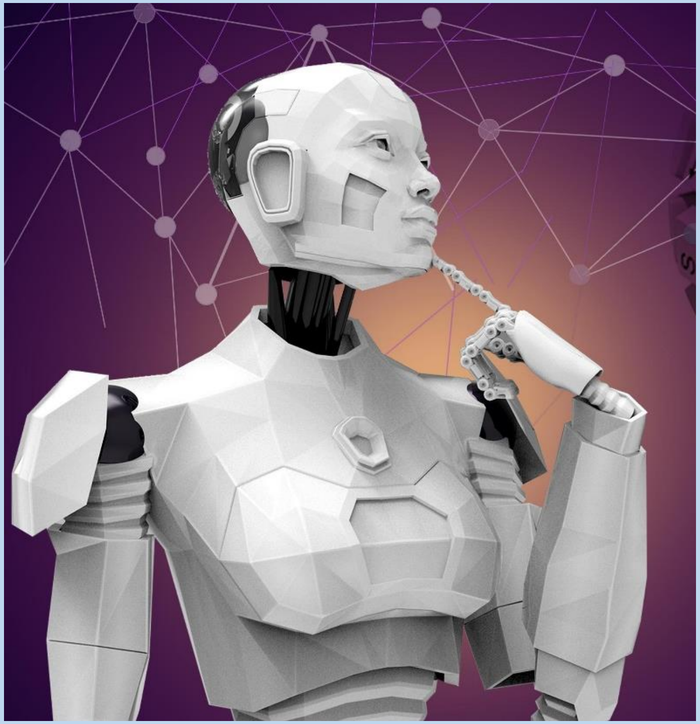
第3章：位姿描述和齐次变换



主讲：许璟、周家乐

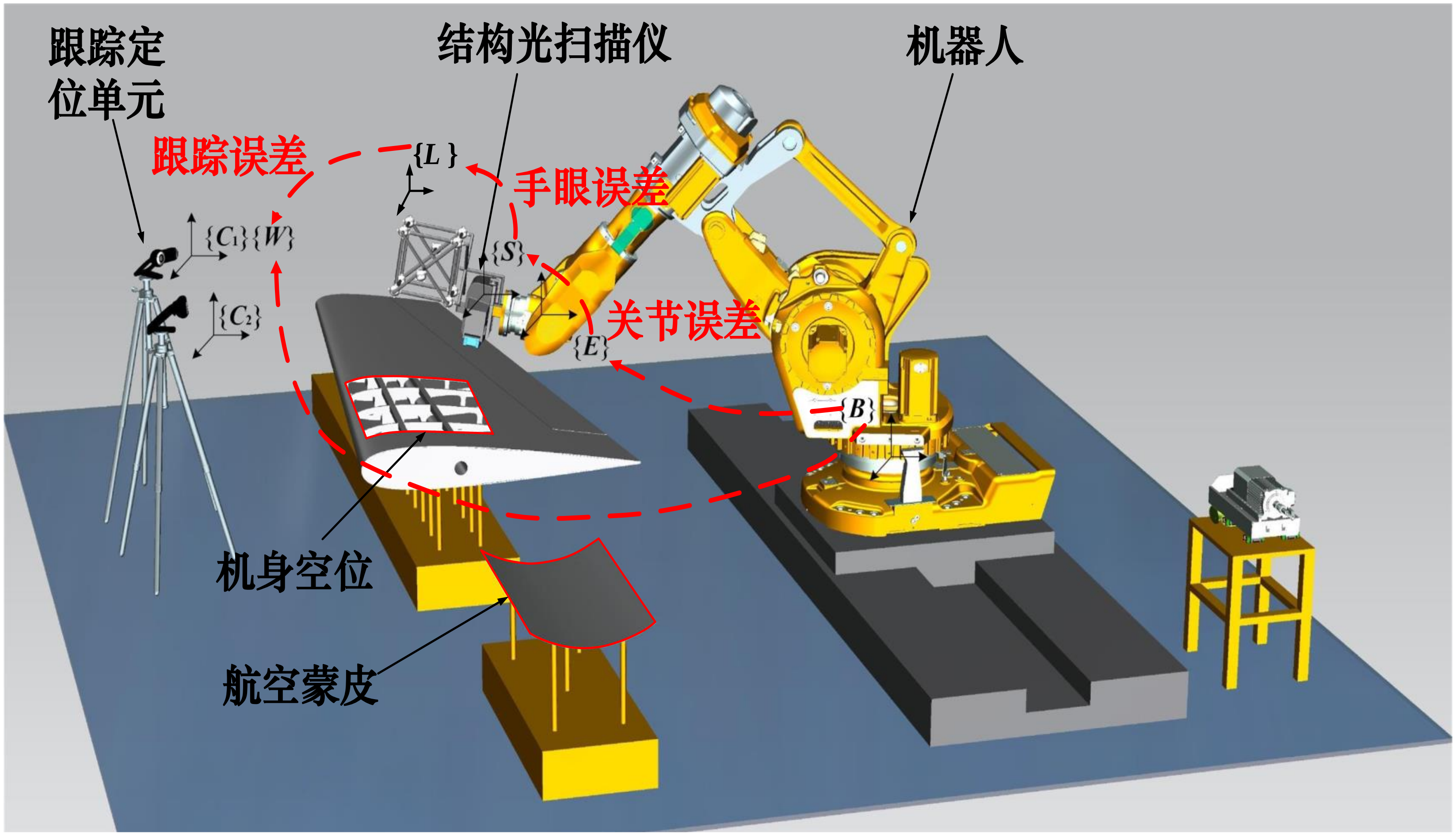
单位：信息科学与工程学院

邮箱：jingxu@ecust.edu.cn

办公：徐汇校区 实验19楼1213室

位姿描述—机器人铣削修边应用场景

飞机蒙皮加工系统：机器人、扫描仪、跟踪仪、工具、工件



位姿描述—机器人操作（磨抛）应用场景

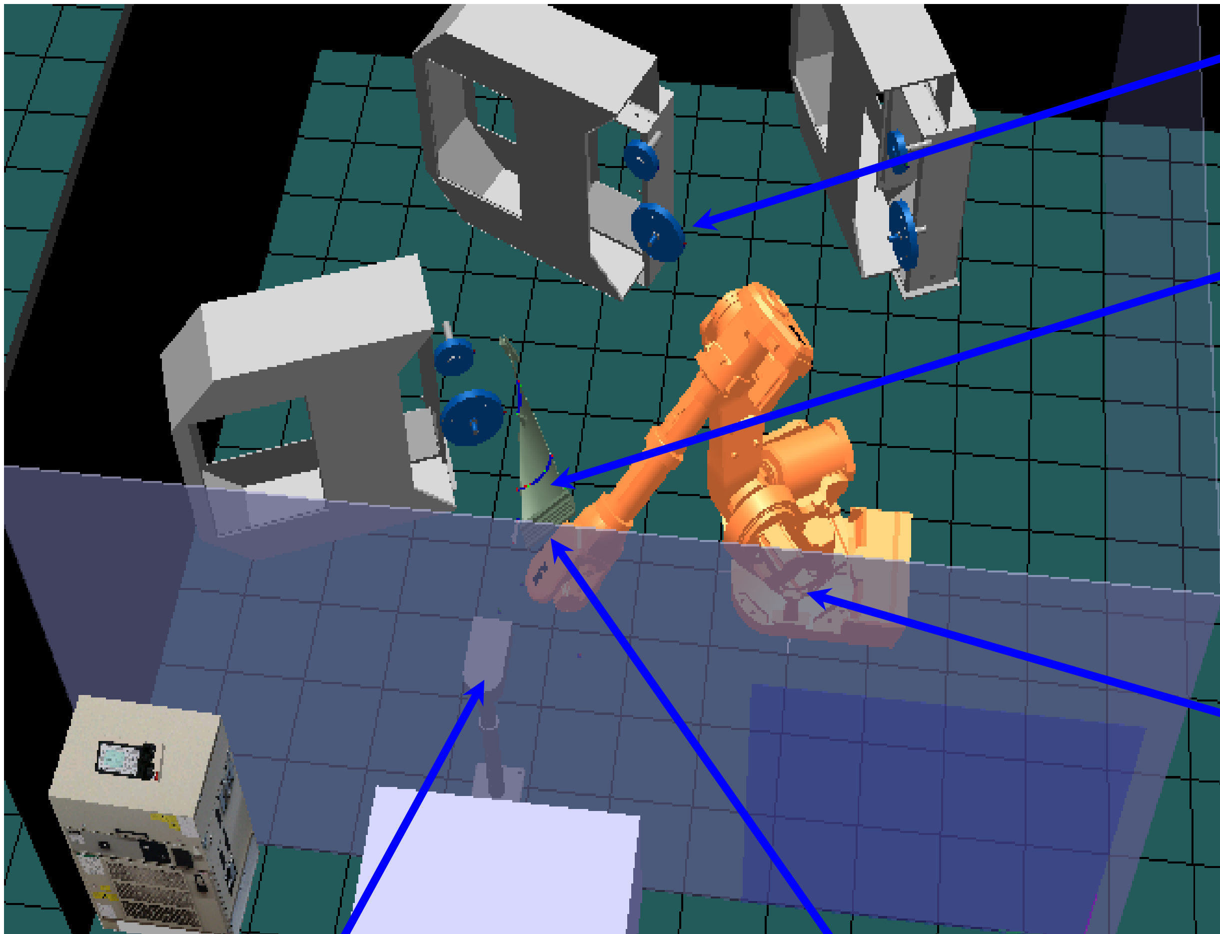
大叶片加工工艺：模锻——铣削——变形矫正——磨抛

手工磨抛

机器人磨抛

位姿描述—机器人操作（磨抛）应用场景

机器人磨抛涉及的坐标系：



本章提纲

3.1 刚体位姿描述

3.2 齐次坐标和齐次变换

3.3 运动算子

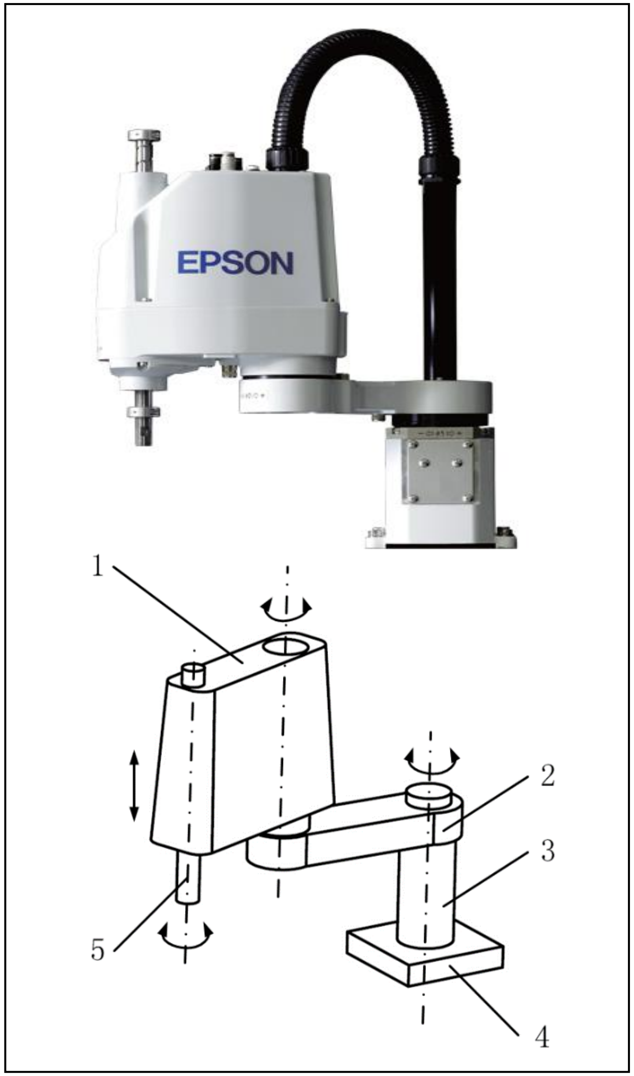
3.4 变换矩阵的运算

3.5 欧拉角与RPY角

3.6 旋转变换通式

3.7 位姿的综合

3.8 计算的复杂性



3.1 刚体位姿描述

- 研究机器人操作臂的运动：涉及各连杆位姿关系、连杆与周围环境（操作对象和障碍物）的关系。我们把操作臂的各个连杆、操作对象、工具、工件和障碍物都当成刚体。
- 刚体位姿描述：齐次变换（矩阵）、矢量法、四元数

