第七章　系统函数

7.1　系统函数与系统特性

7.2　系统的稳定性

7.3　信号流图

7.4　系统模拟

7.1　系统函数与系统特性

一、系统函数的零、极点分布图

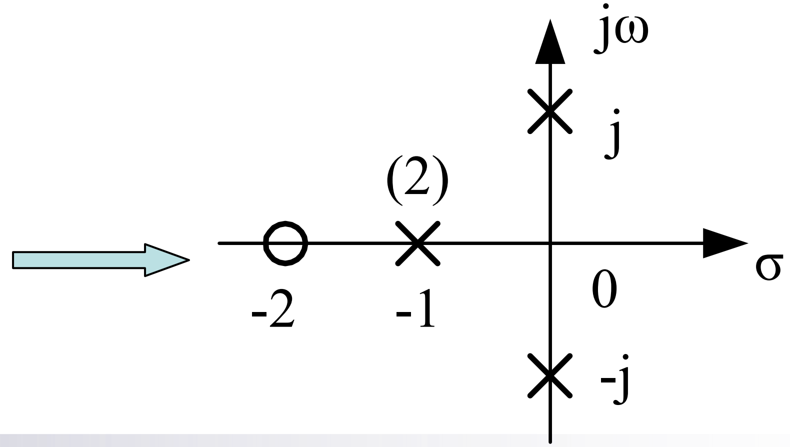
LTI系统的系统函数是复变量s或z的有理分式，即

$$H(\bullet) = \frac{B(\bullet)}{A(\bullet)}$$

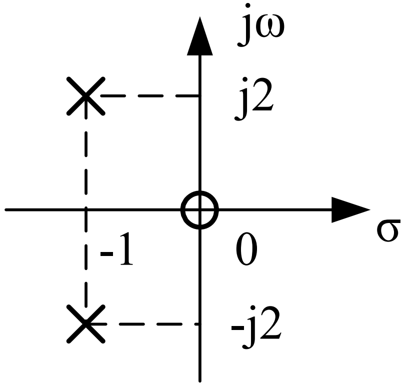
A(.)=0的根p_1，p_2，…，p_n称为系统函数H(.)的极点；
B(.)=0的根ξ_1，ξ_2，…，ξ_m称为系统函数H(.)的零点。

将零极点画在复平面上得零、极点分布图。

例 $$H(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)^2(s^2+1)}$$



例：已知H(s)的零、极点分布图如示，并且$h(0_+)=2$。求H(s)的表达式。



解：由分布图可得

$$H(s)=\frac{Ks}{(s+1)^2+4}=\frac{Ks}{s^2+2s+5}$$

根据初值定理，有

$$h(0+)=\lim_{s\to\infty}sH(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{Ks^2}{s^2+2s+5}=K$$

$$H(s)=\frac{2s}{s^2+2s+5}$$

二、系统函数H(·)与时域响应h(·)

冲激响应或单位序列响应的函数形式由H(.)的极点确定。

下面讨论H(.)极点的位置与其时域响应的函数形式。

所讨论系统均为因果系统。

1. 连续因果系统

H(s)按其极点在s平面上的位置可分为:在左半开平面、虚轴和右半开平面三类。

（1）在左半平面

(a)若系统函数有负实单极点p=–α (α >0)，则A(s)中有因子(s+α)，其所对应的响应函数为$Ke^{-\alpha t}\varepsilon(t)$

(b) 若有一对共轭复极点$p_{12}=-\alpha \pm j\beta$，则A(s)中有因子$[(s+\alpha)^2+\beta^2]$---→$K e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)\varepsilon(t)$

(c) 若有r重极点，

则A(s)中有因子$(s+\alpha)^r$或$[(s+\alpha)^2+\beta^2]^r$，其响应为

$K_i t^i e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$或$K_i t^i e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)\varepsilon(t)$ $(i=0,1,2,\ldots,r-1)$

以上三种情况：当$t\to\infty$时，响应均趋于0。暂态分量。

（2）在虚轴上

(a)单极点$p=0$或$p_{12}=\pm j\beta$，

则响应为$K\varepsilon(t)$或$K\cos(\beta t+\theta)\varepsilon(t)$-----稳态分量

(b) r重极点，相应A(s)中有s^r或$(s^2+\beta^2)^r$，其响应函数为

$K_i t^i\varepsilon(t)$或$K_i t^i\cos(\beta t+\theta)\varepsilon(t)$$(i=0,1,2,\ldots,r-1)$—递增函数

（3）在右半开平面：均为递增函数。

综合结论：

LTI连续因果系统的**h(t)**的函数形式由**H(s)**的极点确定。

①**H(s)**在左半平面的极点所对应的响应函数为衰减的。即当t→∞时，响应均趋于0。

②**H(s)**在虚轴上的一阶极点所对应的响应函数为稳态分量。

③**H(s)**在虚轴上的高阶极点或右半平面上的极点，其所对应的响应函数都是递增的。

即当t→∞时，响应均趋于∞。

2．离散因果系统

H(z)按其极点在z平面上的位置可分为:在单位圆内、在单位圆上和在单位圆外三类。

根据z与s的对应关系，有结论:

①H(z)在单位圆内的极点所对应的响应序列为衰减的。即当$k\to\infty$时，响应均趋于0。

②H(z)在单位圆上的一阶极点所对应的响应函数为稳态响应。

③H(z)在单位圆上的高阶极点或单位圆外的极点，其所对应的响应序列都是递增的。即当$k\to\infty$时，响应均趋于∞。

三、系统函数收敛域与其极点之间的关系

根据收敛域的定义，**H(·)**收敛域不能含**H(·)**的极点。

例：某离散系统的系统函数

$$H(z)=\frac{z}{z+0.5}+\frac{z}{z-3}$$

(1) 若系统为因果系统，求单位序列响应**h(k)**;

(2) 若系统为反因果系统，求单位序列响应**h(k)**;

(3) 若系统存在频率响应，求单位序列响应**h(k)**;

解 (1) $|z|>3$，$h(k)=[(-0.5)^k+(3)^k]\varepsilon(k)$

(2) $|z|<0.5$，$h(k)=[-(-0.5)^k-(3)^k]\varepsilon(-k-1)$

(3) $0.5<|z|<3$，$h(k)=(-0.5)^k\varepsilon(k)-(3)^k\varepsilon(-k-1)$

四、系统函数与频率响应

1、连续因果系统

若系统函数H(s)的极点均在左半平面，则它在虚轴上($s=j\omega$)也收敛，有$H(j\omega)=H(s)|_{s=j\omega}$，
下面介绍两种常见的系统。

（1）全通函数

若系统的幅频响应$|H(j\omega)|$为常数，则称为全通系统，其相应的H(s)称为全通函数。

凡极点位于左半开平面，零点位于右半开平面，并且所有零点与极点对于虚轴为一一镜像对称的系统函数即为全通函数。

（2）最小相移函数

右半开平面没有零点的系统函数称为**最小相移函数**。解释见p334。

2、离散因果系统

若系统函数H(z)的极点均在单位圆内，则它在单位圆上(|z|=1)也收敛，有$H(e^{j\theta})=H(z)|_{z=e^{j\theta}}$，
式中 $\theta=\omega T_s$，ω为角频率，T_s为取样周期。

7.2 系统的稳定性

一、因果系统

因果系统（连续的或者离散的）指的是，系统的零状态响应$y_f(\cdot)$不出现于激励$f(\cdot)$之前的系统。也就是说，对于**t=0(或k=0)**接入的任意激励 $f(\cdot)$，即对于任意的

$$f(\cdot)=0, t(\text{或}k)<0$$

如果系统的零状态响应都有

$$y_f(\cdot)=0, t(\text{或}k)<0$$

就称该系统为因果系统，否则为非因果系统。

第七章　系统函数

连续因果系统的充分必要条件是：冲激响应 $h(t)=0, t<0$

或者，系统函数$H(s)$的收敛域为：$\mathrm{Re}[s]>\sigma_0$

即其收敛域为收敛坐标 σ_0 以右的半平面。

离散因果系统的充分必要条件是：单位响应 $h(k)=0,\ k<0$

或者，系统函数$H(z)$的收敛域为：$|z|>\rho_0$

即其收敛域为半径等于 ρ_0 的圆外区域。

二、系统的稳定性

1、稳定系统的定义

一个系统，若对任意的有界输入，其零状态响应也是有界的，则称该系统是有界输入有界输出(**BIBO**)稳定的系统，简称为稳定系统。

即，若$0<M_f<\infty$，$0<M_y<\infty$系统对所有的激励 **|f(.)|≤$\mathbf{M_f}$** ，其零状态响应 **|$\mathbf{y_f}$(.)|≤$\mathbf{M_y}$**，则称该系统稳定。

（**1**）连续系统稳定的充分必要条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt \le M$$

若**H(s)**的收敛域包含虚轴，则该系统必是稳定系统。

（2）离散系统稳定的充分必要条件是

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \le M$$

若H(z)的收敛域包含单位圆，则该系统必是稳定的系统。

例1　y(k)+1.5y(k-1)-y(k-2)= f(k-1)

(1) 若为因果系统，求h(k)，并判断是否稳定。

(2) 若为稳定系统，求h(k).

