2 构件的受力分析

构件的受力分析是研究构件的强度和刚度的基础，从力学角度来说，属于静力学的范畴，它是研究物体在力系的作用下平衡条件的科学。

所谓力系，是指作用在同一物体上的一组力。如果作用在同一物体上的诸力作用线位于同一平面内，则这种力系称为平面力系。平面力系是空间力系的一种特殊情况。由于平面力系的分析比空间力系简单、直观，两者在研究方法上很类似，而且在实际工程中，许多力学问题都可简化为平面力系的问题，因此，本章主要讨论平面力系的平衡等问题。

静力学中的“平衡”是指物体相对于地面保持静止或匀速直线运动。如桥梁、机床的床身、作匀速直线飞行的飞机等等，都是处于平衡状态。平衡是物体运动的一种特殊形式。

力与平衡，在工程和实际生活中时刻存在。任何机器或设备在工作时，都会受到各种各样外力的作用而产生一定程度的变形。如果机器或设备设计得不合理，其零部件变形程度过大，就无法处于平衡状态，造成破坏，从而无法保证安全而正常的生产。因此，为使机器或设备能安全而正常地工作，在设计时，必须分析构件在工作条件下的受力情况，即对物体（杆件或构件）进行受力分析。

在对构件进行受力分析时，一般把构件看作是刚体。所谓刚体，是指在力的作用下不发生任何变形的物体。事实上，任何物体在力的作用下总要产生变形，但是许多物体受力变形是极微小的，在工程问题研究中，对物体的运动或平衡几乎不产生什么影响。

本章所要讨论的问题，就是对处于静力平衡状态下的构件在外力作用下的受力分析和计算。研究力系的简化和刚体在力系作用下的平衡规律，由已知的主动力求出未知的约束反力，为构件的强度和刚度分析奠定理论基础。

2.1 静力学的基本概念

2.1.1 力的基本概念

力是由物体间的相互作用而引起的，这种作用能使物体的运动趋势和运动状态发生变化。

人们在长期的生活与社会实践中，从物体的相互作用中抽象出“力”的概念。如人们在实践中逐渐认识到：物体的机械运动状态发生的变化（包括变形），都是由于其他物体对该物体施加力的结果。这些力可以是直接接触的作用，如：机车牵引车厢、放在梁上的设备使梁发生弯曲等等。也可以是“场”对物体的作用，如：地球引力场对于物体的引力，电场对于电荷的引力和斥力等等。力的作用效应有两个方面，一是使物体机械运动状态发生变化，称为力的外效应；二是使物体的形状发生变化，称为力的内效应。本章讨论的是力的外效应。

力是一个矢量，它对物体的作用效应取决于三个要素：力的大小，力的方向，力的作用点。改变力的任一要素，也就改变了力对物体的作用效应。

力的度量单位，在国际单位制中用牛顿(N)，采用工程单位制时，用千克力(kgf)，1 kgf = 9.8 N。

力对刚体的作用结果是由力的效应决定的，两个相同力的效应可以互为等效。若两个力系对同一刚体分别作用时，产生的效果完全相同，则称此二力系为等效力系。若一个力与某一力系的作用效果等效，则称此力为该力系的合力。力系一般能够简化，即将刚体上的一群复杂的力系，用一个最简单的基本力系等效替代，且对刚体的作用效果不发生变化，这一过程称为力的简化。

若某一力系能使刚体保持平衡状态，则称此力系为平衡力系。平衡只是相对而言的，必须有一参照体系。若物体相对于某一惯性参考系保持静止或作匀速直线运动，则称该物体处于平衡状态或平衡。

平衡不仅须有参照体系，还须有时间限定。在工程研究中，通常假设在某一瞬时，机器或设备的构件处于平衡状态，然后，再用平衡原理进行分析研究。如滑块曲柄连杆机构在运行时，假设在某一瞬时处于平衡状态，了解此时各构件之间的约束及约束反力情况，画出相应的受力分析图，再进行列方程求解。

2.1.2 静力学公理

人们经过长期的社会实践，缜密观察与实验，从大量的事实中概括和总结出的有关力的客观规律，称为静力学公理。这些公理说明了力的基本性质，是静力学的理论基础。

1. 二力平衡公理

作用于刚体上的两个力，使刚体保持平衡的必要与充分条件是：这两个力的大小相等、方向相反、且作用在同一直线上。

以吊车起吊重物为例，重物 A 同时受到两个力的作用，向下的重力 $\boldsymbol{W}$ 和向上的拉力 $\boldsymbol{T}$，如图 2－1 所示，要使物体 A 处于平衡状态，则这两个力必须大小相等、方向相反、作用于同一直线上。

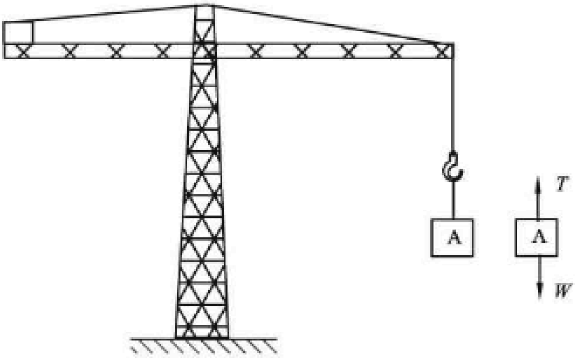


图 2－1

需要指出的是，在分析物体受力时，注意二力平衡公理和作用力与反作用力定律的区别，前者是两个力作用在同一物体上，后者是两个力分别作用在不同物体上。

由此可见，若一个刚体受到两个力作用处于平衡状态，不管该刚体是何形状，则这两个力的大小相等、方向相反、作用在同一条直线上。我们把受到二力作用而平衡的构件称为二力杆件。二力杆件不一定是直杆。如图 2－2 电动机机架中 CD 杆及拱桥中 BC 杆均称为二力杆件。

2. 加减平衡力系公理

在一刚体上任意加上或减去一个平衡力系，而不改变原力系对该刚体的效应。

这是由于加上的平衡力系对刚体不产生任何外效应，保持原状。

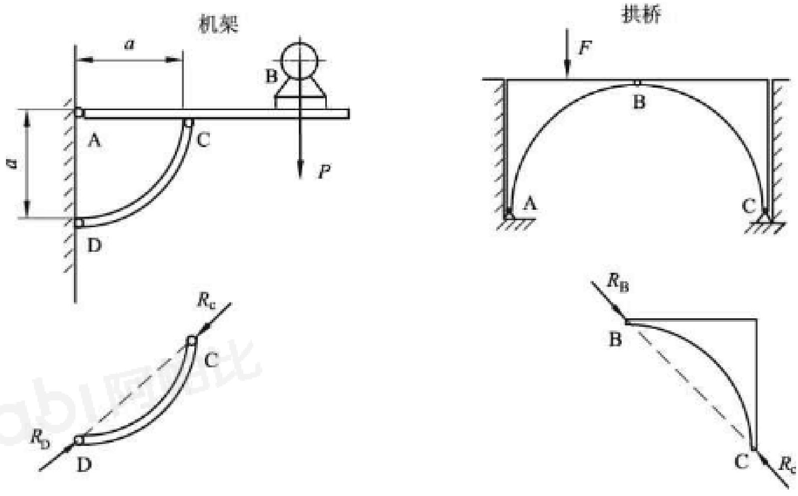


图 2－2

依据这一公理可推论得：力在刚体上的可传性，即作用于刚体上的力可沿其作用线移动，而不改变它对刚体的作用效应。

3．力的平行四边形法则

由于力是矢量，它的合力不能直接相加，两个力矢的和必须应用平行四边形法则求几何和，这种求合力的方法称为矢量加法，如图 2－3 所示。用公式表示为：

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

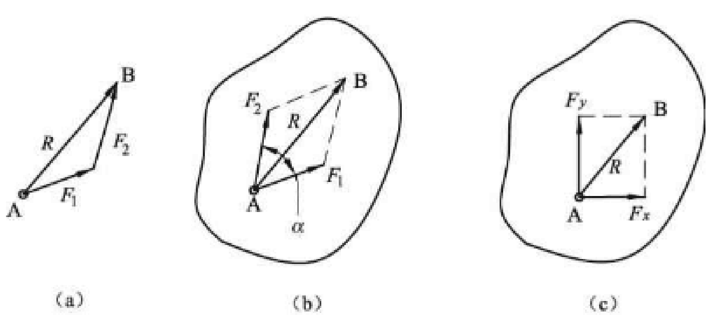


图 2－3

作用于同一物体上可以汇交的力系，依然可用平行四边形法则求合力，只要依次两两合成，就可以求得最后的合力 $\boldsymbol{R}$。现假设作用于物体 A 点上有三个力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$，可以先求得 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力 $\boldsymbol{R}_1$，然后再将 $\boldsymbol{R}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_3$ 合成最后的合力 $\boldsymbol{R}$，如图 2－4 所示。

利用平行四边形法则，还可以根据实际问题需要，把一个力分解为两个互为相交的分力，其分力与这一合力作用在同一点上。为了方便起见，实际中通常是将力分解为方向已知的、互相垂直的两个分力。如图 2－5 所示，某一三角房顶架受到一水平方向的撞击力 $\boldsymbol{F}$，可以将其分解为对房顶架的正压力 $\boldsymbol{R}$ 和对房顶架的切向力 $\boldsymbol{T}$。为了方便起

