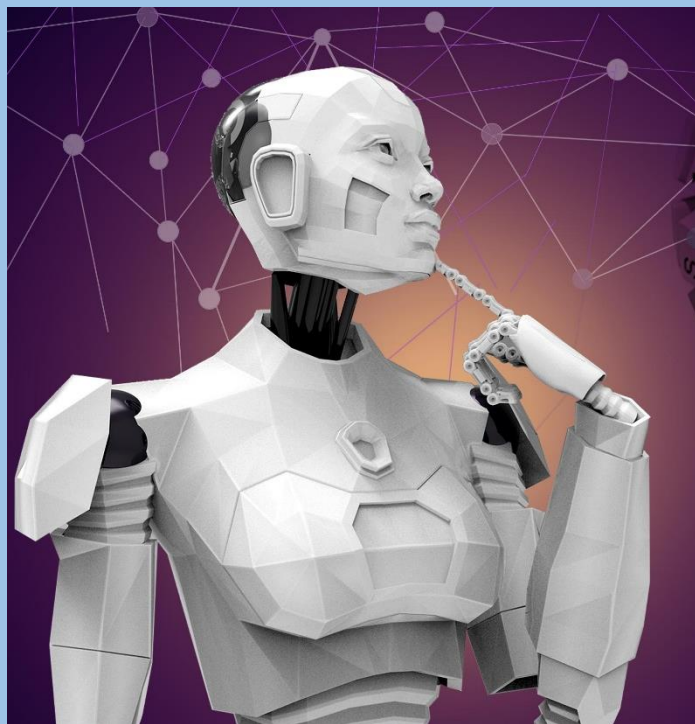


第8章： 轨迹生成



主讲：许璟、周家乐

单位：信息科学与工程学院

邮箱：jingxu@ecust.edu.cn

办公：徐汇校区 实验19楼1213室

运动轨迹



机器人
激光切
割加工

使机器人准确完成给定的任务，必须规划机器人在不同的时刻的位移、速度、甚至加速度。

本章内容

8.1 轨迹规划的一般性问题

8.2 关节轨迹的插值

8.3 笛卡尔空间规划方法

8.4 利用四元数进行直线轨迹规划

8.5 轨迹的实时生成

8.1 轨迹规划的一般性问题

- **轨迹** - 操作臂在运动过程中每时每刻的位移、速度和加速度所确定的路径。
- **轨迹规划** - 根据作业任务的要求，计算出预期的运动轨迹，即每时每刻关节臂的位移、速度和加速度。

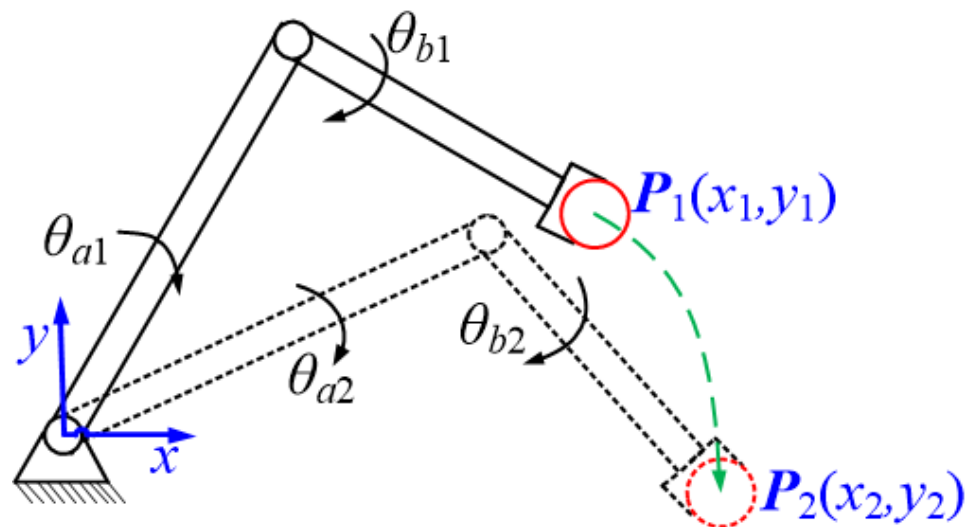
根据运动特点可以将轨迹类型分为

- **点到点运动**(Point to Point, PTP)
- **连续路径运动 或 轮廓运动**(contour motion)

8.1.2 轨迹规划的常用方法

□ 第一种

给出**关节坐标空间**中对路径节点上的**位姿、速度和加速度**给出显式约束，轨迹规划器选取某类函数作为参数化轨迹，对节点进行插值，并满足约束条件。



□ 第二种

给出**直角坐标空间**中运动路径的解析式，轨迹规划器在**关节空间或直角坐标空间**中确定轨迹逼近预定路径。

本章内容

8.1 轨迹规划的一般性问题

8.2 关节轨迹的插值

8.3 笛卡尔空间规划方法

8.4 利用四元数进行直线轨迹规划

8.5 轨迹的实时生成

8.2 关节轨迹的插值

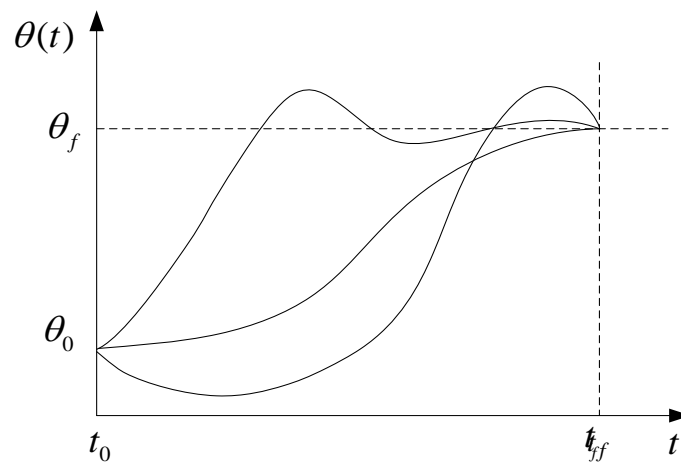
在关节空间中进行轨迹规划：给定机器人在**起始点**、**终止点手臂的形位**，以及一系列**约束条件**，选取不同类型关节插值函数，生成机器人轨迹。

8.2.1 三次多项式插值

□ 给定操作臂起始点某个关节角度 θ_0 ，终止点关节角度 θ_f ，起始和终止速度为**0**。三次多项式插值函数：

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

求解各个参数值。



单个关节的不同轨迹曲线

8.2.1 三次多项式插值

为实现关节的平稳运动，轨迹函数 $\theta(t)$ ，至少需要满足四个约束条件：

(1) 列约束条件

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0, \\ \theta(t_f) = \theta_f \end{cases}$$

- 满足起始点和终止点对应的**关节角位移约束**

$$\begin{cases} \dot{\theta}(0) = 0, \\ \dot{\theta}(t_f) = 0 \end{cases}$$

- 满足起始点和终止点的**关节角速度约束**

(2) 列多项式函数

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

(3) 列约束方程

$$\begin{cases} a_0 = \theta_0 \\ a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 = \theta_f \\ a_1 = 0 \\ a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 = 0 \end{cases}$$

解方程

(4) 求多项式系数

$$\begin{cases} a_0 = \theta_0, \\ a_1 = 0, \\ a_2 = \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0), \\ a_3 = -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) \end{cases}$$

注意：只适用于关节起始、终止速度为0的运动情况！

8.2.1 三次多项式插值

例8.1:

设有一个旋转关节的单自由度操作臂处于静止状态时 $\theta_0 = 15^\circ$ ，要在3s之内平稳运动到达终止位置： $\theta_f = 75^\circ$ ，并且在终止点的速度为零。