解　$$H(z)=\frac{z^{-1}}{1+1.5z^{-1}-z^{2}}=\frac{z}{z^{2}+1.5z-1}=\frac{z}{(z-0.5)(z+2)}=\frac{0.4z}{z-0.5}+\frac{-0.4z}{z+2}$$

(1)为因果系统，故收敛域为|z|>2，所以

h(k)=0.4[0.5^{k}-$(-2)^{k}$] ε (k)，不稳定。

(2)若为稳定系统，故收敛域为0.5<|z|<2，所以

h(k)=0.4$(0.5)^{k}$ ε (k)+0.4$(-2)^{k}$ ε (-k-1)

因果系统稳定性的充分必要条件可简化为

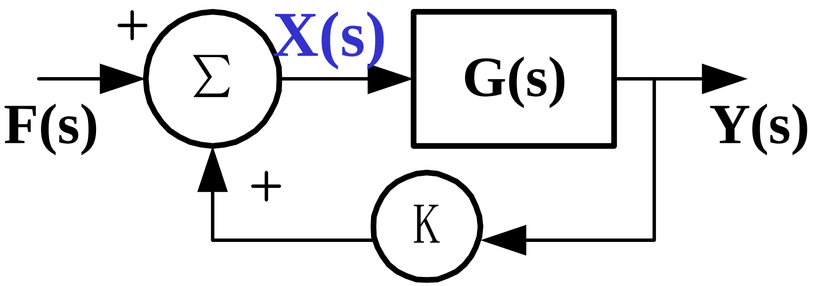
（3）连续因果系统 $$\int_{0}^{\infty}|h(t)|\,dt \le M$$

因为因果系统左半开平面的极点对应的响应为衰减函数。故，若H(s)的极点均在左半开平面，则该系统必是稳定的因果系统。

（4）离散因果系统 $$\sum_{k=0}^{\infty}|h(k)| \le M$$

因为因果系统单位圆内的极点对应的响应为衰减函数。故，若H(z)的极点均在单位圆内，则该系统必是稳定的因果系统。

例1：如图反馈因果系统，问当K满足什么条件时，系统是稳定的？其中子系统的系统函数G(s)=1/[(s+1)(s+2)]



解：设加法器的输出信号X(s)

$X(s)=KY(s)+F(s)$

$Y(s)= G(s)X(s)=K\,G(s)Y(s)+ G(s)F(s)$

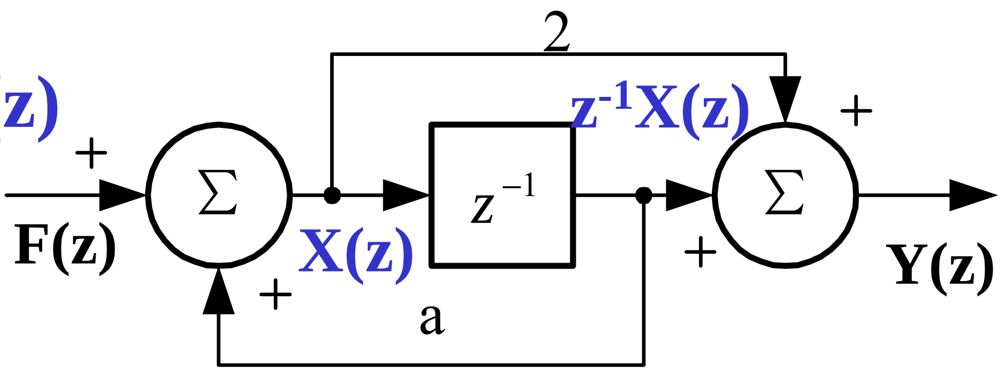
$H(s)=Y(s)/F(s)=G(s)/[1-KG(s)]=1/(s^2+3s+2-k)$

H(s)的极点为 $$p_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2+k}$$

为使极点在左半平面，必须$(3/2)^2-2+k<(3/2)^2$，$k<2$，即当$k<2$，系统稳定。

例2：如图离散因果系统框图，为使系统稳定，求常量a的取值范围

解：设加法器输出信号X(z)



$X(z)=F(z)+z^{-1}aX(z)$

$Y(z)=(2+z^{-1})X(z)= (2+z^{-1})/(1-az^{-1})F(z)$

$H(z)= (2+z^{-1})/(1-az^{-1})=(2z+1)/(z-a)$

为使系统稳定，H(z)的极点必须在单位园内，故$|a|<1$

三、连续因果系统稳定性判断准则——罗斯-霍尔维兹准则

对因果系统，只要判断H(s)的极点，即A(s)=0的根（称为系统特征根）是否都在左半平面上，即可判定系统是否稳定，不必知道极点的确切值。

所有的根均在左半平面的多项式称为霍尔维兹多项式。

1、必要条件—简单方法

一实系数多项式$A(s)=a_n s^n+\ldots+a_0=0$的所有根位于左半开平面的必要条件是：（1）所有系数都必须非0，即不缺项；（2）系数的符号相同。

例1 $A(s)=s^3+4s^2-3s+2$ 符号相异，不稳定

例2 $A(s)=3s^3+s^2+2$， $a_1=0$，不稳定

例3 $A(s)=3s^3+s^2+2s+8$ 需进一步判断，非充分条件。

2、罗斯列表

将多项式A(s)的系数排列为如下阵列—罗斯阵列

第1行　a_n　a_{n-2}　a_{n-4}　…

第2行　a_{n-1}　a_{n-3}　a_{n-5}　…

第3行　c_{n-1}　c_{n-3}　c_{n-5}　…

它由第1，2行，按下列规则计算得到：

$$c_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \qquad c_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \qquad \cdots$$

第4行由2，3行同样方法得到。一直排到第n+1行。

罗斯准则指出：若第一列元素具有相同的符号，则A(s)=0所有的根均在左半开平面。若第一列元素出现符号改变，则符号改变的总次数就是右半平面根的个数。

第七章　系统函数

特例：对于二阶系统 $A(s)=a_2s^2+a_1s+a_0$，若$a_2>0$，不难得出，A(s)为霍尔维兹多项式的条件为：$a_1>0$，$a_0>0$

例1 $A(s)=2s^4+s^3+12s^2+8s+2$

罗斯阵列：

$$
\begin{array}{lll}
2 & 12 & 2 \\
1 & 8 & 0 \\
-\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{1}=-4 & 2 & \\
8.5 & 0 & \\
2 & &
\end{array}
$$

注意：在排罗斯阵列时，可能遇到一些特殊情况，如第一列的某个元素为0或某一行元素全为0，这时可断言：该多项式不是霍尔维兹多项式。

第1列元素符号改变2次，因此，有2个根位于右半平面。

例2 已知某因果系统函数

$$H(s)=\frac{1}{s^3+3s^2+3s+1+k}$$

为使系统稳定，**k**应满足什么条件？

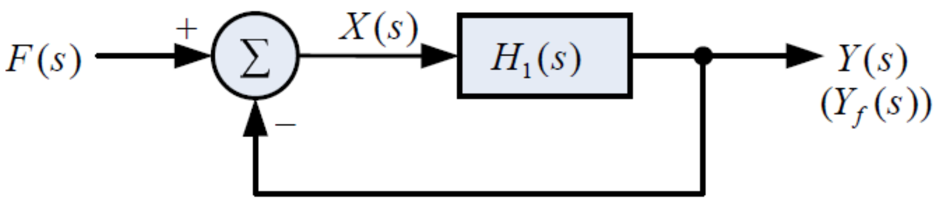
解 列罗斯阵列

	1	**3**
	3	**1+k**
(8-k)/3		
1+k		

所以，**–1<k<8**，系统稳定。

例3　图示线性时不变系统，$H_1(s)=\dfrac{K(s+1)}{(s+1)(s-2)}$

K为何值，系统稳定。



解：

$$X(s)=F(s)-Y_f(s)$$

$$Y_f(s)=X(s)H_1(s)=\left[F(s)-Y_f(s)\right]H_1(s)$$

$$Y_f(s)=\frac{H_1(s)}{1+H_1(s)}F(s)$$

$$H(s)=\frac{H_1(s)}{1+H_1(s)}=\frac{K(s+2)}{s^2+(K-1)s+(2K-2)}$$

罗斯阵列： $n+1=3$

行		
1	1	$2K-2$
2	$K-1$	0
3	$2K-2$	0

当 $K-1>0$，$(2K-2)>0$

即，当 $K>1$ 时，系统稳定。

例4 对于二阶系统， $H_1(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}=\dfrac{B(s)}{a_2s^2+a_1s+a_0}$

求系统稳定的条件。

解： 罗斯阵列： $n+1=3$

行		
1	a_2	a_0
2	a_1	0
3	a_0	0

根据罗斯—霍尔维兹准则：

$a_2>0, a_1>0, a_0>0$ 或 $a_2<0, a_1<0, a_0<0$

四、离散因果系统稳定性判断准则

① 离散系统稳定性的**z**域充要条件：

若**LTI**因果离散系统的系统函数**H(z)**的极点全部在单位圆内，则系统为稳定系统。

② 朱里准则：

朱里排列：设 $H(z)=\dfrac{B(z)}{A(z)}$，**z**的正幂分式

$$A(z)=a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

朱里准则:

