第 8 章（之 1）

第 37 次作业

教学内容：§8.1.1 无穷级数的基本概念　　§8.1.2 收敛级数的基本性质

1．选择题：

*（1）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $S_n=\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)$，其一般项 u_n 是　（　　）

（A）$\frac{n(n+1)}{2}$；　（B）$\frac{n(n-1)}{2}$；　（C）$\frac{(n-1)(n+1)}{2}$；　（D）$\frac{n^2}{2}$．

答：(D)

**（2）设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，其和为 S，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1}-a_{n+2})$ 收敛于　（　　）

（A）$S+a_1$；　（B）$S+a_2$；　（C）$S+a_1-a_2$；　（D）$S+a_2-a_1$．

答：（ B ）

*（3）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其和 $S\neq 0$，则下述结论成立的是　（　　）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-S)$ 收敛；（B）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 收敛；（C）$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 收敛；（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|u_n|}$ 收敛.

答：（ C ）

**（4）指出下列命题中之正确者为　（　　）

（A）若 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；　（B）若 $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（C）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$；　（D）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\lim_{n\to\infty} u_n=a\neq 0$．

答：（ C ）

*2．若 $\lim_{n\to\infty} u_n=+\infty, u_n>0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{u_n}}-\frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}}\right)$ 之和为______ ．

答：$\frac{1}{\sqrt{u_1}}$

**3．设$\{a_n\}$单调减少，且收敛于 0，问级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是否收敛？

答：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$不一定收敛。例如$\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}$都单调减少而收敛于 0，但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛.

4．利用定义判断下列级数的敛散性，若收敛则求其和：

*（1）$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots$；

解：级数的部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\ &= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\ &= (\sqrt{n+1}-1) \end{aligned}$$

所以$\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$，故级数为发散.

*（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$.

解：级数的一般项

$$u_n=\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

级数部分和

$$\begin{aligned} S_n &= (\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!})+(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})+\cdots+(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}) \\ &= 1-\frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

所以$\lim_{n\to\infty} S_n=1$，即此级数收敛，且其和为1.

5．判断下列级数的敛散性：

**（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{6}$；

解：$u_n=\sin\frac{n\pi}{6}$，

因 $\lim_{k\to\infty}u_{12k+3}=\lim_{k\to\infty}\sin\frac{(12k+3)\pi}{6}=1\neq 0$

故 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{6}$ 发散.

**（2） $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$；

解：记 $u_n=n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$，由于 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=1\neq 0$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

**（3） $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a}{b(k+6)}$（其中$a,b$为异于零的实数）.

解：由于调和级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散，所以 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+6}$ 也发散，因此 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a}{b(k+6)}$ 发散.

***6．求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+(-1)^{n+1}}{3^n}-\frac{4}{4n^2-1}\right)$ 之和.

解：已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1,\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$

又 $\frac{4}{4n^2-1}=\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}$，可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2-1}$ 的部分和

$$S_n=\left(2-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}\right)=2-\frac{2}{2n+1}$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{2n+1}\right)=2$， 因此原级数收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+(-1)^{n+1}}{3^n}-\frac{4}{4n^2-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2-1}$$
$$=1+\frac{1}{4}-2=-\frac{3}{4}.$$

第 8 章（之 2）

第 38 次作业

教学内容：§8.1.3 正项级数的性质及其敛散性的判别法

1．选择题：

＊（1）下列级数中，发散的是（　）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$；（B）$\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$；（C）$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}\ (x>0)$；（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\frac{n}{2}}}$．

答：（ B ）

＊（2）下列级数中，收敛的是（　）

（A）$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\cdots$；

（B）$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+4}+\cdots+\frac{1}{1+2(n-1)}+\cdots$；

（C）$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots$；

（D）$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$．

答：（ D ）

＊（3）下列级数中，发散的是（　）

（A）$1+\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}+\cdots$；

（B）$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$；

（C）$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$；

（D）$\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\cdots+\frac{1}{1000n+1}+\cdots$．

答：（ D ）

2. 判断下列级数的敛散性：

＊（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n}{8^n+9^n}$；

解法一：由于 $\dfrac{10^n}{8^n+9^n}>\dfrac{10^n}{2\cdot 9^n}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{10}{9})^n$， 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}(\dfrac{10}{9})^n$ 发散，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n}{8^n+9^n}$ 发散.

解法二：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{10^{n+1}}{8^{n+1}+9^{n+1}}}{\dfrac{10^n}{8^n+9^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10(8^n+9^n)}{8^{n+1}+9^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10((\frac{8}{9})^n+1)}{8(\frac{8}{9})^n+9}=\dfrac{10}{9}>1$，由比值判别法知：

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n}{8^n+9^n}$ 发散.

＊（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$；

解：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^2}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt[n]{n})^2}{2}=\dfrac{1}{2}<1$

由根值判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$ 收敛.

