2}{4\eta} + Cst$

La constante se détermine à partir des conditions aux limites



Condition de non-glissement à la paroi

$v(r = R) = 0$

$$\Rightarrow \quad v(r) = \frac{1}{4\eta}\left[\frac{p_L - p_0}{L}\right] \times (r^2 - R^2)$$

Profil de vitesse parabolique

Notions sur la viscosité

Ecoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique horizontale

Le débit volumique D_v s'obtient en intégrant la vitesse sur la section:

$$D_v = \int_S v\,dS = \int_0^R v(r) \times 2\pi r dr \quad \text{avec} \quad v(r) = \frac{1}{4\eta}\left[\frac{p_L - p_0}{L}\right] \times (r^2 - R^2)$$

Le résultat est la loi de Hagen-Poiseuille:

$$\mathbf{D_v = -\frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{p_L - p_0}{L}}$$

Le débit est opposé au gradient de pression

Dans une conduite horizontale, le fluide s'écoule des hautes pressions vers les basses pressions

Rappel des hypothèses pour la loi de Poiseuille: fluide incompressible et newtonien

De plus, il faut que la symétrie du champ de vitesse soit vérifiée ($v_z(r)$)

Ce qui est la cas quand l'écoulement est laminaire

ECUST

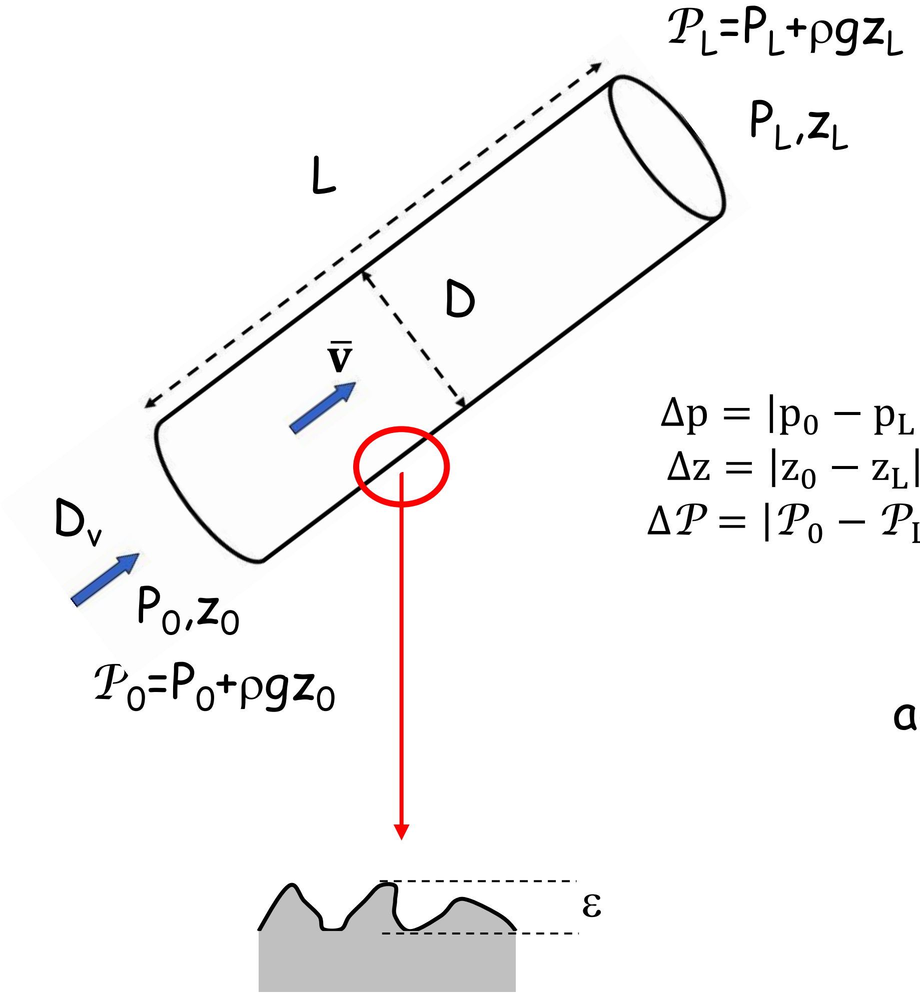
Mécanique des Fluides

Partie F

Analyse dimensionnelle – régimes laminaire et turbulent

Analyse dimensionnelle

Ecoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique



$$\Delta p = |p_0 - p_L|$$
$$\Delta z = |z_0 - z_L|$$
$$\Delta\mathcal{P} = |\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L|$$

A partir de tous les paramètres de l'écoulement:

- Longueur L et diamètre interne D de la conduite
- Différence de pression ΔP, d'altitude Δz, de pression motrice $\Delta\mathcal{P}$
- Débit volumique D_v, vitesse moyenne $\bar{v}$
- Viscosité dynamique η, masse volumique ρ
- Accélération de la pesanteur g
- Rugosité ε de la surface interne

L'analyse dimensionnelle permet d'obtenir les nombres adimensionnels caractéristiques du problème, ici au nombre de 3:

$$\frac{\rho\bar{v}D}{\eta} = Re \qquad \frac{\Delta\mathcal{P}}{\frac{1}{2}\rho\bar{v}^2 \times \frac{4L}{D}} = f \qquad \frac{\varepsilon}{D}$$

Nombre de Reynolds — **Facteur de frottement** — **Rugosité relative**

Analyse dimensionnelle

Ecoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique

La solution générale du problème est une relation entre f, Re et $\frac{\varepsilon}{D}$: $$f = f\left(\mathrm{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

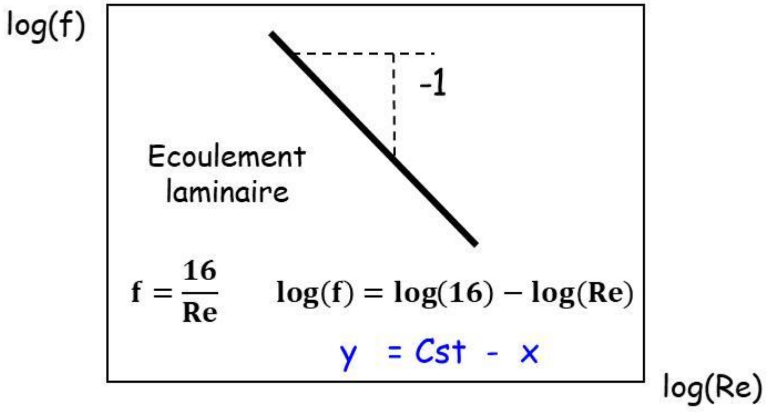
Si l'écoulement est laminaire, la solution est connue (Hagen-Poiseuille): $$D_v = \frac{\pi D^2}{4}\bar{v} = \frac{\pi D^4 \Delta\mathcal{P}}{128\eta L} \quad \Rightarrow \quad \frac{D^2 \Delta\mathcal{P}}{\bar{v}\eta L} = 32$$

Relation entre f, Re et $\frac{\varepsilon}{D}$ $$f \times \mathrm{Re} = \frac{\Delta\mathcal{P}}{\frac{1}{2}\rho\bar{v}^2 \times \frac{4L}{D}} \times \frac{\rho\bar{v}D}{\eta} = \frac{D^2\Delta\mathcal{P}}{2\bar{v}\eta L} = 16$$

