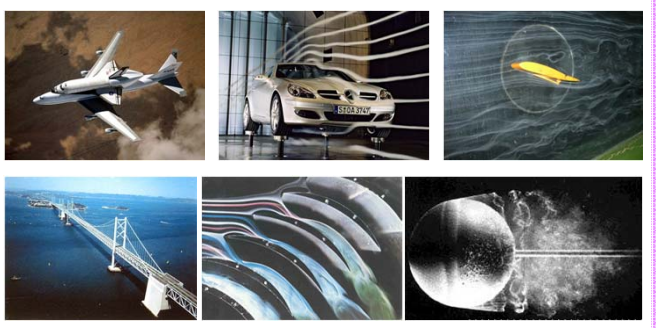
概述1

外流 ⟹ 流体从物体外部流过



概述2

粘性、不可压、定常、绕流 $\rho = \text{const}$，$\frac{\partial}{\partial t} = 0$

边界层的概念、微分方程和布拉修斯解、动量积分方程及平板边界层求解、曲壁边界层的分离

基础知识

⟹ 不可压缩流体控制方程组，园管湍流速度的幂次分布律，雷诺数，理想流体圆柱绕流，逆压梯度

第十章 绕物体的粘性不可压流动

边界层的概念及三种厚度定义

边界层微分方程及平板层流边界层布拉修斯解

边界层积分方程及平板边界层求解

边界层分离

绕流物体的升力和阻力

10.1 边界层和边界层厚度

空气 ⟹ $\nu = 1.4\times10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s}$

汽车 L = 1.5 m

V = 80 km/h = 22 m/s

⟹ $\text{Re} = 2.4\times10^{6}$

水 ⟹ $\nu = 1.3\times10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$

船 L = 10 m

V = 10 km/h = 2.8 m/s

⟹ $\text{Re} = 2.2\times10^{7}$

边界层1

高 Re 数绕流，Re >> 1

1904年普朗特在第三届国际数学学会上提出边界层理论

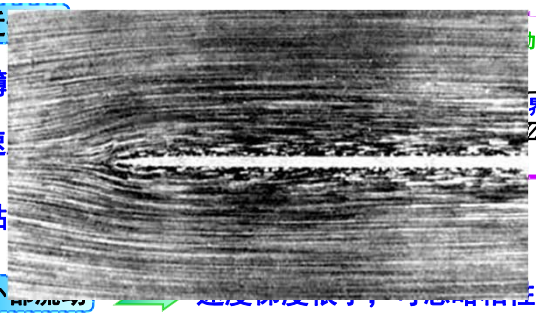
近

薄

速

粘

外



边界层2

高 Re 数绕流

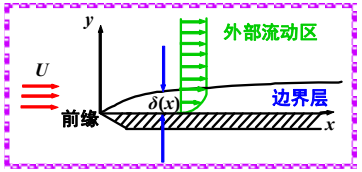
- 边界层 —— 粘性有旋
- 外部势流 —— 理想无旋
- 尾流区 —— 粘性有旋 *wake*

边界层 ⇐ 相比绕流物体特征尺寸为一个薄层

概念：高 Re 流动时，贴近固体壁面附近的速度梯度很大，粘性影响不能忽略并且流动有旋的薄层

边界层厚度1

边界层厚度 ⇒ $\delta(x)$ 名义边界层厚度



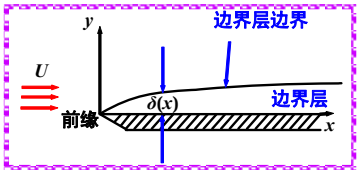
从物面沿外法线到速度达到势流速度99%处的距离

- 边界层厚度沿流动方向不断增大
- 反映了粘性影响范围

边界层厚度2

边界层边界

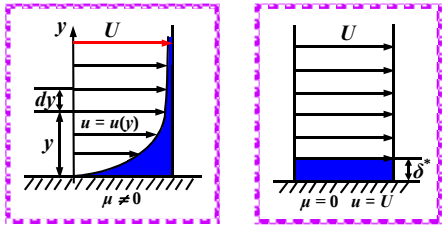
当地速度达到外部“理想势流”流动速度99%处的连线



- 人为定义，实际不存在
- 边界层边界不是流线
- 流体通过边界层边界不断进入边界层

边界层厚度3

位移厚度

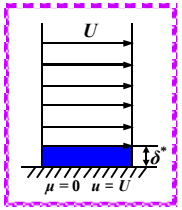


- 边界层内由于粘性的影响，质量流量比理想流体流经该区域时有所减少

边界层厚度4

边界层内由粘性影响减少的流量＝理想流体流过物面时表面向外移动 δ^* 减少的流量

$$\rho U\delta^* = \int_0^\infty \rho(U-u)dy$$



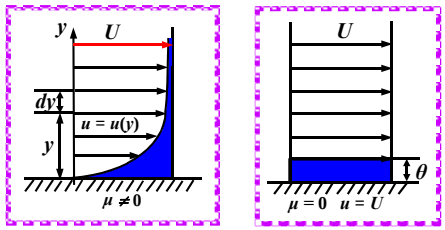
位移厚度 (排挤厚度)

$$\delta^* = \int_0^\infty (1-\frac{u}{U})dy$$

$$\delta^* = \int_0^\infty (1-\frac{u}{U})dy \approx \int_0^\delta (1-\frac{u}{U})dy$$

边界层厚度5

动量（损失）厚度

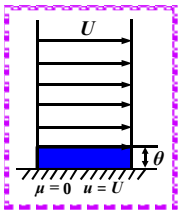


- 边界层内由于粘性的影响，动量流量比理想流体流经该区域时有所减少

边界层厚度6

边界层内由于粘性影响而减少的动量流量＝理想流体以速度 U 流过面积为 θ 的动量流量

$$(\rho U\theta)U = \int_0^\infty \rho u(U-u)dy$$

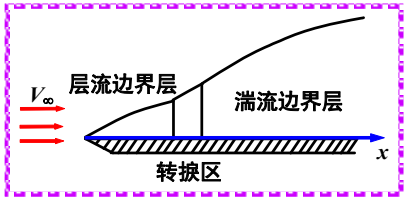


动量(损失)厚度

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy$$

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy$$

边界层内的流动状态1



平板前缘开始 ⇒ 层流边界层

$x\uparrow, \delta\uparrow, \mathrm{Re}\uparrow$ ⇒ 转捩点 ⇒ 湍流边界层

边界层内的流动状态2

边界层流动状态的判据

$$\mathrm{Re}_x = \frac{Ux}{\nu} \qquad \mathrm{Re}_\delta = \frac{U\delta}{\nu}$$

其中，x 为物面上一点到前缘的距离

顺流平板 ⇒

$$(\mathrm{Re}_x)_{cr} = 3\times10^5 \sim 3\times10^6$$

$$(\mathrm{Re}_\delta)_{cr} = 4\times10^3$$

- 不同绕流物体边界层的临界雷诺数受多种因素的影响
  - 来流湍流度、物体形状、壁面粗糙度，压力梯度，压缩性等等

10.2 边界层微分方程

粘性、均质不可压、定常，二元 ⇒ $\rho = \mathrm{const}$，$\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$

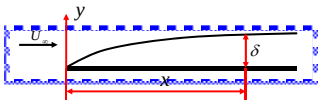
连续方程、N-S方程 —量级分析、层流边界层解析解→ 普朗特边界层微分方程（边界层方程）

积分形式连续方程、积分形式动量方程 —顺流平板、近似解→ 边界层动量积分方程

边界层方程2

平板边界层或曲率半径远大于边界层厚度的曲面边界层

基本方程组



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

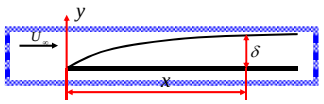
$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

边界层方程3

采有数量级分析法

两个基本假设



- $\delta / L \ll 1$
- 在边界层内粘性力和惯性力具有相同量级

量级分析

$$u \sim U_\infty$$

$$x \sim L,\ \mathrm{y} \sim \delta,\ \frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{L},\ \frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta}$$

边界层方程4

连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{U_\infty}{L} \quad \frac{v}{\delta}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{U_\infty}{L} \sim \frac{v}{\delta} \quad \Rightarrow \quad v \sim U_\infty \frac{\delta}{L} \quad \Rightarrow \quad v \ll U_\infty$$

或 $v \ll u$

有旋证明

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{v}{L} \ll \frac{U_\infty}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \omega_z \neq 0$$