＊（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{n}{3n+2})^n$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\dfrac{n}{3n+2})^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n+2}=\dfrac{1}{3}<1$，

由根值判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{n}{3n+2})^n$ 收敛.

＊＊（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}(a>0,\ a\neq e)$；

解：由比值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{a^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{an^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{a}{e}$$

可见当 $0<a<e$ 时，级数收敛；当 $a>e$ 时，级数发散.

**（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$；

解：记 $u_n=\frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$，则 $u_n\le\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}$,

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

**（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n$；

解一：$u_n=\left(\arctan\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n<\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$， 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$ 收敛,

故原级数收敛.

解二： $u_n=\left(\arctan\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n>0$,

由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\arctan\frac{n^2}{n^2+1}=\frac{\pi}{4}$，故而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

**（7）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}$；

解：记 $u_n=\frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}>0$，则 $\frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}>\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$,

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故所论级数发散.

**（8）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n+3^n+\cdots+99^n}{100^n}$；

解法一：由于 $\frac{1+2^n+3^n+\cdots+99^n}{100^n}<99\left(\frac{99}{100}\right)^n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{99}{100}\right)^n$ 收敛，

所以原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n+3^n+\cdots+99^n}{100^n}$ 也收敛.

解法二(比值判别法)：$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+2^{n+1}+3^{n+1}+\cdots+99^{n+1}}{100^{n+1}}}{\frac{1+2^n+3^n+\cdots+99^n}{100^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^{n+1}+3^{n+1}+\cdots+99^{n+1}}{100(1+2^n+3^n+\cdots+99^n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{99^n}+\frac{2^{n+1}}{99^n}+\frac{3^{n+1}}{99^n}+\cdots\frac{98^n}{99^n}+99}{100(\frac{1}{99^n}+\frac{2^n}{99^n}+\frac{3^n}{99^n}+\cdots+1)}=\frac{99}{100}<1$,

所以,原级数收敛。

注：本题也可用根值判别法。

**（9）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2!+\cdots+n!}{(n+1)!}$；

解：$\frac{1+2!+\cdots+n!}{(n+1)!}>\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}$，

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散， 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2!+\cdots+n!}{(n+1)!}$ 也发散.

**（10）$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(e^{\sin\frac{1}{n^3}}-1\right)$；

解：注意到 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}=1$

所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(e^{\sin\frac{1}{n^3}}-1\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(e^{\sin\frac{1}{n^3}}-1\right)}{\frac{1}{n^3}}=1$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散， 故 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(e^{\sin\frac{1}{n^3}}-1\right)$ 发散.

**（11）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{(\ln n)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}=0<1$，所以由根值判别法知原级数收敛。

**(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；

解：考虑极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\dfrac{1}{n}}=1$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散， 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 也发散。

**(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{1}{n})$；

解：$1-\cos\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2}$， 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛， 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{1}{n})$ 也收敛。

**(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{1}{n^2})$；

解：$\ln(1+\dfrac{1}{n^2})\sim\dfrac{1}{n^2}$， 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛， 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{1}{n^2})$ 也收敛。

**(15)设 $a>1$ ， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)$ 。

解：$\sqrt[n]{a}-1=a^{\frac{1}{n}}-1=e^{\frac{\ln a}{n}}-1\sim\dfrac{\ln a}{n}$，

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散， 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)$ 也发散。

***3．利用级数理论，证明 $n\to\infty$ 时， $\dfrac{1}{n^n}$ 是比 $\dfrac{1}{n!}$ 高阶的无穷小.

证明：先判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$ 的敛散性，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}=e^{-1}<1$,

所以，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$ 收敛，于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$,

上式又可变为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n^n}}{\dfrac{1}{n!}}=0$，

故当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n^n}$ 是比 $\dfrac{1}{n!}$ 高阶的无穷小.

****4．将方程 $x=\tan x$ 的正根按递增次序排列，得数列 $\{x_n\}$，试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{{x_n}^2}$ 收敛，

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x_n}$ 却发散.

证明：设 $F(x)=\tan x-x$， $F'(x)=\tan^2 x>0$，

则 $F(x)$ 在 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上严格单调，

又因 $\lim\limits_{x\to\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)^+}F(x)=-\infty$， $\lim\limits_{x\to\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^-}F(x)=+\infty$，

则 $F(x)$ 在 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有且仅有一个实根.

又因 $x=0$ 为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的一个根， 所以最小正根在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 上，

从而必有 $x_n\in\left(n\pi-\dfrac{\pi}{2},n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(n=1,2,\cdots)$，

所以 $\dfrac{1}{{x_n}^2}\le\dfrac{1}{\left(n\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{\pi^2\left(n-\dfrac{1}{2}\right)^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\pi^2\left(n-\dfrac{1}{2}\right)^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{{x_n}^2}$ 收敛。

又 $\dfrac{1}{x_n}\ge\dfrac{1}{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\ge\dfrac{1}{\pi(n+1)}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\pi}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x_n}$ 发散.

