第 10 章（之 2）（总第 52 次）

教学内容：§10.2 空间直角坐标系与向量代数

1. 填空题

*(1) 点 A（2，－3，－1）关于点 M（3，1，－2）的对称点是______ .

答：$(4,5,-3)$

**(2) 设平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点为 $A(2,-3,1), B(-2,4,3), C(3,-1,-3)$，则 D 点为______ .

答：（$7,-8,-5$）

**(3) 已知 $\vec{a}=\{4,-5,3\}, \vec{b}=\{1,-4,z\}$，且 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，则 $z=$______ .

答：-8

**（4）以 $A=(2,0,0)$，$B=(0,3,0)$，$C=(0,0,6)$，$D=(2,3,8)$ 为顶点的四面体体积 $V=$__________。

答： 14

**2. A, B 两点的坐标分别为 $(-2,5,p),(q,-3,1)$，线段 AB 与 y 轴相交且被 y 轴平分，求 p,q 之值及交点坐标.

解：令 AB 与 y 轴相交于 C 点，即 C 为 AB 的中点，则 C 点坐标为 $(\frac{-2+q}{2},\frac{5-3}{2},\frac{p+1}{2})$，

又 C 点在 y 轴上，所以 $\frac{-2+q}{2}=0,\quad \frac{p+1}{2}=0$，即 $q=2, p=-1$，

故 C 点的坐标为 $(0,1,0)$，即交点的坐标为 $(0,1,0)$.

**3. 设 A, B 两点的坐标分别为 $(0,2,-1),(1,0,1)$. 求

（1）向量 $\vec{AB}$ 的模；（2）向量 $\vec{AB}$ 的方向余弦；

（3）使 $\vec{AC}=2\vec{AB}$ 的 C 点坐标.

解：（1） $\vec{AB}=\{1,-2,2\}$， 则 $|\vec{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$，

所以 $\vec{AB}$ 的模为 3.

（2）$\cos\alpha=\frac{1}{3},\quad \cos\beta=-\frac{2}{3},\quad \cos r=\frac{2}{3}$.

（3） 设 C 的坐标为（x, y, z），

由 $\vec{AC}=2\vec{AB}$ 可知 $\vec{AB}+\vec{BC}=2\vec{AB}$，即 $\vec{AB}=\vec{BC}$， 点 B 为中点，

由中点计算公式，有

$1=\dfrac{0+x}{2}$， $0=\dfrac{2+y}{2}$， $1=\dfrac{-1+z}{2}$，

解得 $x=2$， $y=-2$， $z=3$， 所以 C 点的坐标为 $(2,-2,3)$.

**4. 求 p,q 的值，使向量 $\{2,p,-4\}$ 与 $\{-1,0,q\}$ 平行，再求一组使此两向量垂直的 p,q 值.

解：向量 $\vec{u}=\{2,p,-4\}$ 与 $\vec{v}=\{-1,0,q\}$ 平行， 即：$\vec{u}=\lambda\vec{v}$，

$\therefore \dfrac{2}{-1}=\dfrac{p}{0}=\dfrac{-4}{q}$， $\therefore p=0,q=2$，

向量 $\vec{u}$ 与 $\vec{v}$ 垂直时， $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$，

$\therefore 2\times(-1)+p\times 0+(-4)\times q=0$.

$\therefore q=-\dfrac{1}{2}$， p 为任意值.

** 5. 设 $\vec{a}=\{1,-2,2\}$， $\vec{b}=\{3,0,-4\}$，求：

（1）$\vec{a}\cdot\vec{j}$； （2）$\vec{b}\times\vec{k}$；

（3）$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$； （4）$(\vec{a}+\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})$.

解：（1）$\vec{a}\cdot\vec{j}=(\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k})\cdot\vec{j}=-2$.

（2）$\vec{b}\times\vec{k}=(3\vec{i}-4\vec{k})\times\vec{k}=3\vec{i}\times\vec{k}=-3\vec{j}$.

（3）$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\{2\times1+3,2\times(-2),2\times2-4\}\cdot\{1-3,-2,2-(-4)\}$

$=\{5,-4,0\}\cdot\{-2,-2,6\}=5\times(-2)+(-4)\times(-2)+0\times6=-2$.

（4）$(\vec{a}+\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})=\{4,-2,-2\}\times\{0,-6,10\}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & -2\\ 0 & -6 & 10\end{vmatrix}=\{-32,-40,-24\}$.