见，一般情况下解题时，将一个力分解成水平方向和垂直方向的两个分力，方向的正负号与习惯上的坐标轴同向。

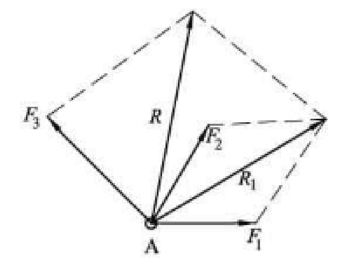


图 2－4

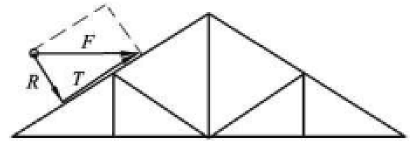


图 2－5

4. 三力平衡汇交定律

当刚体在三力作用下处于平衡时，若其中两力的作用线相交于一点，则第三力的作用线必通过该点，且三力共面。

证明：在刚体上 A、B、C 三点，分别作用着三力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$，使物体处于平衡状态，如图 2－6所示。设 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 两力的作用线交于 O 点，按力的可传性原理，将力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 沿其作用线移至交点 O，此二力可合成为合力 $\boldsymbol{F}_{12}$。可见，此时刚体上只有 $\boldsymbol{F}_{12}$ 和 $\boldsymbol{F}_3$ 两力作用而处于平衡，按两力平衡公理，$\boldsymbol{F}_3$ 与 $\boldsymbol{F}_{12}$ 必共线，即 $\boldsymbol{F}_3$ 必定通过另两力的交点 O。所以，共面不平行的三力平衡必交于 O 点。

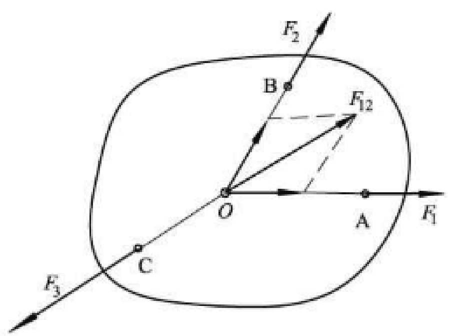


图 2－6

由三力平衡汇交定律可得：一个构件受三力处于平衡时，若已知两力的方向，第三力的方向一定可确定，即第三个力一定指向或背离前两个力的交点。

2.2 约束、约束反力与受力图

2.2.1 约束和约束反力

凡是位移受限制的物体称为非自由体。工程中的一些物体，总是与其周围的其他物体相互联系而相互制约，使它们的运动受到限制。如电机转子支承在轴承里，机床固定在机架上，过程设备安装在基础上，卧式贮槽安放在鞍式支座上，而支座又用基础螺栓牢固地安装在地基上，管道安放在管架上，管架又固定在建筑物里。于是，这些转子、机床、贮槽、管道等都不能任意运动，受到约束。

所谓约束，即工程中对于某一物体的活动起着限制作用的其他物体。如管架是管道的约束、建筑物是管架的约束。约束限制了物体的移动，在约束处就会形成力，称作约束反力，简称反力。工程上把能使物体发生运动或运动趋势的力称作主动力，例如作用在塔设备上的风力、重力；工程设计中的各种载荷都是主动力。显然，约束反力是由主动力引起的，是限

制某一物体运动趋势的力，是被动力，其方向是指向恒与物体可能运动或运动趋势的方向相反。可见，作用在物体上的力可分为两大类：主动力和约束反力。通常主动力是已知的，约束反力是未知的，受力分析就是具体分析物体上受到哪些力的作用，并根据约束类型和平衡条件，由已知的主动力求出未知的约束反力。

2.2.2　约束的基本类型

约束的类型不同，所产生的约束反力也不同。工程中，约束用于传递运动或承受载荷，是连接物体的某种结构。下面介绍几种常见的约束类型和约束反力的性质。

1. 柔性约束

工程上将不计自重的绳索、链条、皮带等约束称为柔性约束。这类约束的特点是只能承受拉力，不能承受压力和抗拒弯曲，只能限制物体沿柔体伸长方向的运动，而不能限制其他方向的运动。因此，约束反力的方向总是沿柔体作用中心线背离限制的物体运动。这类约束反力通常用 $\boldsymbol{T}$ 表示。如图 2－7 所示，用绳索起吊钢管，钢管除自重 $\boldsymbol{W}$ 外，还受到绳索 AB、AC 的约束反力 $\boldsymbol{T}_B$、$\boldsymbol{T}_C$ 的作用，它们沿着 AB、AC 背离钢管向上指向。

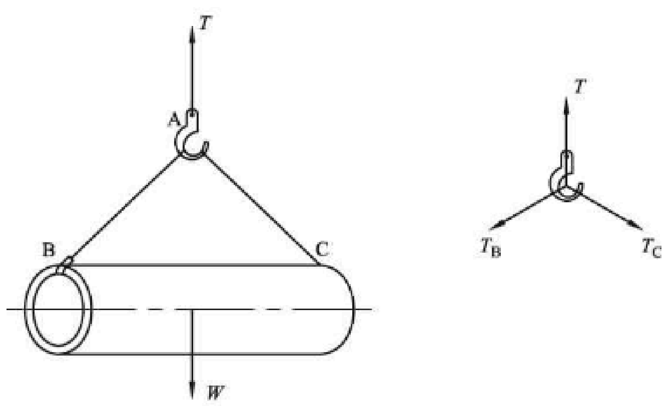


图 2－7

又如图 2－8 所示，带轮传动，带的约束反力沿着轮缘的切线方向背离轮子向外指向。

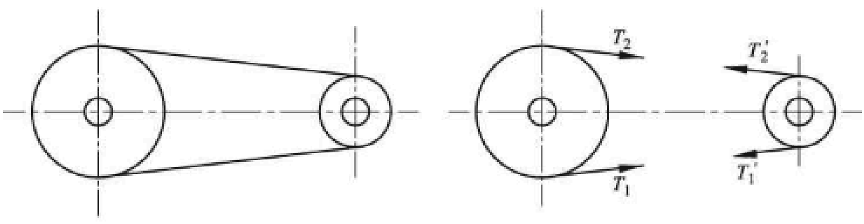


图 2－8

2. 光滑面约束

当两个物体直接接触，接触面比较光滑或有良好的润滑，摩擦力很小，可忽略不计时，这类约束称为光滑面约束。这类约束的特点，是只能限制物体沿接触点的公法线的方向趋向

支承面的运动，即只能承受压力，不能阻止物体的离开。其约束反力通常用 $\boldsymbol{R}$ 表示。如图 2－9所示，自重 $\boldsymbol{W}$ 的杆件 AB 放置在光滑圆弧槽里，杆件受到圆弧槽的约束，约束反力为 $\boldsymbol{R}_A$ 与 $\boldsymbol{R}_B$，$\boldsymbol{R}_A$ 沿接触点的公法线方向，指向圆弧圆心 O，$\boldsymbol{R}_B$ 沿接触点的公法线方向，垂直指向杆件 AB。又如一圆放置在弧槽里，圆受到圆弧槽的约束反力为 $\boldsymbol{R}_A$，$\boldsymbol{R}_A$ 沿接触点的公法线方向，指向圆弧圆心 O。

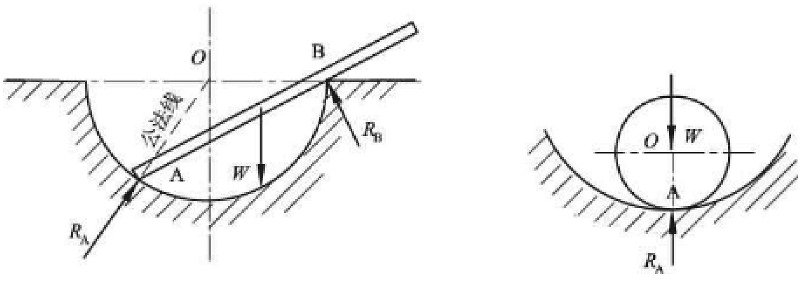


图 2－9

又如图 2－10 所示，圆筒形容器在组装过程中，搁在托轮上，容器与托轮分别在 A、B 两点接触，托轮作用于容器的约束反力 $\boldsymbol{R}_A$ 和 $\boldsymbol{R}_B$ 分别沿接触点的公法线，即圆筒半径方向，指向圆心 O。

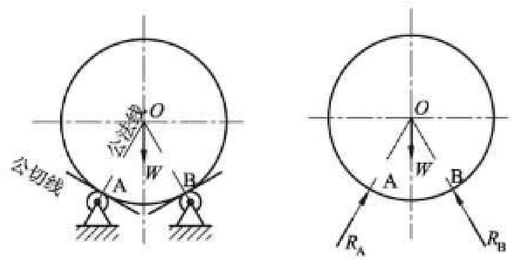


图 2－10

3. 固定铰链约束

铰链约束是工程中、生活中最常见的约束类型。它是用一个光滑的圆柱销钉插入两个构件的光滑圆孔中，将两个构件连接在一起，形成的约束。如图 2－11 所示，这类约束的特点，是只能限制物体间的任意径向移动，不能限制物体绕销钉轴线的转动。其约束反力方向在通过销钉中心的接触点 m 上，用 $\boldsymbol{R}$ 表示，为便于计算，通常用沿直角坐标分解的两个分量 $\boldsymbol{R}_x$、$\boldsymbol{R}_y$ 代替。铰链约束的受力简图如图 2－11(b)所示。

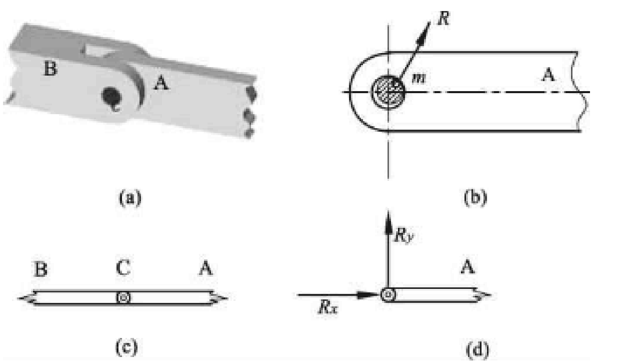


图 2－11

若铰链其中的一个构件固定在基础、支架或机架上，这类约束称为固定铰链约束。固定的构件称支座，另一个构件可以绕销钉轴转动，但不能发生任何方向的移动。如图 2－12 所示，销钉轴的约束作用是阻止物体在与销钉轴相垂直的平面内沿任何方向的移动。由于杆件 1 可绕销轴转动，所以杆件与销轴接触点 m 的位置也是随着杆件受力点的不同而相应地改变，因此，约束反力 $\boldsymbol{R}$ 的指向也跟着变动。为了便于分析，通常也是用互相垂直的两个分力 $\boldsymbol{R}_x$、$\boldsymbol{R}_y$ 代替方向未定的约束反力 $\boldsymbol{R}$。固定铰链约束的受力简图如图 2－12(c)或图 2－12(d)所示。

