

概述

理想、均质不可压、定常 $\rightarrow \mu = 0, \rho = \text{const}, \frac{\partial}{\partial t} = 0$

牛顿第二定律 $\xrightarrow[\text{微元体}]{\text{理想}}$ 欧拉运动方程 $\xrightarrow[\text{积分}]{\text{沿流线}}$ 沿流线的伯努利方程

基础知识

\rightarrow 守恒定律、牛顿第二定律、物质导数、描述流体运动的两种方法

2022-3-13 西安交通大学流体力学课程组 1

第四章 理想流体运动基础

欧拉方程

伯努利方程

伯努利方程的应用

2022-3-13 西安交通大学流体力学课程组 2

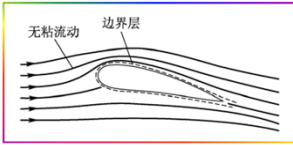
雷诺数

雷诺数 Re \rightarrow 粘性流动最重要的准则数，无量纲

Reynolds number

$\text{Re} = \frac{\rho V L}{\mu}$ $\text{Re} = \frac{V L}{\nu}$ 惯性力/粘性力

② 无粘流动的必要条件 $\rightarrow \text{Re} \gg 1$



2022-3-13 西安交通大学流体力学课程组 3

4.1 欧拉方程

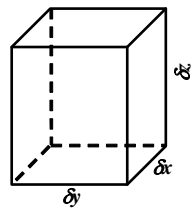
② 重力 $\rightarrow \vec{g} \cdot \rho \delta x \delta y \delta z$

② 表面力 $\xrightarrow[\text{无粘性力}]{} -\nabla p \delta x \delta y \delta z$

② 牛顿第二定律 $\sum \vec{F} = m \vec{a}$

$\rho \delta x \delta y \delta z \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p \delta x \delta y \delta z + \vec{g} \cdot \rho \delta x \delta y \delta z$

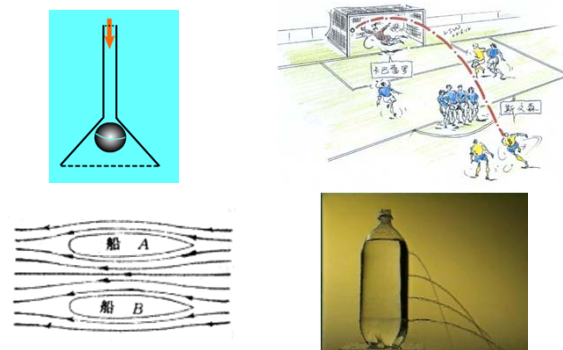
欧拉方程 $\rightarrow \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}$ $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p$



2022-3-13 西安交通大学流体力学课程组 4

4.3 伯努利方程

流体运动时，速度，压强和高度之间有什么关系？



2022-3-13 西安交通大学力学课程组 5

伯努利方程的导出1

定常流动欧拉运动微分方程沿流线的积分

$$\left. \begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{Du}{Dt} & (1) \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{Dv}{Dt} & (2) \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{Dw}{Dt} & (3) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (1) \times dx + (2) \times dy + \\ (3) \times dz \\ \text{沿流线积分} \end{array}$$

$$\Rightarrow g dz + \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = C$$

2022-3-13 西安交通大学力学课程组 6

伯努利方程的导出2

$\vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{D\vec{V}}{Dt}$ 条件(1): 理想

左第1项 $f_x dx + f_y dy + f_z dz = -g dz$ (2) 质量力有势且只有重力

左第2项 $-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = -\frac{1}{\rho} dp$

(3) 定常

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} dx &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx = u \frac{\partial u}{\partial x} dx + v \frac{\partial u}{\partial y} dx + w \frac{\partial u}{\partial z} dx \\ \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} &\Rightarrow \frac{Du}{Dt} dx = u \frac{\partial u}{\partial x} dx + u \frac{\partial u}{\partial y} dy + u \frac{\partial u}{\partial z} dz = u du \end{aligned} \right.$$