边界层方程5

运动方程量级分析

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U_\infty}{L},\ v \sim U_\infty \frac{\delta}{L}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{U_\infty^2}{L} \quad \frac{U_\infty^2}{L} \qquad \nu\frac{U_\infty}{L^2} \quad \nu\frac{U_\infty}{\delta^2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\delta U_\infty^2}{L^2} \quad \frac{\delta U_\infty^2}{L^2} \qquad \nu\frac{\delta U_\infty}{L^3} \quad \nu\frac{U_\infty}{L\delta}$$

边界层方程6

x 方向动量方程量级的比较

$$\frac{\delta}{L} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \nu\frac{U_\infty}{L^2} \ll \nu\frac{U_\infty}{\delta^2} \quad \Rightarrow \text{略去} \quad \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$\frac{\partial p}{\partial x}$ 是被动的力，起调节作用，它的量阶由方程中其它力中的最大量级决定

x方向简化后动量方程

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

边界层方程7

δ量级的估计　　粘性项与惯性项具有相同的量级

$$\frac{U_\infty^2}{L}\sim\nu\frac{U_\infty}{\delta^2}\Rightarrow\delta\sim\sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}}\Rightarrow\frac{\delta}{L}\sim\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty L}}$$

$$\frac{\delta}{L}\ll1\Rightarrow\frac{L}{\delta}\gg1\Rightarrow\frac{L^2}{\delta^2}\sim\frac{U_\infty L}{\nu}=\mathrm{Re}_L\gg1$$

$\frac{\delta}{L}\ll1$ 的假设相应于 $Re_L\gg1$

y方向动量方程量级的比较

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\delta U_\infty^2}{L^2}\quad\frac{\delta U_\infty^2}{L^2}\qquad\nu\frac{\delta U_\infty}{L^3}\quad\nu\frac{U_\infty}{L\delta}$$

$$\left\{\frac{U_\infty^2}{L}\quad\frac{U_\infty^2}{L}\qquad\nu\frac{U_\infty}{L^2}\quad\nu\frac{U_\infty}{\delta^2}\right\}\frac{\delta}{L}$$

y方向方程惯性和粘性力项均是x方向方程相应项量级的δ/L倍，可以忽略

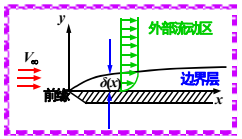
边界层方程7

普朗特边界层微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0$$



- 方程数目减少
- 项数减少
- 椭圆型转化为抛物型
- 仍然是非线性方程

边界层内压强沿 y (垂直壁面）方向保持不变

边界层方程8

- 外部势流压强可由伯努利方程求得

$$p+\frac{1}{2}\rho U_e^2=C\Rightarrow-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=U_e\frac{dU_e}{dx}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U_e\frac{dU_e}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

基本边界条件　$u(x,0)=0,\ v(x,0)=0,\ u(x,\infty)=U_e$

适用条件

☞ 定常、二维、不可压、层流、质量力忽略、平板或大曲率曲面边界层

边界层的主要特征

- 与物体特征长度比，边界层厚度很小
- 边界层沿流体流动方向逐渐增厚，其外缘与流线不重合
- 边界层内沿壁面法线方向速度梯度很大
- 边界层内粘性力和惯性力是同一数量级
- 边界层内流动是有旋流动
- 边界层内沿壁面法线方向各点压强相等
- 边界层内流动也有层流、湍流两种流态

10.3 平壁边界层的布拉修斯解

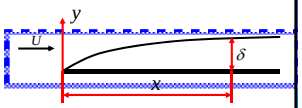
均匀来流顺流流过半无限大薄平板的边界层

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{dU}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

顺流平板边界层特性

外部势流均匀流动，速度U为常数，压强p也为常数，边界层内压强为常数



$$U=\text{const}\qquad \frac{dU}{dx}=0$$

进一步简化方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\[2ex] u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\end{cases}$$

边界条件

$$u(x,0)=0,\quad v(x,0)=0,\quad u(x,\infty)=U$$

方程解法

- 方程是两个自变量抛物型偏微分方程
- 自变量 x 和 y 无特征尺寸
  - 求解可以采用相似解法

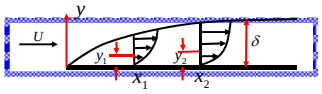
相似解法

- 含两个自变量的抛物型偏微分方程的一种特殊解法
- 适用于两个自变量无特征量
- 利用变量的某种组合，引进新的相似变量，将偏微分方程转换为常微分方程

方程求解

边界层相似解

若 $\dfrac{y_1}{\delta_1(x_1)}=\dfrac{y_2}{\delta_2(x_2)}$



$$\Rightarrow\quad \frac{u(x_1,y_1)}{U}=\frac{u(x_2,y_2)}{U}$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{u}{U}$ 只是 $\eta=\dfrac{y}{\delta}$ 的函数 $\Rightarrow$ $\dfrac{u}{U}=g(\eta)$

- 以 $\dfrac{u}{U}$ 和 $\dfrac{y}{\delta}$ 绘制速度分布图，两个截面的速度剖面将会重合
  - 边界层具有相似解

方程求解

由粘性项与惯性项具有相同的量级

$$\frac{U_\infty^2}{L}\sim\nu\frac{U_\infty}{\delta^2}\Rightarrow\delta\sim\sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}}\Rightarrow\delta\propto\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

相似变量 $\Rightarrow$ $\eta=\dfrac{y}{\delta}=\dfrac{y}{\sqrt{\nu x/U}}$

流函数 $\psi(x,y)$ $\Rightarrow$ $u=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$ $\quad v=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}$$

可令 $\dfrac{u}{U}=g(\eta)=f'(\eta)$ 则 $\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}=\sqrt{\nu xU}\,f'(\eta)$

方程转换

积分 $\psi=\sqrt{\nu U x}\,f(\eta)$

$u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

流函数方程

由 $u=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\qquad v=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}$$

将 $\psi=\sqrt{\nu U x}\,f(\eta)$ 代入建立 f 的方程

方程转换

$\psi=\sqrt{\nu U x}\,f(\eta)$

$$\eta=\frac{y}{\sqrt{\nu x/U}}\Rightarrow\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\qquad \frac{\partial\eta}{\partial x}=-\frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{\nu x^3/U}}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\sqrt{\nu U x}\,f'(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial y}=\sqrt{\nu U x}\sqrt{\frac{U}{\nu x}}f'=Uf'$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=U\sqrt{\frac{U}{\nu x}}f''\qquad \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}=\frac{U^2}{\nu x}f'''$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}f(\eta)+\sqrt{\nu U x}\,f'(\eta)\left(-\frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{\nu x^3/U}}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}(f-\eta f')$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=-\frac{U}{2}\sqrt{\frac{U}{\nu}}\frac{y}{x^{3/2}}f''=-\frac{U}{2x}\eta f''$$

转换后常微分方程

$\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nu\dfrac{\partial^3\psi}{\partial y^3}$

$\psi=\sqrt{\nu U x}\,f(\eta),\quad \eta=\dfrac{y}{\sqrt{\nu x/U}}$

代入流函数方程

$$-\frac{U^2}{2x}\eta f f''-\frac{U^2}{2x}(f-\eta f')f''=\frac{U^2}{x}f'''$$

$$-\frac{U^2}{2x}ff''=\frac{U^2}{x}f'''$$

$$\Rightarrow\quad f'''+\frac{1}{2}ff''=0$$

布拉休斯方程

☞ 方程中未出现 x 或 y，是 $f(\eta)$ 的常微分方程，存在相似性解假设正确

边界条件转换

$\psi=\sqrt{\nu U x}\,f(\eta),\quad \eta=\dfrac{y}{\sqrt{\nu x/U}}$

$\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=Uf'$

$\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\nu U}{x}}(f-\eta f')$

$$f'''+\frac{1}{2}ff''=0$$

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=Uf'\Rightarrow$$

$$u(x,0)=0\Rightarrow f'(0)=0$$

$$u(x,\infty)=U\Rightarrow f'(\infty)=1$$

$$-v=\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}(f-\eta f')$$

$$v(x,0)=0\Rightarrow f(0)=0$$

布拉修斯方程求解

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$$

$$f(0) = f'(0) = 0,\ f'(\infty) = 1$$

- 解析解仍然困难，可得级数解和数值解
- 常微分方程数值解比偏微分方程数值解精确
- 数值解已经以表格形式给出

布拉修斯方程数值解

平板边界层函数 f f' f''

$\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$	f	$f' = \frac{u}{U}$	f''
0	0	0	0.33206
…	…	…	…
4.4	2.69238	0.97587	0.03897
5.0	3.28329	0.99155	0.01591
5.4	3.68094	0.99616	0.00793
…	…	…	…
8.0	6.27923	1.00000	0.00001
8.4	6.67923	1.00000	0.00000

.

