数学分析（上）

数学学院

靳勇飞

2024 年 9 月

极值点和极值

定义 (极大值)

函数 f 在集合 I 上有定义，$x_0 \in I$.

如果存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时，$f(x) \leqslant f(x_0)$

则称 x_0 是 f 的一个极大值点，f 在 x_0 取到极大值，$f(x_0)$ 称为相应的极大值。

极值点和极值

定义 (极大值)

函数 f 在集合 I 上有定义，$x_0 \in I$.

$$\text{如果存在 } \delta > 0,\ \text{使得当 } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ 时，} f(x) \leqslant f(x_0)$$

则称 x_0 是 f 的一个极大值点，f 在 x_0 取到极大值，$f(x_0)$ 称为相应的极大值。

定义 (极小值)

函数 f 在集合 I 上有定义，$x_0 \in I$.

$$\text{如果存在 } \delta > 0,\ \text{使得当 } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ 时，} f(x) \geqslant f(x_0)$$

则称 x_0 是 f 的一个极小值点，f 在 x_0 取到极小值，$f(x_0)$ 称为相应的极小值。

极值点和极值

注意.

1. “极大”“极小”这些都指的是局部性质；“最大”“最小”指的是全局性质。

□

极值点和极值

注意.

1. “极大”“极小”这些都指的是局部性质；“最大”“最小”指的是全局性质。
2. 极大值可能比极小值小，极小值可能比极大值大。

□

极值点和极值

注意.

1. “极大”“极小”这些都指的是局部性质；“最大”“最小”指的是全局性质。
2. 极大值可能比极小值小，极小值可能比极大值大。
3. 函数在一个区间内的极值点可能有无穷多个，例如函数 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$.

$\square$

极值点和极值

注意.

1. “极大”“极小”这些都指的是局部性质；“最大”“最小”指的是全局性质。
2. 极大值可能比极小值小，极小值可能比极大值大。
3. 函数在一个区间内的极值点可能有无穷多个，例如函数 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$.
4. 极值的定义跟函数的连续性无关，例如黎曼函数的每一个点都是极值点。

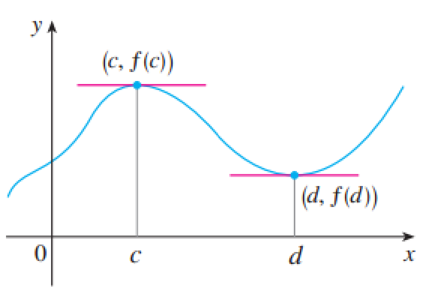
$\square$

极值点和极值

Pierre de Fermat (1601.8.17 ~ 1665.1.12) 在研究函数图像的切线与极值的关系时发现了下面的定理。

定理 (Fermat 引理)

函数 f 在集合 I 上有定义，$x_0 \in I$. f 在 x_0 取到极值，且 f 在 x_0 可导，则 $f'(x_0) = 0$.



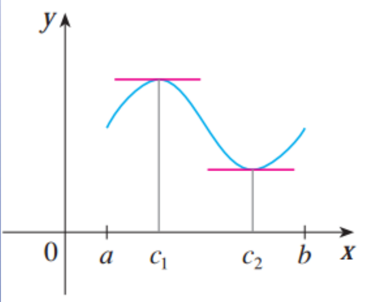
中值定理

$a < b$.

定理 (Rolle 定理)

函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则

$$\text{存在 } \xi \in (a,b), \text{ 使得 } f'(\xi)=0.$$



中值定理

辅助函数的构造过程.

1. 把要证的结论中的式子等价变形为一个式子等于零的样子，
2. 把前面得到的式子中的 ξ(或者也许是别的符号，要证的结论中"存在"后面的符号) 改成自变量（一般用 x, 也可以是其它的），然后找一个函数，使得这个函数的导函数的样子正好是这个式子。
3. 尝试一下题目中提到的区间是否合适；
4. 如果题目中的区间不合适，则使用罗尔定理的区间要比题目中的区间要小一些，此时需要在区间中找两个合适的点来缩小到适合使用罗尔定理的区间。

□

中值定理

使用 Rolle 定理的叙述.