(4) 沿同一条流线成立

2022-3-13 西安交通大学力学课程组 7

伯努利方程的导出3

同理 $\frac{Dv}{Dt} dy = v dv$ $\frac{Dw}{Dt} dz = w dw$

右端三项相加后 $u du + v dv + w dw = V dV = d\left(\frac{V^2}{2}\right)$

(1) $\times dx + (2) \times dy + (3) \times dz \Rightarrow g dz + \frac{1}{\rho} dp + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0$

再积分 $\int g dz + \int \frac{1}{\rho} dp + \int d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow gz + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = C$

(5) 均质不可压缩

2022-3-13 西安交通大学力学课程组 8

伯努利方程的适用条件

伯努利方程适用条件 $\Rightarrow \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = C$
Bernoulli equation

- ① 理想均质不可压缩流体
- ② 定常流动
- ③ 质量力有势且只有重力
- ④ 沿同一条流线成立
- ⑤ 无其它能量输入输出

2022-3-13 西安交通大学流体力学课程组 9

伯努利方程的物理意义

$\frac{V_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}$ energy per unit mass

$gz \Rightarrow$ 单位质量流体的重力势能 potential energy

$V^2/2 \Rightarrow$ 单位质量流体的动能 kinetic energy

$p/\rho \Rightarrow$ 单位质量流体的压力能 pressure energy

机械能守恒方程，单位质量流体的重力势能 + 压力能 + 动能沿流线守恒

2022-3-13 西安交通大学流体力学课程组 10

伯努利方程的几何意义

单位重量流体的伯努利方程 \Rightarrow energy per unit weight

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

$z \Rightarrow$ potential head
位置水头，流体质点相对于基准面的位置高度

2022-3-13 西安交通大学流体力学课程组 11

伯努利方程的几何意义

$\frac{V^2}{2g} \Rightarrow$ 速度水头，不考虑阻力时流体以速度 V 垂直上射的高度 velocity head

$\frac{p}{\rho g} \Rightarrow$ 压强水头，测压管高度，产生压强 p 所需的流体柱高度 pressure head

2022-3-13 西安交通大学流体力学课程组 12

总能量线和测压管水头线1

Energy line
总能量线

Hydraulic grade line
测压管水头线

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = \text{const} \quad \text{总能量 (总水头)}$$

沿一条流线总能为常数，总能量线为水平直线

2022-3-13 西安交通大学力学课程组 13

总能量线和测压管水头线1

① 总能量线 \rightarrow 水平直线，与自由面等高， $V=0$ ， $P_m=0$

② 测压管水头线 \rightarrow 水平直线，与管出口等高， $P_m=0$

③ 由管道与测压管水头线的相对位置判断管中压强正负

2022-3-13 西安交通大学力学课程组 14

静压、动压、滞止压强

流体水平流动时，或者高度差的影响不显著时
(如气体的流动)