边界层厚度

$u/U \approx 0.99$ 对应的 y 即为边界层厚度

$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x / U}}$

$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = Uf'$

由数值计算结果：$\eta = 5.0$ 时 $f' = u/U \approx 0.99$

$$\eta_\delta = \frac{\delta}{\sqrt{\nu x / U}} = 5.0$$

$$\Rightarrow \quad \delta = 5.0\sqrt{\nu x / U} = \frac{5.0x}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \qquad \mathrm{Re} = \frac{Ux}{\nu}$$

☞ 层流边界层厚度与流体性质、来流速度及距前缘的距离有关

$$\Rightarrow \quad \delta \propto x^{1/2}$$

位移厚度

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^\infty (1 - f')\, d\eta$$

$$= \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \left| \eta - f(\eta) \right|_0^\infty = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \lim_{\eta \to \infty} [\eta - f(\eta)]$$

$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x / U}}$

$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = Uf'$

由数值计算结果：η 大于7.8后，$\eta - f$ 已经为常数1.721

$$\Rightarrow \quad \delta^* = 1.721\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

$$\delta^* = \frac{1.721x}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \qquad \mathrm{Re} = \frac{Ux}{\nu}$$

动量厚度

$$\theta=\int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy=\sqrt{\frac{\nu x}{U}}\int_0^\infty f'(1-f')d\eta \qquad \text{采用分部积分}$$

$$=\sqrt{\frac{\nu x}{U}}\left\{[f(1-f')]\Big|_0^\infty+\int_0^\infty ff''d\eta\right\}$$

由数值计算结果: $f(0)=0$，$\eta\to\infty, f'=1$

$$\theta=\sqrt{\frac{\nu x}{U}}\int_0^\infty ff''d\eta=2\sqrt{\frac{\nu x}{U}}\int_0^\infty -f'''d\eta=2\sqrt{\frac{\nu x}{U}}f''(0) \qquad \text{由布拉修斯方程}$$

$$f''(0)=0.332 \Rightarrow \theta=\frac{0.664x}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta<\delta^*<\delta$$

壁面切应力

$$\tau_0=\mu\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(x,0)=\mu\sqrt{\frac{U^3}{\nu x}}f''(0)$$

$\eta=\frac{y}{\sqrt{\nu x/U}}$

$\psi=\sqrt{\nu U x}\,f(\eta)$

$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=Uf'$

$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=U\sqrt{\frac{U}{\nu x}}f''$

由数值计算结果

$$y=0 \qquad \eta=0 \qquad f''=0.332$$

$$\tau_0=0.332\mu\sqrt{U^3/\nu x}$$

$$C_f=\frac{\tau_0(x)}{\rho U^2/2}=\frac{2f''(0)}{\sqrt{\mathrm{Re}}}=\frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \qquad \mathrm{Re}=\frac{Ux}{\nu}$$

- 随着离平板前缘距离 x 的增大，壁面切应力减小

壁面摩擦阻力和阻力（阻力）系数

阻力基本公式

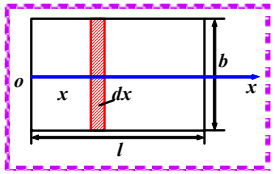
$$F_D=C_D\frac{1}{2}\rho U^2A$$

$\frac{\tau_0(x)}{\rho U^2/2}=\frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$

C_D – 阻力系（因）数

平板壁面总摩擦力

$$F_D=\int_0^L\tau_0(x)bdx=C_D\frac{1}{2}\rho U^2Lb$$



阻力系（因）数

$$C_D=\frac{F_D/L}{\rho U^2/2}=\frac{1}{L}\int_0^L\frac{\tau_0(x)}{\rho U^2/2}dx=\frac{0.664}{x}\int_0^L\frac{dx}{\sqrt{Ux/\nu}}$$

$$\Rightarrow \quad C_D=\frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \qquad \mathrm{Re}=\frac{UL}{\nu}$$

相似解适用范围

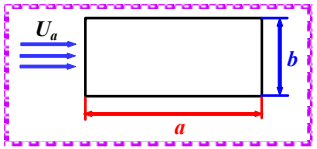
$$\frac{\tau_0(x)}{\rho U^2/2}=\frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$$

- $x\to 0$，$\tau_0\to\infty$，物理上不成立，说明不适用前缘附近
- 在前缘点附近是小雷诺数流动，u和v变化具有相同的数量级，不满足边界层近似条件，布拉修斯解不适用
- 布拉修斯解适用范围$10^3<\mathrm{Re}<5\times10^5$，与实验测量符合很好
- $\mathrm{Re}>5\times10^5$ 时，层流边界层转换为湍流边界层，微分方程不适用湍流

顺流平板层流边界层－例题1

例：矩形平板边长为a和b，若在静止流体中沿边a方向以U_a拖动平板与沿边b方向以U_b拖动平板的阻力相等，求U_a/U_b，层流边界层。

解：沿边 a 方向拖动



$$F_D = C_D \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A \times 2$$

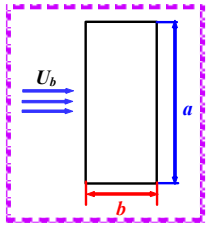
其中：$V_\infty = U_a \qquad A = ab$

$$\mathrm{Re}_l = \frac{U_a a}{\nu} \Rightarrow C_D = \frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}_l}} = \frac{1.328}{\sqrt{U_a a/\nu}}$$

顺流平板层流边界层－例题1

$$\Rightarrow F_{Da} = \frac{1.328}{\sqrt{U_a a/\nu}}\rho U_a^2 ab = 1.328\rho b\sqrt{U_a^3 a\nu}$$

沿边 b 方向拖动



$$F_D = C_D \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A \times 2$$

其中：$V_\infty = U_b \qquad A = ab$

$$\mathrm{Re}_l = \frac{U_b b}{\nu} \Rightarrow C_D = \frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}_l}} = \frac{1.328}{\sqrt{U_b b/\nu}}$$

顺流平板层流边界层－例题1

$$\Rightarrow F_{Db} = \frac{1.328}{\sqrt{U_b b/\nu}}\rho U_b^2 ba = 1.328\rho a\sqrt{U_b^3 b\nu}$$

由 $F_{Da} = F_{Db}$

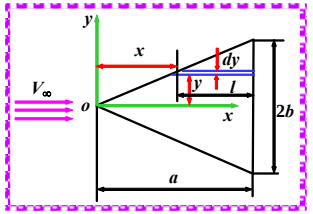
$$\Rightarrow 1.328\rho b\sqrt{U_a^3 a\nu} = 1.328\rho a\sqrt{U_b^3 b\nu}$$

$$\Rightarrow \frac{U_a}{U_b} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

顺流平板层流边界层－例题2

例：水流速度V_∞，密度为 ρ，动力粘性系数 μ，水流方向与三角形对称轴方向一致，设边界层为层流边界层，求平板两侧受到的阻力。

解：取微元面



$$dF_D = C_D \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 dA$$

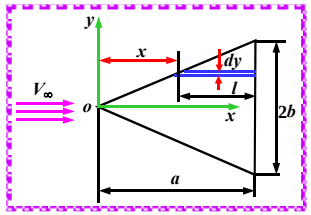
其中：$dA = l\,dy$

$$= \left(a - \frac{a}{b}y\right)dy$$

顺流平板层流边界层－例题2

$$\mathrm{Re}_l = \frac{\rho V_\infty l}{\mu}$$

$$= \frac{\rho V_\infty}{\mu}\left(a - \frac{a}{b}y\right)$$

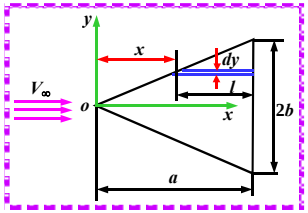


$$\Rightarrow \quad C_D = \frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}_l}} = \frac{1.328}{\sqrt{\rho V_\infty (a - ay/b)/\mu}}$$

$$\Rightarrow \quad dF_D = 0.664\sqrt{\rho\mu V_\infty^3}\sqrt{(a - ay/b)}\,dy$$

顺流平板层流边界层－例题2

由流动的对称性以及三角形平板两侧均受阻力



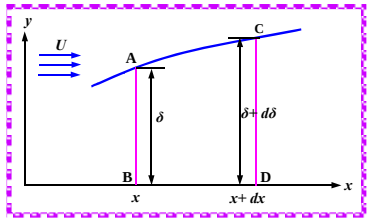
$$F_D = 4\int_0^b 0.664\sqrt{\rho\mu V_\infty^3}\sqrt{\left(a - \frac{a}{b}y\right)}dy \;= 1.771\sqrt{\rho\mu a V_\infty^3}\,b$$

