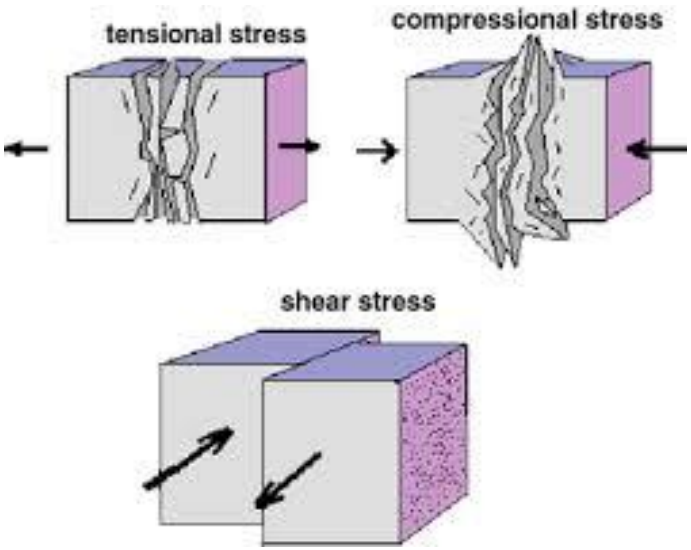
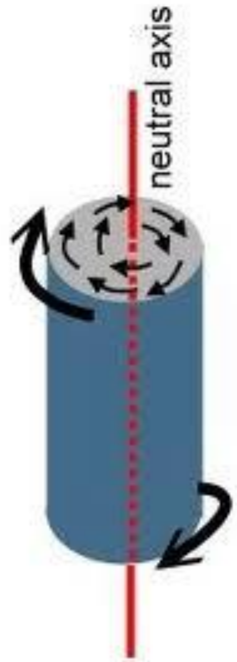
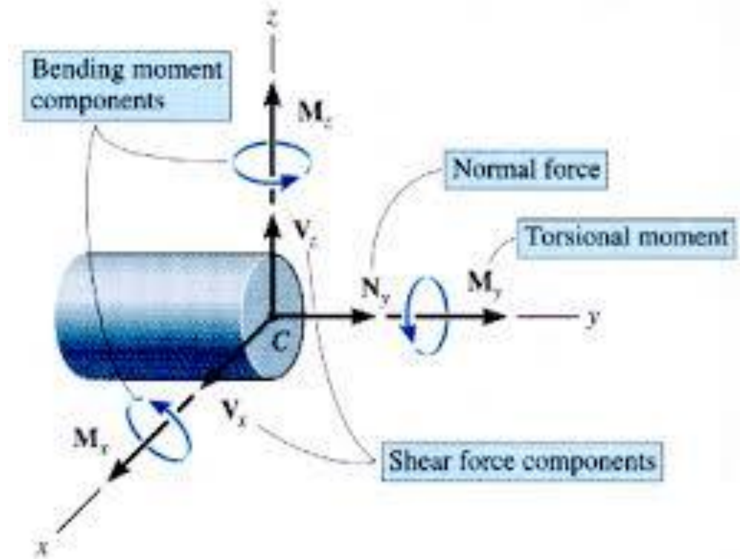
过程设备机械设计基础

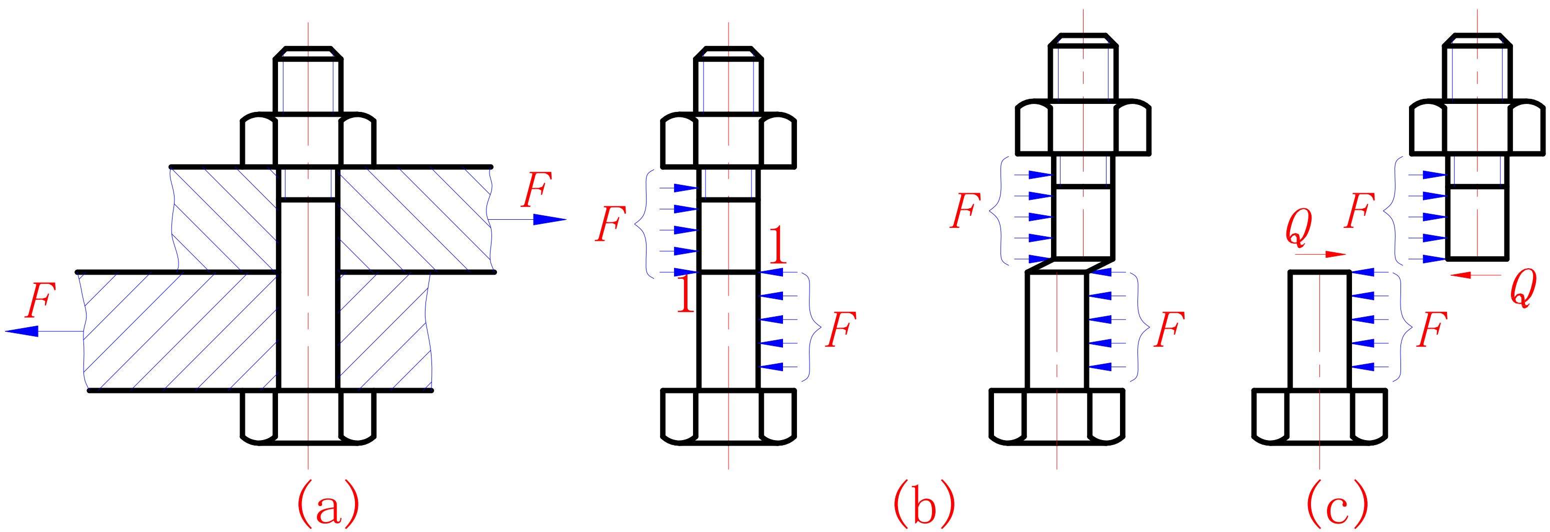
5. 剪切与扭转







剪切构件的受力和变形特点



当杆件在两相邻的横截面处有一对垂直于杆轴，但方向相反的横向力作用时，其发生的变形为该两截面沿横向力方向发生相对的错动，此变形称为**剪切变形**。

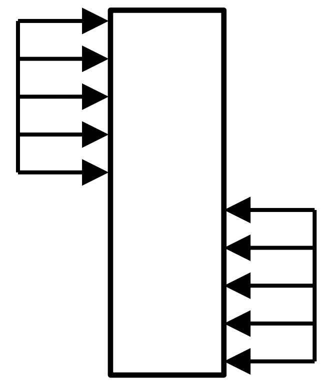
剪切变形特点：两相邻截面间发生错动

剪切力特点：合力大小相等、方向相反、作用线距离很小。

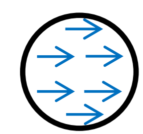
剪切计算及强度条件

假设剪应力 τ 在截面上均匀分布，$\tau = Q/A$

强度条件：$\tau \leq [\tau]$，其中：$[\tau] = \tau_b/n_b$



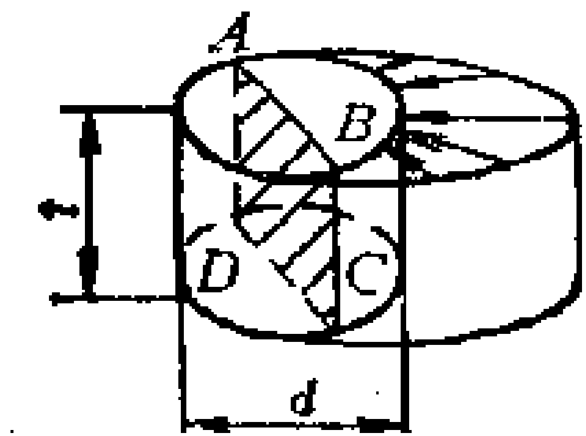
对塑性材料：[τ]=(0.6～0.8)[σ]
对脆性材料：[τ]=(0.8～1.0)[σ]