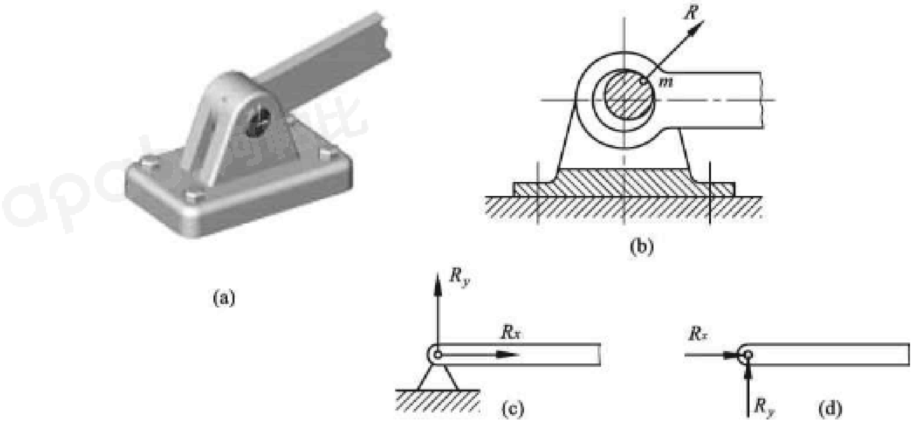


图 2－12

4. 辊轴支座约束

化工、炼油厂某些管道、卧式容器或某些构件，为了适应温度变化使之能相应地伸长或收缩，常在一个支座与基础接触面之间装有几个辊轴，使这个支座可以沿管道或容器的轴向自由地移动，如图 2－13 所示。这种约束称为活动铰链约束或辊轴支座约束。它的特点是只限制支座沿垂直于支承面方向的运动，在不计摩擦的情况下，约束反力的方向必定垂直于支承面，并通过铰链中心，指向或背离约束物体。如图 2－13(b)、(c)是活动铰链约束的受力简图。

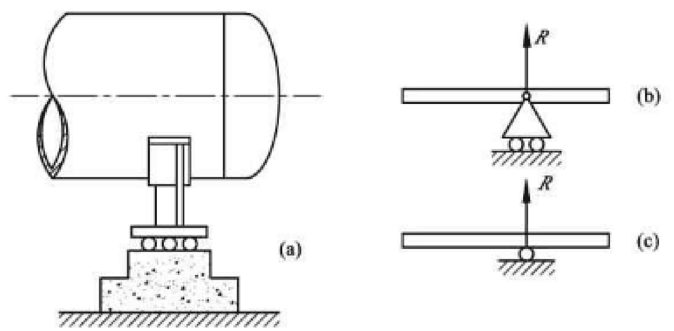


图 2－13

5. 固定端约束

这种约束使固定端完全固定，被固定的部位既不能移动，也不能转动，这种约束称固定端约束。要达到该种约束效应，固定端必定存在三个约束反力，即 $\boldsymbol{R}_x$、$\boldsymbol{R}_y$、M。如图 2－14 所示为一塔设备底部的约束情况，为保证塔设备的稳固，必存在如下约束反力，$\boldsymbol{R}_x$ 限制塔设备沿水平方向的一移动趋势，$\boldsymbol{R}_y$ 限制塔设备向下运动的趋势，M 限制设备由于风载荷引起的倾覆的弯曲趋势（即限制转动的趋势）。

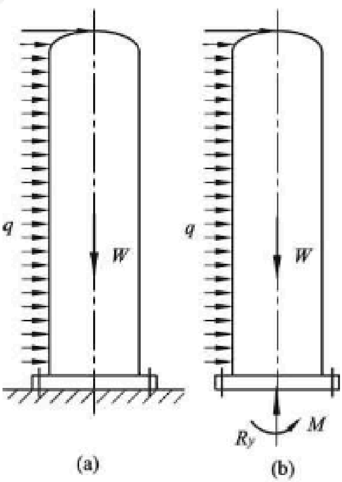


图 2－14

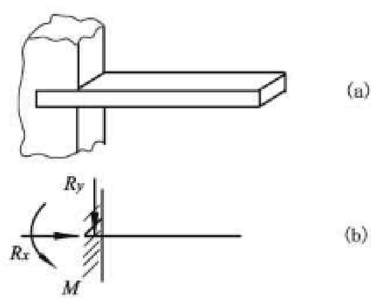


图 2－15

又如图 2－15 所示，当横梁或板梁等构件一端插入或嵌入建筑物里，是常见固定端约束。约束反力有三个方面的限制，用 $\boldsymbol{R}_x$、$\boldsymbol{R}_y$、M 表示。图 2－15(b)是横梁固定端约束的受力简图。

2.2.3 受力图

掌握了各种约束力的性质后，就可对物体进行受力分析，画出构件的受力图。画受力图一般步骤如下：

(1) 根据题意选取研究对象，解除约束，单独画出其简图。

(2) 画出作用在分离体上的主动力。

(3) 画出约束反力。凡解除约束处，根据约束性质逐一画上约束反力。如固定铰链一般画上一对互为垂直的约束反力；二力杆件和三力平衡汇交的约束反力都有其特点，必须注意，可以确定其中一或两力的方向；并首先画出二力杆件的约束反力。

(4) 在同一物系中，画相关构件的受力图时，要利用相关物体间作用力和反作用力的特点，由已知力的方向确定未知力的方向。

[例 2－1] 墙式起重装置由横梁 AB 和拉杆 CD 组成机架，其结构简图如图 2－16(a)所示。在 B 处有一小滑轮，吊索的一端经滑轮与重物 $\boldsymbol{W}$ 相连。拉动吊索另一端时，重物 $\boldsymbol{W}$ 则等速上升。A、C、D 三处均可视为铰链约束。忽略机架和小滑轮的重量，试画出横梁 AB 和拉杆 CD 的受力图。

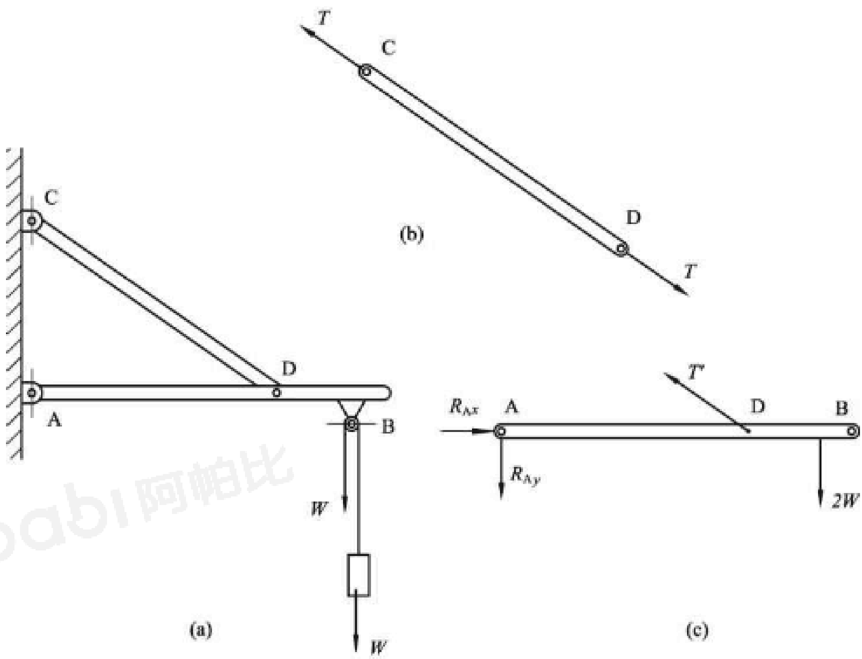


图 2-16

［解］ 先取 CD 杆为分离体：杆件 CD 除了 C、D 两端用铰链约束外，没有受到其他外力，而且处于平衡状态。因此，杆件 CD 为二力杆件，且为拉杆，其两约束处的反力必在其两作用点的连线上，大小相等，方向相反，其受力图如图 2-16(b)所示。

再取横梁 AB 为分离体：横梁的 B 点作用着主动力 $2\boldsymbol{W}$，在 A、D 两点有铰链约束。其中 A 端为固定铰链约束，其约束反力可用通过圆孔平面中心，且分别沿 x、y 轴的分力 $\boldsymbol{R}_{Ax}$、$\boldsymbol{R}_{Ay}$ 来表示，若方向不能确定，先假定为图 2-16(c)所示的方向，若假定反了，其计算结果是负值，可以纠正方向或认可负值及反方向。铰链 D 处的约束反力 $\boldsymbol{T}'$ 与拉杆 CD 杆的约束反力 $\boldsymbol{T}$ 是互为反作用力，见图 2-16(b)。因此，其作用方向亦可确定，如图2-16(c)所示。

［例 2-2］ 如图 2-17 所示，为一组合梁，忽略各杆自重，试画出曲梁 AB，直梁 BC 和整体的受力图。

［解］ 取曲梁 AB 为分离体：因自重不计，可视为二力杆件。$\boldsymbol{R}_A$ 和 $\boldsymbol{R}_B$ 必沿着 AB 连线方向，指向可以假定，如图 2-17(b)所示。

