第八章 势流

理想、均质不可压、定常、势流

$\mu = 0$　　$\rho = \text{const}$　　$\frac{\partial}{\partial t} = 0$　　$\vec{\omega} = 0$

⇒ **平面势流**

基础知识

⇒ 理想、不可压、定常流动的数学描述，流线，无旋，全微分，有势

概述

势　流

⇒ 速度势函数，势流伯努利方程，势流求解

平面势流

⇒ 流函数、流网、柯西-黎曼条件

基本平面势流及其叠加

⇒ 均匀直线流点源（汇），点涡，偶极流

柱体绕流

⇒ 绕圆柱有、无环量流动

8.1 势流

旋转角速度 ⇒ $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{V}$

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \qquad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \qquad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

涡　量 ⇒ $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V}$

⇒ $\omega = \frac{1}{2}\vec{\Omega}$

势流2

势　流 ⇒ $\vec{\omega} = 0$ 或 $\vec{\Omega} = 0$

三维流动 ⇒ $\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$

- 旋转角速度是流体微团绕通过自身的平行坐标轴的旋转，自转

- 有旋与否与流体微团的运动轨迹无关；
- 无旋的运动学特征

势流3

旋转角速度产生和改变条件 受到力偶作用

以一定旋转角速度旋转的流体微团只有受到力偶作用，其旋转角速度才能产生或发生变化

理想不可压缩流动

- 初始时刻无旋，则以后任意时刻整个流场无旋
- 无穷远来流无旋，整个流场无旋

速度势函数1

设 G 为一单连域，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$，在 G 内具有一阶连续偏导，则

$$Pdx+Qdy+Rdz=dW$$

为某一函数 $W(x,y)$ 的全微分的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y} \qquad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

速度势函数2

无旋流动 ⇒

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

⇒

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial y} \qquad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}$$

速度势函数3

速度势函数

$$d\phi=udx+vdy+wdz=\frac{\partial \phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \phi}{\partial y}dy+\frac{\partial \phi}{\partial z}dz$$

ϕ 称为速度势函数

速度势函数存在条件

无旋流动

无旋流动一定存在速度势函数，无论定常、非定常，可压、不可压缩流动，二元还是三元流动

速度势函数和速度之间关系

$$d\phi = udx + vdy + wdz = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad \vec{V} = \frac{\partial\phi}{\partial x}i + \frac{\partial\phi}{\partial y}j + \frac{\partial\phi}{\partial z}k = \nabla\phi$$

- 势函数对坐标偏导数为该方向速度分量
  - 势函数的方向导数为该方向的速度分量

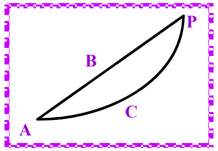
速度势函数性质

- 速度势函数可以相差一个任意常数，而不影响其对流场的描述（不影响速度分布）

$$\nabla(\phi + C) = \nabla\phi = \vec{V}$$

- 单连通域势流，速度沿曲线的线积分与路径无关，等于两点的势函数差

$$\int_A^P \vec{V}\cdot d\vec{l} = \int_A^P udx + vdy + wdz =$$
$$= \int_A^P \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = \phi_P - \phi_A$$



- 单连通域，任意封闭曲线速度环量为零

$$\Gamma = \oint_L \vec{V}\cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{速度场有势}$$

不可缩流动速度势函数方程

理想不可压缩流动 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

势流 $\Rightarrow$ $u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, v = \frac{\partial\phi}{\partial y}, w = \frac{\partial\phi}{\partial z}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \nabla^2\phi = 0$$

- 不可压缩流动的势函数满足拉普拉斯方程
- 二阶线性方程，求解已经研究比较深入
- 解具有可叠加性

柱坐标系下速度势函数及其方程

速度势函数梯度 $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}e_r + \frac{\partial\phi}{r\partial\theta}e_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}e_z$

速度分量 $V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} \quad V_\theta = \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} \quad V_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}$

势函数方程 $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\phi}{\partial r}) + \frac{\partial^2\phi}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$

- 势流一般是理想流体流动，只有极少粘性流动为无旋

势流伯努利方程

理想、均质不可压、势流　$\mu=0\ ,\ \rho=const\ ,\ \omega_z\equiv 0$

连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

运动方程

欧拉方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=g_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=g_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=g_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

伯努利方程推导2

对x运动方向方程两边同时 $-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right)$

左边

$$=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}+\cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}}-v\frac{\partial v}{\partial x}-w\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}+v\cancel{\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)}+w\cancel{\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)}$$

右边

$$=g_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right)-g_x=0$$

伯努利方程推导3

同样，对x，z 方向方程两边分别同时 $-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2}\right)$　　$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V^2}{2}\right)$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2}\right)-g_y=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V^2}{2}\right)-g_z=0$$

x方向方程乘以dx，y方向方程乘以dy，z方向方程乘以dz，两边分别同时相加

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial(d\phi)}{\partial t}+\frac{dp}{\rho}+d\left(\frac{V^2}{2}\right)+dG=0$$

G　质量力势函数

伯努利方程推导4

积分

$$\Rightarrow\quad \int\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+G=C$$

定常，质量力仅有重力，且z轴铅直向上

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=C\quad 或\quad \frac{p}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}+z=C'$$

忽略重力

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=C\quad 或\quad p+\frac{1}{2}\rho V^2=C'$$