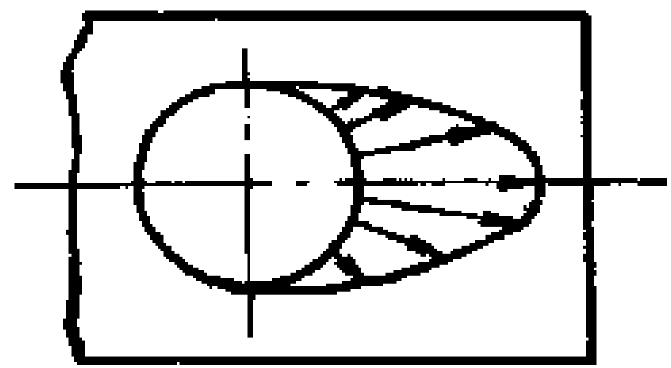


挤压计算和强度条件

假设挤压应力σ_{jy} 在截面上均匀分布，$\sigma_{jy} = F/A$

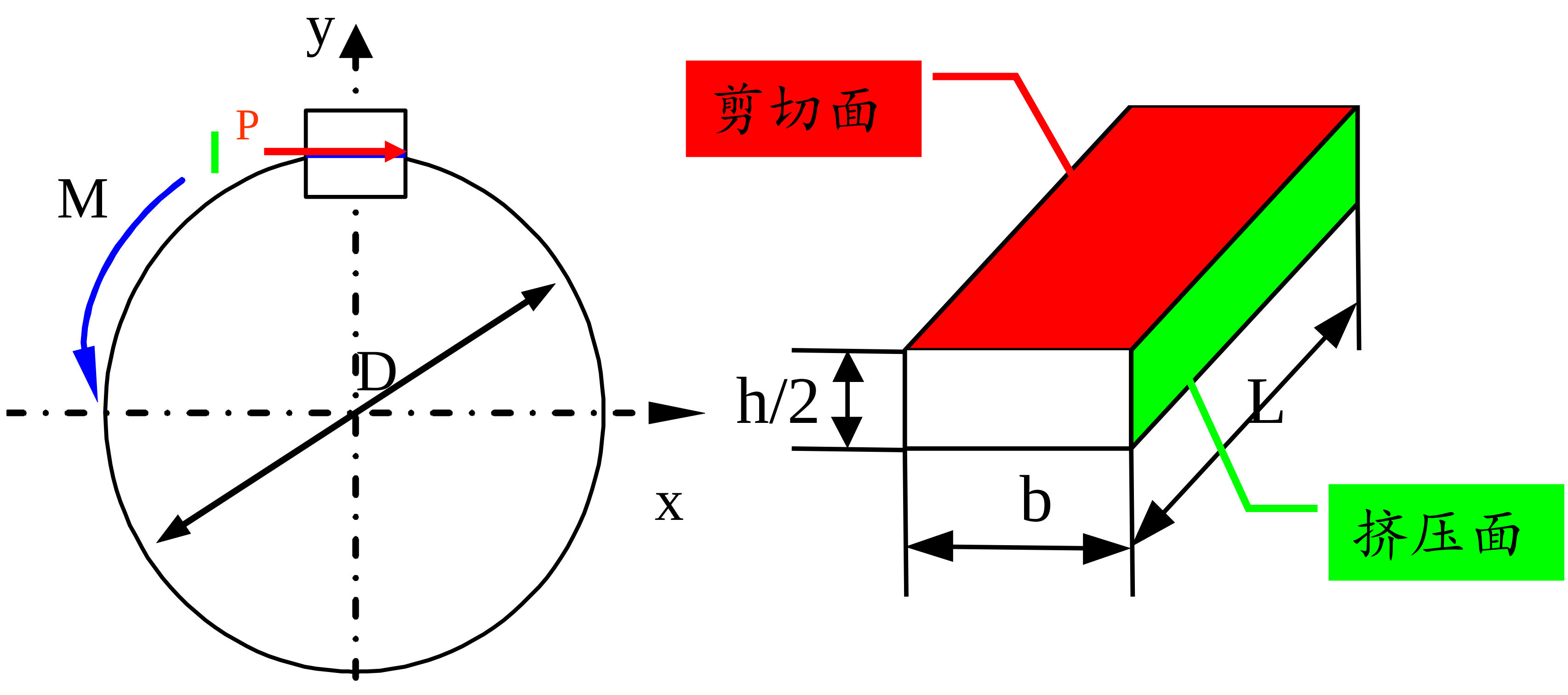
强度条件为： $\sigma_{jy} \le [\sigma_{jy}]$ 其中： $\left[\sigma_{jy}\right] = 1.7\sim2.0[\sigma]$





例题

例 已知$M = 720\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$，$D = 50\mathrm{mm}$，选择平键，并校核强度。



解答

1)查机械零件手册，选出平键的宽度b=16mm,高度h=10mm,长度L=45mm，[τ]=110MPa，[σ_{jy}]=250MPa

2) 求外力

$$\sum M_O = 0 \quad M - P\frac{D}{2} = 0 \qquad P = \frac{2\times 720}{50\times 10^{-3}} = 28800N$$

3) 剪切强度校核：

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{28800}{16\times 45} = 40MPa < 110MPa$$

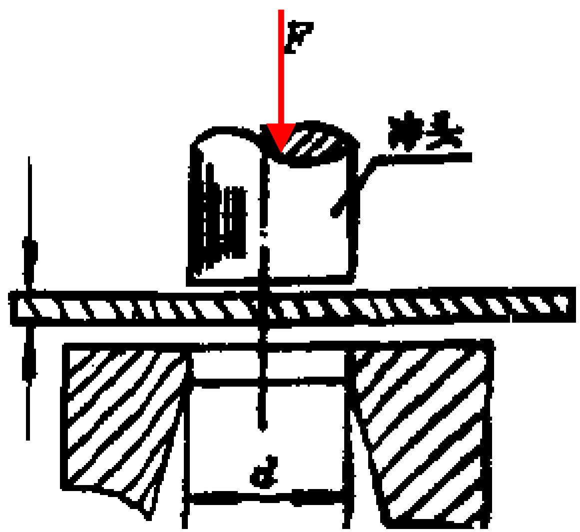
4） 校核挤压强度：

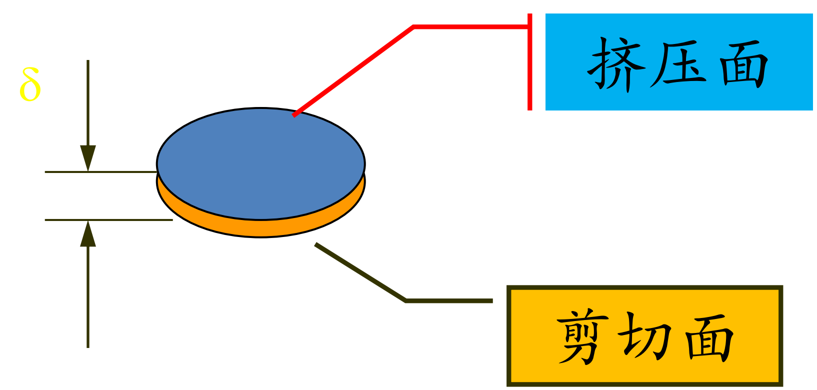
$$\sigma_{jy} = \frac{P_{jy}}{A_{jy}} = \frac{28800}{5\times 45} = 128MPa < 250MPa$$