◆ 位姿（Location）＝位置（Position）＋姿态（Orientation）

◆ 齐次变换法

– 将运动、变换和映射与矩阵运算联系起来；

– 在操作臂运动/动力学、机器人控制算法、计算机图学、视觉信息处理、手-眼建模标定都有广泛应用。

◆ 描述刚体在坐标系中的相对位姿（描述）； Description

◆ 表示刚体运动前后位姿描述的变换（算子）； Operator

◆ 把点从一个坐标系映射到另一个坐标系（映射）； Mapping

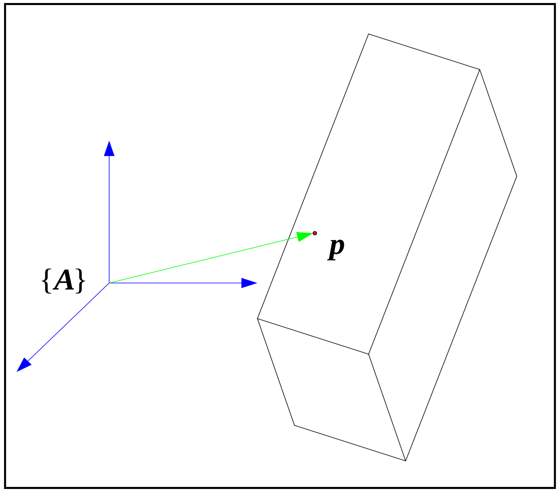
3.1 位置的描述（位置矢量）

□ 在坐标系｛A｝中，空间任意一点可表示为列矢量$^A\boldsymbol{p}$

点的位置用矢量描述

直角坐标系

$$ {}^{A}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} $$



在直角坐标系A中，空间任意一点p的位置可用3×1列向量（位置矢量）表示

其中，p_x, p_y, p_z 是点p在坐标系{A}中的三个坐标分量；

$^A\boldsymbol{p}$ 为位置矢量；上标 A 代表参考坐标系 {A}。

□ 符号表示：矢量/向量等（小写粗体）、矩阵/坐标系/群等（大写粗体）

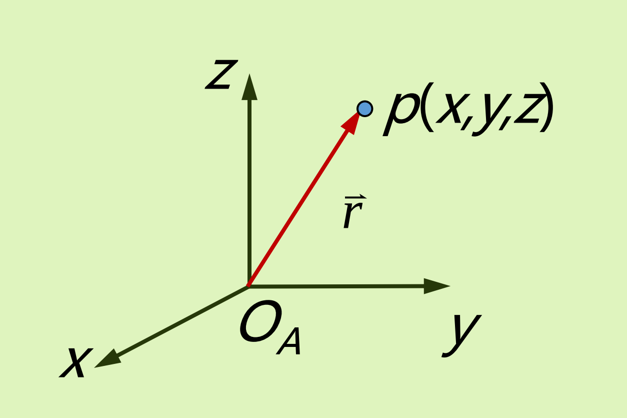
变量/角度等（小写非斜体）

3.1 位置的描述（位置矢量）

- **直角坐标系中，矢量可表示为：**

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

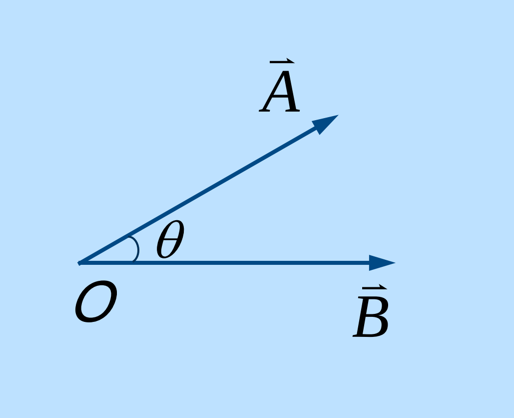
$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ **为单位矢量**



- **定义：两个矢量的点积是一个数量**

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \quad 0 \le \theta \le \pi$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$



- **直角坐标系中单位矢量的点积**

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1 \quad \vec{i}\cdot\vec{j} = 0 \quad \vec{i}\cdot\vec{k} = 0$$

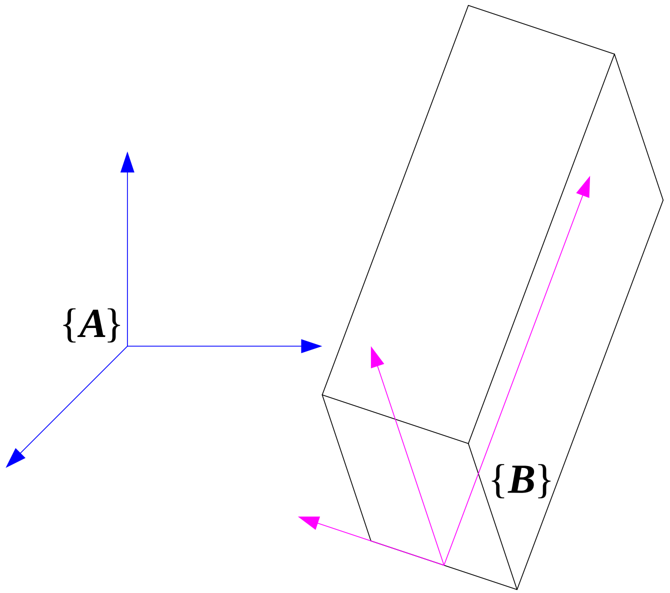
$$\vec{j}\cdot\vec{i} = 0 \quad \vec{j}\cdot\vec{j} = 1 \quad \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$$

$$\vec{k}\cdot\vec{i} = 0 \quad \vec{k}\cdot\vec{j} = 0 \quad \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

3.1 旋转矩阵与旋转群

□ 坐标系 {*B*} 相对于坐标系 {*A*} 的旋转矩阵

$$ {}_B^A\boldsymbol{R} = \left[\,{}^A\boldsymbol{x}_B \quad {}^A\boldsymbol{y}_B \quad {}^A\boldsymbol{z}_B\,\right] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} $$



${}_B^A\boldsymbol{R}$ 是正交矩阵，满足如下关系：

$$ {}^A\boldsymbol{x}_B \cdot {}^A\boldsymbol{x}_B = {}^A\boldsymbol{y}_B \cdot {}^A\boldsymbol{y}_B = {}^A\boldsymbol{z}_B \cdot {}^A\boldsymbol{z}_B = 1 $$

$$ {}^A\boldsymbol{x}_B \cdot {}^A y_B = {}^A\boldsymbol{y}_B \cdot {}^A\boldsymbol{z}_B = {}^A\boldsymbol{z}_B \cdot {}^A\boldsymbol{x}_B = 0 $$

□ 所以旋转矩阵中9个元素只有3个独立变量

□ 还满足：${}_B^A\boldsymbol{R}^{-1} = {}_B^A\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}};\quad \det\left({}_B^A\boldsymbol{R}\right) = +1$

上标T表示转置，det表示行列式符号

3.1 旋转矩阵与旋转群

◆ 绕*x*轴旋转的旋转矩阵

$$R(x,\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

◆ 绕*y*轴旋转的旋转矩阵

$$R(y,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

◆ 绕*z*轴旋转的旋转矩阵

$$R(z,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

旋转矩阵描述姿态

◆ **思考?**

- 这三个旋转矩阵的结构有什么关系，如果通过记住一个旋转矩阵而得到其它两个?
- 如果绕某一个轴多次旋转，我们会看到什么结果?
- 如果依次绕x、y、z轴旋转，旋转矩阵如何计算?

3.1 旋转矩阵与旋转群

- 满足正交条件和特殊条件的旋转矩阵 $R \in \Re^{3\times3}$ 为旋转群 $SO(3)$

$$\boldsymbol{SO}(3) = \left\{ \boldsymbol{R} \in \Re^{3\times3} : \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I},\ \det \boldsymbol{R} = +1 \right\}$$

- 旋转群也称为特殊正交群，推广到n维空间：

$$\boldsymbol{SO}(n) = \left\{ \boldsymbol{R} \in \Re^{n\times n} : \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I},\ \det \boldsymbol{R} = +1 \right\}$$

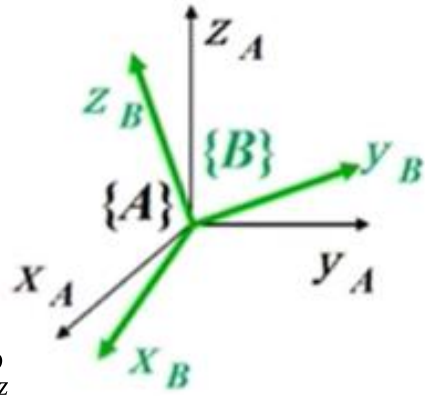
- 旋转矩阵对于矩阵乘法满足“群公理条件”：封闭性、可逆性、结合律，具有逆元和单位元 $R = I$，不可交换
- 旋转矩阵集合构成的流形是光滑流形，且矩阵乘法运算和求逆运算都是光滑映射，因此旋转群是李群
- 采用位置矢量 $p \in \Re^3$ 描述位置, $R \in SO(3)$描述姿态

3.1 旋转矩阵与旋转群

刚体姿态的描述：旋转矩阵的3个功能

□功能1：${}^{A}_{B}R$可用于描述坐标系$\{B\}$相对于$\{A\}$的姿态

□功能2：${}^{A}_{B}R$可用于转换向量坐标



原坐标： $${}^{B}\boldsymbol{P}={}^{B}P_x\boldsymbol{x}_B+{}^{B}P_y\boldsymbol{y}_B+{}^{B}P_z\boldsymbol{z}_B$$