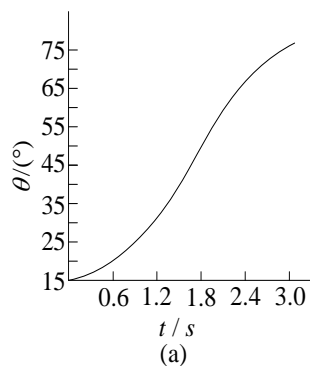
解：把 $\theta_0 = 15$, $\theta_f = 75$, $t_f = 3$ 代入上式，即可得到三次多项式的系数：
 $a_0 = 15.0$, $a_1 = 0.0$, $a_2 = 20.0$, $a_3 = -4.44$

因此，操作臂的位移方程为 $\theta(t) = 15.0 + 20.0t^2 - 4.44t^3$ 。

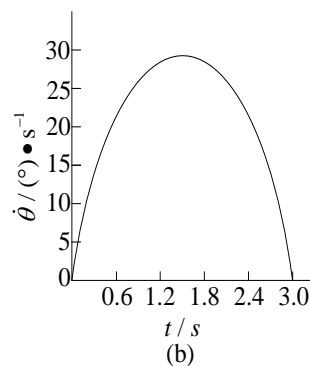
再由上式求1、2阶导，
则可确定操作臂的速度
和加速度：

$$\dot{\theta}(t) = 40.0t - 13.32t^2,$$

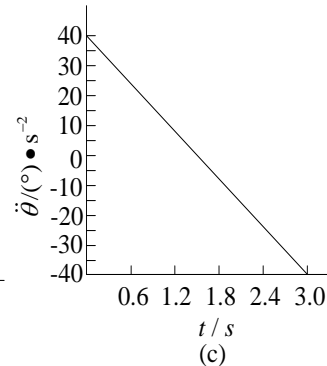
$$\ddot{\theta}(t) = 40.0 - 26.64t$$



角位移



角速度



角加速度

任何三次多项式函数的速度曲线均为**抛物线**，相应的加速度曲线均为**直线**。

8.2.2 过路径点的三次多项式插值

方法：把所有路径点也看作是“起始点”或“终止点”，求解逆运动学，得到相应的关节矢量值。然后确定所要求的三次多项式插值函数，把路径点平滑地连接起来。但是，在这些“起始点”和“终止点”的关节运动速度不再是零。

此时约束
条件变为：

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0, & \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \\ \theta(t_f) = \theta_f & \dot{\theta}(t_f) = \dot{\theta}_f \end{cases}$$

同理可以求得此时的三次多项式系数：

$$\begin{cases} a_0 = \theta_0, \\ a_1 = \dot{\theta}_0, \\ a_2 = \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) - \frac{2}{t_f}\dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_f}\dot{\theta}_f, \\ a_3 = -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) + \frac{1}{t_f^2}(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_f) \end{cases}$$

由上式确定的三次多项式描述了起始点和终止点具有任意给定位置和速度的运动轨迹。如何来确定路径点上的关节速度？

8.2.2 过路径点的三次多项式插值

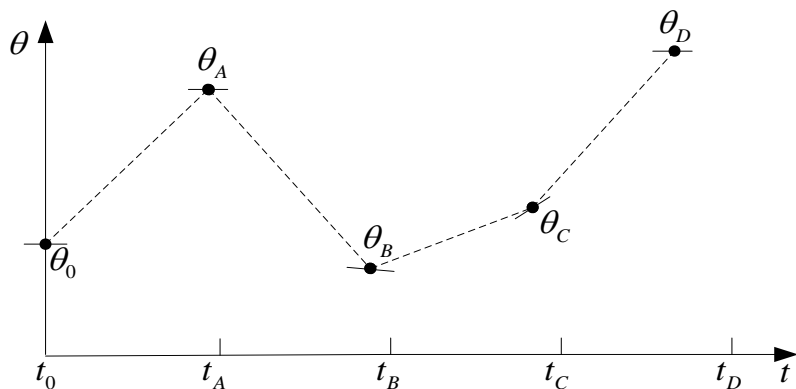
可由以下三种方法规定：

- 1、根据工具坐标系在直角坐标空间中的瞬时线速度和角速度确定各路径点的关节速度。
- 2、在直角坐标空间或关节空间中采用启发式方法，由控制系统自动地选择路径点的速度。
- 3、为了保证每个路径点上的加速度连续，由控制系统按此要求自动选择路径点的速度。

方法(1)耗费工作量太大，机器人控制系统最好具有方法(2)或方法(3)的功能，或者二者兼而有之。

8.2.2 过路径点的三次多项式插值

□ 对于**方法(2)**，系统采用某种启发式方法自动选取合适的路径点速度。



路径点上速度的自动生成

θ_0 为起始点;
 θ_A 为终止点,
 $\theta_B, \theta_C, \theta_D$ 是路径点,
用细实线表示过路径点时的
关节运动速度。

启发式方法的原理：用直线段把路径点依次连接起来，如果相邻线段的斜率在路径点处改变符号，则把速度选定为零；如果相邻线段不改变符号，则选取路径点两侧的线段斜率的平均值作为该点的速度。

8.2.2 过路径点的三次多项式插值

方法(3)约束条件是：连接处不仅速度连续，且加速度也连续

设所经过的路径点处的关节角度为 θ_y ，与该点相邻的前后两点的关节角分别为 θ_0 和 θ_g ，从 θ_0 到 θ_y 插值三次多项式为：

$$\theta(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3$$

时间区间为 $[0, t_{f1}]$

从 θ_y 到 θ_g 插值三次多项式为：

$$\theta(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3$$

时间区间为 $[0, t_{f2}]$

约束条件

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0 = a_{10}, \\ \theta_y = a_{10} + a_{11}t_{f1} + a_{12}t_{f1}^2 + a_{13}t_{f1}^3, \\ \theta_y = a_{20}, \\ \theta_g = a_{20} + a_{21}t_{f2} + a_{22}t_{f2}^2 + a_{23}t_{f2}^3, \\ 0 = a_{11}, \\ 0 = a_{21} + 2a_{22}t_{f2} + 3a_{23}t_{f2}^2, \\ a_{11} + 2a_{12}t_{f1} + 3a_{13}t_{f1}^2 = a_{21}, \\ 2a_{12} + 6a_{13}t_{f1} = 2a_{22} \end{array} \right.$$

最终解得：

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{10} = \theta_0, \quad a_{11} = 0, \quad a_{12} = \frac{12\theta_y - 3\theta_g - 9\theta_0}{4t_f^2}, \quad a_{13} = \frac{-8\theta_y + 3\theta_g + 5\theta_0}{4t_f^3}, \\ a_{20} = \theta_y, \quad a_{21} = \frac{3\theta_g - 3\theta_0}{4t_f}, \quad a_{22} = \frac{-12\theta_y + 6\theta_g + 6\theta_0}{4t_f^2}, \quad a_{23} = \frac{8\theta_y - 5\theta_g - 3\theta_0}{4t_f^3} \end{array} \right.$$

8.2.3 高阶多项式插值

□ 如果对于运动轨迹的要求更为严格，约束条件增多，三次多项式就不能满足需要，必须用更高阶的多项式对运动轨迹的路径段进行插值。

如果对某段路径的起始点和终止点都规定了关节的位置、速度和加速度，则要用一个五次多项式进行插值，即：

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

约束条件：

$$\begin{cases} \theta_0 = a_0, & \theta_f = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5, \\ \dot{\theta}_0 = a_1, & \dot{\theta}_f = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4, \\ \ddot{\theta}_0 = 2a_2, & \ddot{\theta}_f = 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_0 = \theta_0, \\ a_1 = \dot{\theta}_0, \\ a_2 = \frac{\ddot{\theta}_0}{2}, \\ a_3 = \frac{20\theta_f - 20\theta_0 - (8\dot{\theta}_f + 12\dot{\theta}_0)t_f - (3\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3}, \\ a_4 = \frac{30\theta_0 - 30\theta_f + (14\dot{\theta}_f + 16\dot{\theta}_0)t_f + (3\ddot{\theta}_0 - 2\ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^4}, \\ a_5 = \frac{12\theta_f - 12\theta_0 - (6\dot{\theta}_f + 6\dot{\theta}_0)t_f - (\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^5} \end{cases}$$

