图 1: 华东理工大学

微分方程知识总结 (v1.0.0 beta)

莫

2023 年 11 月

前言

欢迎你。

这本来是作者高数时候总结的有关微分方程的知识。事后我萌发出了把它继续完善的想法，并有一种将它传播的愿望。但是这本书的定位，是**为已经初步学过高数中微分方程一章的同学进行一个复习的工作**，所以本整理较多的陈列了有关知识点的问题。不过我在每个知识点（除微分算子法外）后面附加了一两个例题，也作为读者一个归纳复习的依据。认真来说，从数学分析的角度来看，这点知识其实是远远不够的，但作为高数的要求来讲，其实已经够了，虽然用做非数学类竞赛的话其实还是与其有不小的距离。

同时受作者本人能力限制，如果你有什么批评意见或者建议，我真诚欢迎。QQ 或邮箱均可。邮箱 mointeresting@163.com.

本文中，目录和标题标记有 * 的部分，属于高数之外的甜点内容，读者请自便。

目录

1 一阶微分方程 **1**

1.1 可分离变量的微分方程 1

1.1.1 可分离的变量 1

1.1.2 变量代换后可分离的变量 2

1.2 齐次微分方程 3

1.3 一阶线性微分方程 4

1.4 伯努利方程 4

2 可降阶的微分方程 **5**

2.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型 5

2.2 $y'' = f(x, y^{'})$ 型 6

2.3 $y'' = f(y, y^{'})$ 型 6

3 线性齐次和非齐次微分方程解的性质以及解的结构 **7**

3.1 二阶线性齐次微分方程 7

3.2 二阶线性非齐次微分方程 8

4 常系数齐次以及非齐次线性微分方程的通解 **13**

4.1 二阶常系数线性齐次微分方程 13

4.2 二阶常系数线性非齐次微分方程 14

5 欧拉方程 **16**

6 微分方程组 **17**

7 微分方程的应用 **19**

8 微分算子法 * **20**

9 微分方程与级数 **21**

10 微分方程与中值定理 **22**

11 矩阵微分方程 * **23**

11.1 前置知识与温习 23

12 尾注 **25**

注意：
在本总结中，没有特别说明的时候，通解中的所有 C 均为任意常数。

1　一阶微分方程

定义 1.1: 一阶微分方程

有一般形式：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

对于这类问题，有以下定理可以运用：

定理 1.1: 解的存在和唯一性定理

如果 $f(x,y)$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在矩形区域 $\{(x,y)||x-x_0|<a,|y-y_0|<b\}$ 上连续，那么存在一个正数 $h(0<h\leqslant a)$, 使得定解问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $|x-x_0|<h$ 上有唯一的解 $y=\varphi(x)$, 即在 $|x-x_0|<h$ 上成立

$$\varphi'(x) = f(x,\varphi(x)), \ \text{及} \varphi(x_0) = y_0$$

注释 1.1：
有了这个定理，我们在之后用下列方法求出微分方程的表达式的时候，可以知道表达式唯一。

1.1　可分离变量的微分方程

1.1.1　可分离的变量

定义 1.2: 可分离变量的微分方程

如果一个一阶方程可以写成 $y'=f(x,y)$ 能写成 $P(x)dx=Q(y)dy$ 的形式，这就是可分离变量的微分方程。

解法 1.1

对于上式，两边积分即可。

例题 1.1
若 $y'=x+1$，求 y 的表达式

注意:
积分后微分方程一定记得加入任意常数，有时候对于有特解的问题需要解开它。

证明. 解：这个可以写成

$$dy = (x+1)dx$$

于是

$$\int dy = \int (x+1)dx$$

所以

$$y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + C$$

C 为任意常数

□

1.1.2 变量代换后可分离的变量

解法 1.2: 换元积分

若 $y' = f(ax+by+c)$，解法如下：令 $u = ax+by+c$，则 $u' = a+bf(u)$，分离变量则有 $\frac{du}{a+bf(u)} = dx$，于是 $\int \frac{du}{a+bf(u)} = \int dx$.

例题 1.2 例题：求微分方程 $dy = sin(x+y+100)dx$ 的通解

证明. 解：令 $u = x+y+100$，容易知道 $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$ 于是

$$\frac{du}{dx} = 1 + sinu$$

得到了可分离变量方程，稍做处理可以知道

$$\frac{du}{1+sinu} = dx$$

所以

$$\frac{2}{1+tan\frac{u}{2}} = -x + C$$

则

$$tan\frac{x+y+100}{2} = \frac{2}{C-x} - 1$$

解得

$$y = 2arctan(\frac{2}{C-x} - 1) - x - 100$$

□

提示：
对于 $\int \frac{dx}{1+sinx}$ 的积分，可以用万能公式法。

注意：
我们只需要求得通解，对于一些不成立的解，不用写出来。
但是值得注意的是，方程变形后，可能会丢失某些解。例如上题的 $\int \frac{du}{1+sinu}$ 中，我们发现，当 $u=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{N})$ 时，是无法求出本题通解答案的。
不过，只要求出的解中含有独立的任意常数的个数与方程的阶数相同，它就是通解。**若题目是求通解，则无需考虑丢失的解，否则，还是应将丢失的解补上。**

