第 4 章 （之 1）
第 19 次作业

教学内容：§4.1.1 函数的单调性　　§4.1.2 函数的极值

**1. 已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处有极值 -2，则常数 $a=$____,$b=$_____.

答：$a=0,b=-3$

2. 选择题

***（1）设 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(x)>g'(x)$, 则在 $(a,b]$ 上有　（　）

(A) $f(x)-g(x)>0$　　(B) $f(x)-g(x)\ge 0$

(C) $f(x)-g(x)>f(a)-g(a)$　　(D) $f(x)-g(x)>f(b)-g(b)$

答：(C)

***（2）设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $x=a$ 处取得极大值，则 $F(x)=f(x)\,g(x)$ 在 $x=a$ 处　（　）

(A) 必取极大值　　(B) 必取极小值

(C) 不可能取极值　　(D) 是否取极值不能确定

答 (D)

****（3）已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则必有

① $f(0)=0$；② $f'(0)=0$；③ $f(x)\sim x^2\,(x\to 0)$；④ $f(0)$ 为极大值.

以上结论中正确的个数为　（　）

$(A)1$　　$(B)2$　　$(C)3$　　$(D)4$

答 (C)

***（4）函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续且取得极大值, 则 $f(x)$ 在 x_0 处必有　（　）

(A) $f'(x_0)=0$　　(B) $f''(x_0)<0$

(C) $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)<0$　　(D) $f'(x_0)=0$ 或不存在

答 (D)

3．求下列函数的单调区间:

**（1）$y=x^2+\dfrac{6}{x}$

解：函数在$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$内连续，$y'=\dfrac{2(x^3-3)}{x^2}$，

解得驻点 $x=\sqrt[3]{3}$，

x	$(-\infty,0)$	$(0,\sqrt[3]{3})$	$\sqrt[3]{3}$	$(\sqrt[3]{3},+\infty)$
y'	－	－	0	+
y	↓	↓		↑

函数的单调增区间为$(\sqrt[3]{3},+\infty)$，单调减区间为$(-\infty,0),(0,\sqrt[3]{3})$.

**（2） $y=(x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$

解：函数在$(-\infty,+\infty)$内连续 $y'=\dfrac{8(x-5)(x-\frac{1}{2})}{3\sqrt[3]{x+1}}$ $x\neq-1$，

令 $y'=0$得 $x_1=5$，$x_2=\dfrac{1}{2}$，而当 $x=-1$时, y'不存在，

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},5)$	5	$(5,+\infty)$
y'	－	x	＋	0	－	0	＋
y	↓		↑		↓		↑

函数的单调增区间为$[-1,\frac{1}{2}],[5,+\infty)$，单调减区间为$(-\infty,-1],[\frac{1}{2},5]$.

4．证明下列不等式

**（1）证明当$x>1$时，$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$.

解：令$f(x)=2\sqrt{x}-3+\dfrac{1}{x}$， $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}$，

$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续

当$x>1$时 $f'(x)>0$ 故$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调增

当$x>1$时恒有$f(x)>f(1)=0$， 即$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$.

**（2）当$x\geq0$时，$x^a-ax\leq1-a$ $(0<a<1)$.

解：令$f(x)=x^a-ax-1+a$，则 $f'(x)=ax^{a-1}-a=a\left(\dfrac{1}{x^{1-a}}-1\right)$

当$0\leq x<1$时，$f'(x)>0$，故 $f(x)<f(1)=0$

当$x>1$时，$f'(x)<0$，故 $f(x)<f(1)=0$

综合得：当$x\geq0$时，$x^a-ax\leq1-a$ $(0<a<1)$

***（3）当$b>a>e$时，$a^b>b^a$.

解：设 $f(x)=x\ln a-a\ln x$ $(x>a)$，

$f'(x)=\ln a-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x\ln a-a}{x}$，　　　$\because a>e\Rightarrow \ln a>1$，

$\therefore$ 当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore b>a>e$ 时，$f(b)>f(a)$，

$\therefore b\ln a-a\ln b>0$，　　　　　$\therefore\ a^b>b^a$.