多项式插值轨迹生成方法小结

步骤1：给出多项式函数的形式：

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

步骤2：给出约束要求：

位移： $\theta(0), \theta(f)$ **速度：** $\dot{\theta}(0), \dot{\theta}(f)$ **加速度：** $\ddot{\theta}(0), \ddot{\theta}(f)$

步骤3：列出约束方程：

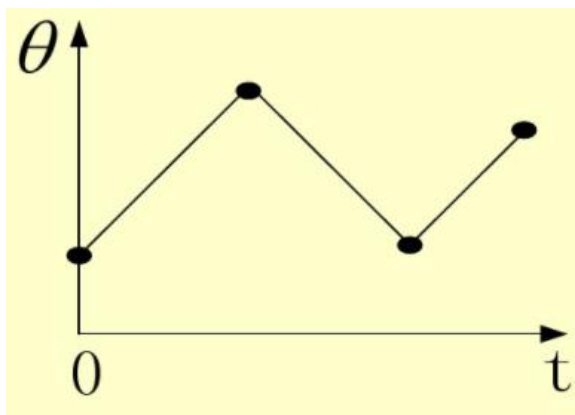
$$\begin{cases} \theta_0 = a_0, & \theta_f = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5, \\ \dot{\theta}_0 = a_1, & \dot{\theta}_f = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4, \\ \ddot{\theta}_0 = 2a_2, & \ddot{\theta}_f = 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3 \end{cases}$$

步骤4：根据约束方程，求解出多项式系数

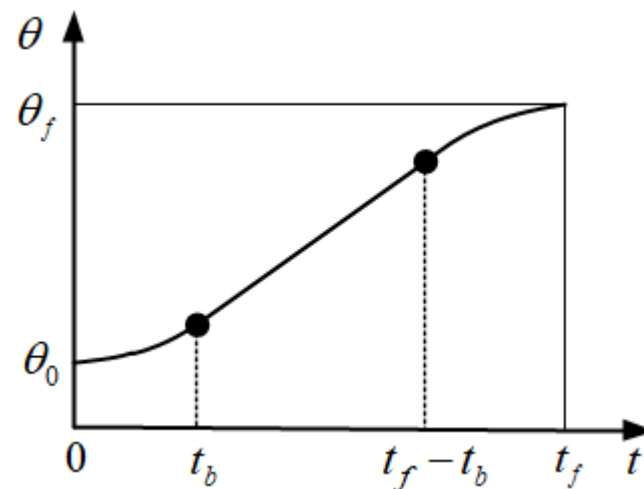
$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$$

8.2.4 用抛物线过渡的线性插值

□ 单纯线性插值将导致在节点处关节运动速度不连续，加速度无限大。



□ 在使用线性插值时，把每个节点的邻域内增加一段抛物线的“缓冲区段”，从而使整个轨迹上的位移和速度都连续。



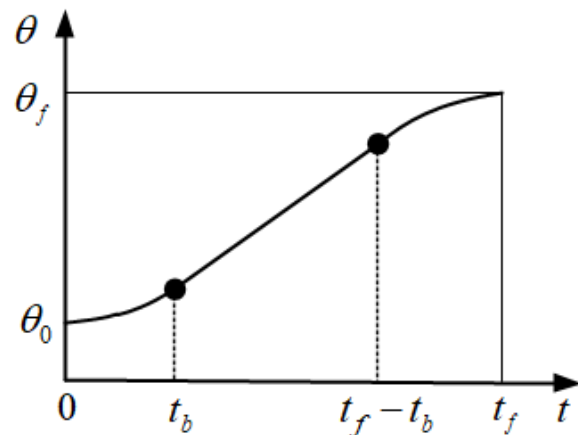
“带有抛物线过渡域的线性轨迹”

8.2.4 用抛物线过渡的线性插值

□ 假设两端的过渡域（抛物线）具有相同的持续时间，
因而在这两个域中采用相同的**恒加速度值**，只是符号相反。

- 抛物线过渡域的加速度为 $\ddot{\theta}$ ，则过渡域 $[t_0, t_b]$ 终点的速度为： $\dot{\theta}_{t_b} = \ddot{\theta} t_b$
- 每个抛物线的位移为 $\frac{1}{2} \ddot{\theta} t_b^2$
- 中间直线段做匀速运动，速度等于 $\ddot{\theta} t_b$
- 中间直线段位移为 $\ddot{\theta} t_b (t_f - 2t_b)$
- 总体位移为 $\theta_f - \theta_0 = \frac{1}{2} \ddot{\theta} t_b^2 \times 2 + \ddot{\theta} t_b (t_f - 2t_b)$
- 即 $\ddot{\theta} t_b^2 - \ddot{\theta} t_f t_b + (\theta_f - \theta_0) = 0$

最终得出：
$$t_b = \frac{t_f}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{\theta}^2 t_f^2 - 4\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_0)}}{2\ddot{\theta}}$$



为保证 t_b 有解，过渡域加速度值 $\ddot{\theta}$ 必须选的足够大：

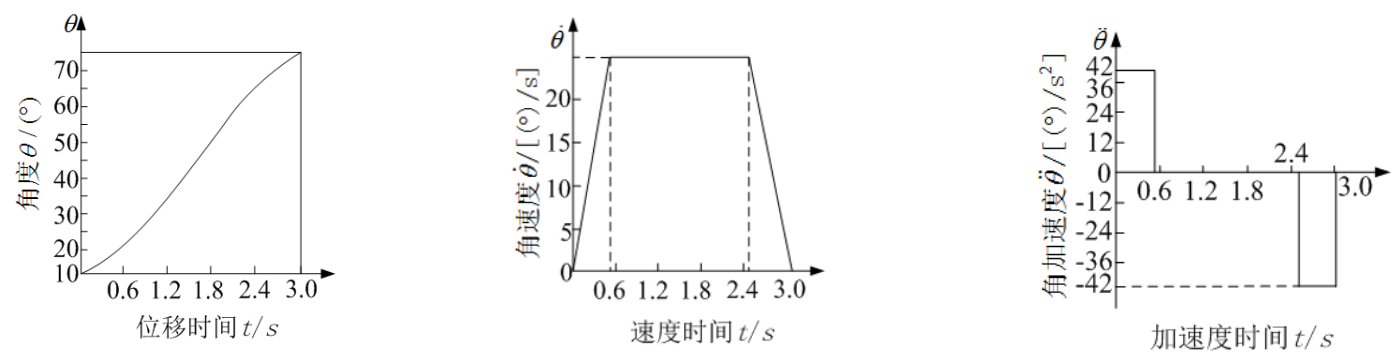
$$\ddot{\theta} \geq \frac{4(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2}$$

当式中 $=$ 成立时，线性域的长度为 0，过渡域在衔接处的斜率（代表速度）相等，当加速度 \uparrow ，过渡域的长度会 \downarrow 。若加速度为 ∞ ，路径又变回简单的线性插值情况。

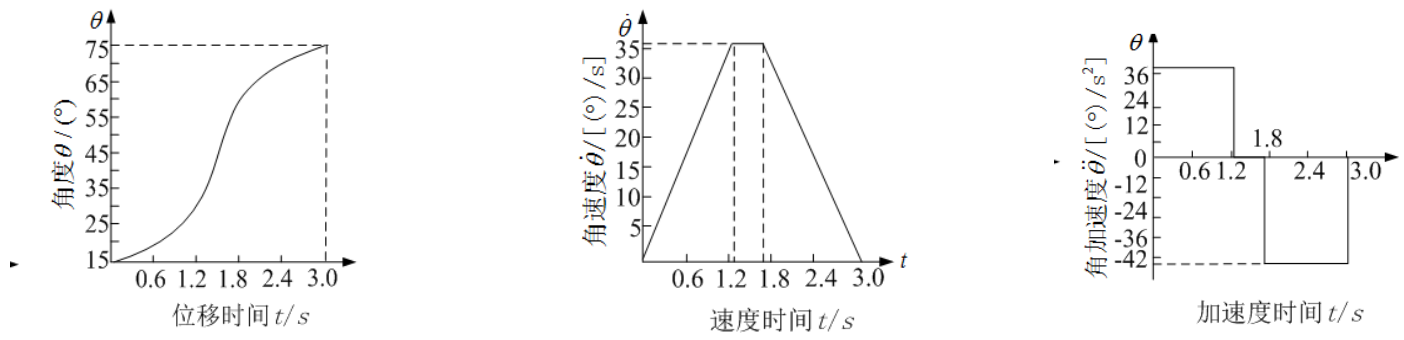
8.2.4 用抛物线过渡的线性插值

例2.2:

对于例 8.1给出的 θ_0 , θ_f 和 t_f , 设计出两条带有抛物线过渡域的线性轨迹。

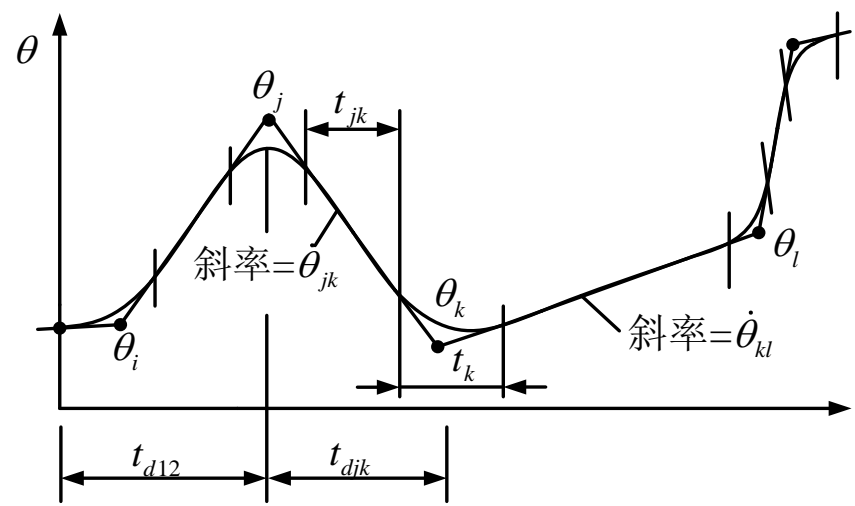


加速度较大时，带抛物线过渡的线性插值：位移、速度、加速度曲线



加速度较小时，带抛物线过渡的线性插值：位移、速度、加速度曲线

8.2.5 过路径点的用抛物线过渡的线性插值



多段带有抛物线过渡的线性插值轨迹

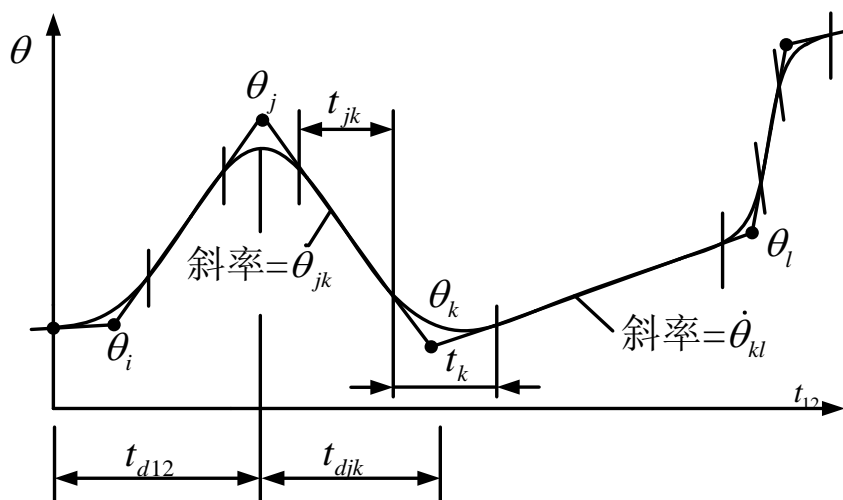
在 k 点的过渡域的持续时间为 t_k ;
点 j 和点 k 之间线性域的持续时间为 t_{jk} ;
连接 j 与 k 点的路径段的全部持续时间为 t_{djk} ;
 j 与 k 点之间的线性域速度为 $\dot{\theta}_{jk}$;
 j 点过渡域的加速度为 $\ddot{\theta}_j$ 。

对于内部路径段，根据右侧方程求解：

($j, k \neq 1, 2; j, k \neq n-1, n$)

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{jk} = \frac{\theta_k - \theta_j}{t_{djk}}, \\ \ddot{\theta}_k = \text{sgn}(\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}) |\ddot{\theta}_k|, \\ t_k = \frac{\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k}, \\ t_{jk} = t_{djk} - \frac{1}{2}t_j - \frac{1}{2}t_k \end{cases}$$

8.2.5 过路径点的用抛物线过渡的线性插值



多段带有抛物线过渡的线性插值轨迹

□ 对于第一段路径段：

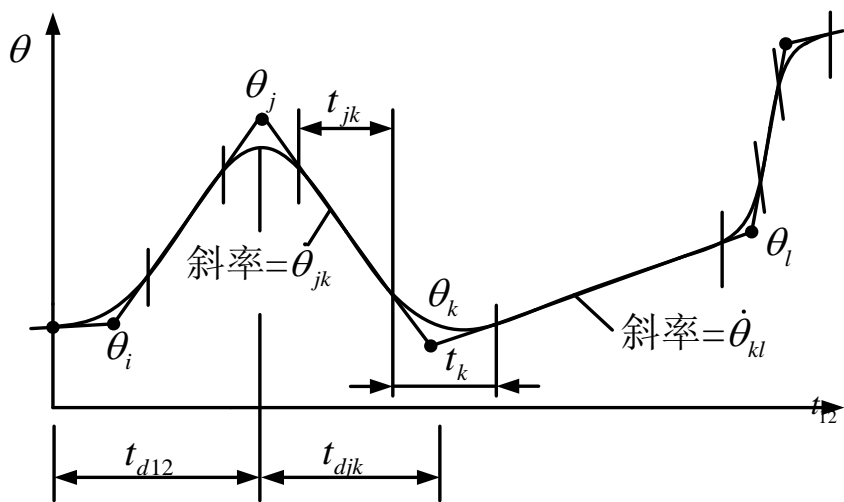
令线性域速度的两个表达式相等，得 t_1 ：

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{t_{d12} - \frac{1}{2}t_1} = \ddot{\theta}_1 t_1$$

算出起始点过渡域的持续时间 t_1 之后，进而求出 $\dot{\theta}_{12}$ 和 t_{12} ，即：

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \text{sgn}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) |\ddot{\theta}_1|, \\ t_1 = t_{d12} - \sqrt{t_{d12}^2 - \frac{2(\theta_2 - \theta_1)}{\ddot{\theta}_1}}, \\ \dot{\theta}_{12} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_{d12} - \frac{1}{2}t_1}, \\ t_{12} = t_{d12} - t_1 - \frac{1}{2}t_2 \end{cases}$$

8.2.5 过路径点的用抛物线过渡的线性插值



多段带有抛物线过渡的线性插值轨迹

注意：多段用抛物线过渡的直线样条函数一般并不经过那些路径点，除非在这些路径点处停止。若选取的加速度充分大，则实际路径将与理想路径点十分靠近。

□ 对于最后一段路径段：
路径点 $n-1$ 到终止点 n 之间的参数与第一个路径段相似，即：
$$\frac{\theta_{n-1} - \theta_n}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2}t_n} = \ddot{\theta}_n t_n$$