1.2 齐次微分方程

定义 1.3: 齐次微分方程

其标准形式为 $y'=f(\frac{y}{x})$，其中 f 有连续的导数

解法 1.3: 换元

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y'=u+xu'$，代入 y'，则原方程变成可分离变量的方程 $xu'+u=f(u)$

评注：
以下内容仅供了解
对应于一般形式方程 $\frac{dy}{dx}=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}),(c_1,c_2$不全为 $0)$，其求解方法为：

1. 若 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$, 令$x=t+\alpha, y=u+\beta(\alpha,\beta,$为待定常数).且满足方程 $\begin{cases}a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0\\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0,\end{cases}$ 则原方程化为$\frac{du}{dx}=f(\frac{a_1t+b_1u}{a_2t+b_2u})$(齐次方程)
2. 若 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$, 则$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\lambda$令$u=a_1x+b_1y$, 方程化为$\frac{du}{dx}=a_1+b_1f(\frac{u+c_1}{\lambda u+c_2})$(可分离变量方程)

注意：
全微分方程本总结暂时不讲解。

例题 1.3 解定解问题 $\begin{cases}(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0(x>0),\\ y|_{x=1}=0\end{cases}$

证明. 解：将方程化为 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{(1+(\frac{y}{x})^2)}$ 容易知道这是一个齐次方程，令 $y=ux$, 得到

$$x\frac{du}{dx}+u=u+\sqrt{1+u^2}.$$

化简并分离变量后：

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}.$$

对上面左右两式积分，再取以 e 为底的指数，容易知道

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$$

代入初始条件, 知道 $C=1$ 化简后，知道 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ □

1.3 一阶线性微分方程

定义 1.4: 一阶线性方程

即 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$, 其中 $P(x),Q(x)$ 均为连续函数。

结论 1.1: 一阶线性方程的解

利用分离变量法，可以得到相应的齐次线性微分方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$，再用常数变易法，可以得到非齐次线性微分方程的通解为

$$y=(e^{-\int P(x)dx})(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)$$

例题 1.4 求微分方程 $(1+y^2)dx+(x-arctany)dy=0$ 的通解

证明. 解：方程变形为 $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{1+y^2}x=\frac{arctany}{1+y^2}$ 代入上述解法，可以知道其通解为

$$x=Ce^{-arctany}+arctany-1$$

□

1.4 伯努利方程

定义 1.5: 伯努利方程

即 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$, 其中 $P(x),Q(x)$ 均为连续函数,$n\neq 0,1$

解法 1.4

解：方程两端同除以 y^n，令 $z=y^{1-n}$，可以化为一阶线性方程 $\dfrac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$，接下来用一阶线性微分方程的结论代入即可。

注意：
当 $n>0$ 时，$y=0$ 也是方程的解，不要漏了。但是如果是求通解，则无需单独列出之。

例题 1.5 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y+x^2}$ 的通解

证明. 解：视 x 为因变量，y 为自变量，方程变形为 $x'-x=\dfrac{y}{x}$
令 $z=x^2$, 方程两边同除以 x^{-1}，得到

$$\frac{dz}{dy}-2z=2y$$

使用一阶线性方程的解法，得到

$$x^2=1+Ce^{-2y}$$

□

2 可降阶的微分方程

2.1 $y^{(n)}=f(x)$ 型

定理 2.1

形如 $y^{(n)}=f(x)$ 的方程，通过 n 次积分可以求出此类方程的通解。

例题 2.1 求微分方程 $y'''=lnx$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=0, y'|_{x=1}=1, y''|_{x=1}=1$ 的特解

证明. 解：容易知道

$$y''=\int_1^x y'''dt+y''|_{x=1}=xlnx-x+2.$$

同理

$$y'=\int_1^x y''dt+y'|_{x=1}=\frac{x^2}{2}lnx-\frac{3x^2}{4}+2x-\frac{1}{4}$$

于是

$$y=\int_1^x y'dt+y|_{x=1}=\frac{x^3}{6}lnx-\frac{11}{36}x^3+x^2-\frac{1}{4}x-\frac{4}{9}$$

□

注释 2.1： 对于特解问题，不要忘记 $y(x)=\displaystyle\int_{x_0}^x tdt+y|_{(x=0)}$。

2.2 $y'' = f(x, y^{'})$ 型

定理 2.2

形如 $F(x, y', y'') = 0$的方程(不显含未知函数 y). 令 $y' = p(x)$，则该方程可化为一阶方程

$$F(x, p, p') = 0 \tag{2-1}$$

推论 2.1

对于 $F(x, y', y''..., y^k) = 0, (k > 2, k \in \mathbb{N})$ 一样可以用这个方法降阶。

注意：
高次降阶之后可以是伯努利方程，也可以是 $n-1$ 阶线性微分方程，根据需要选择方法。

例题 2.2 求方程 $yy'' - 2(y')^2 = 0$ 的通解

证明. 解：令 $y' = p$，则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$, 原方程变为

$$yp\frac{dp}{dy} - 2p^2 = 0,$$

若 $p \neq 0$, 则有方程 $y\frac{dp}{dy} = 2p$，其通解为 $p = C'y^2$，即 $\frac{dy}{dx} = C'y^2$. 于是

$$y = \frac{1}{Cx + D}$$

C, D 是任意常数且不同时为零 □

2.3 $y'' = f(y, y^{'})$ 型

定理 2.3

形如 $F(y, y', y'') = 0$的方程(不显含自变量 x)，将 y 看成自变量，令 $y' = p(y)$，则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. 该方程化为一阶方程 $F(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0$