Relation en régime laminaire:

$$f = \frac{16}{\mathrm{Re}}$$ f indépendant de $\frac{\varepsilon}{D}$

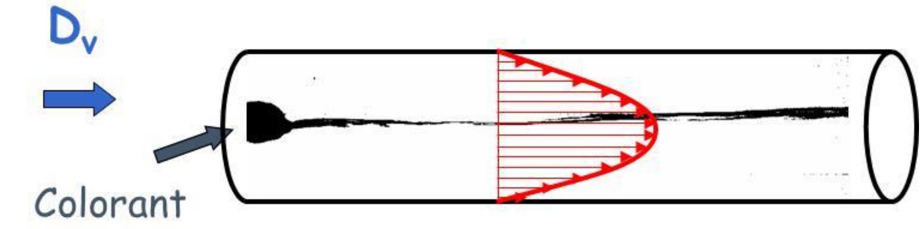
Représentation graphique en échelles logarithmiques (de Moody)



Analyse dimensionnelle

Ecoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique – régimes d'écoulement

Expériences de Reynolds (1883)

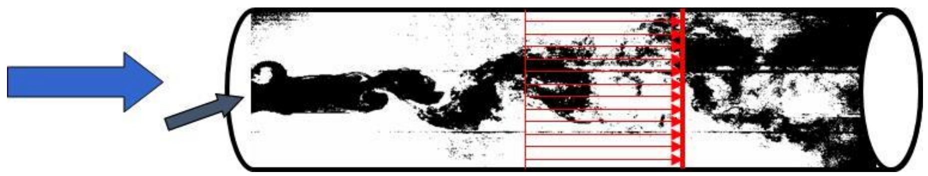


Re < 1700

Régime laminaire- loi de Poiseuille
vitesse parabolique
$D_v \sim |\Delta\mathcal{P}|$, indépendant de $\frac{\varepsilon}{D}$

1700 < Re < 4000

Régime intermédiaire
instabilités



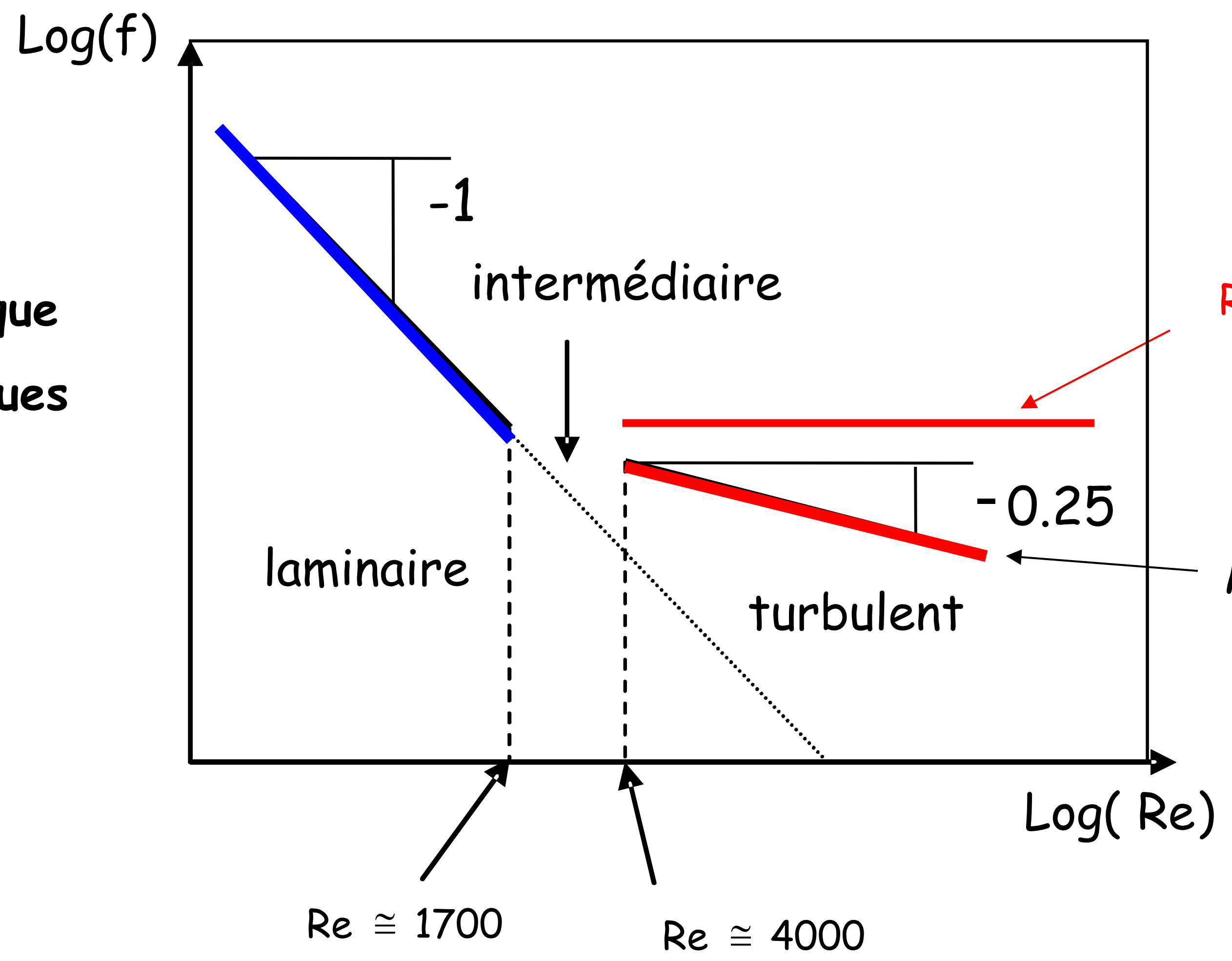
Re > 4000

Régime turbulent
vitesse quasi-uniforme
$D_v \sim \sqrt{|\Delta\mathcal{P}|}$ et fonction de $\frac{\varepsilon}{D}$

Analyse dimensionnelle

Ecoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique – régimes d'écoulement

Représentation graphique en échelles logarithmiques (de Moody)