校核结果：由于键所受的剪应力和挤压应力均小于许用值，故所选用的平键合适。

例题

冲床的最大冲力F=400kN，冲头材料的许用应力$[\sigma_{jy}]$=440MPa，被剪切钢板的剪切强度极限τ_b=360MPa, 求圆孔最小直径 和钢板的最大厚度。





解答

根据挤压条件：　$\sigma_{jy} \le [\sigma_{jy}]$

$$\sigma_{jy} = \frac{4F}{\pi d^2} \le [\sigma_{jy}]$$

由此可得：$d \ge 34mm$

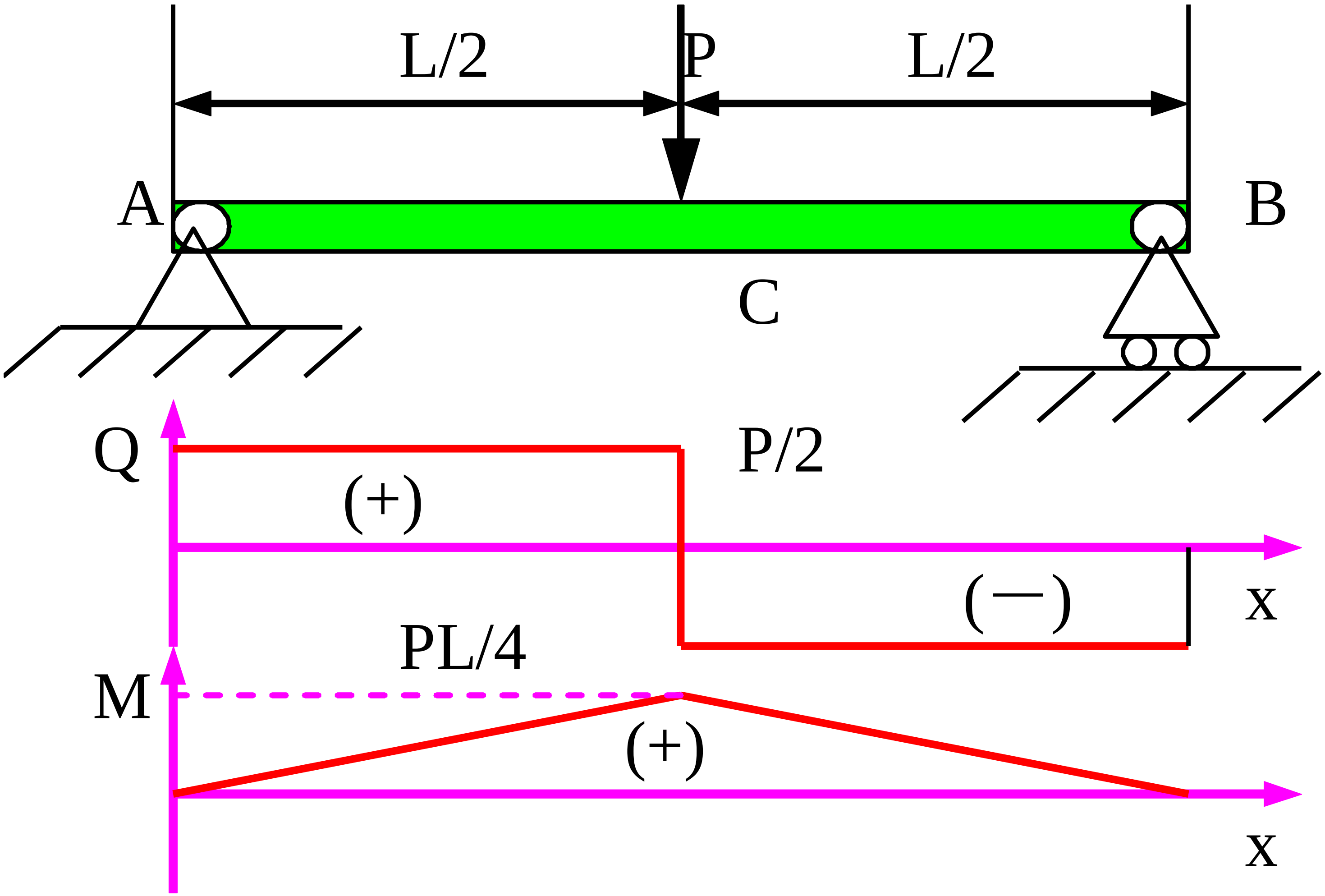
根据剪切条件：　$\tau \ge \tau_b$

$$\tau = \frac{F}{\pi d \delta} \ge \tau_b$$

由此可得：$\delta \le 10.4mm$

该冲床在最大载荷作用下所能冲剪的圆孔最小直径为34mm，所能冲剪钢板的最大厚度为10.4mm

例题：求截面上正应力与剪应力之比



解答

正应力：

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{\frac{1}{4}PL}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{3}{2}\frac{PL}{bh^2}$$

剪应力：

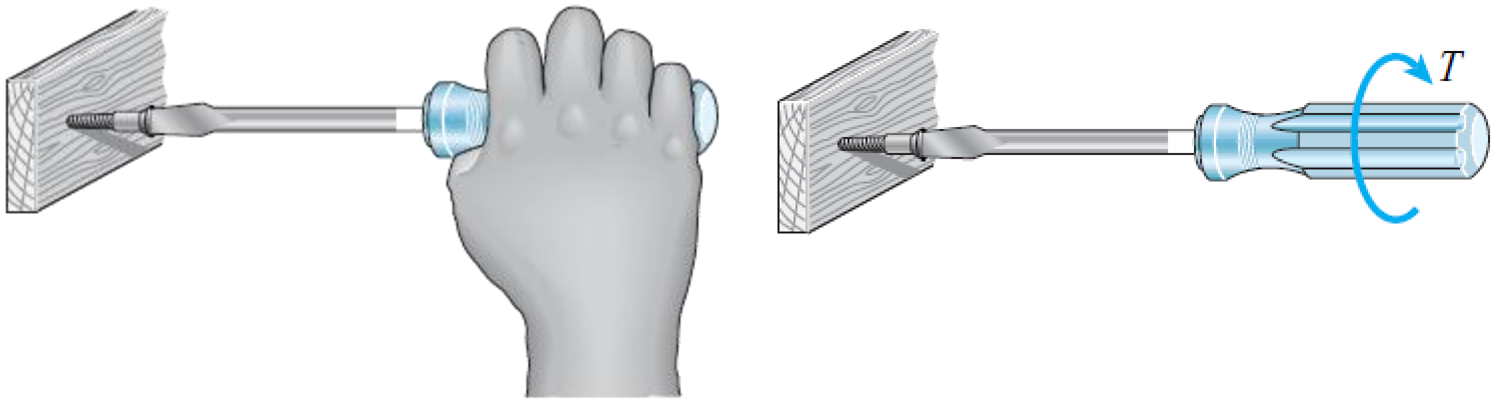
$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{P}{2}}{bh} = \frac{P}{2bh}$$