新坐标： $${}^{A}\boldsymbol{P}={}^{A}P_x\boldsymbol{x}_A+{}^{A}P_y\boldsymbol{y}_A+{}^{A}P_z\boldsymbol{z}_A$$

$${}^{A}P_x={}^{B}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}_A=\boldsymbol{x}_B\cdot\boldsymbol{x}_A{}^{B}P_x+\boldsymbol{y}_B\cdot\boldsymbol{x}_A{}^{B}P_y+\boldsymbol{z}_B\cdot\boldsymbol{x}_A{}^{B}P_z$$

$${}^{A}P_y={}^{B}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{y}_A=\boldsymbol{x}_B\cdot\boldsymbol{y}_A{}^{B}P_x+\boldsymbol{y}_B\cdot\boldsymbol{y}_A{}^{B}P_y+\boldsymbol{z}_B\cdot\boldsymbol{y}_A{}^{B}P_z$$

$${}^{A}P_z={}^{B}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{z}_A=\boldsymbol{x}_B\cdot\boldsymbol{z}_A{}^{B}P_x+\boldsymbol{y}_B\cdot\boldsymbol{z}_A{}^{B}P_y+\boldsymbol{z}_B\cdot\boldsymbol{z}_A{}^{B}P_z$$

$${}^{A}\boldsymbol{P}={}^{A}\begin{bmatrix}P_x\\P_y\\P_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_B\cdot\boldsymbol{x}_A & \boldsymbol{y}_B\cdot\boldsymbol{x}_A & \boldsymbol{z}_B\cdot\boldsymbol{x}_A\\ \boldsymbol{x}_B\cdot\boldsymbol{y}_A & \boldsymbol{y}_B\cdot\boldsymbol{y}_A & \boldsymbol{z}_B\cdot\boldsymbol{y}_A\\ \boldsymbol{x}_B\cdot\boldsymbol{z}_A & \boldsymbol{y}_B\cdot\boldsymbol{z}_A & \boldsymbol{z}_B\cdot\boldsymbol{z}_A\end{bmatrix}{}^{B}\begin{bmatrix}P_x\\P_y\\P_z\end{bmatrix}={}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{P}$$

3.1 旋转矩阵与旋转群

刚体姿态的描述：旋转矩阵的3个功能

口功能3：${}^{A}_{B}R$可用于描述物体转动的状态

◆绕x轴旋转的旋转矩阵

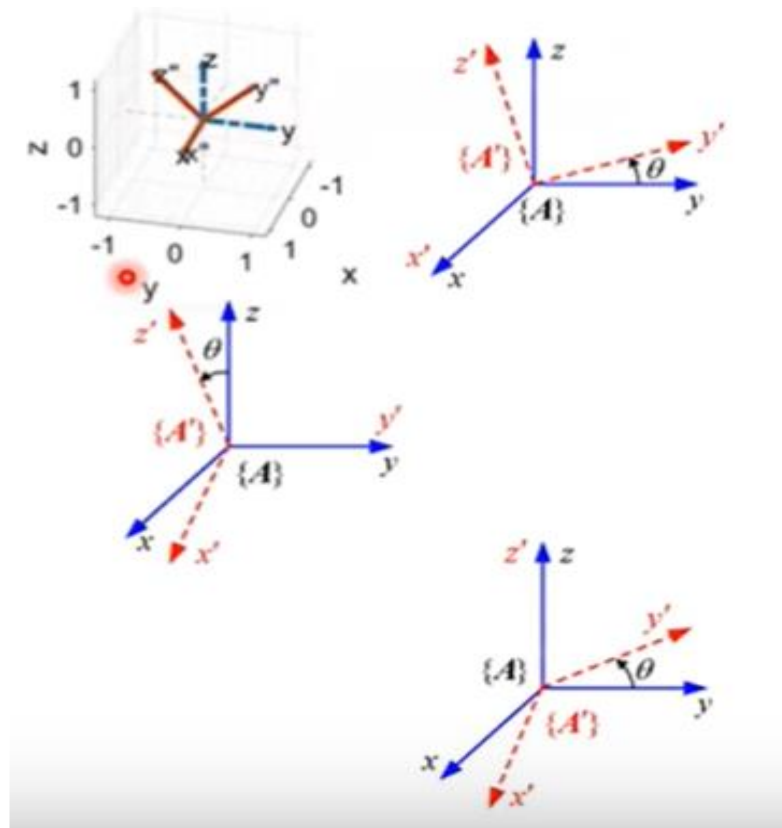
$$\boldsymbol{R}(x,\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

◆绕y轴旋转的旋转矩阵

$$\boldsymbol{R}(y,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

◆绕z轴旋转的旋转矩阵

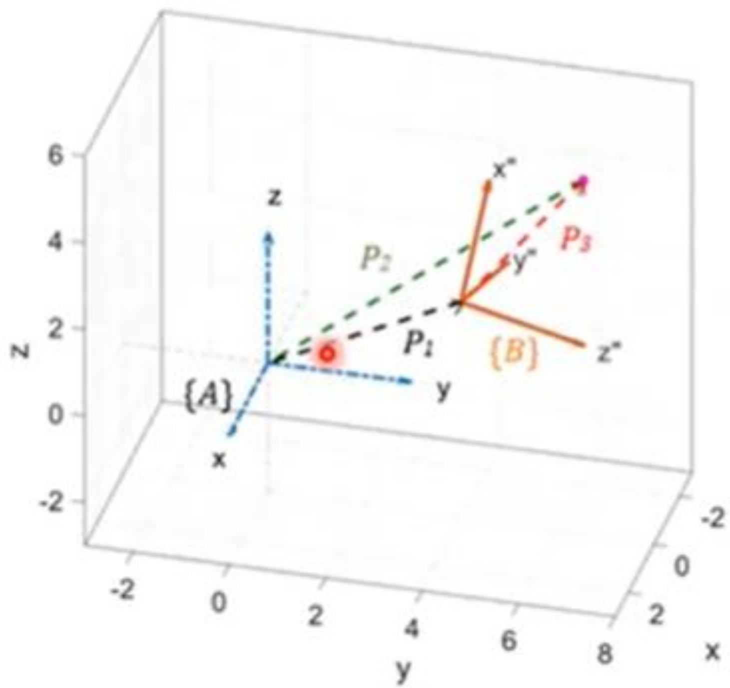
$$\boldsymbol{R}(z,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



3.1 旋转矩阵与旋转群

刚体姿态的描述：旋转矩阵的3个功能

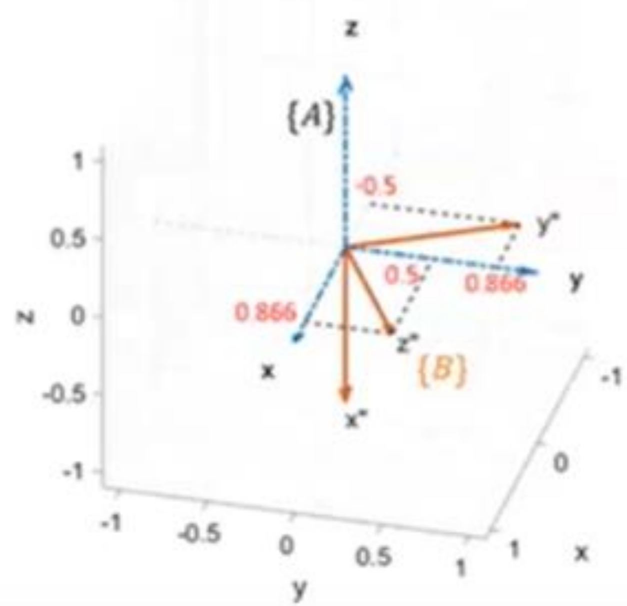
□ 测验1：试将下图中的 P_1, P_2, P_3 分别与 ${}^{A}P, {}^{B}P_2, {}^{A}P_{Borg}$ 对照



3.1 旋转矩阵与旋转群

刚体姿态的描述：旋转矩阵的3个功能

- 测验2：${}^{A}P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1.732\end{bmatrix}^{T}$ 对 X_A 轴旋转30°，则 ${}^{A}P'=?$
- 测验3：确定下图中的旋转矩阵



3.1 旋转矩阵与旋转群

刚体姿态的描述：旋转矩阵的3个功能

- 测验4：已知 ${}^{A}P=\begin{bmatrix}0\\3\\4\end{bmatrix}$，${}_{B}^{A}R=\begin{bmatrix}0 & 0.707 & -0.707\\0 & 0.707 & 0.707\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，试求 ${}^{B}P$

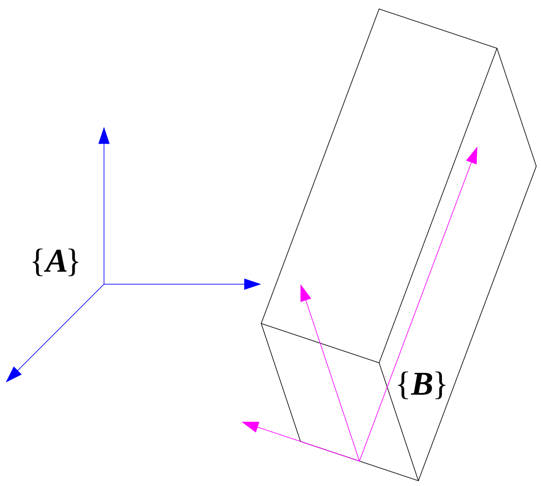
- 测验5：已知 ${}^{A}P=\begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix}$，求对Y轴旋转+90°的旋转矩阵，

  以及旋转之后的 ${}^{A}P'$

3.1 坐标系的描述

- 将刚体B与坐标系 $\{B\}$ 固接， $\{B\}$ 的原点选择刚体质心，相对参考坐标系$\{A\}$，坐标系 $\{B\}$ 的位姿：

$$\{B\} = \{ {}^A_B R \quad {}^A p_{Bo} \}$$



- **思考?**

> ◆ 如果只表示位置时，坐标系$\{B\}$是什么形式?
>
> 答：${}^A_B R = I$ （单位矩阵），$\{B\} = \{ I \quad {}^A p_{Bo} \}$
>
> ◆ 如果只表示方位时，坐标系$\{B\}$是什么形式?
>
> 答：${}^A p_{Bo} = 0$ （单位矩阵），$\{B\} = \{ {}^A_B R \quad 0 \}$