- 形式上与流线伯努利方程相同，但流线伯努利方程常数值不同流线可能不同，而势流全流场为常数

伯努利方程适用条件

势流伯努利方程适用条件

- 理想不可压流体
- 定常流动，质量力仅有重力、或忽略
- 无旋流动
- 适用于整个流场
- 无其它能量输入输出

不可压缩势流求解简化

- 求解方程数目减少

  4个 → 2个

- 求解方程变得简单，易求解

  三个非线性方程加一个线性方程

  → 一个线性方程加一个有限关系式

- 原来速度和压强相互联系，必须联合求解变成了分开求解

势流问题求解

求解过程

$\nabla^2\phi=0$ → ϕ → $\vec{V}$

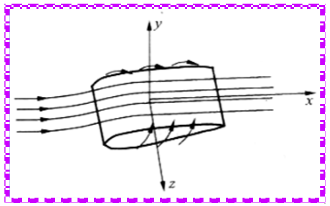
$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=C$ 或 $p+\frac{1}{2}\rho V^2=C'$ → p

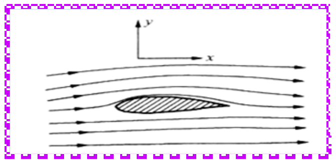
拉普拉斯方程边界条件

$n\cdot\nabla\phi=n\cdot\vec{U}$ 或 $\frac{\partial\phi}{\partial n}=n\cdot\vec{U}$

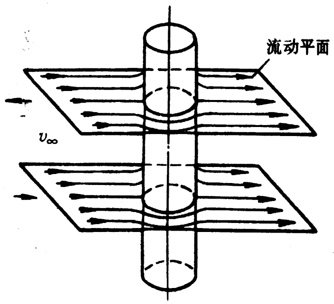
n 壁面外方向单位矢量，$\vec{U}$ 壁面运动速度

8.2 平面势流——平面流动1





绕无限长机翼的二维流动



绕无穷长圆柱的流动

平面流动2

平面流动

- 任意时刻，流场中各流体质点的速度都平行于某固定平面，即在垂直该面上速度分量为零

$\Rightarrow$ $u_z=0$ 或者，$w=0$

- 各物理量在此平面的垂直方向上没有变化.

$\Rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial z}=0$ $\Rightarrow$ 二元流动

$\Rightarrow$ T、p 等只是两个坐标的函数

平面势流

无旋流动 $\Rightarrow$ $\vec{\omega}=0$

三维流动 $\Rightarrow$

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial w}{\partial y}}-\cancel{\frac{\partial v}{\partial z}}\right)=0$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}-\cancel{\frac{\partial w}{\partial x}}\right)=0 \xrightarrow[\text{无旋流动}]{\text{平面流动}} \omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\equiv 0$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

- 平面无旋流动（平面势流） $\Rightarrow$ $\omega_z\equiv 0$ 或 $\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0$

平面势流基本控制方程

理想、均质不可压、定常、平面势流 $\Rightarrow$ $\mu=0$, $\rho=const$; $\frac{\partial}{\partial t}=0$, $\omega_z=0$

理想不可压缩流体平面无旋流动 $\Rightarrow$

- 二维欧拉运动方程 $\xrightarrow[\text{积分}]{\text{无旋}}$ 平面势流伯努利方程 p
- 连续方程、无旋条件 $\Rightarrow$ 流函数、速度势函数、拉普拉斯方程 $\vec{V}$

平面势流——控制方程组1

连续方程 $\Rightarrow$ 不可压、平面流动

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

运动方程 $\Rightarrow$ 不可压、平面（忽略质量力）理想、定常流动

欧拉方程 $\Rightarrow$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

势流伯努利方程

势流伯努利方程

理想，不可压、平面、定常势流

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=C \quad \text{或} \quad \frac{p}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}+z=C'$$

忽略重力

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=C \quad \text{或} \quad p+\frac{1}{2}\rho V^2=C'$$

⇒ 机械能在整个流场处处守恒

平面速度势函数

速度势函数 ⇒ $d\phi = udx + vdy$

直角坐标系 ⇒ $u=\frac{\partial\phi}{\partial x}$，$v=\frac{\partial\phi}{\partial y}$　　$\vec{V}=\nabla\phi$

极坐标系 ⇒ $V_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}$，$V_\theta=\frac{\partial\phi}{r\partial\theta}$

二元无旋流动一定存在速度势函数，无论是否定常非定常，可压、不可压缩流动

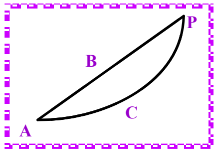
速度势函数性质

- 速度势函数可以相差一个任意常数，而不影响其对流场的描述（不影响速度分布）

$$\nabla(\phi+C)=\nabla\phi=\vec{V}$$

- 单连通域势流，速度沿任意两点曲线的线积分与路径无关，等于两点的势函数差

$$\int_A^P \vec{V}\cdot d\vec{l}=\int_A^P udx+vdy=$$
$$=\int_A^P \frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy=\phi_P-\phi_A$$



- 单连通域，任意封闭曲线速度环量为零

$$\Gamma=\oint_L \vec{V}\cdot d\vec{l}=0$$

平面势流速度势函数方程

不可压缩流动

直角坐标系 ⇒ $$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\nabla^2\phi=0$$

柱坐标系 ⇒ $$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\phi}{r^2\partial\theta^2}=0$$

- 不可压缩流动的势函数满足拉普拉斯方程
- 二阶线性方程，求解已经研究比较深入
- 解具有可叠加性

等势线

等势函数线 → 速度势函数等于常数的曲线

$\phi = \text{const}$

等势线方程

→ $d\phi = udx + vdy = 0$ → $udx + vdy = 0$

等势线斜率

→ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\phi = -\frac{u}{v}$

流函数1 stream function

设 G 为一平面单连域，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导，则

$Pdx + Qdy$

为某一函数 $W(x,y)$ 的全微分的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

连续方程 (不可压) → $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ → $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial y}$

流函数与速度关系

流函数 → $d\psi = (-v)dx + udy = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy$