应力比：

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{3L}{h}$$

通常$L/h > 5$，因此τ可忽略不计

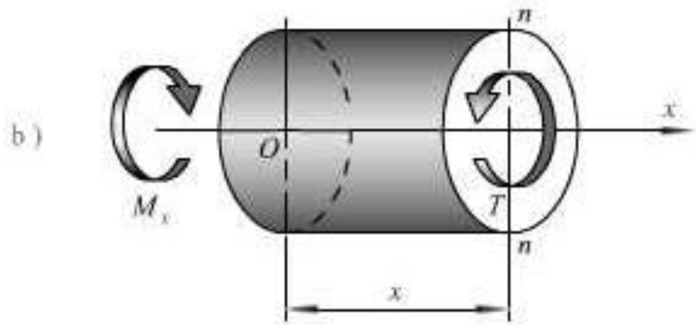
扭转变形的特点

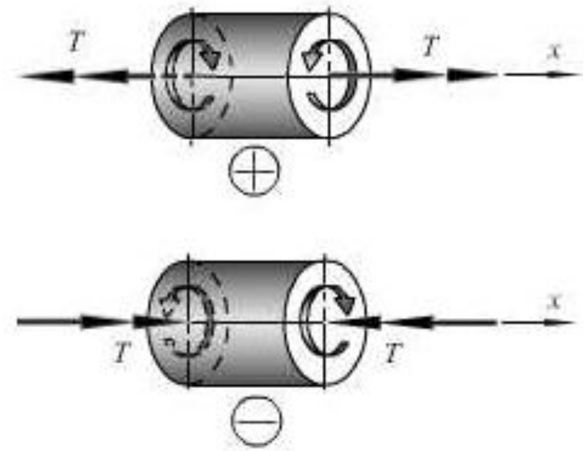


受力特点：在垂直于杆的轴线作用有一对力偶。

受力变形：杆的截面发生转动。

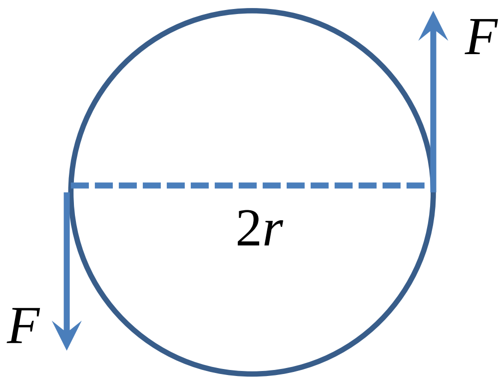
扭矩的正负号规定





用右手螺旋法则将扭矩表示为矢量。如扭矩矢量方向离开截面，扭矩为正；如扭矩矢量的方向指向截面，则扭矩为负。

扭力矩和电机功率间的关系



功率P(单位/瓦)： $P = 2Fv = \dfrac{M}{r}\dfrac{2\pi rn}{60} = \dfrac{\pi nM}{30}$

功率单位为千瓦时： $1000P = \dfrac{\pi nM}{30}$

即： $M = \dfrac{30000P}{\pi n} \approx 9549 \times \dfrac{P}{n}$

M单位为$N \cdot m$，P为KW，n为每分钟转速r/min

汽车的驱动力

8代civic1.8的引擎在4300转/分时的输出功率约为78KW，相应的扭矩为

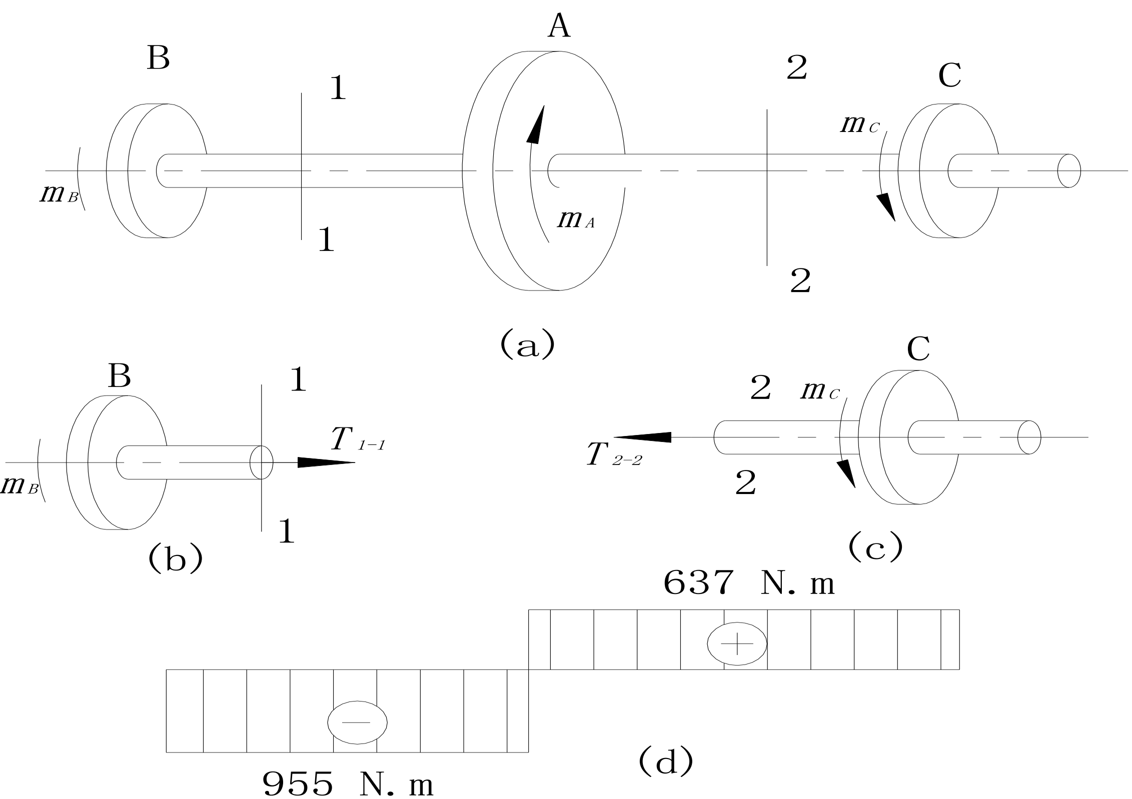
$$M = 9549 \times \frac{P}{n} = 9549 \times \frac{78}{4300} \approx 173.2\ N \cdot m$$