最终求解得到：

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_n = \text{sgn}(\dot{\theta}_{n-1} - \dot{\theta}_n) |\ddot{\theta}_n|, \\ t_n = t_{d(n-1)n} - \sqrt{t_{d(n-1)n}^2 + \frac{2(\theta_n - \theta_{n-1})}{\ddot{\theta}_n}}, \\ \dot{\theta}_{(n-1)n} = \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2}t_n}, \\ t_{(n-1)n} = t_{d(n-1)n} - t_n - \frac{1}{2}t_{n-1} \end{cases}$$

本章内容

8.1 轨迹规划的一般性问题

8.2 关节轨迹的插值

8.3 笛卡尔空间规划方法

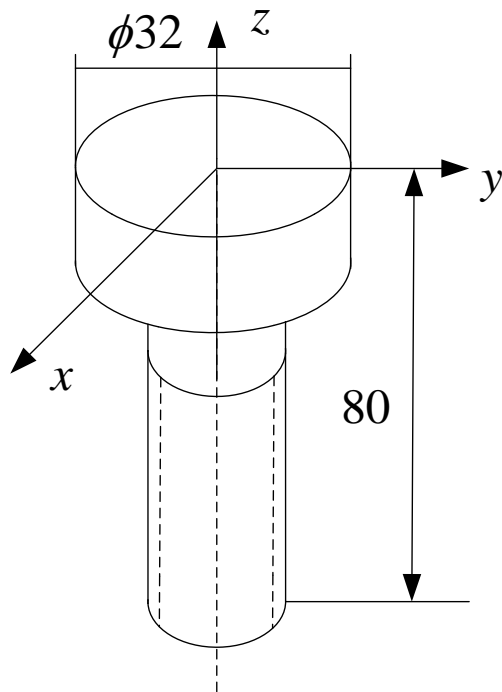
8.4 利用四元数进行直线轨迹规划

8.5 轨迹的实时生成

8.3 笛卡尔空间规划方法

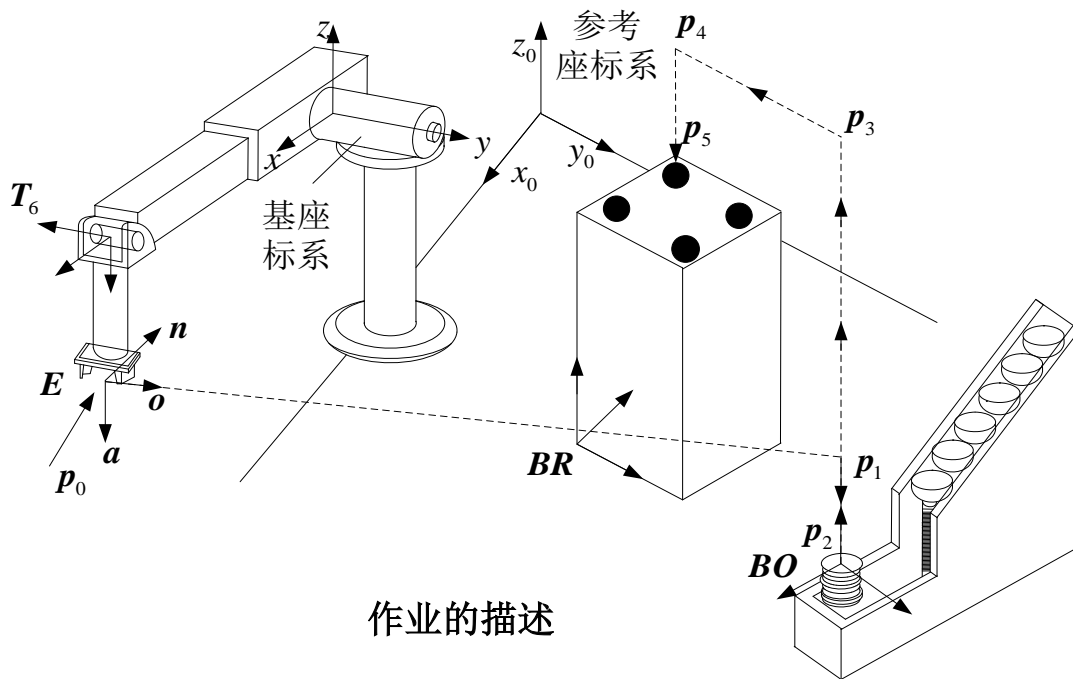
2.3.1 物体对象的描述

给出物体的**几何图形**及**固接坐标系**后，只要规定固接坐标系的**位姿**，便可重构该物体。



例如：螺栓轴线与固接坐标系的Z轴重合。螺栓头部直径为32mm，中心取为坐标原点，螺栓长80mm，直径20mm，则可根据固接坐标系的位姿重构螺栓在空间（相对参考系）的位姿和几何形状。

8.3.2 作业的描述


$$\mathbf{p}_i (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

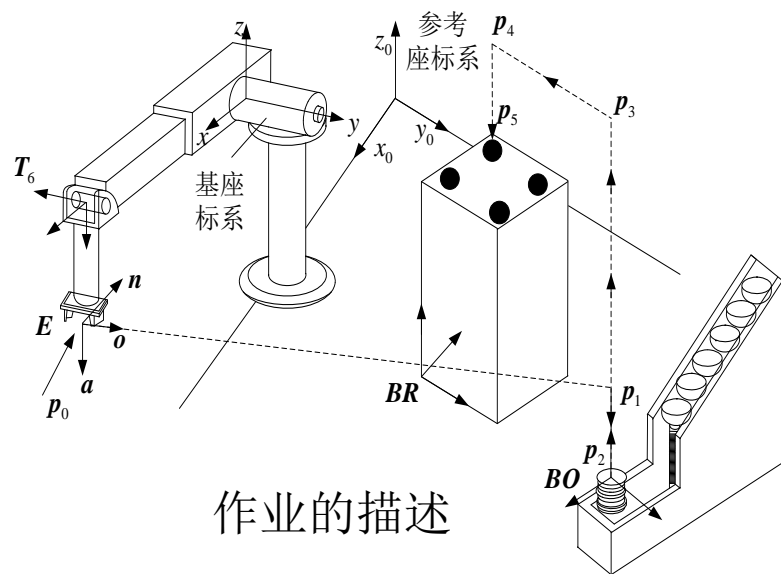
手爪必须经过的直角坐标节点

作业节点 p_i 对应手臂变换 0T_i , 从一个变换到另一变换通过手臂运动实现。

结点	p_0	p_1	p_2	p_2	p_3	p_4	p_5	p_5	p
运动	INIT	MOVE	MOVE	GRASP	MOVE	MOVE	MOVE	RELEASE	MOVE
目标	原始	接近螺栓	到达	抓住	提升	接近托架	放入孔中	松夹	移开

螺栓的抓取、插入过程

8.3.3 作两个节点之间的“直线”运动



在直角坐标空间中进行轨迹规划的首要问题是由两节点 p_i 和 p_{i+1} 所定义的路径起点和终点之间，如何生成一系列中间点。

□ 从一节点 p_i 到下一节点 p_{i+1} 的运动可表示为：

从 ${}^0_6T = {}^0_B T {}^B p_i {}^6_T T^{-1}$ 到 ${}^0_6T = {}^0_B T {}^B p_{i+1} {}^6_T T^{-1}$

□ 基于上式，可由“驱动变换” $D(\lambda)$ 来表示：

$${}^0_6T(\lambda) = {}^0_B T {}^B p_i D(\lambda) {}^6_T T^{-1} \quad \lambda = t/T, \lambda \in [0, 1]$$

□ 在节点 p_i ，实际时间 $t = 0$ ，因此 $\lambda = 0$ 时， $D(0)$ 是 4×4 的单位矩阵。

□ 在节点 p_{i+1} ， $t = T$ ， $\lambda = 1$ ，有 ${}^B p_i D(1) = {}^B p_{i+1}$ ，得 $D(1) = {}^B p_i^{-1} {}^B p_{i+1}$

