第 7 章（之 4）
第 34 次作业

教学内容：§7.4.1 广义积分问题的产生　　7.4.2 无穷区间上的广义积分

1. 填空题：

***（1）$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^3}\mathrm{d}x=$__________.

解：$\dfrac{\pi}{3}$。

***（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|}\mathrm{d}x=$__________.

解：2。

2. 选择题：

***（1）若广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=A$，则下列结论中错误的是（　）

(A) $\int_0^{-\infty}f(-x)\mathrm{d}x$ 必收敛，且 $\int_0^{-\infty}f(-x)\mathrm{d}x=-A$ ；

(B) $\int_1^{+\infty}\dfrac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$ 必收敛，且 $\int_1^{+\infty}\dfrac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=A$；

(C) 对于任意实数 a，广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也一定收敛；

(D) 对于任意实数 a，广义积分 $\int_{a^2}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也一定收敛。

答案 (C)

**（2）若 $f(x)$ 是偶函数，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=A$，则下列结论中错误的是（　）

(A) $\int_{-\infty}^{0}f(-x)\mathrm{d}x=-\dfrac{A}{2}$；　　(B) $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{A}{2}$；

(C) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(1-x)\mathrm{d}x=A$；　　(D) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(1+x)\mathrm{d}x=A$.

答案 (A)

**3. 求 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)x^2}$.

解：原式 $=\int_1^{+\infty}[\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2+1}]\,\mathrm{d}x=[-\dfrac{1}{x}-\arctan x]_1^{+\infty}=1-\dfrac{\pi}{4}$.

**4 . 求 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$.

解：原式 $=\int_1^{+\infty}[\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}]\mathrm{d}x=\ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_1^{+\infty}=\dfrac{1}{2}\ln 2$.

**5 求 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

解：原式 $\xlongequal{x=\tan t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t=1$

**6. 求 $\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

令 $x^2=t,\qquad$ 原式 $=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}te^{-t}dt$

$=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}te^{-t}dt=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(-te^{-t}-e^{-t})_0^b=\frac{1}{2}$.

***7. 求 $\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

解：令 $\sqrt{x}=t$

原式 $=2\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=2\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}te^{-t}dt=2\lim_{b\to+\infty}(-te^{-t}-e^{-t})\Big|_0^b$

$=2\lim_{b\to+\infty}\left[-be^{-b}-e^{-b}+1\right]=2$.

***8. 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

解：令 $\arctan x=t$, 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\sec^3 t}\sec^2 t\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,d(\sin t)=t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=\frac{\pi}{2}+\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\pi}{2}-1$.

***9. 计算广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.

解：令 $x=\tan t$,

原式 $=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\cot^2 t\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}t(\csc^2 t-1)dt$

$=-(t\cdot\cot t-\ln\sin t+\frac{t^2}{2})\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3}{32}\pi^2$.

***10. 求$\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

解：$I=\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}(\sin 2x)$

$$=\frac{1}{2}[e^{-x}\sin 2x\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin 2x\mathrm{d}x]$$

$$=-\frac{1}{4}\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}(\cos 2x)=-\frac{1}{4}[e^{-x}\cos 2x\Big|_{0}^{+\infty}+I]=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}I$$

$\therefore\quad I=\frac{1}{5}$.

***11. 已知广义积分$\int_{a}^{+\infty}\frac{ax+b}{x^2-2ax+1+a^2}\mathrm{d}x$收敛于$\pi$，求$a,b$的值.

解：$\int_{a}^{+\infty}\frac{ax+b}{x^2-2ax+1+a^2}\mathrm{d}x\overset{x=a+t}{=}\int_{0}^{+\infty}\frac{at+a^2+b}{t^2+1}dt$

$$=(a^2+b)\frac{\pi}{2}+a\int_{0}^{+\infty}\frac{t}{t^2+1}dt,$$

可知此广义积分收敛的充要条件是$a=0$，又由于它收敛于π，所以有 $b=2$.