注释 2.1： 这个也有跟定理 2.2一样的推论。

例题 2.3 解微分方程 $y'' + \frac{(y')^2}{1-y} = 0$

证明. 解：令 $y' = p$，由上述的求导公式，$y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ 因此原方程化为

$$p\frac{dp}{dy} + \frac{p^2}{1-y} = p(\frac{dp}{dy} + \frac{p}{1-y}) = 0$$

分类讨论：

1.$p = 0$，则原方程特解 $y = C(C \neq 1)$

2.$p \neq 0$，则分离变量，知道原方程通解为

$$y = 1 + C_2 e^{C_1 x}(C_2 \neq 0)$$

□

3 线性齐次和非齐次微分方程解的性质以及解的结构

定义 3.1: 二阶线性微分方程

二阶线性微分方程的一般形式为

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x) = f(x)$$

当 $f(x) \equiv 0$ 时就是齐次线性微分方程，即

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x) = 0$$

当 $p(x), q(x)$ 都等于常数时，称上述方程为**常系数线性微分方程**，否则称为**变系数线性微分方程**

注意：

关于二阶线性微分方程的定解问题，也有它解的存在和唯一性定理，这里不做赘述。

3.1 二阶线性齐次微分方程

注释 3.1: 在这里，我们总假定 $p(x), q(x)$和$f(x)$ 在区间 $I \in (a, b)$ 上连续。

定理 3.1: 齐次线性方程解的线性性质

$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x) = 0$$

在 I 上的两个线性无关的解，则其任意线性组合 $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)(\alpha, \beta$是任意常数$)$包含了方程的全部解.

定义 3.2: 线性相关和线性无关

设 $\{y_j(x)\}_{j=1}^{m}$是m个I 上的函数，若存在一组不全为 0 的常数 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{m}$，使得

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k(x) = 0, x \in I \tag{3-1}$$

则称这 m 个函数在 I 上是**线性相关**的，否则就称为**线性无关**.

评注：
思考线性相关与线性无关，可以从线性方程组的方向，最大线性无关组，基础解系等概念联系，从而得到一些理解。

注释 3.2： 对于一组解 y_1, y_2，如果相除得到的是一个常数，就是线性相关，此时必须舍弃一个。

这里介绍一个很有用的解法：

解法 3.1: Liouville 公式

若 y_1 是

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x) = 0$$

的一个解，那么另一个解

$$y_2 = \frac{1}{y_1}\int y_1^2 e^{-\int p(x)dx} dx \tag{3-2}$$

也是它的一个解

3.2 二阶线性非齐次微分方程

定理 3.2: 非齐次线性微分方程的通解

非齐次线性微分方程的通解等于该方程的一个**特解**加上相应的齐次线性微分方程的通解。

这里还有一个结论：

结论 3.1: 解的叠加原理

若 $y_1(x), y_2(x)$ 分别是线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)=f_1(x)$$

和

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)=f_2(x)$$

的解，则 $y_1(x)+y_2(x)$ 是线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

的解

评注:
上述线性性质，以及解的叠加原理对于任何 n 阶线性常微分方程都成立。

接下来我们来看几道例题。

例题 3.1 已知 $y_1=3, y_2=3+x^2, y_3=3+e^x$ 是某二阶线性非齐次微分方程的解，求该微分方程及其通解.

证明. 解：由已知,$y_2-y_1=x^2, y_3-y_1=e^x$ 是对应的二阶线性齐次微分方程的两个线性无关的解，而 $y_1=3$ 是所求线性非齐次微分方程的特解，所以通解就是

$$y=3+C_1x^2+C_2e^x$$

□

评注:
本题的方法可以当结论直接用，证明的话求导代入即可。

例题 3.2 已知 $y=x$ 是齐次微分方程 $x(x-1)y''-2xy'+2y=0$ 的一个解，求该方程的通解

证明. 解：设 $y=xC(x)$，其中 C(x) 是待定系数，求导后代入方程，整理之后得到 $(x^2-x)C''(x)=2C'(x)$ 这是类似于不显含 y 的可降阶的微分方程，令 $C'(x)=p$，不难发现

