

华东理工大学 2021-2022 学年第一学期

《数学分析（上）》课程期末考试试卷 A 2021.12

开课学院： 数学学院 专业： 数、信计 考试形式： 闭卷 所需时间： 120 分钟
姓 名： 学号： 班 级： 任课教师： 靳勇飞

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
评卷人											

注意事项：

1. 考试过程中不可以使用计算器，也不可以使用任何其他机械或电子辅助计算工具。
2. 在试卷中， \mathbb{N} 表示非负整数集合； \mathbb{N}^+ 表示正整数集合； \mathbb{R} 表示实数集合。作为区间端点的符号 a, b 满足 $a < b$ 。
3. 使用任何没有在课本或者课堂上证明过的结论前，都必须先证明该结论。
4. 所有题目的解答都需写出主要步骤。

————— 以下为试卷内容 —————

一、 (每小题 6 分，共 12 分) 计算。

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-3)^n + 2^n}{3^n - 2^n}$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$

二、 (每小题 6 分, 共 12 分) 计算。

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2022}{1 - x^{2022}} - \frac{2021}{1 - x^{2021}} \right)$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

三、 (每小题 6 分, 共 12 分) 计算。

1. $\int \frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} dx;$

2. $\int 2x^3 e^{x^2} dx$

- 四、(本题 10 分) 徐汇校区某温度测量站几日的实际温度测量值如下表所示, 请用插值多项式近似表示温度随时间变化的函数, 并求记录缺失的 12 月 20 日温度的近似值。

日期	12 月 17 日	12 月 18 日	12 月 19 日		12 月 21 日
温度	10	7	11		17

- 五、(本题 10 分) 请写出用牛顿 (Newton) 迭代法求函数 $f(x) = \ln x + x - 2$ 的零点的迭代公式, 并说明以 $x_0 = 1$ 为初值时, 这个迭代过程是否是收敛的。

六、 (本题 10 分) 求函数 $e^x \sin x$ 在 0 处的带皮亚诺 (Peano) 余项的 5 次泰勒 (Taylor) 公式, 并求 $e^{0.5} \sin 0.5$ 的近似值。

七、 (本题 10 分) 已知关于 x 二阶可导的函数 $y = y(x)$ 满足方程

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\arctan \frac{y}{x}},$$

求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

八、(本题 10 分) 简述从波尔查诺 (Bolzano)-维尔斯特拉斯 (Weierstrass) 定理出发证明柯西 (Cauchy) 收敛原理的思路。

九、(本题 8 分) 设函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 证明: f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续。

十、 (本题 6 分) 设函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f(b) \geq f(a)$, 且 f 不是线性函数。求证: 存在 $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$, 使得 $\left| \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \right| > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.