

### 概述1

**可压缩性不能忽略**  $\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial \rho}{\partial s} \neq 0$

**密度场非定常、高速、密度梯度大**

**重要流动参数**  $\Rightarrow$  速度、压强、密度、温度  
音速、焓、熵等

**控制方程组**  $\Rightarrow$  连续、动量、能量、状态

**重要准则数**  $\Rightarrow$  马赫数、速度系数

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 1

### 概述2

**飞行器在空气中的高速运动**  $\Rightarrow$  炮弹、飞机、火箭等的飞行  
*gas dynamics*



2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 2

### 概述3

**气体在航空发动机内的流动**



进气道 压气机 燃烧室 涡轮机 喷口

风扇 外涵道 内涵道

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 3

### 概述4

**气体在动力机械内的流动**



2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 4

**概述5**

有明显粘性效应的气体管道流动

→ 输气管道

有明显热交换的气体流动

→ 换热器

反应器





2022-4-13 西安交通大学力学课程组 5

**概述5**

一元、定常、可压缩、等熵

可压缩流动的基本概念、一元定常等熵流动、正激波、喷管中的流动计算

基础知识

→ 积分形式控制方程组，马赫数，体积弹性模量，内能、焓、比热等热力学参数

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 6

**第十一章 可压缩流动基础**


可压缩流动的基本概念

定常一元等熵流动

→ 控制方程组、参考状态、气流参数与通道面积的关系

正激波


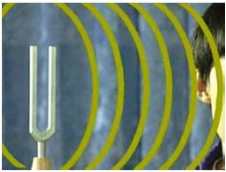
几何喷管中的流动



2022-4-13 西安交通大学力学课程组 7

**11.1 可压缩气流的基本概念-音速**


声音传播

人可以感受到的范围

频率: 20 - 20000Hz

声压:  $2 \times 10^{-5} \text{Pa}$  -  $2 \times 10 \text{Pa}$



利用空气震动，透过外耳和中耳，传到内耳，感应声音

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 8

### 微弱扰动波的传播1

扰动源 → 发出扰动的根源

扰动 → 介质状态发生某种程度的变化

微弱扰动波 → 波通过后状态发生微弱变化

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 9

### 微弱扰动波传播2

多米诺骨牌

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 12

### 微弱扰动波 — 压缩波和膨胀波

长直通道内压缩波和膨胀波

	压缩波	膨胀波
波传播方向 质点运动方向	相同	相反
波面过后	热力参数 增大	热力参数 减小

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 11

### 微弱扰动波传播的热力过程

微弱扰动波传播的热力过程

参数变化极其微小，忽略不可逆损失

可逆过程

波前后温差较小，波速很高

绝热过程

等熵过程

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 12

**微弱扰动波传播速度—音速1**

**音速**

微弱扰动波在可压缩介质中传播的速度

微弱扰动波相对流体介质的速度

波的传播速度与流体介质的运动速度不同

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 13

**音速2**

坐标系固连扰动波

**连续方程**  $\Rightarrow dV = \frac{a}{\rho} d\rho$

**运动方程—动量方程**  $\Rightarrow dV = \frac{dp}{\rho a}$

$\Rightarrow a^2 = \frac{dp}{d\rho}$  牛顿, 1686, 等温假设  
对空气, 音速低 20%

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 14

**音速3**

**音速基本公式**  $\Rightarrow a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$

**其它形式音速方程**

由  $E_v = dp / \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}}$

③ 音速可以反映压缩性

**不可压缩流体**  $E_v \rightarrow \infty \Rightarrow a \rightarrow \infty$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 15

**音速4**

**气体的等熵弹性模量**  $E_v = \gamma p$

$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$

**完全气体**  $p = \rho RT$

$\Rightarrow a = \sqrt{\gamma RT}$  **当地音速**

流体压缩性不同, 对应的音速不同

流场中当地状态参数不同, 音速不同, 称为当地音速

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 16

### 马赫数

$Ma = \frac{V}{a}$       *Mach number*      可压缩流动的决定性准则  
; 不直接反映流速大小

$Ma < 1$       亚音速流动

$Ma = 1$       音速流动

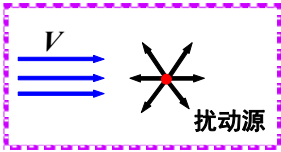
$Ma > 1$       超音速流动

$Ma > 5$       高超音速流动

2022-4-13      西安交通大学流体力学课程组      17

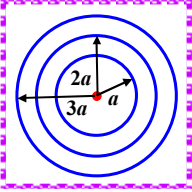
### 微弱扰动传播的区域1

静止点源，流体以某速度流动



流体速度  $V = 0$

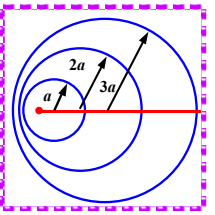
同心球面波，扰动向四面八方传递



2022-4-13      西安交通大学流体力学课程组      18

### 微弱扰动传播的区域2

流体速度  $V < a$

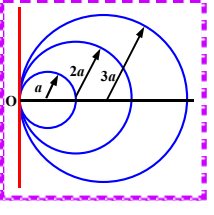


- 只要时间足够长，扰动可波及全场
- 以亚音速运动的扰动源产生的扰动波会超越扰动源向前传播，扰动可传遍整个流场

2022-4-13      西安交通大学流体力学课程组      19

### 微弱扰动传播的区域2

流体速度  $V = a$



- 只影响过O点垂直于来流平面的右半空间
- 以音速运动的扰动源产生的扰动波不能超越扰动源，扰动源上游为寂静区或未受扰区

2022-4-13      西安交通大学流体力学课程组      20

### 微弱扰动传播的区域3

流体速度  $V > a$

扰动只波及锥面内部

马赫锥

马赫角  $\rightarrow$  OA与来流的夹角

$\mu = \arcsin\left(\frac{a}{V}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{Ma}\right)$  Ma越大  $\mu$  越小

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 21

### 微弱扰动传播的区域5—例题

例：超音速飞机在高空巡航，飞机通过观察者头顶多少秒后，观察者方可听到发动机的声音？ $Ma = 1.5$ ,  $z = 1000\text{m}$ ,  $t = 20^\circ\text{C}$ 。

解：马赫角

$\mu = \arcsin\left(\frac{1}{Ma}\right)$

$= \arctan\left(\frac{Z}{V\Delta\tau}\right)$

$\Delta\tau = 2.17(\text{s})$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 22

### 11.2 一维定常可压缩流动的基本方程

粘性、定常、一元、可压缩  $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0, \rho \neq \text{const}, \mu \neq \text{const}$

连续方程  $\leftarrow$  通过各过流断面质量流量不变

动量方程  $\leftarrow$  CV所受合外力 = 动量的净流出率，注意壁面摩擦力

能量方程  $\leftarrow$  单位时间对CV所作的功与加给CV的热量 = 能量的净流出率

状态方程  $\leftarrow$  完全气体

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 23

### 定常一元可压缩气流基本方程组2

曲率不大、断面形状和面积变化不剧烈的管道内可压缩流动——一元流动

连续方程  $\rightarrow$  变截面管道，定常，一元

$(\rho + d\rho)(V + dV)(A + dA) - \rho VA = 0$

展开，忽略二阶微量

$\rho V dA + \rho A dV + V A d\rho = 0$

$d(\rho VA) = 0$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 24



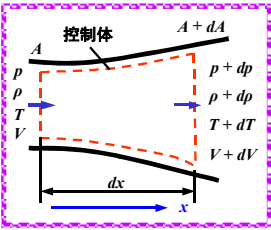
### 定常一元可压缩气流基本方程组2

**连续方程**

积分  $\dot{m} = \rho VA = C$

$$\rho V dA + \rho A dV + V A d\rho = 0$$

两边同除  $\rho VA$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$


2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 25

### 定常一元可压缩气流基本方程组3

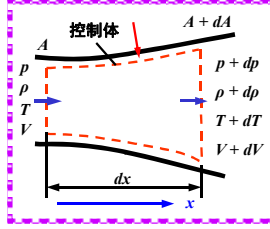
**动量方程**

定常一元，忽略质量力

⊙ x 方向合力  $F_x$

$$F_x = -dpA - \tau_w P dx$$

⊙ x 方向动量的静流出口率  $\rho V A dV$



2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 26

### 定常一元可压缩气流基本方程组4

$$V dV = -\frac{dp}{\rho} - \frac{\tau_w}{\rho A} P dx$$

由当量直径  $D_h = \frac{4A}{P}$

$$V dV = -\frac{dp}{\rho} - \frac{4\tau_w}{\rho D_h} dx$$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 27