取直梁 BC 为分离体：其梁中间铰链的约束反力 $\boldsymbol{R}'_B$ 与 $\boldsymbol{R}_B$ 是作用力与反作用力，故指向相反。C 端为固定铰链约束，通常可用两个互为垂直的分力 $\boldsymbol{R}_{Cx}$、$\boldsymbol{R}_{Cy}$ 表示(图 2-17(d))。若考虑直梁 BC 仅受三力作用而平衡，且 $\boldsymbol{R}'_B$ 与 $\boldsymbol{F}$ 又相交，也可以按三力平衡汇交定律定出 $\boldsymbol{R}_C$ 的方向(图 2-17(c))。

取整体为研究对象：中间铰链 B 处的约束反力视为内力，不需画出。整体受力图如图 2-17(d)所示。

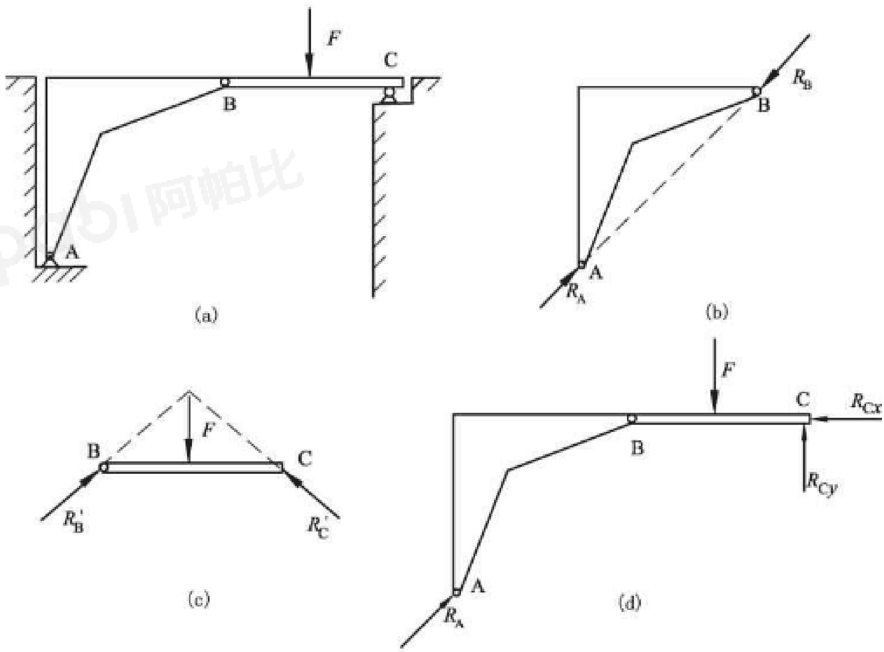


图 2－17

2.3 平面汇交力系的合成与平衡条件

平面汇交力系是指作用在物体上的力系位于同一平面内，且汇交于一点。如起吊钢管的吊钩上作用的力系就为平面汇交力系，所受的力都可汇交于吊钩这一点上。

平面汇交力系是最基本的力系之一，它是研究一般力系的基础。在掌握了物体受力情况的基础上，可对物体所受的基本力系进行分析计算。

2.3.1 平面汇交力系的合成

平面汇交力系的合成有两种方法，一是几何法，即平行四边形法则。二是解析法，其合力是以轴上的投影为基础计算的，又称投影法。

1. 投影法

在工程实际运算中，为方便起见，一般都是将力分解成直角坐标系坐标轴的方向，然后进行运算，这样可以避免许多繁杂的计算。力沿坐标轴的分解数值，可用投影法计算。如图 2－18 所示，设有一力 **F** 作用在 A 点，力的大小及方向为已知（力与 x 轴的夹角 θ）由三角学得知

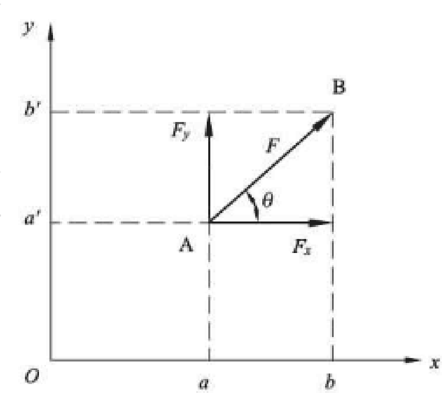


图 2－18

F 力在 x 轴上的分力 $F_x = F \cdot \cos\theta$

F 力在 y 轴上的分力　　$F_y = F \cdot \sin\theta$

由图 2-18 可知，力 **F** 分别在 x、y 轴上的投影 ab 和 $a'b'$ 的数值，就是力 **F** 分别在 x、y 轴上的分力，因此，力 **F** 在 x 轴和 y 轴上的分力 $\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$ 的数值，也可以用其在 x 轴和 y 轴上的投影来表示，即

$$F_x = F \cdot \cos\theta = ab$$

$$F_y = F \cdot \sin\theta = a'b'$$

分力的方向由投影来决定，其与坐标轴同向或反向（图 2-18），一般以正负号来区别分力方向与坐标轴的方向是否一致，规定分力与坐标同向者为正，反之为负。

若力在坐标轴方向的分力已知，则合力 **F** 的数值和方向亦可求得。由图 2-18 可推得

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \tag{2-1}$$

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} \tag{2-2}$$

2. 合力投影定理

设物体上作用着一平面汇交力系 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$，它们的合力为 **F**，现在来寻求分力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 与合力 **F** 在投影方面的关系。图 2-19 中 AB 和 AC 分别表示 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$。根据投影定义得

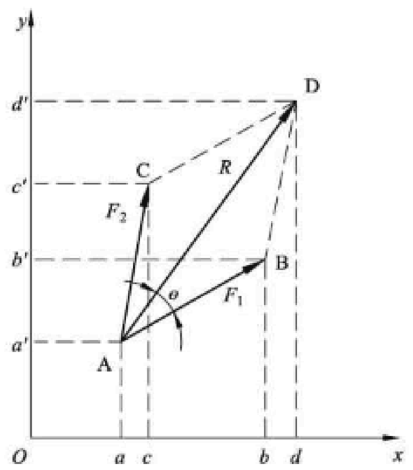


图 2-19

$$F_{1x} = ab \qquad F_{2x} = ac$$

$$F_{1y} = a'b' \qquad F_{2y} = a'c'$$

根据平行四边形法 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力为 **F**，图中用 AD 线表示。它在坐标轴上的投影为

$$F_x = ad \qquad F_y = a'd'$$

从图 2-19 可见

$AB /\!/ CD$，$AB = CD$ 它们在 x 轴上投影亦相等；

$AC /\!/ BD$，$AC = BD$ 它们在 y 轴上投影亦相等。

故 $F_x = ad = ab + bd = ab + ac = F_{1x} + F_{2x}$，

$F_y = a'd' = a'c' + c'd' = a'c' + a'b' = F_{1y} + F_{2y}$。

显然，上述关系可以推广到由 n 个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$，…，$\boldsymbol{F}_n$ 组成的平面汇交力系，即得出

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \sum F_{nx} \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = \sum F_{ny} \end{aligned}\right\} \tag{2-3}$$

式(2-3)为合力投影定理，其含意为：合力在任意轴上的投影，等于诸分力在同一轴上投影的代数和。由投影 $\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$ 可用平行四边形法则求得合力 **F**，其方向可由合力作用线与 x 轴的夹角 θ 表示，如图 2-19 所示。

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=\sqrt{\left(\sum F_{xx}\right)^2+\left(\sum F_{xy}\right)^2} \tag{2-4}$$

$$\tan\theta=\frac{F_y}{F_x}=\frac{\sum F_{xy}}{\sum F_{xx}} \tag{2-5}$$

2.3.2　平面汇交力系的平衡条件

平面汇交力系合成的结果是得到一个合力矢，因此，平面汇交力系保持平衡的必要和充分的条件为：该力系的合力矢等于零，即 $\boldsymbol{F}=0$，由式(2－4)可知平面汇交力系平衡的充要条件是

$$\begin{cases}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0\end{cases} \tag{2-6}$$

式(2－6)称为平面汇交力系平衡方程。它表示平面汇交力系平衡的条件是：力系中所有各力在互为垂直的两坐标轴上投影的代数和为零。平面汇交力系只有这两个独立的方程，故只能求解两个未知力。

[例 2－3]　图 2－20(a)为一管道支架，由杆 AB 与 CD 组成，管道通过拉杆悬挂在水平杆 AB 的 B 端，每个支架负担的管道重为 2 kN，不计杆重。求杆 CD 所受的力和支座 A 点的约束力。

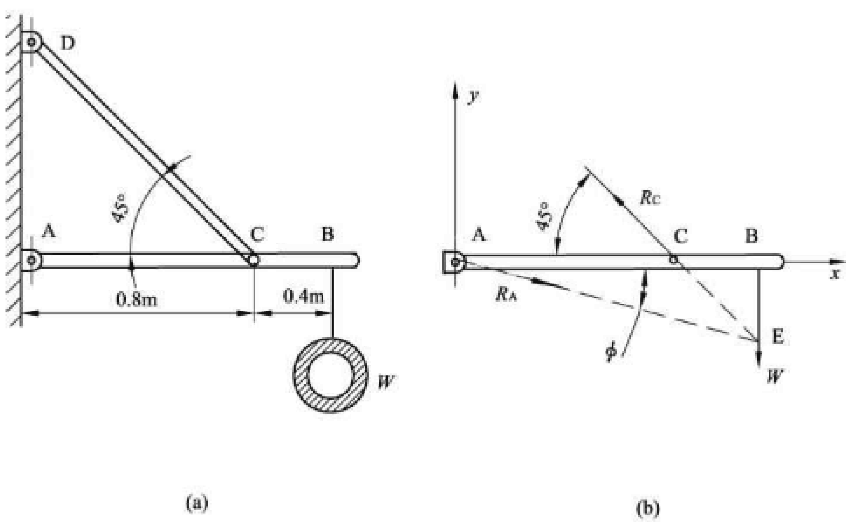


图 2－20

[解]　取水平杆 AB 为研究对象。作用于杆 AB 上的力有 B 端悬挂管道的吊杆拉力 $\boldsymbol{W}$，重量为 2 kN，铅垂向下；杆 CD 为二力杆件，它通过铰链 C 作用于杆 AB 的力 $\boldsymbol{R}_C$ 沿 C、D 连线，并设杆 CD 受拉力；固定铰链 A 的约束力 $\boldsymbol{R}_A$ 根据三力平衡汇交定理得知是沿 A、E 连线的方向指向假设如图 2－20(b)所示。