10.4 边界层动量积分方程

对控制体的动量方程—近似计算方法

假设

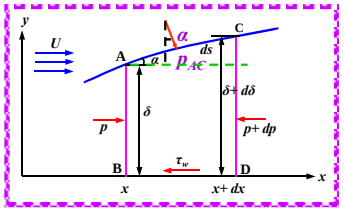
- 定常不可压
- 二元边界层
- 物面曲率很小



CV 所受外力之和＝净流出 CV 的动量流率

边界层动量积分方程2

微元面x方向受力



壁面摩擦力 $\Rightarrow \tau_w dx$

AB面压力 $\Rightarrow p\delta$

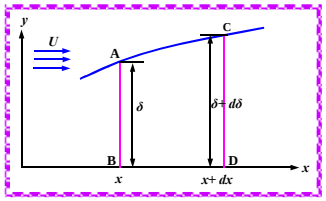
CD面压力 $\Rightarrow \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\left(\delta + \frac{\partial \delta}{\partial x}dx\right)$ 边界层内 $\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$

AC面压力 $\Rightarrow \frac{1}{2}\left(p + p + \frac{dp}{dx}dx\right)ds \cdot \sin\alpha = \left(p + \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}dx\right)d\delta$

x方向合力 $\Rightarrow F_x = -\delta\frac{dp}{dx}dx - \tau_w dx$

边界层动量积分方程3

流入及流出流量分析



从AB流入质量流量 ⇒ $\int_0^\delta \rho u dy$

从CD流出质量流量 ⇒

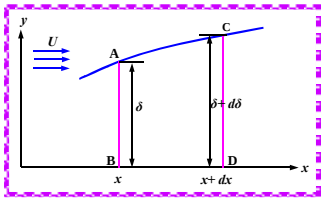
$$\int_0^\delta \rho u dy + \frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u dy\right) dx$$

由积分型连续方程

从AC流入CV的质量流量 ⇒ $\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u dy\right) dx$

边界层动量积分方程4

流入及流出动量分析



从AB流入的 x 方向的动量

⇒ $\int_0^\delta \rho u^2 dy$

从CD流出的 x 方向的动量

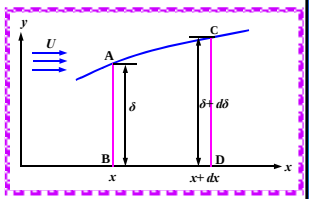
⇒ $\int_0^\delta \rho u^2 dy + \frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u^2 dy\right) dx$

从AC流入CV的动量流量 ⇒ $\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u dy\right) dx$

边界层动量积分方程5

控制体中x 方向动量的净流出率

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u^2 dy\right) dx - U\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u dy\right) dx$$



x 方向外力合力

$$F_x = -\delta\frac{dp}{dx}dx - \tau_w dx$$

动量定理，外力之和＝动量的净流出率

⇒ $\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u^2 dy\right) dx - U\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u dy\right) dx = -\tau_w dx - \delta\frac{dp}{dx}dx$

边界层动量积分方程6

边界层动量积分方程

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u^2 dy\right) - U\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u dy\right) = -\tau_w - \delta\frac{dp}{dx}$$

适用条件

- 不可压定常
- 二元边界层，物面曲率很小
- 对层流边界层和湍流边界层均适用

边界层动量积分方程7

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u^2 dy\right) - U\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u dy\right) = -\tau_w - \delta\frac{dp}{dx}$$

外部势流，密度为常数，根据伯努利方程

$$p + \frac{1}{2}\rho U^2 = C \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = -\rho U\frac{dU}{dx}$$

$$\Rightarrow \rho\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta u^2 dy\right) - \rho U\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta u dy\right) = -\tau_w + \delta\rho U\frac{dU}{dx}$$

边界上速度分布 U 只是 x 的函数

$$\Rightarrow \quad \rho U\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta u dy\right) = \rho\frac{d}{dx}\left(U\int_0^\delta u dy\right) - \rho\frac{dU}{dx}\int_0^\delta u dy$$

边界层动量积分方程8

$$\Rightarrow \quad = \rho\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta U u dy\right) - \rho\frac{dU}{dx}\int_0^\delta u dy$$

代入边界层动量积分方程

$$\Rightarrow \quad \rho\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta u^2 dy\right) - \rho\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta U u dy\right) + \rho\frac{dU}{dx}\int_0^\delta u dy$$

$$= -\tau_w + \delta\rho U\frac{dU}{dx} \quad = -\tau_w + \rho\frac{dU}{dx}\int_0^\delta U dy$$

合并整理

$$\Rightarrow \quad -\rho\frac{d}{dx}\left[\int_0^\delta \left(Uu - u^2\right)dy\right] - \rho\frac{dU}{dx}\left[\int_0^\delta (U - u)dy\right] = -\tau_w$$

由 $\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right)dy \quad \theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)dy$

动量积分方程的其它形式

$$\rho\frac{d}{dx}\left(U^2\theta\right) + \rho\frac{dU}{dx}U\delta^* = \tau_w$$

或

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{U}\frac{dU}{dx}\left(2\theta + \delta^*\right) = \frac{\tau_w}{\rho U^2}$$

令 $H = \delta^*/\theta$ 形状因子

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx}\left(2 + H\right) = \frac{\tau_w}{\rho U^2}$$

动量积分方程求解

应用动量积分方程解边界层问题

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{U}\frac{dU}{dx}\left(2\theta + \delta^*\right) = \frac{\tau_w}{\rho U^2}$$

方程未知数 u , δ, τ_w , 需补充关系式

- 边界层速度分布
- 壁面摩擦应力

速度分布在边界上应满足的条件2

速度分布满足的主要条件

自然边界条件

- 无滑移边界条件

$$y=0 \Rightarrow u=0, v=0 \qquad \tau=\tau_w$$

- 边界层外界与势流衔接处条件

$$y=\delta \Rightarrow u=U \quad \tau=0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=0$$

速度分布在边界上应满足的条件3

相容边界条件

- 边界层外界处速度对 y 的各阶导数均为零

$$y=\delta \Rightarrow \frac{\partial^n u}{\partial y^n}=0 \qquad n=1,2,3\cdots$$

- $y=0$时，$u=0$，$v=0$

由二元定常边界层 N-S 方程

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{dU}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{U}{\nu}\frac{dU}{dx}$$

速度分布在边界上应满足的条件4

- $y=0$时，$u=0$，$v=0$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{dU}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ 对 y 求导

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0$$

边界条件选用的优先顺序

$$u(x,0)=0$$
$$u(x,\delta)=U$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,\delta)=0$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0)=-\frac{U}{\nu}\frac{dU}{dx}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,\delta)=0,\cdots$$

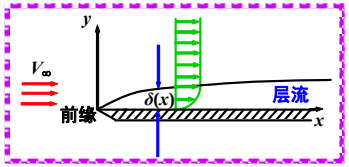
其中 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0)=-\frac{U}{\nu}\frac{dU}{dx}$ 反映物面形状对速度剖面影响，在曲面边界层中应尽量满足，否则无正确结果

10.4.1 顺流平板层流边界层

问题

- 均匀来流

$V_\infty = C \qquad p_\infty = C$



- 粘性、不可压、定常、二元
- 层流边界层，板长为L

边界层积分方程

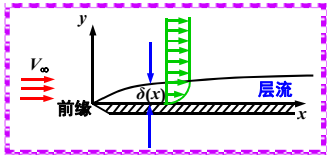
$$\frac{d\theta}{dx}+\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}(2\theta+\delta^*)=\frac{\tau_w}{\rho U^2}$$

0

外部势流沿流动方向压强梯度、速度梯度为零

顺流平板层流边界层2

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2}$$



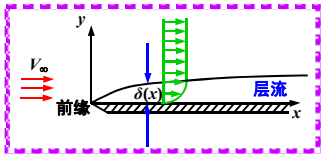
即 $$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \frac{u}{V_\infty}\left(1-\frac{u}{V_\infty}\right)dy=\frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2}$$