为判断离散因果系统的稳定性，要判断A(z)=0的所有根的绝对值是否都小于1。朱里提出一种列表的检验方法，称为朱里准则。

朱里列表:

第1行	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	……	a_2	a_1	a_0
第2行	a_0	a_1	a_2	……	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
第3行	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	……	c_1	c_0	
第4行	c_0	c_1	c_2	……	c_{n-2}	c_{n-1}	
第5行	d_{n-2}	d_{n-3}	d_{n-4}	……	d_0		
第6行	d_0	d_1	d_2	……	d_{n-2}		
……							
第2n-3行	r_2	r_1	r_0				

第3行按下列规则计算：

$$c_{n-1}=\begin{vmatrix} a_n & a_0 \\ a_0 & a_n \end{vmatrix} \qquad c_{n-2}=\begin{vmatrix} a_n & a_1 \\ a_0 & a_{n-1} \end{vmatrix} \qquad c_{n-3}=\begin{vmatrix} a_n & a_2 \\ a_0 & a_{n-2} \end{vmatrix} \qquad \cdots$$

$$d_{n-2}=\begin{vmatrix} c_{n-1} & c_0 \\ c_0 & c_{n-1} \end{vmatrix},\ d_{n-3}=\begin{vmatrix} c_{n-1} & c_1 \\ c_0 & c_{n-2} \end{vmatrix},\ d_{n-4}=\begin{vmatrix} c_{n-1} & c_2 \\ c_0 & c_{n-3} \end{vmatrix},\cdots$$

一直到第2n-3行，该行有3个元素。

第七章　系统函数

朱里准则指出，$A(z)=0$的所有根都在单位圆内的充分必要的条件是:

(1) $A(1)=A(z)|_{z=1}>0$

(2) $(-1)^n A(-1)>0$

(3) $a_n>|a_0|$ $c_{n-1}>|c_0|$ $d_{n-2}>|d_0|$ …… $r_2>|r_0|$

上式关于元素的条件就是: 各奇数行，其第1个元素必大于最后一个元素的绝对值。

特例：对二阶系统。$A(z)=a_2z^2+a_1z+a_0$,易得

$A(1)>0$ $A(-1)>0$ $a_2>|a_0|$

例1　$A(z)=4z^4-4z^3+2z-1$，判断系统稳定性。

解:

$A(1)=1>0$　　$(-1)^4A(-1)=5>0$

排朱里列表

4	-4	0	2	-1
-1	2	0	-4	4
15	-14	0	4	
4	0	-14	15	
209	-210	56		

$4>1$，　$15>4$，　$209>56$

所以系统稳定。

例2：$H(z)=\dfrac{12z^2+6z+1}{12z^3-4z^2-3z+1}$，　判断系统是否稳定。

解：$A(1)=12-4-3+1=6>0$

$(-1)^3A(-1)=12+4-3-1=12>0$

朱里阵列：

行				
1	12	−4	−3	1
2	1	−3	−4	12
3	143	−45	−32	

由上表可见：$12>|1|$

$143>|-32|$

根据朱里准则可知，系统稳定。

7.3　信号流图

用方框图描述系统的功能比较直观。信号流图是用有向的线图描述方程变量之间因果关系的一种图，用它描述系统比方框图更加简便。信号流图首先由**Mason**于**1953**年提出的，应用非常广泛。

信号流图就是用一些点和有向线段来描述系统，与框图本质是一样的，但简便多了。

一、信号流图

1、定义：信号流图是由结点和有向线段组成的几何图形。它可以简化系统的表示，并便于计算系统函数。

2、信号流图中常用术语

第七章　系统函数

(1)结点：信号流图中的每个结点表示一个变量或信号。

(2)支路和支路增益：

连接两个结点之间的有向线段称为支路。

每条支路上的权值（支路增益）就是该两结点间的系统函数（转移函数）

$$F(s) \xrightarrow{H(s)} Y(s)$$

即用一条有向线段表示一个子系统。

(3)源点与汇点，混合结点：

仅有出支路的结点称为源点（或输入结点）。

仅有入支路的结点称为汇点（或输出结点）。

有入有出的结点为混合结点。

(4)通路、开通路、闭通路（回路、环）、不接触回路、自回路：

沿箭头指向从一个结点到其他结点的路径称为通路。
如果通路与任一结点相遇不多于一次，则称为开通路。
若通路的终点就是通路的起点（与其余结点相遇不多于一次），则称为闭通路。
相互没有公共结点的回路，称为不接触回路。
只有一个结点和一条支路的回路称为自回路。

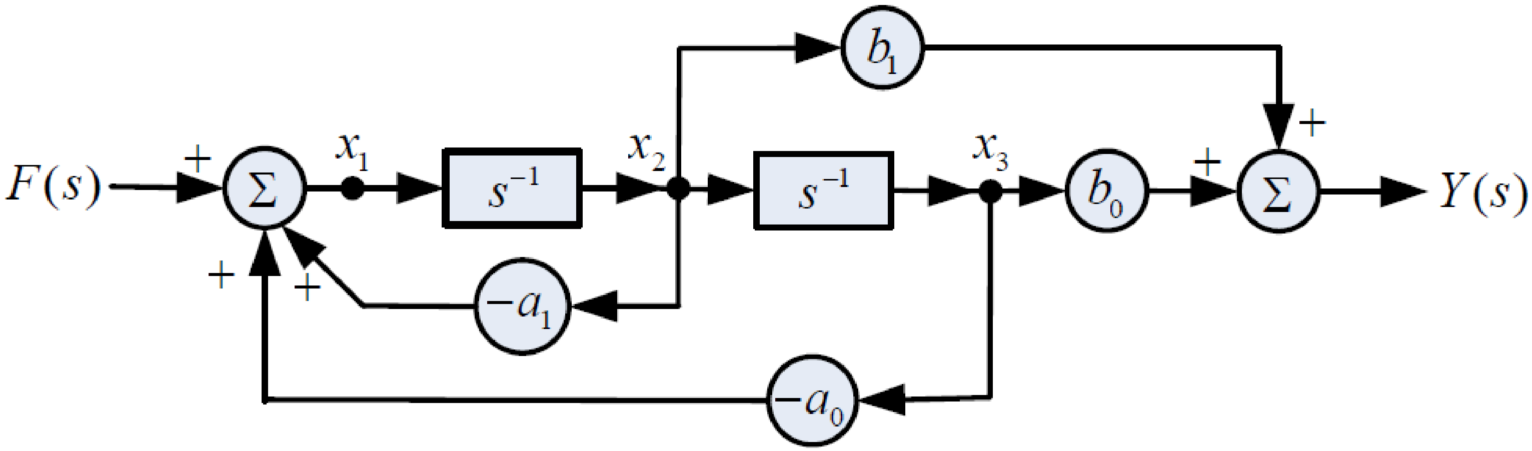
(5)前向通路：从源点到汇点的开通路称为前向通路。

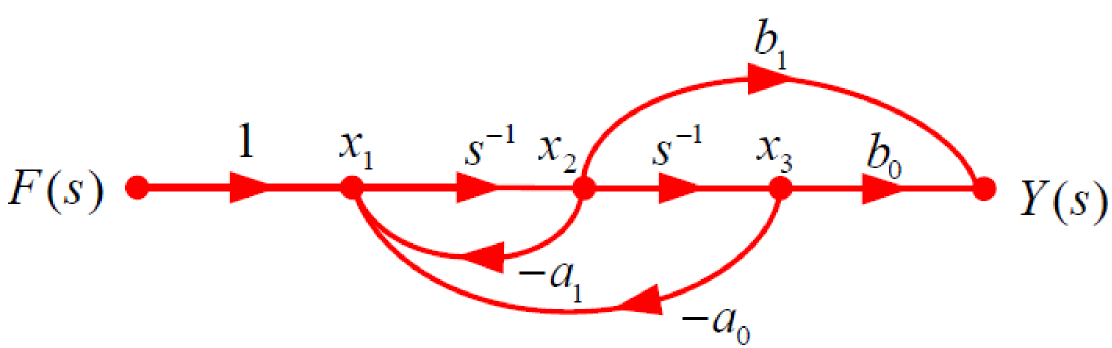
(6)前向通路增益，回路增益：
前向通路中各支路增益的乘积称为前向通路增益。
回路中各支路增益的乘积称为回路增益。

系统的信号流图表示:

可用信号流图表示系统框图等:

例：LTI连续系统的框图如下，画出系统的信号流图。





一般步骤：

(1) 选输入、输出、积分器输出、加法器输出为变量；

(2) 建立变量间的传输关系和传输函数，根据变量间的传输关系和信号流图的规定画信号流图。

3、信号流图的基本性质

（1）信号只能沿支路箭头方向传输。

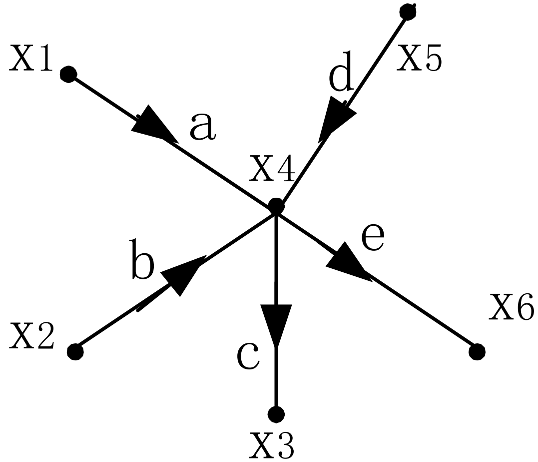
支路的输出=该支路的输入与支路增益的乘积。

（2）当结点有多个输入时，该接点将所有输入支路的信号相加，并将和信号传输给所有与该结点相连的输出支路。

如：$x_4 = ax_1 + bx_2 + dx_5$

$x_3 = cx_4$

$x_6 = ex_4$



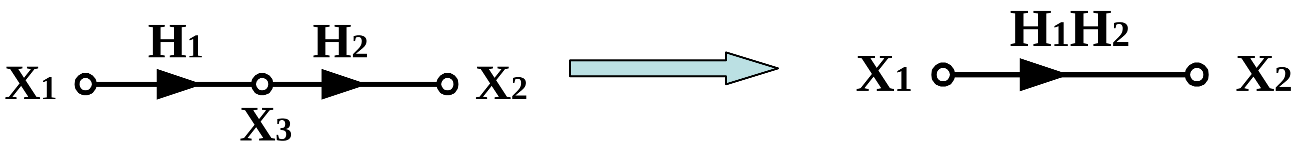
（3）混合结点可通过增加一个增益为1的出支路而变为汇点。

4、方框图←→流图

注意：加法器前引入增益为1的支路

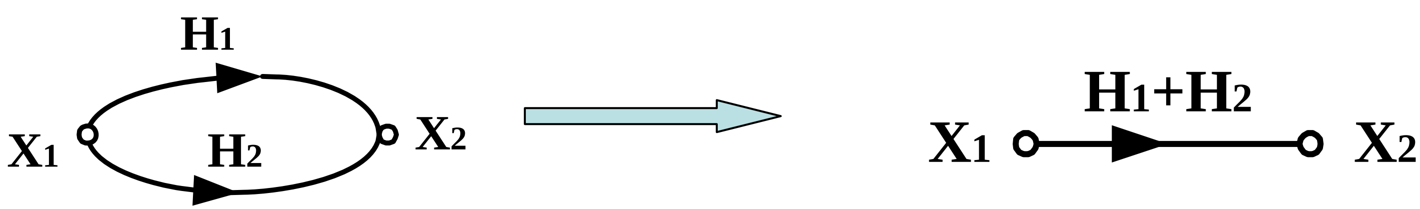
5、流图简化的基本规则：

（1）支路串联：支路增益相乘。



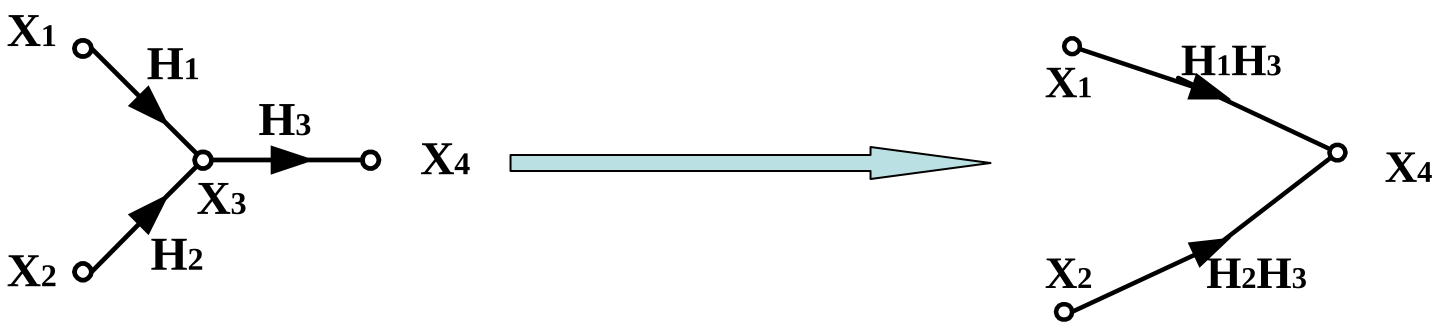
$$X_2=H_2X_3=H_2H_1X_1$$

（2）支路并联：支路增益相加。

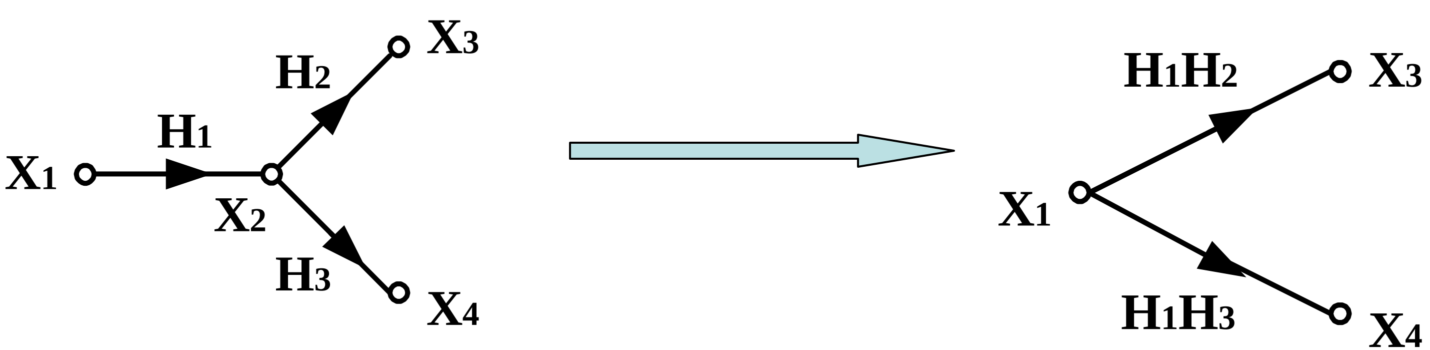


$$X_2=H_1X_1+H_2X_1=(H_1+H_2)\ X_1$$

（3）混联：

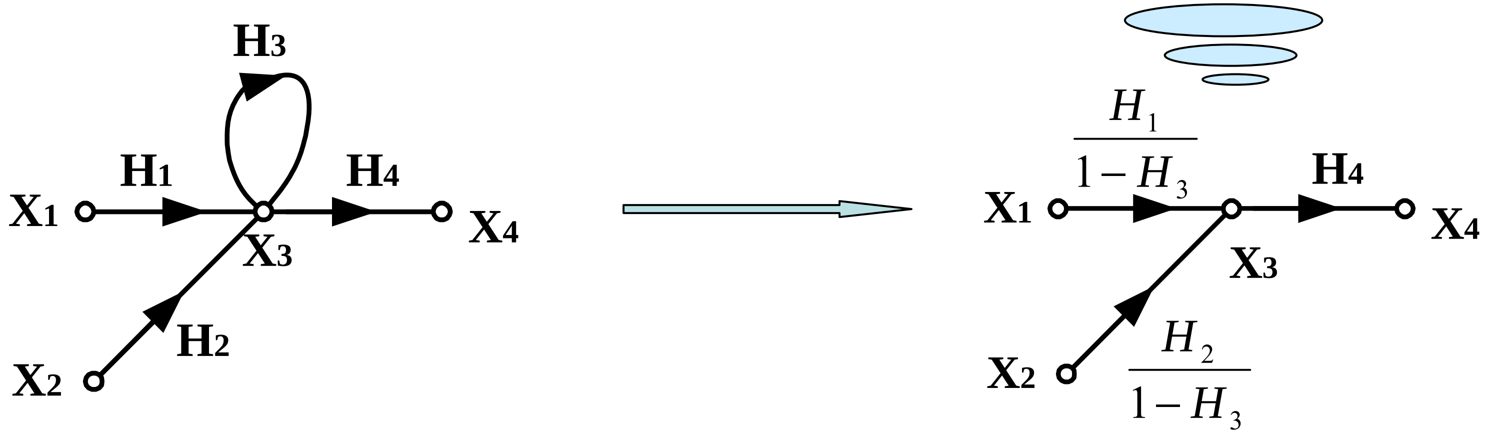


$$X_4=H_3X_3=H_3(H_1X_1+H_2X_2)=H_1H_3X_1+H_2H_3X_2$$



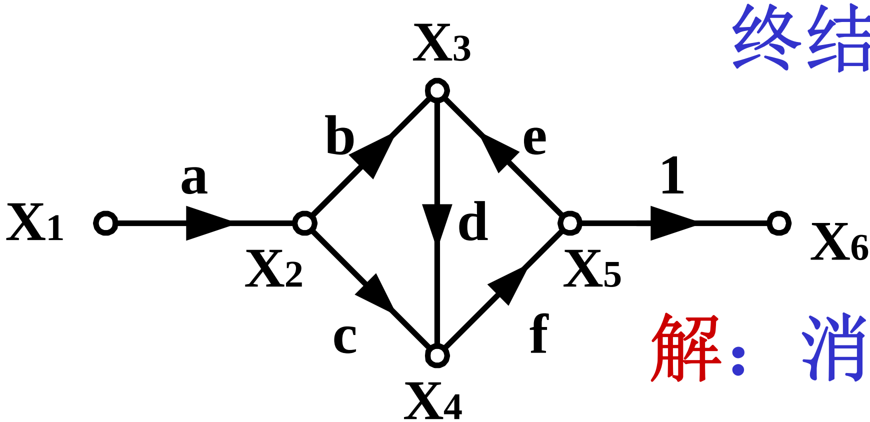
（4）自环的消除：

所有来向支路除$1-H_3$

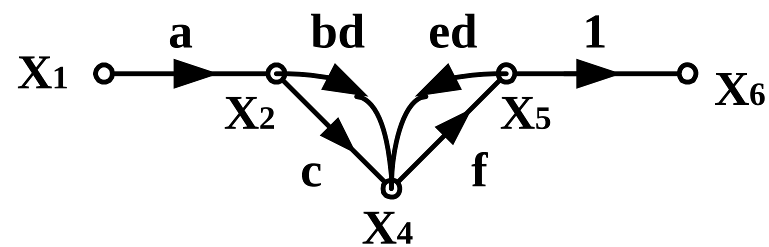


$X_3=H_1X_1+H_2X_2+H_3X_3$ $\longrightarrow$ $X_3=\dfrac{H_1}{1-H_3}X_1+\dfrac{H_2}{1-H_3}X_2$

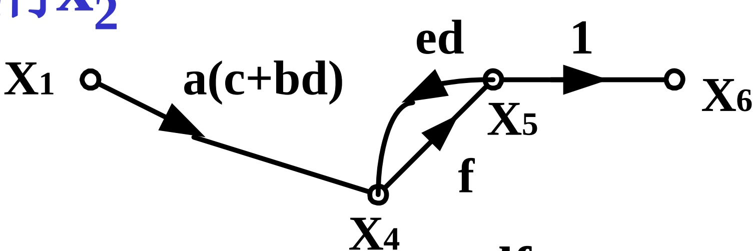