直角坐标系 → $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

流函数沿某一方向的导数等于该方向顺时针转90°方向的速度分量

圆柱坐标系 不可压、平面定常 连续方程 → $\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial(V_\theta)}{\partial \theta} = 0$

极坐标系

→ $\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} = \frac{\partial(-V_\theta)}{\partial \theta}$

流函数及和速度关系

流函数 → $d\psi = (-V_\theta)dr + rV_r d\theta$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r}dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}d\theta$$

极坐标系 → $V_r = \frac{\partial \psi}{r\partial \theta}$, $V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$

不可压平面流动必然存在流函数，无论是否为势流以及理想、粘性，定常、非定常

流函数存在条件

二元不可压缩流动，定常二元可压缩流动

流函数的基本性质1

标量函数（流函数、速度势函数） ⟹ 矢量场

- 流函数可以相差一个任意常数而不影响其对流场的描述（不影响速度分布）

$$\frac{\partial(\psi+C)}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=u\ ,\ -\frac{\partial(\psi+C)}{\partial x}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=v$$

- 等流函数线就是二元流动的流线

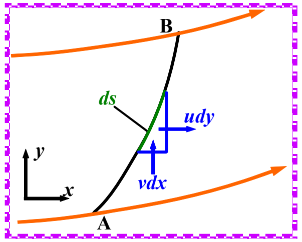
等流函数线 ⟹ $\psi=\text{const}$

⟹ $d\psi=0$ ⟹ $\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$ 流线方程

流函数的基本性质2

流函数与流量的关系

$$Q_{AB}=\psi_B-\psi_A$$



- 流经任意曲线的流量等于曲线两端点流函数之差，与曲线形状无关

- 通过两流线间任意单位厚度曲线的体积流量等于两条流线上的流函数之差，与该曲线形状无关

若曲线本身为流线 ⟹ $Q_{AB}=0$

流函数满足拉普拉斯方程的条件

- 势流 ⟹ $\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$ $u=\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$

⟹ $$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$$

势流条件下，流函数满足拉普拉斯方程

- 齐次线性方程，简化求解，允许解线性叠加
- 判断某函数是否可表示不可压缩势流的流函数
- 判断某不可压平面流动是否为无旋流动

流网1

流 网 由等势线簇和流线簇构成的网状结构

等势函数线 ⟹ $\phi=\text{const}$

⟹ $udx+vdy=0$ ⟹ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\phi=-\frac{u}{v}$

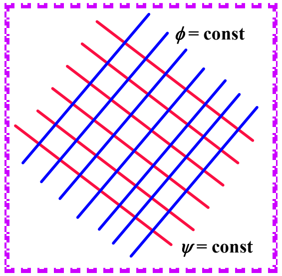
流 线 ⟹ $\psi=\text{const}$

⟹ $-vdx+udy=0$ ⟹ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\psi=\frac{v}{u}$

流网1

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi}=-\frac{u}{v}\cdot\frac{v}{u}=-1$$

流线与等势函数线相互垂直



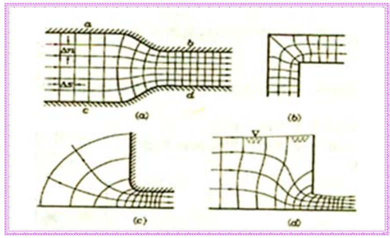
采用相等的增量$\Delta\phi$、$\Delta\psi$绘制等势线和流线，则等势线或流线较密的地方对应的速度如何？

流网2

采用相等的增量$\Delta\phi$，$\Delta\psi$，则等势线或流线较密的地方，对应的速度如何？

$$V=\frac{\partial\psi}{\partial n}$$

$$V=\frac{\partial\phi}{\partial s}$$



流线和等势线越密的地方，对应的流场速度越大

不可压缩平面势流流函数和势函数关系

柯西—黎曼条件

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$v=\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

共轭调和函数

复势函数 $\Rightarrow$ $F(z)=\phi(x,y)+i\psi(x,y)$

已知速度可以求解流函数、势函数；已知流函数可求得速度、势函数；已知势函数可求得速度、流函数

流函数、速度势函数的求解1

已知一速度场$u=x-4y$，$v=-4x-y$，该速度可否表示不可压缩流体平面流动？若可以求流函数。流动是否为势流？若是，求速度势函数。

解：(1) 判断是否为不可压缩流体平面流动

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

由 $\frac{\partial u}{\partial x}=1$　$\frac{\partial v}{\partial y}=-1$ $\Rightarrow$ 不可压缩流体

流函数、速度势函数的求解2

(2) 流函数的求解

$$u = x - 4y = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -4x - y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad \psi = \int \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \psi = 2x^2 + xy - 2y^2$$

不能采用对 u 和 v 同时积分的方法求流函数

流函数、速度势函数的求解3

(3) 判断流动是否为势流

- 由速度场求旋度，看其是否为零

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-4x - y) - \frac{\partial}{\partial y}(x - 4y) = 0$$

- 流函数是否满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2x^2 + xy - 2y^2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(2x^2 + xy - 2y^2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

流函数、速度势函数的求解4

(4) 速度势函数的求解

$$u = x - 4y = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v = -4x - y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \frac{1}{2}x^2 - 4xy - \frac{1}{2}y^2$$

势流伯努利方程的应用1

设气体二元不可压定常势流，势函数为 $\phi = x^2 - y^2$。求：(1) (2，1.5)处速度；(2) (2，1.5)处压强。设驻点压强 p_0 = 101kPa，ρ = 1.19 kg/m³。

解：(1) 速度

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x = 2 \times 2 = \underline{\underline{4}} \quad (\text{m/s})$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -2y = -2 \times 1.5 = \underline{\underline{-3}} \quad (\text{m/s})$$