在构造出辅助函数，确定好区间以后，叙述时一般要明确写出以下几点：

1. 辅助函数的定义；
2. 通过辅助函数的定义说明辅助函数在确定的闭区间连续，开区间可导，在区间端点函数值相等，
3. 通过使用罗尔定理得到要证的结论。

□

中值定理

例

$a < b$. 函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，则

$$\text{存在 } \xi \in (a, b),\ \text{使得 } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

中值定理

例

$a < b$. 函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，则

$$存在\ \xi \in (a, b),\ 使得\ f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

例

$a < b$. 设函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内二阶可导, $c \in (a, b)$, 且 $f(a) = f(c) = f(b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

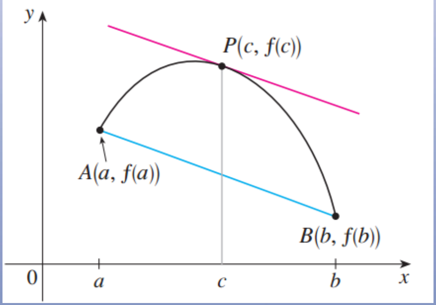
中值定理

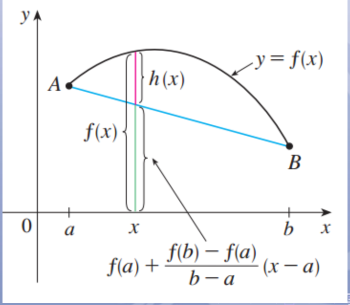
$a < b$.

定理 (Lagrange 中值定理)

函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，则

$$\text{存在 } \xi \in (a, b), \text{ 使得 } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$





中值定理

$a < b$.

定理 (Lagrange 中值定理)

函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

$$\text{存在 } \xi \in (a,b), \text{ 使得 } f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

定理 (Lagrange 中值定理)

函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

$$\text{存在 } \xi \in (a,b), \text{ 使得 } f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a).$$

中值定理

$a < b$.

定理 (Lagrange 中值定理)

函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，则

$$\text{存在 } \xi \in (a, b), \text{ 使得 } f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a).$$

定理 (Lagrange 中值定理)

函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，则

$$\text{存在 } \theta \in (0, 1), \text{ 使得 } f(b) = f(a) + f'(a + \theta(b - a))(b - a).$$

中值定理

重要线索.

当想要的式子中出现了某个函数在某个区间的两个端点的函数值的差，以及这个区间的长度（两端点的差）的时候，就提示可以考虑使用 Lagrange 中值定理！ □

中值定理

重要线索.

当想要的式子中出现了某个函数在某个区间的两个端点的函数值的差，以及这个区间的长度（两端点的差）的时候，就提示可以考虑使用 Lagrange 中值定理！ □

例

证明：$x > 0$ 时，$\sin x < x$.

中值定理

重要线索.

当想要的式子中出现了某个函数在某个区间的两个端点的函数值的差，以及这个区间的长度（两端点的差）的时候，就提示可以考虑使用 Lagrange 中值定理！ □

例

证明：$x > 0$ 时，$\sin x < x$.

例

证明：对任意的 x, x', $|\sin x - \sin x'| \leqslant |x - x'|$.

中值定理

例

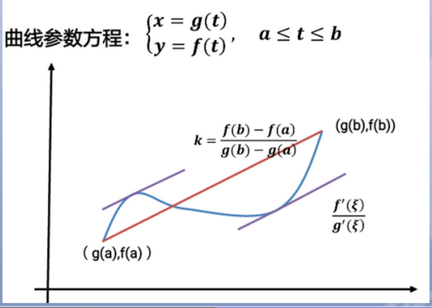
$\delta > 0$，函数 f 在闭区间 $[x_0, x_0+\delta]$ 上连续，在开区间 $(x_0, x_0+\delta)$ 内可导。如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) = K$（$K$ 有限或无穷），则 $f'_+(x_0) = K$.

中值定理

定理 (Cauchy 中值定理)

$a<b$. 函数 f,g 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且对任意的 $x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$. 则

$$\text{存在 } \xi\in(a,b),\text{ 使得 } \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$



中值定理

Cauchy 中值定理一个错误的证明.

因为函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

$$\text{存在 } \xi\in(a,b),\text{ 使得 } f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

函数 g 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则

$$\text{存在 } \xi\in(a,b),\text{ 使得 } g'(\xi)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}.$$

因为对任意的 $x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$，所以 $g'(\xi)\neq 0$, 所以

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

□

中值定理

定理 (Cauchy 中值定理)

$a<b$. 函数 f,g 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且对任意的 $x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$. 则

$$\text{存在 } \xi\in(a,b),\ \text{使得 } \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

中值定理

定理 (Cauchy 中值定理)

$a<b$. 函数 f,g 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且对任意的 $x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$. 则

$$\text{存在 } \xi\in(a,b), \text{ 使得 } \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

证明要点.

对任意的 $x\in[a,b]$, 令 $F(x)=f(x)(g(b)-g(a))-g(x)(f(b)-f(a))$. 因为函数 f,g 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，得函数 F 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导。又 $F(b)=F(a)$, 由 Rolle 定理，存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=f'(\xi)(g(b)-g(a))-g'(\xi)(f(b)-f(a))=0$, 因为对任意的 $x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$, 所以 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. □

中值定理

重要线索.

当想要的式子中出现了某两个函数同一点的导数的商，以及这两个函数在某个区间的两个端点的函数值的差的商，就提示可以考虑使用 Cauchy 中值定理！ □

中值定理

重要线索.