$$f = \frac{\Delta\mathcal{P}}{\frac{1}{2}\rho\bar{v}^2 \times \frac{4L}{D}}$$

Résultats de Reynolds

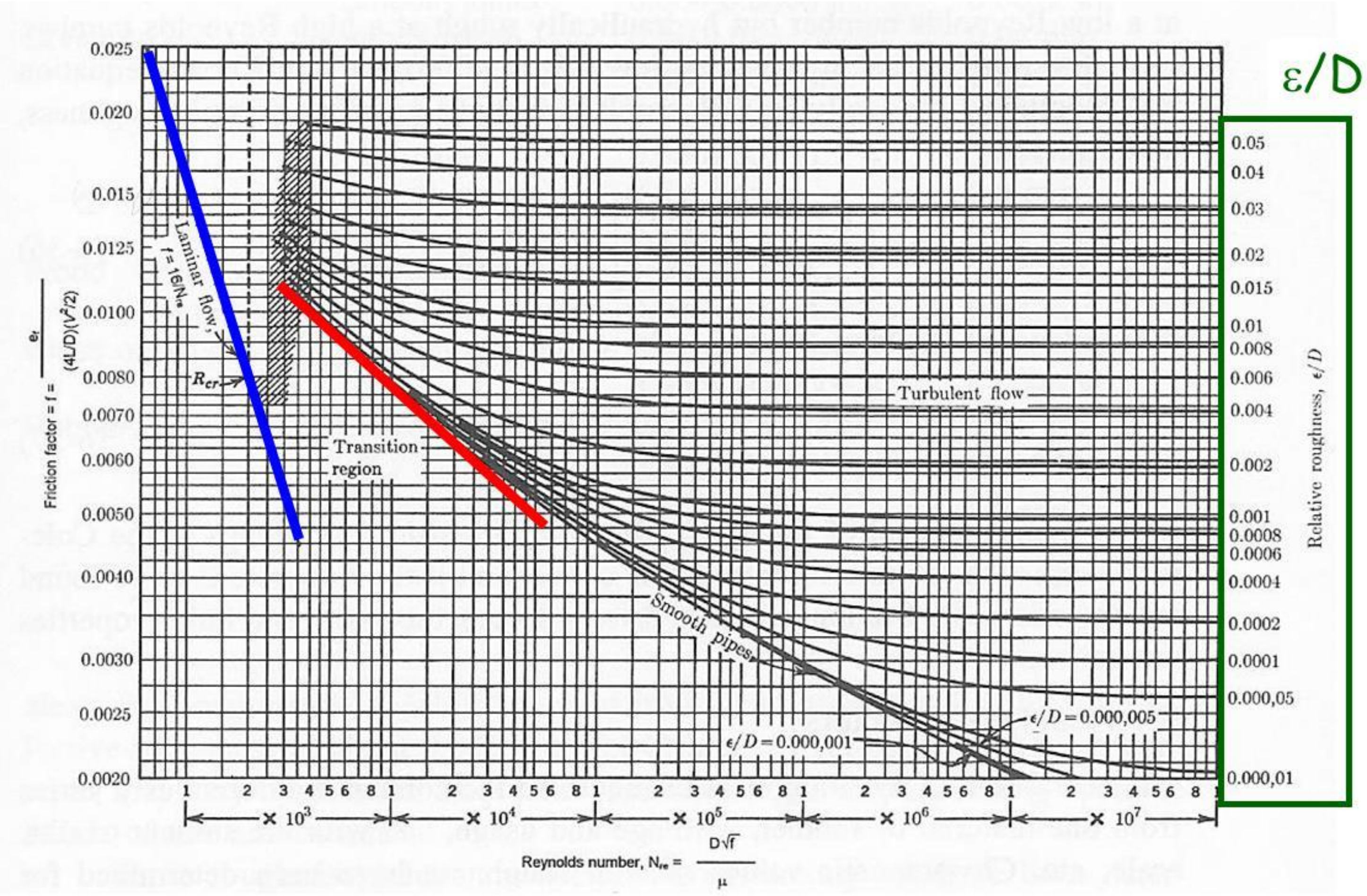
$\Delta\mathcal{P} \sim D_v^2 \Rightarrow f = Cst.$

Mesures plus précises

Analyse dimensionnelle

Ecoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique – régimes d'écoulement

Diagramme de Moody avec dépendance en rugosité relative



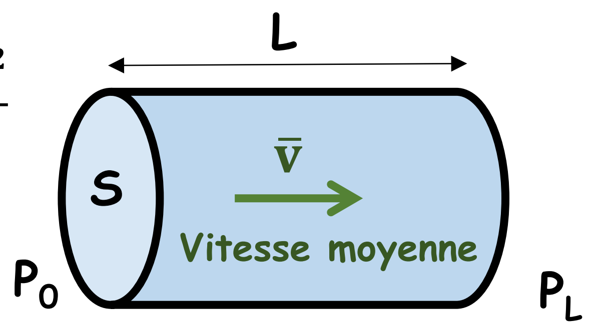
Analyse dimensionnelle

Analogie écoulements internes – écoulements externes

Ecoulement interne

$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

section



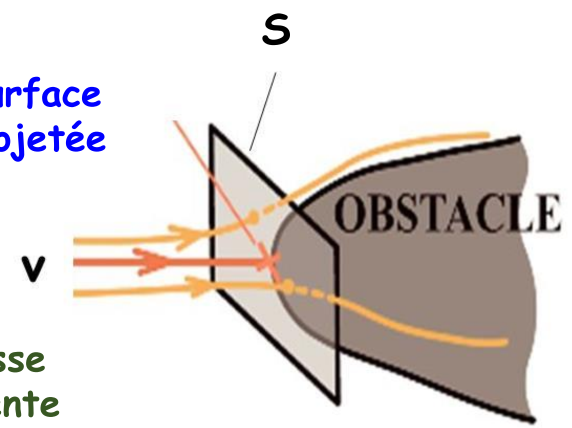
$S_p = \pi D L$

surface de la paroi interne

Ecoulement externe

Surface projetée

Vitesse incidente



Force de frottement:

$$F_x = S \times \Delta p = \pi \frac{D^2}{4} \Delta p$$

avec:

$$f = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho \bar{v}^2 4 \frac{L}{D}}$$

$$\mathbf{F_x = \frac{1}{2}\rho\boxed{\bar{v}^2} \times \boxed{S_p} \times \boxed{f}}$$

Vitesse moyenne | Surface mouillée | facteur de frottement

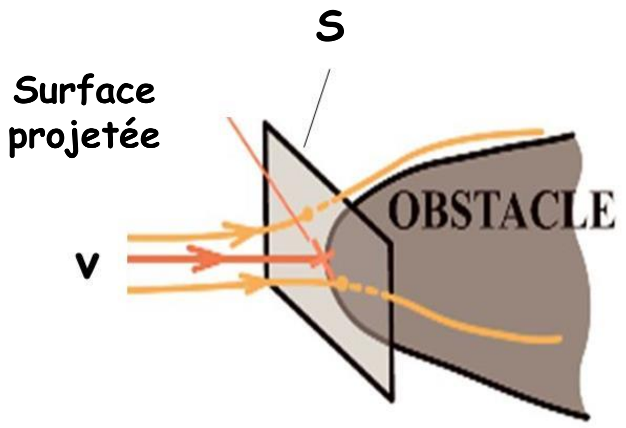
Force de traînée:

$$\mathbf{F_{traînée} = \frac{1}{2}\rho\boxed{v^2} \times \boxed{S} \times \boxed{C_x}}$$

Vitesse incidente | Surface projetée | coefficient de traînée

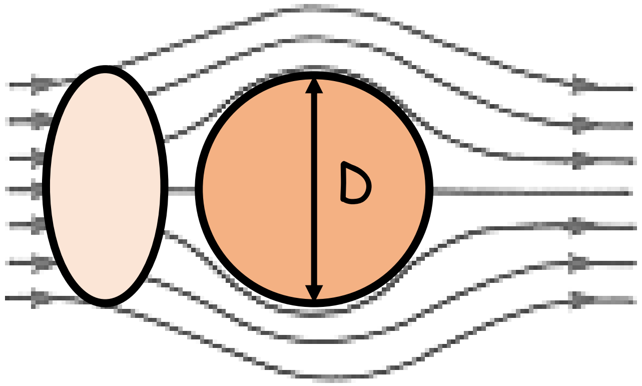
Analyse dimensionnelle

Ecoulement externe autour d'une sphère



$$\mathbf{S = \pi \frac{D^2}{4}}$$

v: vitesse incidente



Nombre de Reynolds:

$$\mathbf{Re = \frac{\rho D v}{\eta}}$$

Force de traînée en régime laminaire:

$$\mathbf{F_{traînée} = 3\pi D \eta v}$$

L'écoulement est laminaire si Re < 1

$$F_{traînée} = \frac{1}{2}\rho v^2 \times S \times C_x$$

$$C_x = \frac{F_{traînée}}{\frac{1}{2}\rho v^2 \times \pi \frac{D^2}{4}} = \frac{24\eta}{\rho v D} = \mathbf{\frac{24}{Re}}$$