例：化简下列流图。注意化简具体过程可能不同，但最终结果一定相同。



解：消x_3

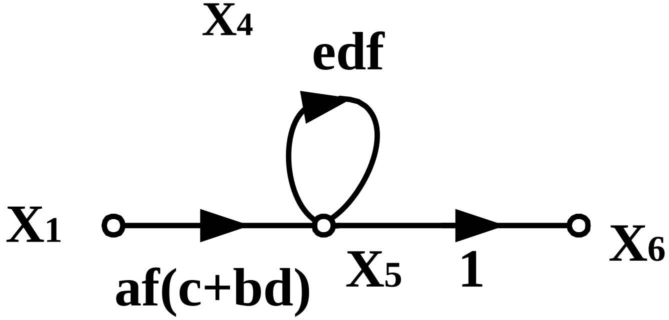


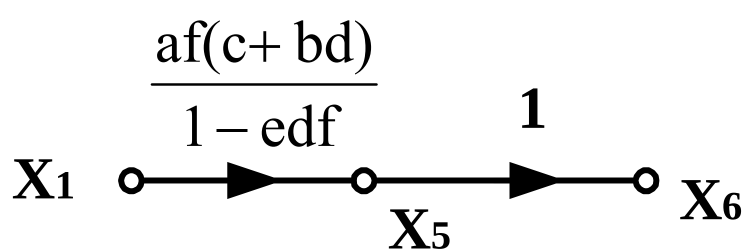
消x_2



消自环

消x_4





第七章 系统函数

二、梅森公式

上述化简求H复杂。利用Mason公式方便。

由信号流图求系统函数。

系统函数H(.)记为H。梅森公式为：$H=\frac{1}{\Delta}\sum_i p_i \Delta_i$

$\Delta=1-\sum_j L_j+\sum_{m,n} L_m L_n-\sum_{p,q,r} L_p L_q L_r+\cdots$ 称为信号流图的特征行列式

$\sum_j L_j$ 为所有不同回路的增益之和；

$\sum_{m,n} L_m L_n$ 为所有两两不接触回路的增益乘积之和；

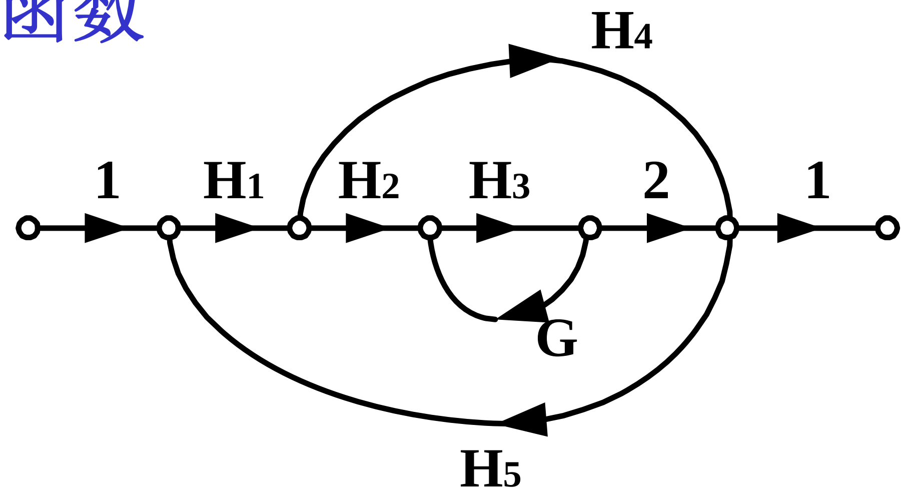
$\sum_{p,q,r} L_p L_q L_r$ 为所有三个不接触回路的增益乘积之和；…

i 表示由源点到汇点的第i条前向通路的标号

P_i 是由源点到汇点的第i条前向通路增益；

Δ_i 称为第i条前向通路特征行列式的余因子。消去接触回路。

例1 求下列信号流图的系统函数



解 (1)首先找出所有回路:

$L_1=H_3G$

$L_2=2H_1H_2H_3H_5$

$L_3=H_1H_4H_5$

(2)求特征行列式

$$\Delta=1-(H_3G+2H_1H_2H_3H_5+H_1H_4H_5)+H_3G\,H_1H_4H_5$$

(3)然后找出所有的前向通路:

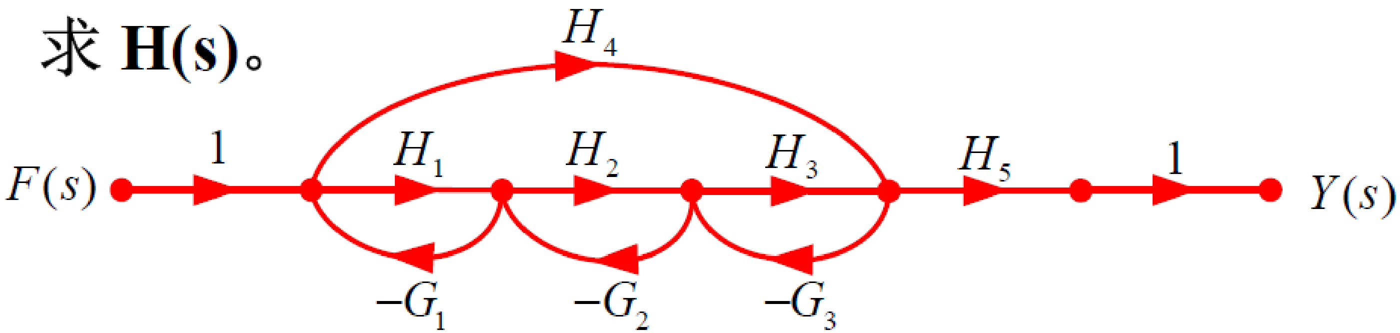
$p_1=2H_1H_2H_3$

$p_2=H_1H_4$

$$H=\frac{1}{\Delta}(p_1\Delta_1+p_2\Delta_2)$$

(4)求各前向通路的余因子：$\Delta_1=1$ ， $\Delta_2=1-GH_3$

例2 求 **H(s)**。



解：

$$\Delta = 1 - \sum_j L_j + \sum_{m,n} L_m L_n - \sum_{p,q,r} L_p L_q L_r + \cdots$$

