Semaine 10

Questions pour réviser

Question 2/3]

c) on regroupe les termes de la somme par énergie et nombre de particules

$$\underbrace{Z_G \equiv \sum_{\{i\}} e^{-\frac{E_i - N_i\mu}{k_B T}}}_{\text{définition de } Z_G} = \sum_{E,N} \sum_{\{i \mid E_i = E \text{ et } N_i = N\}} \underbrace{e^{-\frac{E_i - N_i\mu}{k_B T}}}_{e^{-\frac{E - N\mu}{k_B T}}}$$

indépendant de i !

$$= \sum_{E,N} e^{-\frac{E-N\mu}{k_BT}} \underbrace{\sum_{\{i \mid E_i = E \text{ et } N_i = N\}} 1}_{W(E,N) \text{ dégénérescence}} = \sum_{E,N} W(E,N)\, e^{-\frac{E-N\mu}{k_BT}}$$

donc

$$\boxed{Z_G \equiv \underbrace{\sum_{\{i\}}}_{\text{somme sur les micro-états}} e^{-\frac{E_i - N_i\mu}{k_BT}} = \underbrace{\sum_{E,N}}_{\text{somme sur les énergies et les nombres de particules}} W(E,N)\, e^{-\frac{E-N\mu}{k_BT}} \neq \sum_{\{i\}} W(E_i,N_i)\, e^{-\frac{E_i - N_i\mu}{k_BT}}}$$

D) on a bien

$$\sum_{\{i \mid N_i = N_j\}} e^{-\frac{E_i}{k_BT}} = \sum_E \sum_{\{i \mid N_i = N_j \text{ et } E_i = E\}} e^{-\frac{E_i}{k_BT}}$$

les micro-états i avec nombre de particules N_i tel que $N_i = N_j$

on regroupe les termes de même énergie E

$$= \sum_E \sum_{\{i \mid N_i = N_j \text{ et } E_i = E\}} e^{-\frac{E}{k_BT}}$$

indépendant de i

$$= \sum_E e^{-\frac{E}{k_BT}} \underbrace{\sum_{\{i \mid N_i = N_j \text{ et } E_i = E\}} 1}_{\text{définition de } W(E,N_j)}.$$

définition de $W(E,N_j)$: nombre de micro-états d'énergie et de nombre de particules N_j

$$= \sum_E W(E,N_j)\, e^{-\frac{E}{k_BT}}$$

indice muet $(E \to E_i)$

Question 3/3)

on peut raisonner avec les unités physiques

On note $[X]$ la dimension (unité physique) de X

sans dimension

A) $$\left[\frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z_G}{\partial \beta}\right] = \frac{[\ln Z_G]}{[\beta^2]} = [k_B T]^2 = (\text{énergie})^2 \neq [\langle N \rangle]$$

B) $$\left[\frac{\partial \ln Z_G}{\partial \mu}\right] = \frac{1}{[\mu]} = \frac{1}{\text{énergie}/\text{nombre de particules}} \neq [\langle N \rangle]$$

C) $$\left[\frac{\partial \ln Z_G}{\partial \beta}\right] = \frac{[\ln Z_G]}{[\beta]} = [k_B T] = \text{énergie} \neq [\langle N \rangle]$$

D) $$\left[\frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z_G}{\partial \mu}\right] = \frac{[\ln Z_G]}{[\beta][\mu]} = \frac{[k_B T]}{[\mu]} = \frac{\text{énergie}}{\text{énergie}/\text{nombre de particules}} = \text{nombre de particules}$$

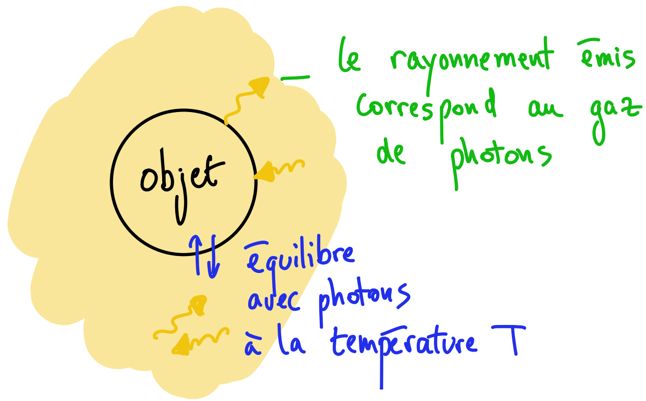
$$= [\langle N \rangle]$$

slide 13

Loi de Planck : $$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

irradiance spectrale en $\underbrace{\overbrace{W/m^2}^{\text{flux d'énergie}}}_{\text{puissance}}/m$

slide 16



slide 25 particule libre, $\psi(\vec{x}) = \dfrac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}}$, probabilité uniforme $p(\vec{x}) = |\psi(\vec{x})|^2 = \overset{\text{constante}}{\dfrac{1}{V}}$

périodicité $\rightarrow$ $\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x} + (L,0,0)) = \dfrac{1}{\cancel{\sqrt{V}}} e^{i(k_x(\cancel{x}+L) + k_y y + k_z z)}$