8.3.3 作两个节点之间的“直线”运动

□ 将工具（手爪）从一个节点 p_i 到下一节点 p_{i+1} 的运动
可以看成和手爪固接的坐标系的运动。

□ 节点 p_i 和 p_{i+1} 相对于目标坐标系 $\{B\}$ 的描述可用相应的
齐次变换矩阵来表示：

$${}^B p_i = \begin{bmatrix} n_i & o_i & a_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{ix} & o_{ix} & a_{ix} & p_{ix} \\ n_{iy} & o_{iy} & a_{iy} & p_{iy} \\ n_{iz} & o_{iz} & a_{iz} & p_{iz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^B p_{i+1} = \begin{bmatrix} n_{i+1} & o_{i+1} & a_{i+1} & p_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{i+1x} & o_{i+1x} & a_{i+1x} & p_{i+1x} \\ n_{i+1y} & o_{i+1y} & a_{i+1y} & p_{i+1y} \\ n_{i+1z} & o_{i+1z} & a_{i+1z} & p_{i+1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□ 利用矩阵求逆公式求 ${}^B p_i^{-1}$ ，
再右乘 ${}^B p_{i+1}$ ，则得：

$$D(1) = \begin{bmatrix} n_i \cdot n_{i+1} & n_i \cdot o_{i+1} & n_i \cdot a_{i+1} & n_i \cdot (p_{i+1} - p_i) \\ o_i \cdot n_{i+1} & o_i \cdot o_{i+1} & o_i \cdot a_{i+1} & o_i \cdot (p_{i+1} - p_i) \\ a_i \cdot n_{i+1} & a_i \cdot o_{i+1} & a_i \cdot a_{i+1} & a_i \cdot (p_{i+1} - p_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.3.3 作两个节点之间的“直线”运动

□ 将节点 p_i 到 p_{i+1} 的运动分解为一个**平移运动**和两个**旋转运动**：
第一个转动使工具轴线与预期的接近方向 a 对准；第二个转动是绕工具轴线 (a) 转动，使方向矢量 o 对准。

□ 驱动函数 $D(\lambda)$ 由一个平移运动和两个旋转运动构成，即：

$$D(\lambda) = L(\lambda) R_a(\lambda) R_o(\lambda)$$

□ 平移运动的齐次变换：

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda x \\ 0 & 1 & 0 & \lambda y \\ 0 & 0 & 1 & \lambda z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

作用是把节点 p_i 的坐标原点沿直线运动到的原点 p_{i+1}

8.3.3 作两个节点之间的“直线”运动

□ 第一次转动齐次变换:

$$R_a(\lambda) = \begin{bmatrix} s^2\psi v(\lambda\theta) + c(\lambda\theta) & -s\psi c\psi v(\lambda\theta) & c\psi s(\lambda\theta) & 0 \\ -s\psi c\psi v(\lambda\theta) & c^2\psi v(\lambda\theta) + c(\lambda\theta) & s\psi s(\lambda\theta) & 0 \\ -c\psi s(\lambda\theta) & -s\psi s(\lambda\theta) & c(\lambda\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

绕向量 k 转动 $\lambda\theta$ 角得到的变换矩阵

作用是将 p_i 的接近矢量 a_i 转向 p_{i+1} 的接近矢量 a_{i+1}

□ 旋转变换 $R_a(\lambda)$ 表示绕向量 k 转动 θ 角得到的, 而向量 k 是将 p_i 的 y 轴绕其 z 轴转过 ψ 角得到的, 即

$$k = \begin{bmatrix} -s\psi \\ c\psi \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v(\lambda\theta) = \text{Vers}(\lambda\theta) = 1 - \cos(\lambda\theta); \quad c(\lambda\theta) = \cos(\lambda\theta); \quad s(\lambda\theta) = \sin(\lambda\theta); \quad c(\lambda\phi) = \cos(\lambda\phi); \quad s(\lambda\phi) = \sin(\lambda\phi); \quad \lambda \in [0, 1]$$

8.3.3 作两个节点之间的“直线”运动

□ 第二次转动齐次变换:

$$R_o(\lambda) = \begin{bmatrix} c(\lambda\phi) & -s(\lambda\phi) & 0 & 0 \\ s(\lambda\phi) & c(\lambda\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

绕接近矢量 \boldsymbol{a} 转动 $\lambda\phi$ 角得到的变换矩阵

作用是将 p_i 的方向矢量 \boldsymbol{o}_i 转向 p_{i+1} 的方向矢量 \boldsymbol{o}_{i+1}

□ 将矩阵至相乘代入式，得到 $D(\lambda) = \begin{bmatrix} dn & do & da & dp \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

其中:

$$da = \begin{bmatrix} -s(\lambda\phi)[s^2\psi v(\lambda\theta) + c(\lambda\theta)] + c(\lambda\phi)[-s\psi c\psi v(\lambda\theta)] \\ -s(\lambda\phi)[-s\psi c\psi v(\lambda\theta)] + c(\lambda\phi)[c^2\psi v(\lambda\theta) + c(\lambda\theta)] \\ -s(\lambda\phi)[-c\psi s(\lambda\theta)] + c(\lambda\phi)[-s\psi s(\lambda\theta)] \end{bmatrix}$$
$$do = \begin{bmatrix} c\psi s(\lambda\theta) \\ s\psi s(\lambda\theta) \\ c(\lambda\theta) \end{bmatrix}$$
$$dn = do \times da$$

8.3.3 作两个节点之间的“直线”运动

□ 在式两边右乘 $R_o^{-1}(\lambda)R_a^{-1}(\lambda)$ ，使位置矢量的各元素分别相等，令 $\lambda = 1$ ，则得：

$$\begin{cases} x = n_i \cdot (p_{i+1} - p_i), \\ y = o_i \cdot (p_{i+1} - p_i), \\ z = a_i \cdot (p_{i+1} - p_i) \end{cases}$$

□ 将方程两边右乘 $R_o^{-1}(\lambda)$ ，再左乘 $L^{-1}(\lambda)$ ，并使其第三列元素分别相等，可解得 θ 和 ψ ：

$$\theta = \text{atan} \left[\frac{\left[(n_i \cdot a_{i+1})^2 + (o_i \cdot a_{i+1})^2 \right]^{1/2}}{a_i \cdot a_{i+1}} \right] \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad \psi = \text{atan} \left[\frac{o_i \cdot a_{i+1}}{n_i \cdot a_{i+1}} \right] \quad -\pi \leq \psi < \pi$$

□ 为了求出 ϕ ，可将方程两边左乘 $R_a^{-1}(\lambda)L^{-1}(\lambda)$ ，并使它们的对应元素分别相等，得：

$$s\phi = -s\psi c\psi v(\theta)(n_i \cdot n_{i+1}) + [c^2\psi v(\theta) + c(\theta)](o_i \cdot n_{i+1}) - s\psi s(\theta)(a_i \cdot n_{i+1})$$

$$c\phi = -s\psi c\psi v(\theta)(n_i \cdot o_{i+1}) + [c^2\psi v(\theta) + c(\theta)](o_i \cdot o_{i+1}) - s\psi s(\theta)(a_i \cdot o_{i+1})$$

$$\phi = A \tan \left[\frac{s\phi}{c\phi} \right], \quad -\pi \leq \phi \leq \pi$$

8.3.3 作两个节点之间的“直线”运动

将求得的 θ, ϕ, ψ 代入 $R_a(\lambda), R_o(\lambda)$, 即可构成驱动函数

$$D(\lambda) = L(\lambda)R_a(\lambda)R_o(\lambda), \quad \lambda \in [0, 1]$$

其中,

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda x \\ 0 & 1 & 0 & \lambda y \\ 0 & 0 & 1 & \lambda z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_a(\lambda) = \begin{bmatrix} s^2\psi v(\lambda\theta) + c(\lambda\theta) & -s\psi c\psi v(\lambda\theta) & c\psi s(\lambda\theta) & 0 \\ -s\psi c\psi v(\lambda\theta) & c^2\psi v(\lambda\theta) + c(\lambda\theta) & s\psi s(\lambda\theta) & 0 \\ -c\psi s(\lambda\theta) & -s\psi s(\lambda\theta) & c(\lambda\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_o(\lambda) = \begin{bmatrix} c(\lambda\phi) & -s(\lambda\phi) & 0 & 0 \\ s(\lambda\phi) & c(\lambda\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