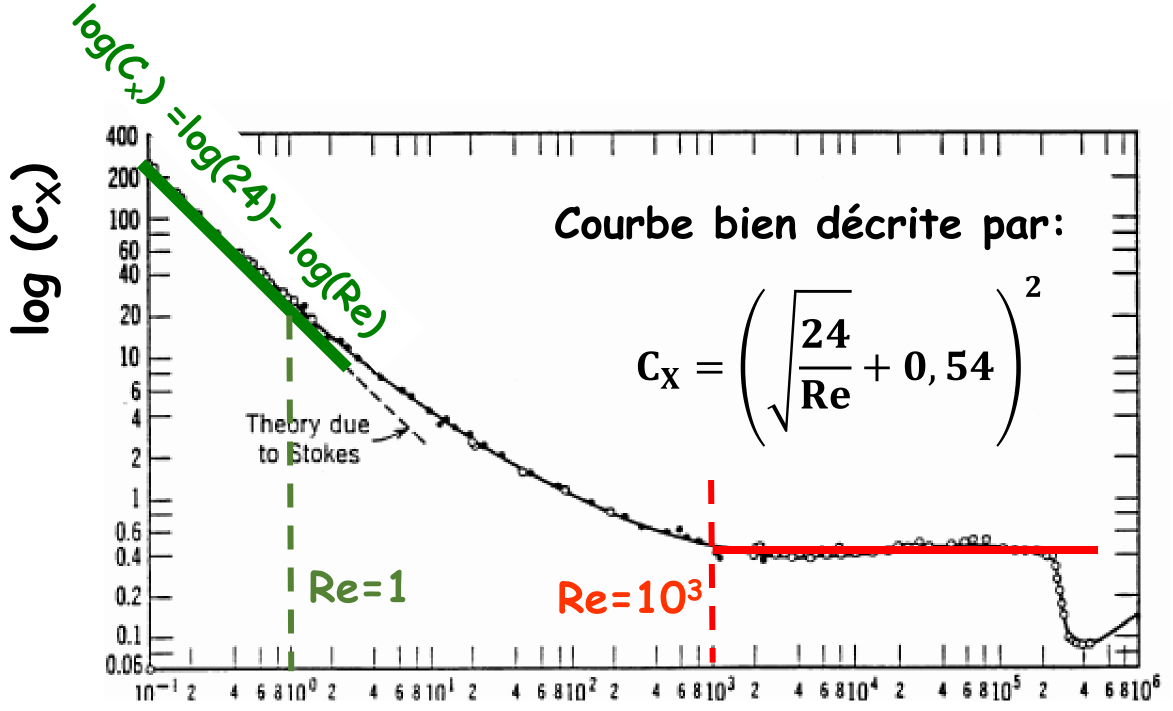
Analogue à $f = \frac{16}{Re}$ pour l'écoulement laminaire dans une conduite

Mais les nombres de Reynolds critiques sont très différents!

Analyse dimensionnelle

Analogie écoulements internes – écoulements externes

Ecoulement externe autour d'une sphère



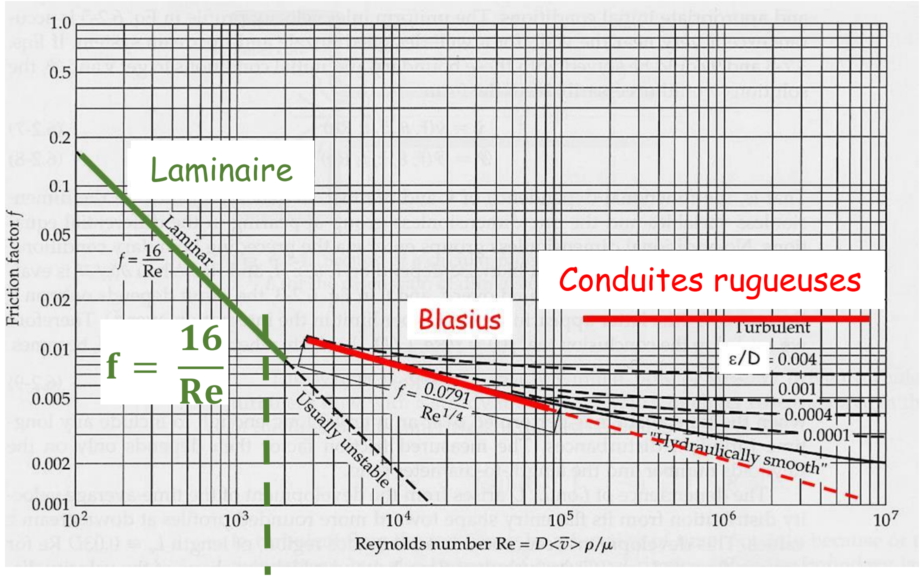
log (Re)

$$C_x = \frac{24}{Re}$$

$$C_x = C_\infty \cong 0,54$$

Ecoulement interne dans une conduite

Analogie avec le diagramme de Moody



Re=1700

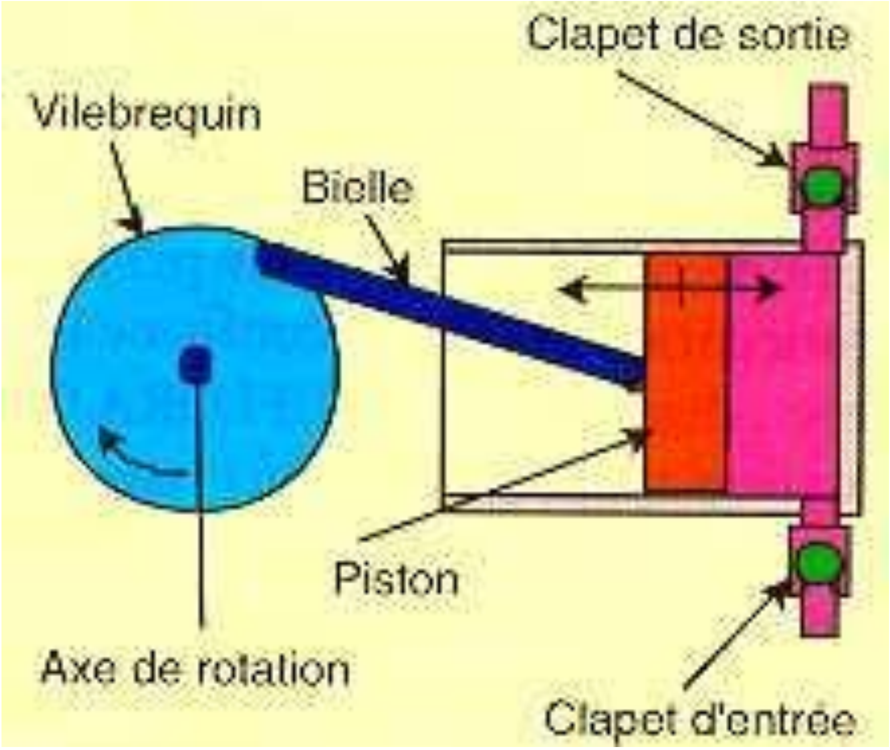
ECUST

Mécanique des Fluides

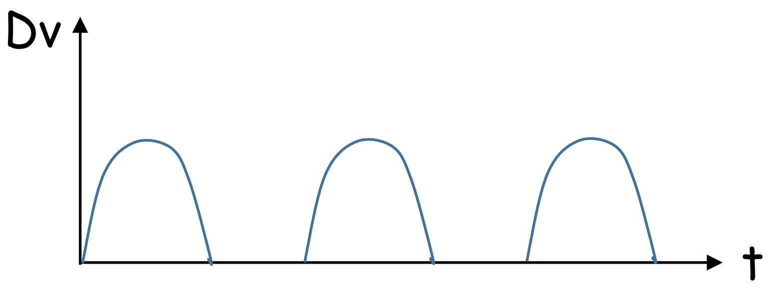
Partie G

Quelques notions sur les pompes

Pompes volumétriques à piston



Débit volumique imposé et périodique

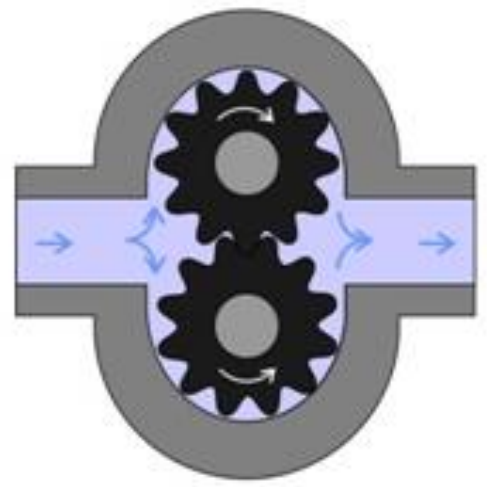


Possibilité de lisser cette courbe
(plusieurs pistons en parallèle)