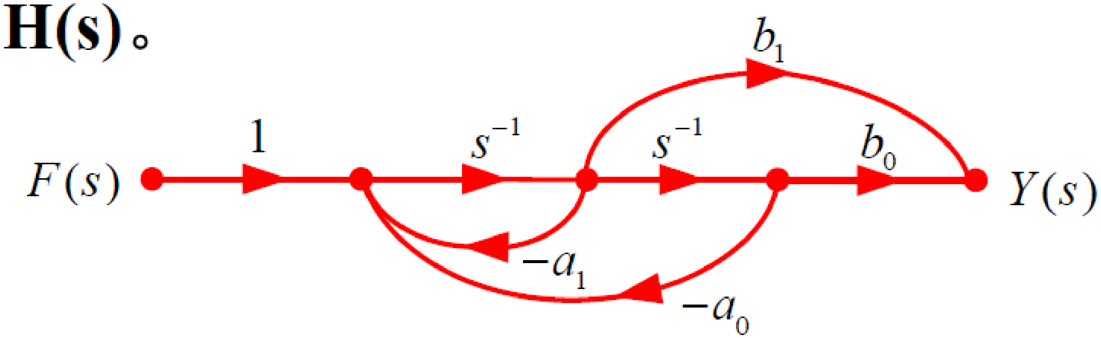
$$= 1 - (-H_1G_1 - H_2G_2 - H_3G_3 - H_4G_1G_2G_3) + H_1G_1H_3G_3$$

$m = 2:$ $p_1 = H_4H_5$ ， $\Delta_1 = 1 - (-H_2G_2)$

$p_2 = H_1H_2H_3H_5$ ， $\Delta_2 = 1$

$$H(s) = \frac{\sum_{i=1}^{2} p_i\Delta_i}{\Delta} = \frac{p_1\Delta_1 + p_2\Delta_2}{\Delta}$$

例3　求 **H(s)**。



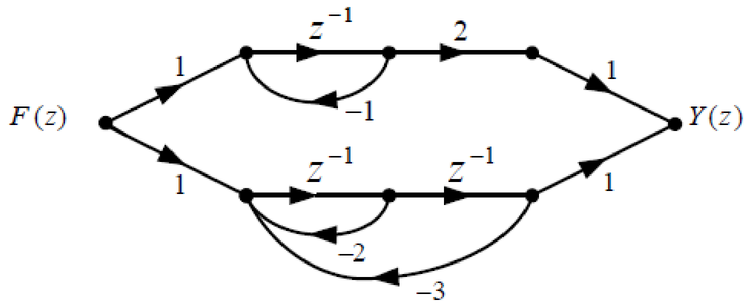
解： $\Delta = 1 - (-a_1 \dfrac{1}{s} - a_0 \dfrac{1}{s^2})$

$m = 2$: $p_1 = b_2$ ， $\Delta_1 = 1$

$p_2 = \dfrac{1}{s^2} b_0$ ， $\Delta_2 = 1$

$$H(s) = \frac{\sum_{i=1}^{2} p_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{b_2 + \dfrac{b_0}{s^2}}{1 + \dfrac{a_1}{s} + \dfrac{a_0}{s^2}} = \frac{b_2 s^2 + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

例：图示离散系统，求系统函数H(z)。



解:（1）流图的环传输函数 L_i 及 Δ：

$$L_1=-z^{-1},\quad L_2=-2z^{-1},\quad L_3=-3z^{-2}$$

两个不接触环的环传输函数：

$$L_{12}=L_1L_2=2z^{-2},\quad L_{13}=L_1L_3=3z^{-3}$$

$$\Delta=1-\sum_i L_i+\sum_{i,j}L_iL_j-\cdots$$

$$=1-(-z^{-1}-2z^{-1}-3z^{-2})+(2z^{-2}+3z^{-3})$$

$$=1+3z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3}$$

（2）流图的开路传输函数 P_i 及 Δ_i：

$$P_1 = 2z^{-1},\quad \Delta_1 = 1-(L_2+L_3) = 1+2z^{-1}+3z^{-2}$$

$$P_2 = z^{-2},\quad \Delta_2 = 1-L_1 = 1+z^{-1}$$

（3）由梅森公式求 $H(z)$

$$H(z) = \frac{\sum_{i=1}^{2} P_i\Delta_i}{\Delta}$$

$$= \frac{2z^{-1}(1+2z^{-1}+3z^{-2})+z^{-2}(1+z^{-1})}{1+3z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3}}$$

$$= \frac{2z^2+5z+7}{z^3+3z^2+5z+3}$$

对框图也可利用梅森公式求系统函数。

7.4 系统模拟

Mason公式是由流图 → **H(s)**或**H(z)**

下面讨论，由**H(s)**或**H(z)** → 流图或方框图

一、直接实现---利用Mason公式来实现

例

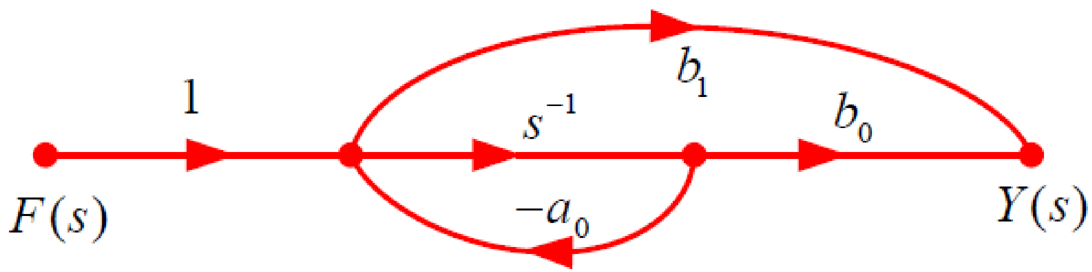
$$H(s)=\frac{5s+5}{s^3+7s^2+10s}=\frac{5s^{-2}+5s^{-3}}{1+7s^{-1}+10s^{-2}}=\frac{5s^{-2}+5s^{-3}}{1-[-7s^{-1}-10s^{-2}]}$$

分子中每项看成是一条前向通路。分母中，除**1**之外，其余每项看成一个回路。画流图时，所有前向通路与全部回路相接触。所有回路均相接触。

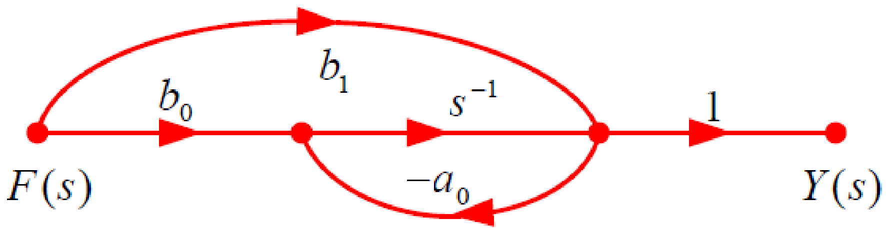
例1： $H(s)=\dfrac{b_1 s+b_0}{s+a_0}$. 画出系统的信号流图。

解： $$H(s)=\frac{b_1+\dfrac{b_0}{s}}{1+\dfrac{a_0}{s}}=\frac{b_1+\dfrac{b_0}{s}}{1-(-\dfrac{a_0}{s})}$$

由梅森公式：流图包含两条开路，一个环。



（形式1）



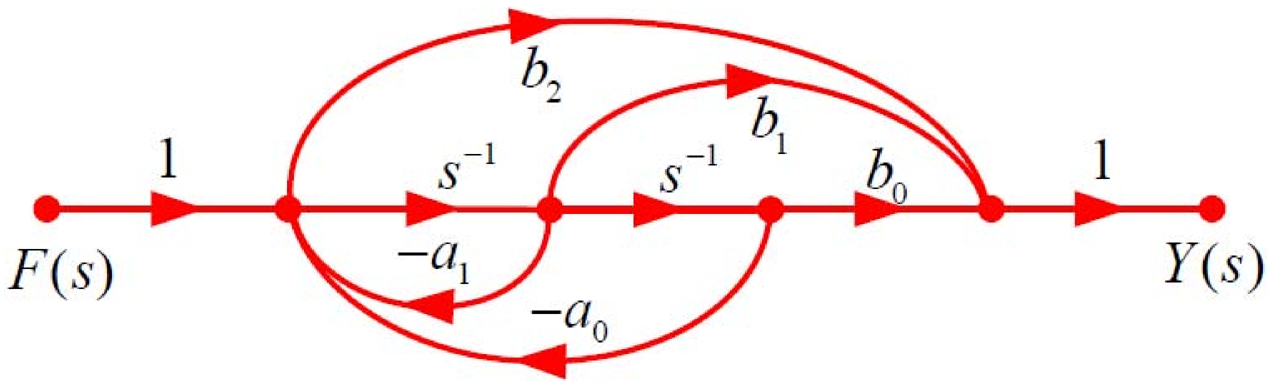
（形式2）

例2：$H(s)=\dfrac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}$． 画出系统信号流图。