势流伯努利方程的应用2

(2) 压强

对驻点和 (2 , 1.5) 点列势流伯努利方程

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho V^2$$

$$\Rightarrow \quad p = p_0 - \frac{1}{2}\rho V^2$$

$$= 1.01\times10^5 - \frac{1}{2}\times1.19\times(3^2+4^2)$$

$$= \underline{1.00\times10^5} \ \ \text{(Pa)}$$

小结1

流函数和速度势函数存在条件

- 流函数 ⇒ 平面不可压缩
- 速度势函数 ⇒ 势流

满足拉普拉斯方程的条件

- 流函数 ⇒ 势流
- 速度势函数 ⇒ 不可压缩

小结2

柯西—黎曼条件

$$\Rightarrow \quad u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

共轭调和函数

复势函数 ⇒ $F(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$

8.3 基本平面势流及其叠加

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

拉普拉斯方程解的可叠加性

设ϕ_1 (ψ_1)， ϕ_2 (ψ_2) 是拉普拉斯方程的解，则

$$\phi = K_1\phi_1 + K_2\phi_2 + \cdots$$
$$\psi = K_1\psi_1 + K_2\psi_2 + \cdots$$

也是拉普拉斯方程的解

- 由已知不可压势流叠加获得新的势流

势流叠加原理

流 线

任意一点处速度沿流线切线方向，速度处处与流线相切

理想流体流动

平面流动，固体壁面任意一点处速度与壁面相切

⇒ 二者要求相同，任意一条流线可用无限薄固体壁面代替

若几种势流叠加后的一条流线和固体壁面相同（相似），则绕该物体流动的势函数和流函数就是叠加后的势函数和流函数。

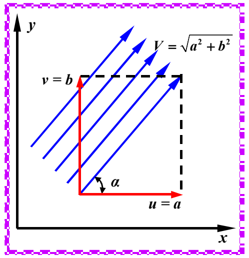
均直直线流动1 uniform flow

速度势函数 $\phi = ax + by$

速度分布 $u = a\ ,\ v = b$

⇒ $U = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\alpha = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$



速度大小、方向均不变

均匀直线流动 $\phi = U(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$

均直直线流动2

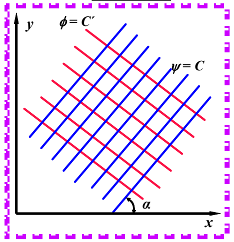
流函数

$$\psi = \int \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + f(x)$$

⇒

$$\psi = -bx + ay = U(-x\sin\alpha + y\cos\alpha)$$

流网



x 方向均直流 ⇒ $u = U\ ,\ v = 0$

$\phi = Ux = Ur\cos\theta$

$\psi = Uy = Ur\sin\theta$

压强分布 ⇒ 由伯努利方程，压强也处处相同

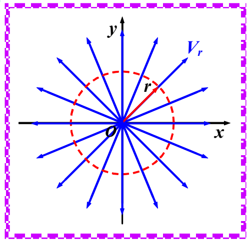
点源和点汇1

速度分布 ⇒ $V_r = \dfrac{m}{2\pi r},\quad V_\theta = 0$

⇒ $V_{r(r\to\infty)} = 0,\quad V_{r(r=0)} \to \infty$

只有径向速度，点源 (汇) 处速度无穷大，方向不定

满足连续方程和势流条件



点源 / 汇
位于原点

速度势函数

$$V_r = \frac{m}{2\pi r} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \Rightarrow \phi = \frac{m}{2\pi} \ln r$$

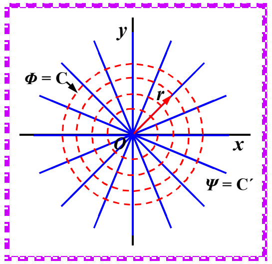
点源和点汇2

流函数

流网

$$\psi = \int \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + f(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \psi = \frac{m}{2\pi}\theta$$



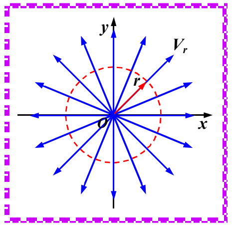
流线为过点源 (汇) 的径向射线，等势线为圆心在点源 (汇) 的同心圆族

点源和点汇3

m 的物理意义 ⇒ 点源 (点汇) 强度

$$\Rightarrow \quad m = Q$$

通过任一包围点源 (汇) 的封闭周线的流体体积流量



$m = +Q$ ⇒ 点源 $m = -Q$ ⇒ 点汇

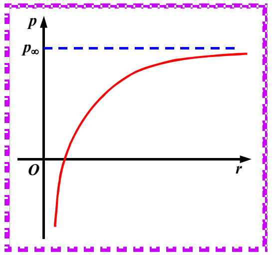
点源和点汇4

压强分布

- 伯努利方程 $p_{(r\to\infty)} = p_\infty$

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = C$$

$$\Rightarrow \quad p = p_\infty - \frac{\rho Q^2}{8\pi^2 r^2}$$



点源 (汇) 所在位置速度无穷大压强负无穷大，物理上不存在 ⇒ 奇点

点源和点汇5

速度势函数	流函数	速度分布
$\phi = \pm\frac{Q}{2\pi}\ln r$	$\psi = \pm\frac{Q}{2\pi}\theta$	$V_r = \pm\frac{Q}{2\pi r}$
等势线	圆心在点源 (汇) 的同心圆族	
流线	过点源 (汇) 的径向射线	

点源 (汇) 所在处速度无穷大，方向不定，压强负无穷大，实际中不存在，奇点

点源和点汇6—直角坐标系

势函数

$$\phi=\pm\frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

流函数

$$\psi=\pm\frac{Q}{2\pi}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

速　度

$$u=\pm\frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v=\pm\frac{Q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