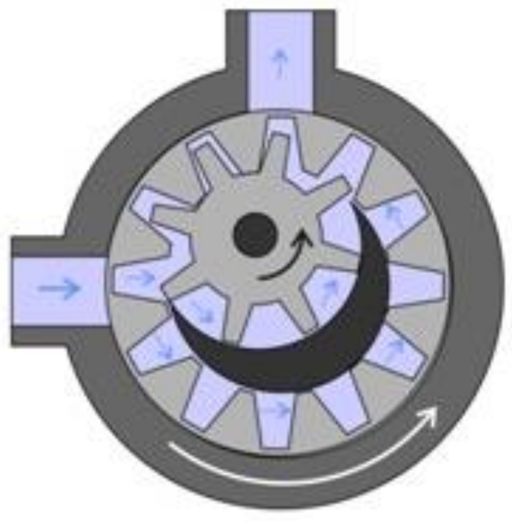
D_v est indépendant de la pression de sortie mais limité par la force sur le piston (couple du moteur)

Pour des raisons de sécurité, un limiteur de pression est nécessaire en sortie

Pompes volumétriques à engrenages



Engrenages externes



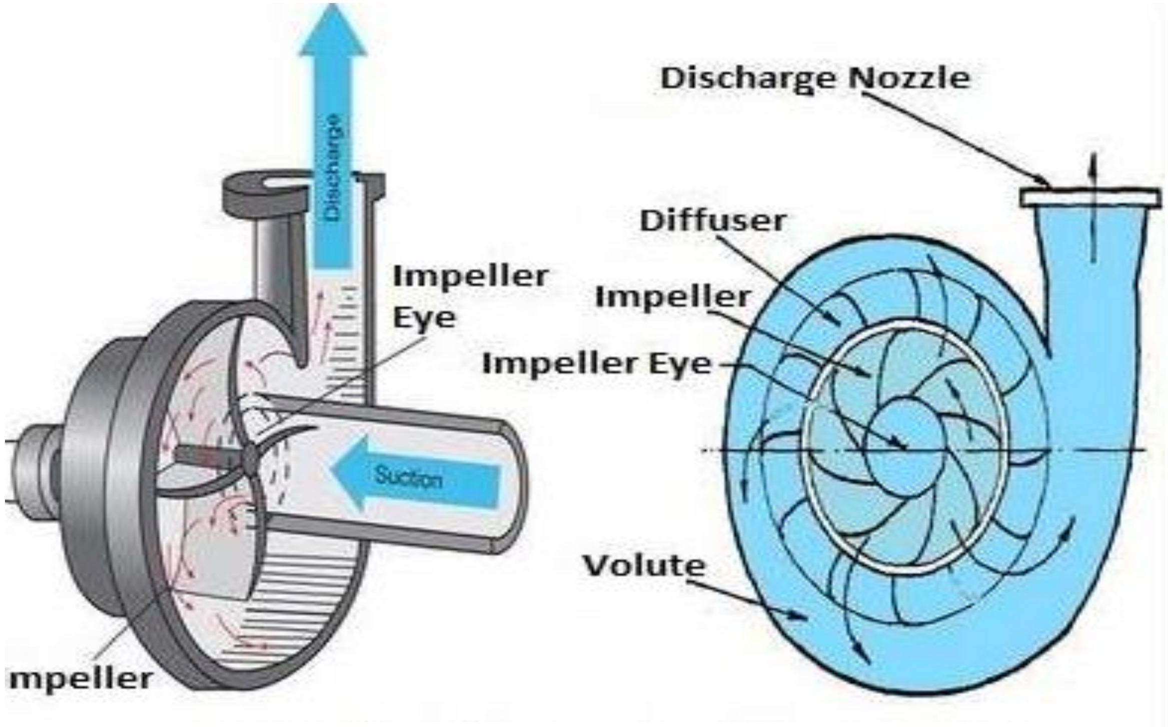
Engrenages internes

Le débit est continu

Dv est indépendant de la pression de sortie
mais limité par le couple sur les engrenages

$\rightarrow$ Limiteur de pression nécessaire

Pompes centrifuges



Principe de fonctionnement

Nécessité d'amorcer la pompe
(la remplir de fluide)

La pompe peut tourner

<u>À débit nul</u> (Dv=0)

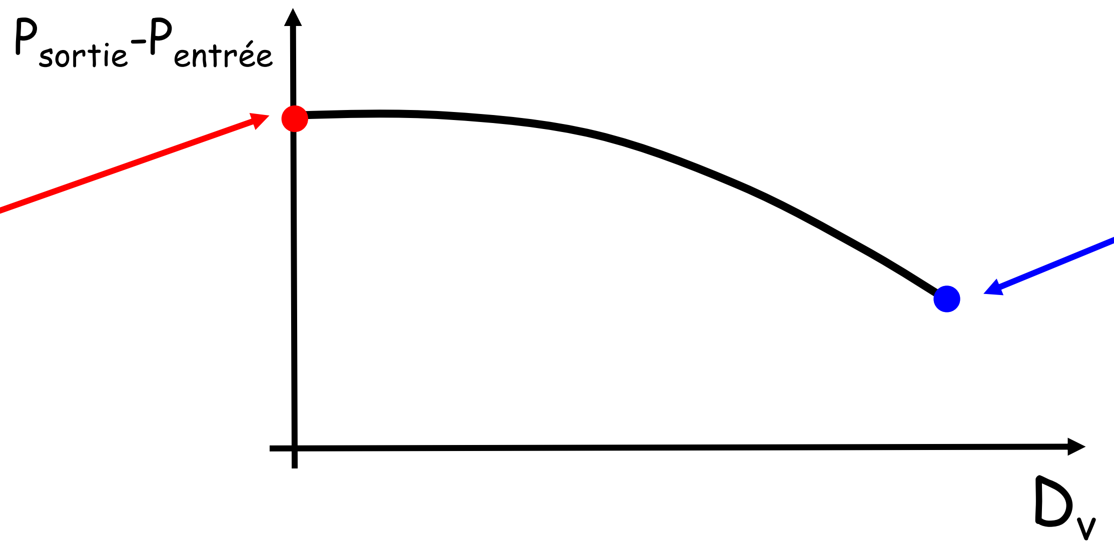
En fermant la vanne de sortie

La pression en sortie
est alors maximale

Le débit est fonction de
la pression en sortie

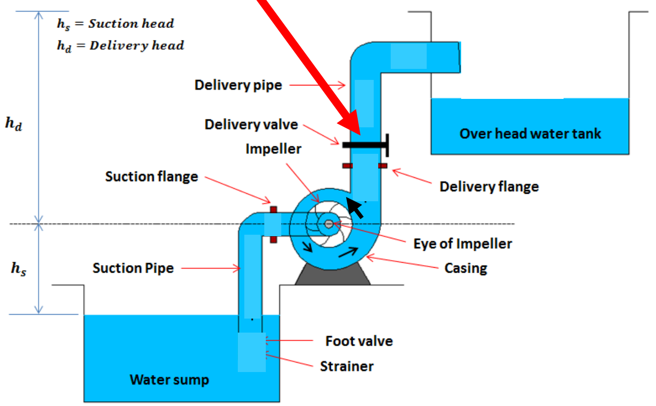
Coube caractéristique (courbe de performance) d'une pompe centrifuge