当想要的式子中出现了某两个函数同一点的导数的商，以及这两个函数在某个区间的两个端点的函数值的差的商，就提示可以考虑使用 Cauchy 中值定理！ □

例

设 f 在闭区间 $[a,b]$ 有连续导数，在 (a,b) 上有 2 阶导数，$x_0 \in [a,b]$, 则对任意的 $x \in [a,b]$,

$$\text{存在 } \xi \in (a,b) \text{ 使得 } f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2.$$

中值定理

例

设 f 在闭区间 $[a,b]$ 有连续导数，在 (a,b) 上有 2 阶导数，$x_0 \in [a,b]$, 则对任意的 $x \in [a,b]$,

$$\text{存在 } \xi \in (a,b) \text{ 使得 } f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2.$$

中值定理

例

设 f 在闭区间 $[a,b]$ 有连续导数，在 (a,b) 上有 2 阶导数，$x_0 \in [a,b]$，则对任意的 $x \in [a,b]$，

$$\text{存在 } \xi \in (a,b) \text{ 使得 } f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2.$$

证明要点.

对任意的 $t \in [a,b]$，令 $F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t)$，$G(t) = (x-t)^2$，对 F, G 用 Cauchy 中值定理。 □

微分中值定理

作业

1. 课本第 153 页习题 1, 2, 7, 8(1)(3), 9, 10(2), 12(1)(6), 14, 15,17
2. $\delta > 0$，函数 f 在闭区间 $[x_0-\delta, x_0]$ 上连续，在开区间 $(x_0-\delta, x_0)$ 内可导。如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) = K$（$K$ 有限或无穷），则 $f'_-(x_0) = K$.
3. 对任意 n 次多项式 $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, 对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$, 找到 $\{b_k\}_{k=0}^{n}$，使得对任意的 $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k$. 满足条件的 $\{b_k\}_{k=0}^{n}$，是否是唯一的？
4. $n \geqslant 1$. 给定 n 个实数 $\{c_k\}_{k=0}^{n}$，及任意一点 $x_0 \in \mathbb{R}$, 构造一个多项式 $P(x)$，使得对任意的 k, $0 \leqslant k \leqslant n$, 使得 $P^{(k)}(x_0) = c_k$.

中值定理的应用

$a < b$.

定理

函数 f 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f' = 0$, 则

$$存在\ C \in \mathbb{R},\ 使得对任意的\ x \in (a,b),\ f(x) = C.$$

中值定理的应用

$a < b$.

定理

函数 f 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f' = 0$, 则

$$存在\ C \in \mathbb{R},\ 使得对任意的\ x \in (a,b),\ f(x) = C.$$

定理

函数 f 在区间 I 上连续，在区间 I 内可导，且 $f' = 0$, 则

$$存在\ C \in \mathbb{R},\ 使得对任意的\ x \in I,\ f(x) = C.$$

中值定理的应用

$a < b$.

定理

函数 f 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f' = 0$, 则

$$\text{存在 } C \in \mathbb{R}, \text{ 使得对任意的 } x \in (a,b),\ f(x) = C.$$

定理

函数 f 在区间 I 上连续，在区间 I 内可导，且 $f' = 0$, 则

$$\text{存在 } C \in \mathbb{R}, \text{ 使得对任意的 } x \in I,\ f(x) = C.$$

判断

函数 f, g 使得对集合 I 中任意一点 x，$f'(x) = g'(x)$, 则

$$\text{存在 } C \in \mathbb{R}, \text{ 使得对任意的 } x \in I,\ f(x) = g(x) + C.$$

中值定理的应用

定理

函数 f 在区间 I 上连续，在区间 I 内可导，则

$$f \text{ 在 } I \text{ 上单调增加的充要条件是：对 } I \text{ 内任意的 } x,\ f'(x) \geqslant 0.$$

中值定理的应用

定理

函数 f 在区间 I 上连续，在区间 I 内可导，则

$$f \text{ 在 } I \text{ 上单调增加的充要条件是：对 } I \text{ 内任意的 } x,\ f'(x) \geqslant 0.$$

定理

函数 f 在区间 I 上连续，在区间 I 内可导，则

$$f \text{ 在 } I \text{ 上单调减少的充要条件是：对 } I \text{ 内任意的 } x,\ f'(x) \leqslant 0.$$

中值定理的应用

判断

函数 f 在区间 I 上连续，在区间 I 内可导，则

f 在 I 上严格单调增加的充要条件是：对 I 内任意的 x, $f'(x) > 0$.

中值定理的应用

判断

函数 f 在区间 I 上连续，在区间 I 内可导，则

f 在 I 上严格单调增加的充要条件是：对 I 内任意的 x, $f'(x) > 0$.