$$C'(x)=p=C_1(1-\frac{1}{x})^2$$

知道 $C(x)=C_1(x-2ln|x|-\frac{1}{x})+C_2$其中$C_1, C_2$为任意常数 再代入回 $y=xC(x)$ 即可得到答案 □

评注：

当你知道二阶线性齐次方程的一个解的时候，可以运用常数变易法，也可以使用上述的 Liouville 公式 (3-2)。

例题 3.3 求出以 x 和 $cosx$ 为特解的二阶线性齐次微分方程。

证明. 解：容易知道，解必然可以表示为

$$y = C_1 x + C_2 cosx \tag{3-3}$$

的形式。

由于 y 与 $x, cosx$ 线性相关，则存在一组不全为 0 的 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，我们可以得出一个式子：

$$\lambda_1 y + \lambda_2 x + \lambda_3 cosx = 0 \tag{3-4}$$

结合3-3，我们知道 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 都不为 0。求导后得到

$$\begin{cases} \lambda_1 y + \lambda_2 x + \lambda_3 cosx = 0 \\ \lambda_1 y' + \lambda_2 - \lambda_3 sinx = 0 \\ \lambda_1 y'' \qquad - \lambda_3 cosx = 0 \end{cases}$$

把它看成以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为未知量的线性方程组，由于知道 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 有非零解，所以其系数行列式

$$\begin{vmatrix} y & x & cosx \\ y' & 1 & -sinx \\ y'' & 0 & -cosx \end{vmatrix} = 0$$

即

$$(xsinx + cosx)y'' - (xcosx)y' + (cosx)y = 0$$

这就是以 x 和 $cosx$ 为特解的二阶线性齐次微分方程。 □

注意：

一定要记得上述定义 3.2：线性相关和线性无关给出的式子！运用它，我们可以列出第一个式子。

评注：

本题由线性代数的知识再加上齐次方程组（线性方程组的特殊形式）的知识，我们知道 n 个解 n 个未知量的线性方程组**唯一解的充要条件**是其系数行列式不等于 0，等于 0 就是有零解或者有无数解。但是齐次方程组**必有零解**，所以当其系数行列式不等于 0 的时候，这个唯一解就是零解。所以本题的系数行列式必须等于 0。

想法：学完线性代数回过头来看，其实这蕴含了齐次线性方程组有解与无解的知识点。我们可以想到，微分方程在运用之中，有着大量的未知数与大量的方程式，包括线性规划问题、动力系统等等。如果能把这些东西统筹一起理解的话，也许会更好。

下面具体介绍一下用常数变易法解二阶非齐次线性微分方程的方法。

解法 3.2: 用常数变易法解二阶非齐次线性微分方程

对于非齐次线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)=f(x)$$

如果知道其对应的线性微分方程的两个线性无关解 $y_1(x),y_2(x)$，通解

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

为了求得非齐次线性微分方程的解，用常数变易法

$$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$$

求导

$$y'=C_1'(x)y_1(x)+C_1(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2(x)+C_2(x)y_2'(x)$$

为了避免 $C(x)$ 出现二阶导的情况，与此同时，让 y 拥有二阶导似乎可以凑 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+p(x)\dfrac{dy}{dx}+q(x)=0$ 来抵消一些项，暂且尝试这样做，我们令 $C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0$，对 y' 再求一次导，结果如下：

$$y''=C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x)$$

代入对应的非齐次线性微分方程

$$C_1(x)[y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1]+C_2(x)[y_2''(x)+p(x)y_2'(x)+q(x)y_2]+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x)$$

发现对应的齐次微分方程

$$y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1=0,y_2''(x)+p(x)y_2'(x)+q(x)y_2=0$$

故得到一组线性方程组

$$\begin{cases}C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0\\C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x)\end{cases}$$

结论 3.2: 常数变易法解二阶非齐次线性微分方程：朗斯基表达式形式

根据上述解法，我们得到

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}, C_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}$$

这里 $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$（朗斯基行列式），再对 $C_1'(x), C_2'(x)$ 积分，代入 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 即可。

评注:

注意到上述解法其实得到的是二阶非齐次线性微分方程的一个**特解**:

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

所以特解可以用

$$y^* = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx$$

表示。特解内容在本复习的4.2。

注意:

1. 我们为什么要用常数变易法?

这涉及到积分因子的问题，略长，这里写不下了。

2. 为什么令 $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$?

分析整个过程，我们并没有加入这个式子，这个式子是我们人为加入的。但是最终得到的解却满足我们给出的这个非齐次线性微分方程。也就是说，我们找到了适合这个方程的一个“特解”。当然，你可以尝试加入其他的人为条件。在最后的线性方程组中，我们使用的这个条件，可以利用 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关，得到朗斯基行列式不为 0（更具体的内容可以参考《常微分方程》）。所以人为条件的选择，越能呼应我们已有的知识越好。

4 常系数齐次以及非齐次线性微分方程的通解

4.1 二阶常系数线性齐次微分方程

定义 4.1: 二阶常系数齐次线性微分方程及其特征方程

二阶常系数齐次微分方程如下：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0$$

有

$$\lambda^2+p\lambda+q=0$$

这就是它的特征方程。

解法 4.1: 根据特征方程的解法

分情况讨论

1. 若特征方程有两个不同的实根 x_1, x_2，可设通解 $y=C_1e^{x_1}+C_2e^{x_2}$
2. 若特征方程有两个相同的实根 x_1，可设通解 $y=(C_1+C_2x)e^{x_1}$
3. 若特征方程有一对共轭复根 $a\pm ib$，可设通解 $y=e^{ax}(C_1sinbx+C_2cosbx)$