** 6. 设 $\vec{a}=\{0,1,-1\}$， $\vec{b}=\{\sqrt{2},-1,1\}$，求：

（1）$(\vec{a})_{\vec{b}},(\vec{b})_{\vec{a}}$； （2）$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角.

解：（1）$(\vec{a})_{\vec{b}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}}=\dfrac{\{0,1,-1\}\cdot\{\sqrt{2},-1,1\}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-1)^2+1}}=-1$；

$$\left(\vec{b}\right)_{\vec{a}}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{\left\{\sqrt{2},-1,1\right\}\cdot\left\{0,1,-1\right\}}{\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2}}=-\sqrt{2}\ ;$$

（2）$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\theta$， 即 $-2=\sqrt{2}\times2\times\cos\theta$， 则 $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $0\le\theta\le\pi$，所以 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$，即 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{3\pi}{4}$.

** 7. 在 yz 平面内求模为 10 的向量 $\vec{b}$，使它和向量 $\vec{a}=8\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}$ 垂直.

解：∵ 向量 $\vec{b}$ 在 yz 平面内， ∴ 可设坐标为 $\{0,y,z\}$，

∵ $\vec{b}\perp\vec{a}$， ∴ $\vec{b}\cdot\vec{a}=0$，

即：$\{0,y,z\}\cdot\{8,-4,3\}=0$， $\therefore -4y+3z=0$，

又 $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{y^2+z^2}=10$， $\therefore z=8, y=6$， 或 $z=-8, y=-6$，

∴向量 $\vec{b}$ 的坐标为：$\{0,6,8\}$ 或 $\{0,-6,-8\}$.

**8. 求以向量 $\vec{a}=\{1,2,-1\}$ 和 $\vec{b}=\{1,-1,0\}$ 为邻边的平行四边形的面积.

解： $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\{-1,-1,-3\}$，

则平行四边形的面积为 $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{11}$ 。

***9. 设 $\vec{a}=\{1,1,0\}$，$\vec{b}=\{1,0,1\}$，向量 $\vec{v}$ 与 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 共面，且 $\mathrm{P}rj_{\vec{a}}\vec{v}=\mathrm{P}rj_{\vec{b}}\vec{v}=3$，求 $\vec{v}$ 。

解： 设 $\vec{v}=\{x,y,z\}$，按 $\vec{v}$ 、$\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 三向量共面，有

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0，\qquad 即 \qquad x - y - z = 0， \qquad （1）$$

根据 $\Pr j_{\vec{a}} \vec{v} = 3$，有 $\dfrac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \cdot \vec{v} = 3$，即

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) = 3 \quad 或 \quad (x + y) = 3\sqrt{2} \qquad （2）$$

根据 $\Pr j_{\vec{b}} \vec{v} = 3$，有 $\dfrac{1}{|\vec{b}|} \vec{b} \cdot \vec{v} = 3$，即

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x + z) = 3 \quad 或 \quad (x + z) = 3\sqrt{2} \qquad （3）$$

（1）、（2）、（3）三式联立，解得 $x = 2\sqrt{2}$，$y = z = \sqrt{2}$。所以 $\vec{v} = \sqrt{2}\{2,1,1\}$。

*** 10．试用向量的方法证明

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^{\ 2}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{3} b_i^{\ 2}} \geq \left| \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \right|，$$

其中 a_1, a_2, a_3 及 b_1, b_2, b_3 为任意实数.

解：设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的坐标分别为 $\{a_1, a_2, a_3\}, \{b_1, b_2, b_3\}$，

$$\left| \vec{a} \cdot \vec{b} \right| = \left| \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cos \langle \vec{a}, \hat{\ } \vec{b} \rangle \right| \leq \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right|，$$

即：$\left| a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \right| \leq \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}} \cdot \sqrt{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + b_3^{\ 2}}$，

$$\therefore \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^{\ 2}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{3} b_i^{\ 2}} \geq \left| \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \right|.$$

第 10 章（之 3）（总第 53 次）

教学内容：§10.3 平面与直线[10.3.1]

**1. 解下列各题

（1）平行于 x 轴，且过点 $P=(3,-1,2)$ 及 $Q=(0,1,0)$ 的平面方程是______ .

答： $y+z=1$。

（2）与 yOz 坐标平面垂直的平面的一般方程为______ .