定理

函数 f 在区间 I 上连续，在区间 I 内可导，

若对 I 内任意的 x, $f'(x) > 0$，则 f 在 I 上严格单调增加。

中值定理的应用

事实

函数 f 在 $[a,b]$ 上严格单调增加，在 $[b,c]$ 上严格单调增加，则 f 在 $[a,c]$ 上严格单调增加。

中值定理的应用

事实

函数 f 在 $[a,b]$ 上严格单调增加，在 $[b,c]$ 上严格单调增加，则 f 在 $[a,c]$ 上严格单调增加。

定理

函数 f 在区间 I 上连续，

若 $I\setminus\{x\in I: f'(x)>0\}$ 是有限集，则 f 在 I 上严格单调增加。

中值定理的应用

判断

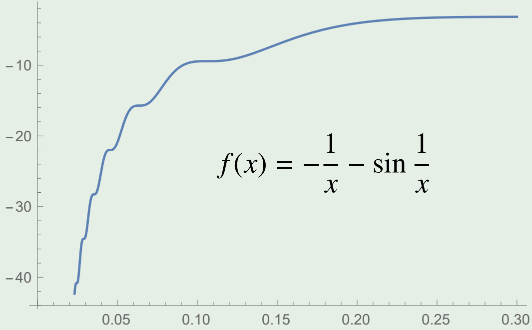
函数 f 在区间 I 上连续，在区间 I 内可导，若 f 在 I 上严格单调增加，则 $I \setminus \{x \in I : f'(x) > 0\}$ 是有限集。

中值定理的应用

判断

函数 f 在区间 I 上连续，在区间 I 内可导，若 f 在 I 上严格单调增加，则 $I\setminus\{x\in I: f'(x)>0\}$ 是有限集。

例



中值定理的应用

判断

如果连续函数 f 在 x_0 处有 $f'(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得 f 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上单调上升。

中值定理的应用

判断

如果连续函数 f 在 x_0 处有 $f'(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得 f 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上单调上升。

例

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2\left(1 + \cos\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

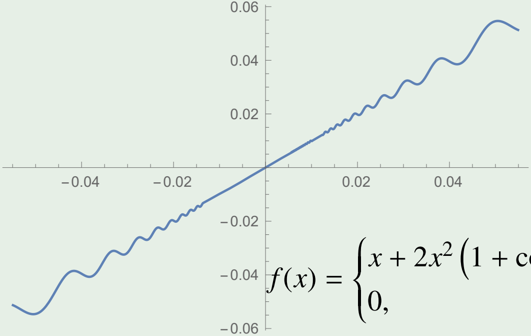
$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x\left(\cos\frac{1}{x} + 1\right) + 2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

中值定理的应用

判断

如果连续函数 f 在 x_0 处有 $f'(x_0) > 0$，则存在 $\delta > 0$，使得 f 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上单调上升。

例



$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2\left(1 + \cos\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

中值定理的应用

定理 (极值点的一阶充分条件)

$\delta > 0$, 函数 f 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上连续，

1. 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，$f'(x) < 0$; 则 x_0 是 f 的极大值点。
2. 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，$f'(x) > 0$; 则 x_0 是 f 的极小值点。
3. 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x) > 0$; 或者当 $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x) < 0$; 则 x_0 不是 f 的极值点。

中值定理的应用

判断

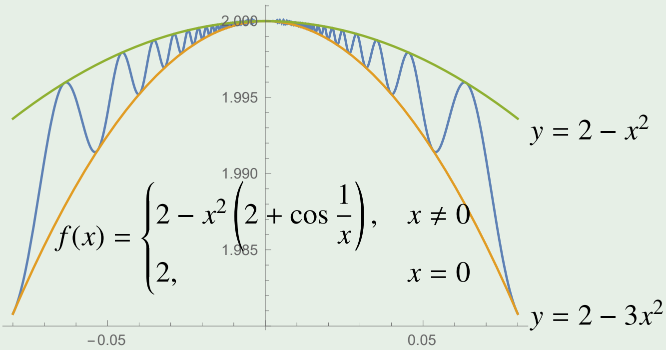
如果连续函数 f 在 x_0 处有极大值，则存在 $\delta > 0$，使得 f 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上单调上升，在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上单调减少。

中值定理的应用

判断

如果连续函数 f 在 x_0 处有极大值, 则存在 $\delta > 0$, 使得 f 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上单调上升, 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上单调减少。

例



中值定理的应用

定理 (极值点的二阶充分条件)

函数 f 在区间 (a,b) 上连续，在区间 (a,b) 内二阶可导，$x_0 \in (a,b)$, $f'(x_0)=0$.