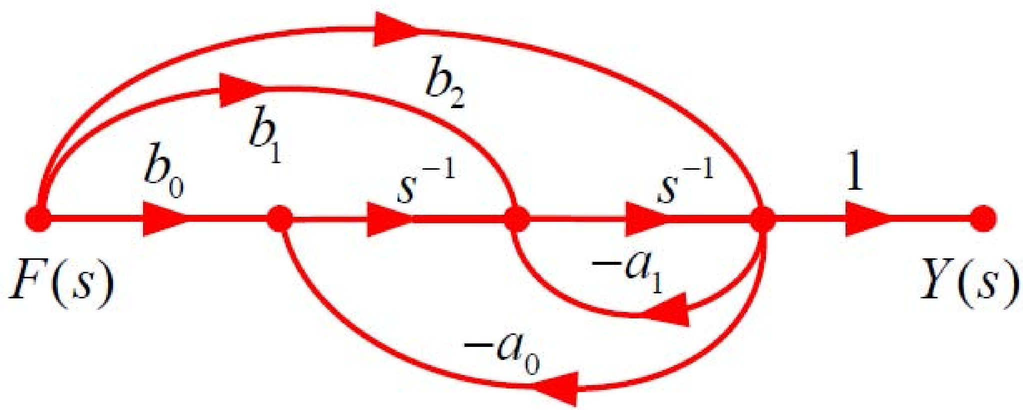
解：$H(s)=\dfrac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}$

$$=\frac{b_2+\dfrac{b_1}{s}+\dfrac{b_0}{s^2}}{1-(-\dfrac{a_1}{s}-\dfrac{a_0}{s^2})}$$

由梅森公式：流图包含3条开路和两个相接触环。



（形式1）



（形式2）

二、级联实现

将H分解为若干简单（一阶或二阶子系统）的系统函数的乘积，即　$H=H_1H_2\ldots H_n$

二阶子系统函数：

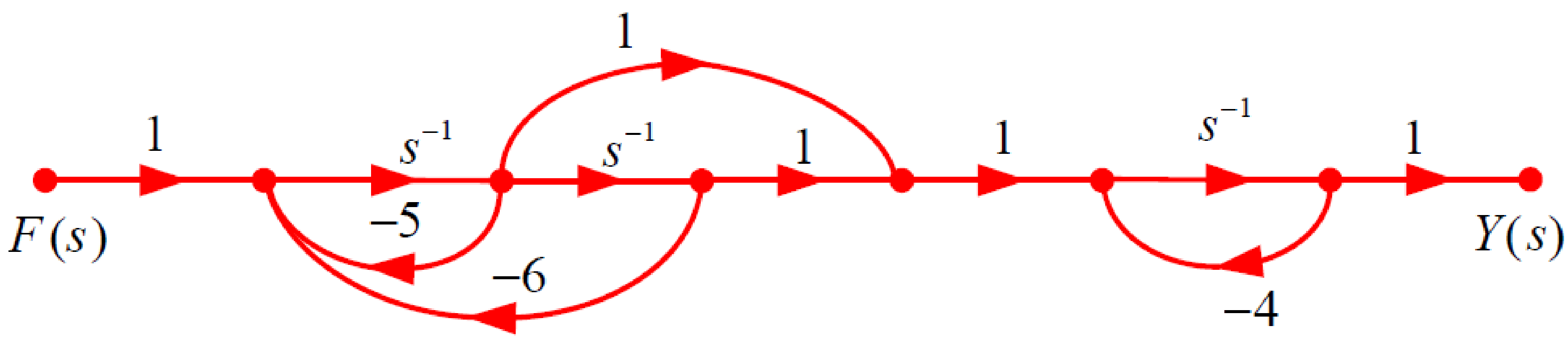
$$H_i(z)=\frac{1+b_{0i}z^{-1}}{1+a_{0i}z^{-1}}$$

$$H_i(z)=\frac{1+b_{1i}z^{-1}+b_{0i}z^{-2}}{1+a_{1i}z^{-1}+a_{0i}z^{-2}}$$

例： $$H(s)=\frac{(s+1)}{(s^2+5s+6)(s+4)}=\frac{(s+1)}{(s^2+5s+6)}\cdot\frac{1}{(s+4)}$$

$$=H_1(s)\cdot H_2(s)$$

$$H_1(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+6}=\frac{\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}}{1-(-\frac{5}{s}-\frac{6}{s^2})}\qquad H_2(s)=\frac{1}{s+4}=\frac{\frac{1}{s}}{1-(-\frac{4}{s})}$$



三、并联实现

将H展开成部分分式，将每个分式分别进行模拟，然后将它们并联起来。

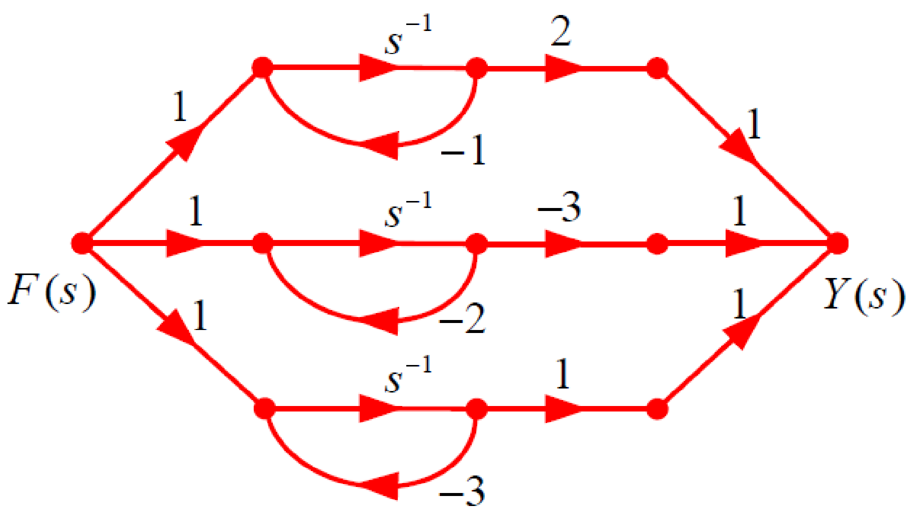
$$H(s)=\frac{5(s+1)}{s(s+2)(s+5)}=\frac{1/2}{s}+\frac{5/6}{s+2}-\frac{4/3}{s+5}$$

例： $$H(s)=\frac{s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{2}{s+1}+\frac{-3}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

$$=H_1(s)+H_2(s)+H_3(s)$$

$$H_1(s)=\frac{2}{s+1}=\frac{\frac{2}{s}}{1-(-\frac{1}{s})}\ ,\qquad H_2(s)=\frac{-3}{s+2}=\frac{-\frac{3}{s}}{1-(-\frac{2}{s})}$$

$$H_3(s)=\frac{1}{s+3}=\frac{\frac{1}{s}}{1-(-\frac{3}{s})}$$



二、离散系统的模拟——由 H(z) 到信号流图、框图：

1、由H(z) ⟶ 差分方程 ⟶ 框图 ⟶ 流图

例1： 已知系统函数 $H(z)=\dfrac{b_0}{z^2+a_1z+a_0}$，画出系统框图。

解： 设 $f(k)\leftrightarrow F(z),\ \ y_f(z)\leftrightarrow Y_f(z)$

$$H(z)=\frac{Y_f(z)}{F(z)}=\frac{b_0z^2}{z^2+a_1z+a_0}=\frac{b_0}{1+a_1z^{-1}+a_0z^{-2}}$$

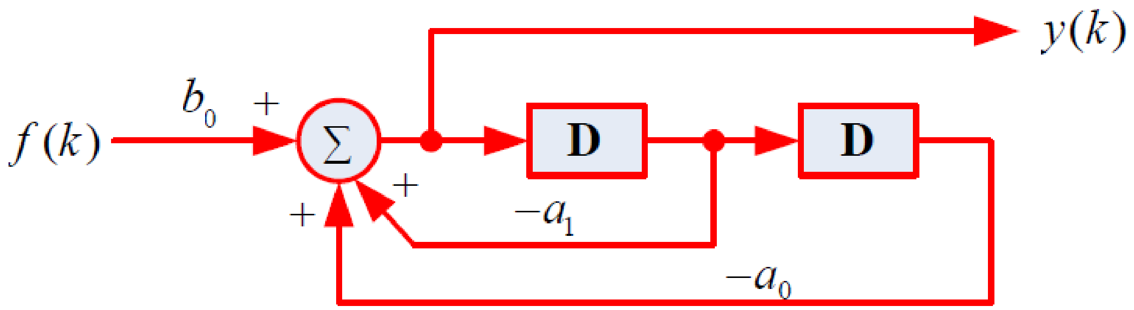
$$(1+a_1z^{-1}+a_0z^{-2})Y_f(z)=b_0F(z)$$

$$y_f(k)+a_1y_f(k-1)+a_0y_f(k-2)=b_0f(k)$$

$$y(k)+a_1y(k-1)+a_0y(k-2)=b_0f(k)$$

$$y(k)=-a_1y(k-1)-a_0y(k-2)+b_0f(k)$$

由上式得框图：



例2：已知系统函数 $H(z)=\dfrac{b_1z+b_0}{z^2+a_1z+a_0}$，求系统框图。

解：$H(z)=\dfrac{b_1z^{-1}+b_0z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_0z^{-2}}$