点涡1 line irrotational vortex at the origin

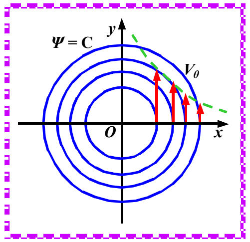
速度分布

$$V_{\theta(r\to\infty)}=0$$
$$V_{\theta(r=0)}\to\infty$$

$$V_r=0$$
$$V_\theta=\frac{K}{r}$$

只有切向速度，点涡处速度无穷大，方向不定

点涡位于原点



速度势函数

$$V_\theta=\frac{K}{r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\quad\Rightarrow\quad\phi=K\theta$$

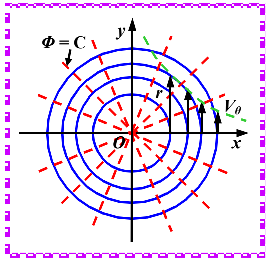
点涡2

流函数

流网

$$\psi=\int\frac{\partial\psi}{\partial r}dr+f(\theta)$$

$$\Rightarrow\quad\psi=-K\ln r$$



流线为圆心在点涡所在位置的同心圆族，等势线为过点涡的径向射线

点涡3

速度环量

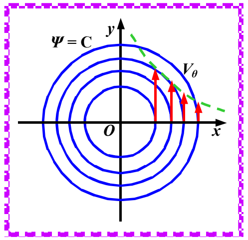
沿任一包围点涡的封闭周线上的速度环量 (*circulation*)

$$\Gamma=2\pi K$$

点涡强度

$$K=\frac{\Gamma}{2\pi}\quad\Rightarrow\quad\text{逆时针}$$

$$K=-\frac{\Gamma}{2\pi}\quad\Rightarrow\quad\text{顺时针}$$



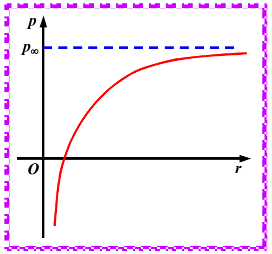
点涡4

压强分布

伯努利方程 $p_{(r\to\infty)} = p_\infty$

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = C$$

$$\Rightarrow \quad p = p_\infty - \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2 r^2}$$



点涡所在处速度无穷大压强负无穷大，物理上不存在 ⇒ 奇点

点涡5

速度势函数	流函数	速度分布
$\phi = \pm\frac{\Gamma}{2\pi}\theta$	$\psi = \mp\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$	$V_\theta = \pm\frac{\Gamma}{2\pi r}$
等势线	过点涡的径向射线	
流线	圆心在点涡的同心圆族	

点涡所在处速度无穷大，方向不定，压强负无穷大，实际中不存在，奇点

点涡5—直角坐标系

势函数

$$\phi = \pm\frac{\Gamma}{2\pi}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

流函数

$$\psi = \mp\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

速　度

$$u = \mp\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$v = \pm\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

点源与点汇的合成1

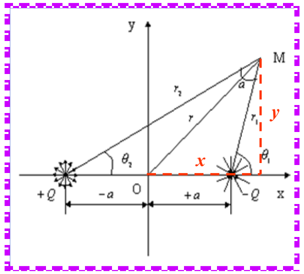
点源与点汇的合成

流函数

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1)$$

速度势函数

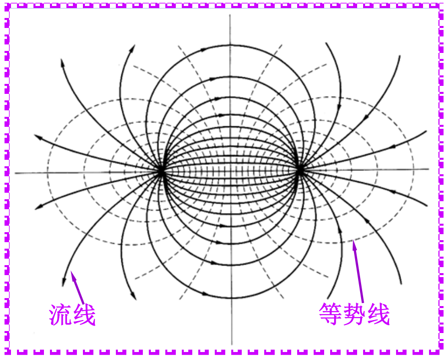
$$\phi = \frac{Q}{2\pi}(\ln r_2 - \ln r_1)$$



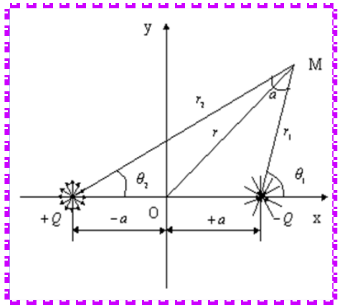
$$r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}\ ,\ r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

点源与点汇的合成2

点源与点汇的合成 → 流网



偶极流1 *Doublet*



$\mu = 2aQ$

强度为 Q的点源和点汇间距$2a \to 0$，保持$2aQ = C$，得位于原点强度为 μ的偶极流

偶极流2

速度势函数与流函数

通过求极限及应用柯西-黎曼条件可得：

$$\phi = \frac{\mu}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\mu}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\psi = -\frac{\mu}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\mu}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r}$$

偶极流正方向 → 由汇指向源

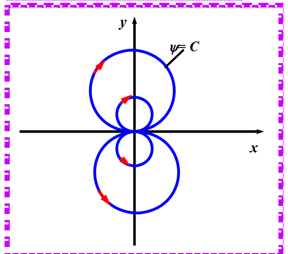
偶极流3

流线方程$\psi = C$

$$\psi = -\frac{\mu}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2} = C$$

$$x^2 + \left(y + \frac{\mu}{4\pi C}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{4\pi C}\right)^2$$