补充方程1—速度分布方程 常用 y 的多项式分布

$$u=a+by+cy^2+dy^3$$

顺流平板层流边界层3

$$u=a+by+cy^2+dy^3$$



- 无滑移边界条件

$y = 0$时，$u = 0$

$$a=0$$

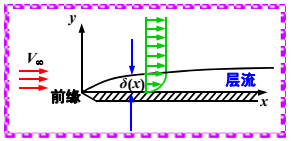
- 边界层与势流衔接处，$y=\delta$时，$u=V_\infty$

$$V_\infty=b\delta+c\delta^2+d\delta^3$$

- $y=\delta$时，$\tau=0$ $$\frac{du}{dy}=0$$

顺流平板层流边界层4

$$b+2c\delta+3d\delta^2=0$$



- 固体壁面上 $y = 0$ 时

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{U}{\nu}\frac{dU}{dx}$$

由 $\frac{dU}{dx}=0$ $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2c=0$$

$$a=c=0,\ b=\frac{3V_\infty}{2\delta},\ d=-\frac{V_\infty}{2\delta^3}$$

顺流平板层流边界层5

$$u=\frac{V_\infty}{2\delta}\left(3y-\frac{y^3}{\delta^2}\right)$$

补充方程2—壁面切应力方程

$$\tau_w=\mu\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0}$$

$$\tau_w=\frac{3}{2}\mu\frac{V_\infty}{\delta}$$

圆管内的充分发展层流6

$$\theta=\int_0^\delta\frac{u}{V_\infty}\left(1-\frac{u}{V_\infty}\right)dy=\frac{39}{280}\delta$$

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2}$$

$$\frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2}=\frac{3}{2}\mu\frac{V_\infty}{\delta}\Big/\left(\rho V_\infty^2\right)=\frac{3}{2}\mu\frac{1}{\rho\delta V_\infty}$$

$$\frac{1}{2}\delta^2=\frac{140}{13}\frac{\mu}{\rho V_\infty}x+C$$

边界条件 $x=0$时，$\delta=0$

$$\delta=4.641\sqrt{\frac{\mu}{\rho V_\infty}x}$$

由 $\mathrm{Re}_x=\frac{\rho x V_\infty}{\mu}$

$$\delta=4.641\frac{x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

顺流平板层流边界层8

壁面切应力

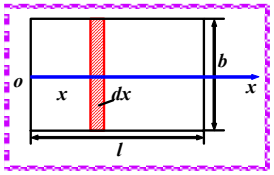
$$\tau_w=\frac{3}{2}\mu\frac{V_\infty}{\delta}$$

$$\tau_w=0.3232\sqrt{\frac{\mu\rho V_\infty^3}{x}}$$

壁面摩擦力

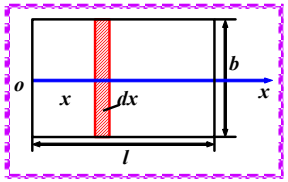
一侧表面所受的摩擦力

$$F_D=\int_0^l\tau_w b\,dx$$



顺流平板层流边界层9

$$F_D=0.6464\sqrt{\mu\rho V_\infty^3 lb}$$



阻力因数

$$F_D=C_D\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A$$

$$C_D=1.293\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}$$

☞ 动量积分方程的解与布拉修斯解不同，以布拉修斯解为准

10.4.2. 顺流平板湍流边界层

湍流边界层的特点

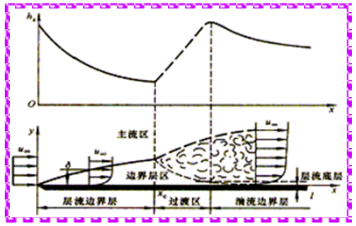
随机涡运动，动量交换剧烈

⇓

厚度较大，增长较快
时均速度分布更均匀

⇓

壁面处速度梯度更大 ⇒ 层流底层，速度迅速由 0 增至核心区速度



顺流平板湍流边界层2

顺流平板湍流边界层

外部势流为均匀来流 $V_\infty = C$ $p_\infty = C$

边界层内 $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dU}{dx} = 0$ ⇒ $\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{\tau_w}{\rho V_\infty^2}$

补充方程1—速度分布方程 水力光滑平板

圆管内的速度分布 ⇒ $\dfrac{u}{u_{\max}} = \left(\dfrac{y}{R}\right)^{\frac{1}{n}}$

顺流平板湍流边界层3

普朗特建议，当 $\mathrm{Re}_x = \dfrac{V_\infty x}{\nu} < 10^7$ 时，$n = 1/7$

- 湍流边界层速度分布 ⇒ $\dfrac{u}{V_\infty} = \left(\dfrac{y}{\delta}\right)^{1/7}$

补充方程2—壁面切应力方程

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = V_\infty \frac{1}{7}\delta^{-\frac{1}{7}} y^{-\frac{6}{7}}\Big|_{y=0} \to \infty$$

☞ 不能用于边界层内边界求解切应力

- 壁面切应力应用圆管湍流壁面切应力类比推得

顺流平板湍流边界层4

圆管的壁面切应力 $\tau_w = \dfrac{R}{2}\dfrac{\Delta p}{l}$ P. 152，(5.26h)

⇒ $\tau_w = \dfrac{D}{4l}\Delta p = \dfrac{D}{4l} f \dfrac{l}{D}\dfrac{1}{2}\rho\bar{V}^2 = \dfrac{f}{8}\rho\bar{V}^2$

中等Re下，水力光滑管勃拉修斯公式

$$f = \frac{0.3164}{\mathrm{Re}^{0.25}}$$

此时管内平均速度 $\bar{V} = 0.8u_{\max}$

顺流平板湍流边界层5

$$\Rightarrow \quad \tau_w = 0.0225\rho u_{\max}^2 \left(\frac{\nu}{Ru_{\max}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

边界层壁面 $\Rightarrow$ $\tau_w = 0.0225\rho V_\infty^2 \left(\frac{\nu}{\delta V_\infty}\right)^{\frac{1}{4}}$

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{V_\infty}\left(1-\frac{u}{V_\infty}\right)dy = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\left[1-\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right]dy = \frac{7}{72}\delta$$

由 $\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{7}{72}\frac{d\delta}{dx} = 0.0225\left(\frac{\nu}{\delta V_\infty}\right)^{\frac{1}{4}}$

顺流平板湍流边界层5

积分 $\Rightarrow$ $\frac{4}{5}\delta^{\frac{5}{4}} = 0.231\left(\frac{\nu}{V_\infty}\right)^{1/4} x + C$

假定层流边界层长度相比平板特征长度很小，从前缘开始就是湍流

- 边界条件 $\Rightarrow$ $x = 0$ 时，$\delta = 0$

湍流边界层厚度 $\Rightarrow$ $\delta = 0.37\left(\frac{\nu}{V_\infty}\right)^{1/5} x^{\frac{4}{5}}$

$\delta = 0.37\frac{x}{\mathrm{Re}_x^{0.2}}$ $\Rightarrow$ $\delta \propto x^{4/5}$

顺流平板湍流边界层5

壁面切应力 $\frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2} = 0.0225\left(\frac{\mu}{\rho\delta V_\infty}\right)^{\frac{1}{4}}$

$\delta = 0.37\left(\frac{\nu}{V_\infty}\right)^{1/5} x^{\frac{4}{5}}$ $\Rightarrow$ $\tau_w = 0.0289\rho V_\infty^2\left(\frac{\mu}{\rho x V_\infty}\right)^{1/5}$

$\Rightarrow$ $\tau_w = 0.0289\rho V_\infty^2 \mathrm{Re}_x^{-1/5}$

平板一侧的壁面摩擦力 $F_D = \int_0^l \tau_w b dx$

顺流平板湍流边界层7

阻力因数 $C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A} = \frac{0.072}{(\mathrm{Re}_L)^{1/5}}$

光滑平板阻力因数只与 Re 有关

通过实际测量进行修正后为

$C_D = \frac{0.074}{(\mathrm{Re}_L)^{1/5}}$ $\quad 5\times10^5 \le \mathrm{Re}_L \le 10^7$

史里希廷（Schlichting）公式 $C_D = \frac{0.455}{(\lg \mathrm{Re}_L)^{2.58}}$ $\quad 10^7 \le \mathrm{Re}_L \le 10^9$

顺流平板层流、湍流边界层计算公式

边界层的厚度

层流 $\delta \propto x^{1/2}$ $\Rightarrow$ $\delta = \dfrac{5.0x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$

湍流 $\delta \propto x^{4/5}$ $\Rightarrow$ $\delta = \dfrac{0.37\,x}{\mathrm{Re}_x^{0.2}}$

平板阻力

$$F_D = C_D \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A$$

一侧的阻力

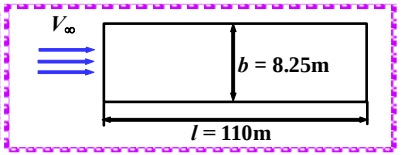
阻力系数 C_D

层流 $C_D = \dfrac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}$

湍流 $C_D = \dfrac{0.074}{(\mathrm{Re}_L)^{1/5}}$ $C_D = \dfrac{0.455}{(\lg \mathrm{Re}_L)^{2.58}}$