Pression maximale
Débit nul

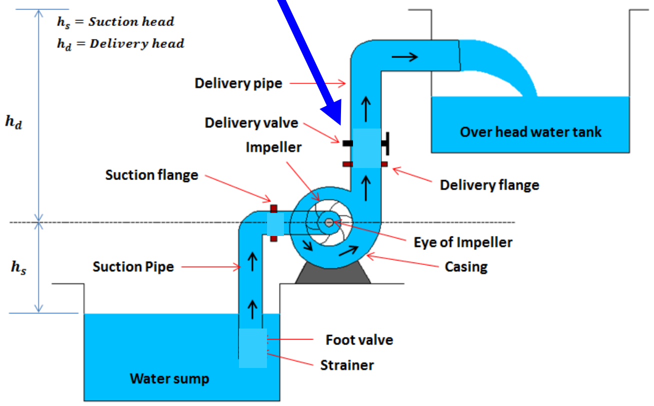


Pression minimale
Débit maximum

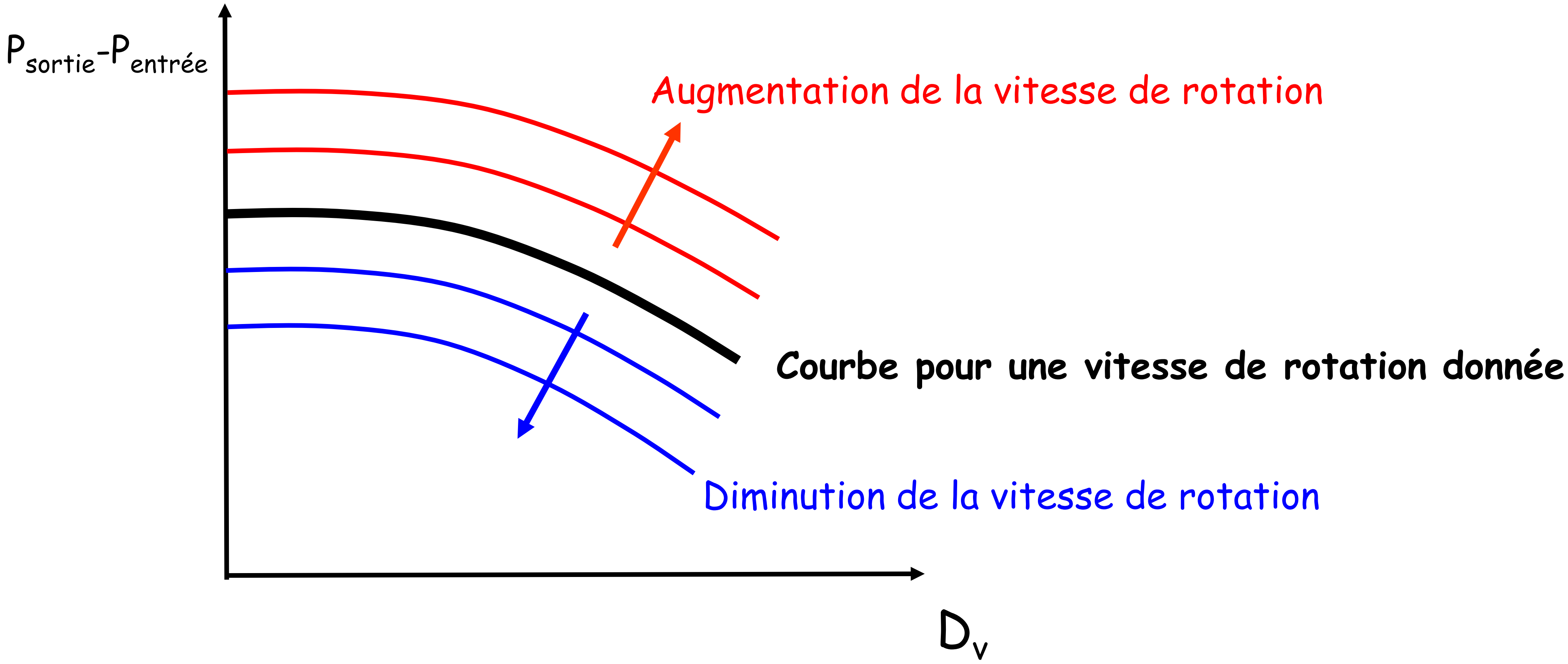
Vanne de sortie fermée



Vanne de sortie entièrement ouverte

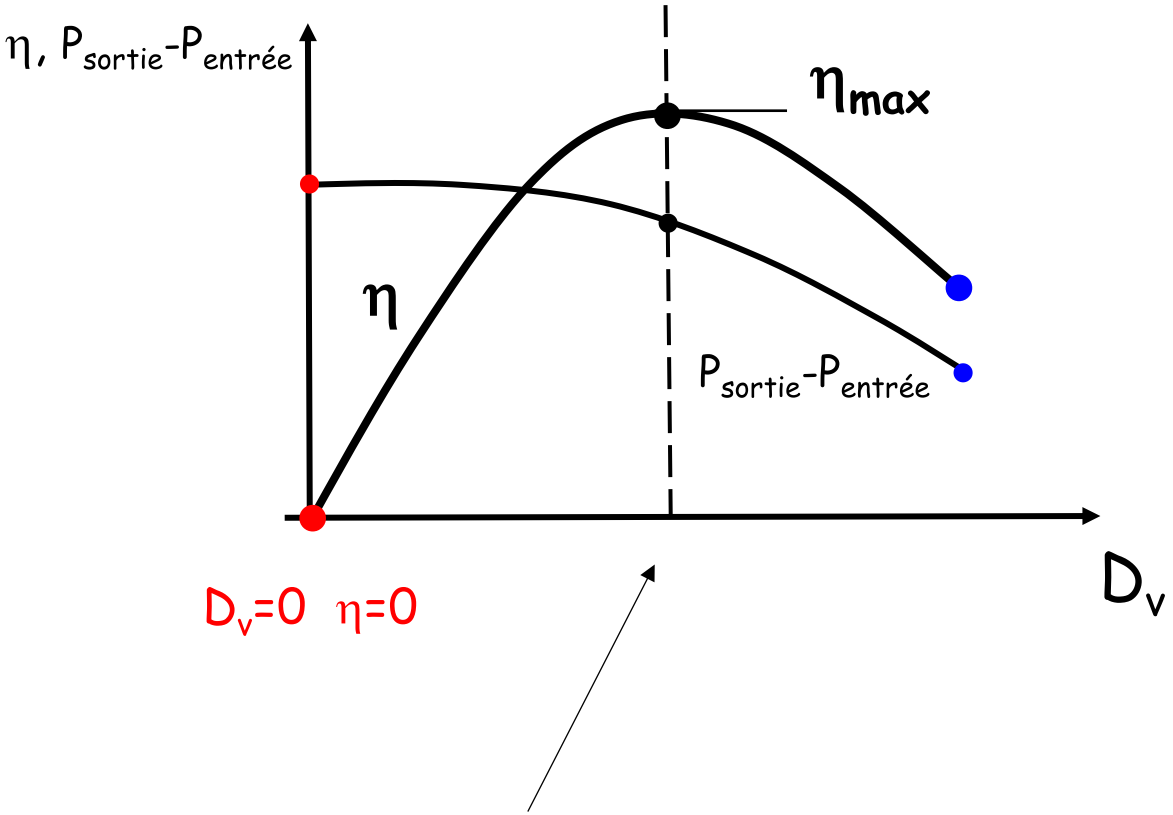


Coube caractéristique d'une pompe centrifuge



Vitesses de rotation typiques: 1000 – 3000 rpm

Courbe de rendement d'une pompe centrifuge



Puissance hydraulique: $D_v \times \Delta P$ (puissance fournie)

Puissance électrique : P_w (puissance absorbée)

Rendement : $\eta = \dfrac{D_v \times \Delta P}{P_w}$ (fournie/absorbée)