答： $By+Cz+d=0 \qquad (B^2+C^2\neq 0)$

（3）过点 $P=(1,2,1)$ 与向量 $\vec{S}_1=\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$， $\vec{S}_2=-\vec{j}-\vec{k}$ 平行的平面方程为_______ .

答： $x-y+z=0$。

（4）点 $M_0=(6,2,-1)$ 到平面 $x-2y+2z+6=0$ 的距离为 $d=$__________.

答： $d=\dfrac{|6-2\times 2+2\times(-1)+6|}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}}=2$。

（5）两平面 $2x+y-z-1=0$ 和 $x-y-2z+1=0$ 间的夹角是 ___________。

答： $\dfrac{\pi}{3}$。

（6）平面 $3x-3y-6=0$ 的特征是 （　　）

（A）平行于 xOy 平面　　（B）平行于 z 轴，但不通过 z 轴

（C）垂直于 y 轴　　（D）通过 z 轴

答：B

**2. 填表讨论一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中，系数 A,B,C,D 中有一个或数个等于零的特殊情况，与图象的特征的对应关系.

系 数 情 况	图 像 特 征
$C=0$， $ABD\neq 0$	
$A=D=0$， $BC\neq 0$	
	平面 Π 过 z 轴
	平面 Π 垂直于 y 轴

解： $Ax+By+Cz+D=0$，

（1） $C=0, ABD\neq 0$ 平行于 z 轴（不包括过 z 轴）的平面.

（2） $A=D=0,\ B\cdot C\neq 0$ 过 x 轴的平面（不包括过 y 轴、z 轴的平面）.

（3） $C=D=0,\ A^2+B^2\neq 0, (A\cdot B\neq 0)$ 过 z 轴的平面.

（4） $B\neq 0, A=C=0$ 平面垂直于 y 轴.

3．在下列各题中，求出满足给定条件的平面方程：

**（1）过点 $P=(-1,3,-2)$ 及 $Q=(0,2,-1)$ 且平行于向量 $\vec{l}=\{2,-1,-1\}$；

解： 所求平面的法向量 $\vec{n}$ 垂直于向量 $\vec{l}=\{2,-1,-1\}$ 与向量 $\overrightarrow{PQ}=\{1,-1,1\}$，故取

$$\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\vec{l}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=\{2,3,1\}.$$

故可得所求平面方程为 $2(x+1)+3(y-3)+(z+2)=0$，

即 $2x+3y+z-5=0$.

**（2）过 z 轴且垂直于平面 $3x-2y-z+7=0$；

解：平面 $3x-2y-z+7=0$ 的法向量 $\overrightarrow{n^0}=\{3,-2,-1\}$，

故所求平面法向量 $\vec{n}$ 与 $\overrightarrow{n^0}$ 垂直，与 z 轴正交，故可取

$$\vec{n}=\overrightarrow{n^0}\times\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\{-2,-3,0\},$$

所求平面过 z 轴，故此平面必经过原点 $(0,0,0)$，

故可得所求平面方程为 $-2x-3y+0z=0$，

即 $2x+3y=0$.

**（3）垂直于 yz 坐标面，且过点 $P=(4,0,-2)$ 和 $Q=(15,1,7)$；

解：由题意可知 $P=(4,0,-2)$、$Q=(15,1,7)$，所以 $\boldsymbol{PQ}=\{\mathbf{11,1,9}\}$. 又由题意可知所求平面法向量 $\vec{n}$ 即与 x 轴垂直，又与向量 $\overrightarrow{PQ}$ 垂直，故可取

$$\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 9\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\{0,9,-1\},$$

故可得所求平面方程为：$9(y-0)+(-1)(z+2)=0$，

即： $9y-z-2=0$.

***4. 自点 $P_0=(2,3,-5)$ 分别向各坐标面作垂线，求过三个垂足的平面方程.

解：垂足分别为：$A=(2,3,0)$ 、$B=(0,3,-5)$ 和 $C=(2,0,-5)$ ，所以

$\overrightarrow{AB}=\{-2,0,-5\},\ \overrightarrow{AC}=\{0,-3,-5\}$

平面法向量为

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 0 & -5\\ 0 & -3 & -5\end{vmatrix}=\{-15,-10,6\}$$

故平面方程为：$15x+10y-6z-60=0$.