$$p + \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 = C$$

static pressure 静压 动压

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2$$

滞止压强 stagnation pressure

流速高压强大 流速低压强小

滞止点 滞止点

2022-3-13 西安交通大学力学课程组 15

4.4 伯努利方程的应用1

奥林匹克号，1912
玛丽皇后号，1942

50km/h，吸引力8千克

2022-3-13 西安交通大学力学课程组 16

伯努利方程的应用2

乒乓球上旋球

香蕉球

倒啤酒

2022-3-13 西安交通大学力学课程组 17

伯努利方程的应用3

飞机机翼升力

水翼船

2022-3-13 西安交通大学力学课程组 18

伯努利方程的应用4

速度测量

➡

简单毕托管

pilot probe

驻点

滞止流线

➡

$V_1 = \sqrt{2gh}$

$$p_2 = p_0 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

$$p_1 = p_a + \rho g z$$

$$p_2 = p_a + \rho g z + pgh$$

2022-3-13 西安交通大学力学课程组 19

伯努利方程的应用5

毕托管

pilot-static probe

$$V = \sqrt{2gh \frac{\rho_0 - \rho}{\rho}}$$

2022-3-13 西安交通大学力学课程组 20

伯努利方程的应用6

自由表面1, 喷嘴2, 自由面与喷嘴之间的高度差为 h , 求喷嘴出口速度 v_2 和 h 之间的关系。

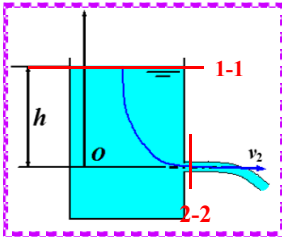
对1, 2两点列伯努利方程

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

由 $z_1 = z_2 + h \quad V_1 = 0$


$$p_1 = p_2 = p_a$$

→ $V_2 = \sqrt{2gh}$ Torricelli 1644

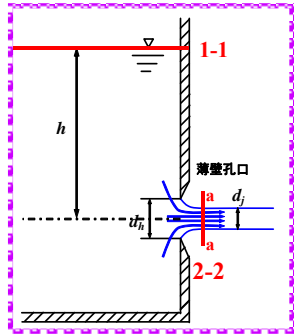


2022-3-13 西安交通大学流体力学课程组 21

伯努利方程的应用7



实际中由于粘性、表面张力等, 需要修正

$$Q = C_d A \sqrt{2gh}$$


2022-3-13 西安交通大学流体力学课程组 22

伯努利方程的应用8

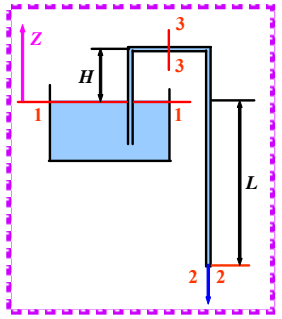
虹吸管 siphon pipe

→ $V_2 = \sqrt{2gL}$

④ 最高截面表压

$$p_{3m} = -\rho g (H + L)$$

④ 注意冷沸腾现象



2022-3-13 西安交通大学流体力学课程组 23

伯努利方程的应用9

1--2

$$L + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{v^2}{2g}$$

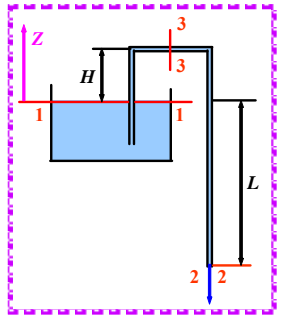
→ $V_2 = \sqrt{2gL}$

1--3

$$0 + 0 + 0 = H + \frac{p_{3m}}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

④ 最高截面表压

→ $p_{3m} = -\rho g (H + L)$



2022-3-13 西安交通大学流体力学课程组 24

伯努利方程的应用10

流量测量 → **文丘里流量计** *Venturi meter*

$$Q = A_2 \sqrt{\frac{2gh(\rho_0 - \rho)}{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} \rho$$

⊙ 考虑粘性影响，需乘以流量系数 C_d

2022-3-13 西安交通大学流体力学课程组 25

伯努利方程的应用11

节流式流量计

孔板流量计 *orifice meter*

喷嘴流量计 *nozzle meter*

(a) 孔板流量计

(b) 喷嘴流量计

2022-3-13 西安交通大学流体力学课程组 26

作业

作业：P.130~132

- ⊙ 4-8
- ⊙ 4-12
- ⊙ 4-13
- ⊙ 4-18
- ⊙ 4-20

2022-3-13 西安交通大学流体力学课程组 27

小结1

欧拉方程

→ 适用条件，牛顿第二定律

公式

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}$$

2022-3-13 西安交通大学流体力学课程组 28

小結2

沿流线积分伯努利方程

→ 适用条件，物理意义，应用

公式

$$\frac{V_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}$$
$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

2022-3-13 西安交通大学力学课程组 29