图论

Graph Theory

3、图的矩阵表示

概念：

关联矩阵，邻接矩阵，可达矩阵

无向图的关联矩阵（对图无限制）

无向图$G=<V,E>$，$|V|=n$，$|E|=m$，令 m_{ij}为 v_i 与 e_j 的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为G 的关联矩阵，记为$M(G)$.

性质

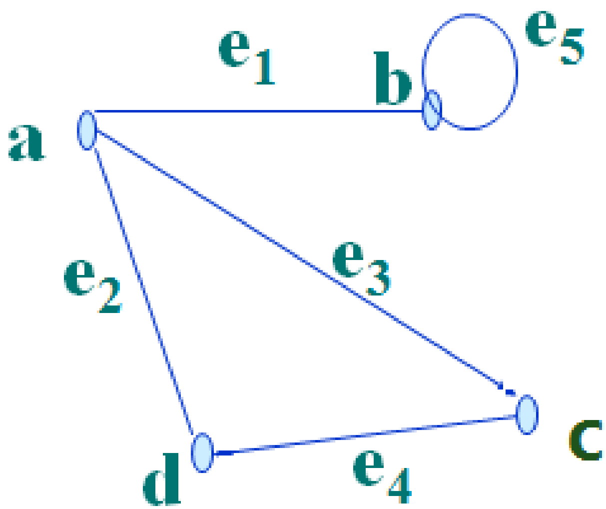
(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2 \quad (j = 1,2,\ldots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$

(4) 平行边的列相同

例



G

$$M(G)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

有向图的关联矩阵（无环有向图）

有向图D=<V,E>，令则称 $(m_{ij})_{n\times m}$为D的关联矩阵，记为$M(D)$.

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

性质

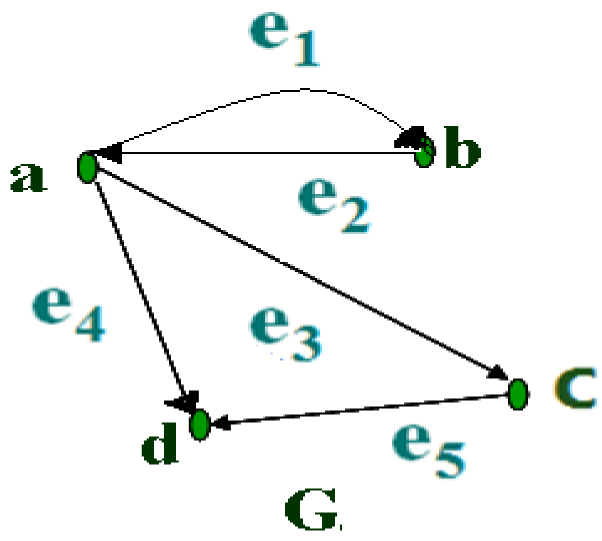
(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=1)=d^{+}(v_i), \quad \sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=-1)=d^{-}(v_i), \quad i=1,2,\ldots,n$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij}=0$

(4) 平行边对应的列相同

例



$$M(G)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

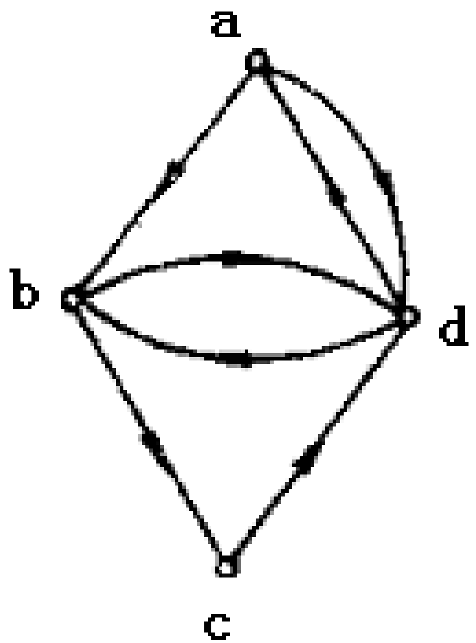
有向图的邻接矩阵

设D＝(V, E)是有向图， V ={v_1, ⋯. , v_n}， 构造矩阵A=[a_{ij}]如下：∀i, j(1≤i, j≤n)

$$a_{ij}=\begin{cases} k & \text{若从}v_i\text{到}v_j\text{有}k\text{条边} \\ 0 & \text{若从}v_i\text{到}v_j\text{没有边} \end{cases}$$

