华 东 理 工 大 学

复 变 函 数 与 积 分 变 换 作 业 （第 7 册）

班级__________学号___________姓名___________任课教师___________

第十三次作业

教学内容：6.5Fourier 的卷积性质；7.1 拉普拉斯变换的概念 7.2 拉普拉斯变换的性质。

1．计算下列函数的卷积

$$f_1(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}\qquad f_2(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-at} & t\geq 0\end{cases}$$

解：显然，有 $f_1(t-\tau)=\begin{cases}0 & t<\tau\\ 1 & t\geq\tau\end{cases}$

当 $t\leq 0$ 时，由于 $f_2(\tau)f_1(t-\tau)=0$，所以 $f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau=0$

当 $t>0$ 时 $f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau=\int_0^t f_2(\tau))d\tau=\int_0^t e^{-at}d\tau$

$$=-\frac{1}{a}\cdot e^{-at}\Big|_0^t=\frac{1}{a}\cdot(1-e^{-at})$$

2．已知 $f(t)=\cos\omega_0 t\cdot u(t)$，求$\mathcal{F}[f(t)]$.

解：已知$\mathcal{F}[u(t)]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{i\omega}$　　又

$$f(t)=\cos\omega_0 t\cdot u(t)=\frac{1}{2}[e^{i\omega_0 t}u(t)+e^{-i\omega_0 t}u(t)]$$

由位移性质有

$$\mathcal{F}[f(t)]=\frac{1}{2}[\pi\delta(\omega-\omega_0)+\frac{1}{i(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega+\omega_0)+\frac{1}{i(\omega+\omega_0)}]$$

$$=\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]-\frac{\omega i}{\omega^2-\omega_0{}^2}$$

3．填空

(1) $f(t)=\begin{cases}2 & 0\leq t<2\\ -3 & 2\leq t<4\\ 0 & t\geq 4\end{cases}$ 的 Laplace 变换为 $F(s)=\frac{1}{s}(3e^{-4s}-5e^{-2s}+2)$

(2) $f(t)=e^{2t}+5\delta(t)$ 的 Laplace 变换为 $F(s)=\dfrac{5s-9}{s-2}$

(3) $f(t)=\cos t\cdot\delta(t)-\sin t\cdot u(t)$ 的 Laplace 变换为 $F(s)=\dfrac{s^2}{s^2+1}$

(4) $f(t)=1-te^t$ 的 Laplace 变换为 $F(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{(s-1)^2}$

(5) $f(t)=t^3-2t+1$ 的 Laplace 变换为 $F(s)=\dfrac{1}{s^4}(s^3-2s^2+6)$

(6) $f(t)=e^{-2t}\cos 6t$ 的 Laplace 变换为 $F(s)=\dfrac{s+2}{(s+2)^2+36}$

4. 求下列函数的 Laplace 变换.

(1) $f(t)=(t-1)^2e^t$

解：$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[(t-i)^2e^t]=\mathscr{L}[(t^2-2t+1)e^t]$

$$=\frac{d^2}{ds^2}\mathscr{L}[e^t]+2\frac{d}{ds}\mathscr{L}[e^t]+\mathscr{L}[e^t]=\frac{s^2-4s+5}{(s-1)^3}$$

(2) $f(t)=t\cos 3t$

解：$\mathscr{L}\left[t\cos 3t\right]=-(\mathscr{L}\left[\cos 3t\right])'_s$

$$=-\left(\frac{s}{s^2+9}\right)'$$
$$=\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}$$

(3) $f(t)=t^ne^{at}$ （n 为正整数）

解：利用$\mathscr{L}[t^n]=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$及位移性质得

$$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[t^ne^{at}]=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

(4) $F(s)=\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\mathrm{L}\left[t^3-2t+1\right]$

$$=\mathscr{L}\left[t^3\right]-2\mathscr{L}\left[t\right]+\mathscr{L}\left[1\right]$$

$$=\frac{3!}{s^4}-\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}$$
$$=\frac{1}{s^4}(s^3-2s^2+6)$$

第十四次作业

教学内容：7.2 拉普拉斯的性质（续） 7.3 拉普拉斯逆变换

1．求下列函数的 Laplace 变换

(1) $f(t)=t\int_0^t e^{-3\tau}\sin 2\tau\, d\tau$

解： 由积分性质$\mathcal{L}[\int_0^t e^{-3\tau}\sin 2\tau\, d\tau]=\frac{1}{s}\mathcal{L}[e^{-3\tau}\sin 2\text{t}]=\frac{1}{s}\cdot\frac{2}{(s+3)^2+4}$

再由像函数的微分公式

$$\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}[t\int_0^t e^{-3\tau}\sin 2\tau\, d\tau]=-\frac{d}{ds}\left\{\frac{2}{s\left[(s+3)^2+4\right]}\right\}=\frac{2(3s^2+12s+13)}{s^2[(s+3)^2+4]^2}$$