若轮胎半径为0.3m，则驱动力为

$$Q = \frac{M}{r} = \frac{173.2}{0.3} \approx 577.3\ N$$

扭矩图

如图5-9所示，已知轴的转速为n=300rpm，主动齿轮A输入功率P_A=50kW，从动齿轮B和C的输出功率分别为P_B=30kW，P_C=20kW，求轴上截面1-1，2-2处的内力。



$$m_A = 9550\frac{P_A}{n} = 1592N\cdot m$$

$$m_B = 9550\frac{P_B}{n} = 955N\cdot m$$

$$m_C = 9550\frac{P_C}{n} = 637N\cdot m$$

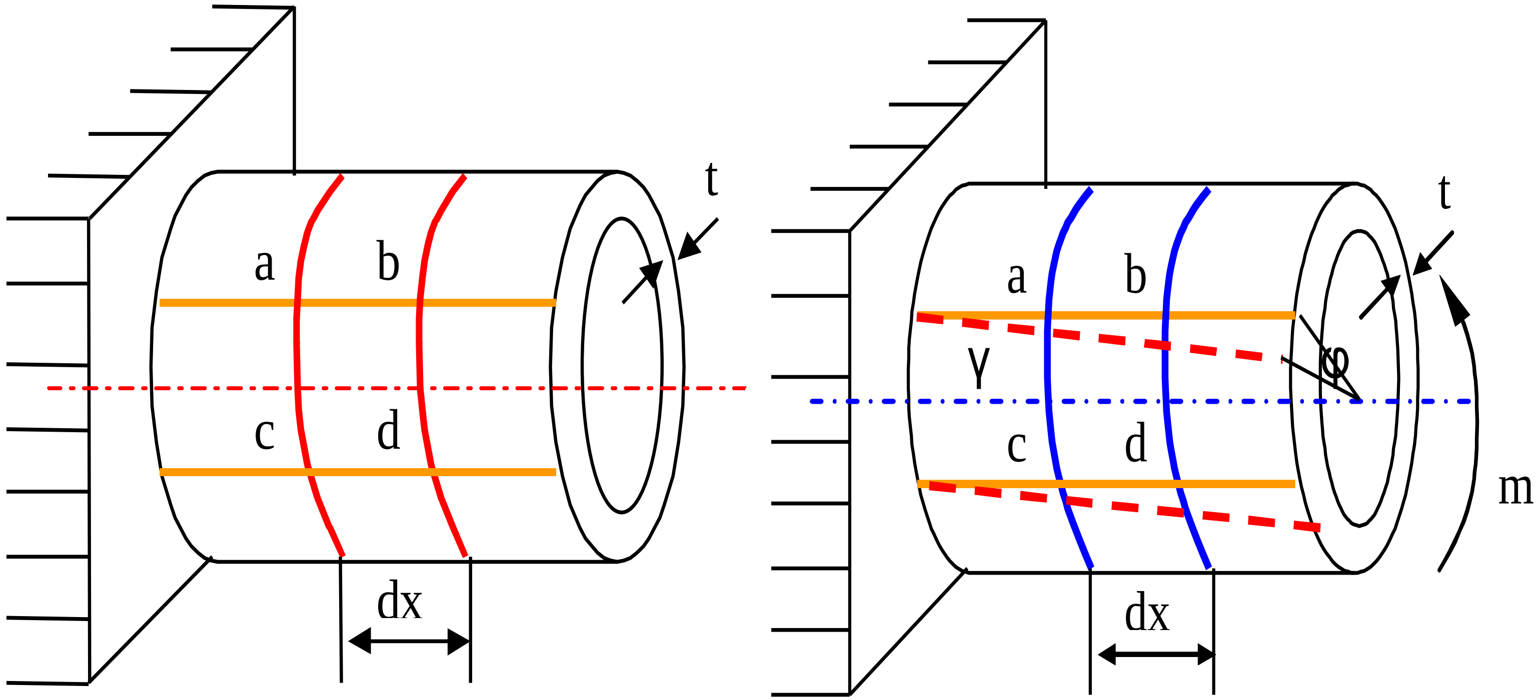
$$T_{1-1} + m_B = 0$$

$$T_{1-1} = -m_B = -955N\cdot m$$

$$m_C - T_{2-2} = 0$$

$$T_{2-2} = m_C = 637N\cdot m$$

薄壁圆筒扭转



变形特点

1. 周向线各自绕圆筒轴线转过一定角度，转过角度不同，圆筒大小形状不变。

2. 纵向线成螺旋状，微体变成平行四边形

3. 剪应变(γ)：由于错动而产生的纵向线转动角。

4. 扭角(φ)：两截面发生相对转动的角度。

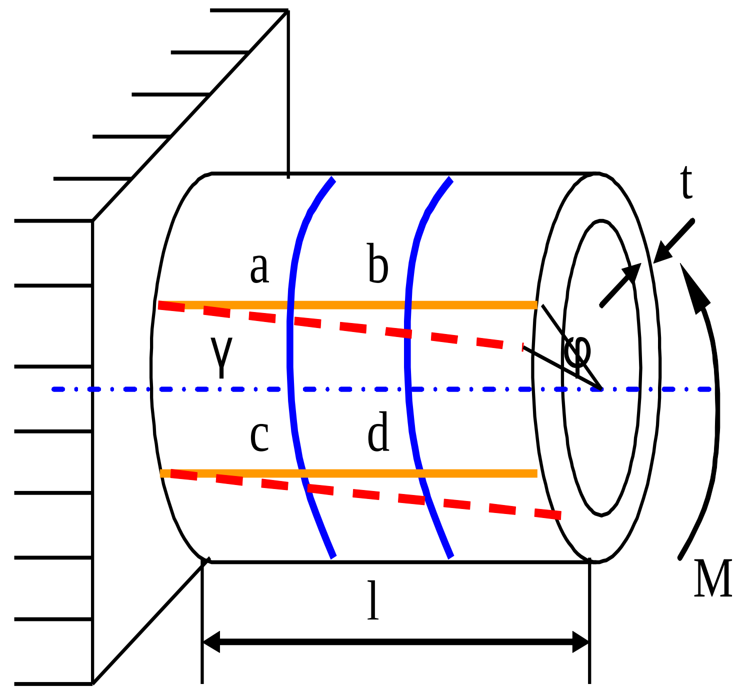
薄壁筒扭转时的应力和变形

因为 $M=\int_A r\tau dA=\tau\int_0^{2\pi}tr^2d\theta=2\pi r^2t\tau$

所以 $\tau=\dfrac{M}{2\pi r^2t}$

剪应变为

$$\gamma=\tan\gamma\approx\frac{r\phi}{l}$$



剪应力互等定律

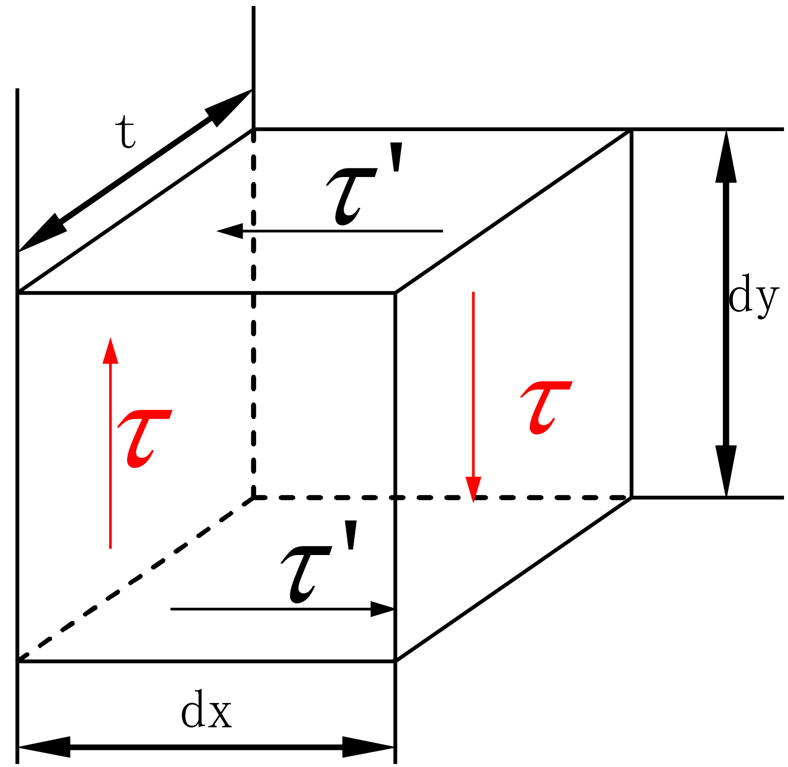
由力偶平衡条件得：