以 ϕ 表示约束力 $\boldsymbol{R}_A$ 与 AB 的夹角，由△EBC 和△EBA 得

$$EB = BC = 0.4\ \mathrm{m}$$

则

$$\tan\phi = \frac{EB}{AB} = \frac{1}{3}$$

列平衡方程得

$$\sum F_x = 0 \qquad R_A\cos\phi - R_C\cos 45° = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad -R_A\sin\phi + R_C\sin 45° - W = 0$$

解得

$$R_A = R_C\frac{\cos 45°}{\cos\phi} = 4.24\times\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = 3.16\ \mathrm{kN}$$

$$R_C = \frac{W + R_A\sin\phi}{\sin 45°} = \frac{2 + 3.16\times\frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4.40\ \mathrm{kN}$$

计算结果 $\boldsymbol{R}_C$ 和 $\boldsymbol{R}_A$ 为正值，说明所假设两力指向即为两力的实际指向。

[例 2-4]　图 2-21(a)所示为一增力机构。在铰链 B 上作用一主动力 $\boldsymbol{P}=1$ kN，各杆自重和各处摩擦不计。已知杆 $AB=BC=l=200$ mm，高 $h=28$ mm。试求工件所受的压紧力 $\boldsymbol{F}$。

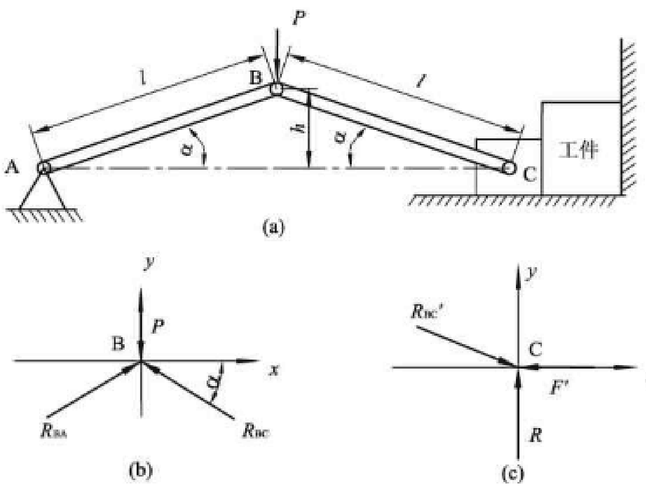


图 2-21

[解]　因主动力 $\boldsymbol{P}$ 作用于 B 点，而压紧力 $\boldsymbol{F}$ 作用于 C 点，故需分别讨论 B、C 两点的平衡条件。

先讨论 B 点的平衡：画出 B 点的受力图，见图 2-21(b)。由平衡方程式

apabi 阿帕比

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{BA}\cos\alpha - R_{BC}\cos\alpha = 0$$

得
$$R_{BA} = R_{BC}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad 2R_{BA}\sin\alpha - P = 0$$

得
$$R_{BA} = \frac{P}{2\sin\alpha}$$

再讨论 C 点的平衡：画出 C 点的受力图，如图 2-21(c)所示。根据平衡方程式(2-6)

因为
$$\tan\alpha = \frac{h}{\sqrt{l^2 - h^2}}$$

所以
$$F' = R'_{BC}\cdot\cos\alpha = \frac{P}{2h}\sqrt{l^2 - h^2} = 3.54\ \text{kN}$$

由此式可知压力 $\boldsymbol{F}$ 随几何尺寸 h 而变化，h 愈小则压力 $\boldsymbol{F}$ 愈大。

2.4 平面力偶系的合成与平衡条件

2.4.1 力矩与合力矩定理

1. 力对点的矩

实践告诉我们：力不仅能使物体移动，还能使物体绕某一点转动，如我们常用的扳手、杠杆等机械，就是利用力的转动效果。如图 2-22(a)所示，为一扳手拧螺母的情况。由经验可知，扳手拧螺母时，螺母的转动效果除与力的大小和方向有关，还与点 O 到力作用线的距离 d 有关，该距离越大转动效果越明显。

$$\sum F_x = 0 \qquad R'_{BC}\cos\alpha - F' = 0$$

得
$$F' = R'_{BC}\cos\alpha = \frac{P}{2\tan\alpha}$$

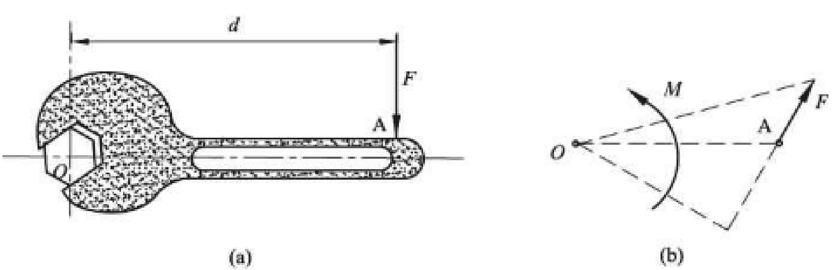


图 2-22

可见，转动效果与力及到转动点的距离有关，可以用力对点的矩这样一个物理量来衡量力使物体转动的效果。

力 $\boldsymbol{F}$ 对某一点 O 的矩(图 2-22(b))，等于力的大小与点 O 到力作用线距离 d 的乘积，

并冠以适当的正负号。记作

$$M_O(F) = \pm Fd \tag{2-7}$$

式中，点 O 称为矩心；d 称为力臂；乘积 Fd 表示力使物体绕点 O 的转动效果；正负号表明力矩 $M_O(\boldsymbol{F})$ 是一个代数量，用它表示物体的转向。一般规定：使物体逆时针转动的力矩为正，反之为负。

按照上述定义，图 2-22(b) 所示的力 F 对 O 点的矩为正值。力矩的单位是牛顿·米(N·m)。

由定义可知，力对点的矩与矩心有关，同平面上的同一个力对不同点的矩是不同的。因此，讨论、计算力矩时必须指明矩心。同时必须指出：力对点的矩，不仅局限于对实际转动点取矩，如图 2-22(a)，也可抽象为对物体上任意点取矩的概念。

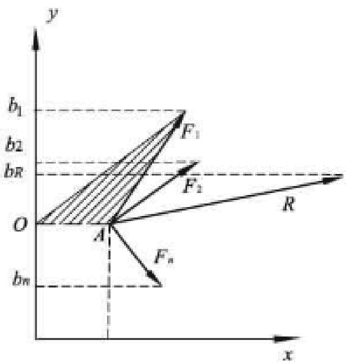


图 2-23

2. 合力矩定理

定理：平面汇交力系的合力对于平面内任一点的矩等于所有各分力对于该点的矩的代数和。

证明：如图 2-23 所示，设在刚体上的 A 点，作用一平面汇交力系 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$。$\boldsymbol{R}$ 为该力系的合力。任选一点 O 为矩心，通过点 O 并垂直 OA 作纵轴 Oy。图中的 $Ob_1, Ob_2, \cdots, Ob_n$ 和 Ob_r 分别等于力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 和 $\boldsymbol{R}$ 在 Oy 轴上的投影 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 和 $\boldsymbol{R}_y$。现分别计算 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 和 $\boldsymbol{R}$ 各力对点 O 的力矩。

由图 2-23 可以看出各力在 Oy 轴上的分力对点 O 有力矩：

同理可得：

$$\left.\begin{array}{l} M_O(F_1) = Ob_1 \cdot OA = Y_1 \cdot OA \\ M_O(F_2) = Ob_2 \cdot OA = Y_2 \cdot OA \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ M_O(F_n) = Ob_n \cdot OA = Y_n \cdot OA \\ M_O(R) = Ob_r \cdot OA = R_y \cdot OA \end{array}\right\} \tag{2-8}$$

根据前面合力投影定理

$$R_y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

将上式两边乘以 OA 得

$$R_y \cdot OA = Y_1 \cdot OA + Y_2 \cdot OA + \cdots + Y_n \cdot OA$$

将式(2-8)代入等号两边得

$$M_O(R) = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \cdots + M_O(F_n)$$

即

$$M_O(R) = \sum_{i=1}^{n} M_O(F_i) \tag{2-9}$$

定理得证。由此可见，合力矩定理建立了合力与分力对同一点的矩的关系。

2.4.2　力偶与力偶矩

1. 力偶

在生活和生产实践中，经常遇到一个物体上受到一对大小相等、方向相反、不共作用线的平行力的作用。如用两个手指拧动水龙头，汽车司机转动方向盘，化工厂开启或关闭管道闸门时，操作工人用一对平行力转动手轮，见图 2－24，这一对大小相等、方向相反、不共作用线的平行力称为力偶，通常用一对力($\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}'$)表示。力偶对物体的作用效果与力矩相同，也是使物体转动。凡能主动引起物体转动状态或转动趋势改变的力偶，称主动力偶。图 2－24 中的($\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}'$)力偶便为主动力偶。