**12. 试证无界区域$D=\left\{(x,y)\middle|x\ge 1,0\le y\le\frac{1}{x}\right\}$的面积为无穷大，而该区域绕$x$轴旋转生成的旋转体体积为有限.

证：（1）依题意，该“面积”即为：$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}dx$， 而

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_{1}^{b}=+\infty\cdot$$

（2）该体积即为：$\pi\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$，而

$$\pi\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\pi\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}d(-\frac{1}{x})=\pi\lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{x})\Big|_{1}^{b}=\pi\lim_{b\to+\infty}(1-\frac{1}{b})=\pi.$$

第 7 章（之 5）
第 35 次作业

教学内容：§7.4.3 无界函数的广义积分

1．填空题（下列广义积分如收敛，请填广义积分值；否则填“发散”两字）：

**（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x=$__________.

解： 2。

***（2）$\int_0^{2} \dfrac{1+t}{\sqrt{4-t^2}}\mathrm{d}t=$__________.

解：$2+\dfrac{\pi}{2}$。

2.选择题：

**（1） $f(x)$ 在 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 上连续， $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，则 （ ）

(A) 广义积分 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 可定义为 $\lim\limits_{t\to0^+}[\int_{-1}^{-t} f(x)\mathrm{d}x+\int_{t}^{1} f(x)\mathrm{d}x]$；

(B) 广义积分 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 发散的必要条件是 $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 同时发散；

(C) $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 都发散，不能推导出 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 也一定发散；

(D) $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛的充要条件是 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

答案（D）

**（2）下列各式中，是广义积分的是 （ ）

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})\mathrm{d}x$； (B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$；(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$； (D) $\int_{-1}^{1}\exp(-\dfrac{1}{x^2})\mathrm{d}x$.

答案 (C)

***（3）下列广义积分收敛的是 （ ）

(A) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^k x}$（$k>0$）； (B) $\int_e^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$； (C) $\int_1^{e}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$； (D) $\int_1^{e}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$.

答案 (D)

***3. $\int_1^3 \dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2-4|}}$.

解：原式 $=\int_1^2\dfrac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}+\int_2^3\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}=-\sqrt{4-x^2}\Big|_1^2+\sqrt{x^2-4}\Big|_2^3=\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

***4. 计算广义积分 $\int_0^1\dfrac{1-2\ln x}{\sqrt{x}}dx$ 的值.

解：$\int_0^1\dfrac{1-2\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1(x^{-\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}\ln x)dx$

$$=2x^{\frac{1}{2}}\Big|_{0^+}^{1}-2\cdot[2x^{\frac{1}{2}}\ln x\Big|_{0^+}^{1}-\int_0^1 2x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}dx]=2-2(0-4x^{\frac{1}{2}}\Big|_{0^+}^{1})=10\cdot$$

***5. 计算广义积分 $\int_0^1 \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解：令 $\arcsin x=t$，原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t dt=-(t\cos t-\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

**6. 求 $\int_0^1 \ln(1-x^2)\,\mathrm{d}x$.

解：原式 $=-\int_0^1 \ln(1-x^2)d(1-x)$

$$=-\left[(1-x)\ln(1-x^2)\Big|_0^{1^+}+\int_0^1\frac{2x(1-x)dx}{1-x^2}\right]$$

$$=-2\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=-2(x-\ln(1+x))\Big|_0^1=-2(1-\ln 2)$$

$$=2\ln 2-2.$$

***7. 求 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^4}}$.

解：由于 $x\to 0^+$ 时分母趋于 0，故该积分是混合型广义积分，记

$$I_1=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^4}},\quad I_2=\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^4}},$$

令 $\sqrt[3]{x}=t$，则 $I_1=\int_0^1\frac{3t^2dt}{t^2+t^4}=\int_0^1\frac{3dt}{1+t^2}=3\arctan t\Big|_0^1=\frac{3\pi}{4}$

类似地，有 $I_2=3\arctan t\Big|_1^{+\infty}=\frac{3\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$，

$$\therefore\quad I=I_1+I_2=\frac{3\pi}{2}.$$

**8. 已知广义积分 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$，在 $\alpha>0$ 时收敛，证明

（1）$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$; (2)$\Gamma(1)=1$.

注：在工程技术中常会遇到这个广义积分，它被称为 Γ 函数。

解：（1）$\Gamma(\alpha)=\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}e^{-t}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}t^{\alpha}e^{-t}dt=0+\frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1)$

$\therefore\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$

（2）$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=1$.