$$(\tau' t dx)dy = (\tau t dy)dx$$

从而有：

$$\tau' = \tau$$

剪应力互等定律：在单元体相互垂直的两个面上，垂直于公共邻边剪应力数值相等，而他们的方向或指向邻边或背离邻边。



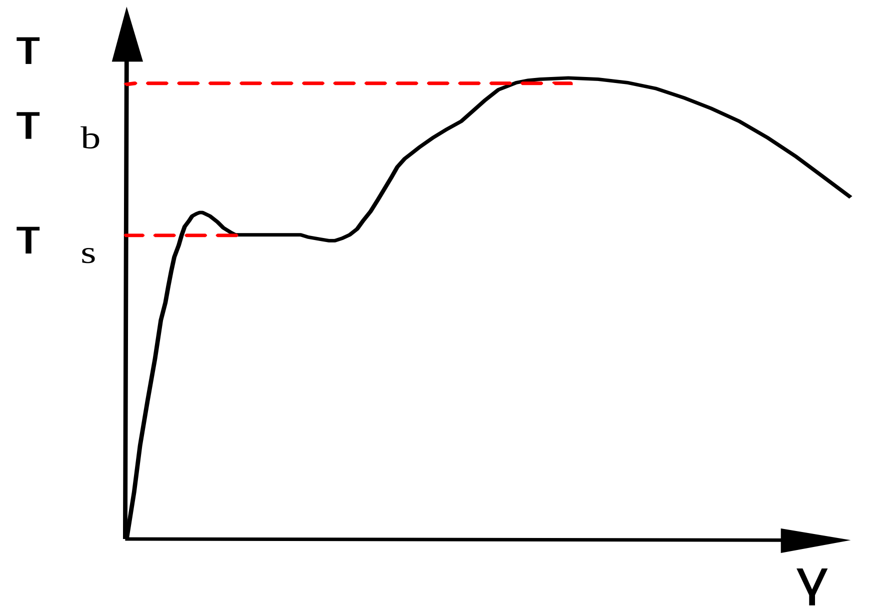
剪切试验

剪切虎克定律：

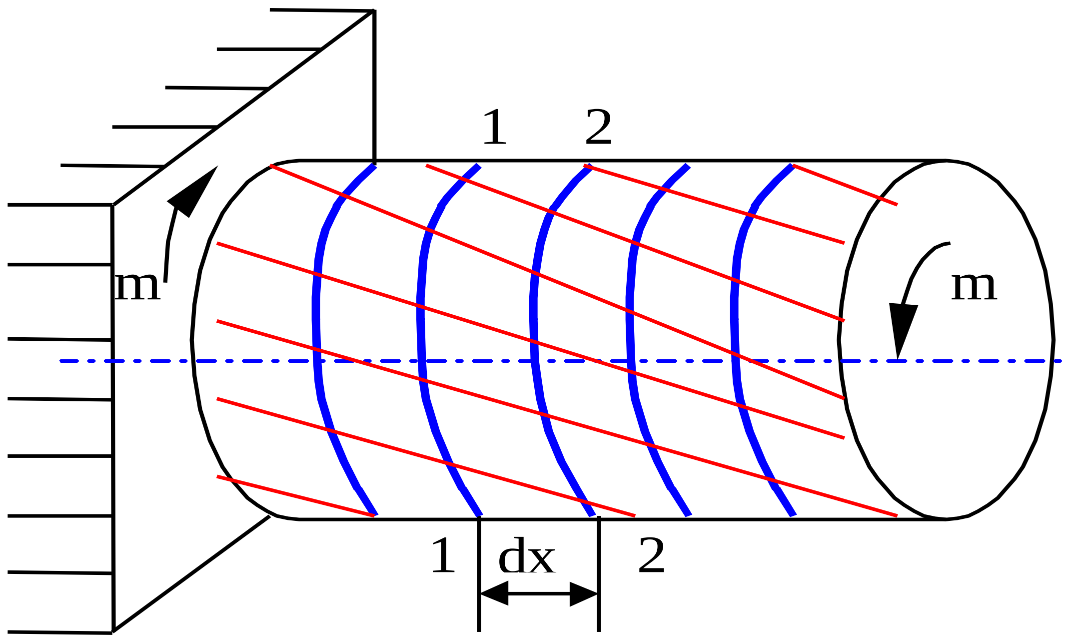
$$\tau = G\gamma$$

弹性模量、剪切模量、泊松比之间的关系：

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

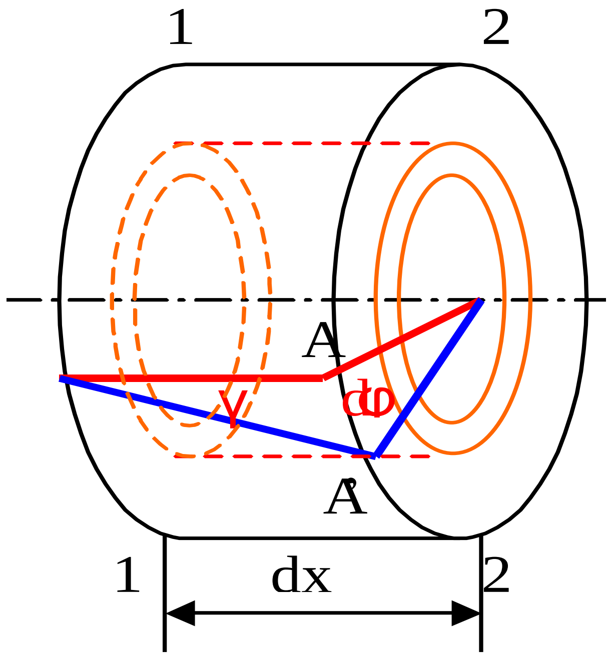


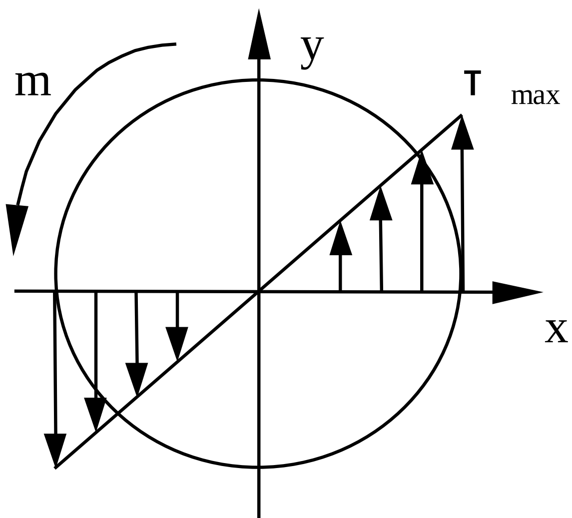
实心圆轴扭转时的应力与变形



刚性平面假设：变形前为圆形截面，变形后仍保持为同样大小的圆形平面且半径仍为直线。

圆轴扭转剪应力





1. 变形几何方程

$$\gamma_\rho = \rho \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}$$

2. 物理方程

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}$$

圆轴扭转剪应力

3. 静力平衡关系

由扭矩公式得：$M=\int_A \rho\tau_\rho \mathrm{d}A=\int_A \rho\, G\rho\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}A$

$$=G\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\int_A \rho^2\,\mathrm{d}A$$