力偶的两个力，虽然大小相等、方向相反，但不共作用线，所以不满足二力平衡条件，它们不成为平衡力系。

apabi阿帕比

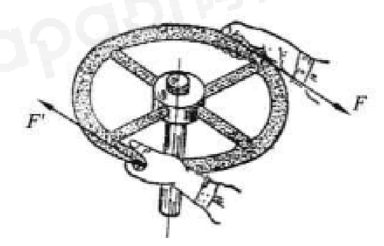


图 2－24　力偶转动

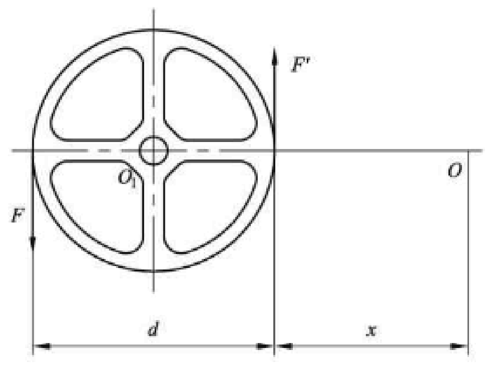


图 2－25

2. 力偶矩

力偶是由两个力组成，力偶对物体的作用效果，仅与力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和力臂 d 的长短有关，而与力到某点的距离无关(力臂指两力作用线之间的垂直距离，如图 2－25)。因此，度量力偶对物体的转动效果，可以用力的数值 $\boldsymbol{F}$ 与力臂的数值 d 的乘积来表示，这个乘积称为力偶矩，用符号 $M(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')$ 表示，记作

$$M(\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{F}') = \pm\ Fd \tag{2-10}$$

式中乘积 $\boldsymbol{F}d$ 表示力偶矩使物体转动的效果；正负号表示力偶矩的转动方向，通常规定：逆时针为正，反之为负。

实质上，力偶矩是力偶中两个力分别对平面上任意点的力矩的代数和。

证明如下：如图 2－25 所示，在力偶($\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}'$)的作用面内任取一点 O 为矩心，设 O 点至力偶中的一力 $\boldsymbol{F}'$ 的距离为 x，至另一力 $\boldsymbol{F}$ 的距离便为 $x+d$，则力偶的两个力对 O 点力矩的代数和为

$$M_O(\boldsymbol{F}) + M_O(\boldsymbol{F}') = \boldsymbol{F}(d+x) - \boldsymbol{F}'x = Fd \tag{2-11}$$

由上述证明可知，力偶对其作用平面内任意一点的矩，与该点的位置无关，其力偶矩的数值只与该力偶中力的大小及两力之间的距离有关，等于它们的乘积 $\boldsymbol{F}d$，转向就是原力偶

的方向。这说明力偶在其作用平面内可以任意移动，而不改变力偶矩对刚体的转动效应。这一特点与力矩是有区别的。

3. 等效力偶

由力偶的作用效果可知，其效应取决于力偶矩的大小、力偶的转向和作用平面，这三点称为力偶的三要素。所以，凡三要素相同的力偶，称为等效力偶。

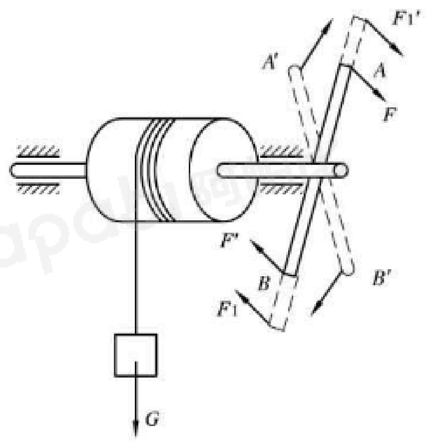


图 2－26

在工程实践和生活中，经常能见到力偶等效的例子。如图 2－26 所示，为一绞车运转情况。当该绞车在其绞柄上受到主动力偶（$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}'$）作用时，它即朝着顺时针转向转动。实践证明，如果把绞柄由 AB 位置转到 $A'B'$ 位置，或者将绞柄用套杆加长，在其套杆两端另加力偶（$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_1'$），只要力偶矩的大小和转向不变，绞车的运转状态也不会改变。由此可见，只要力偶矩的大小和转向不变，力偶的位置可在其作用面内任意移动或转动，也可同时任意改变力的大小和力臂的长短，而不影响该力偶对刚体的效应。因此，力偶（$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}'$）与（$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_1'$）为一对等效力偶。

力偶的表示形式可有两种：(1) 力和力臂表示，如图 2－27(a)、(b)所示；(2) 一端带箭头的弧线表示，如图 2－27(c)所示。它们的力偶矩都是 200(N · m)，为等效力偶。

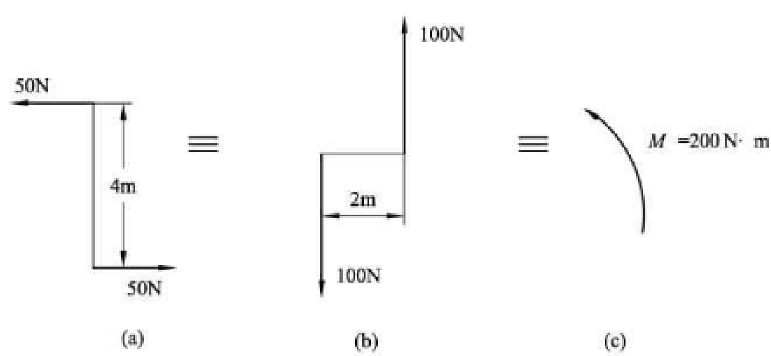


图 2－27

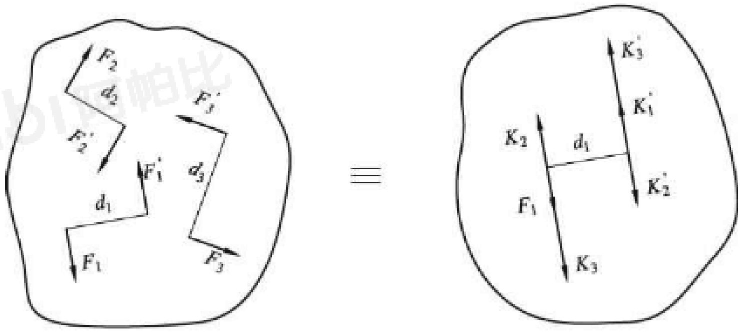
2.4.3 力偶系合成与平衡条件

1. 力偶系合成

作用在同一物体上的一群力偶，且在同一平面上，称为平面力偶系，平面力偶系也是最基本的力系之一。

力偶矩如同力矩一样，同样可以合成。设有一平面力偶系（$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_1'$）、（$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_2'$）和（$\boldsymbol{F}_3$，$\boldsymbol{F}_3'$）它们的力臂分别为 d_1、d_2 和 d_3，如图 2－28(a)所示。

以 M_1、M_2、M_3 分别表示各力偶之矩，即有



(a)　　(b)

图 2-28

$$M_1 = F_1 d_1,\quad M_2 = F_2 d_2,\quad M_3 = F_3 d_3$$

现在来求它们的合成。按力偶等效特性，从这三个力偶中任选两个力偶，如($\boldsymbol{F}_2$,$\boldsymbol{F}_2'$)，($\boldsymbol{F}_3$,$\boldsymbol{F}_3'$)，改变它们的力臂和力的大小，分别用以 d_1 为臂的等效力偶($\boldsymbol{K}_2$,$\boldsymbol{K}_2'$)和($\boldsymbol{K}_3$,$\boldsymbol{K}_3'$)来代替，这两个等效力偶的力分别为

$$K_2 = \frac{M_2}{d_1},\quad K_3 = \frac{M_3}{d_1}$$

将上述两个等效力偶都移到力偶($\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_1'$)上去(图 2-28(b))，力偶臂两边的力合成为合力 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{R}'$，其值为

$$R = R' = F_1 + K_2 - K_3$$

由此得到一个新力偶($\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}'$)，它即为原有三个力偶的合力偶，其矩为

$$M = Rd_1 = (F_1 + K_2 - K_3)d_1 = M_1 + M_2 - M_3$$

若一平面力偶系有更多的力偶，则可用同法合成，得

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \tag{2-12}$$

上式指出，在同平面内的任意个力偶可以合成为一个合力偶，合力偶矩等于各个分力偶矩的代数和。

2. 力偶系平衡条件

物体在力偶的作用下可发生转动，要使物体不发生转动而处于平衡状态，则作用于物体上和力偶应为零。它表明，使刚体顺时针转动的力偶矩与逆时针转动的力偶矩相等，转动效应互相抵消。因此，平面力偶系平衡的必要和充分条件是：所有各力偶矩的代数和等于零，即

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0 \tag{2-13}$$

2.5　平面任意力系的合成与平衡条件

所谓平面任意力系，就是各力的作用线在同一平面内且呈任意分布的力系，简称平面力系。例如我们经常遇到物体所受的力线在同一平面上，但既不在近处汇交于一点，又不全部互相平行。还有些问题虽不属于平面任意力系，但是经过适当简化，仍可以归结为平面任意力系来处理，因此，研究平面任意力系的问题，具有普遍意义。

由于平面任意力系比较复杂，为便于研究，必须经过简化、合成。为此，这里引入一种简化方法——力线的平移定理。根据这个定理，平面任意力系可以转换成两个基本力系：平面汇交力系和平面力偶系。

2.5.1　力线的平移定理

定理：可以把作用在刚体上 A 点的力 $\boldsymbol{F}$ 平移到任意一点 B，但必须同时附加一个力偶，这个附加力偶的矩等于原来的力 F 对新作用点 B 的矩。