注意：

上述讨论具有一般性，也就是说，对 n 阶常系数齐次线性微分方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}\frac{dy}{dx}+p_ny=0$$

也有类似的结论:

1. 若 λ是实数单重根，则$e^{\lambda x}$ 是微分方程的解；
2. 若 λ是实数 k 重根，则$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ 是微分方程 k 个线性无关的解；
3. 若 $\lambda\pm i\mu$ 是单重共轭复根，则 $e^{\lambda x}cos\mu x$ 和 $e^{\lambda x}sin\mu x$ 是微分方程的两个线性无关的解。
4. 若 $\lambda\pm i\mu$ 是 k 重共轭复根，则 $e^{\lambda x}cos\mu x, e^{\lambda x}sin\mu x, xe^{\lambda x}cos\mu x, xe^{\lambda x}sin\mu x, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda x}cos\mu x, x^{k-1}e^{\lambda x}sin\mu x$, 是微分方程的 2k 个线性无关的解。

这样，恰好可以找到 n 个线性无关的解 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$, 于是，微分方程的通解为

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是任意常数。

4.2 二阶常系数线性非齐次微分方程

解法 4.2: 二阶常系数线性非齐次微分方程的特解

形式：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$$

特解分类讨论：1. 如果 $f(x)=U_n(x)e^{\lambda^* x}$, 若 λ 是对应二阶常系数齐次微分方程的特征方程的 m 重根 $(m=0,1,2)$，则方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$$

有形式为

$$y^*=x^mV_n(x)e^{\lambda^* x} \tag{4-1}$$

其中,$V_n(x)$ 是跟 $U_n(x)$ 同次的多项式

2. 如果 $f(x)=U_n(x)e^{ax}cosbx$ 或 $U_n(x)e^{ax}sinbx(b\neq 0)$ 则方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$$

有形式为

$$y^*=x^me^{ax}[V_n(x)cosbx+\tilde{V}_n(x)sinbx] \tag{4-2}$$

这里 $V_n(x)$与$\tilde{V}_n(x)$ 也是跟 $U_n(x)$ 同次的多项式，m 根据 $a\pm ib$ 其中之一是不是对应特征方程的解而取 0 或 1

评注：

在这里，当 f(x) 是多项式、指数函数、正弦和余弦函数或者它们的乘积时，由于这些类函数求导后不会改变函数的形式，因此，可以设方程的解是同类函数，利用待定系数法求出其特解 $y*$。至于怎么求，这里不再赘述。

于是，我们来看两道例题。

例题 4.1 求微分方程 $y''+4y=4x^2+2x+5+cos2x$ 的通解

注释 4.1： 这就是需要用解的叠加原理的时候了。

证明. 解：这个方程对应的齐次微分方程是 $y''+4y=0$，由特征方程，容易知道其通解为

$$y=C_1cos2x+C_2sin2x$$

对于前者 $y''+4y=4x^2+2x+5$，可设特解为 $y_1=a_2x^2+a_1x+a_0$，代入 $y''+4y=4x^2+2x+5$，化简，整理，

可以得到

$$4a_2x^2+4a_1x+2a_2+4a_0=4x^2+2x+5$$

比较系数后知道

$$a_2=1,a_1=\frac{1}{2},a_0=\frac{3}{4}$$

因此 $y_1=x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$，对于后者 $y''+4y=cos2x$，可设特解 $y_2=axcos2x+bxsin2x$，代入 $y''+4y=cos2x$，化简整理后，同上，用比较系数知道 $a=0,b=\frac{1}{4}$，则

$$y_2=\frac{1}{4}xsin2x$$

由解的叠加原理知道

$$y=C_1cos2x+C_2sin2x+x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}xsin2x$$

□

下面这道题反过来，已知两个解，去求方程。

例题 4.2 设四阶常系数线性齐次方程有一个解为 $y=3e^xcos2x$，另一个解为 $y=(3+2x)e^x$，求该方程及其通解。

证明. 解：容易知道四个解是：$1,1,1\pm 2i$, 所以特征方程是 $\lambda^4-4\lambda^3+10\lambda^2-12\lambda+5=0$ 微分方程就是：