On vise à opérer la pompe au maximum du rendement

Courbes de rendement typiques pour une série de pompes

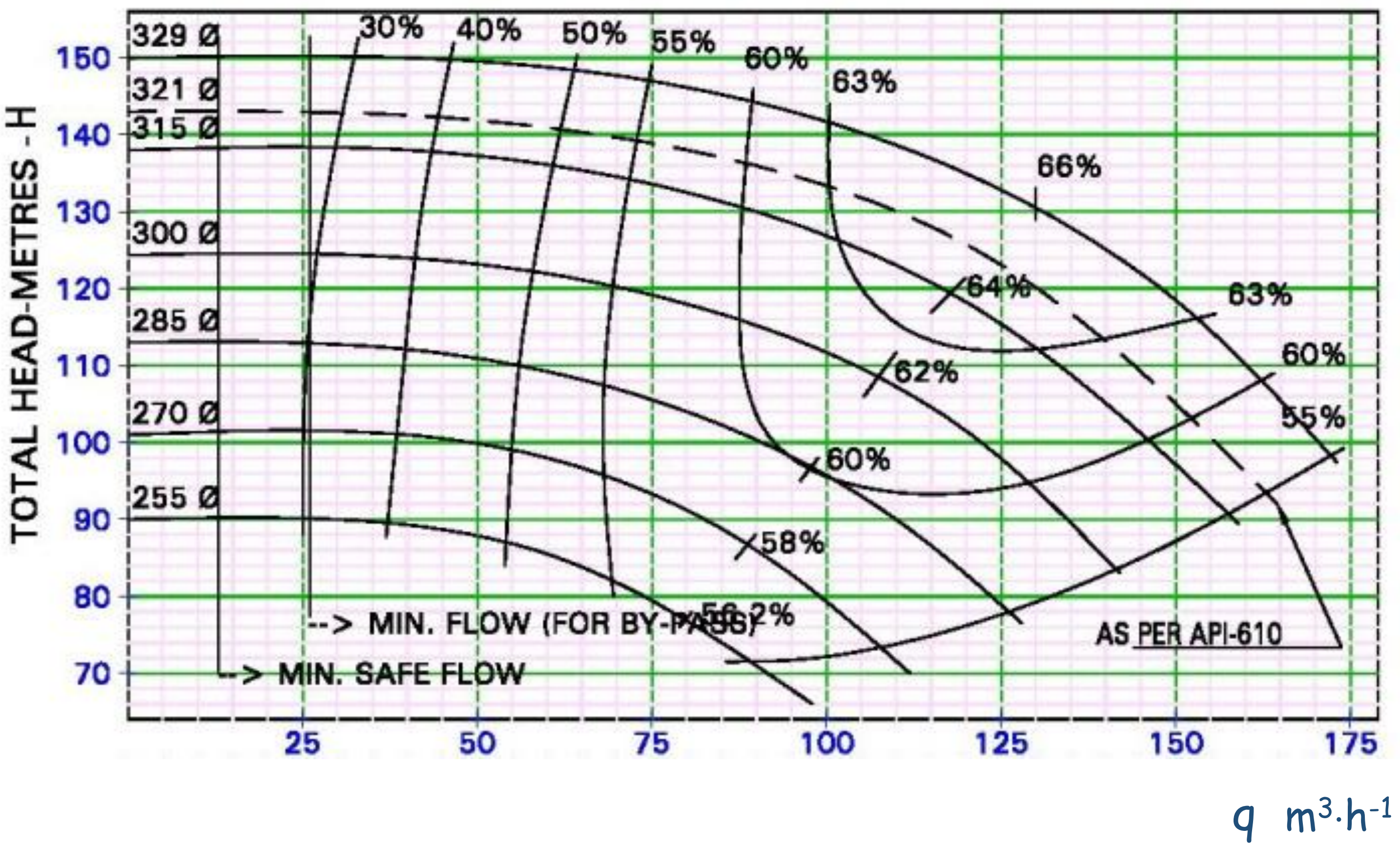
« Hauteur manométrique »:

$$H = \frac{P_{sortie} - P_{entrée}}{\rho g}$$

ρ: masse volumique du fluide pompé

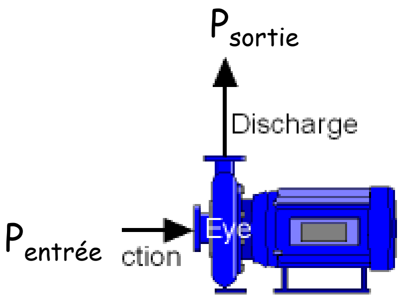
Pour l'eau:

10 bars ⇔ 102 m



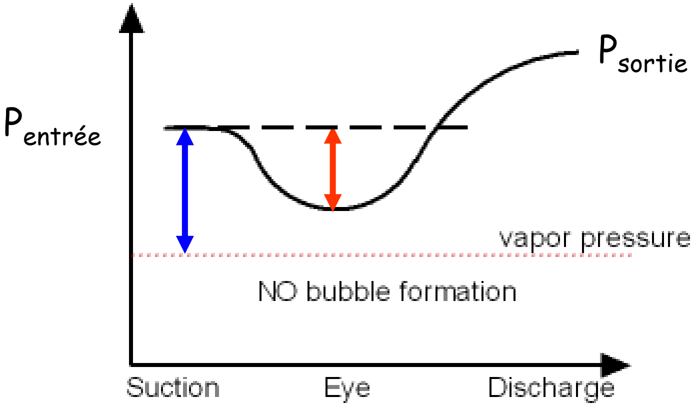
Chaque pompe est opérée à sa vitesse de rotation nominale

Eviter la cavitation !



Le risque de cavitation est le problème N°1 des pompes centrifuges

Il faut s'assurer qu'en tout point dans la pompe la pression reste supérieure à la pression de vapeur saturante du fluide



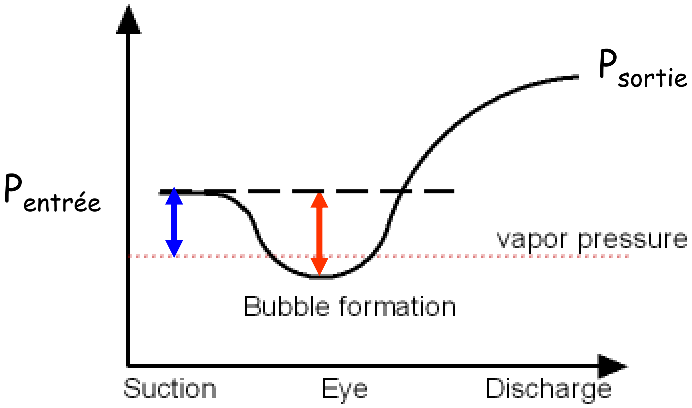
Pas de cavitation

NPSH requis: propriété de la pompe, fonction du débit

NPSH disponible: P_{in} - P^{vap}

Pour éviter la cavitation:

$$\text{NPSH}_{\text{disponible}} > \text{NPSH}_{\text{requis}}$$

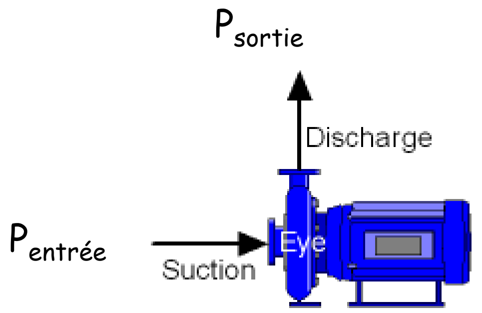


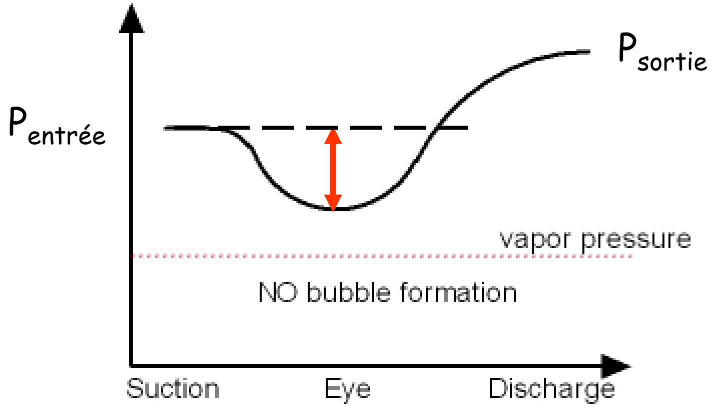
Cavitation !