称A为图D的邻接矩阵。

例



$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

有向图的邻接矩阵性质

$$(1)\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i), \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$(2)\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j), \quad j = 1,2,\ldots,n$$

(3) $\sum\limits_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$ --- D中长度为1的通路数

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ --- D中长度为1的回路数

邻接矩阵的含义

定理 设 A为有向图 D 的邻接矩阵，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为顶点集，则 A 的 l 次幂 A^l（$l\geq 1$）中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为D中v_i到v_j长度为 l 的通路数，其中

$a_{ii}^{(l)}$ 为v_i到自身长度为 l 的回路数，而

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的通路总数，

$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$ 为D 中长度为 l 的回路总数.

推论 设$B_l=A+A^2+\ldots+A^l$（$l\geq 1$），则

B_l中元素 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{(l)}$ 为D中长度小于或等于 l 的通路数.

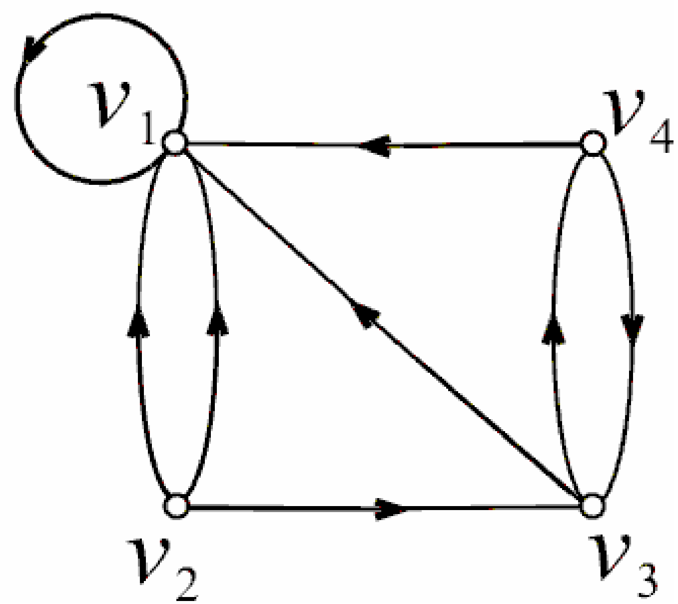
$\sum_{i=1}^{n}b_{ii}^{(l)}$ 为D中长度小于或等于 l 的回路数

实例

有向图D如图所示，求 A, A_2, A_3, A_4，并回答诸问题：

(1) D 中长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？

(2) D 中长度小于或等于4的通路为多少条？其中有多少条回路？



实例求解

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

(1) D中长度为1的通路为8条，其中有1条是回路.

D中长度为2的通路为11条，其中有3条是回路.

D中长度为3和4的通路分别为14和17条，回路分别为1与3条.

(2) D中长度小于等于4的通路为50条，其中有8条是回路.

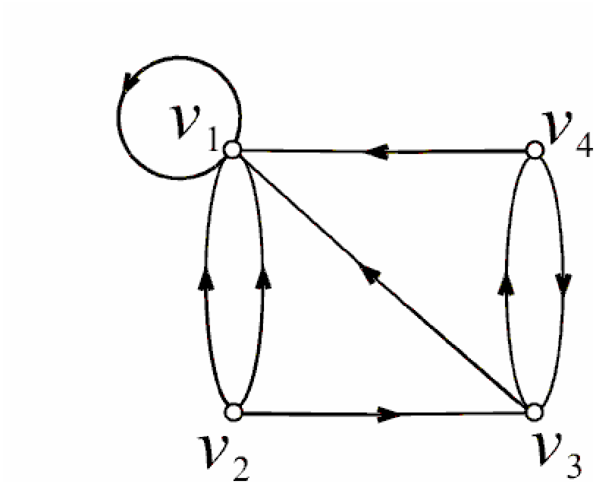
有向图的可达矩阵

设$D=<V,E>$为有向图. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{可达}v_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为D的可达矩阵，记作$P(D)$，简记为P.

例：求下图所示有向图 D 的可达矩阵。



$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$$