证明：设有一力 $\boldsymbol{F}$ 作用于刚体上一点 A(图 2－29(a))，在刚体 B 点加一对平衡力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_1'$，其大小和原力 $\boldsymbol{F}$ 相同，且平行于力 $\boldsymbol{F}$(图 2－29(b))，显然，三个力 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_1'$ 组成的新力系与原来的一个力 $\boldsymbol{F}$ 等效。三力中，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}_1'$ 组成一个力偶，其臂为 d，其力偶矩恰好等于原力 $\boldsymbol{F}$ 对新点 B 的矩，即

$$M = F \cdot d$$

剩下的力 $\boldsymbol{F}_1$，即为作用线由 A 点平移到 B 点的力 $\boldsymbol{F}$。现在刚体 B 点上作用着一个力 $\boldsymbol{F}_1$ 和一个力偶 M(图 2－29(c))，这个力偶称为附加力偶，它们对刚体的作用效应与力 $\boldsymbol{F}$ 在原始位置相同。因此，力线平移定理得到证明。

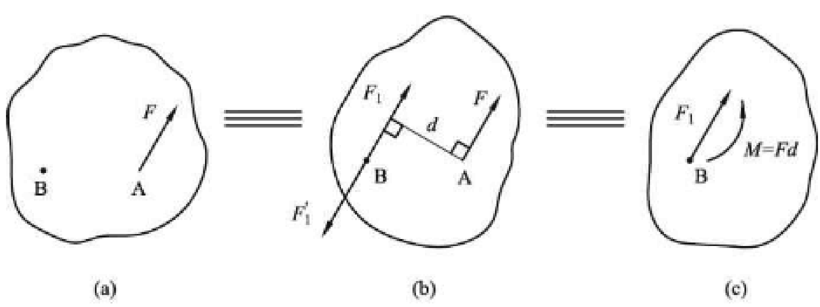


图 2－29

2.5.2　平面一般力系向已知点的简化

根据力线的平移定理，可以对平面任意力系进行简化。将平面任意力系的各力平移到作用面内任意一点 C，从而将原力系简化为一个平面汇交力系和一个平面力偶系。这种做法，称为平面任意力系向作用面内任一点 C 的简化，点 C 称为简化中心。

图 2－30(a)表示一个任意刚体，在它上面作用一个平面任意力系，假定为四个力：$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_4$。现在刚体上任取一点 C，作为简化中心，将此四个力平移到 C 点，简化得到一个汇交于 C 点的平面汇交力系和一个平面力偶系(图 2－30(b))。由此可见，原来的平面任意

力系与现在的一个平面汇交力系和一个附加力偶系等效。

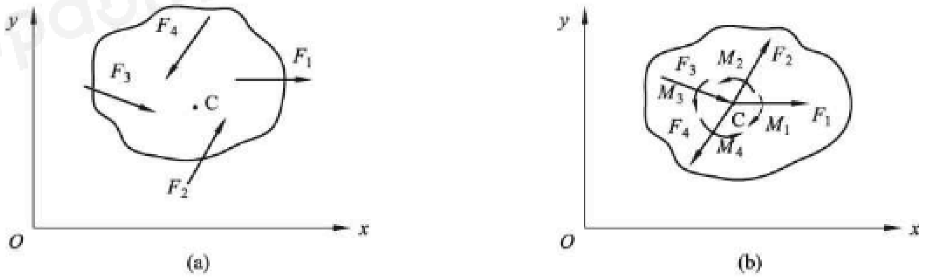


图 2－30

根据汇交力系和力偶系的合成原理，简化到一点的两个基本力系可用下式表示

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \\ M_C=\sum_{i=1}^{n}M_C \end{cases} \qquad (2-14)$$

上式中，合力 $\boldsymbol{R}$ 是矢量求和，合力偶矩 M_C 是代数量求和。

2.5.3　平面一般力系的平衡条件

平面任意力系简化的结果是得到两个基本力系——平面汇交力系和平面力偶系，因此，若这两个基本力系平衡，则原平面任意力系亦平衡；反之，若该平面任意力系使刚体处于平衡状态，则等效的基本力系的合力矢与合力矩必定等于零。

也就是说，平面任意力系平衡的充分和必要条件是：合力矢、合力偶矩分别等于零。根据合力投影定理和力偶系合成原理，平面任意力系平衡的充分和必要条件可表示为（简写）：

$$\left.\begin{aligned} \sum\boldsymbol{F}_x&=0 \\ \sum\boldsymbol{F}_y&=0 \\ \sum M_C&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (2-15)$$

上式为平面任意力系的平衡方程，由该组方程可以解出平面任意力系中的三个未知量。但应注意，在建立方程时，必须列出三个独立的方程，否则，无法求得三个未知量。同时必须注意，上式中的 C 点为力系的简化中心，也即列方程式时，可看作各方对该点的矩心。该矩心点可以是任意的、虚拟的，并不真的要将力移到该点。

求解平面任意力系问题的步骤，可按如下进行：

（1）确立研究对象，取分离体，作出受力图；

（2）建立适当的坐标系，列出平衡方程；

（3）解平衡方程，求出未知量。

注意在建立坐标系时，应根据具体情况，使坐标轴的方位尽量与较多的力成平行或垂直，以使各力的投影计算简化；力矩中心尽量选在未知力较多的点上，以简化力矩的计算。

［例 2－5］　图 2－31 所示的水平横梁 AB，在 A 端以固定铰链固定，在 B 端为一活动铰

链支座。梁的长度为 $4a$，梁重 P，重心在梁的中心点 C，在梁的 AC 段上受均布载荷 q 的作用，在梁的 BC 段上受力偶 M 作用，力偶矩 $M=Pa$。试求 A 和 B 处的支座反力。

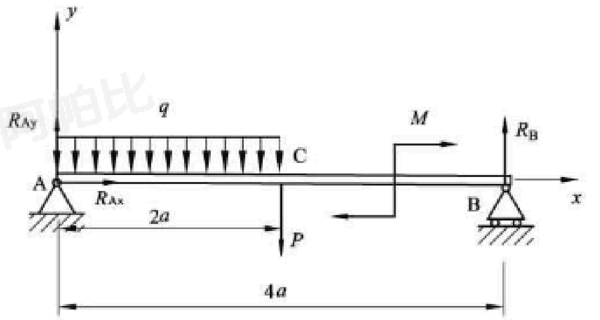


图 2－31

［解］ 取横梁 AB 为研究对象。它所受的主动力有：(图 2－31)均布载荷 q，重力 $\boldsymbol{P}$ 和力偶矩 M。它所受的约束反力有：铰链 A 的约束反力，通过 A 点，但方向不定，故用两个分力 $\boldsymbol{R}_{Ax}$、$\boldsymbol{R}_{Ay}$ 表示；活动铰支座 B 处约束反力 $\boldsymbol{R}_B$，垂直向上。

取 A 点为矩心和坐标原点，列出平衡方程：(图 2－31)

$$\sum M_A = 0 \qquad R_B \times 4a - M - P \times 2a - q \times 2a \times a = 0$$

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad R_{Ay} - q \times 2a - P + R_B = 0$$

解上列方程，得：

$$R_B = \frac{3}{4}P + \frac{1}{2}qa$$

$$R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{P}{4} + \frac{3}{2}qa$$

以上解题，矩心和原点取在 A 点，是便于解题，因 A 点有两个未知方向的未知约束反力。这是一种解题技巧。经过受力分析、计算，求出了作用在横梁 AB 上的全部约束反力的大小和方向。同时，我们发现，当主动力中没有 x 方向力时，其约束反力方向也不会存在 x 方向的力，所以，可以省略列 x 方向的方程。

［例 2－6］ 列管式换热器(图 2－32(a))总长为 7 m，总重 91 kN，支座 A、B 的距离为 4 m，支座 A 相当于固定铰链支座，支座 B 相当于活动铰链支座。试计算支座 A、B 所受的约束反力。

［解］ 对于卧式容器、换热器，为了便于受力分析和强度计算，把整个换热器(包括支座)简化成图 2－32(b)所示，受均布载荷 q 作用的受力模型。取整个换热器为研究对象画受力图，换热器所受的主动力为自重及料液组成的均布载荷 q($q=91\ \text{kN} \div 7\ \text{m} = 13\ \text{kN/m}$)，所

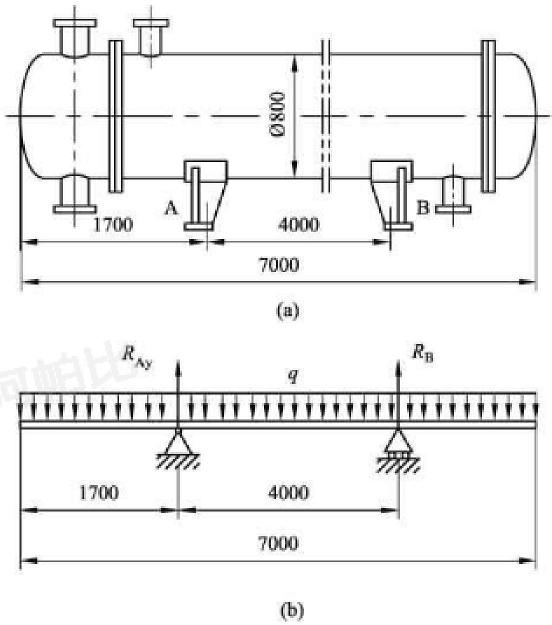


图 2-32

受的约束反力为基础对支座 A、B 的约束反力 $\boldsymbol{R}_{Ax}$、$\boldsymbol{R}_{Ay}$、$\boldsymbol{R}_B$。

根据图 2-32(b)所示的受力图，列出如下平衡方程

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \qquad -ql \times \left(\frac{7}{2} - 1.7\right) + R_B \times 4 = 0$$

所以
$$R_B = \frac{ql(3.5 - 1.7)}{4} = \frac{13 \times 7 \times 1.8}{4} = 41\ \text{kN}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad R_{Ay} + R_B - ql = 0$$