Unités du NPSH en mètres:

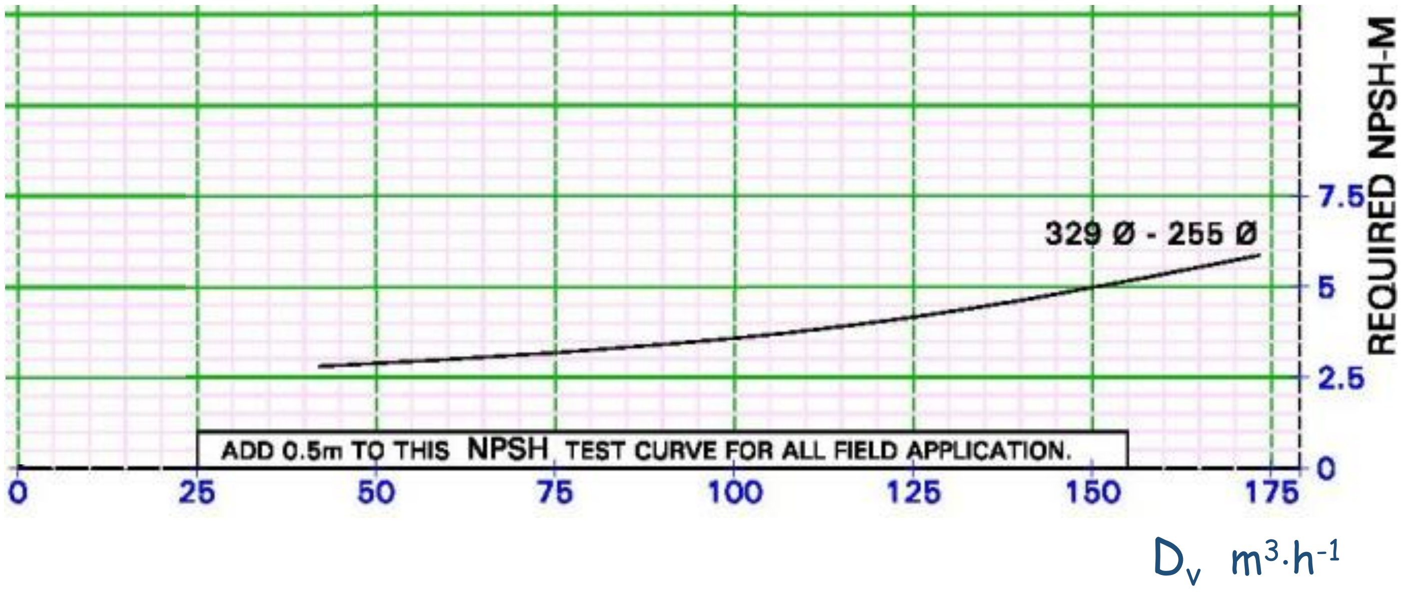
$$\text{NPSH} = \frac{\Delta P}{\rho(\text{fluide}) \times g}$$

NPSH (net positive suction head)





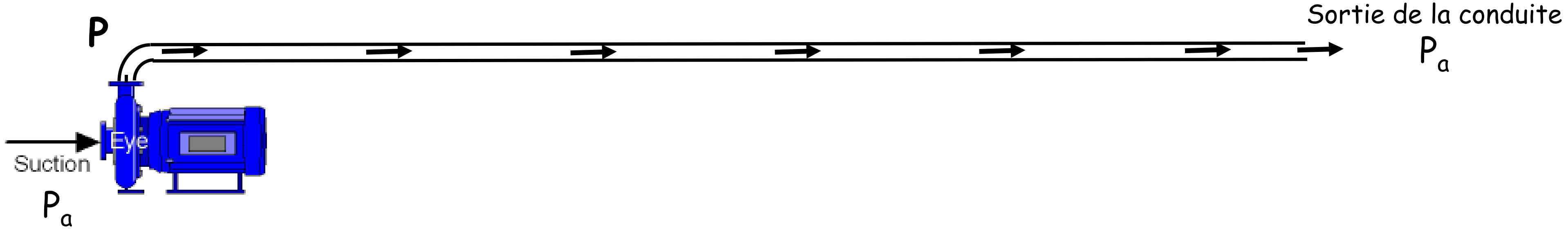
Le NPSH requis augmente avec le débit

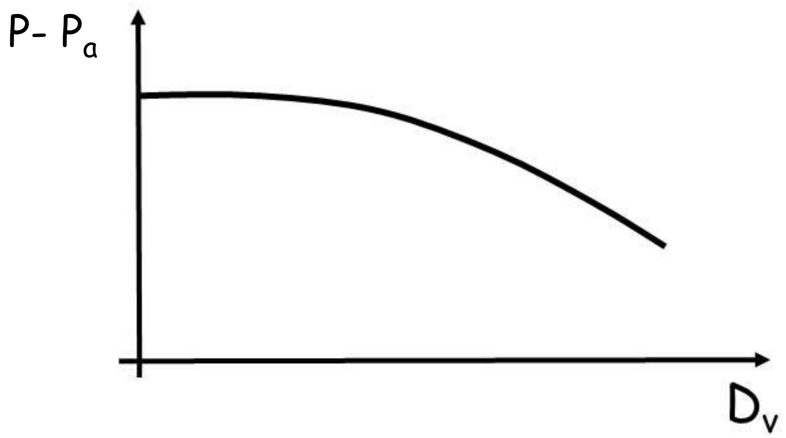


Système pompe-circuit: un problème typique

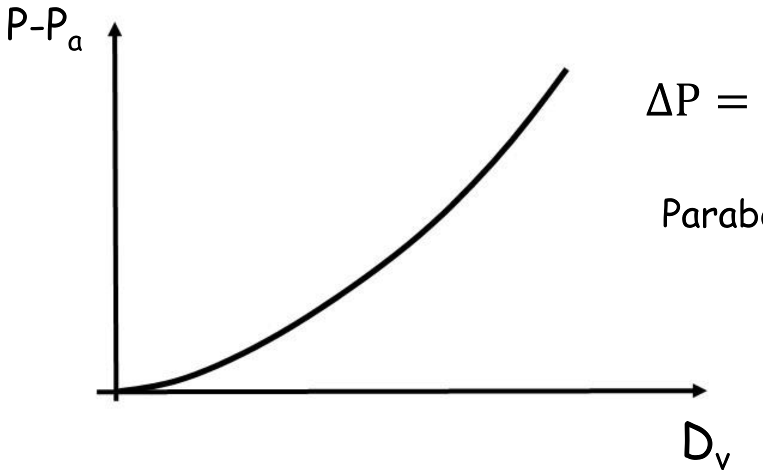
On veut pomper le fluide à travers un long tube horizontal avec une pompe centrifuge

$\rightarrow$ Pertes de charge singulières négligées





Courbe caractéristique de la pompe



$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho\bar{v}^2 f\frac{4L}{D}$$

Parabole si f=Cst

Courbe pression – débit de la conduite

Système pompe-circuit: un problème typique