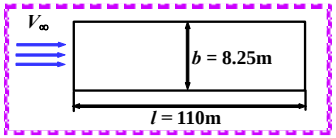
顺流平板湍流边界层－例题

例：流线型机车长为110m，宽为2.75m，高为2.75m。假定机车两侧和顶部摩擦阻力等效于一长110m，宽8.25m的矩形平板的摩擦阻力。空气的ρ = 1.22kg/m^3，μ = 1.79×10^{-5}，当机车以160km/h行驶时，求：用于克服摩擦阻力的功率；机车尾部边界层厚度



顺流平板湍流边界层－例题

(1) 用于克服摩擦阻力的功率



已知：$\rho = 1.22\,\mathrm{kg/m^3}$

$A = lb = 907.5\,\mathrm{m^2}$

$V_\infty = 160\,\mathrm{km/h} = 44.44\,\mathrm{m/s}$

$$x_{cr} = \frac{\mathrm{Re}_{cr}\mu}{\rho V_\infty} = \frac{5\times10^5 \times 1.79\times10^{-5}}{1.22\times44.44} = 0.165(\mathrm{m}) << 110\mathrm{m}$$

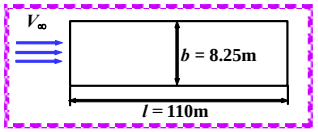
$\Rightarrow$ $\mathrm{Re}_L = \dfrac{\rho V_\infty l}{\mu} = 3.33\times10^8 > 10^7$

假定边界层全部为湍流边界层

顺流平板湍流边界层－例题

平板摩擦阻力

$$F_D = C_D \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A$$



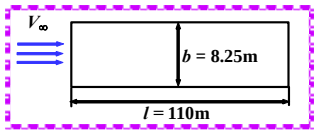
阻力因数采用Schlichting公式

$$C_D = \frac{0.455}{(\lg \mathrm{Re}_L)^{2.58}} = \frac{0.455}{\left[\lg(3.33\times10^8)\right]^{2.58}} = 1.81\times10^{-3}$$

$\Rightarrow$ $\dot{W} = C_D \dfrac{1}{2}\rho V_\infty^2 A \times V_\infty = 87.93\,(\mathrm{kW})$

顺流平板湍流边界层－例题

(2) 机车尾部边界层厚度



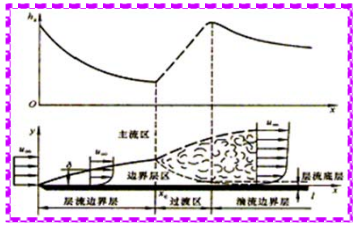
$$\delta_l = 0.37\frac{l}{\mathrm{Re}_l^{0.2}}$$

$$= 0.8039\,(\mathrm{m})$$

$\delta_l << L$

10.4.3 顺流平板混合边界层

层流边界层和湍流边界层对阻力都有明显作用



判断层流向湍流转捩

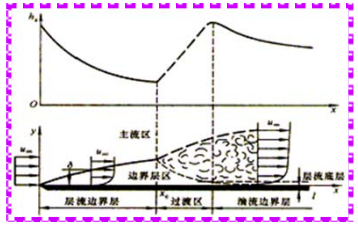
$$\mathrm{Re}_{cr} = \frac{V_\infty x_{cr}}{\nu}$$

$$\mathrm{Re}_{cr} = 3\times10^5 \sim 3\times10^6$$

其中，x_{cr} 为转捩的临界长度 $\quad x_{cr} = \dfrac{\mathrm{Re}_{cr}\,\nu}{V_\infty}$

顺流平板混合边界层

边界层类型判断



$L < x_{cr}$ 或 $\mathrm{Re}_L = \dfrac{V_\infty L}{\nu} < \mathrm{Re}_{cr}$

⇒ 层流边界层

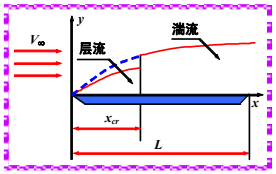
$L > x_{cr}$ 或 $\mathrm{Re}_L = \dfrac{V_\infty L}{\nu} > \mathrm{Re}_{cr}$

⇒ 混合边界层

顺流平板混合边界层2

阻力的简单模型

$$F_D = F_{DLt} - F_{Dx_{cr}t} + F_{Dx_{cr}l}$$



全部湍流　x_{cr} 之前湍流　x_{cr}之前层流

x_{cr}之前层流

$$C_{Dx_{cr}l} = \frac{1.328}{\mathrm{Re}_{cr}^{1/2}} \qquad F_{Dx_{cr}l} = C_{Dx_{cr}l}\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 b x_{cr}$$

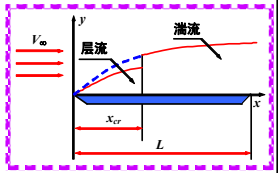
x_{cr} 之前湍流

$$C_{Dx_{cr}t} = \frac{0.074}{\mathrm{Re}_{cr}^{1/5}} \qquad F_{Dx_{cr}t} = C_{Dx_{cr}t}\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 b x_{cr}$$

顺流平板混合边界层2

$Re_L \le 10^7$　　$10^7 < Re_L < 10^9$

全部湍流　　$C_{DLt}=\dfrac{0.074}{Re_L^{1/5}}$　　$C_{DLt}=\dfrac{0.455}{(\lg Re_L)^{2.58}}$



$$F_{DLt}=C_{DLt}\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 bL$$

$Re_L \le 10^7$

$$F_D=\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 b\left[\frac{0.074}{Re_L^{1/5}}L-\frac{0.074}{Re_{cr}^{1/5}}x_{cr}+\frac{1.328}{Re_{cr}^{1/2}}x_{cr}\right]$$

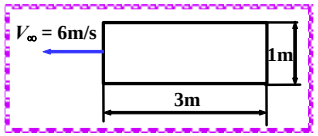
$10^7 < Re_L < 10^9$

$$F_D=\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 b\left[\frac{0.455}{(\lg Re_L)^{2.58}}L-\frac{0.074}{Re_{cr}^{1/5}}x_{cr}+\frac{1.328}{Re_{cr}^{1/2}}x_{cr}\right]$$

顺流平板混合边界层－例题

例：$\rho = 1000kg/m^3$，$\mu = 1.0\times10^{-3}Pa\cdot s$，临界Re数$Re_{cr} = 5\times10^5$，试确定平板前1m两侧所受的阻力

解：平板前 1m 所受的阻力



临界长度　$x_{cr}=\dfrac{\mu}{\rho V_\infty}Re_{cr}=0.0833(\mathrm{m})$

$$Re_L=\frac{\rho V_\infty L}{\mu}=\frac{1000\times6\times1}{1.0\times10^{-3}}=6\times10^6$$

混合边界层

顺流平板混合边界层－例题

(1) 按混合边界层计算

$$F_D=2\times\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 b\left[\frac{0.074}{(Re_L)^{0.2}}L-\frac{0.074}{(Re_{cr})^{0.2}}x_{cr}+\frac{1.328}{(Re_{cr})^{0.5}}x_{cr}\right]$$

$$\Rightarrow \quad F_D=107\ (\mathrm{N})$$

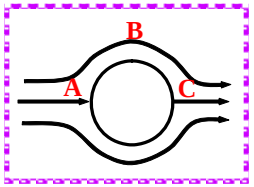
(2) 平板前缘开始即为湍流边界层

$$F_D=C_D 2\times\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 b\times1 \qquad \text{其中：}\ C_D=\frac{0.074}{Re_l^{0.2}}$$