1. 若 $f''(x_0)>0$, 则 x_0 是 f 的极小值点。
2. 若 $f''(x_0)<0$, 则 x_0 是 f 的极大值点。

中值定理的应用

提示 (求极值点的过程)

1. 求函数的不可导点和导数为零的点 (驻点);
2. 利用一阶二阶充分条件或其它方法判断是否是极值点，确定是极大值点还是极小值点。

提示 (求最值点的过程)

1. 求函数的不可导点、导数为零的点 (驻点);
2. 求在不可导点、导数为零的点的函数值;
3. 区间端点在定义域时求在端点的函数值，端点不在定义域时，求到区间端点的单侧极限；不可导点是间断点时求到该点的单侧极限;
4. 比较上述值!

微分中值定理

作业

1. 课本第 154 页习题 20, 27

Taylor 公式

例

求 n 次多项式 $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ 在 0 的各阶导数。

Taylor 公式

例

求 n 次多项式 $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ 在 0 的各阶导数。

结论.

对任意 $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$. □

Taylor 公式

例

求 n 次多项式 $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ 在 0 的各阶导数。

结论.

对任意 $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$. □

例

求 n 次多项式 $P(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k (x-x_0)^k = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \cdots + A_n(x-x_0)^n$ 在 x_0 的各阶导数。

Taylor 公式

例

求 n 次多项式 $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ 在 0 的各阶导数。

结论.

对任意 $k\in\mathbb{N},\ 0\leqslant k\leqslant n,\ a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$. □

例

求 n 次多项式 $P(x)=\sum_{k=0}^{n} A_k (x-x_0)^k = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \cdots + A_n(x-x_0)^n$ 在 x_0 的各阶导数。

结论.

对任意 $k\in\mathbb{N},\ 0\leqslant k\leqslant n,\ A_k = \dfrac{P^{(k)}(x_0)}{k!}$. □

Taylor 公式

定义

函数 f 在 x_0 处 n 阶可导，则多项式

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称为 f 在 x_0 处的 n 次泰勒 (Taylor) 多项式。

事实

1. 函数 f 的 Taylor 多项式的系数是确定的。
2. n 次多项式和它的 n 次 Taylor 多项式恒等。
3. f 的 $n+1$ 次 Taylor 多项式的导函数就是 f' 的 n 次 Taylor 多项式。

Taylor 公式

定理 (带 Peano 余项的 Taylor 公式)

$\delta > 0$, 函数 f 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上连续且有直到 $n-1$ 阶导函数，函数 f 在 x_0 处 n 阶可导，则当 $x \to x_0$ 时，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Taylor 公式

定理 (带 Peano 余项的 Taylor 公式)

$\delta > 0$, 函数 f 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上连续且有直到 $n-1$ 阶导函数，函数 f 在 x_0 处 n 阶可导，则当 $x \to x_0$ 时，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right).$$

定义

函数 f 在 x_0 处 n 阶可导，则公式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$$

称为 f 在 x_0 处的带 Peano 余项的 n 次 Taylor 公式。

Taylor 公式

引理

$\delta > 0$, 函数 φ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上连续且有直到 $n - 1$ 阶导函数，函数 φ 在 x_0 处 n 阶可导，且对任意的 $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $\varphi^{(k)}(x_0) = 0$, 则

$$\text{当 } x \to x_0 \text{ 时，} \varphi(x) = o\left((x - x_0)^n\right).$$

Taylor 公式

引理

$\delta > 0$, 函数 φ 在区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上连续且有直到 $n-1$ 阶导函数，函数 φ 在 x_0 处 n 阶可导，且对任意的 $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $\varphi^{(k)}(x_0) = 0$, 则

$$\text{当 } x \to x_0 \text{ 时，} \varphi(x) = o\left((x-x_0)^n\right).$$

证明要点.

把 $\varphi(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$ 写成 $\varphi(x) = \alpha(x)(x-x_0)^n$ 的形式，其中 $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$. 用数学归纳法。 □

Taylor 公式

引理

$\delta > 0$, 函数 φ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上连续且有直到 $n-1$ 阶导函数，函数 φ 在 x_0 处 n 阶可导，且对任意的 $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $\varphi^{(k)}(x_0) = 0$, 则

$$\text{当 } x \to x_0 \text{ 时，} \varphi(x) = o\left((x - x_0)^n\right).$$

证明.

$n = 1$ 时：设 $\varphi(x)$ 在 x_0 可导，且 $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi'(x_0) = 0$, 则当 $x \to x_0$ 时，

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = o(x - x_0).$$

□

Taylor 公式

引理

$\delta > 0$, 函数 φ 在区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上连续且有直到 $n-1$ 阶导函数，函数 φ 在 x_0 处 n 阶可导，且对任意的 $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $\varphi^{(k)}(x_0) = 0$, 则

$$\text{当 } x \to x_0 \text{ 时，} \varphi(x) = o\left((x-x_0)^n\right).$$

证明续.