定义：$I_\rho=\int_A \rho^2\,\mathrm{d}A$

I_ρ称为截面的极惯性矩；

则：

$$M=GI_\rho\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}$$

圆轴扭转剪应力

单位扭转角 $\varphi = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = \frac{M}{GI_\rho}$

积分后得扭转角 $\phi = \int_l \mathrm{d}\phi = \frac{Ml}{GI_\rho}$

GI_ρ称为抗扭刚度

剪应力为 $\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = G\rho\frac{M}{GI_\rho} = \frac{M\rho}{I_\rho}$

最大剪应力 $\tau_{\max} = \frac{M\rho_{\max}}{I_\rho} = \frac{MR}{I_\rho} = \frac{M}{W_\rho}$

式中 $W_\rho = \frac{I_\rho}{R}$ 称为抗扭截面模量

极惯矩和抗扭截面模量的计算

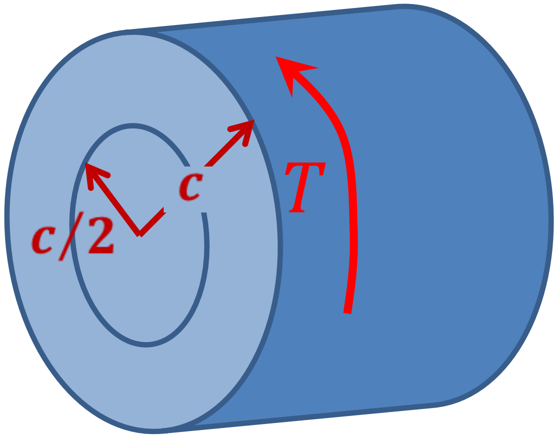
实心圆轴

$$I_\rho = \int_A \rho^2 \, \mathrm{d}A = \int_0^{D/2} \rho^2 2\pi\rho \mathrm{d}\rho = \frac{\pi D^4}{32}$$

空心圆轴

$$I_\rho = \int_A \rho^2 \, \mathrm{d}A = \int_{d/2}^{D/2} \rho^2 2\pi\rho \mathrm{d}\rho = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

实心圆轴的抗弯矩分布



$$\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_\rho} \qquad T = \int_A \rho\tau_\rho \mathrm{d}A$$

$$T_{inner} = \int_0^{c/2} \frac{T\rho}{I_\rho}\rho \cdot 2\pi\rho\mathrm{d}\rho = \frac{T\pi c^4}{32 I_\rho} = \frac{T}{16}$$

$$T_{outer} = \int_{c/2}^{c} \frac{T\rho}{I_\rho}\rho \cdot 2\pi\rho\mathrm{d}\rho = \frac{15T\pi c^4}{32 I_\rho} = \frac{15}{16}T$$

$$T_{outer}/T_{inner} = 15$$

实心圆轴中心所承受的载荷远小于外圈承受的载荷。

圆轴扭转时的强度和刚度条件

强度条件：$\tau_{\max} = \dfrac{M}{W_\rho} \le [\tau]$

其中塑性材料 $[\tau] = \dfrac{\tau_s}{n_s}$ 脆性材料 $[\tau] = \dfrac{\tau_b}{n_b}$

圆轴尺寸设计公式 $W_\rho = \dfrac{\pi D^3}{16} \ge \dfrac{M}{[\tau]}$

$$\Rightarrow \ D \ge \sqrt[3]{\frac{16M}{\pi[\tau]}}$$

圆轴刚度条件

$$\varphi_{\max} = \frac{M}{GI_\rho} \le [\varphi] \ \ \mathrm{rad/m}$$

或

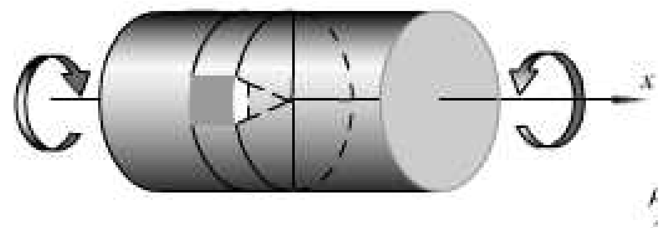
$$\varphi_{\max} = \frac{M}{GI_\rho} \times \frac{180}{\pi} \le [\varphi] \quad {}^{\mathrm{o}}/\mathrm{m}$$

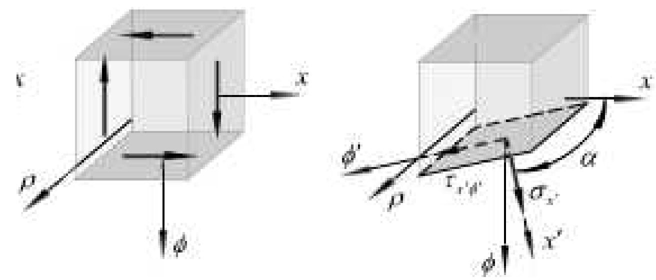
[φ]值根据对机器的要求和工作条件等确定，可查有关手册。对一般轴，[φ]=0.5~1.0 $^{\mathrm{o}}$/m。

圆轴扭转破坏模式的分析

a)

b)