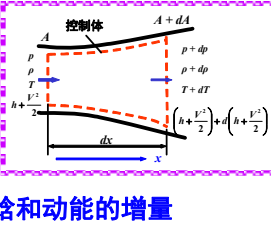
### 定常一元可压缩气流基本方程组5

**能量方程**  $\Rightarrow$  定常，一元，忽略重力

$$\dot{m} \left[ \left( h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) - \left( h_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right) \right] = \dot{Q} + \dot{W}_{\text{轴}}$$

$$d \left( h + \frac{V^2}{2} \right) = q_H$$

⊙ 加给单位质量气体的热量等于单位质量气体的焓和动能的增量



2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 28

### 定常一元可压缩气流基本方程组6

**状态方程**

$$p = \rho RT$$

② 对空气而言, 适用完全气体假设的范围

$$240\text{ K} < T < 2000\text{ K}$$

$$p < 9.8 \times 10^5\text{ Pa}$$

在完全气体假设的范围内, 如果温度不太高, 定压比热、定容比热可视为常数

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 29

### 定常一元等熵流动的基本方程

**等熵流动**

- 可逆** 粘性影响小, 参数变化连续
- 绝热** 流速高, 忽略热交换

**完全气体热力学关系式**

$$h = C_p T \quad U = C_v T \quad R = C_p - C_v \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

$$C_p = \frac{RC_p}{C_p - C_v} = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \quad C_v = \frac{C_p}{\gamma} = \frac{R}{\gamma - 1}$$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 30

### 等熵流动方程组1

**连续方程**  $\Rightarrow \rho VA = \text{常数}$

**动量方程**  $\Rightarrow VdV = -\frac{dp}{\rho} - \frac{4\tau_w}{\rho D_h} dx$  无粘

**积分上式**  $\Rightarrow \frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = C$

**等熵**  $\Rightarrow \frac{p}{\rho^\gamma} = C' \Rightarrow \frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = C$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 31

### 等熵流动方程组2

**能量方程**  $\Rightarrow d\left(h + \frac{V^2}{2}\right) = q_H$

**绝热**  $\Rightarrow d\left(h + \frac{V^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow h + \frac{V^2}{2} = C$

由  $h = C_p T \quad C_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}$

$\Rightarrow h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} RT = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma - 1}$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 32



### 等熵流动方程组3

能量方程的各种形式

$$\begin{cases} C_p T + \frac{V^2}{2} = C & \frac{\gamma}{\gamma-1} RT + \frac{V^2}{2} = C \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = C & \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = C \end{cases}$$

◎ 动量方程、能量方程相同

状态方程  $\xrightarrow{\text{完全气体}}$   $p = \rho RT$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 33

### 等熵流动方程组4

连续方程  $\Rightarrow \rho VA = C$

能量方程  $\Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = C$

状态方程  $\Rightarrow p = \rho RT$

过程方程  $\Rightarrow \frac{p}{\rho^\gamma} = C$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 34

### 11.3 等熵滞止状态和临界状态

基本特性  $\searrow$

热力参数与速度之间的相互变化关系

参考状态  $\Rightarrow$  在整个运动过程中参数不变

◎ 等熵滞止状态、临界状态、极限状态

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 35

### 参考状态—等熵滞止状态1

静参数  $\Rightarrow$  气流的当地状态参数  
 $V, p, \rho, T, a, h$  等

滞止状态  $\xrightarrow{\text{某热力过程}}$  速度滞止为零时的状态

滞止参数  $\Rightarrow$  滞止状态的参数  
 $p_0, \rho_0, T_0, a_0, h_0$  等

◎ 热力过程不同，滞止状态不同、滞止参数也不同

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 36

### 参考状态—等熵滞止状态2

当地状态  $\xrightarrow[\text{假想}]{\text{等熵过程}}$  速度滞止为零的状态

$\Rightarrow$  等熵滞止状态  $\xrightarrow{\text{简称}}$  滞止状态

等熵滞止状态的参数  $\xrightarrow{\text{简称}}$  滞止参数

$p_0, \rho_0, T_0, a_0, h_0$  等

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 37

### 参考状态—等熵滞止状态4

$h + \frac{V^2}{2} = h_0 \xrightarrow{\text{等熵滞止到速度为0}} h_0 = \text{常数}$

$C_p T + \frac{V^2}{2} = C_p T_0 \xrightarrow{\text{等熵滞止}} T_0 = \text{常数}$

$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \xrightarrow[\text{等熵滞止}]{p/\rho^\gamma = C} \begin{matrix} p_0 = \text{常数} \\ \rho_0 = \text{常数} \end{matrix}$

$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1} \xrightarrow{\text{等熵滞止}} a_0 = \text{常数}$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 38

### 参考状态—等熵滞止状态5

定常一元等熵流中等熵滞止参数为常量，因此可作为参考状态

① 滞止焓 (总焓)

② 滞止温度 (总温)

使动能全部滞止下来增加的温度

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 39

### 参考状态—等熵滞止状态6

无量纲热力学参数之间的关系

① 等熵过程方程  $\Rightarrow \frac{p}{p_0} = \frac{\rho^\gamma}{\rho_0^\gamma}$

② 完全气体状态方程  $\Rightarrow \frac{p}{p_0} = \frac{\rho T}{\rho_0 T_0}$

$\Rightarrow \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 40

### 参考状态—等熵滞止状态7

$$\Rightarrow \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dh}{h} = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{da}{a}$$

所有热力学参数变化一致， $p$  变化最快

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 41

### 参考状态—等熵滞止状态6

#### 静参数与速度的关系

$$C_p T_0 = C_p T + \frac{V^2}{2} \Rightarrow \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{V^2}{2C_p T_0}$$

⊙  $V$  减小， $T$ ， $p$ ， $\rho$  均增大  $\Rightarrow$  减速使气流压缩

⊙  $V$  增大， $T$ ， $p$ ， $\rho$  均减小  $\Rightarrow$  加速使气流膨胀

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 42

### 参考状态—等熵滞止状态7

#### 用马赫数表示的气流参数关系式

能量方程  $\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$

$$\Rightarrow \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)^{-1}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \quad \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 43

### 参考状态—临界状态1

当地状态  $\xrightarrow{\text{等熵过程}}$   $Ma = 1$  的状态

$\Rightarrow$  临界状态

$\Rightarrow$  临界参数  $p_{cr}, \rho_{cr}, T_{cr}, a_{cr}$  或  $p^*, \rho^*, T^*, a^*$

能量方程  $\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$

临界状态下  $\frac{a^{*2}}{\gamma-1} + \frac{a^{*2}}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 44

### 参考状态—临界状态2

能量方程  $\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$

临界状态下  $\frac{a^{*2}}{\gamma-1} + \frac{a^{*2}}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1}$

$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

**定常一元等熵流动的临界参数为常量**

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 45

### 参考状态—临界状态3

空气,  $\kappa = 1.4$

$\frac{T^*}{T_0} = 0.833, \frac{p^*}{p_0} = 0.528, \frac{\rho^*}{\rho_0} = 0.634$

$T/T_0 < 0.833, p/p_0 < 0.528, \rho/\rho_0 < 0.634$

超音速流动

$T/T_0 > 0.833, p/p_0 > 0.528, \rho/\rho_0 > 0.634$

亚音速流动

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 46

### 参考状态—极限状态

当地状态  $\xrightarrow{\text{等熵过程}}$  温度为0K的状态

极限状态 (最大速度状态)

能量方程  $C_p T + \frac{V^2}{2} = C_p T_0$

$V_{\max} = \sqrt{2C_p T_0} = \sqrt{2h_0}$  假想状态

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 47

### 速度系数

速度系数  $\lambda = \frac{V}{a^*}$  直接反映当地速度的大小

对于某确定的等熵流动是常数

$Ma^2 = \frac{V^2}{a^2} = \frac{V^2}{a^{*2}} \cdot \frac{a^{*2}}{a_0^2} \cdot \frac{a_0^2}{a^2} = \lambda^2 \cdot \frac{T^*}{T_0} \cdot \frac{T_0}{T}$