3.1 坐标系的描述

机器人手爪位姿描述与坐标系相同：

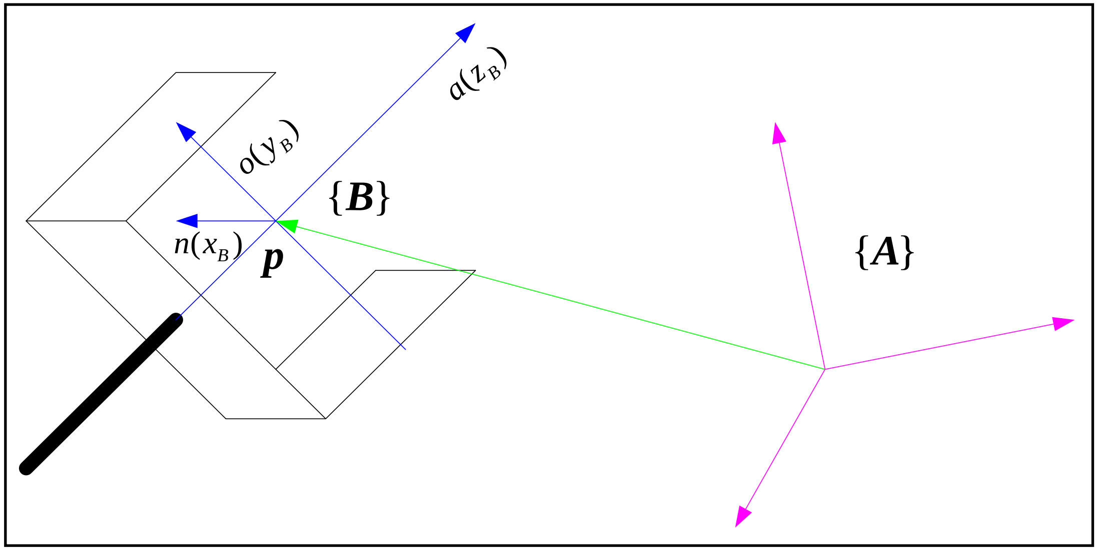
- **手爪坐标系——与手爪固接一起的坐标系**
  - z轴——手指接近物体的方向，接近矢量 $\boldsymbol{a}$ (approach)
  - y轴——两手指的连线方向，方位矢量 $\boldsymbol{o}$ (orientation)
  - x轴——右手法则规定，法向矢量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{o}\times\boldsymbol{a}$ (normal)
- **手爪的方位——旋转矩阵R，描述手爪的姿态**

$$R=\begin{bmatrix}\boldsymbol{n} & \boldsymbol{o} & \boldsymbol{a}\end{bmatrix}$$

- **手爪位姿的描述**

$$\{T\}=\{\boldsymbol{n}\quad \boldsymbol{o}\quad \boldsymbol{a}\quad \boldsymbol{p}\}$$

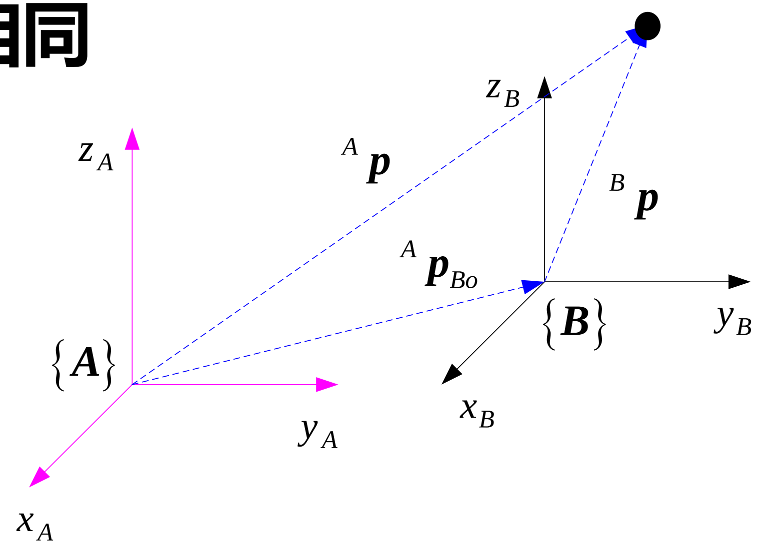
坐标原点位置



3.1 坐标变换

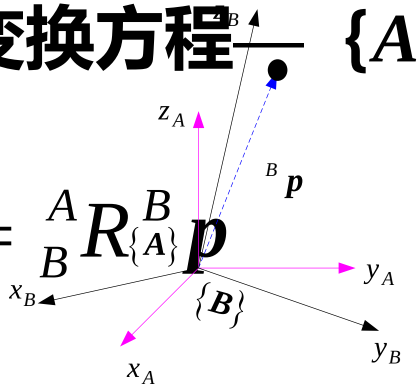
□ 平移变换方程— {*A*，*B*} 方位相同

$$ {}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{B}\boldsymbol{p} + {}^{A}\boldsymbol{p}_{B_0} $$



□ 旋转变换方程— {*A*，*B*} 原点相同

$$ {}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\boldsymbol{p} $$



□ 正交矩阵： ${}^{B}_{A}\boldsymbol{R} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{-1} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$

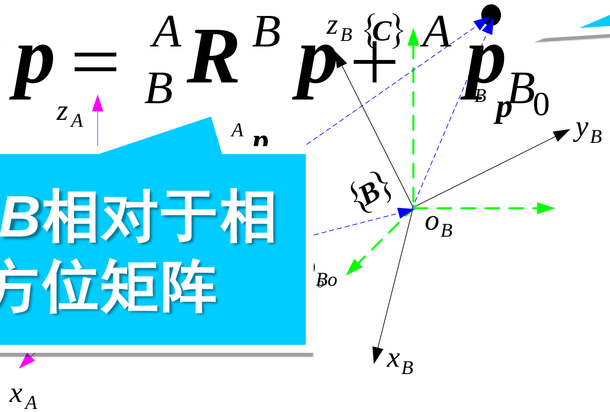
3.1 坐标变换

- 一般变换方程— {*A*，*B*} 方位和原点均不同

$$ {}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p} + {}^{A}\boldsymbol{p}_{B_0} $$

坐标系B的坐标原点相对于相对于A的位置

坐标系B相对于相对于A方位矩阵



- 过渡矩阵—公式3-13

$$ {}^{C}\boldsymbol{p} = \underline{{}^{C}_{B}\boldsymbol{R}}\,{}^{B}\boldsymbol{p} = \underline{{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}}\,{}^{B}\boldsymbol{p} $$

- 再由3-11得到复合变换

$$ \boxed{ {}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{C}\boldsymbol{p} + \underline{{}^{A}\boldsymbol{p}_{C_0}} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p} + \underline{{}^{A}\boldsymbol{p}_{B_0}} } $$

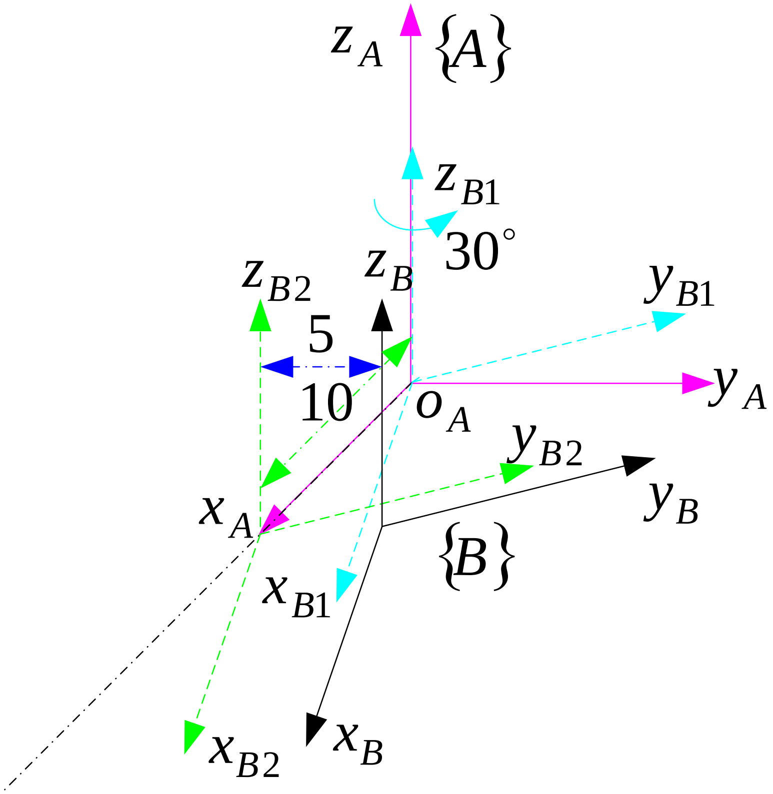
3.1 一般变换实例

- {A，B}初始位姿重合， {B}相对于{A}的z_A轴转 30度，再沿x_A轴移动10个单位、沿y_A轴移动5个单位，求位置矢量和旋转矩阵
- 假设${}^{B}\boldsymbol{p}=[3 \quad 7 \quad 0]^{\mathrm{T}}$求它在坐标系{$A$}中的描述。

$$
{}^{A}\boldsymbol{p}={}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p}+{}^{A}\boldsymbol{p}_{B_o}
$$

$$
{}^{B}\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}3\\7\\0\end{bmatrix},\ {}^{A}\boldsymbol{p}_{B_o}=\begin{bmatrix}10\\5\\0\end{bmatrix}
$$

$$
{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}\left(z,\quad 30^{\circ}\right)=\begin{bmatrix}\cos 30^{\circ} & -\sin 30^{\circ} & 0\\ \sin 30^{\circ} & \cos 30^{\circ} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow {}^{A}\boldsymbol{p}
$$



3.2 齐次坐标和齐次变换

□ 笛卡尔坐标—齐次坐标

$$\begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} & {}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{矩阵形式}} {}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\,{}^{B}\boldsymbol{p}$$

□ 齐次变换矩阵 ${}^{A}_{B}T$ 是4×4的方阵，具有如下形式：

$${}^{A}_{B}\boldsymbol{T} = \left[\begin{array}{c|c} {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} & {}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo} \\ \hline \boldsymbol{0} & 1 \end{array}\right]$$

□ 齐次变换：

齐次坐标　　　　齐次坐标

$${}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p} + {}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo} \Rightarrow \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} & {}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

旋转矩阵　平移矢量

3.2 齐次坐标和齐次变换

□ 规定：如下列向量表示空间的无穷远点

$$[a \quad b \quad c \quad 0]^{\mathrm{T}},\ a^2+b^2+c^2 \neq 0$$

- ◆ $[1\ 0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$ —— x轴
- ◆ $[0\ 1\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$ —— y轴无穷远点
- ◆ $[0\ 0\ 1\ 0]^{\mathrm{T}}$ —— z轴无穷远点
- ◆ $[0\ 0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$ ——无意义
- ◆ $[0\ 0\ 0\ 1]^{\mathrm{T}}$ ——代表0点（坐标原点）