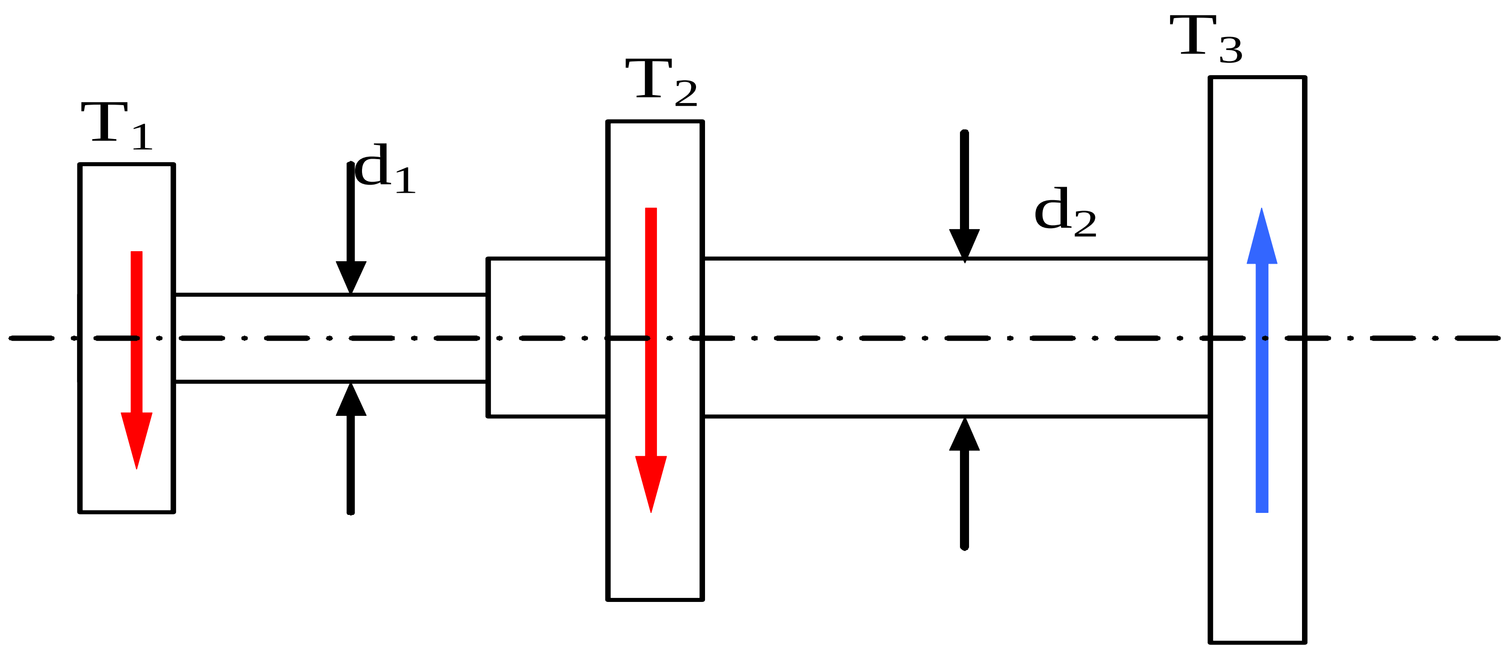


b)　　c)

扭转时的应力情况随截面方向不同而不同。抗剪切的能力比抗拉伸的能力小，就会在最大切应力的截面破坏，例如低碳钢。如果材料抗拉伸能力比抗剪切能力小，就会在最大拉应力的截面破坏，例如灰铸铁。塑性材料往往呈现抗剪切能力比抗拉伸能力弱，脆性材料往往呈现抗拉伸能力比抗剪切能力弱。

例题

阶梯轴d_1=40mm,d_2=70mm, 轮3的输入功率30kW，轮1的输出功率为13kW，轴转速为200rpm，轴材料的[τ]=60MPa，G=8×10^4MPa，许用扭转角[φ_0]=2°/m，试校核轴的强度和刚度。

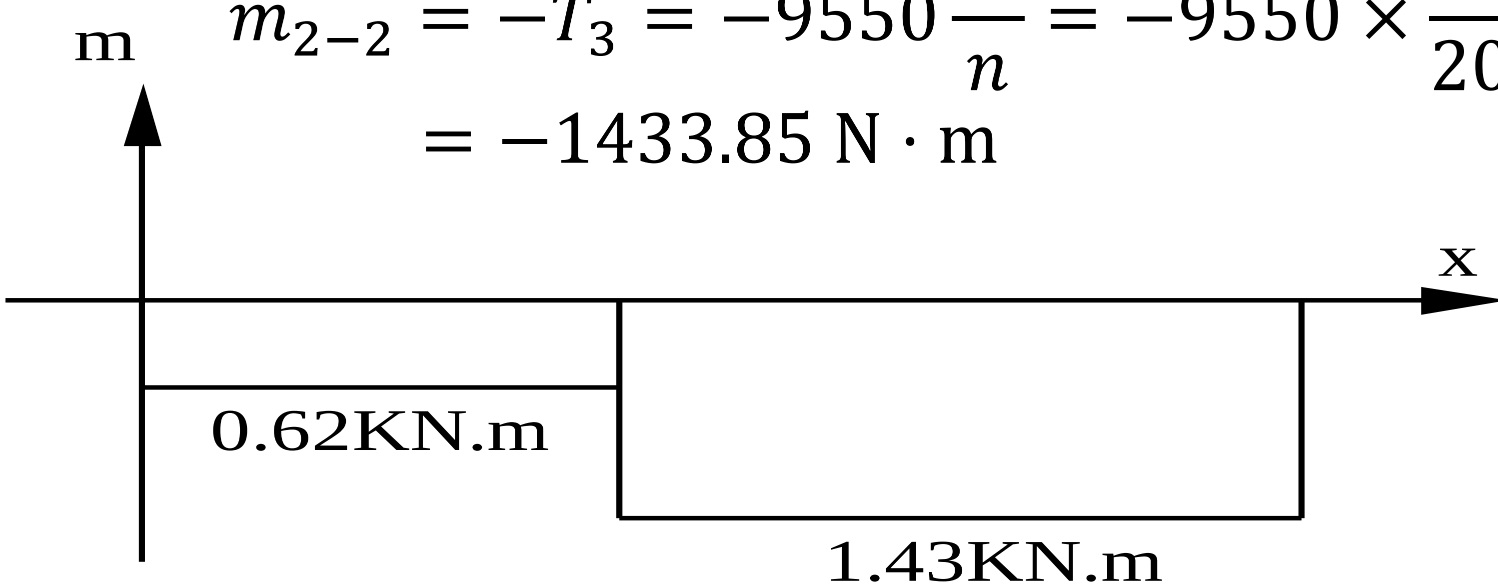


$$T_1 + m_{1-1} = 0$$

$$m_{1-1} = -T_1 = -9550\frac{P_1}{n} = -9550 \times \frac{13}{200}$$
$$= -620.75\ \mathrm{N \cdot m}$$

$$T_3 + m_{2-2} = 0$$

$$m_{2-2} = -T_3 = -9550\frac{P_3}{n} = -9550 \times \frac{30}{200}$$
$$= -1433.85\ \mathrm{N \cdot m}$$



剪应力： $\tau_1 = \dfrac{m_{1-1}}{W_{\rho 1}} = \dfrac{620.75}{\dfrac{\pi}{16} \times 0.04^3} = 49.4\ \text{MPa} \leq [\tau]$

$$\tau_2 = \frac{m_{2-2}}{W_{\rho 2}} = \frac{1433.85}{\dfrac{\pi}{16} \times 0.07^3} = 21.3\ \text{MPa} \leq [\tau]$$

扭转变形：

$$\phi_1 = \frac{m_{1-1}}{GI_{\rho 1}} \times \frac{180}{\pi} = \frac{620.75}{8 \times 10^{10} \times \dfrac{\pi}{32} \times 0.04^4} \times \frac{180}{\pi} = 1.77 \quad {}^{\text{o}}/\text{m} \leq [\phi]$$

$$\phi_2 = \frac{m_{2-2}}{GI_{\rho 2}} \times \frac{180}{\pi} = \frac{1433.85}{8 \times 10^{10} \times \dfrac{\pi}{32} \times 0.07^4} \times \frac{180}{\pi} = 0.44 \quad {}^{\text{o}}/\text{m} \leq [\phi]$$

经校核：该轴所有截面的剪应力均小于许用剪应力，以及所有截面的扭转变形均小于许用值，因此该轴的强度和刚度均满足使用要求。