圆心 $\left(0\ ,\ -\frac{\mu}{4\pi C}\right)$ 半径 $\left|\frac{\mu}{4\pi C}\right|$



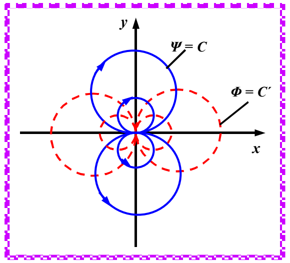
- 流线均在原点与 x 轴相切
- 流体由偶极流中心沿负 x 轴流出，经不同半径的圆周又流入偶极流中心

偶极流4

等势线方程 $\phi = C'$

$$\phi = \frac{\mu}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} = C'$$

$$\left(x-\frac{\mu}{4\pi C'}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\mu}{4\pi C'}\right)^2$$



等势线是一族圆心在$\left(\frac{\mu}{4\pi C'},0\right)$，半径为$\left|\frac{\mu}{4\pi C'}\right|$的圆族

偶极流5

速度分布

$$\phi = \frac{\mu}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\mu}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}$$

直角坐标系

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\mu}{2\pi}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\mu}{2\pi}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

柱坐标系

$$V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}\right) = -\frac{\mu}{2\pi r^2}\cos\theta$$

$$V_\theta = \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} = \frac{\partial}{r\partial\theta}\left(\frac{\mu}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}\right) = -\frac{\mu}{2\pi r^2}\sin\theta$$

$$\Rightarrow V = \frac{\mu}{2\pi r^2}$$

$V_{(r\to\infty)} = 0$

$V_{(r=0)} \to \infty$

原点速度无穷大
方向不定，为奇点

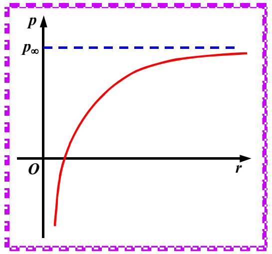
偶极流6

压强分布

伯努利方程 $p_{(r\to\infty)} = p_\infty$

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = C$$

$$\Rightarrow p = p_\infty - \frac{\mu^2}{8\pi^2 r^4}$$



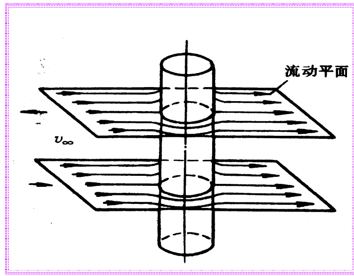
原点速度无穷大，方向不定，压强负无穷大，物理上不存在 ⇒ 奇点

8.4 圆柱绕流

理想不可压缩流体均匀流动绕流一个无限长圆柱体 – 平面流动

圆柱体无环量绕流

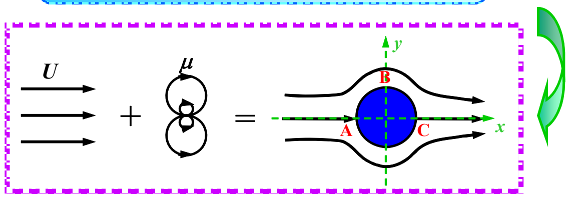
圆柱体有环量绕流



绕圆柱的无环量流动1

- 均匀来流绕流半径为 R，圆心位于原点的圆柱

沿 x 正向的均直直线流动与位于原点的指向 x 负方向的偶极流的合成



ϕ： $Ur\cos\theta$ $\quad \dfrac{\mu}{2\pi r}\cos\theta$

ψ： $Ur\sin\theta$ $\quad -\dfrac{\mu}{2\pi r}\sin\theta$

绕圆柱的无环量流动2

流函数与速度势函数

$$\phi = Ur\cos\theta + \frac{\mu}{2\pi r}\cos\theta$$

$$\psi = Ur\sin\theta - \frac{\mu}{2\pi r}\sin\theta$$

判断是否为圆柱绕流

- 绕流物体的型线是否是一条流线？
- 与实际绕圆柱的边界条件是否相同？

流线方程 $\Rightarrow$ $Ur\sin\theta - \dfrac{\mu}{2\pi r}\sin\theta = C$

绕圆柱的无环量流动3

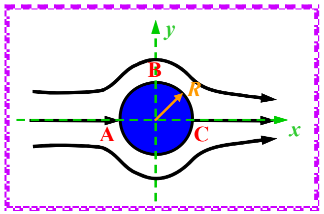
零流线 $\Rightarrow$ $\psi = 0$ $\quad$ $Ur\sin\theta - \dfrac{\mu}{2\pi r}\sin\theta = C$

可看作固体边界

$$\left(Ur - \frac{\mu}{2\pi r}\right)\sin\theta = 0$$

$\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$

$$r = \left(\frac{\mu}{2\pi U}\right)^{\frac{1}{2}} = R$$



- 由 x 轴和圆心在原点半径为 R 的圆组成

该流线与无限薄物体壁面等效

绕圆柱的无环量流动4

绕半径 R 的圆柱圆柱流动势函数流函数

$$r = \left(\frac{\mu}{2\pi U}\right)^{\frac{1}{2}} = R \Rightarrow \mu = 2\pi UR^2 \Rightarrow \begin{cases}\phi = Ur\cos\theta + \dfrac{\mu}{2\pi r}\cos\theta \\ \psi = Ur\sin\theta - \dfrac{\mu}{2\pi r}\sin\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \phi = U\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta$$

$$\psi = U\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta$$

绕圆柱的无环量流动4

速度分布

$$\phi = U\left(r+\frac{R^2}{r}\right)\cos\theta$$

$$V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = U\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$V_\theta = \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} = -U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