***5．若数列 $\{a_n\}$ 为单增有界的正项数列，试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛.

证明：首先我们知道级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$ 收敛，

事实上，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$的部分和为$\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$，

所以以上结论显然成立。

设$\{a_n\}$的界为M，即对任何n有$|a_n|<M$，

由于$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)}{a_n a_{n+1}}\right|\le 2M\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n a_{n+1}}\right|=2M\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

故有$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$收敛.

第 8 章（之 3）

第 39 次作业

教学内容： §8.1.4 任意项级数的绝对收敛和条件收敛　§8.1.5 交错级数　§8.2.1 函数项级数的概念

1．选择题：

*（1）　若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则　（　　）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$收敛；（B）$\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}$收敛；（C）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n u_{n+1}$收敛；（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$收敛.

答：（ A ）

*（2）当级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$　（　　）

（A）必绝对收敛；　（B）必发散；

（C）部分和序列有界；　（D）可能收敛也可能发散.

答：（ D ）

*（3）若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，则下列级数中必发散的是　（　　）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$；　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$；

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n v_n$；　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$.

答：（D）

*（4）设α为常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ （ ）

（A）绝对收敛； （B）条件收敛；

（C）发散； （D）敛散性与α取值有关.

答：（ C ）

2. 判断下列级数是绝对收敛、条件收敛还是发散？

**（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{2n-1}\sqrt{n}}$；

解：记 $u_n=\frac{1}{3^{2n-1}\sqrt{n}}$ 则 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{1}{9}<1$

故原级数绝对收敛.

**（2） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$ ；

解：记 $u_n=\frac{n}{n^2+1}$，因为 $u_{n+1}-u_n=\frac{-(n^2+n-1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}<0$，且 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，

所以原级数收敛.

由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}}=1$，

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^n+1}$发散，因此原级数条件收敛.

**（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sqrt{n+1}}{n+102}$；

解：设 $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x+102}$， $f'(x)=\frac{100-x}{2(x+102)^2\sqrt{x+1}}$，

$x>100$时， $f'(x)<0$， $f(x)\downarrow$，

所以当$n>100$时，$\{\frac{\sqrt{n+1}}{n+102}\}$为单调递减数列，且$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n+102}=0$，

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n+1}}{n+102}$收敛.

另一方面 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|\dfrac{(-1)^{n-1}\sqrt{n+1}}{n+102}\right|}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=1$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散。

综合以上讨论知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n+1}}{n+102}$ 条件收敛.

**（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\ln^{8}n}{n}$；

解：记 $f(x)=\dfrac{\ln^{8}x}{x}$， 则 $f'(x)=\dfrac{(8-\ln x)\ln^{7}x}{x^{2}}$，

当 $x>3^{8}>e^{8}$ 时， $f'(x)<0$，即 $f(x)$ 单调递减.

故当 $n>3^{8}$ 时，数列 $\left\{\dfrac{\ln^{8}n}{n}\right\}$ 单调递减。

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^{8}n}{n}=0$， 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\ln^{8}n}{n}$ 收敛。

显见此级数不绝对收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\ln^{8}n}{n}$ 条件收敛。

3．***（1）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛的正项级数，试证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n{}^{2}$ 一定收敛。

证明：因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为收敛的正项级数， 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，

所以 $\exists n_0>0$，当 $n>n_0$ 时，有 $|a_n|<1$，

则 $a_n{}^{2}<a_n \quad (n>n_0)$，

从而由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n{}^{2}$ 收敛。

***（2）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n{}^{2}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 一定收敛吗？

解：不一定。反例 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2}}$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散。

***（3）若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 一定收敛吗？

解：不一定。反例$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$收敛(莱布尼茨型级数)，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。

***（4）设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都是收敛的正项级数，试证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_nb_n}$ 必收敛。

证明：由于$\sqrt{a_nb_n}\le\frac{a_n+b_n}{2}$， 且$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都是收敛的正项级数，

从而$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$收敛， 故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_nb_n}$ 必收敛。

***4. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n a_n 2^n$ 收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛。

证明：由假设，有$\lim_{n\to\infty}\left|a_n 2^n\right|=0$,于是 $\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_n\right|}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\left|2^n a_n\right|=0$’

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，根据比较判别法的极限形式，知$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛。

注：本题若用下节中要学到的阿贝尔定理，则更简洁。

证法二：考虑幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，由条件知当$x=-2$时幂级数收敛，则在$(-2,2)$内幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛。自然当$x=1$时幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 也绝对收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛。

***5. 求函数项级数 $1^x+2^x+3^x+4^x+\cdots+n^x+\cdots$的收敛域.

解： 级数可写成$\sum_{n=1}^{\infty}n^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-x}}$, 这是一个$p=-x$的$p$级数，其收敛的充要条件是$p>1$,

即$x<-1$, 这就是给定函数项级数的收敛域.