$= \lambda^2 \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 48

### 速度系数与马赫数

$$\lambda^2 = \frac{\frac{\gamma+1}{2} Ma^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2}$$

$$Ma^2 = \frac{\frac{2}{\gamma+1} \lambda^2}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2}$$

	Ma	$\lambda$
滞止状态	0	0
临界状态	1	1
极限状态	$\infty$	$\sqrt{(\gamma+1)/(\gamma-1)}$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 49

### 气体动力函数表

对于一定的  $\gamma$  值按 Ma 的大小事先计算好无量纲热力参数值，列成表格，称为气体动力函数表

↓

附录表 C

P. 537,  $\gamma = 1.4$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 50

### 11.4 一维定常等熵流动：气流参数与通流面积关系

连续方程

→

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

动量方程

→

$$VdV = -\frac{dp}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = -Ma^2 \frac{dV}{V}$$

→

$(Ma^2 - 1) \frac{dV}{V} = \frac{dA}{A}$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 51

### 气流速度与密度的关系

$\frac{d\rho}{\rho} = -Ma^2 \frac{dV}{V}$

$VdV = -\frac{dp}{\rho}$

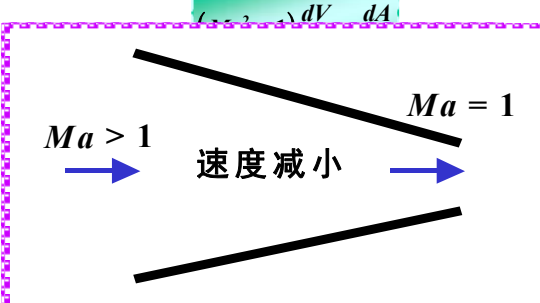
- ⊙ 加速气流，压强、密度降低，气体膨胀
- ⊙ 减速气流，压强、密度增大，气体压缩

	$\rho \sim v$
Ma < 1	$\left  \frac{d\rho}{\rho} \right  < \left  \frac{dV}{V} \right $
Ma > 1	$\left  \frac{d\rho}{\rho} \right  > \left  \frac{dV}{V} \right $

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 52

### 气流参数与通道面积的关系2

$\rho V dV = -dp$



速度减小

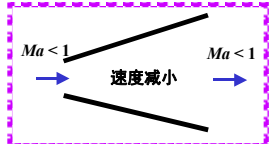
$Ma > 1$        $Ma = 1$

音速到底出现在最大还是最小截面?

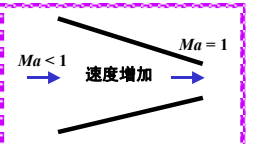
缩流段  
大于速度  
更大面积  
来方程

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 53

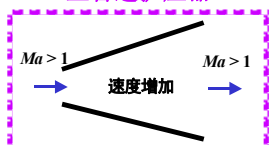
### 气流参数与通道面积的关系3



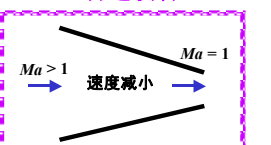
亚音速扩压器



亚音速喷管



超音速喷管



超音速扩压器

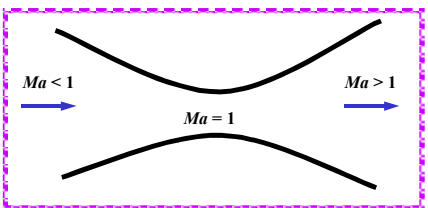
音速只可能出现在最小截面

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 54

### 气流参数与通道面积的关系4

先收缩后扩张是产生超音速气流的必要条件

© 拉瓦尔喷管 (Laval nozzle)



2022-4-13 西安交通大学力学课程组 55

### 气流参数与通道面积的关系5

临界面积  $A^*$

Ma = 1 的断面面积

由连续方程  $\rho AV = C = \rho^* A^* a^*$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* a^*}{\rho V} = \frac{\rho^*}{\rho} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{a^*}{a_0} \frac{a_0}{a} \frac{a}{V}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 56



### 气流参数与通道面积的关系6

空气,  $\gamma = 1.4$   $\rightarrow$   $\frac{A}{A^*} = \frac{(1 + 0.2 Ma^2)^3}{1.728 Ma}$

$A/A^*$ 一定, 对应两个不同的 $Ma$ , ( $>1$   $<1$ ), 取决于滞止参数和背压的关系

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 57

### 11.5 正激波

激波是集成的有一定强度的压缩波

超音速喷气式飞机和火箭尾喷管形成的激波及其反射

超音速子弹在空气中形成的激波

缩放喷管

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 58

### 激波的分类1

正激波  $\rightarrow$  波面与气流方向垂直的平面激波

正激波

压气机叶栅通道中的正激波

非设计工况下的缩放喷管

*normal shock wave*

超音速气流绕流物体的前缘

Pressure distribution for airfoil flow field

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 59

### 激波的分类2

斜激波  $\rightarrow$  波面与气流方向不垂直的平面激波

斜激波

$2\delta < 2\delta_{max}$

*oblique shock wave*

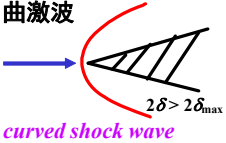
圆锥形激波示例

超音速气流绕流尖劈—锐缘叶片、机翼等半顶角小于 $\delta_{max}$

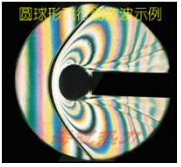
2022-4-13 西安交通大学力学课程组 60

### 激波的分类3

**曲面激波** → 波形弯曲，正激波和斜激波系构成



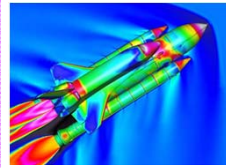

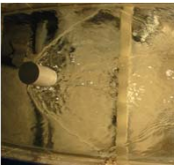
曲激波  
curved shock wave



圆球形激波示例

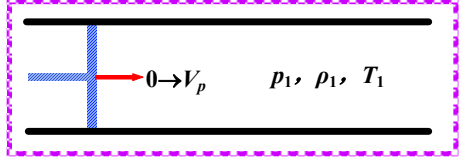
超音速气流绕  
流钝体或半顶  
角较大的尖劈



2022-4-13 西安交通大学力学课程组 61

### 正激波的形成1 normal shock wave



$0 \rightarrow V_p \quad p_1, \rho_1, T_1$

活塞在  $\Delta t$  时间内经过短暂加速后速度达到  $V_p$ ，然后做等速运动

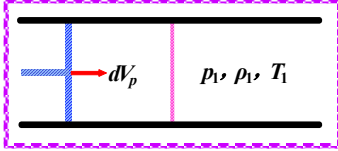
加速过程 → 无穷小时间间隔  $dt$  中的无穷小加速  $dV$  的累积

$V_p = \int dV$

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 62

### 正激波的形成2

	当地音速	波后流速	波的绝对速度
<b>第一道波</b>	$a_1 = \sqrt{\gamma R T_1}$	$dV_p$	$a_1$
	波后压强		波后温度
	$p_1 + dp$		$T_1 + dT$



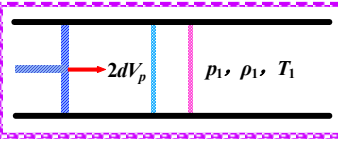
$dV_p \quad p_1, \rho_1, T_1$

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 63

### 正激波的形成3

	当地音速	波后流速	波的绝对速度
<b>第二道波</b>	$a_2 > a_1$	$2dV_p$	$a_2 + dV_p$
	波后压强		波后温度
	$p_1 + 2dp$		$T_1 + 2dT$

$a_2 = \sqrt{\gamma R (T_1 + dT)}$   
 $a_2 + dV_p > a_1$



$2dV_p \quad p_1, \rho_1, T_1$

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 64

### 正激波的形成4

	当地音速	波后流速	波的绝对速度
第三道波	$a_3 > a_2$	$3dV_p$	$a_3 + 2dV_p$
	波后压强		波后温度
	$p_1 + 3dp$		$T_1 + 3dT$