第 7 章（之 6）
第 36 次作业 （商学院）

教学内容： §4.7.3 导数在经济学中的应用 §7.5.4 定积分在经济中的应用

*1. 已知某商品的需求函数为

$$Q = Q_0 \mathrm{e}^{-\lambda P},$$

其中 Q_0 为市场饱和需求量。当价格 $P = 12$（元 / 件）时，需求量为 $\frac{Q_0}{5}$，现在已知这种商品的进货价为 6（元 / 件），试问应如何定价可使利润最大？

解 因为当 $P = 12$ 时，有 $Q = \frac{Q_0}{5}$，可得 $\lambda = \frac{\ln 5}{12}$，即

$$Q = Q_0 \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{12}P}。$$

所以有目标函数

$$L = R - C = PQ - 6Q = (P-6)Q_0 \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{12}P},$$

其导数为

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}P} = \left(1 + \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{\ln 5}{12}P\right) Q_0 \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{12}P}.$$

令 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}P} = 0$，可得唯一驻点

$$P = \frac{12}{\ln 5}(1 + \frac{1}{2}\ln 5) = 6 + \frac{12}{\ln 5}.$$

当 $0 < P < 6 + \frac{12}{\ln 5}$ 时，有 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}P} > 0$；

而当 $P > 6 + \frac{12}{\ln 5}$ 时，有 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}P} < 0$，

可知 $P = 6 + \frac{12}{\ln 5}$ 是目标函数的最大值点，即当定价为 $P = 6 + \frac{12}{\ln 5}$（元 / 件）时，可望有最大利润.

**2.（1）某公司生产 x 件产品（假定全部售出），每件产品售价是 $(50 - 0.02x)$ 元，总共消耗成本 $(1000 + 10x)$ 元，为了获得最大利润，公司应安排产品的生产数量是多少？

（2）在问题（1）中，如果国家对该公司生产的每件产品增税 4 元，为了获得最大利润，该公司要交税多少？

解（1）利润函数

$$R(x) = x(50 - 0.02x) - (1000 + 10x)$$
$$= -0.02x^2 + 40x - 1000,$$

令 $R'(x) = -0.04x + 40 = 0$，得唯一驻点 $x = 1000$。

由于目标函数可微，驻点唯一，所以生产产品 1000 件时，获得最大利润。

（2）利润 $R(x) = -0.02x^2 + 40x - 1000 - 4x = -0.02x^2 + 36x - 1000$，

令 $R'(x) = 0$，得唯一驻点 $x = 900$，

由于目标函数可微，驻点唯一，所以生产产品 900 件时，获得最大利润。

公司应交税 $900\times4=3600$ 元。

***3．某种电炊具的需求函数是 $p(q)=35-0.05\sqrt{q}$，如果需要 250000 件这种炊具，问涨价将导致收入的增加还是减少？

解 容易明白，在计算出需求价格弹性η后，若η>1，则涨价将引起收入减少，而在η<1 时涨价可使收入增加，现在有

$$p'(q)\big|_{q=250000}=-\frac{0.05}{2\sqrt{q}}\bigg|_{q=250000}=-\frac{0.05}{2\sqrt{250000}}=-\frac{0.05}{1000}=0.00005$$

当 q =250000 时，$p=35-0.05\sqrt{250000}=10$，由式（4-49）

$$\eta=-\frac{p}{qp'}=\frac{-10}{(250000)(-0.00005)}=\frac{2}{2.5}<1$$

故而涨价会引起收入增加。

***4. 设某商品的需求函数为 $Q=1000-10P$，

（1）当价格为 $P=20$ 时，试求价格上涨 8%对销售收入的影响幅度；

（2）当价格为 $P=60$ 时，试求价格上涨 8%对销售收入的影响幅度.

解 需求对价格的弹性为

$$\eta_{QP}=-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\cdot\frac{P}{Q}=\frac{10P}{1000-10P},$$

$$\eta_{QP}\Big|_{P=20}=\frac{1}{4}<1,$$

可知 $P=20$ 时，涨价会使销售收入增加。

销售收入对价格的弹性为

$$\eta_{RP}=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}\cdot\frac{P}{R}=\frac{1000-20P}{1000-10P},$$

$$\eta_{RP}\Big|_{P=20}=\frac{3}{4},$$

可知 $P=20$ 时，涨价 8%对销售收入产生的影响为

$$\frac{3}{4}\times8\%=6\%,$$

即会使销售收入增加 6%。

类似地有 $$\eta_{QP}\Big|_{P=60}=\frac{3}{2}>1$$

可知 $P=60$ 时，涨价会使销售收入减少。由

$$\eta_{RP}\Big|_{P=60}=-\frac{1}{2},\ \left(-\frac{1}{2}\right)\times8\%=-4\%$$

可知，这时涨价 8%会使销售收入减少 4%。

**5．某工厂日产产品 q（吨）的总成本是 $C(q)$ 元，已知边际成本为 $C'(q)=5+\dfrac{25}{\sqrt{q}}$，求日产量从 64（吨）增加到 100（吨）时，增加的总成本及其时的平均成本.

解 日产量从 64（吨）增加到 100（吨）时，增加的总成本为

$$C(q)=\int_{64}^{100}(5+\frac{25}{\sqrt{q}})\,\mathrm{d}q=(5q+50\sqrt{q})\Big|_{64}^{100}=280$$ （元）；