$$y^{(4)}-y^{(3)}+10y''-12y'+5y=0$$

通解就是

$$y=(C_1+C_2x)e^x+e^x(C_3sin2x+C_4cos2x)$$

□

对于这种从常系数线性齐次方程的解或者从常系数非齐次方程的特解来入手求解该方程及其通解的问题，有时候会遇到一些相对困难的因式分解，比如下题。

例题 4.3 求微分方程 $y^{(5)}+4y'=0$ 的通解

证明. 解：特征方程 $r^5+4r=0$，知道 $r(r^4+4)=0$ 则

$$r(r^4+4r^2+4-4r^2)=0$$

自然知道

$$r(r^2+2-2r)(r^2+2+2r)=0$$

则知道

$$r_1=0,r_{2,3}=1\pm i,r_{4,5}=-1\pm i$$

通解为

$$y = C_1 + e^x(C_2cosx + C_3sinx) + e^{-x}(C_4cosx + C_5sinx)$$

□

想法： 我们为什么会想到这样分解这个多项式?
根据实系数多项式因式分解定理，**每个次数不小于 1 的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积**。这启发我们继续去分解因式。
利用高等代数的知识：设 P 是复数集合的一个子集合，如果 P 之内任意两个数做加、减、乘、除（0 不做除数），其结果仍然落在 P 之内，并且 P 至少含有两个不同的元素，则 P 称为一个数域，那么有理数集 Q 其实就是有理数域，简单地说，里面只能有有理数。
而在有理数域上，爱森斯坦判别法是一个常用的判别法:

$$x^n + \cdots + a_0 = 0, a_k \in Z, \text{若其存在有理根} r, \text{则必为整数根，并且有} r|a_0$$

虽然这个判别法其实跟本体关系不大，甚至你用多项式除法也可以找到因式。

以下留作习题:

习题 4.1 求解如下微分方程:

1.$y'' + (x + e^{2y})(y')^3 = 0$ 2.$-xy''y^2 = y'(xy' - y)^2$ 3.$x(y')^2 + (y - 2x^2)y' - 2xy = 0$

5 欧拉方程

定义 5.1: 欧拉方程

形如

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + px\frac{dy}{dx} + qy = f(x)$$

的微分方程称为**二阶 Euler 方程**，其中 p, q 为常数.

解法 5.1: 变量代换 $x = e^t$

作变量代换 $x = e^t$，即 $t = lnx$，则可将原方程化为

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (p-1)\frac{dy}{dx} + qy = f(e^t)$$

这是一个以 t 为自变量的常系数线性微分方程。对于 **n 阶 Euler 方程**也是如此，可以将

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} + p_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}x\frac{dy}{dx} + p_ny = f(x)$$

作一样的变换。

例题 5.1 求 $x^2y''-xy'+y=2x$ 的通解

证明. 解：作 $x=e^t$，则 $t=lnx$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$$

代入方程，得

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=2e^t$$

这就是二阶线性非齐次微分方程，解法已经很明显了。最后在含 t 的式子里，再把 $t=lnx$，最终结果就是

$$y=x(C_1+C_2lnx)+xln^2x$$

□

评注：
在欧拉变换中，一定注意求导是对哪个变量求导，正如上题一样。

6 微分方程组

定义 6.1: 常系数线性微分方程组

如果微分方程组的每一个微分方程都是常系数线性微分方程，那么这种微分方程组就叫做**常系数线性微分方程组**。

解法 6.1: 常系数线性微分方程组的解法

第一步从方程组中消去一些未知函数及其各阶导数，得到只含有一个未知函数的高阶常系数线性微分方程。

第二步解此高阶微分方程，求出满足该函数的未知函数。

第三步把已求得的函数代入原方程组，一般情况下，不用积分就可以求出其余的未知函数。

例题 6.1 解微分方程组

$$\begin{cases}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-x=e^t\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dx}+y=0\end{cases}$$

证明. 解：用记号 D 表示 $\frac{d}{dt}$，则方程组可记作

$$\begin{cases}(D^2-1)x+Dy=e^t\\ (D^2+1)y+Dx=0\end{cases}$$

这个方程可以像解代数方程组一样，于是我们知道

$$(-D^4+D^2+1)y=e^t$$

这就是四阶非齐次线性方程，它的特征方程是

$$-r^4+r^2+1=0$$

解得特征根

$$r_{1,2}=\pm\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, r_{3,4}=\pm\beta i=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

容易求得一个特解 $y^*=e^t$，于是知道通解

$$y=C_1e^{-\alpha t}+C_2e^{\alpha t}+C_3cos\beta t+C_4sin\beta t+e^t$$

又因为

$$x=-D^3y-e^t$$

用求得的 y 的通解代入，可以知道

$$x=\alpha^3C_1e^{-\alpha t}-\alpha^3C_2e^{\alpha t}-\beta^3C_3cos\beta t+\beta^3C_4sin\beta t-2e^t$$

求得的 x,y 再联立一下，就是所求方程组的通解. □

注意:

在解常系数微分方程组的时候，用微分算子法简化运算是个不错的选择，特别是二阶及以上的微分方程组。微分算子法具体内容可以见本总结的第八章。

7 微分方程的应用

这里选择了一道较难的应用题（微分方程的几何运用），用来锻炼自己。

例题 7.1 一个冬季的早晨开始下雪，且以恒定的速度不停地下。一台扫雪机从上午 8 点开始在公路上扫雪，到 9 点前进了 2(km)，到 10 点前进了 3(km)。假定扫雪机每小时扫去积雪地体积为常数，问何时开始下雪。

证明. 解：由题目知道，下雪速度恒定，假设 h 是 t 时间时地面的积雪厚度，则不难知道 $\frac{dh}{dt}=C$，于是 $h=Ct+C_1$，又因为 $t=0$ 时候，地面没积雪，所以 $C_1=0$，故 $h=Ct$。