$a_3 = \sqrt{\gamma R(T_1 + 2dT)}$   
 $a_3 + 2dV_p > a_2 + dV_p$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 65

### 正激波的形成5

后产生压缩波的绝对速度 > 先行压缩波的绝对速度

↓

后波赶上前波并累积在一起形成具有一定强度的突跃压缩波

⊗ 流体通过波或波掠过流体，压力、温度突然升高

波前 → 未受扰  $p_1, \rho_1, T_1$

波后 → 受扰动  $p_2, \rho_2, T_2$

⊙ 波的速度  $V_s$  不再是当地音速  $a_1$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 66

### 激波模型1

**激波**

强间断面，具有一定厚度  $\frac{\delta \Delta V}{V} \approx 1$

空气:  $\nu \approx 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$   
 $\Delta V = 100 \text{ m/s}$  激波厚度约为  $10^{-7} \text{ m}$

研究激波内流动，连续介质模型不适用

激波内速度梯度、温度梯度很大

激波内必须考虑粘性和热传导的作用

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 67

### 激波模型2

**激波模型**

- ⊙ 把激波看作数学上的间断面，忽略其厚度  
研究气体宏观运动，激波厚度很小
- ⊙ 波前、波后为完全气体等熵流动，比热为常数
- ⊙ 经过激波的突跃压缩是不可逆的绝热过程  
激波速度很快

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 68

### 正激波基本方程1

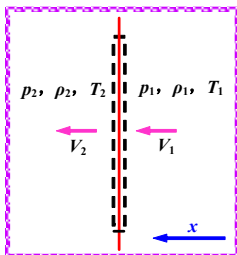
**连续方程**

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

$$\Rightarrow \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

**动量方程**

波面无厚度，忽略摩擦力

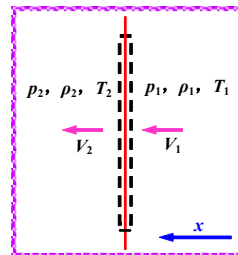
$$\Rightarrow p_1 A_1 - p_2 A_2 = \rho_2 V_2^2 A_2 - \rho_1 V_1^2 A_1$$


2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 69

### 正激波基本方程2

**能量方程** 绝热

$$\frac{V_1^2}{2} + h_1 = \frac{V_2^2}{2} + h_2$$

$$\Rightarrow \frac{V_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2}$$


2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 70

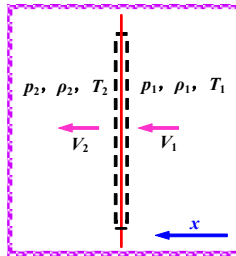
### 正激波基本方程2

激波前、后等熵流动

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2}$$

$$C_p T_{01} = C_p T_{02}$$

$$\Rightarrow T_{01} = T_{02}$$

$$\Rightarrow T_1^* = T_2^* \quad a_1^* = a_2^*$$


✎ 总能量守恒，但存在不可逆损失，因此机械能不守恒

✎ 描述总能量的参数在激波前后保持不变

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 71

### 正激波基本方程组

**连续方程**  $\Rightarrow \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$  四个方程，四个未知数，方程组封闭

**动量方程**  $\Rightarrow p_1 - p_2 = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2$

**能量方程**  $\Rightarrow \frac{V_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2}$

**状态方程**  $\Rightarrow \frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2}$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 72

### 正激波前后气流参数关系1

**普朗特激波关系式**  $\Rightarrow V_2 V_1 = a^{\star 2}$

◎ 正激波前后速度乘积为常数

由  $\lambda = V/a^{\star} \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 = 1$

**兰金-雨果纽关系式**

Rankine-Hugoniot relation

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1}}$$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 73

### 正激波前后气流参数关系2

**激波压缩**

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1}}$$

当  $\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow 1$

◎ 激波压缩为有限压缩

初能不可逆地转化为热能，气体受到剧烈加热，温度升高导致密度突跃受限

突跃绝热

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2}$$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 74

### 正激波前后气流参数关系3

**等熵压缩**  $\Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma$

当  $\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \infty$

◎ 相同密度比下，激波压缩的压强比大于等熵压缩。激波膨胀压强比小于等熵膨胀

◎ 非常弱的激波接近于等熵压缩波

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 75

### 正激波前后气流参数关系4

**通过激波熵的变化**

$$Tds = C_v dT + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \Rightarrow \frac{ds}{T} = C_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{\rho} d\rho$$

**激波前后积分**

$$\frac{s_2 - s_1}{C_v} = \ln \left[ \frac{T_2}{T_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \ln \left[ \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right]$$

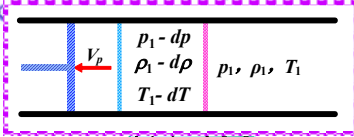
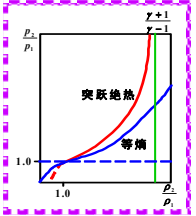
$$= \ln \left[ \frac{p_2}{p_1} / \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma \right] = \ln \left[ \frac{p_2}{p_1} / \left( \frac{p_2}{p_1} \right)_s \right]$$

◎ 熵增过程  $\Rightarrow \frac{p_2}{p_1} > \left( \frac{p_2}{p_1} \right)_s$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 76

### 正激波前后气流参数关系5

	$s_2 - s_1$
激波压缩	$\frac{p_2}{p_1} > \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_s \Rightarrow s_2 > s_1$
激波膨胀	$\frac{p_2}{p_1} < \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_s \Rightarrow s_2 < s_1$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 77

### 正激波前后气流参数关系6

$V_1 > V_2$

◎ 静止激波波前速度必然大于波后速度

由  $V_1 > V_2 \Rightarrow \lambda_1 > \lambda_2$

由  $\lambda_1 \lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 > 1 \text{ 且 } \lambda_2 < 1$

超音速气流经过激波压缩变为亚音速流

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 78

### 正激波前后气流参数关系7

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2}{\frac{\gamma+1}{2} Ma_1^2}$$

速度比

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\gamma+1}{2} Ma_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2}$$

密度比

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

压强比

$$Ma_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2}{\gamma Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}$$

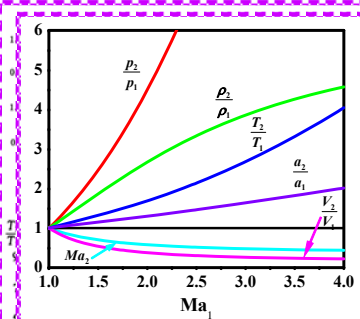
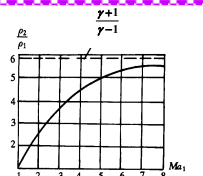
波后马赫数

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma Ma_1^2 - \gamma + 1}{\gamma + 1} \cdot \frac{(\gamma-1) Ma_1^2 + 2}{(\gamma+1) Ma_1^2}$$

温度比

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 79

### 正激波前后气流参数关系8

$Ma_1 \uparrow \Rightarrow Ma_2, \frac{V_2}{V_1} \downarrow$

$\frac{p_2}{p_1}, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{T_2}{T_1}, \frac{a_2}{a_1} \uparrow$

附录表6—正激波表 P. 303

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 80



## 正激波前后气流参数关系9

### 滞止参数的变化

能量方程  $\frac{V_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2}$

$$\Rightarrow C_p T_{01} = C_p T_{02}$$

滞止温度  $\Rightarrow T_{01} = T_{02}$  总的能量不变

滞止压强  $\Rightarrow \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}$

2022-4-13

西安交通大学力学课程组

81

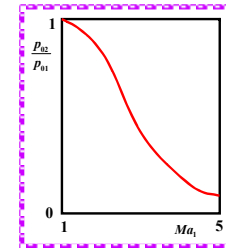
## 正激波前后气流参数关系10

$$= \left[ \frac{(\gamma+1)Ma_1^2}{2+(\gamma-1)Ma_1^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[ \frac{\gamma+1}{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma-1)} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad \frac{p_{02}}{p_{01}}, \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} \downarrow$$