无穷远处 ⇒ $V_r = U\cos\theta$ ， $V_\theta = -U\sin\theta$

⇒ $V = U$ 圆柱对无穷远处流场无影响

绕圆柱的无环量流动5

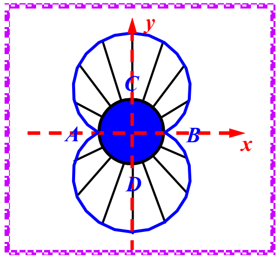
圆柱表面 $r = R$

⇒ $V_r = 0$
$V_\theta = -2U\sin\theta$

A点、B点 $\theta = 0,\ \pi$

⇒ **驻点**

C点、D点 $\theta = \pm\pi/2$ ⇒ **舷点**

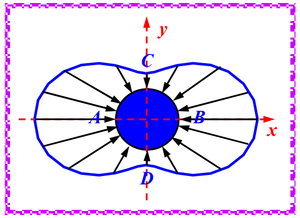


速度分布相对于 x、y 轴对称

绕圆柱的无环量流动6

柱面压强分布 $p+\frac{1}{2}\rho V^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2$

⇒ $p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho\left(4U^2\sin^2\theta\right)$



速度分布，压强分布相对于 x 轴和 y 轴对称

绕圆柱的无环量流动7

压强系数

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho\left(4U^2\sin^2\theta\right)$$

⇒ $\bar{p} = \dfrac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1-4\sin^2\theta$

绕流物体阻力和升力

阻力 作用在物体上表面力合力在来流方向分量

升力 作用在物体上表面力合力在与来流垂直方向分量

绕圆柱的无环量流动8

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho\left(4U^2 \sin^2\theta\right)$$

阻力

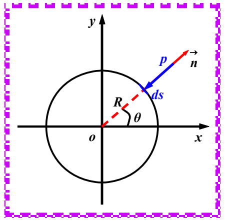
$$F_x = -\int_S p ds \cos\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} pR\cos\theta d\theta = 0$$

升力

$$F_y = -\int_S p ds \sin\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} pR\sin\theta d\theta = 0$$



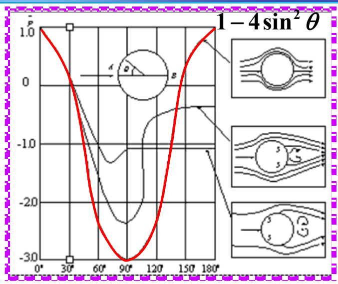
绕圆柱的无环量流动9

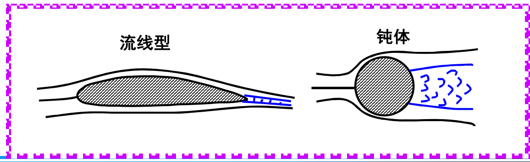
达朗贝尔悖论 ⇒ 理想不可压流动中，任一封闭物体的绕流，其阻力（*drag*）都是零

导致达朗贝尔悖论的原因是没有考虑真实流体的粘性

- 在粘性流体中运动的物体会承受摩擦阻力和压差阻力（形状阻力）

绕圆柱的无环量流动10





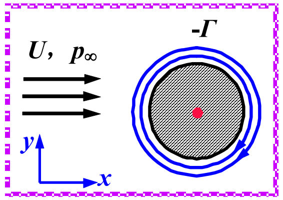
绕圆柱的有环量流动1

绕圆柱无环量流动与顺时针点涡（圆心）的合成

流函数与速度势函数

$$\phi = U\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

$$\psi = U\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$



- 圆柱面仍然是一条流线

绕圆柱的有环量流动2

速度分布

$$V_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}=U\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$V_\theta=\frac{\partial\phi}{r\partial\theta}=-U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta-\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

无穷远处 ⟹ $V=U$ 圆柱对无穷远处流场无影响

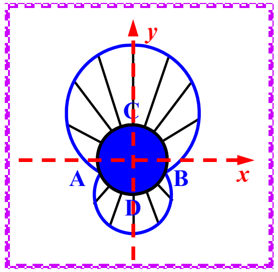
⟹ $V_r=U\ \cos\theta\quad,\quad V_\theta=-U\sin\theta$

绕圆柱的有环量流动3

圆柱表面 ⟹ $V_r=0$

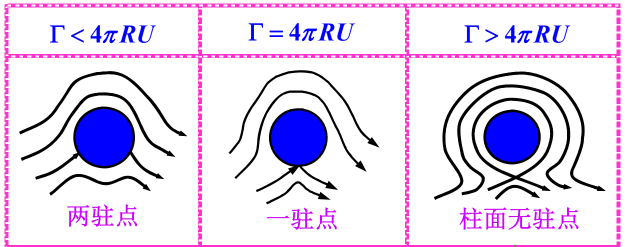
$$V_\theta=-2U\sin\theta-\frac{\Gamma}{2\pi R}$$

速度分布相对于 y 轴对称，而相对于 x 轴不对称，因此必然导致压强分布相对于 x 轴不对称



绕圆柱的有环量流动4

驻点位置 ⟹ $\sin\theta_S=-\frac{\Gamma}{4\pi RU}$



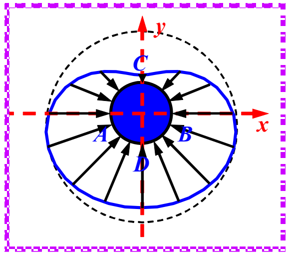
在闭合流线和圆柱面之间的内部区域自成闭合环流，但流线不是圆形

绕圆柱的有环量流动5

柱面压强分布

$$p=p_\infty+\frac{1}{2}\rho\left[U^2-\left(2U\sin\theta+\frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2\right]$$

环量的存在使圆柱上下表面压强分布不对称，从而产生垂直于来流方向的合力

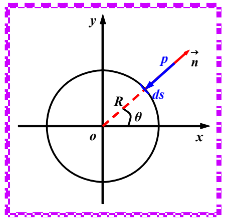


绕圆柱的无环量流动6

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho\left[U^2 - \left(2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2\right]$$