*** 5. 过两点 $M=(0,4,-3)$ 和 $N=(6,-4,3)$ 作平面，使之不过原点，且使其在坐标轴上截距之和等于零，求此平面方程.

解：设平面方程为：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{a+b}=1$，由于它过 M,N 两点，则

$$\begin{cases}\dfrac{4}{b}+\dfrac{3}{a+b}=1\\ \dfrac{6}{a}-\dfrac{4}{b}-\dfrac{3}{a+b}=1\end{cases}$$

解得：$a=3,\qquad b=-2,6$，

故平面方程为： $2x-3y-6z=6$ 或 $6x+3y-2z=18$.

**6. 判断下列各组平面相对位置，是平行，垂直还是相交，重合.

（1）$\pi_1{:}x-y+2z-1=0,\pi_2{:}2x-2y+4z-3=0$

（2）$\pi_1{:}2x-2y-z-1=0,\pi_2{:}x+2y-2z=0$

解：（1）π_1,π_2 法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=\{1,-1,2\},\overrightarrow{n_2}=\{2,-2,4\}\overrightarrow{n_2}=2\overrightarrow{n_1}$

取 π_1 上一点 $(1,0,0)$，显然不在 π_2 上，故 π_1,π_2 平行，不重合.

（2）π_1,π_2 法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=\{2,-2,-1\},\overrightarrow{n_2}=\{1,2,-2\},\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{n_1}=0$

故 $\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_1}$ 垂直，从而 π_1,π_2 垂直.

第 10 章（之 4）（总第 54 次）

教学内容：§10.3 平面与直线[10.3.2，10.3.3]

**1．解下列各题：

（1） 过点 $M_1(3,-2,1), M_2(-1,0,2)$ 的直线方程为_______________ ．

答：$\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$

（2） 直线$\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ 2x+y-2z+6=0 \end{cases}$在 xOz 坐标面上的交点为 $P=$___________，并利用该点的坐标，写出此直线的对称式方程_________________和参数方程___________________.

答： $P=(0,0,3)$．对称式方程为$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-3}{5}$，参数方程为$\begin{cases} x=3t \\ y=4t \\ z=5t+3 \end{cases}$

（3）直线$x+a=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{k}$在平面$x+y-z=3$上的充要条件是$a=$_____，$k=$_____.

答：$a=-2$，$k=3$．因为点$P=(-a,1,0)$在平面上，直线的方向向量$\vec{l}=\{1,2,k\}$与平面的法向量$\vec{n}=\{1,1,-1\}$必须垂直.

**2．求经过点 $A=(-3,0,2)$ 且与两个平面 $x+z=1$ 及 $x+y+z=1$ 同时平行的直线方程.

解：所求直线 L 的方向向量 $\vec{l}\perp\vec{n}_1=\{1,0,1\}$，且 $\vec{l}\perp\vec{n}_2=\{1,1,1\}$，

∴ 可取 $\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\{-1,0,1\}$，

∴ 所求直线方程为：$\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y}{0}=z-2$．

**3．求经过点 $A=(2,-1,0)$ 且与两条直线 $x=y=z$ 及 $\frac{x+1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$ 同时垂直的直线方程.

解：所求直线 L 的方向向量 $\vec{l}\perp\vec{l}_1=\{1,1,1\}$，且 $\vec{l}\perp\vec{l}_2=\{0,1,-1\}$，

$\therefore$ 可取 $\vec{l}=\vec{l}_1\times\vec{l}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=\{-2,1,1\}$，　　$\therefore$ 所求直线方程为：$\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{1}=z$.

**4. 求通过点 $M_0=(2,1,-5)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 相交并垂直的直线方程.

解法一：直线 $L_1:\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 上取一点 $M_1=(-1,1,0)$，

过点 M_0 与直线 L_1 的平面 π 的法向量 $\vec{n}$，则 $\vec{n}\perp\vec{l}_1$ 且 $\vec{n}\perp\overrightarrow{M_0M_1}$，

$\therefore\vec{l}_1\times\overrightarrow{M_0M_1}=\{3,2,-1\}\times\{-3,0,5\}=\{10,-12,6\}$，故 $\vec{n}$ 可取为 $\vec{n}=\{5,-6,3\}$.

因所求直线 L 过点 M_0 点且与 L_1 相交，故 L 亦在平面 π 上，

故 $\vec{l}\perp\vec{n},\quad\vec{l}_1\times\vec{n}=\{0,-14,-28\}$，　故可取 $\vec{l}=\{0,1,2\}$.

故所求直线方程为　$\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+5}{2}$.