滞止压强下降，机械能转化为热能

滞止密度  $\Rightarrow \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \frac{T_{01}}{T_{02}}$

正激波前后滞止密度比等于滞止压强比



2022-4-13

西安交通大学力学课程组

82

## 正激波前后气流参数关系10

### 临界参数的变化

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1} \quad \frac{p^*}{p_0} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\Rightarrow T_1^* = T_2^*$$

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{\rho_2^*}{\rho_1^*} = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[ \frac{(\gamma+1)Ma_1^2}{2+(\gamma-1)Ma_1^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[ \frac{\gamma+1}{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma-1)} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{p_2^*}{p_1^*}, \frac{\rho_2^*}{\rho_1^*} \downarrow \quad \text{正激波后临界压强、密度下降}$$

2022-4-13

西安交通大学力学课程组

83

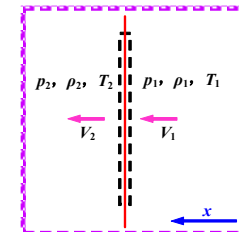
## 正激波前后气流参数关系11

### 正激波的传播速度

$$V_1 = a_1 \left( \frac{\gamma-1}{2\gamma} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

由  $\frac{p_2}{p_1} > 1 \Rightarrow V_1 > a_1$

◎ 激波传播速度 > 当地音速



2022-4-13

西安交通大学力学课程组

84

### 正激波前后气流参数关系12

#### 正激波前后气流参数关系小结

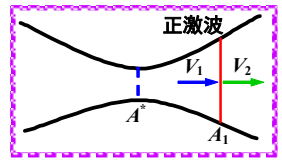
- ① 超音速气流经过正激波  $\Rightarrow$  突跃压缩
- ② 增大的参数  $\Rightarrow S, p, \rho, T$  等
- ③ 减小的参数  $\Rightarrow V, Ma, p_0, \rho_0$
- ④ 不变的参数  $\Rightarrow T_0$

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 85

### 正激波—例题

例：贮气罐的滞止参数  $T_0 = 500\text{K}$ ,  $p_0 = 500\text{kPa}$ , 贮气罐连接一缩放喷管, 其喉部面积为  $6\text{cm}^2$ , 扩张段内面积为  $13.15\text{cm}^2$  处出现正激波。求：激波前后的状态参数  $Ma_1, Ma_2, p_1, p_2, T_1, T_2, \rho_1, \rho_2, p_{02}$ 。

解：扩张段出现激波, 则喉部截面为临界截面



由  $\frac{A}{A^*} = \frac{(1 + 0.2Ma^2)^3}{1.728Ma}$

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 86

### 正激波—例题

$\frac{A_1}{A^*} = 2.19 \Rightarrow Ma_1 = 2.3$  或  ~~$Ma_1 = 0.275$~~

由滞止参数计算激波波前参数—等熵

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2\right)^{-1} = 0.4859$$

$\Rightarrow T_1 = 0.4859T_0 = 243\text{ (K)}$

$\Rightarrow p_1 = 0.4859^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} p_0 = 40\text{ (kPa)}$

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 87

### 正激波—例题

$\Rightarrow \rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = 0.574\text{ (kg/m}^3\text{)}$

$\Rightarrow \rho_{01} = \frac{p_{01}}{RT_{01}} = 3.48\text{ (kg/m}^3\text{)}$

查正激波表计算激波后参数

$Ma_1$	$Ma_2$	$p_{02}/p_{01}$	$T_2/T_1$	$p_2/p_1$	$\rho_2/\rho_1$
2.3	0.5344	0.5833	1.947	6.005	3.085

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 88

### 正激波—例题

$Ma_1$	$Ma_2$	$p_{02}/p_{01}$	$T_2/T_1$	$p_2/p_1$	$\rho_2/\rho_1$
2.3	0.5344	0.5833	1.947	6.005	3.085

$\Rightarrow p_2 = 6.005 p_1 = 240.2 \text{ (kPa)}$   
 $T_2 = 1.947 T_1 = 473 \text{ (K)}$   
 $\rho_2 = 3.085 \rho_1 = 1.76 \text{ (kg/m}^3\text{)}$   
 $p_{02} = 0.5833 p_{01} = 291.7 \text{ (kPa)}$

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 89

### 11.6 几何喷管中的流动

**喷管**  $\Rightarrow$  改变内壁几何形状来加速气流的管道

图2 下吹式三喷嘴风洞

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 90

### 11.6 几何喷管中的流动

**背压**  $\Rightarrow$  喷管外部环境压强  $p_B$

**假设**

- ① 一元定常等熵流动
- ② 完全气体
- ③ 比热为常数

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 91

### 11.6.1 收缩形喷

- ① 将气流由滞止状态或亚音速加速到更高亚音速或音速
- ② 设计工况下，喷管出口压强等于外部环境压强:  $p_e = p_B$

当进口条件或出口背压改变时,  $p_e = p_B$ ?

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 92

### 收缩形喷管中的流动1

① 连续方程

$$V_e \rho_e A_e = \dot{m} = C$$

② 能量方程

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_e}{\rho_e} + \frac{V_e^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0}$$

③ 状态方程  $\Rightarrow p_e = R \rho_e T_e$

④ 过程方程  $\Rightarrow p_e / \rho_e^\gamma = p_0 / \rho_0^\gamma$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 93

### 收缩形喷管中的流动2

联立求解

$$\rho_e = \rho_0 \left( \frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad T_e = \frac{p_e}{R \rho_e} = \frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}} p_e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{R \rho_0}$$

$$V_e = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

$$\dot{m} = \rho_e V_e A_e = A_e \rho_0 \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ \left( \frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left( \frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]}$$

4 个方程, 可求出  $V_e, \rho_e, T_e, \dot{m}$  4 个未知数

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 94

### 收缩形喷管中的流动3

背压  $p_B$  与出口压强  $p_e$  的关系

$p_B = p_0$

无动力, 流体静止

$$\Rightarrow p_e = p_0$$

$p^* < p_B < p_0 \Rightarrow p_e = p_B$

亚音流动, 膨胀过程, 背压降低的扰动可向上游传递

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 95

### 收缩形喷管中的流动4

$p_B = p^*$


喷管内流体持续膨胀到出口达到临界状态,  $Ma = 1$

$$\Rightarrow p_e = p_B = p^*$$

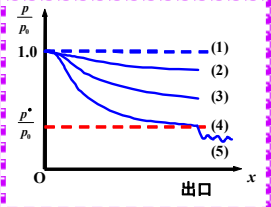
$p_B < p^* \Rightarrow$  降低

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 96

### 收缩形喷管中的流动5

  $p_e = p^*$

气流在管外经过膨胀波系连续膨胀后达到与背压平衡



出口压强  $p_e$ 

$$\begin{cases} p_B > p^* \rightarrow p_e = p_B \\ p_B \leq p^* \rightarrow p_e = p^* \end{cases}$$


2022-4-13 西安交通大学力学课程组 97

### 收缩形喷管中的流动6

#### 气流的 $\text{最大速度}$

气流的 $\text{最大速度}$ 只可能等于音速，出口为临界状态

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p^*}{\rho^*} + \frac{V_{\max}^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{2}{\gamma+1} \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{V_{\max}^2}{2}$$

  $V_{\max} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{p_0}{\rho_0}}$  最大速度只与滞止参数有关

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 98

### 收缩形喷管中的流动7



#### 质量流量的 $\text{最大值}$

$$\dot{m} = A_e \rho_0 \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ \left( \frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left( \frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]}$$

求极值  $\frac{d}{dp_e} \left[ \left( \frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left( \frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right] = 0$

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 99

### 收缩形喷管中的流动8

  $\frac{p_e}{p_0} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$    $p_e = p^*$

⊙ 质量流量在  $p_e = p^*$  时达到最大值

#### 壅塞流动

气流在收缩喷管出口达临界状态后，背压继续降低不能使出口流速和管内质量流量增大，此时流动已经壅塞了

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 100

### 收缩形喷管中的流动9

$$\dot{m}_{\max} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}} A^*$$

收缩型喷管的最大质量流量取决于滞止参数和临界断面积（即出口断面积），与背压无关

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 101

### 收缩形喷管中的流动10

计算  $p_B/p_0$ , 判断出口状态

是  $p_B/p_0 \leq \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$  (空气: 0.528)