5．求下列函数的极值

**（1）$f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$（注：本题说明讨论极值时不可忽略导数不存在的点.）

解：$\because f'(x)=\dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}}{x^{\frac{1}{3}}}$，

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=\dfrac{2}{5}$，　　不可导点为 $x=0$。

$\because$ 当 $x<0$ 时，$f'>0$，　当 $0<x<\dfrac{2}{5}$ 时，$f'<0$，

当 $x>\dfrac{2}{5}$ 时，$f'>0$。

$\therefore x=0$ 时，$f(x)$ 取极大值 0，

$x=\dfrac{2}{5}$ 时，$f(x)$ 取极小值 $-\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$.

**（2）$f(x)=\sqrt{2}\cos 2x+4\cos x$.

解：$f'(x)=-2\sqrt{2}\sin 2x-4\sin x$，

令 $f'(x)=0$，　　$\Rightarrow -4\sqrt{2}\sin x\cdot\cos x-4\sin x=0$，

$\Rightarrow \sin x=0$ 或 $\cos x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

$\therefore x=n\pi$，$x=2n\pi+\pi\pm\dfrac{\pi}{4}\quad(n\in Z)$，

又 $\because f''(x)=-4\sqrt{2}\cos 2x-4\cos x$，

而 $f''(n\pi)<0$，$f''\left(2n\pi+\pi\pm\dfrac{\pi}{4}\right)>0$，

$\therefore$ 极大值 $f(2n\pi)=4+\sqrt{2}$，$f(2n\pi+\pi)=\sqrt{2}-4$；

极小值 $f\left(2n\pi+\pi\pm\dfrac{\pi}{4}\right)=-2\sqrt{2}$.

**6. 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f''(x)>0, f(0)\le 0$. 试证明：$\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内都是单调增加的.

证：$\varphi'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，令 $g(x)=xf'(x)-f(x)$，则 $g'(x)=xf''(x)$

当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)>g(0)=-f(0)\ge 0$，

当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)>g(0)=-f(0)\ge 0$

$\therefore x<0$ 或 $x>0$ 时均有 $g(x)>0$，即 $\varphi'(x)>0$，故有 $\varphi(x)$ 单调增加.

****7．设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 n 阶连续导数，且 $f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，而 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. 试证明：

(1) 当 n 为奇数时，$f(x_0)$ 不是极值；

(2) 当 n 为偶数时，若 $f^{(n)}(x_0)<0$（或 >0），则 $f(x_0)$ 是极大值（或极小值）.

证：$\because$ $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 n 阶连续导数，由 $n-1$ 阶泰勒公式，

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n \quad ，\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间.}$$

不妨设 $f^{(n)}(x_0)>0$，因为 $f(x)$ 的 n 阶导数在 x_0 点连续，所以有 $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(n)}(x)=f^{(n)}(x_0)$，再由极限的局部保号性定理，可知存在 x_0 的某个邻域 $N(x_0,\delta)$，当 x 在该邻域内时总有 $f^{(n)}(x)>0$. 由于 ξ 在 x_0 与 x 之间，可知 ξ 也必然在该邻域内，所以有 $f^{(n)}(\xi)>0$. 于是

(1) n 为奇数时，只要 $x_0<x<x_0+\delta$，就有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n>f(x_0),$$

当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n<f(x_0),$$

$\therefore$ x_0 不是极值点.

(2) 当 n 为偶数时，只要 $0<|x-x_0|<\delta$，就有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n>f(x_0),$$

$\therefore$ $f(x_0)$ 为极小值.

第 4 章 （之 2）
第 20 次作业

教学内容：§4.1.3 最大值与最小值　　　§4.1.4 方程根的个数

**1. 方程　$x^3-3x+1=0$　在 $(0,1)$ 内　　　（　　）

(A)　无实根　　　　(B)　有唯一实根

(C)　有两个实根　　(D)　有三个实根

答　(B)

**2．求函数 $y = x + \sqrt{1-x}$ 在指定区间 $[-5,1]$ 上的最大值和最小值.

解：$\because\ y' = 1 + \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}$，

$\therefore$临界点为 $x = \dfrac{3}{4}$， $x = 1$.