(2) $f(t)=\frac{\sin at}{t}$ （a 为实数）

解：利用像函数的积分性质

$$\text{F(s)}=\mathcal{L}[\frac{\sin at}{t}]=\int_s^\infty L[\sin kt]ds=\int_s^\infty\frac{a}{s^2+a^2}ds=\arctan\frac{s}{a}\bigg|_s^\infty$$
$$=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s}{a}=arc\cot\frac{s}{a}.$$

(3) $f(t)=\int_0^t te^{-3t}\sin 2tdt$

解： $\mathcal{L}\left[e^{-3t}\sin 2t\right]=\frac{2}{(s+3)^2+4}$

$$\mathcal{L}\left[e^{-3t}\sin 2t\right]=-\frac{d}{ds}\left[\frac{2}{(s+3)^2+4}\right]'$$
$$=\frac{4(s+3)}{\left[(s+3)^2+4\right]^2}$$

所以 $\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\text{L}\left[\int_0^t te^{-3t}\sin\sin tdt\right]$

$$=\frac{1}{s}\cdot\frac{4(s+3)}{\left[(s+3)^2+4\right]^2}$$

(4) $f(t)=\int_0^t \frac{e^{-2t}\sin 3t}{t}dt$

解：

$$F(s)=\frac{1}{s}L\ [\frac{e^{-2t}\sin 3t}{t}]=\frac{1}{s}\int_s^{\infty}L\ [e^{-2t}\sin 3t]ds=\frac{1}{s}\int_s^{\infty}\frac{3}{(s+2)^2+9}ds=\frac{1}{s}(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s+2}{3})$$

2 计算下列积分

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-t}dt$

解：$=\int_0^{\infty}L\ [e^{-t}\sin t]ds=\int_0^{\infty}\frac{1}{(s+1)^2+1}ds=\arctan(s+1)\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}e^{-t}dt$

解：$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}e^{-t}dt=\int_0^{\infty}\mathrm{L}\left[(1-\cos t)e^{-t}\right]ds$

$$=\int_0^{\infty}(\frac{1}{s+1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1})ds$$

$$=\ln\frac{s+1}{\sqrt{(s+1)^2+1}}\Big|_0^{\infty}$$

$$=\ln\sqrt{2}$$

(3) $\int_0^{+\infty}te^{-3t}\sin 2tdt$

解：已知$\mathcal{L}[\ \sin 2t\ ]=\frac{2}{s^2+4}$

再由微分性质$\mathcal{L}[\ t\sin 2t\ ]=-(\frac{2}{s^2+4})'=\frac{4s}{(s^2+4)^2}$

得$\int_0^{+\infty}te^{-3t}\sin 2tdt=\frac{4s}{(s^2+4)^2}\Big|_{s=3}=\frac{12}{169}$

3.求下列函数的 拉氏逆变换

(1) $F(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}$，（2） $F(s)=\frac{2s}{(s-1)^2}$

（1） $\mathrm{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}\right]=e^{-t}-e^{t}=-2sht$

（2） $\mathrm{L}^{-1}[F(s)]=\mathrm{L}^{-1}[\frac{2s}{(s-1)^2}]=\mathrm{L}^{-1}[\frac{2}{s-1}+\frac{2}{(s-1)^2}]$

$=2e^{-t}-2te^{-t}$

（3）由于 $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+2s+2)^2}=\dfrac{1}{(s+1)^2+1}\cdot\dfrac{1}{(s+1)^2+1}=F(s)\cdot F(s)$

由卷积性质

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{[(s+1)^2+1]^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[f(t)*f(t)\right]$$

$$=\int_0^t e^{-\tau}\sin\tau\cdot e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}e^{t}(\sin t-t\cos t)$$

（4） $$\boldsymbol{f(t)=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[F'(s)\right]=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[(\arctan\frac{a}{s})'\right]}$$

$$=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{a}{s^2+a^2}\right]$$

$$=\frac{\sin at}{t}$$

(5) $$\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}+\frac{e^{-2s}}{s^2}\right]}$$

$$\boldsymbol{=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2}]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2}\right]}$$

$$\boldsymbol{=t+(t-2)u(t-2)}$$

$$=\begin{cases}2(t-1) & t>2\\ t & 0\le t<2\end{cases}$$

4 求下列拉氏卷积

(1) $t*t$

解： $t*t=\int_0^t\tau(\mathrm{t}-\tau)\mathrm{d}\tau=t\int_0^t\tau\mathrm{d}\tau-\int_0^t\tau^2\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{3}t^3=\frac{1}{6}t^3$