本章内容

8.1 轨迹规划的一般性问题

8.2 关节轨迹的插值

8.3 笛卡尔空间规划方法

8.4 利用四元数进行直线轨迹规划

8.5 轨迹的实时生成

8.4 利用四元数进行直线轨迹规划（自学）

8.4.1 四元数的基本概念

四元数是实数和复数以及三维空间点矢量的扩充。

□ 四元数有四个单元 $1, i, j, k$ 。
 后三个单元具有循环置换的性质：

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j,$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$

● **四元素 Q 表示为:** $Q = [s + \mathbf{v}] = s + ai + bj + ck = (s, a, b, c)$

- **基本性质:**
 - 标量部分: s
 - 矢量部分: $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$
 - 共轭: $s - (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})$
 - 范数: $s^2 + a^2 + b^2 + c^2$
 - 倒数: $\frac{s - (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})}{s^2 + a^2 + b^2 + c^2}$
 - 单位四元素: $s + (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})$

8.4.1 四元数的基本概念

● 四元数的代数运算规则：

加(减)运算规则： 两四元数的和(差)等于两者对应元素的和(差)。

乘法规则： 两四元元素相乘，即：

$$\begin{aligned} Q_1 Q_2 &= (s_1 + a_1 \mathbf{i} + b_1 \mathbf{j} + c_1 \mathbf{k})(s_2 + a_2 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + c_2 \mathbf{k}) \\ &= (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

注意：

- 1、四元数的加法满足交换律和结合律。但是，乘法只满足结合律，并不满足交换律；
- 2、两个三维矢量表示成四元数再相乘，得到的不是一个矢量，而是个四元数。

eg: $Q_1 = (0 + \mathbf{v}_1) = (0, a_1, b_1, c_1)$, $Q_2 = (0 + \mathbf{v}_2) = (0, a_2, b_2, c_2)$

$$Q_1 Q_2 = -\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$$

利用四元数代数，可以简单而有效地处理空间有限转动问题。

把绕 n 轴转 θ 角的旋转 $Rot(n, \theta)$ 用一个四元数表示为：

$$Rot(\mathbf{n}, \theta) = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{n} \right]$$

8.4.1 四元素的基本概念

例8.3:

绕 k 轴转 90° 再绕 j 轴转 90° 的旋转可用四元数乘积表示:

$$\begin{aligned} &(\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ)(\cos 45^\circ + k \sin 45^\circ) = \left(\frac{1}{2} + j \frac{1}{2} + k \frac{1}{2} + i \frac{1}{2}\right) \\ &= \left[\frac{1}{2} + \frac{i + j + k}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \left[\cos 60^\circ + \sin 60^\circ \frac{i + j + k}{\sqrt{3}}\right] = Rot\left(\frac{i + j + k}{\sqrt{3}}, 120^\circ\right) \end{aligned}$$

运算	四元数表示	矩阵表示
$R_1 R_2$	9 次加法, 16 次乘法	15 次加法, 24 次乘法
Rv	12 次加法, 22 次乘法	6 次加法, 9 次乘法
$R \rightarrow Rot(n, \theta)$	4 次乘法	8 次加法, 10 次乘法
	1 次求平方根	2 次求平方根
	1 次调用反正切函数	1 次调用反正切函数

使用四元数和矩阵的计算量

8.4.2 直角坐标路径控制法

□ 将操作臂工具坐标系沿直线路径在时间 T 内由节点 p_0 运动到 p_1 的规划方法描述:

手部坐标系的每一节点用齐次变换矩阵表示为: $P_i = \begin{bmatrix} R_i & p_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

对于匀速运动: $\lambda(t) = \frac{T-t}{T}$

工具坐标系在时刻 t 的位置和姿态分别用下面两式表达:

$$p(t) = p_1 - \lambda(t)(p_1 - p_0) \quad R(t) = R_1 \text{Rot}(n, -\theta\lambda(t))$$

$\text{Rot}(n, \theta)$ 是将工具姿态由 R_0 转为 R_1 而绕 n 轴转 θ 角的旋转

$$\text{Rot}(n, \theta) = R_0^{-1} R_1$$

注意: 如果坐标系 P_1 固定不动, 则式中的 $p_1 - p_0$ 及式中的 n 和 θ 对于每段轨迹只需计算一次。若目标节点在变化, 则 P_1 也要改变。在此情况下, 对 $p_1 - p_0$ 和 n, θ 应每步计算一次。

8.4.2 直角坐标路径控制法

对于等加速运动：

在两段轨迹的交点前的时刻开始过渡，而在交点后的时刻完成过渡，两段轨迹过渡的边界条件为：

$$\begin{cases} p(T_1 - \tau) = p_1 - \frac{\tau \Delta p_1}{T_1}, & p(T_1 + \tau) = p_1 + \frac{\tau \Delta p_2}{T_2}, \\ \left. \frac{d}{dt} p(t) \right|_{t=T_1-\tau} = \frac{\Delta p_1}{T_1}, & \left. \frac{d}{dt} p(t) \right|_{t=T_1+\tau} = \frac{\Delta p_2}{T_2} \end{cases}$$

如果用等加加速度过渡： $\frac{d^2}{dt^2} p(t) = a_p$

代入相应的边界条件，求出手部（工具）坐标系的位置和姿态：

$$p(t') = p_1 - \frac{(\tau - t')^2}{4\tau T_1} \Delta p_1 + \frac{(\tau + t')^2}{4\tau T_2} \Delta p_2$$

$$R(t') = R_1 \text{Rot} \left(n_1, -\frac{(\tau - t')^2}{4\tau T_1} \theta_1 \right) \text{Rot} \left(n_2, -\frac{(\tau + t')^2}{4\tau T_2} \theta_2 \right)$$

角加速度并不是恒定的，除非 n_1 和 n_2 平行或下列两个转速之一为零：

$$\phi_1 = \frac{\theta_1}{T_1} \quad \text{或} \quad \phi_2 = \frac{\theta_2}{T_2}$$

8.4.3 有界偏差关节路径法

上述直角坐标路径控制法的计算时间长，**如何实时处理操作臂关节空间的种种约束？**

解决办法：

有界偏差关节路径法 (Bounded Deviation Joint Path, 简称 BDJP)：在预规划阶段，取足够多的中间点，保证操作臂手部在每段运动中偏离直线路径的程度在预定的误差界限之内。

方法描述：首先计算出与直角坐标系中直线路径节点 p_i 对应的关节矢量 q_i ，把作为关节空间的节点，进行插值计算。

□ 从节点 q_0 到 q_1 的运动为：
$$q(t) = q_0 + \frac{T_1 - t}{T_1} \Delta q_1 \quad \Delta q_1 = q_1 - q_0, \Delta q_2 = q_2 - q_1,$$

□ 两段路径： q_0 到 q_1 ， q_1 到 q_2 的过渡为：
$$q(t') = q_1 - \frac{(\tau - t')^2}{4\tau T_1} \Delta q_1 + \frac{(\tau + t')^2}{4\tau T_2} \Delta q_2$$

8.4.3 有界偏差关节路径法

偏离误差： $P_j(t)$ 和 $P_d(t)$ 之差

$P_j(t)$ 表示关节节点 $q_j(t)$ 处的操作臂手部坐标系

$P_d(t)$ 相应于直角坐标系中节点 $p_j(t)$ 的手部坐标系

□ 移动误差为： $\delta_P = |P_j(t) - P_d(t)|$

□ 转动误差为： $\delta_R = |Rot(n, \phi)| = |R_d^{-1}(t) R_j(t)|$ 的角度部分 $= |\phi|$

分别规定最大移动偏差 δ_P^{\max} 和最大转动偏差 δ_R^{\max} 。

因而偏离误差应限制在以下范围内：

$$\delta_P \leq \delta_P^{\max} \quad \text{和} \quad \delta_R \leq \delta_R^{\max}$$