否

亚音流动  $p_e = p_B$

临界状态  $p_e = p^*$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 102

### 收缩形喷管中的流动11

亚音流动  $\rightarrow p_e = p_B$

由  $p_e = p_B$  过程方程  $\rho_e = \rho_0 \left( \frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$   $T_e = p_e / R \rho_e$

状态方程

能量方程  $V_e = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} R (T_0 - T_e)}$

音速方程  $a_e = \sqrt{\gamma R T_e}$   $M_e = V_e / a_e$

连续方程  $\dot{m} = \rho_e V_e A_e$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 103

### 收缩形喷管中的流动12

出口达到临界状态  $\rightarrow p_e = p^*$

出口参数均为临界参数

$$\rho_e = \rho^* = \rho_0 \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \text{ (空气: } 0.634\rho_0 \text{)}$$

$$T_e = T^* = T_0 \frac{2}{\gamma+1} \text{ (空气: } 0.833T_0 \text{)}$$

$$V_e = a^* = \sqrt{\gamma R T^*}$$

$$\dot{m} = \rho^* a^* A^*$$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 104



### 收缩形喷管中的流动13—例题1

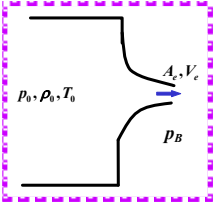
例：已知容器中空气的压强 $1.6 \times 10^5 \text{ Pa}$ ，温度为 $330 \text{ K}$ ，容器壁上连一收缩形喷管，出口面积为 $19.6 \text{ cm}^2$ ，环境压强即背压为 $10^5 \text{ Pa}$ ，求喷管出口流速和通过喷管的质量流量。

解：首先判断出口状态

$$p_0 = 1.6 \times 10^5 \text{ Pa}, p_B = 10^5 \text{ Pa}$$

$$\frac{p_B}{p_0} = 0.625 > 0.528 (\gamma = 1.4)$$

出口  $\text{Ma} < 1$ ,  $p_e = p_B$



2022-4-13 西安交通大学力学课程组 105

### 收缩形喷管中的流动14—例题1

$$T_e = T_0 \left( \frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 288.53 \text{ (K)}$$

$$V_e = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} R (T_0 - T_e)} = 288.66 \text{ (m/s)}$$

$$\rho_e = \frac{p_e}{RT_e} = 1.2076 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

$$\dot{m}_e = \rho_e A_e V_e = 0.683 \text{ (kg/s)}$$

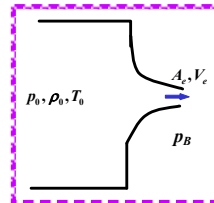
2022-4-13 西安交通大学力学课程组 106

### 收缩形喷管中的流动15—例题2

例：储气罐中空气经渐缩喷管排向大气，流动为等熵过程，求：①若出口气流速度为音速，则储气罐内的压强至少应为多大？②若储气罐内压强为 $600 \text{ kPa}$ ，温度 $600 \text{ K}$ ，出口面积 $1.29 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ，则出口气流速度和质量流量为多大？（设当地大气压强为 $103 \text{ kPa}$ ）

解：(1) 求储气罐内压强

出口气流为音速

$$p_e = p^*$$


2022-4-13 西安交通大学力学课程组 107

### 收缩形喷管中的流动16—例题2

$$p_B \leq 0.528 p_0$$

$$p_0 \geq \frac{p_B}{0.528} = 195 \text{ (kPa)}$$

(2) 出口气流速度与质量流量

$$p_0 = 600 \text{ kPa}, T_0 = 600 \text{ K}, A_e = 1.29 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

首先判断出口状态，即  $\frac{p_B}{p_0} = 0.172 < 0.528$

出口为临界状态

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 108

### 收缩形喷管中的流动17—例题2

$T^* = 0.833T_0 = 499.8 \text{ (K)}$   
 $p^* = 0.528p_0 = 316.8 \text{ (kPa)}$   
 $\rho^* = \frac{p^*}{RT^*} = 2.21 \text{ (kg/m}^3\text{)}$   
 $a^* = \sqrt{\kappa RT^*} = 448.13 \text{ (m/s)}$   
 $\dot{m} = \rho^* A_e a^* = 1.28 \text{ (kg/s)}$

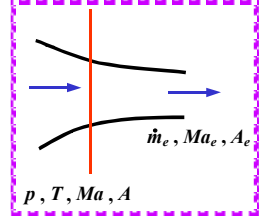
2022-4-13 西安交通大学力学课程组 109

### 收缩形喷管中的流动18—例题3

例：空气等熵地流过一收缩喷管，在某截面处， $p = 210\text{kPa}$ ， $T = 277\text{K}$ ， $Ma = 0.52$ 。为保证收缩喷管内达到最大质量流量 $0.5549\text{kg/s}$ ，试设计喷管出口截面积。

解：喷管内达到最大质量流量则出口必为临界状态

$p_e = p^* = 0.528p_0$   
 $T_e = T^* = 0.833T_0$



2022-4-13 西安交通大学力学课程组 110

### 收缩形喷管中的流动19—例题3

求滞止参数

$p = 210\text{kPa}$ ， $T = 277\text{K}$ ， $Ma = 0.52$

由  $\frac{T_0}{T} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right) = 1.0541$

$T_0 = 1.0541 T = 292 \text{ (K)}$   
 $p_0 = 1.0541^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} p = 252.5 \text{ (kPa)}$

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 111

### 收缩形喷管中的流动20—例题3

求临界参数

$T^* = 0.833 T_0 = 243.2 \text{ (K)}$   
 $p^* = 0.528 p_0 = 133.32 \text{ (kPa)}$   
 $\rho^* = \frac{p^*}{RT^*} = 1.91 \text{ (kg/m}^3\text{)}$   
 $a^* = \sqrt{\gamma RT^*} = 312.6 \text{ (m/s)}$

$A_e = \frac{\dot{m}}{\rho^* a^*} = 9.29 \times 10^{-4} \text{ (m}^2\text{)}$

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 112

### 11.6.2 缩放形喷管

② 将气流由滞止状态或亚音速加速到超音速

② 来流条件或外部条件改变，变工况工作

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 113

### 缩放形喷管

#### 典型工况压强

$p_A = p_0$  滞止压强

$p_F$  喉部处于临界状态，出口为亚音速时压强

$p_K$  出口出现正激波，波后压强

$p_G$  设计工况下压强

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 114

### 缩放形喷管

#### 典型工况压强确定

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{Ma_e} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_e^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \Rightarrow \begin{matrix} Ma_{e1} (< 1) \\ Ma_{e2} (> 1) \end{matrix}$$

$$p_F = p_0 \cdot \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_{e1}^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{气动力函数}$$

$$p_G = p_0 \cdot \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_{e2}^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$p_K = p_G \cdot \left( \frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_{e2}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \quad \text{正激波关系式}$$