解法二：过点 M_0 作垂直于直线 L_1 的平面 π：

$3(x-2)+2(y-1)-(z+5)=0$，即 $3x+2y-z-13=0$

直线 L_1 与平面 π 的交点 M 的坐标满足：$\begin{cases}3x+2y-z-13=0\\\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=1\\x=2\\y=3\\z=-1\end{cases}$

$\therefore M$ 点坐标为 $(2,3,-1)$，$\therefore\overrightarrow{M_0M}=\{0,2,4\}$，

$\therefore$ 所求直线方程为：$\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+5}{2}$.

** 5． 试求 k 值，使两条直线 $L_1:\frac{x-1}{k}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-3}{-3},L_2:\frac{x+3}{3}=\frac{y-9}{-4}=\frac{z+14}{7}$ 相交.

解：将第二条直线的参数方程 $\begin{cases}x=3t-3\\y=-4t+9\\z=7t-14\end{cases}$ 代入第一条直线方程，有

$$\frac{3t-4}{k}=\frac{-4t+13}{5}=\frac{7t-17}{-3}$$

解得　$k=2$

**6．求直线 $l_1: x-1=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{0}$ 与 $l_2: \frac{x}{-1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-3}{2}$ 之间的夹角.

解：l_1，l_2 方向向量分别为 $\vec{S}_1=\{1,-1,0\}$，　$\vec{S}_2=\{-1,0,2\}$，

$$\cos(\widehat{\vec{S}_1,\vec{S}_2})=\frac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{|\vec{S}_1||\vec{S}_2|}=-\frac{1}{\sqrt{10}},$$

故 l_1，l_2 之间的夹角为　$\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.

**7．求点 $M\ (5,-3,0)$ 到直线 $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$ 的距离。

解一：已知所给直线上的点 $N(3,-1,0)$，方向向量为 $\vec{l}=\{2,-1,1\}$，

则 $\vec{MN}=\{-2,2,0\}$，

$$\vec{MN}\times\vec{l}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&2&0\\2&-1&1\end{vmatrix}=\{2,2,-2\}$$

所以点到直线的距离为

$$d=\frac{|\vec{MN}\times\vec{l}|}{|\vec{l}|}=\frac{\sqrt{2^2+2^2+(-2)^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\sqrt{2}\text{。}$$

解二：过点 M 作与已知直线垂直的平面 π：$2(x-5)-(y+3)+z=0$，即

$$2x-y+z-13=0,$$

已知直线的参数方程为 $\begin{cases}x=3+2t\\y=-1-t\\z=t\end{cases}$，代入平面 π 中得 $t=1$，则平面与直线的交点为 $P(5,-2,1)$，于是点到直线的距离为

$$d=|MP|=\sqrt{(5-5)^2+(-2+3)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}\text{。}$$

**8．已知直线 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{p}=\dfrac{z}{-1}$ 和平面 $qx-6y+2z=1$ 垂直,求常数 p,q 之值.

解： $\vec{l}=\{2,p,-1\}//\vec{n}=\{q,-6,2\}$， $\therefore \dfrac{2}{q}=\dfrac{p}{-6}=\dfrac{-1}{2}\Rightarrow q=-4,p=3$.

***9．给定下列两条直线

L_1： $\dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+9}{8}$，与 L_2： $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+6}{2}=\dfrac{z+4}{12}$

（1）求 L_1 与 L_2 之间的距离；（2）求与两条直线都垂直且相交的直线方程.

解：（1）**解法一** L_1 过点 $M=(-2,2,-9)$，方向向量为 $\vec{l_1}=\{0,1,8\}$；

L_2 过点 $N=(1,-6,-4)$，方向向量为 $\vec{l_2}=\{1,2,12\}$；

$$\vec{n}=\vec{l_1}\times\vec{l_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 8\\ 1 & 2 & 12\end{vmatrix}=\{-4,8,-1\},\qquad \vec{MN}=\{3,-8,5\},$$

所以两条直线之间的距离为

$$d=\frac{|\vec{MN}\cdot(\vec{l_1}\times\vec{l_2})|}{|\vec{l_1}\times\vec{l_2}|}=\frac{|3\times(-4)+(-8)\times 8+5\times(-1)|}{\sqrt{(-4)^2+8^2+(-1)^2}}=9$$

解法二 过 L_1 作平行于 L_2 的平面 Π，所求距离即为 L_2 上的点 N 到 Π 的距离。

设 $\vec{n}$ 为 Π 的法向量，则

$$\vec{n}=\vec{l_1}\times\vec{l_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 8\\ 1 & 2 & 12\end{vmatrix}=\{-4,8,-1\},$$