设命题当 $n = m$ 时成立。设 $\varphi(x)$ 在 x_0 处 $m+1$ 阶可导，对任意的 $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant m+1$, $\varphi^{(k)}(x_0) = 0$. 则 $\varphi'(x)$ 在 x_0 处 m 阶可导，所以当 $x \to x_0$ 时，$\varphi'(x) = o\left((x-x_0)^m\right)$. 则存在 $\alpha(x)$ 使得 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$，且 $\varphi'(x) = \alpha(x)(x-x_0)^m$. 由 Lagrange 中值定理，存在介于 x 与 x_0 之间的 ξ, 使得

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(\xi)(x-x_0) = \alpha(\xi)(\xi-x_0)^m(x-x_0)$$

所以当 $x \to x_0$ 时，$\varphi(x) = o\left((x-x_0)^{m+1}\right)$. $\square$

Taylor 公式

定理 (带 Peano 余项的 Taylor 公式)

$\delta > 0$, 函数 f 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上连续且有直到 $n-1$ 阶导函数，函数 f 在 x_0 处 n 阶可导，则当 $x \to x_0$ 时，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Taylor 公式

定理 (带 Peano 余项的 Taylor 公式)

$\delta > 0$，函数 f 在区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上连续且有直到 $n-1$ 阶导函数，函数 f 在 x_0 处 n 阶可导，则当 $x \to x_0$ 时，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right).$$

事实

1. 证明过程实际上没有用到 x_0 是内点，因此 x_0 是区间端点时，结论也对，只需要改成单侧极限即可。
2. 在考虑当 $x \to x_0$ 时 (或单侧)f 的极限时，可以考虑用 f 的带 Peano 余项的 Taylor 公式。

Taylor 公式

定理 (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式)

函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有直到 n 阶的连续导函数，函数 f 在开区间 (a,b) 上 $n+1$ 阶可导，当 $x_0 \in [a,b]$ 时，对任意的 $x \in [a,b]$, 存在介于 x_0 与 x 之间的 ξ, 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Taylor 公式

定理 (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式)

函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有直到 n 阶的连续导函数，函数 f 在开区间 (a,b) 上 $n+1$ 阶可导，当 $x_0 \in [a,b]$ 时，对任意的 $x \in [a,b]$, 存在介于 x_0 与 x 之间的 ξ, 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

定义

$x_0 \in [a,b]$，对任意的 $x \in [a,b]$, 则公式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

称为 f 在 x_0 处的带 Lagrange 余项的 n 次 Taylor 公式。

Taylor 公式

定理 (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式)

函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有直到 n 阶的连续导函数，函数 f 在开区间 (a,b) 上 $n+1$ 阶可导，当 $x_0 \in [a,b]$ 时，对任意的 $x \in [a,b]$, 存在介于 x_0 与 x 之间的 ξ, 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Taylor 公式

定理 (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式)

函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有直到 n 阶的连续导函数，函数 f 在开区间 (a,b) 上 $n+1$ 阶可导，当 $x_0 \in [a,b]$ 时，对任意的 $x \in [a,b]$, 存在介于 x_0 与 x 之间的 ξ, 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

证明要点.

对任意的 $t \in [a,b]$, 令 $F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$, $G(t) = (x-t)^{n+1}$, 对 F, G 在 x_0 与 x 之间用 Cauchy 中值定理。 □

Taylor 公式

定理 (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式)

函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有直到 n 阶的连续导函数，函数 f 在开区间 (a,b) 上 $n+1$ 阶可导，当 $x_0 \in [a,b]$ 时，对任意的 $x \in [a,b]$, 存在介于 x_0 与 x 之间的 ξ, 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

事实

1. 定理叙述中，x_0 可以是区间端点。
2. 取定 x_0 后，带 Lagrange 余项的 Taylor 公式实际上给出了函数的一个特别的表达式，可用这个式子来对函数在区间上的性质进行分析。
3. 当 $f^{(n+1)}$ 在 $[a,b]$ 上有界时，可推得带 Peano 余项的 Taylor 公式。

Taylor 公式

事实

在 0 处的 Taylor 公式又称为麦克劳林 (Maclaurin) 公式。

Taylor 公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r(x).$$

余项形式	称呼	备注
$r(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$	Peano 余项	当 $x\to x_0$ 时
$r(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$	Lagrange 余项	ξ 在 x 与 x_0 之间。对区间内每一点
$r(x)=\dfrac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)$	Cauchy 余项	ξ 在 x 与 x_0 之间。对区间内每一点
$r(x)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t$	积分余项	对区间内每一点

Taylor 公式

事实 (当 x 趋于 0 时)

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$
5. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + C_\alpha^n x^n + o(x^n)$

Taylor 公式

事实 (求 Taylor 公式时需要牢记的)