$$\Rightarrow \quad F_D=117\ (\mathrm{N})$$

10.5 曲壁边界层分离现象

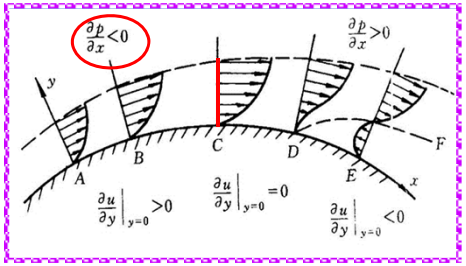
理想流体绕曲壁流动



A⇨B　⇒　$u = 0 \sim 2V_\infty$　⇒　$\partial p/\partial s < 0$　⇒　顺压梯度

B⇨C　⇒　$u = 2V_\infty \sim 0$　⇒　$\partial p/\partial s > 0$　⇒　逆压梯度

由壁边界层分离现象2



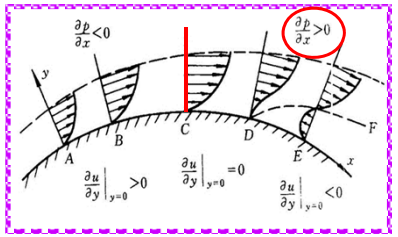
A⇨C

顺压梯度

压强合力与粘性力合力方向相反，与流动方向相同，推动流体质点前进，不会发生流动分离

- 粘性影响部分被压力抵消，与平板相比，边界层增厚较慢
- 临界雷诺数增大

由壁边界层分离现象3



C⇨E

逆压梯度

压强合力与粘性力合力方向相相同，都与与流动方向相反，阻止流体质点前进，流体质点减速

- 总合力与速度方向相反，u 逐渐减小
- 边界层增厚加快，临界雷诺数减小

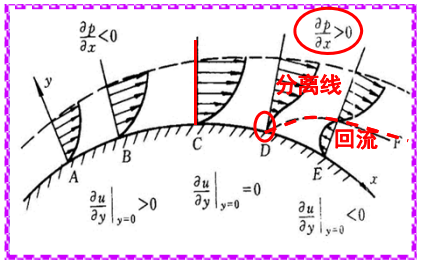
由壁边界层分离现象4

分离点前

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}>0$$

分离点后

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}<0$$



C⇨E

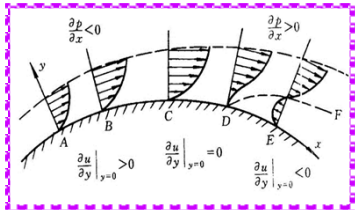
逆压梯度

壁面附近速度u 微小，易减小为零甚至负值

⇒ 分离点 ⇒ $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0$ $\tau_w\big|_{y=0}=0$ $\partial\tau_w(x,0)/\partial x<0$

由壁边界层分离现象5

边界层分离的必要条件



- 逆压梯度 ⇒ $\partial p/\partial s>0$ s 为主流方向
- 粘性流体

流动分离必要条件

- 逆压梯度

压力合力与速度方向相反，与粘性力合力相同，流体速度逐渐减小，可能发生反向流动（回流）

- 粘性流体

壁面上必须满足无滑移条件，壁面附近存在低速流动区域

- 存在固体壁面

☞ 发生分离不局限凸型壁面边界层。只要有上述三个条件存在，都可能发生流动分离

由壁边界层分离现象6

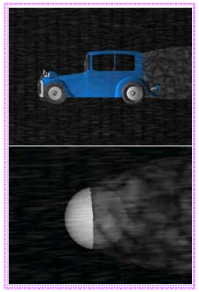
分离点后边界层特征

- 法向 y 方向分速度 v 不再是小量
- 边界层厚度大幅度增加
- 微分方程不成立

由壁边界层分离现象7

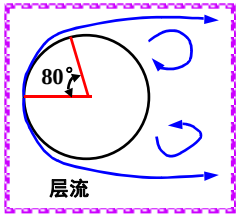
尾迹区 ⇒ 边界层分离后不断卷起旋涡，并流向下游形成尾迹；尾迹在物体下游沿伸一段距离

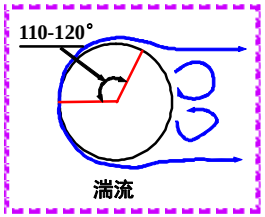
- 尾迹的整体形状受流动影响；
- 尾迹区中流动为粘性有旋；
- 旋涡耗散能量；
- 流动分离后粘性作用区域不再是小量，流动有效边界不再是物体表面，分离点有可能上移



由壁边界层分离现象8

层流与湍流的分离



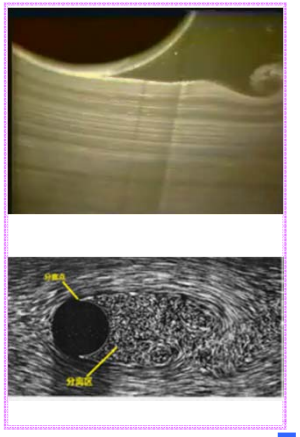


- 相同的逆压梯度下，层流边界层比湍流边界层更容易发生分离；
- 形状因子H越大，逆压梯度越强.

由壁边界层分离现象实例1

流动分离实例

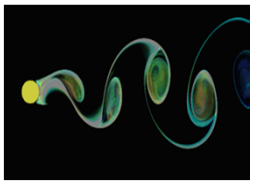
猫眼

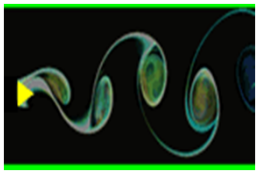


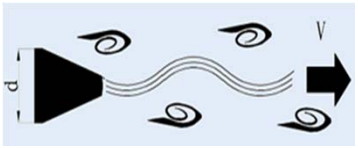
圆柱绕流分离点和分离区

由壁边界层分离实例2

卡门涡街





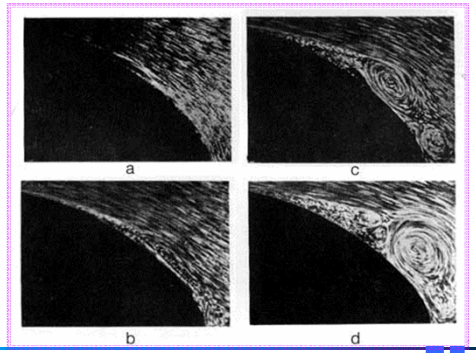


涡街流量计

由壁边界层分离实例2

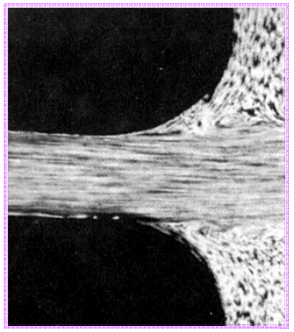
凸壁钝体从静止开始的运动初期边界层发展

氢气泡技术
Prandtl
1943拍摄



由壁边界层分离实例3

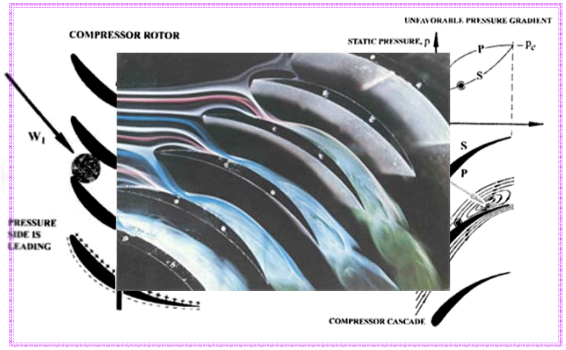
二维扩张管内的流动



当初 Prandtl 就是从此受到
启发后来创立了边界层理论

曲壁边界层分离实例4

压缩机叶栅通道　　增压减速，逆压梯度



分离流动危害

- 内流带来能量损失
- 外流带来阻力增大
- 流体机械出现喘振，旋转失速
- 飞机失速
- 引起振动，噪音

作业

作业：P.433～435

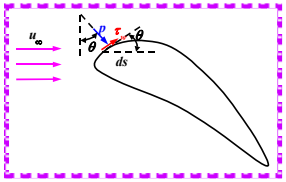
- 10.23
- 10.30
- 10.37

10.6 绕流物体的阻力

阻力　绕流物体受到的表面力合力在来流方向分量

摩擦阻力 ⇒ **粘性直接作用的结果**

- 切向力在来流方向的投影的总和



压差阻力

物体前后压强差引起的阻力

- 压力在来流方向的投影的总和

绕流物体的阻力2

物体阻力的计算

$$D = C_D \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A$$

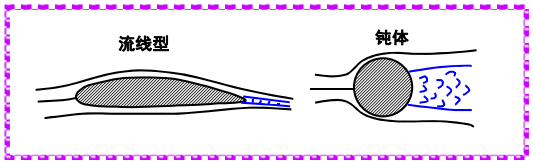
A ⟹ 迎流面积或其它指定面积

C_D ⟹ 阻力系数(摩擦阻力、压差阻力)