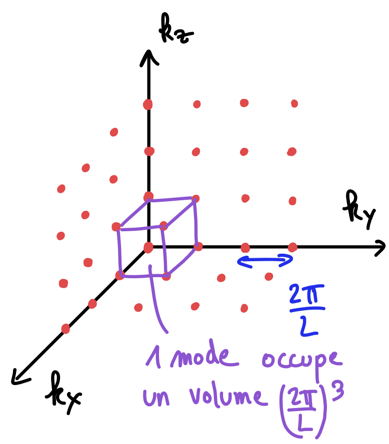
$\parallel$

$\dfrac{1}{\cancel{\sqrt{V}}} e^{i(\cancel{k_x x} + \cancel{k_y y} + \cancel{k_z z})}$

$\vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

donc $e^{ik_xL} = 1 \rightarrow k_x L = n_x 2\pi, \quad n_x \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow \boxed{k_x = n_x \dfrac{2\pi}{L}, \quad n_x \in \mathbb{Z}}$



idem (–) pour k_y et k_z

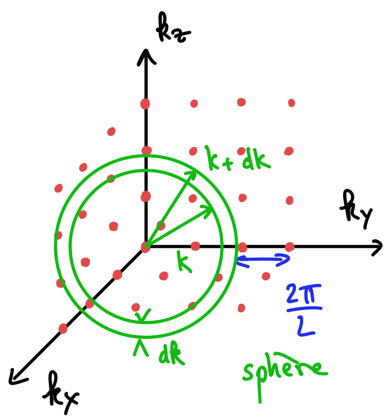
$\underbrace{g(k)}_{\text{densité d'états en vecteur d'onde } k} dk \equiv$ nombre de modes entre k et $k+dk$ $=$ $\underbrace{\text{densité de modes}}_{\underbrace{2}_{\text{spin}} \times \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3}} \times \underbrace{\text{volume de la coquille}}_{4\pi k^2 dk} = \overbrace{L^3}^{V} \dfrac{8\pi k^2 dk}{(2\pi)^3}$

$= \dfrac{V k^2 dk}{\pi^2}$

$= \dfrac{V \omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$

$\omega = kc$

$d\omega = dk \cdot c$



slide 27 $\quad \sum_{\{i\}} \dots = \int_0^\infty d\omega\, \rho(\omega) \dots$

$\uparrow$ densité d'états

série géométrique : si $|x|<1$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

fonction de partition

$$\ln Z_G = -\frac{V}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty d\omega\, \omega^2 \ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)$$

slide 29

$$\langle E\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_G = V\int_0^\infty d\omega \frac{1}{\pi^2 c^3}\omega^2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)}_{\frac{\hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\frac{\times e^{\beta\hbar\omega}}{\times e^{\beta\hbar\omega}} = \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}}$$

$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$

$$= V\int_0^\infty d\omega \underbrace{\frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\omega^3 \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}}_{u_\omega(\omega)}$$

$u_\omega(\omega)$ énergie/fréquence

densité d'énergie en fréquence (en $J.s/m^3$)

on veut convertir $u_\omega(\omega,T)$ à $u(\lambda,T)$: $\omega = ck = c\frac{2\pi}{\lambda}$

$d\omega = c\,2\pi\left(\frac{-d\lambda}{\lambda^2}\right)$

$$u_\omega(\omega,T)\,d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\omega^3\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}d\omega = \frac{\overset{h}{\cancel{\hbar}}}{\pi^2 \cancel{c^3}}\frac{\cancel{c^3}(2\pi)^3}{\lambda^3}\frac{1}{e^{\beta\frac{hc}{\lambda}}-1}\frac{c\,\cancel{2\pi}(-d\lambda)}{\lambda^2}$$

$$= \underbrace{\frac{hc}{\lambda^5}8\pi\cdot\frac{1}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda}}-1}}_{\text{irradiance spectrale } u(\lambda,T)}(-d\lambda)$$

irradiance spectrale $u(\lambda,T)$: loi de Planck