于是 Π 的方程为 $-4(x+2)+8(y-2)-(z+9)=0$，

即 $4x-8y+z+33=0$。

L_2 上点 $N=(1,-6,-4)$ 到 Π 的距离，即所求距离为

$$d=\frac{|4+48-4+33|}{\sqrt{4^2+(-8)^2+1^2}}=9。$$

解法三 设两异面直线之间的最短距离在PQ两点间取得，其中$P\in L_1$，$Q\in L_2$，则可

设 $P=(-2,2+u,-9+8u)$， $Q=(1+v,-6+2v,-4+12v)$，

由$\vec{PQ}\perp\vec{l_1}$及$\vec{PQ}\perp\vec{l_2}$可得

$$\begin{cases}1\cdot(-8+2v-u)+8\cdot(5+12v-8u)=0\\1\cdot(3+v)+2\cdot(-8+2v-u)+12\cdot(5+12v-8u)=0\end{cases}$$

解得 $u=2$，$v=1$，即 $P=(-2\,,4\,,7)$， $Q=(2\,,-4\,,8)$，

于是有 $d=|\vec{PQ}|=9$。

（2）**解法一** 设所求直线分别与L_1和L_2交于点P和Q，则由（1）的解法三可知

$$P=(-2\,,4\,,7)，\qquad Q=(2\,,-4\,,8)，$$

于是P和Q确定直线即为所求直线，其方程为

$$\frac{x+2}{2+2}=\frac{y-4}{-4-4}=\frac{z-7}{8-7}，\quad 即\quad \frac{x+2}{4}=\frac{y-4}{-8}=\frac{z-7}{1}。$$

解法二 由于所求直线与L_1和L_2垂直相交，则方向向量为

$$\vec{n}=\vec{l_1}\times\vec{l_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&1&8\\1&2&12\end{vmatrix}=\{-4,8,-1\}，$$

且所求直线与 L_1 共面，则有

$$\begin{vmatrix}x+2&y-2&z+9\\0&1&8\\-4&8&-1\end{vmatrix}=-65x-32y+4z-30=0，$$

所求直线与 L_2 共面，则有

$$\begin{vmatrix}x-1&y+6&z+4\\1&2&12\\-4&8&-1\end{vmatrix}=-98x-47y+16z-120=0，$$

故所求直线方程为

$$\begin{cases}-65x-32y+4z-30=0\\-98x-47y+16z-120=0\end{cases}$$

10．求过直线$\begin{cases}2x+7y-5z-7=0\\2x-y+z-4=0\end{cases}$且在 x 轴和 y 轴上的截距(非零)**相等的平面方程.

解：过直线$\begin{cases}2x+7y-5z-7=0\\2x-y+z-4=0\end{cases}$的平面束方程可设为

$$u(2x+7y-5z-7)+v(2x-y+z-4)=0 \qquad (*)$$

令 $y=z=0$，求得在 x 轴截距 $x=\dfrac{7u+4v}{2u+2v}$，

令 $x=z=0$，求得在 y 轴截距 $y=\dfrac{7u+4v}{7u-v}$.

$\because x=y \qquad \therefore \dfrac{7u+4v}{2u+2v}=\dfrac{7u+4v}{7u-v}$，

$\therefore \quad \boldsymbol{2u+2v=7u-v}$，

即:$\dfrac{u}{v}=\dfrac{3}{5}$,代入（*）式，可得

$\dfrac{3}{5}(2x+7y-5z-7)+(2x-y+z-4)=0$，即：$16x+16y-10z=41$.

***11. 求直线 $x=y=z$ 在平面 $x+5y-3z=1$ 上的投影直线.

解：直线 L 的方向向量 $\vec{l}=\{1,1,1\}$. 在直线 L 上取一点 $A=(0,0,0)$，显然不满足方程

$x+5y-3z=1$，$\therefore A$ 不在该平面上.

设过 A 做与平面 $\pi_0: x+5y-3z=1$的垂直的平面 π .

则平面 π 的法向量可取为 $\vec{n}=\vec{l}\times\vec{n}_0=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\1&5&-3\end{vmatrix}=-4\{2,-1,-1\}$，

这就得到了π的方程为$2x-y-z=0$．从而得到投影直线方程为

$$\begin{cases} x+5y-3z=1 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}.$$