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 115

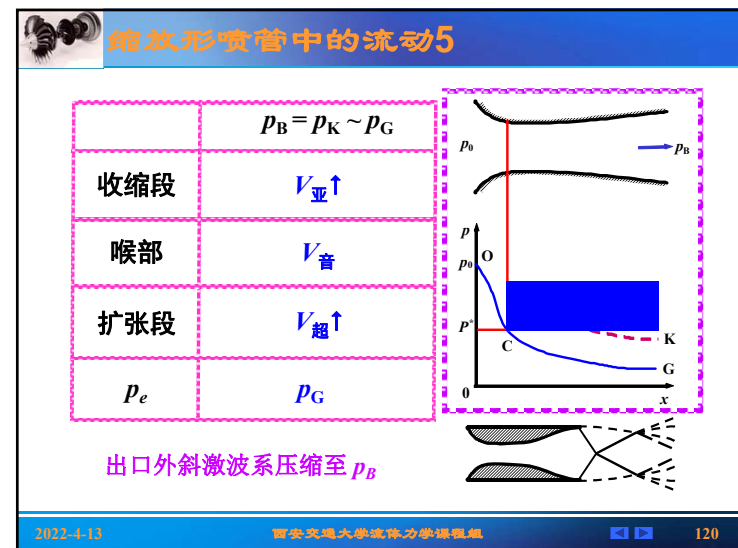
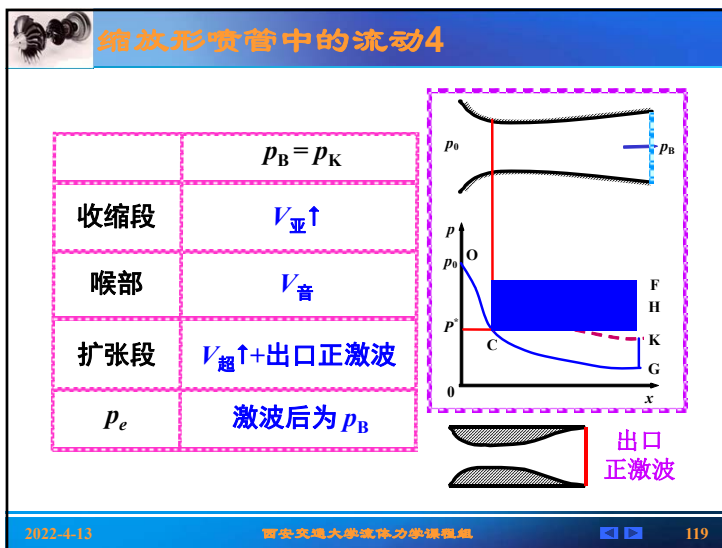
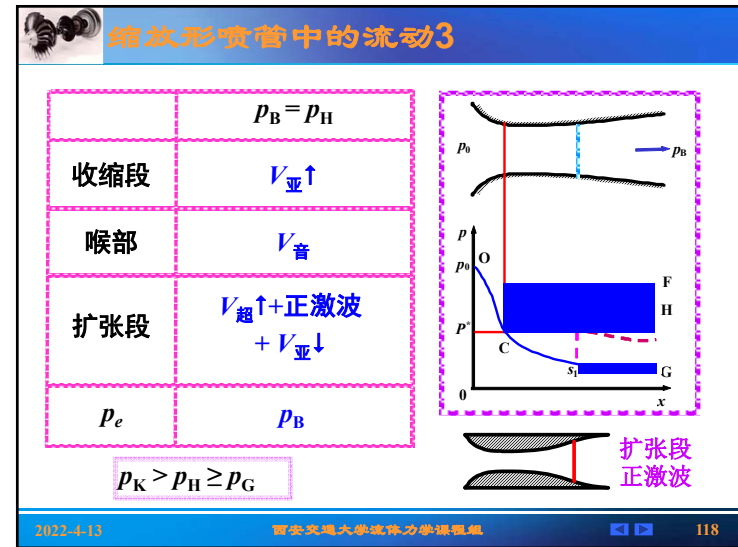
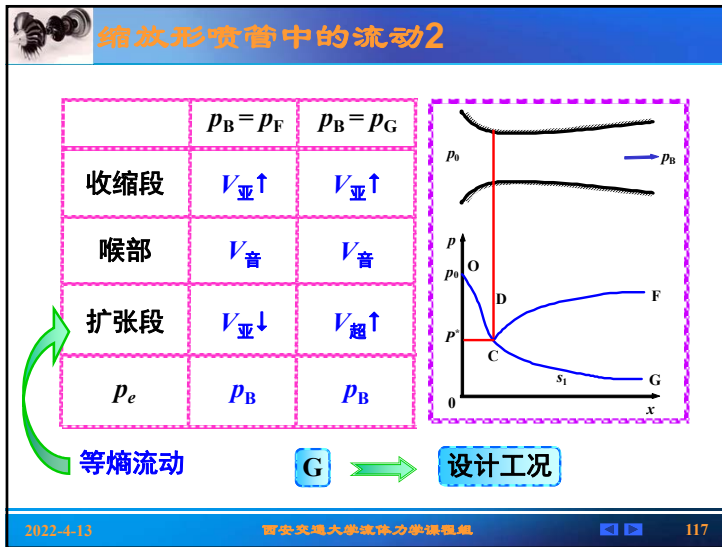
### 缩放形喷管中的流动1

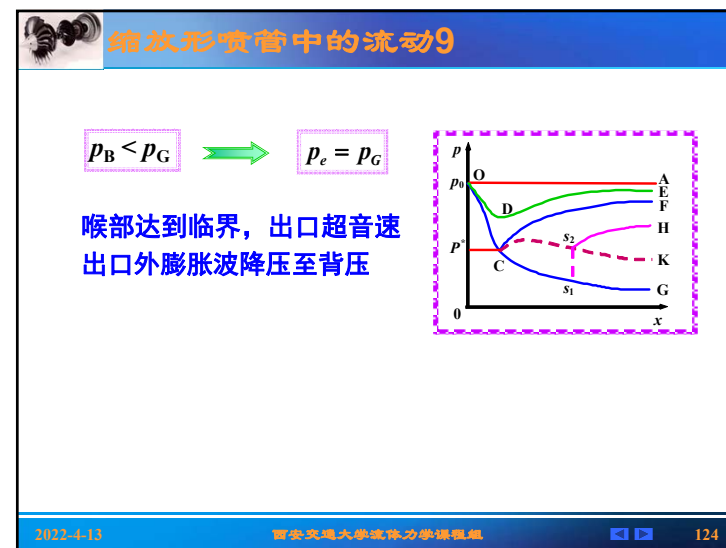
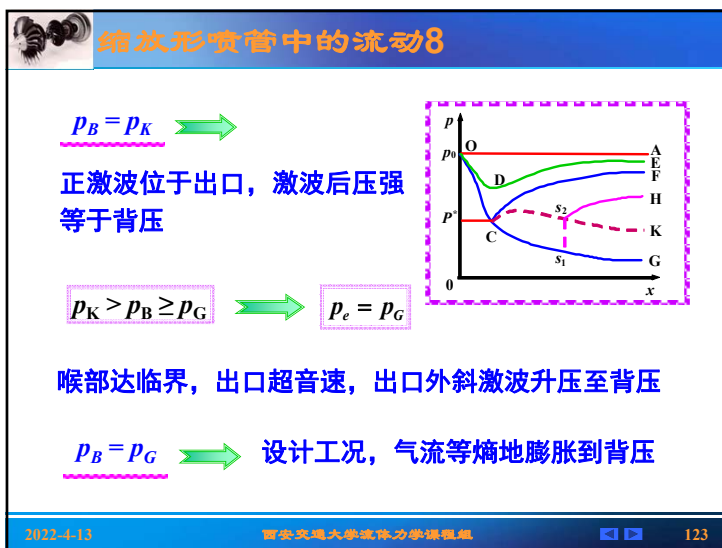
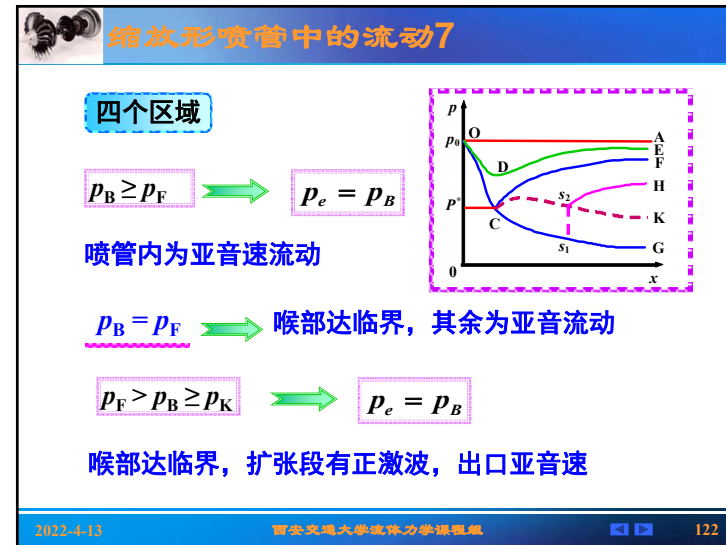
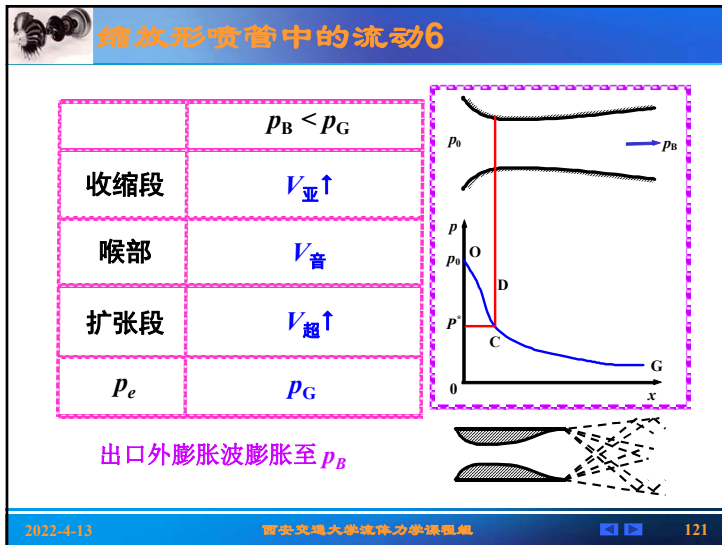
#### 缩放形喷管流动特点