考虑 $y\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{4} + \sqrt{1-\dfrac{3}{4}} = \dfrac{5}{4}$， $y(1) = 1 + \sqrt{1-1} = 1$，

在端点处 $y(-5) = -5 + \sqrt{1-(-5)} = -5 + \sqrt{6}$， $y(1) = 1$.

$\therefore$最大值为 $y\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{5}{4}$，

最小值为 $y(-5) = -5 + \sqrt{6}$.

**3．求函数$y = |x^2 - 3x + 2|$在$|x| \le 10$时的最大值,最小值.

解：由于所给函数与函数 $g = y^2 = (x^2 - 3x + 2)^2$ 有相同的最大值与最小值点，

而$\dfrac{dg}{dx} = 2(x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$,

令$\dfrac{dg}{dx} = 0$ 得 $x_1 = 1$，$x_2 = 2$，$x_3 = \dfrac{3}{2}$.

原来函数值

$y(1) = y(2) = 0$，$y(\frac{3}{2}) = \dfrac{1}{4}$

$y(-10) = 132$，$y(10) = 72$

故所给函数的最大值为$y(-10) = 132$

最小值为$y(1) = y(2) = 0$.

**4．设 $A = (2a,0)(a > 0)$，在心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)$ 的第一象限部分上找一点P，使ΔOPA的面积最大.

解：由于线段$OA = 2a$为一个确定的值，所以本问题本质上是求P点纵坐标

$$y = a(1+\cos\theta)\sin\theta(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$$

的最大值.

$$\frac{dy}{d\theta} = a(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1),$$

令 $\dfrac{dy}{d\theta}=0$，可得 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上的唯一驻点 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，

根据实际意义可知，所求之点就是对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 的点

$$P=(\frac{3}{4}a,\frac{3\sqrt{3}}{4}a).$$

**5．欲造一个有上、下底的圆柱形铁桶，容积为定值 V，试问当铁桶的底半径 R 和高度 H 取何值时，才能使用料最省？

解：所需材料为 $A=2\pi R^2+2\pi R\cdot H$.

$\because$ 定值 $V=\pi R^2 H$，$\therefore H=\dfrac{V}{\pi R^2}$.

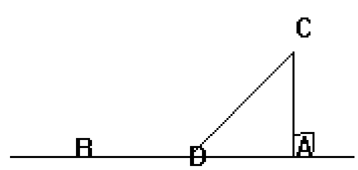
$\therefore A=2\pi R^2+2\pi R\cdot\dfrac{V}{\pi R^2}=2\pi R^2+\dfrac{2V}{R}$，

$A'=4\pi R-\dfrac{2V}{R^2}=\dfrac{4\pi R^3-2V}{R^2}$，　得到唯一驻点 $R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

此时 $H=\dfrac{V}{\pi R^2}=\dfrac{V}{\pi}\sqrt[3]{\left(\dfrac{2\pi}{V}\right)^2}=\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$.

$\therefore$ 根据问题的实际情况，当 $R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$，$H=\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$ 时，所需材料最省.

**6 在铁道线（假设是直线）上有一点 A 与原料供应站 B 相距 $100km$，在铁道线外有一工厂 C，CA 垂直于 AB（如图），且 C,A 相距 $20km$. 已知汽车运费为 m元$/km$，火车的运费为 n元$/km\,(m>n)$. 现准备在 A,B 之间选一点 D，向工厂修建一条公路，使原料供应站 B 运货到工厂所用费用最省，问 D 应选在何处？