必须在两相邻节点之间取足够多的中间点，确保式得到满足。

有界偏差关节路径法（BDJP）实质上是递归两分法求中间点，以满足式。

8.4.4 BDJP算法

- 选取足够的关节节点，以保证操作臂手部坐标系相对于规定的直线路径的偏差不超过给定的误差界限。

算法步骤：

S1 计算关节变量解 计算对应于 p_0 和 p_1 的关节矢量 q_0 和 q_1 。

S2 求出关节空间的中间点 计算对应于和的关节矢量和：

$$q_m = q_1 - \frac{1}{2} \Delta q_1 \quad \text{再由 } q_m \text{ 计算相应的工具坐标系 } P_m \text{ 。}$$

S3 求出直角坐标空间的中点 计算相应的直角坐标路径的中点 p_c ：

$$p_c = \frac{p_0 + p_1}{2} \quad \text{和} \quad R_c = R_1 \text{Rot}\left(n_1, -\frac{\theta}{2}\right)$$

8.4.4 BDJP算法

S4 求出偏差误差 计算 P_m 和 p_c 之间的偏差:

$$\delta_P = |P_m - p_c|$$

$$\delta_R = |Rot(n, \phi)| = |R_c^{-1} R_m \text{ 的角度部分}| = |\phi|$$

S5 校核误差界限

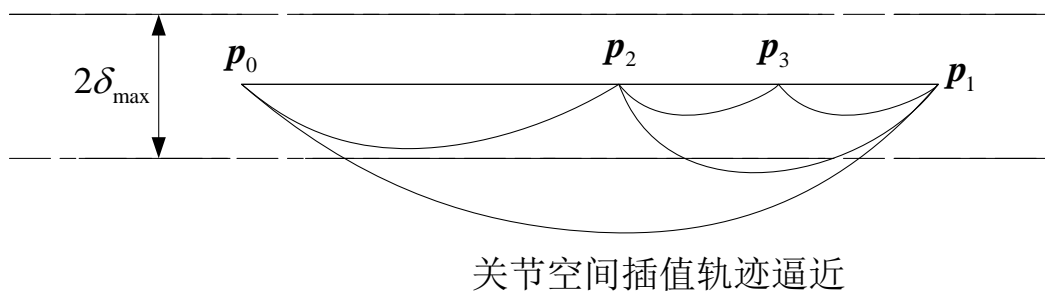
若 $\delta_P < \delta_P^{\max}$ 和 $\delta_R < \delta_R^{\max}$, 则停止。否则, 计算相应于直角坐标中点 p_c 的关节矢量, 并以 p_1 代替 p_c , p_0 代替 p_c , 并对这两个子段执行递归步骤S2~S5。

收敛性相当好, 每进行一次递归, 最大偏差大约减少3/4

8.4.4 BDJP算法

□ 有界偏差关节路径法（BDJP）是在预规划阶段在关节变量空间取足够多的中间点进行插值，以保证在关节变量空间中驱动操作臂，并使偏离预定直线路径的误差在预定的界限之内。

注意：这一算法所生成的插入节点在 p_0 和 p_1 之间并非均匀分布，而是根据精确轨迹与关节空间的插值轨迹两者的偏差情况决定的。



节点 p_0 和 p_1 之间的关节插值轨迹与精确轨迹之间的偏差类似于非均匀弦的下垂情况，**在两端节点 p_0 和 p_1 处为零，而在中间某点最大。**

插入节点的分布不是均匀的，与所选取的容许偏差，路径的位姿几何有关。

本章内容

8.1 轨迹规划的一般性问题

8.2 关节轨迹的插值

8.3 笛卡尔空间规划方法

8.4 利用四元数进行直线轨迹规划

8.5 轨迹的实时生成

8.5 轨迹的实时生成

8.5.1 关节空间轨迹的生成

对于三次样条： 对于三次样条，轨迹生成器只需随 θ 的变化不断地按式和式计算 $\dot{\theta}$ 和 $\ddot{\theta}$ 。当到达路径段的终点时，调用新路径段的三次样条系数，重新赋 t 为零，继续生成轨迹。

带抛物线过渡的直线样条插值：

首先检测时间 t 的值以判断当前处于路径段的线性域还是过渡域

线性域：

$$\begin{cases} \theta = \theta_j + \dot{\theta}_{jk}t, \\ \dot{\theta} = \dot{\theta}_{jk}, \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

过渡域： 令 $t_{\text{inb}} = t - (t_j/2 + t_{jk})$

$$\begin{cases} \theta = \theta_j + \dot{\theta}_{jk}(t - t_{\text{inb}}) + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_k t_{\text{inb}}^2, \\ \dot{\theta} = \dot{\theta}_{jk} + \ddot{\theta}_k t_{\text{inb}}, \\ \ddot{\theta} = \ddot{\theta}_k \end{cases}$$

8.5.2 笛卡尔空间轨迹的生成

□ 仿照§8.2节所述的关节空间方法，使用带抛物线过渡的线性函数来讨论。

两路径点之间的运动：

□ 移对于表示两个路径点的坐标系 ${}^B P_i$ 和 ${}^B P_{i+1}$ ，驱动函数 $D(1)$ 表示 ${}^B P_{i+1}$ 相对 ${}^B P_i$ 的位姿，即： $D(1) = {}^B P_i^{-1} {}^B P_{i+1}$

□ $D(1)$ 的姿态可用旋转矩阵 ${}^i R(k, \theta)$ 表示； $D(1)$ 的位置用三维矢量 ${}^i p_{i+1}$ 表示。 ${}^B P_{i+1}$ 相对于 ${}^B P_i$ 的位姿用 6×1 的矢量 ${}^i X_{i+1}$ 表示，即：

$${}^i X_{i+1} = \begin{bmatrix} {}^i p_{i+1} \\ {}^i k_{i+1} \end{bmatrix}$$

说明：等效转角不是唯一的，因为 (k, θ) 等效于 $(k, \theta + n \times 360^\circ)$ ， n 为整数。从一路径点向下一点运动时，一般，总的转角应取最小值，即使它小于 180° 。

8.5.2 笛卡尔空间轨迹的生成

带抛物线过渡的线性轨迹规划时：

增加约束条件：每个自由度的过渡域持续时间必须相同，这样才能保证各自由度形成的复合运动在空间形成一条直线。

□ 笛卡尔空间轨迹实时生成方法与关节空间相似：

在线性域中：

$$\begin{cases} x = x_j + \dot{x}_{jk}t, \\ \dot{x} = \dot{x}_{jk}, \\ \ddot{x} = 0 \end{cases}$$

在过渡域中：

$$\begin{cases} t_{\text{inb}} = t - \left(\frac{1}{2}t_j + t_{jk} \right), \\ x = x_j + \dot{x}_{jk}(t - t_{\text{inb}}) + \frac{1}{2}\ddot{x}_k t_{\text{inb}}^2, \\ \dot{x} = \dot{x}_{jk} + \ddot{x}_k t_{\text{inb}}, \\ \ddot{x} = \ddot{x}_k \end{cases}$$

8.5.2 笛卡尔空间轨迹的生成

□ 最后，必须将这些笛卡尔空间轨迹 (x, \dot{x} 和 \ddot{x}) 转换成等价的关节空间的量。

算法如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} X \rightarrow D(\lambda), \\ q(t) = \text{Solve}(D(\lambda)), \\ \dot{q}(t) = \frac{q(t) - q(t - \delta t)}{\delta t}, \\ \ddot{q}(t) = \frac{\dot{q}(t) - \dot{q}(t - \delta t)}{\delta t} \end{array} \right.$$

根据计算结果： q ， \dot{q} 和 \ddot{q} ，由控制系统执行