(2) $\sin kt*\sin kt \qquad (k\neq 0)$

解：

$\sin kt*\sin kt$

$=\int_0^t\sin kt\cdot\sin k(\mathrm{t}-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\cos(2kt-kt)\mathrm{d}\tau-\frac{1}{2}\int_0^t\cos kt\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2k}\sin kt-\frac{1}{2}t\cos kt$

5． 设$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=F(s)$，利用卷积定理证明$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\mathcal{L}\left[f(t)*u(t)\right]=\dfrac{F(s)}{s}$

证：$\dfrac{F(s)}{s}=F(s)\cdot\dfrac{1}{s}=\mathscr{L}\left[f(t)*u(t)\right]=\int_0^t f(\tau)u(\mathrm{t}-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t f(t)\mathrm{dt}$

6． 求下列函数的逆变换

(1) $F(s)=\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$

解法 1: $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}\right]$

$$=\operatorname{Re}s\left[\frac{se^{st}}{(s-a)(s-b)},a\right]+\operatorname{Re}s\left[\frac{se^{st}}{(s-a)(s-b)},b\right]$$

$$=\frac{1}{a-b}(ae^{at}-be^{bt})$$

解法 2：$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}\right]$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{s-a}-\frac{b}{s-b}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{a-b}\left(a\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]-b\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-b}\right]\right.$$

$$=\frac{1}{a-b}(ae^{at}-be^{bt})$$

(2) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$

解法 1: $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{s}{s^2+1}-\dfrac{s}{s^2+4}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{3}\left(\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+1}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+4}\right]\right)=\dfrac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$

解法 2：

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]$$

$$=\operatorname{Re}s\left[\frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)},i\right]+\operatorname{Re}s\left[\frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)},-i\right]$$

$$+\operatorname{Re}s\left[\frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)},2i\right]+\operatorname{Re}s\left[\frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)},-2i\right]$$

$$=\frac{ie^{it}}{2i(i^2+4)}+\frac{-ie^{-it}}{-2i(i^2+4)}+\frac{2ie^{2it}}{4i(4i^2+1)}+\frac{-2ie^{-2it}}{-4i(4i^2+1)}$$

$$=\frac{e^{it}}{6}+\frac{e^{-it}}{6}-\frac{e^{2it}}{6}-\frac{e^{-2it}}{6}=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$$

(3) $F(s) \quad =\frac{\mathrm{s}+1}{9s^2+6s+5}$

解：$f(t)$=$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$= $\mathscr{L}^{-1}[\frac{\mathrm{s}+1}{9s^2+6s+5}]$= $\mathscr{L}^{-1}[\frac{\mathrm{s}+1}{9(s+\frac{1}{3})^2+4}]$

$$=\frac{1}{9}\mathscr{L}^{-1}[\frac{s+\frac{1}{3}}{(s+\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2}+\frac{\frac{2}{3}}{(s+\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2}]$$

$$=\frac{1}{9}(\cos\frac{2}{3}t\cdot e^{-\frac{1}{3}t}+\sin\frac{2}{3}t\cdot e^{-\frac{1}{3}t})=\frac{1}{9}(\cos\frac{2}{3}t+\sin\frac{2}{3}t)e^{-\frac{1}{3}t}$$

(4) $F(s)=\frac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}$

解：$\frac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}=\frac{1}{2s}+\frac{1}{s+1}-\frac{3}{2(s+2)}$

$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s}]=1$,$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s+1}]$=$e^{-t}$, $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s+2}]=e^{-2t}$

$\mathscr{L}^{-1}$ $[\frac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}]$=$\frac{1}{2}+e^{-t}-\frac{3}{2}e^{-2t}$

(5) $F(s)=\frac{2s^2+s+5}{s^3+6s^2+11s+6}$

解：$f(t)$=$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$= $\mathscr{L}^{-1}[\frac{2s^2+s+5}{s^3+6s^2+11s+6}]$= $\mathscr{L}^{-1}[\frac{2s^2+s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}]$

$$=\mathrm{Re}\,s[\frac{(2s^2+s+5)e^{st}}{(s+1)(s+2)(s+3)},-1]+\mathrm{Re}\,s[\frac{(2s^2+s+5)e^{st}}{(s+1)(s+2)(s+3)},-2]+$$

$$\mathrm{Re}\,s[\frac{(2s^2+s+5)e^{st}}{(s+1)(s+2)(s+3)},-3]=$$

$$\lim_{z\to-1}\frac{(2s^2+s+5)e^{st}}{(s+2)(s+3)}+\lim_{z\to-2}\frac{(2s^2+s+5)e^{st}}{(s+1)(s+3)}+\lim_{z\to-3}\frac{(2s^2+s+5)e^{st}}{(s+2)(s+1)}$$

$$=3e^{-t}-11e^{-2t}+10e^{-3t}$$