空间某点直角坐标和齐次坐标

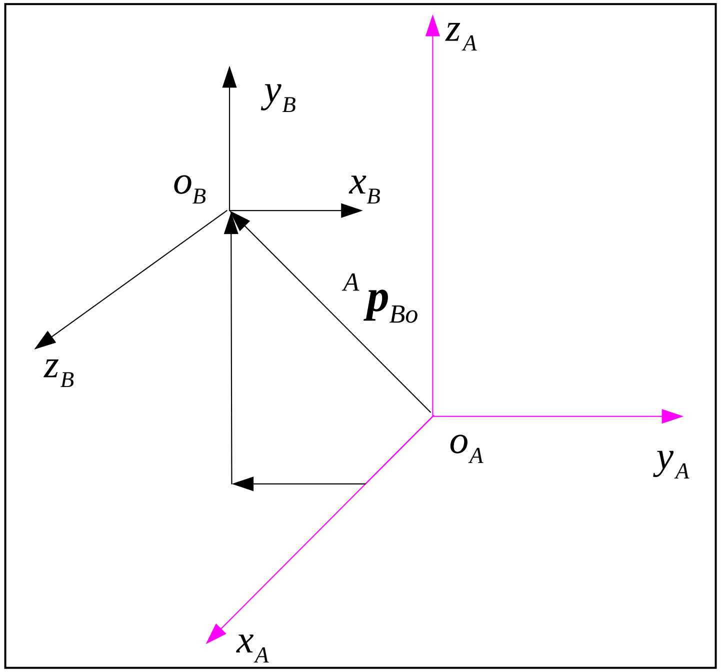
$$\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ \boldsymbol{p}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{bmatrix}$$

□ 利用齐次坐标不仅可以规定点的位置，还可用来规定矢量的方向。当第4 个元素非零时，代表点的位置；第4 个元素为零时，代表方向

3.2 齐次坐标和齐次变换

□ 齐次变换矩阵：

$$
{}_B^A\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$



1) $\{B\}$ 坐标原点相对于 $\{A\}$ 的位置是：

$$[1 \quad -3 \quad 4 \quad 1]^{\mathrm{T}}$$

2) $\{B\}$ 的三个坐标轴相对于 $\{A\}$ 的方向：

- ◆ $\{B\}$ 的x轴与 $\{A\}$ 的 y轴同向；
- ◆ $\{B\}$ 的y轴与 $\{A\}$ 的z 轴同向；
- ◆ $\{B\}$ 的z轴与 $\{A\}$ 的x轴同向。

3.2 齐次坐标和齐次变换

- 齐次变换矩阵：代表坐标平移与旋转的复合，可分解：

$$\begin{bmatrix} {}^A_B\boldsymbol{R} & {}^A\boldsymbol{p}_{Bo} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{3\times3} & {}^A\boldsymbol{p}_{Bo} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A_B\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

- 可表示为：

$${}^A_B\boldsymbol{T} = Trans\left({}^A\boldsymbol{p}_{Bo}\right)\cdot Rot\left(\boldsymbol{k},\theta\right)$$

由矢量 ${}^A\boldsymbol{p}_{Bo}$ 决定　　由过原点转轴 $\boldsymbol{k}$ 和转角 θ 决定

3.3 运动算子

□ 平移算子Trans(^{A}P): 左上角为3*3的单位矩阵

$$^{A}\boldsymbol{p}_2 = {}^{A}\boldsymbol{p}_1 + {}^{A}\boldsymbol{p}$$

$$^{A}\boldsymbol{p}_2 = \mathrm{Trans}\left({}^{A}\boldsymbol{p}\right){}^{A}\boldsymbol{p}_1$$

□ 旋转算子R:

$$^{A}\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{R}\,{}^{A}\boldsymbol{p}_1$$

$$^{A}\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{k},\theta\right){}^{A}\boldsymbol{p}_1$$

3.3 运动算子

- **运动算子的一般形式：** $\boxed{{}^{A}\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{T}\,{}^{A}\boldsymbol{p}_1}$
- **练习：在坐标系 $\{A\}$ 中，点 p 的运动轨迹如下：首先绕 z 轴旋转30度，再沿 x 轴平移10单位，最后沿 y 轴平移5单位。点 p 原来位置是 ${}^{A}\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ ，求运动后位置。**

◆ **实现上述旋转和平移的运动算子：** $\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 10 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

◆ **所以：** ${}^{A}\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{T}\,{}^{A}\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 10 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3.3 变换矩阵的运算

□ 齐次变换矩阵的物理含义

◆ **坐标系的描述**：${}_B^AT$描述坐标系$\{B\}$相对于参考系$\{A\}$的位姿。其中${}_B^AR$的各列分别描述$\{B\}$的3个坐标主轴的方向；${}^Ap_{Bo}$描述$\{B\}$的坐标原点的位置。齐次变换矩阵${}_B^AT$的前三列表示坐标系$\{B\}$相对参考系$\{A\}$的三个坐标轴的方向；最后一列表示$\{B\}$的原点。

◆ **坐标映射**：${}_B^AT$代表同一点p在两个坐标系$\{A,B\}$描述的映射关系。${}_B^AT$将${}^Bp$映射为${}^Ap$。其中${}_B^AR$为旋转映射，${}^Ap_{Bo}$为平移映射。

◆ **运动算子**：T表示在同一坐标系中，点p运动前、后的算子关系。算子T作用于p_1得出p_2。任一算子也可分解为平移算子与旋转算子的复合。

3.4 变换矩阵相乘

- 对于给定的坐标系$\{A\}$、$\{B\}$和$\{C\}$，已知$\{B\}$相对$\{A\}$的描述为 ${}_{B}^{A}T$，已知$\{C\}$相对$\{B\}$的描述为 ${}_{C}^{B}T$

$$ {}^{B}\boldsymbol{p} = {}_{C}^{B}\boldsymbol{T}\,{}^{C}\boldsymbol{p} $$

$$ {}^{A}\boldsymbol{p} = {}_{B}^{A}\boldsymbol{T}\,{}^{B}\boldsymbol{p} = {}_{B}^{A}\boldsymbol{T}\,{}_{C}^{B}\boldsymbol{T}\,{}^{C}\boldsymbol{p} $$

- 从而定义复合变换 ${}_{C}^{A}T$

$$ \boxed{{}_{C}^{A}\boldsymbol{T}} = {}_{B}^{A}\boldsymbol{T}\,{}_{C}^{B}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} {}_{B}^{A}\boldsymbol{R} & {}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo} \\ \boldsymbol{0}_{3\times1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{C}^{B}\boldsymbol{R} & {}^{B}\boldsymbol{p}_{Co} \\ \boldsymbol{0}_{3\times1} & 1 \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} {}_{B}^{A}\boldsymbol{R}\,{}_{C}^{B}\boldsymbol{R} & {}_{B}^{A}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p}_{Co} + {}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo} \\ \boldsymbol{0}_{3\times1} & 1 \end{bmatrix} $$

3.4 变换矩阵相乘

$$\boxed{{}^{A}_{C}\boldsymbol{T}} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\,{}^{B}_{C}\boldsymbol{T}$$

- 变换矩阵 ${}^{A}_{C}T$ 可解释为坐标系的映射变换；因为 ${}^{A}_{C}T$ 和 ${}^{B}_{C}T$ 分别代表同一坐标系 $\{C\}$ 相对于 $\{A\}$ 和 $\{B\}$ 的描述。上式表示映射变换 ${}^{A}_{B}T$ 将坐标系 $\{C\}$ 从 ${}^{B}_{C}T$ 映射为 ${}^{A}_{C}T$ 。
- 变换矩阵相乘还可作另一种解释：坐标系 $\{C\}$ 相对 $\{A\}$ 的描述是这样实现的：开始坐标系 $\{C\}$ 与 $\{A\}$ 重合，首先相对于 $\{A\}$ 作运动 ${}^{A}_{B}T$ 到达 $\{B\}$，然后相对 $\{B\}$ 做运动 ${}^{B}_{C}T$ 到达位姿 $\{C\}$。

3.4 变换矩阵相乘

- 矩阵相乘一般不满足交换律：

$$ {}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\,{}^{B}_{C}\boldsymbol{T} \neq {}^{B}_{C}\boldsymbol{T}\,{}^{A}_{B}\boldsymbol{T} $$

- 变换矩阵的左乘和右乘的运动解释是不同的：变换顺序“从右向左”，指明运动是相对固定坐标系而言的；变换顺序“从左向右”，指明运动是相对运动坐标系而言的。

- 变换顺序可调换的两个特例：两次变换都是平移变换、两次变换为绕同一轴的旋转变换

3.4 变换矩阵求逆

□ **给定变换：** $${}^{A}_{B}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} & {}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo} \\ \boldsymbol{0}_{3\times1} & 1 \end{bmatrix}$$

□ **如何确定：** $${}^{B}_{A}\boldsymbol{T} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{T}^{-1} \quad ?$$

□ **计算方法：**

◆ **直接计算逆矩阵**

◆ **利用变换关系：** $${}^{B}_{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} & {}^{B}_{A}\boldsymbol{R} & & {}^{B}\boldsymbol{p}_{Ao} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftarrow {}^{A}_{B}\boldsymbol{T}$$

3.4 变换矩阵求逆

□ 旋转变换的正交性：

$$ {}^{B}_{A}\boldsymbol{R} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{-1} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} $$

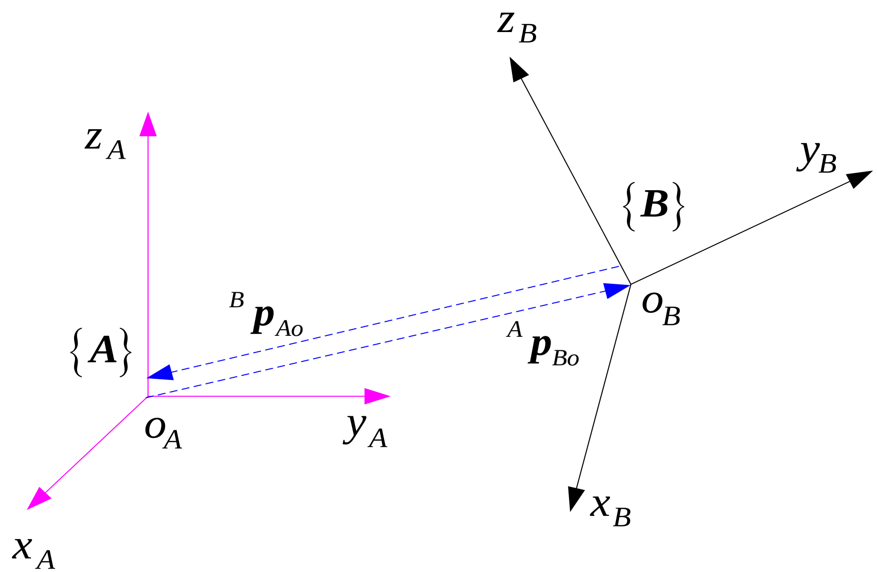
□ 可以得到：

$$ {}^{B}\left({}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo}\right) = {}^{B}_{A}\boldsymbol{R}\,{}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo} + {}^{B}\boldsymbol{p}_{Ao} = \boldsymbol{0} $$