	$p_B = p_A$	$p_B = p_E$
收缩段	无流动	$V_{\text{亚}} \uparrow$
喉部		$V_{\text{亚}}$
扩张段		$V_{\text{亚}} \downarrow$
$p_e$	$p_B = p_0$	$p_B$

$p_0 > p_E \geq p_K$

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 116








### 缩放形喷管中的流动10

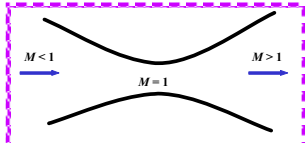
**拉瓦尔 (Laval) 喷管设计工况**

- 1、加速气流
- 2、管内等熵流动
- 3、出口压强等于背压

③ 收缩部分  与收缩喷管工作一样

③ 最小截面  达到音速

③ 扩张部分  超音速，出口压强等于背压




2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 125

### 缩放形喷管中的流动11 - 例题1

例：空气从气罐经缩放喷管等熵地流入背压为  $p_b = 98.1 \text{ kPa}$  的大气中，气罐中压强  $p_0 = 700 \text{ kPa}$ ，温度  $T_0 = 313 \text{ K}$ ，已知缩放喷管喉部直径  $d = 25 \text{ mm}$ ，求(1) 出口马赫数；(2) 喷管的质量流量；(3) 喷管出口截面直径。

解：(1) 出口马赫数

由  $\frac{p_e}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_e^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.14$


  $Ma_e = 1.94$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 126

### 缩放形喷管中的流动12 - 例题1

(2) 喷管的质量流量

喷管出口为超音速，喉部必为临界状态

  $T^* = 0.833T_0 = 260.73 \text{ (K)}$


$$\rho^* = \left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rho_0$$

$$= \left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{p_0}{RT_0} = 4.94 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$


2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 127

### 缩放形喷管中的流动13 - 例题1

$$a^* = \sqrt{\gamma RT^*} = 323.7 \text{ (m/s)}$$

  $\dot{m} = \rho^* a^* \frac{\pi}{4} d^2 = 0.785 \text{ (kg/s)}$


(3) 喷管出口截面直径

  $T_e = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_e^2\right)^{-1} T_0 = 178.6 \text{ (K)}$

$$\rho_e = \frac{p_e}{RT_e} = 1.914 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 128




 缩放形喷管中的流动14—例题1

$$a_e = \sqrt{\gamma RT_e} = 267.9 \text{ (m/s)}$$

$$V_e = Ma_e a_e = 519.7 \text{ (m/s)}$$

$$\Rightarrow d_e = \left( \frac{4\dot{m}}{\pi \rho_e V_e} \right)^{1/2} = 0.032 \text{ (m)}$$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 129

 缩放形喷管中的流动15—例题2


例：一大容器中空气压强  $p_0 = 260\text{kPa}$ ，温度  $T_0 = 330\text{K}$ ，欲采用一喷管使空气等熵地膨胀到大气压  $p_B = 100\text{kPa}$ （设计工况），并得到质量流量为  $0.884\text{kg/s}$ 。求(1) 应采用何种形式的喷管？(2) 喷管出口速度、出口面积及最小面积为多少？

解：(1) 喷管内等熵流动，设计喷管

$$\Rightarrow p_e = p_B$$

由  $\frac{p_B}{p_0} = 0.385 < 0.528$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 130

 缩放形喷管中的流动16—例题2

$\Rightarrow$  需选择缩放喷管才能使空气在喷管中等熵地膨胀到大气压强


(2) 出口流速、面积及最小截面面积

由  $p_e/p_0 = 0.385 = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_e^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

$$\Rightarrow Ma_e = 1.25$$

$$T_e = \left( \frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_0 = 251 \text{ (K)}$$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 131

 缩放形喷管中的流动17—例题2

$$a_e = \sqrt{\gamma RT_e} = 317.6 \text{ (m/s)}$$


$$V_e = Ma_e a_e = 397 \text{ (m/s)}$$

$$\rho_e = \frac{p_e}{RT_e} = 1.39 \text{ (kg/s)}$$

$$\Rightarrow A_e = \frac{\dot{m}}{\rho_e V_e} = 0.0016 \text{ (m}^2\text{)}$$

由  $Ma_e = 1.25 \Rightarrow$  喉部截面流动达临界

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 132

 **缩放形喷嘴中的流动18—例题2**


➡  $T^* = 0.833T_0 = 275 \text{ (K)}$

$a^* = \sqrt{\gamma RT^*} = 332 \text{ (m/s)}$

$\rho^* = 0.634 \frac{p_0}{RT_0} = 1.74 \text{ (kg/s)}$

$A^* = \frac{\dot{m}}{\rho^* a^*} = 0.00153 \text{ (m}^2\text{)}$


2022-4-13 西安交通大学力学课程组 133

 **作业**

**作业：P.512~513**

- ④ 11.31
- ④ 11.41
- ④ 11.44
- ④ 11.46
- ④ 11.48

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 134

 **小结1**

**可压缩流动的基本概念**

- ④ 微弱扰动波的传播速度—当地音速


$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$

$a = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}}$

$a = \sqrt{\gamma RT}$

- ④ 马赫数
- ④ 微弱扰动波传播的区域、马赫角

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 135

 **小结2**

**定常一元等熵流动**

- ④ 控制方程组

$\rho VA = C$

$h + \frac{V^2}{2} = C$

$\frac{p}{\rho^\gamma} = C$

$p = \rho RT$

- ④ 等熵滞止状态 ➡ **定常一元等熵流动中等熵滞止参数为常量**

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 136

**小结3**

④ 无量纲热力学参数之间的关系

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

④ 热力学参数与马赫数之间的关系

$$\frac{T}{T_0} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right)^{-1}$$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 137

**小结4**

④ 气流参数与通道面积的关系

音速只能出现在最小截面

④ 临界状态  $\longrightarrow$  定常一元等熵流动中临界参数为常量

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1}$$

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 138

**小结5**

④ 极限状态  $\longrightarrow$  最大速度状态

④ 速度系数  $\longrightarrow$   $\lambda = \frac{V}{a^*}$

**正激波**

④ 激波前后的参数关系

静参数的变化, 速度的变化, 滞止参数的变化, 熵的变化等

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 139


**小结6**

**几何喷管中的流动**

④ 由背压变化引起的喷管变工况


④ 几何喷管中定常一元等熵流动的计算

2022-4-13 西安交通大学流体力学课程组 140

马赫

◎ 奥地利物理学家、哲学家、心理学家

- ✕ 维也纳大学，1860，物理学博士学位
- ✕ 1867-1895，布拉格大学，实验物理学教授
- ✕ 发表 100 多篇关于力学、声学 and 光学的研究论文和报告，发现激波，马赫数、马赫波等以他的名字命名
- ✕ 1883，《力学及其发展的批判历史概论》
- ✕ 再版 20 次使用 40 年的《大学生物理学教程》（1891）和《中学生低年级自然科学课本》（1886）
- ✕ 哲学上是唯心主义的逻辑实证论者，《认识与谬误》1905



Ernst Mach  
1838-1916

2022-4-13 西安交通大学力学课程组 141