设 $f(k)\leftrightarrow F(z),\quad y_f(k)\leftrightarrow Y_f(z)$

$Y_f(z)=H(z)F(z)$

第七章　系统函数

$$(1+a_1z^{-1}+a_0z^{-2})Y_f(z)=(b_1z^{-1}+b_0z^{-2})F(z)$$

$$y_f(k)+a_1y_f(k-1)+a_0y_f(k-2)=b_1f(k-1)+b_0f(k-2)$$

$$y(k)+a_1y(k-1)+a_0y(k-2)=b_1f(k-1)+b_0f(k-2) \quad \text{---}\ （1）$$

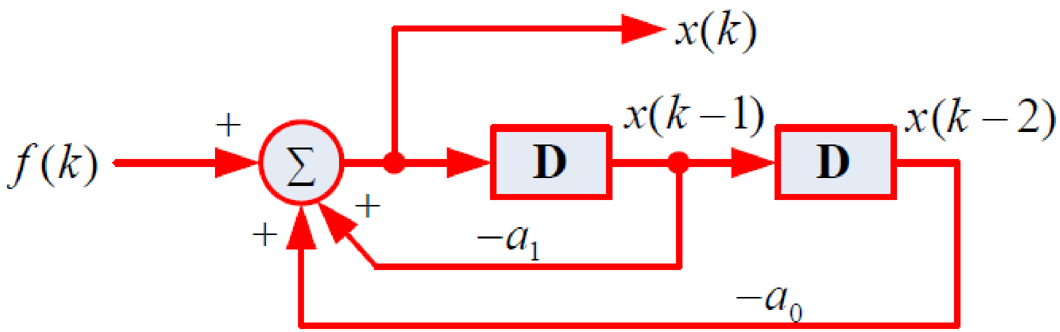
引入辅助函数 ***x*(*k*)**，令

$$x(k)+a_1x(k-1)+a_0x(k-2)=f(k) \quad \text{-----------}\ （2）$$

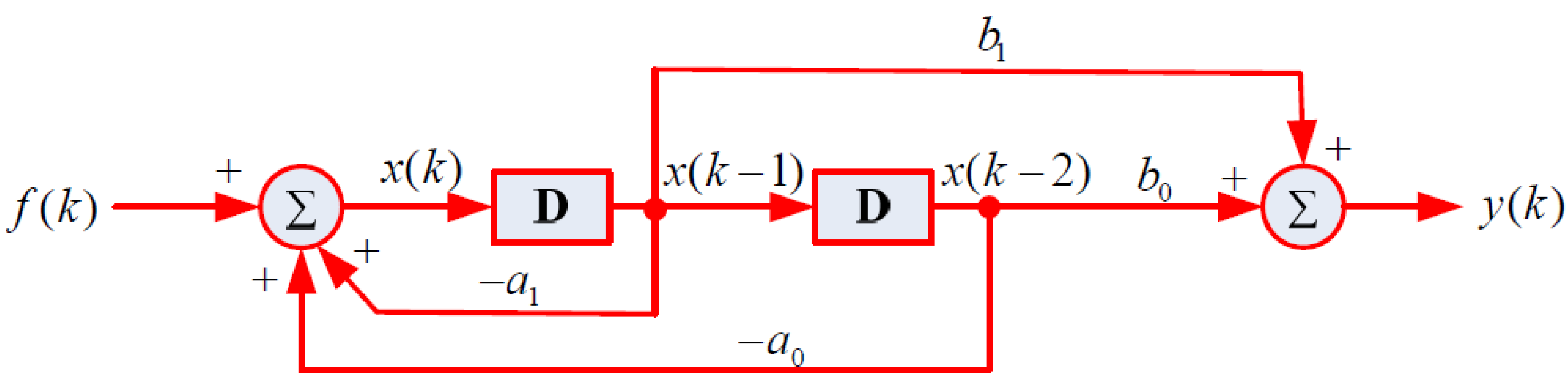
（2）式代入（1）式，比较等式两边得

$$y(k)=b_1x(k-1)+b_0x(k-2) \quad \text{-----------------}\ （3）$$

先模拟（2）式对应的框图，然后在（2）式框图基础上画出（3）式的框图：



(2)式框图



2、由H(z) ⟶ 信号流图 ⟶ 系统框图

（1）直接形式：

例1: $$H(z)=\frac{2z+3}{z^3+3z^2+2z+2}=\frac{2z^{-2}+3z^{-3}}{1-(-3z^{-1}-2z^{-2}-2z^{-3})}$$

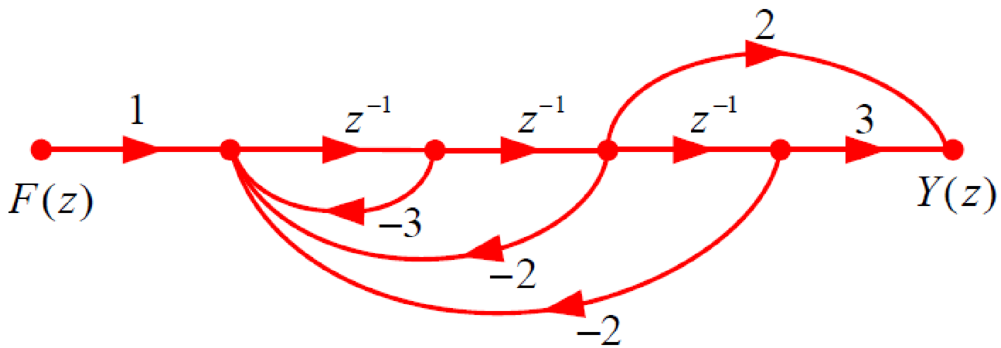
解： 根据梅森公式，系统信号流图有3个相互接触的环和两条开路组成。环传输函数分别为：

$$L_1=-3z^{-1};\quad L_2=-2z^{-2};\quad L_3=-2z^{-3}$$

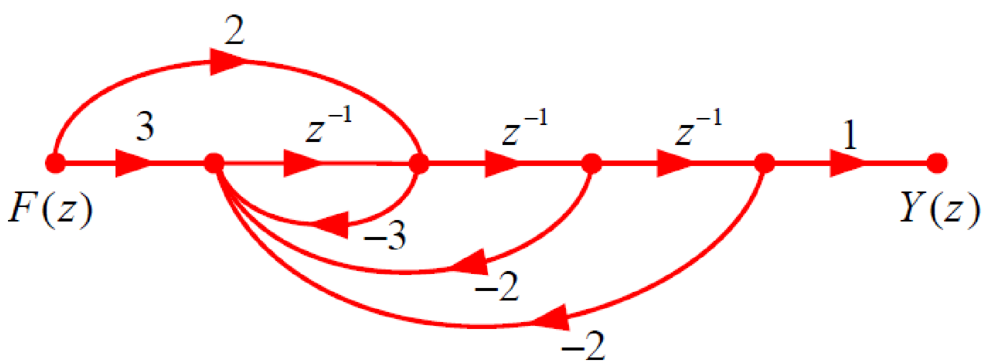
开路传输函数为： $P_1=2z^{-2};\quad P_2=3z^{-3};$

$$\Delta_1=1;\quad \Delta_2=1$$

信号流图如图所示:



（直接形式1）



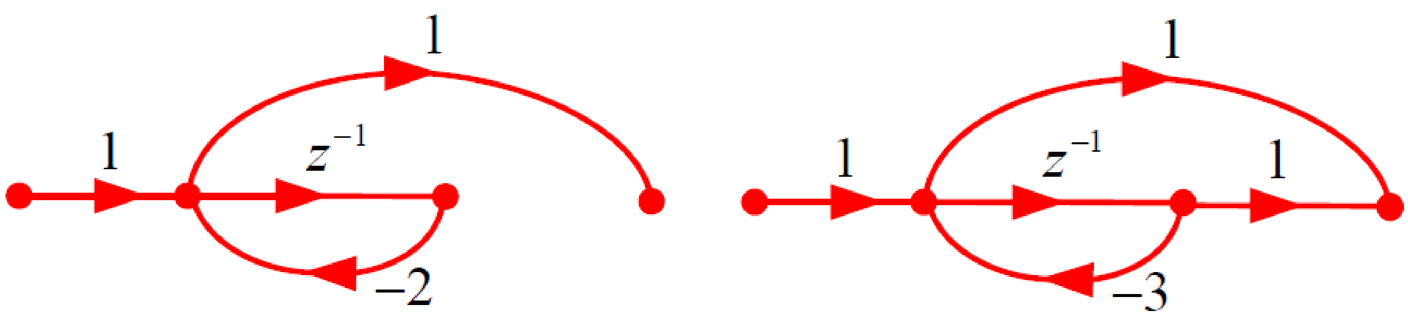
（直接形式2）

（2）串联形式：

例2：$H(z)=\dfrac{z^2+z}{z^2+5z+6}=\dfrac{z}{z+2}\cdot\dfrac{(z+1)}{(z+3)}=H_1(z)\cdot H_2(z)$

$$H_1(z)=\frac{z}{z+2},\quad H_2(z)=\frac{z+1}{z+3}$$

分别对 $H_1(z)$ 、$H_2(z)$ 用直接形式信号流图模拟，然后联接成串联形式。



$H_1(z)$　　　　$H_2(z)$

（3）并联形式：

例3：$$H(z)=\frac{z^2+4z+4}{z^2+7z+12}=\frac{1}{z+3}+\frac{z}{z+4}$$

$$=H_1(z)+H_2(z)$$

$$H_1(z)=\frac{1}{z+3},\ H_2(z)=\frac{z}{z+4}$$

分别 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 用直接形式信号流图模拟，然后联接成并联形式。