{*A*} 中某点

$$ {}^{B}\boldsymbol{p}_{Ao} = -{}^{B}_{A}\boldsymbol{R}\,{}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo} = -{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\,{}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo} $$

$$ \boxed{{}^{B}_{A}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & -{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\,{}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo} \\ 0\quad 0\quad 0 & 1 \end{bmatrix}} $$



3.4 变换矩阵求逆

□ 练习：坐标系$\{B\}$相对于坐标系$\{A\}$绕其z轴转30°，再沿x轴移动4个单位，沿y轴移动3个单位，求$^B_A T$

解答：因为 $^A_B\boldsymbol{T} = Trans(4,3,0)\,Rot(z,30^\circ)$

$^A_B\boldsymbol{R}$ $\quad$ $^A\boldsymbol{p}_{Bo}$

$$^A_B\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 4 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

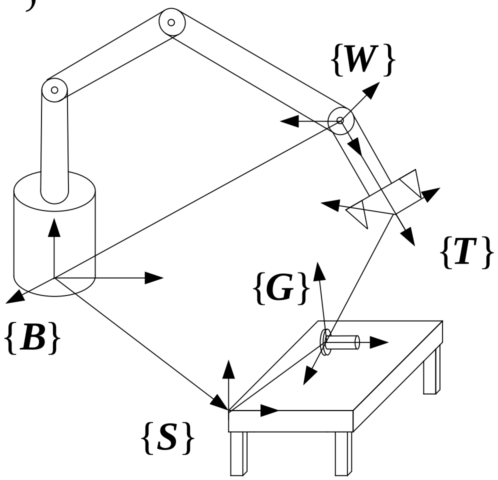
所以

$$^A_B\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} ^A_B\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & -{}^A_B\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\,{}^A\boldsymbol{p}_{Bo} \\ 0\quad 0\quad 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 & -4.964 \\ -0.5 & 0.866 & 0 & -0.598 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

另一种解释： $^B_A\boldsymbol{T} = {}^A_B\boldsymbol{T}^{-1} = Rot(z,-30^\circ)\,Trans(-4,-3,0)$

3.4 变换方程

- $\{B\}$代表基坐标系(基座框)、$\{W\}$代表腕框、$\{T\}$是工具框、$\{S\}$是工作站框、$\{G\}$是目标框
  - ${}^{B}_{S}T$ 描述工作站框相对于基座框的位姿；
  - ${}^{S}_{G}T$ 描述目标框相对于工作站框的位姿；
  - ${}^{B}_{W}T$ 描述腕框相对于基座框的位姿；



变换方程

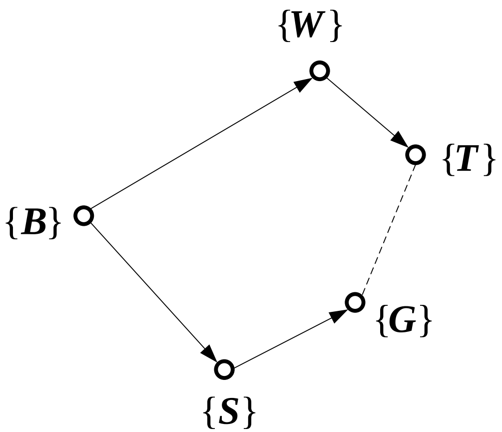
如何得到 ${}^{G}_{T}T$ ？

1） 建立变换方程

$$
{}^{B}_{T}T = {}^{B}_{W}T\,{}^{W}_{T}T, \qquad {}^{B}_{T}T = {}^{B}_{S}T\,{}^{S}_{G}T\,{}^{G}_{T}T
$$

2） 通过方程计算

$$
{}^{G}_{T}T = {}^{S}_{G}T^{-1}\,{}^{B}_{S}T^{-1}\,{}^{B}_{W}T\,{}^{W}_{T}T
$$



空间尺寸链

3.4 刚体变换群

- 任一刚体的位姿由 $(p, R): p \in \Re^3, R \in SO(3)$决定，定义刚体变换群

$$SE(3) = \{(p, R): p \in \Re^3, R \in SO(3)\} = \underline{\Re^3 \times SO(3)} \quad \text{(乘积空间)}$$

- $SE(3)$ 称为三维空间的特殊欧式群：满足封闭性和结合律，具有单位元和可逆性，但不具有交换律

- 刚体变换群 $SE(3)$和旋转群 $SO(3)$都是光滑流形，且矩阵乘法运算和求逆运算都是光滑映射，且构成李群（不可交换）

- 推广到n维空间：$SE(n) = \{(p, R): p \in \Re^n, R \in SO(n)\} = \Re^n \times SO(n)$

- n=3时，$SE(3)$表示空间运动，单位元为I_4； n=2时，$SE(2)$表示平面运动，单位元为I_3。$SE(3)$子群包括圆柱运动群，该群绕一直线旋转同时还沿该直线平移（螺旋运动）。

3.4 刚体变换群

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

圆柱运动群（*x*/*y*/*z*轴）

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p\theta/2\pi \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

螺旋运动子群 H_p（*p*称为螺旋运动的节距轴）

3.5 欧拉角与RPY角

刚体姿态的描述：思考

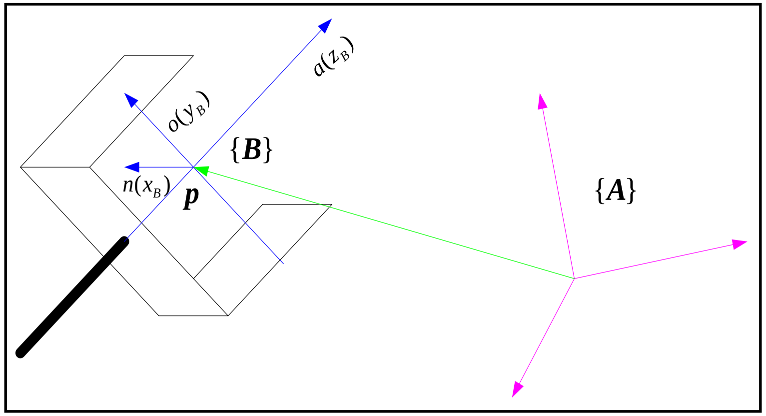
- 空间中的旋转是3自由度，那么如何把一般的旋转矩阵所表达的姿态，拆解成为3次旋转的角度，以对应到3个自由度?

- 拆解成为[3次旋转连乘]所需要注意的事项：
  - 旋转不具备互换性，多次旋转的先后顺序需要明确定义
  - 旋转转轴也需要明确定义，究竟是对[固定不动]的转轴旋转？还是对[转动的坐标系当下所在]的转轴旋转?
- 两种拆解方式：
  - 对方向[固定不动]的转轴旋转：RPY固定轴
  - 对[转动的坐标系当下所在]的转轴旋转：欧拉角

3.5 欧拉角与RPY角

引入其它参数法表示的必要性

- 旋转矩阵R用9个元素表示3个独立变量（不方便）；
- R作为变换或算子使用比较方便，作为方位描述并不方便，需要输入较多信息。**如机器人手爪方位的描述需输入：[n o a]**



n：法向矢量(normal)
o：方向矢量(orientation)
a：接近矢量(approach)

- 欧拉角/RPY角广泛的应用于航海、航天和天文学。

3.5 欧拉角与RPY角

思考与梳理

向量可以表达哪两种空间关系？

旋转矩阵具有哪3个特性？

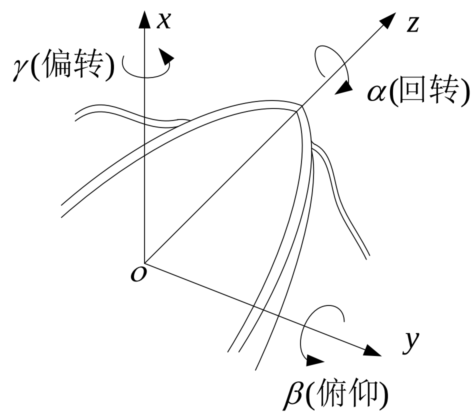
旋转矩阵具有哪3个功能？

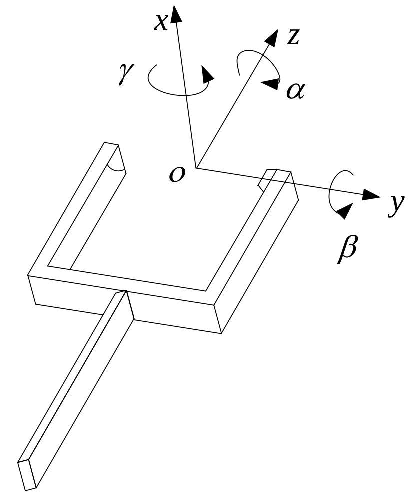
为什么要引入RPY角旋转和欧拉角旋转？

RPY角旋转和欧拉角旋转的本质区别在于？

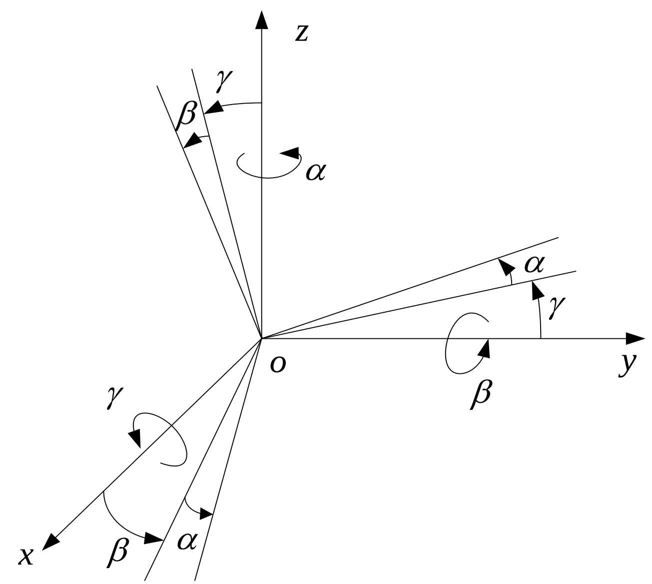
3.5 绕固定轴x-y-z旋转（RPY角）

- 船行驶方向为z轴，绕z轴旋转α角，**滚动(Roll)**；绕y轴旋转β角，**俯仰(Pitch)**；铅直方向为x轴，绕x轴旋转γ角**偏转(Yaw)**。





- RPY描述坐标系{B}的方法如下：{B}的初始方位与参考系{A}重合。首先将{B}绕x_A转γ角，再绕y_A转β角，最后绕z_A转α角。



3.5 绕固定轴*x*-*y*-*z*旋转（RPY角）

- **三次旋转都是相对于固定坐标系｛*A*｝而言，称为“绕固定轴*x*-*y*-*z*旋转”的RPY角法。按照“从右向左”的原则**

$$
{}_B^A\boldsymbol{R}_{xyz}(\gamma,\beta,\alpha)=\boldsymbol{R}(z_A,\alpha)\boldsymbol{R}(y_A,\beta)\boldsymbol{R}(x_A,\gamma)
$$

$$
=\begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} c\alpha\ c\beta & c\alpha\ s\beta\ s\gamma - s\alpha\ c\gamma & c\alpha\ s\beta\ c\gamma + s\alpha\ s\gamma \\ s\alpha\ c\beta & s\alpha\ s\beta\ s\gamma + c\alpha\ c\gamma & s\alpha\ s\beta\ c\gamma - c\alpha\ s\gamma \\ -s\beta & c\beta\ s\gamma & c\beta\ c\gamma \end{bmatrix}
$$