另一方面，由于扫雪机每小时扫去雪地体积为一常数，所以它扫雪的速度跟雪堆积的厚度成反比，即 $\frac{dx}{dt}=\frac{k}{h}$，其中，k 为一常数，代入 h 的表达式，不难得到

$$\frac{dx}{dt}=\frac{A}{t}$$

解开这个方程知道

$$x=Alnt+B(B\text{为任意常数})$$

设 T 是天上开始下雪到扫雪机开始工作的这段时间，我们可以得到三个式子

$$\begin{cases} AlnT+B=0 \\ Aln(T+1)+B=2 \\ Aln(T+2)+B=3 \end{cases}$$

上述第二个式子减去第一个式子，第三个式子减去第二个式子，根据倍数关系，可以得到

$$(\frac{T+1}{T+2})^2=\frac{T+1}{T}$$

解这个方程式，我们知道

$$T=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618(h),\text{也就是约等于 37 分 5 秒}$$

所以这场雪是 7:22:55 开始下的。 □

评注：

充分挖掘本题隐藏的信息：下雪速度恒定，扫雪机扫雪体积恒定（化为扫雪深度），好好利用它们。

8 微分算子法 *

微分算子法对于一些微分方程的计算是极其好用的，咱们在微分方程组里已经初步看出了它的强大的简化计算能力。

如下，微分算子的本质其实就是一种映射。

$$\boxed{y} \longrightarrow \boxed{D} \longrightarrow \boxed{y'}$$

定义 8.1: 微分算子

我们把

$$D = \frac{d}{dx} \tag{8-1}$$

叫做微分算子。

类比函数的表达方式，$Dy = y'$，其实这就是对 y 求一次导。不难发现 $D^n y = y^{(m)}$ 就是求了 n 次导。

结论 8.1: 微分算子性质

1. 我们把 d 代入计算的话，可以看到 $y' = \frac{1}{D}y$，所以 $\frac{1}{D^n}f^{(n)}(x) = f(x)$
2. 若 $F(D) = D - k, \frac{1}{F(D)}e^{bx} = \frac{1}{b-c}e^{bx}$
3. 若 $F(D) = D^2 - (a+b)D + ab = (D-a)(D-b)$, 则 $\frac{1}{F(D)}f(x) = \frac{1}{D-b}\frac{1}{D-a}f(x)$
4. $\frac{1}{F(D)}e^{kx} = \frac{1}{F(k)}e^{kx}$，其中 $F(k) \neq 0$.
5. $\frac{1}{F(D)}u(x)e^{kx} = e^{kx}\frac{1}{F(D+k)}u(x)$
6. $\frac{1}{F(D)}[f_1(x) + f_2(x)] = \frac{1}{F(D)}f_1(x) + \frac{1}{F(D)}f_2(x)$
7. 若 $F(D) = D - k$, 则 $\frac{1}{F(D)}x^a = (-\frac{1}{k} - \frac{D}{k^2} - \cdots - \frac{D^a}{k^{a+1}})x^a$

评注:
对于性质 2. 构造微分方程：$y' - ky = e^{bx}(b \neq k)$，特解设为 $y^* = \frac{1}{b-k}$
这里需要注意，性质 7. 用整式除法也可以得到相似的结果。

注释 8.1: 考虑到这只是个复习笔记，而且微分算子法属于常微分方程书中内容，这里 3. - 7. 不提供推理过程。
而且，整个微分算子法几乎都是从知乎一篇文章抄过来的，这里建议直接进入原文观看: https://zhuanlan.zhihu.com/p/429780174

9 微分方程与级数

如果有这种极限的话，你该怎么做?

例题 9.1

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}=\_\_\_\_\_\_\_\_$$

当你遇到这种极限计算的时候，实际上，纯粹的极限恐怕很难求解，我们需要其他的方法。让我们娓娓道来。

首先咱们从这个极限开始。

例题 9.2 计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n)!}$

咱们构造一下啊。令 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 则: $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}$, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}$, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}$

然后不难发现:

$$f+f'+f''+f'''=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x \tag{9-1}$$

我们有以下初值条件:

$$f(0)=1,f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$$

特征方程和特征方程的解是:

$$r^3+r^2+r+1=0$$

$$r_{1,2}=\pm1,r_{3,4}=\pm i$$

不难发现，继续这个思路下去，计算会非常的复杂，我们需要换一个方法。

从哪里入手呢？思考一下，有什么函数的泰勒展开正好分母含有 $n!$?