平均成本为

$$\overline{C(q)}=\frac{C(100)-C(64)}{100-64}=\frac{\int_{64}^{100}(5+\frac{25}{\sqrt{q}})\,\mathrm{d}q}{100-64}=\frac{70}{9}$$ （元）.

**6．已知某产品的边际成本 $C'(x)=0.006x^2-1.5x+8$（元），固定成本 $C(0)=150$ 万元，其中 x 为产品的件数，求生产 2000 件这种产品的总成本为多少万元？

解 生产 2000 件这种产品的总成本为

$$C(2000)=\int_0^{2000}(0.006x^2-1.5x+8)\,\mathrm{d}x+C(0)$$

$$=(0.002x^3-\frac{1.5}{2}x^2+8x)\Big|_0^{2000}+1500\,000$$

$$=14516\ 000$$ （元）$=1451.6$（万元）.

***7．某机器最初成本（购进价）为 A 元，在任何时刻 t，机器产生效益的速率为

$$v(t)=\frac{A}{28}e^{-\frac{t}{336}}$$ （元 / 天）

而在时刻 t 转售出去的售价为 $r(t)=\frac{3A}{4}e^{-\frac{t}{672}}$（元），试问在何时售出可望总收益最大？

解 设在时刻 t 售出时，可望总收益 R 最大，则有

$$R=\int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t+r(t)-A=\int_0^t\frac{A}{28}e^{-\frac{t}{336}}\,\mathrm{d}t+\frac{3A}{4}e^{-\frac{t}{672}}-A,$$

令 $$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\frac{A}{28}e^{-\frac{t}{336}}-\frac{3A}{4}\cdot\frac{1}{672}e^{-\frac{t}{672}}=0,$$

则得 $t=672\ln 32\approx 2328$（天）.

**8．在 8 年内，某项投资的回报固定为每年 5 000 元，设利率为年率 10% 的连续复利，求此收入流的现值。

解 现金流 $f(t)=5000$， 年利率 $r=0.1$，此收入流的现值为

$$P=\int_0^8 e^{-0.1t}\times 5000\,\mathrm{d}t=-5\times 10^4 e^{-0.1t}\Big|_0^8$$

$$=5\times 10^4(1-e^{-0.8})=27533.44821$$ （元）.

***9．一信托基金始于 8 年后，期限为 7 年，每年缴纳 10 000 元，并计年利为 8% 的连续复利，（1）求这一信托基金的现值；（2）求这一信托基金 5 年后的价值；
（3）若这一信托基金不是期限 7 年而是永久性的，求现值。

解 现金流 $f(t)=10\,000$，年利率 $r=0.08$，

（1）这一信托基金的现值为

$$A=\int_{8}^{15}10000\,e^{-0.08t}\mathrm{d}t\ =28262.28\text{ 元；}$$

（2）这一信托基金 5 年后的价值为

$$P=A\times e^{0.08\times 5}=42162.37\text{ 元；}$$

（3）若这一信托基金是永久性的，则其现值为

$$B=\int_{8}^{+\infty}10000\,e^{-0.08t}\mathrm{d}t=65911.553\text{ 元.}$$

***10．某房产商投资 600 万元建造商品房，准备若干年后售出，设 t 年后的销售收入为

$$V(t)=1000-800\,e^{-t}\text{（万元），}$$

其间必须均匀支付流量为 $a=6$（万元 / 年）的管理费，假设年利率为 $r=5\%$，按连续复利计算问何时出售可使利润最大？

解　设在 t 年后售出利润最大，则利润为

$$L(t)=V(t)e^{-0.05t}-(600+\int_{0}^{t}6e^{-0.05t}\mathrm{d}t)=(1000-800\,e^{-t})e^{-0.05t}-(600+\int_{0}^{t}6e^{-0.05t}\mathrm{d}t)\text{，}$$

令　$L'(t)=800\,e^{-t}e^{-0.05t}-(1000-800\,e^{-t})\times 0.05e^{-0.05t}-6e^{-0.05t}=0$，

得：　$t\approx 2.7$ 年.