- **如果给定** ${}_B^A\boldsymbol{R}_{xyz}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

- **如何计算** γ,β,α **？**

3.5 绕固定轴x-y-z旋转（RPY角）

- **超越方程：3个独立变量、9个约束方程（6个不独立）**

$$\cos\beta=\sqrt{r_{11}^2+r_{21}^2}$$ **（取-90º≤β≤90º）**

- **如** $\cos\beta\neq 0$ **，得到RPY角的反正切表示：**

$$\beta=\mathrm{A}\tan 2\left(-r_{31},\sqrt{r_{11}^2+r_{21}^2}\right)$$

$$\alpha=\mathrm{A}\tan 2\left(r_{21},r_{11}\right)$$

$$\gamma=\mathrm{A}\tan 2\left(r_{32},r_{33}\right)$$

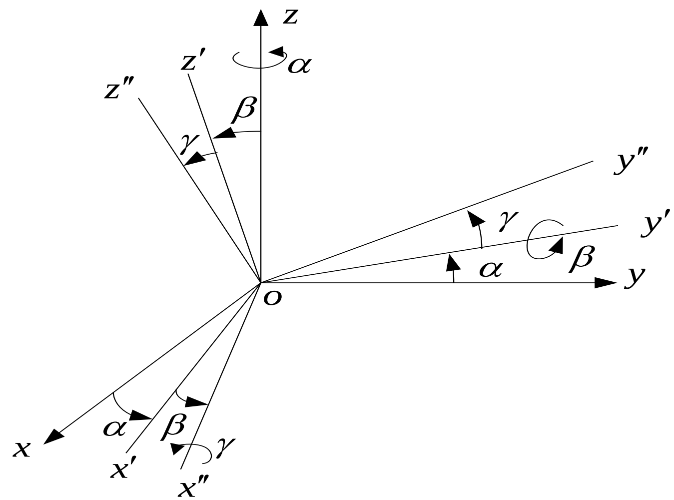
$$\boxed{\begin{aligned}\tan\alpha&=\frac{r_{21}}{r_{11}}\\ \tan\beta&=\frac{-r_{31}}{\sqrt{r_{11}^2+r_{21}^2}}\\ \tan\gamma&=\frac{r_{32}}{r_{33}}\end{aligned}}$$

其中 $\mathrm{A}\tan 2(y,x)$ **是**

双变量反正切函数

3.5 绕相对轴z-y-x旋转（欧拉角）

◆ RPY描述坐标系$\{B\}$的方法如下：$\{B\}$的初始方位与参考系$\{A\}$重合。首先将$\{B\}$绕z_B转α角，再绕y_B转β角，最后绕x_B转γ角。



◆ 各次转动**相对运动坐标系的某轴**进行的，转动顺序是绕z轴，y轴和x轴，故称为z-y-x（欧拉角）。按照“**从左向右**”原则

$$
{}_B^A\boldsymbol{R}_{zyx}(\alpha,\beta,\gamma)=\boldsymbol{R}(z,\alpha)\boldsymbol{R}(y,\beta)\boldsymbol{R}(x,\gamma)
$$

$$
=\begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}
$$

3.5 绕相对轴*z-y-x*旋转（欧拉角）

- 可以看出，与绕固定轴*x-y-z*的旋转结果完全相同。这是因为绕固定轴旋转的顺序若与绕运动旋转的**顺序相反**，且旋转的角度也**对应相等**，所得到变换矩阵是**相同**的。

- 因此，*z-y-x*欧拉角与固定轴*x-y-z*转角描述坐标系｛*B*｝是完全等价的。公式3-49和3-56是一致的。

- 绕运动坐标系转动的*z-y-z*欧拉角，遵循 **"从左向右"** 原则：

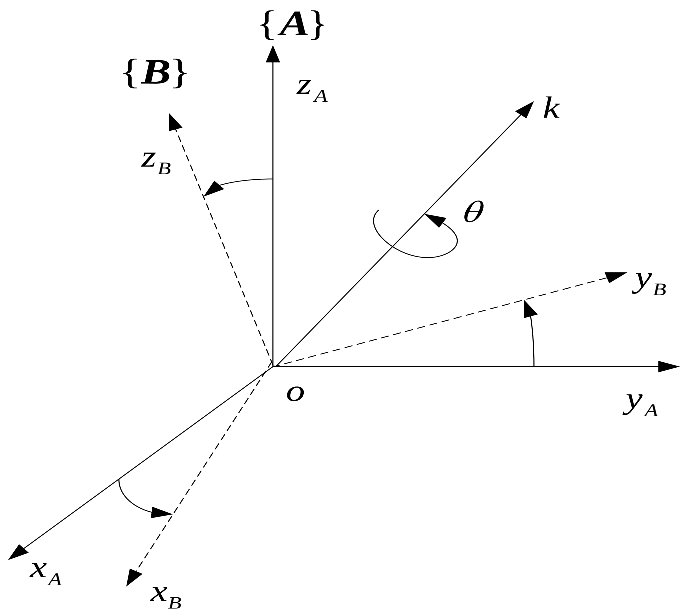
$$
{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}_{zyz}(\alpha,\beta,\gamma)=\boldsymbol{R}(z,\alpha)\boldsymbol{R}(y,\beta)\boldsymbol{R}(z,\gamma)
$$

$$
=\begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}
$$

- 反解与绕固定轴类似（**练习**）？

3.6 旋转变换通式

- 令 $\boldsymbol{k} = k_x i + k_y j + k_z k$ 是过原点的单位矢量
- 求绕任意轴 $\boldsymbol{k}$ 旋转 θ 角的变换矩阵 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta)$
- 为求 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta)$，定义两个辅助坐标系 $\{A'$，$B'\}$
  - $\{A'\}$和$\{B'\}$分别与$\{A\}$和$\{B\}$固接；
  - $\{A'\}$和$\{B'\}$的z轴与k重合，x，y轴任意；
  - 旋转之前，$\{A'\}$和$\{B'\}$重合，$\{A\}$和$\{B\}$重合。

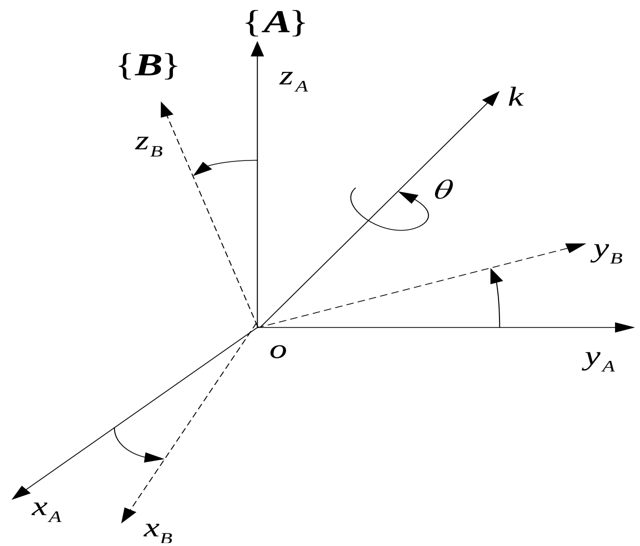


$$
{}^{A}_{A'}\boldsymbol{R} = {}^{B}_{B'}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & k_x \\ n_y & o_y & k_y \\ n_z & o_z & k_z \end{bmatrix}
$$

3.6 旋转变换通式

- 坐标系$\{B\}$绕k轴相对于$\{A\}$旋转θ角相当于：坐标系$\{B'\}$相对于$\{A'\}$的z轴旋转θ角，由下图得：

$$ {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(k,\theta) = {}^{A}_{A'}\boldsymbol{R}\,{}^{A'}_{B'}\boldsymbol{R}\,{}^{B'}_{B}\boldsymbol{R} $$



- 得到相似变换：

$$ \boldsymbol{R}(k,\theta) = {}^{A}_{A'}\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}(z,\theta)\,{}^{B}_{B'}\boldsymbol{R}^{-1}, $$

$$ \boldsymbol{R}(k,\theta) = {}^{A}_{A'}\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}(z,\theta)\,{}^{B}_{B'}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} $$

- 将上式展开并化简，得出 $\boldsymbol{R}(k,\theta)$ 的表达式。它只与矢量k有关，即只与$\{A'\}$的z轴有关。

$$
\begin{tikzcd}
\{\boldsymbol{A}\} \arrow[r] \arrow[d] & \{\boldsymbol{B}\} \\
\{\boldsymbol{A}'\} \arrow[r] & \{\boldsymbol{B}'\} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

3.6 旋转变换通式

□ 实际上：

$$R(k,\theta)=\begin{bmatrix} n_x & o_x & k_x \\ n_y & o_y & k_y \\ n_z & o_z & k_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ o_x & o_y & o_z \\ k_x & k_y & k_z \end{bmatrix}$$

□ 运用旋转矩阵的正交性：

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{o}\cdot\boldsymbol{o}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=1$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{o}$$

包括了各种特殊情况：

- ◆**当**k_x=1，k_y=k_z=0，**则可得式3-5**
- ◆**当**k_y=1，k_x=k_z=0，**则可得式3-6**
- ◆**当**k_z=1，k_y=k_x=0，**则可得式3-7**

□ 得到旋转变换通式：

$$R(k,\theta)=\begin{bmatrix} k_xk_x\text{Vers}\theta+c\theta & k_yk_x\text{Vers}\theta-k_zs\theta & k_zk_x\text{Vers}\theta+k_ys\theta \\ k_xk_y\text{Vers}\theta+k_zs\theta & k_yk_y\text{Vers}\theta+c\theta & k_zk_y\text{Vers}\theta-k_xs\theta \\ k_xk_z\text{Vers}\theta-k_ys\theta & k_yk_z\text{Vers}\theta+k_xs\theta & k_zk_z\text{Vers}\theta+c\theta \end{bmatrix}$$

3.6 等效转角和等效转轴

- **旋转变换通式：根据转轴和转角建立相应旋转变换矩阵；反向问题：根据旋转矩阵求其等效转轴与等效转角(*k*,*θ*)。**

- **给定旋转矩阵：** $\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$ **求出它的(*k*,*θ*)**

- **令** $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta)$ **，根据方程相等：**

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_x k_x \mathrm{Vers}\theta + c\theta & k_y k_x \mathrm{Vers}\theta - k_z s\theta & k_z k_x \mathrm{Vers}\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y \mathrm{Vers}\theta + k_z s\theta & k_y k_y \mathrm{Vers}\theta + c\theta & k_z k_y \mathrm{Vers}\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z \mathrm{Vers}\theta - k_y s\theta & k_y k_z \mathrm{Vers}\theta + k_x s\theta & k_z k_z \mathrm{Vers}\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