1. 函数 f 的 Taylor 多项式的系数是确定的。
2. f 的 $n+1$ 次 Taylor 多项式的导函数就是 f' 的 n 次 Taylor 多项式。

Taylor 公式

事实 (当 $\square$ 趋于 0 时)

1. $e^{\square} = 1 + \square + \dfrac{\square^2}{2!} + \dfrac{\square^3}{3!} + \cdots + \dfrac{\square^n}{n!} + o(\square^n)$
2. $\sin \square = \square - \dfrac{\square^3}{3!} + \dfrac{\square^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{\square^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(\square^{2n+2})$
3. $\cos \square = 1 - \dfrac{\square^2}{2!} + \dfrac{\square^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{\square^{2n}}{(2n)!} + o(\square^{2n+1})$
4. $\ln(1+\square) = \square - \dfrac{\square^2}{2} + \dfrac{\square^3}{3} - \cdots + (-1)^n \dfrac{\square^{n+1}}{n+1} + o(\square^{n+1})$
5. $(1+\square)^{\alpha} = 1 + \alpha\square + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\square^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\square^3 + \cdots + C_{\alpha}^{n}\square^n + o(\square^n)$

Taylor 公式

例

求 e^{-x^2} 的带 Peano 余项的 Maclaurin 公式。

Taylor 公式

例

求 e^{-x^2} 的带 Peano 余项的 Maclaurin 公式。

提示

当 $\square$ 趋于 0 时，$e^{\square} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\square^k}{k!} + o(\square^n) = 1 + \square + \frac{\square^2}{2!} + \frac{\square^3}{3!} + \cdots + \frac{\square^n}{n!} + o(\square^n)$

Taylor 公式

例

求 e^{-x^2} 的带 Peano 余项的 Maclaurin 公式。

提示

当 $\square$ 趋于 0 时，$e^{\square}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\square^k}{k!}+o(\square^n)=1+\square+\frac{\square^2}{2!}+\frac{\square^3}{3!}+\cdots+\frac{\square^n}{n!}+o(\square^n)$

解

当 x 趋于 0 时，

$$e^{-x^2}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-x^2)^k}{k!}+o(x^{2n})=1+(-x^2)+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\frac{(-x^2)^3}{3!}+\cdots+\frac{(-x^2)^n}{n!}+o(x^{2n})$$

$$=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+o(x^{2n})$$

Taylor 公式

例

求 $e^x \sin x$ 的带 Peano 余项的 5 次 Maclaurin 公式。

Taylor 公式

例

求 $e^x \sin x$ 的带 Peano 余项的 5 次 Maclaurin 公式。

解

当 x 趋于 0 时，$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$, 所以

$$\begin{aligned} e^x \sin x =& \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) \\ =& x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + o(x^5) \end{aligned}$$

Taylor 公式

例

求 $\arctan x$ 的带 Peano 余项的 9 次 Maclaurin 公式，并求 $\arctan x$ 在 0 的 7 阶导数，及 π 的近似值。

Taylor 公式

例

求 $\arctan x$ 的带 Peano 余项的 9 次 Maclaurin 公式，并求 $\arctan x$ 在 0 的 7 阶导数，及 π 的近似值。

解

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$，而当 x 趋于 0 时，$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + o(x^8)$ 所以当 x 趋于 0 时，

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + o(x^9)$$

所以 $(\arctan x)^{(7)}\big|_{x=0} = -\frac{1}{7} \cdot 7! = -720.$

$$\pi = 4\arctan 1 \approx 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{304}{105}$$

Taylor 公式

例

求 $\ln\cos x$ 的带 Peano 余项的 6 次 Maclaurin 公式。

Taylor 公式

例

求 $\ln\cos x$ 的带 Peano 余项的 6 次 Maclaurin 公式。

解

当 x 趋于 0 时，$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$ 所以当 x 趋于 0 时，

$$\begin{aligned}
\ln\cos x &= \ln\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+o(x^6)\right)\\
&=\left(-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+o(x^6)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2!)^2}x^4-\frac{2}{2!4!}x^6+o(x^6)\right)+\\
&\quad+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{(2!)^3}x^6+o(x^7)\right)+o(x^6)\\
&=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6)
\end{aligned}$$

Taylor 公式

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{\tan x-\arcsin x}$.

Taylor 公式

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{\tan x-\arcsin x}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-\sin x}{\tan x-\arcsin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)}{\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)-\left(x+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}\\&=-1\end{aligned}$$

Taylor 公式

提示

如果要研究的式子中出现了高阶导数，以及可以知道在某点的函数值、导数值等信息，比如极值点、最值点，提示可以考虑使用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式来试试。

Taylor 公式

提示

如果要研究的式子中出现了高阶导数，以及可以知道在某点的函数值、导数值等信息，比如极值点、最值点，提示可以考虑使用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式来试试。

例 (课本第 184 页习题 13)

设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$, 证明：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f''(x)\right|$$

Taylor 公式

提示

如果要研究的式子中出现了高阶导数，以及可以知道在某点的函数值、导数值等信息，比如极值点、最值点，提示可以考虑使用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式来试试。

例 (课本第 184 页习题 13)

设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f''(x)\right|$$

思考要点.