$$C_D = f(\mathrm{Re}, 物体形状, \frac{\Delta}{l}, Ma, Fr)$$

绕流物体的阻力3

物体形状的影响



- 流线型物体总阻力几乎完全是摩擦阻力
- 压差阻力的大小依赖于尾迹区的大小只取决于分离点的位置

绕流物体的阻力4


C_D=0.8


C_D=0.6


C_D=0.45

C_D=0.29 - 0.3

C_D=0.19

0.96

加导流罩

0.76

0.98 → 0.4 → 0.1

绕流物体的阻力5

海豚

C_D = 0.0036

Re = 6×10⁶

秃鹫

C_D = 0.03

Re = 10⁶

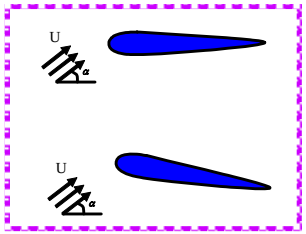
鸽子

C_D = 0.1

Re = 10⁵

绕流物体的阻力6

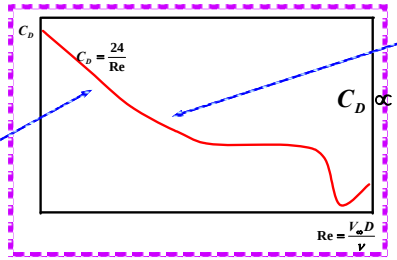
物体的不同朝向



绕流物体的阻力7

Re的影响

中等Re数，层流边界层

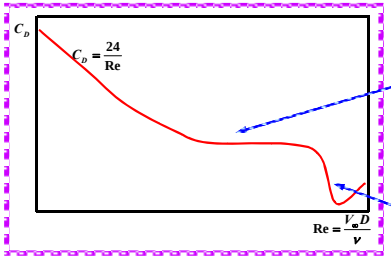


$C_D \propto Re^{-1/2}$

小Re数，阻力主要由摩擦力组成 $C_D \propto Re^{-1}$

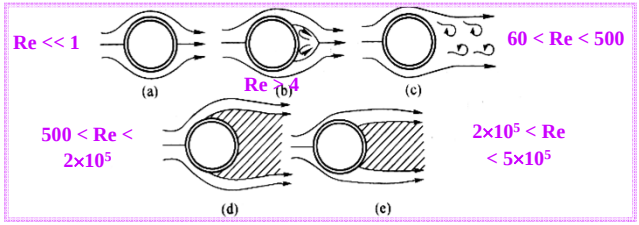
绕流物体的阻力8

500<Re<2×10⁵，边界层分离，压差阻力成主要部分



$2 \times 10^5 \leq Re \leq 5 \times 10^5$，高Re数湍流边界层分离点后移，阻力陡降

绕流物体的阻力9



绕流物体的阻力10

壁面粗糙度的影响

- 摩擦阻力为主

  减小壁面粗糙度，保持流动为层流

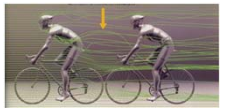
- 压差阻力为主

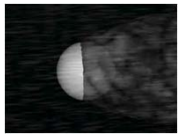
  层流边界层 —粗糙度的影响→ 湍流边界层

  适当地增加壁面粗糙度，使尾迹区变小

绕流物体的阻力11

减阻的一些措施

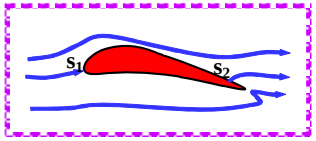




- 减小迎风面积
- 流线型外形设计
- 摩擦阻力为主时，增加表面光滑度
- 压差阻力为主时，某些情况下可适当增加表面粗糙度以减小阻力

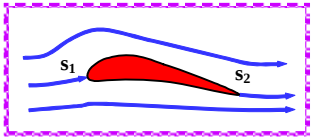
10.7 绕流物体的升力

升力的产生（机翼绕流）



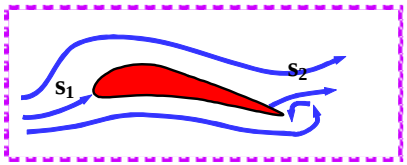
开始绕流的瞬间

S_1，S_2为前后驻点

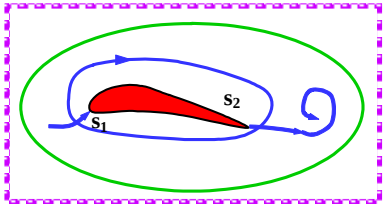


只要流动不分离，上、下表面流体在尖后缘处汇合

绕流物体的升力2



启动涡

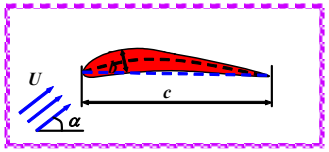


附着涡

绕流物体的升力4

物体升力的计算

$$L = C_L \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A$$



A ⇒ 单位展长与弦长的乘积

C_L ⇒ 升力系数，由机翼形状确定

绕流物体的升力5

波音747

⇒ 7182N/m²

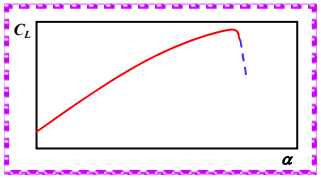
大黄蜂

⇒ 47.88N/m²

绕流物体的升力6

升力系数随攻角的变化

- 攻角增大，升力系数随之增大



绕流物体的升力7

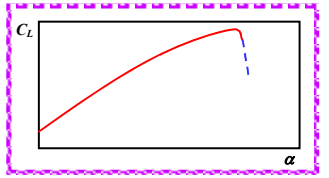
升力系数随攻角的变化

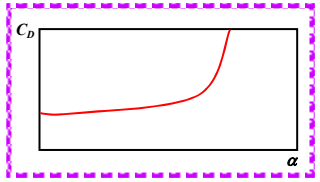
stall

- 失速－升力系数陡降，阻力系数陡增

⇑

翼型上表面流动大面积分离





绕流物体的升力8

升力系数随展弦比的增大而增大

- 大展弦比 ⇒ 滑翔机、信天翁、海燕
- 小展弦比 ⇒ 特技表演机



小结1

边界层

- 边界层的概念
- 边界层流动的特征
- 边界层内流动状态的转化
- 名义厚度、位移厚度、动量损失厚度

小结2

边界层动量积分方程

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u^2 dy\right) - U\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u dy\right) = -\tau_w - \delta\frac{dp}{dx}$$

- 适用条件
- 速度分布的边界条件
  - 固壁处
  - 与外部势流衔接处

小结3

边界层动量积分方程的应用

粘性、不可压、定常、二元边界层、物面曲率很小

顺流平板 $\frac{dp}{dx} = \frac{dU}{dx} = 0$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2}$$

小结4

	层流边界层	湍流边界层
速度分布	多项式	1/7次方分布
壁面切应力	$\tau_w = \mu \frac{du}{dy}$	$\tau_w = \frac{\Delta p}{l}\frac{D}{4}$
厚度δ	$\delta \propto x^{1/2}$ $\delta = 5.0\sqrt{\frac{\mu}{\rho V_\infty}}x$	$\delta \propto x^{4/5}$ $\delta = 0.37\frac{x}{\mathrm{Re}_x^{0.2}}$

小结5

	层流边界层	湍流边界层
$\tau_w \sim x$	x增大，τ_w减小	
阻力D	$D = C_D \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A$	
阻力系数	$C_D = \frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}$	$C_D = \frac{0.074}{(\mathrm{Re}_L)^{1/5}}$ $C_D = \frac{0.455}{(\lg \mathrm{Re}_L)^{2.58}}$

小结6

曲壁边界层分离

- 曲壁边界层分离的必要条件

物体的阻力 { **摩擦阻力**；**压差阻力** }

物体的升力

复习 4/13/2022

边界层的主要特征

- 近壁区薄层，厚度逐渐增大
- $\partial u/\partial y$ 很大，粘性有旋
- 物面曲率较小时，$\partial p/\partial y \approx 0$
- 流态变化，从前缘起为层流，后向湍流转捩
- 边界层内惯性力与粘性力量级相当

动量积分方程 ⟹ $\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{U}\frac{dU}{dx}(2\theta + \delta^*) = \frac{\tau_w}{\rho U^2}$

- 定常、不可压、二元边界层、物面曲率很小

复习 4/13/2022

速度分布需满足的边界条件

- 壁面无滑移条件；与势流衔接处速度、切应力；物面形状条件

顺流平板层流边界层 $\Longrightarrow$ $\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{\tau_w}{\rho U^2}$ $\Longleftarrow$ $\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dU}{dx}=0$

- 速度分布：多项式分布等
- 壁面切应力：牛顿内摩擦定律

$$\delta=5.0\sqrt{\frac{\mu}{\rho V_\infty}x} \qquad D=C_D\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A \qquad C_D=\frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}$$

普朗特

- 德国物理学家，现代空气动力学之父
  - 1900，慕尼黑工业大学，博士学位
  - 1904，边界层理论
  - 风洞实验技术，1906 第一个超音速风洞
  - 机翼理论，1913 - 1918，升力线理论和最小诱导阻力理论 ，升力面理论等
  - 湍流理论，层流稳定性和湍流混合长度理论
  - 亚声速相似律和可压缩绕角膨胀流动，后被称为普朗特-迈耶尔流动
  - 柱体塑性区的屈曲问题－冯·卡门的博士学位论文

Ludwing Prandtl
1875 -1953