解：设 $AD=x$, 则 $CD=\sqrt{400+x^2}$，　$BD=100-x$,

于是总运费　$y=m\sqrt{400+x^2}+n(100-x)\quad(0<x<100)$

$$y'=\frac{mx-n\sqrt{400+x^2}}{\sqrt{400+x^2}},$$

令 $y'=0$ 得唯一驻点：$x=\dfrac{20n}{\sqrt{m^2-n^2}}$

$$y'' = \frac{400m}{(400+x^2)^{3/2}} > 0$$

可见：在距A点 $\dfrac{20n}{\sqrt{m^2-n^2}}(km)$处，修公路至$C$可使总费用最省 。

**7．由$y=0, x=8, y=x^2$ 围成的曲线边三角形 OAB，这里$A=(8,0), B=(8,64)$．在曲边OB上求一点，使得过此点所作的 $y=x^2$ 的切线与 OA, AB 所围成的 三角形面积最大.

解

设曲边OB上任取一点为$M(x，x^2)(0<x<8)$，则过该点的切线为：

$$Y-x^2=2x(X-x)$$

切线与x轴的交点$P=(\frac{x}{2},0)$与$x=8$的交点$Q=(8,2x(8-x)+x^2)$

于是所围的三角形PAQ的面积为：

$$S=\frac{1}{2}(8-\frac{x}{2})\left[2x(8-x)+x^2\right]=\frac{x}{4}(16-x)^2\ (0<x<8)$$

$S'=\frac{3}{4}x^2-16x+64=\frac{1}{4}(16-x)(16-3x)$，唯一驻点 $x=\frac{16}{3}$，

$S''=\frac{3}{2}x-16 \qquad S''\Big|_{x=\frac{16}{3}}<0$

$\therefore$ 在点$\left(\frac{16}{3},\frac{256}{9}\right)$处作切线，所围面积最 大.

***8．讨论方程 $xe^{-x}=a(a>0)$ 实数根的个数.

解：设 $f(x)=xe^{-x}-a$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导， 且 $f'(x)=e^{-x}(1-x)$，

当 $x>1$ 时，有 $f'(x)<0$，所以 $f(x)\downarrow$；

当 $x<1$ 时，有 $f'(x)>0$，所以 $f(x)\uparrow$，

所以 $f(x)$ 有极大值 $f(1)=e^{-1}-a$.

由于 $f(-\infty)=-\infty$， $f(+\infty)=-a<0$， 所以

当 $f(1)=e^{-1}-a>0$ 即 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，方程有两个不同实数根；

当 $f(1)=e^{-1}-a=0$ 即 $a=\frac{1}{e}$ 时，方程有一个实数根；

当 $f(1)=e^{-1}-a<0$ 即 $a>\frac{1}{e}$ 时，方程无实数根.

第 4 章 （之 3）
第 21 次作业

教学内容： §4.2 函数的凸性与拐点

1． 填空题

**(1)． 曲线 $y = 1 + 2x + 3\sin x$ 的拐点是__________ ____ .

答案： $(n\pi, 1 + 2n\pi)(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$

**(2)． 设曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 以点(1,3)为拐点,则数组$(a,b) =$ ___________________.

答案: $(a,b) = (-\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{2})$

**(3)． $f(x) = \arctan x$ 是区间_________ 上的凸函数；是区间_________ 上的凹函数.

答案：$(-\infty, 0]$，$[0, +\infty)$． 说明:也可以填 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

**(4)． 若 $f(x) = -f(-x)$，在 $(0, +\infty)$ 内 $f' > 0, f'' > 0$，则在 $(-\infty, 0)$ 内 $f(x)$ 是单调递

_____(增、减)的_____（凸、凹）函数.

答案：增、凹.

2．选择题

**（1）曲线 $y = e^{-x^2}$ 的拐点情况是 （ ）

(A) 没有拐点； (B) 有一个拐点；

(C) 有两个拐点 ； (D) 有三个拐点.

答：(C)

**（2）曲线 $y = x^2 \ln x$ 在点 $P = (\dfrac{1}{e^2}, -\dfrac{2}{e^4})$ 近邻是 （ ）

$A.$ 凸的；B 凹的；C 左侧近邻凸, 右侧近邻凹；

D 左侧近邻凹,右侧的近邻凸.