- **所以对角线相加：** $n_x+o_y+a_z=1+2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}\left(n_x+o_y+a_z-1\right)$

- **非对角线相减：**

$$\begin{aligned} o_z-a_y &= 2k_x\sin\theta \\ a_x-n_z &= 2k_y\sin\theta \\ n_y-o_x &= 2k_z\sin\theta \end{aligned} \Rightarrow k_x=\frac{o_z-a_y}{2\sin\theta},\ k_y=\frac{a_x-n_z}{2\sin\theta},\ k_z=\frac{n_y-o_x}{2\sin\theta}$$

3.6 等效转角和等效转轴

□ **练习：求复合矩阵** ${}^{A}_{B}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}\left(y,90^{\circ}\right)\boldsymbol{R}\left(z,90^{\circ}\right)$ **的等效转轴和转角(k,θ)。**

解答：1）计算旋转矩阵

$$
{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}
$$

2）确定 $\theta=120^{\circ}$

$$
\boxed{\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{1}{2}(0+0+0-1)=-\frac{1}{2}\\
\sin\theta &= \frac{1}{2}\sqrt{(1-0)^{2}+(1-0)^{2}+(1-0)^{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\tan\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2}\bigg/\left(-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}}
$$

3）确定转轴：

$$
k_x=\frac{1-0}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad k_y=\frac{1-0}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad k_z=\frac{1-0}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}
$$

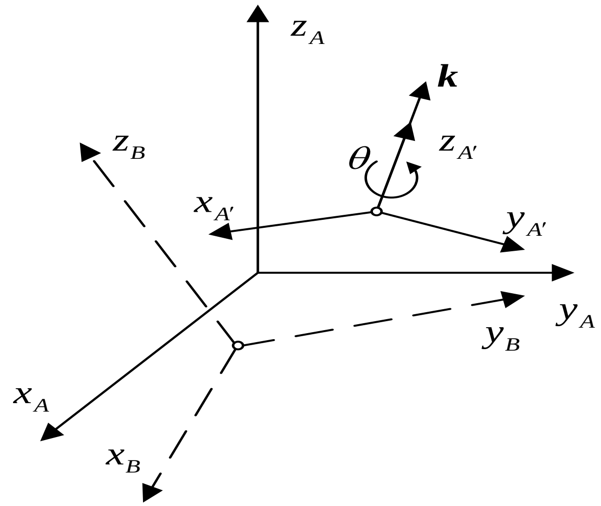
□ **可以证明（欧拉定理）：任何一组绕过原点的轴线的复合转动总是等价于绕某一过原点的轴线的转动 。**

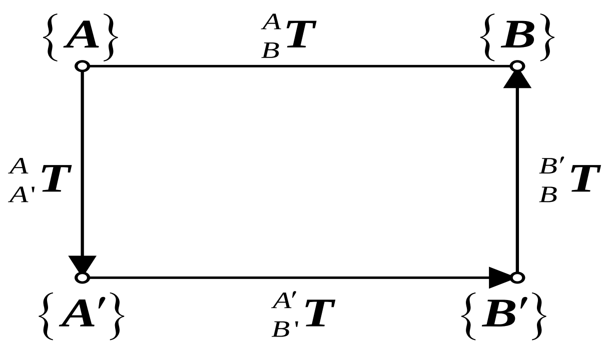
3.6 齐次变换通式

- **推广：旋转轴线k为不过原点的齐次变换通式**
- **假设单位矢量k通过点p，存在：**

$$\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}k_x & k_y & k_z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}p_x & p_y & p_z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

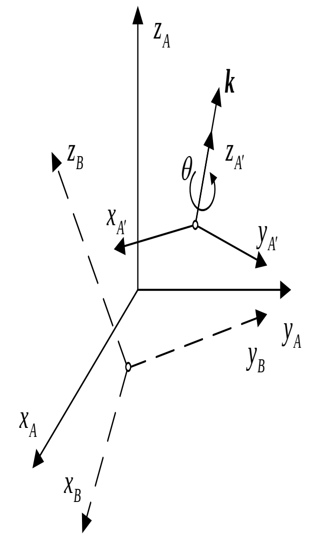
- **为求 ${}_{B}^{A}T$，定义两个辅助坐标系 $\{A',B'\}$**
  - $\{A'\}$和$\{B'\}$分别与$\{A\}$和$\{B\}$固接；
  - $\{A', B'\}$ 和$\{A, B\}$平行，原点过p点；
  - 旋转之前，$\{A'\}$和$\{B'\}$重合，$\{A\}$和$\{B\}$重合。





3.6 齐次变换通式

- 变换方程（相似变换）： ${}^{A}_{B}\boldsymbol{T} = {}^{A}_{A'}\boldsymbol{T}\, {}^{A'}_{B'}\boldsymbol{T}\, {}^{B'}_{B}\boldsymbol{T}$



- 其中:

$$ {}^{A}_{A'}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{3\times3} & \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} = Trans(\boldsymbol{p}) $$

$$ {}^{B'}_{B}\boldsymbol{T} = {}^{B}_{B'}\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{3\times3} & -\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} = Trans(-\boldsymbol{p}) $$

$$ {}^{A'}_{B'}\boldsymbol{T} = Rot(\boldsymbol{k},\theta) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta) & 0 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} $$

- 所以齐次变换通式:

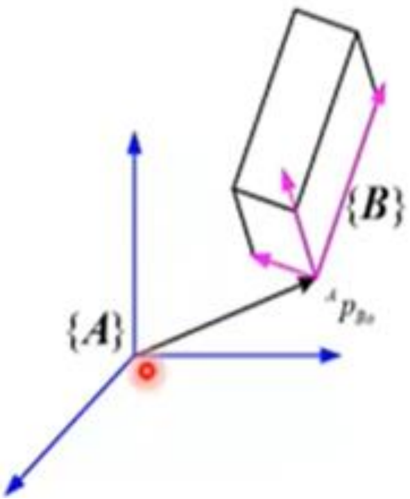
$$ {}^{A}_{B}\boldsymbol{T} = Trans(\boldsymbol{p})\,Rot(\boldsymbol{k},\theta)\,Trans(-\boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta) & -\boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta)\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} $$

3.7 位姿综合/计算复杂性（学习）

□ 坐标系描述：

- 给定参考坐标系{A}，刚体B与坐标系{B}固接
- {B}的原点一般定义在其特征点，用 ${}^{A}p_{Bo}$ 表示
- {B} 的姿态用 ${}^{A}_{B}\mathbf{R}$ 表示
- 刚体B的位姿由 ${}^{A}p_{Bo}$ 和 ${}^{A}_{B}\mathbf{R}$ 来描述

$$\{B\}=\left\{{}^{A}_{B}\mathbf{R}\quad {}^{A}p_{Bo}\right\}$$



3.7 位姿综合/计算复杂性（学习）

□ 机器人手爪位姿描述与坐标系相同：

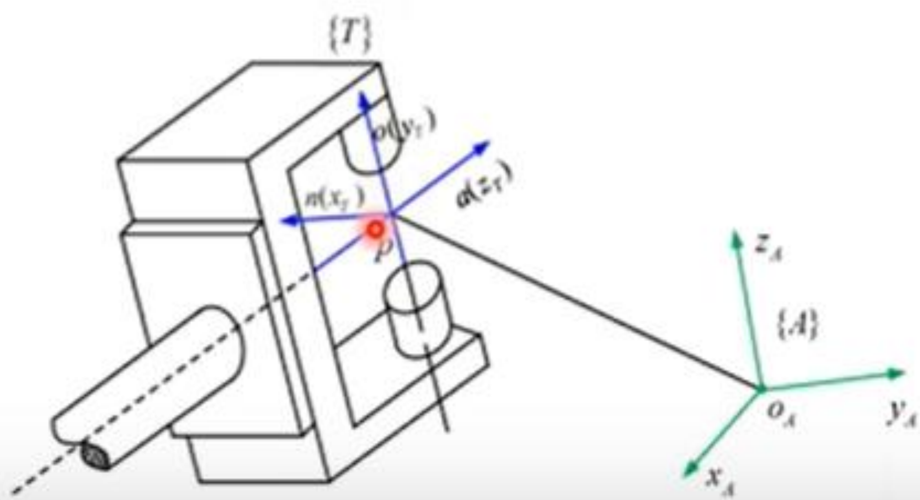
- ◆ 手爪坐标系——与手爪固接一起的坐标系
  - z轴——手指接近物体的方向，接近矢量 a (approach)
  - y轴——两手指的连线方向，方位矢量 o (orientation)
  - x轴——右手法则规定，法向矢量 $n=o\times a$ (normal)
- ◆ 手爪的方向——旋转矩阵R，描述手爪的姿态

$$R=\begin{bmatrix} n & o & a \end{bmatrix}$$

- ◆ 手爪位姿的描述

$$\{T\}=\{n \quad o \quad a \quad p\}$$

坐标原点位置

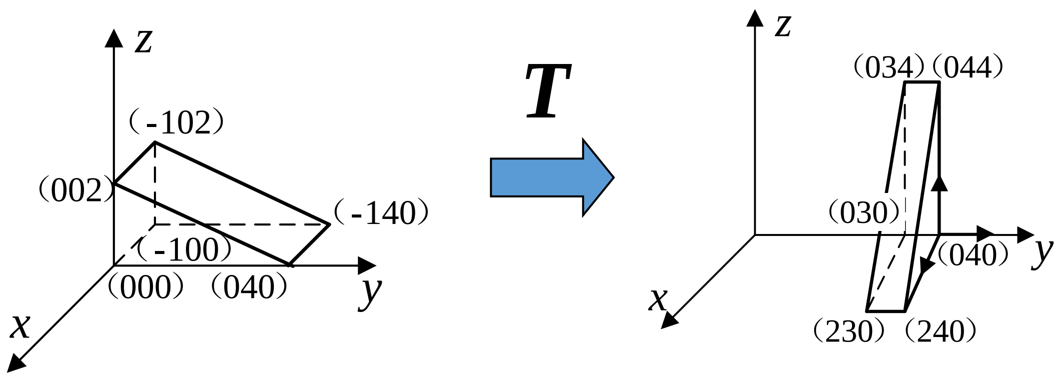


3.7 位姿综合/计算复杂性（学习）

- 楔块 发生如下位姿的变换，如何保证变换T的唯一性?

  条件的相容性、独立性和完备性

- 条件不相容时，没有解；条件不完备时，解不唯一，条件相容且完备时，解是存在的且是唯一的（旋转/任意变换综合）。



- 计算复杂性：前者9次乘、9次加；后者16次乘、12次加

$$ {}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p} + {}^{A}\boldsymbol{p}_{B0}, $$

$$ \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{R}\boldsymbol{R} & {}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix} $$

◆齐次变换会使计算量增加

◆浪费在0和1的无效计算上