所以
$$R_{Ay} = ql - R_B = 13 \times 7 - 41 = 50\ \text{kN}$$

$\boldsymbol{R}_{Ay}$ 也可由方程 $\sum M_B = 0$ 求得

$$ql \times \left(\frac{7}{2} - 1.3\right) - R_{Ay} \times 4 = 0$$

所以
$$R_{Ay} = \frac{ql(3.5 - 13)}{4} = \frac{13 \times 7 \times 2.2}{4} = 50\ \text{kN}$$

可见由 $\sum M_B = 0$，或由 $\sum F_y = 0$ 所求出的 $\boldsymbol{R}_{Ay}$ 相同。

[例 2-7] 塔式起重机如图 2-33 所示。其中机身重心位于 C 处，自重 $\boldsymbol{P}_1 = 800$ kN，起吊重力 $\boldsymbol{P}_2 = 300$ kN 的重物。几何图形如图 2-33 所示，其中 $a = 5$ m，$b = 3$ m，$l = 8$ m，$e =$

1 m。试求：(1) 为使起重机满载和空载都不致翻倒，平衡配重 $\boldsymbol{P}_3$ 应取何值？(2) 若取 $\boldsymbol{P}_3=500\ \text{kN}$，则满载时导轨 A、B 所受压力各为多少？

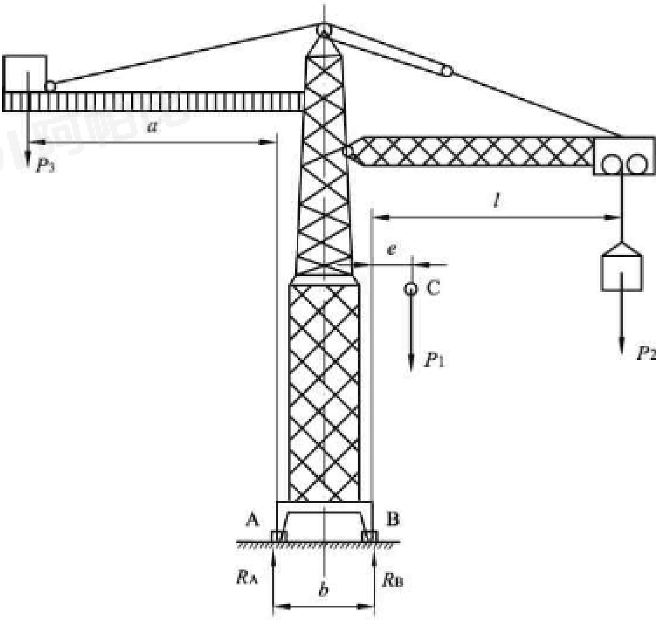


图 2－33

［解］ 取整个起重机为研究对象，受力分析后得知：可将该机构简化成一平面平行力系的问题。为使起重机不翻倒地而始终处于平衡状态，主动力 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$、$\boldsymbol{P}_3$ 和约束反力 $\boldsymbol{R}_A$、$\boldsymbol{R}_B$ 必须满足平衡条件。

(1) 为使起重机不翻倒，应分别考虑满载和空载时起重机处于极限平衡状态的情况。

满载时，机身可能绕 B 点转动到即将翻倒的极限平衡状态。此时应有 $R_A=0$，即 A 轮与地面将要脱离接触。这时求出的平衡配重应为最小值 $P_{3\min}$。

可列平衡方程：

$$\sum M_B=0 \qquad -P_2 l-P_1 e+P_{3\min}(a+b)=0$$

解得

$$P_{3\min}=\frac{P_2 l+P_1 e}{a+b}=\frac{300\times 8+800\times 1}{5+3}=400\ \text{kN}$$

空载时，起重机可能绕 A 点向左翻倒，这时的极限平衡状态，应有 $R_B=0$，由此可求得平衡配重的最大值 $P_{3\max}$。

由 $\sum M_A=0$ 得

$$-P_1(b+e)+P_{3\max}a=0$$

解得

$$P_{3\max}=P_1\left(\frac{b+e}{a}\right)=800\left(\frac{3+1}{5}\right)=640\ \text{kN}$$

所以为使起重机不致倾倒，平衡配重应满足

$$400\ \text{kN} \leqslant P_3 \leqslant 640\ \text{kN}$$

（2）由题意：$P_3 = 500$ kN 起重机可以保持平衡，求 $\boldsymbol{R}_A$、$\boldsymbol{R}_B$。可取 A 点为原点、矩心列方程：

$$\sum F_y = 0 \qquad R_A + R_B - P_1 - P_2 - P_3 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \qquad R_B b + P_3 a - P_1(b+e) - P_2(b+l) = 0$$

所以
$$R_B = \frac{P_1(b+e) + P_2(b+l) - P_3 a}{b}$$

$$= \frac{800(3+1) + 300(3+8) - 500 \times 5}{3} = 1\ 333.3\ \text{kN}$$

所以
$$R_A = P_1 + P_2 + P_3 - R_B$$

$$= 800 + 300 + 500 - 1\ 333.3 = 266.7\ \text{kN}$$

解本题(2)时，平面平衡方程式不是唯一的，也可由 $\sum M_A = 0$ 和 $\sum M_B = 0$ 两个方程式求出 $\boldsymbol{R}_A$、$\boldsymbol{R}_B$。

［例 2－8］ 在图示鼓轮构架中(图 2－34(a))，已知 $Q=600$ N，鼓轮 C 的小半径 $r=10$ cm，大半径 $R=20$ cm。试求支座 A、D 处的约束反力。

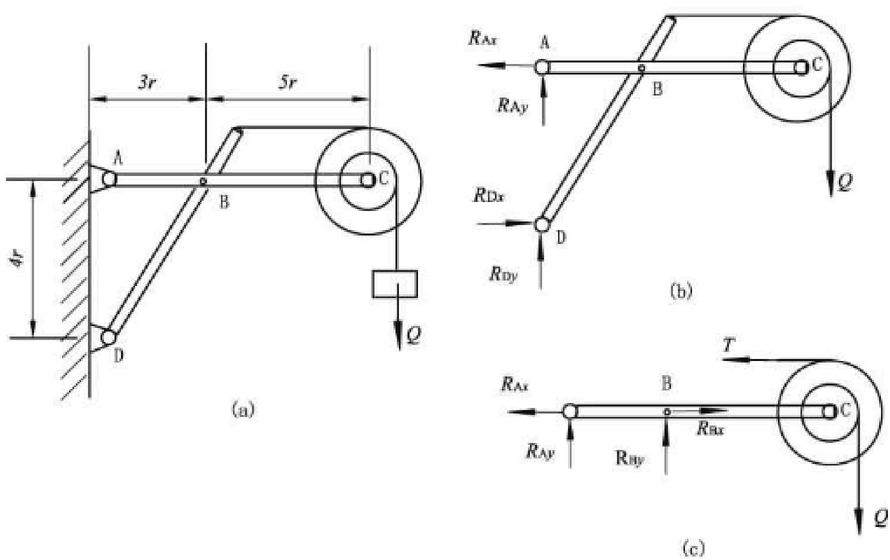


图 2－34

［解］ 两根杆件用 A、B、D 三个铰链支承。对于此类平面力系，可先从整体求出一部分力，再从分部上求得另一部分力。

整体结构(图 2－34(b))虽有 4 个未知量，但未知量只有两个作用点，即 R_{Ay}、R_{Dy} 成一线。

由 $\sum M_A = 0$ $R_{Dx} \times 4r - Q \times 9r = 0$

得 $R_{Dx} = \dfrac{9}{4}Q = 1\ 350\ \text{N}$

由 $\sum F_x = 0$ $-R_{Ax} + R_{Dx} = 0$

得 $R_{Ax} = R_{Dx} = 1\ 350\ \text{N}$

梁 AC 及鼓轮(图 2-34(c)),假如 R_{Ax} 还未求得,则也有 4 个未知量,但 R_{Ax} 与 R_{Bx} 成一线。

由 $\sum M_B = 0$ $-R_{Ax} \times 3r - Q \times 6r + T \times 2r = 0$

其中,$T = \dfrac{1}{2}Q$,代入得

$$R_{Ay} = \frac{1}{3}(2T - 6Q) = -\frac{5}{3}Q = -1\ 000\ \text{N}$$

由整体图 $\sum F_y = 0$ $R_{Dy} + R_{Ay} - Q = 0$

得 $$R_{Dy} = Q - R_{Ay} = \frac{8}{3}Q = 1\ 600\ \text{N}$$

本题若取斜梁 BD 为研究对象,虽然也只有 4 个未知量,但缺少共线的力。故不论以研究体的哪一点取矩,至少有两个未知力出现,所以,无法直接求解。

思考题

2-1 力的作用效果由哪些因素决定?如何用图来表示力?

2-2 如何理解刚体的概念?什么情况下把物体看作刚体?

2-3 平面力系中两个基本力系是什么?能否再进行简化合并?

2-4 大小相等、方向相反,且作用线重合的两个力是否一定处于平衡?

2-5 何谓二力构件?二力构件一定是直杆形的吗?如何确定二力构件的受力情况?

2-6 何谓三力平衡汇交定律?如已知其中两力的方向,如何确定第三力的方向?

2-7 力的可传性原理的运用有否条件限制?为什么?

2-8 力的合力用什么方法求得?为什么?合力是否一定比分力大?

2-9 一个力的正交分力与它在 x、y 轴上的投影有何异同?

2-10 力系的合力与力系的平衡力有什么区别,有什么联系?

2-11 何谓约束?何谓约束反力?常见的约束有哪几种?约束反力的特性如何?

2-12 何谓力矩?何谓力臂?力矩的物理效果是什么?如何衡量它?如何标记?

2-13 何谓力偶?力矩与力偶矩有何异同?

2-14 力矩能与力偶矩平衡吗?为什么?

2-15 力偶中的两个力能否平衡?能否合成合力?为什么?

2-16 力偶在平面内可以任意移动,有否前提条件?为什么?