阻力

$$F_x = -\int_S pds\cos\theta$$
$$= -\int_0^{2\pi} pR\cos\theta d\theta = 0$$



- 绕圆柱有环量流动，圆柱收到阻力仍为零

绕圆柱的有环量流动7

升力：库塔-儒可夫斯基升力定理

圆柱在与来流垂直方向，即 y 方向所受的力

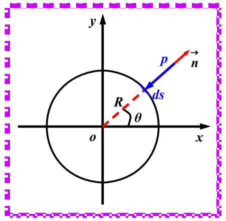
$$F_y = -\int_S pds\sin\theta = -\int_0^{2\pi} pR\sin\theta d\theta$$

$$F_y = \rho U\Gamma$$

库塔一儒可夫斯基升力定理

W. M. Kutta, 1902

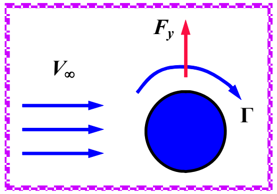
N. Joukowski, 1906



绕圆柱的有环量流动8

升力的方向

来流速度矢量方向逆环流方向旋转90^{o}



来流速度

来流速度是相对与绕流物体的速度

- 如若均匀来流绕过静止物体，即为来流速度的大小和方向
- 如若物体运动，流体静止。则来流速度与物体运动速度大小相同，方向相反

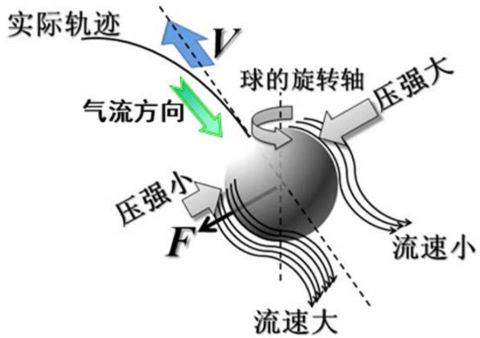
马格努克效应

马格努斯效应(*Magnus effect*)

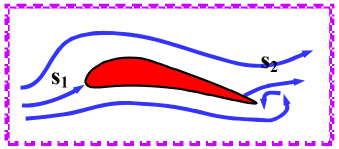
旋转物体的旋转角速度矢量物体飞行速度矢量不重合时，在与旋转角速度矢量和平动速度矢量组成的平面相垂直的方向上将产生一个横向力。在这个横向力的作用下物体飞行轨迹发生偏转的现象

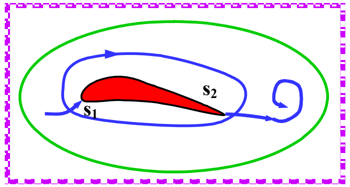
马格努克效应1

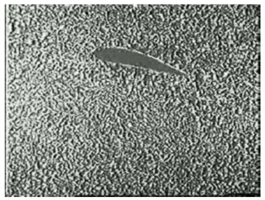
马格努克效应2



马格努克效应3







作业

作业：P.327～328

- 8.3
- 8.12
- 8.14
- 8.18
- 8.21

上机作业题1

通过编写和调试程序及应用画图软件画出绕圆柱无环量和有环量流动流线分布图

- 来流速度，圆柱直径以及环量值自己确定，通过取不同值，各给出5幅以上清晰显示流动特点的流线分布图
- 提交报告。报告包括计算公式、程序框图、程序和流线分布图

小结1

势流概念

平面势流概念

平面势流的伯努利方程

适用条件，物理意义，应用

小结2

流函数和速度势函数

- 流函数、速度势函数存在的条件
- 流函数、速度势函数满足拉普拉斯方程的条件
- 等流函数线，等势函数线，流网
- 流函数与流量的关系

小结3

基本平面势流

- 流函数、速度势函数，速度场，压强场流线，等势函数线，A 的物理意义

绕圆柱的流动

- 简单势流叠加，速度场，压强场，库塔—儒可夫斯基升力定理

小结5

平面势流伯努利方程

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=C \qquad p+\frac{1}{2}\rho V^2=C'$$

柯西—黎曼条件

$$u=\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$
$$v=\frac{\partial \Phi}{\partial y}=-\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

小结6

库塔—儒可夫斯基定理

$F_y=\rho V_\infty \Gamma$ 注意方向判断

计算

- 伯努利方程、动量方程的求解
- 流函数、速度势函数的求解
- 如何用简单势流叠加成复杂势流流场

复习1 4/13/2022

柯西黎曼条件

$$u=\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad V_r=\frac{\partial \Phi}{\partial r}=\frac{\partial \Psi}{r\partial \theta}$$
$$v=\frac{\partial \Phi}{\partial y}=-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad V_\theta=\frac{\partial \Phi}{r\partial \theta}=-\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

- 流函数、速度势函数存在条件

  流函数：平面不可压缩； 速度势函数：无旋

- 流函数、速度势函数满足拉普拉斯方程的条件

  流函数：无旋； 速度势函数：不可压缩

- 流网特点：流线、等势线处处正交

复习2 4/13/2022

均直直线流动 $\Phi=ax+by$ $\Psi=-bx+ay$ $u=a\ ,\ v=b$

- 速度大小方向，压强大小都不变
- 流线、等势线均为直线

点源（汇） $\Phi=\pm\frac{Q}{2\pi}\ln r$ $\Psi=\pm\frac{Q}{2\pi}\theta$ $V_r=\pm\frac{Q}{2\pi r}$

- 点源点汇所在位置速度无穷大，压强负无穷大，奇点
- 流线为过点源 (汇) 的径向射线、等势线为圆心在点源 (汇) 的同心圆族