$e^x,cosx,sinx$，是的，这些展开确实有点类似上面的式子。但是它们分母的增长速度还不够，也不太符合右式子的形式。但是我们注意到，在式 9-1中 $f+f''=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，所以，这里我们需要了解 $coshx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$。不难发现，$coshx$ 正好等于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，所以我们可以直接得到:

$$f+f''=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2n}{(2n)!}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

所以得到

$$f(x)=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x}+2cosx)$$

令 $x=1$，我们就得到了我们所求的极限，这里我们可以给它取一个名字，叫**级数极限**。

习题 9.1 计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$

10 微分方程与中值定理

考虑下面这个题：

例题 10.1

设 f(x) 在$[1,e]$上连续，在$(1,e)$内可导，且$f(e)=1$, 证明, $\exists\xi\in(1,e)$, 使$\xi f^{'}(\xi)ln\xi+f(\xi)=1$

考虑到以后本总结可能涉及数学类的知识，这里改成：

$$若f(x)\in C[1,e]\cap D[1,e], f(e)=1, 证明, \exists\xi\in(1,e), 使\xi f^{'}(\xi)ln\xi+f(\xi)=1$$

注意：
这里我们约定：$f\in C(E)$ 表示 E 上连续函数全体，$f\in D(E)$ 表示 E 上可微函数全体。

回想一下上高中的时候，这种问题跟高中学过的同构有一点联系的。是的，同构与本部分的技巧是同源的，根本就在于找到那个“共通”的表达式。

评注：
我们不得不注意的是，在抽象代数中，“同构”是由 isomorphism 翻译而来的，它是指两个集合之间保持结构的一一映射，如群、环、域的同构。但是实际上，在高中里，我们习得的 **“构造形式或结构相同的例子”**，比如 $e^{x+lnx}\geq x+lnx+1$，这并不是真正意义上的“同构”。但是为了引起大家的记忆，这里开篇我们仍然沿用“同构”一词。

考虑把 $f'(\xi)$ 当作微分方程中的 y'，则有以下想法自然的变换：

$$f'(\xi)+\frac{f(\xi)}{\xi ln\xi}=\frac{1}{\xi ln\xi}$$

这是一阶常系数非线性齐次微分方程，得到：

$$f(\xi)=1+\frac{C}{ln\xi}(\text{C 为任意常数})$$

做个简单的变换：

$$f(\xi)ln\xi-ln\xi=C$$

诶，左边的式子求导之后，若是等于 0，正好和题目中给出的式子左端一模一样！这启发我们去用罗尔定理，毕竟它的结果就是导数为 0 的样子。如果令

$$y(x)=f(x)lnx-lnx$$

利用 $y(1)=0, y(e)=0$，我们构造成功了！

注意:

以上构造的想法建议在草稿本上完成，如果把 ξ 换成 x 也是自然的。

习题 10.1 设函数 $f(x) \in D^2[0,1]$，且 $f(0) = f'(0) = 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (0,1), 使得 f''(\xi) = \frac{2f(\xi)}{(1-\xi)^2}$$

11 矩阵微分方程 *

11.1 前置知识与温习

定义 11.1: 线性空间

一个在内部元素上定义了加法和数乘的集合。我们熟知的矢量，是被定义为线性空间内的元素。

$$(f+g)(x) \equiv f(x) + g(x)$$

和数乘

$$(cf)(x) \equiv cf(x)$$

那么全体函数就构成了一个线性空间

$$V \equiv \{f, g, h, \cdots\}$$

也可以叫函数空间。

定义 11.2: 线性变换

线性指的是总满足 $D(cf+g) = cD_f + D_g$。简单来说，把一个矢量变换到另一个矢量的过程就叫做线性变换。

用更数学的说法，就是由向量空间 V 映射到向量空间 W 的线性变换 T，它将 V 中每个向量 x 映射成 W 中唯一向量 $T(\mathbf{x})$，且满足线性空间中的加法与数乘规则。

定义 11.3: 核

线性变换 T 的核（或零空间）是 V 中所有满足 $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ 的向量 $\mathbf{u}$ 的集合。

不难证明 T 的核是 V 的一个子空间。

定义 11.4: 函数空间：微分算子

无穷阶可导函数上：记 $n \in \mathbb{N}; D^n \equiv \dfrac{d^n}{dx^n}$; 其中，$c, c_n, p_n \in \mathbb{R}$. 我们可以看到 $D_f = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \in V$, 即求导之后 D_f 仍是一个函数, 所以是这个空间的另一个矢量。

评注:

上面微分算子就是一种线性变换。进一步来说 $\sum_n c_n D^n$ 当然也是一个线性变换。

在矩阵中，矢量就是列向量（列矩阵），线性变换就对应着方阵。至于方阵的线性变换，可以可以联想一下旋转变换矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} cos\phi & sin\phi \\ sin\phi & cos\phi \end{bmatrix}$$

Lay 的 Linear Algebra and Its applications 也提到了以下矩阵线性变换：对称、收缩与拉伸、剪切变换与投影，这里不表。

12 尾注

推荐一些有意思的文章：数列、矩阵与微分方程的特征值统一理解

部分习题参考答案：

习题：4.1

1. 视 x 为因变量, 答案为 $x = C_1e^y + C_2e^{-y} + \dfrac{e^{2y}}{3}$
2. 变形为 $(\dfrac{1}{xy' - y})' = -\dfrac{1}{y} + C$，于是 $x = C_2yC_1^{\frac{1}{y}}$
3. 因式分解：$(xy' + y)(y' - 2x) = 0$，分别解开两个微分方程，有 $y = x^2 + C$ 与 $y = \dfrac{C}{x}$