答(B) . $y' = 2x\ln x + x$，$y'' = 2\ln x + 3$在$\left(\dfrac{1}{e^2}, -\dfrac{2}{e^4}\right)$连续, $y''(\dfrac{1}{e^2}) = -1 < 0$.根据连续函数的局部保号性可得结论.

****（3）若 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0,\quad f'''(x_0) > 0$，则下列选项正确的是 （ ）

(A) $f(x_0)$是$f(x)$的极大值；

(B) $f(x_0)$是$f(x)$的极小值；

(C) $f'(x_0)$是$f'(x)$的极大值;

(D) $(x_0, f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

答：(D)

**3．求函数$y=\ln\left(1+x^2\right)$的凸凹区间和它图形上的拐点.

解：$\because\ y'=\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]'=\dfrac{2x}{1+x^2}$，

$$y''=\frac{2\left(1+x^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2},$$

$\therefore$当$x<-1$或$x>1$时，$f''<0$，

当$-1<x<1$时，$f''>0$.

$\therefore$函数在区间$(-1,1)$上是凸函数，在区间$(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$上是凹函数.

$\therefore$ 其图形上的拐点为$(1,\ln 2)$，$(-1,\ln 2)$.

***4．试决定常数k的值，使曲线$y=k\left(x^2-3\right)^2$在拐点处的法线通过坐标原点.

解：$\because\ y'=2k\left(x^2-3\right)\cdot 2x$， $y''=4k\left(3x^2-3\right)$，

令$y''=0\Rightarrow x=\pm 1$，$y=4k$．此时，$y'=\mp 8k$，

$\therefore$过拐点处的法线为

$$y-4k=\frac{1}{8k}(x-1)\qquad\text{或}\qquad y-4k=\frac{1}{-8k}(x+1).$$

将$(x,y)=(0,0)$代入，解得$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

***5. 证明：无论实数a,b取何值，曲线 $y=3x^5-10x^3+ax+b$ 的三个拐点总在同一条直线上.

证明： $y'=15x^4-30x^2+a,\quad y''=60x^3-60x=60x(x-1)(x+1)$.

当 $x<-1,$ 或 $0<x<1$ 时， $y''<0$；

当 $-1<x<0,$ 或 $x>1$ 时， $y''>0$，

所以曲线有三个拐点： $(-1,7-a+b),\quad (0,b),\quad (1,-7+a+b)$，

它们都在直线 $y=(a-7)x+b$ 上.

****6．设$f(x)$在x_0的某邻域内具有n $(n>2)$阶连续导数，且$f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，而$f^{(n)}(x_0)\neq 0$．试证明：

(1)当n为奇数时，点$(x_0, f(x_0))$必是曲线$y=f(x)$的拐点；

(2)当n为偶数时，点$(x_0, f(x_0))$不是曲线$y=f(x)$的拐点.

证：$\because\ f''(x)$在x_0的某邻域内具有$n-2$阶连续导数，由$n-3$阶泰勒公式，

$$f''(x)=f''(x_0)+f'''(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-3)!}(x-x_0)^{n-3}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}$$

$$=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}$$ ，ξ 在 x_0 与 x 之间.

不妨设 $f^{(n)}(x_0)>0$，因为 $f(x)$ 的 n 阶导数在 x_0 点连续，所以有 $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(n)}(x)=f^{(n)}(x_0)$，再由极限的局部保号性定理，可知存在 x_0 的某个邻域 $N(x_0,\delta)$，当 x 在该邻域内时总有 $f^{(n)}(x)>0$．由于 ξ 在 x_0 与 x 之间，可知 ξ 也必然在该邻域内，所以有 $f^{(n)}(\xi)>0$． 于是

(1) n 为奇数时，只要 $x_0<x<x_0+\delta$，就有

$$f''(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}>0,$$

当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，

$$f''(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}<0,$$

$\therefore (x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点.

(2) 当 n 为偶数时，只要 $0<|x-x_0|<\delta$，就有

$$f''(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}>0,$$

$\therefore (x_0, f(x_0))$ 不是曲线的拐点.