1、是否有提示可以用 Taylor 公式？2、在哪个点使用 Taylor 公式？ □

Taylor 公式

例 (课本第 184 页习题 13)

设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \leqslant \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f''(x)\right|$$

Taylor 公式

例 (课本第 184 页习题 13)

设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$, 证明：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f''(x)\right|$$

证明.

令 $x_0\in(a,b)$ 使得 $|f(x_0)|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$, 则 x_0 是最值点，所以 $f'(x_0)=0$. 由 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$, 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得

$$0=f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(a-x_0)^2$$

$$0=f(b)=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(b-x_0)^2$$

□

Taylor 公式

例 (课本第 184 页习题 13)

设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f''(x)\right|$$

续.

所以

$$\begin{aligned}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|=f(x_0)&=\frac{1}{2}\min\left(\left|f''(\xi)\right|(a-x_0)^2,\left|f''(\eta)\right|(b-x_0)^2\right)\\&\leqslant\frac{1}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f''(x)\right|\min\left((a-x_0)^2,(b-x_0)^2\right)\\&\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f''(x)\right|\end{aligned}$$

插值多项式与插值余项

函数 f 的 Taylor 多项式 $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ 满足

$$\text{对任意的 } k,\ 0\leqslant k\leqslant n,\ f^{(k)}(x_0)=P^{(k)}(x_0)$$

带 Lagrange 余项的 Taylor 公式, 相当于在给定了 $x_0\in[a,b]$ 之后，找到了一个多项式 $P(x)$ 使得它满足上面的式子，而他们的差用 Lagrange 余项的方式表示出来了。

插值多项式与插值余项

函数 f 的 Taylor 多项式 $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ 满足

$$\text{对任意的 } k,\ 0 \leqslant k \leqslant n,\ f^{(k)}(x_0) = P^{(k)}(x_0)$$

带 Lagrange 余项的 Taylor 公式, 相当于在给定了 $x_0 \in [a, b]$ 之后，找到了一个多项式 $P(x)$ 使得它满足上面的式子，而他们的差用 Lagrange 余项的方式表示出来了。

问题

对在闭区间 $[a, b]$ 上函数 f，如果给定的是多个点的函数值、导数值，能否找到这样的多项式?

插值多项式与插值余项

定义

$\{x_i\}_{i=1}^m \subset [a,b]$，$\{n_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{N}^+$，$n = \sum_{i=1}^m n_i + m - 1$.

f 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，若 n 次多项式 P 满足：

$$\text{对任意的 } i,\ \text{对任意的 } k,\ 0 \leqslant k \leqslant n_i,\ P^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i)$$

就称 P 是 f 在区间 $[a,b]$ 上关于插值节点 $\{x_i\}_{i=1}^m$ 的 n 次插值多项式，$r(x) = f(x) - P(x)$ 称为插值余项。

例

已知 f 使得：$f(1) = 0$，$f'(1) = 1$，$f''(1) = 2$，$f(2) = 3$，$f'(2) = 4$，$f(3) = 5$.
5 次多项式 $P(x) = \frac{1}{8}(x-1)\left(7x^4 - 58x^3 + 163x^2 - 172x + 68\right)$ 就是 f 在 $[0,4]$ 的一个插值多项式。

插值多项式与插值余项

情况 1：对任意的 i, $1 \leqslant i \leqslant m$，$P(x_i) = f(x_i)$

构造方法.

构造 m 个 $m-1$ 次多项式：$p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$ 使它们满足

	(x_1)	(x_2)	$\cdots$	(x_{m-1})	(x_m)
p_1	1	0	$\cdots$	0	0
p_2	0	1	$\cdots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
p_{m-1}	0	0	$\cdots$	1	0
p_m	0	0	$\cdots$	0	1

则

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) p_i(x)$$

就是一个满足条件的多项式

插值多项式与插值余项

情况 1：对任意的 i, $1 \leqslant i \leqslant m$，$P(x_i) = f(x_i)$

构造方法.

对任意的 i, $1 \leqslant i \leqslant m$，令

$$p_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_m)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_m)}$$

□

插值多项式与插值余项

例

求 $f(x)=\sqrt{x}$ 关于节点 $1, 1.21, 1.44$ 的插值多项式 P, 并用这个多项式求 $\sqrt{1.15}$ 的近似值。

解

先建立函数值对应表。

	1	1.15	1.21	1.44
$P(x)$	1	?	1.1	1.2

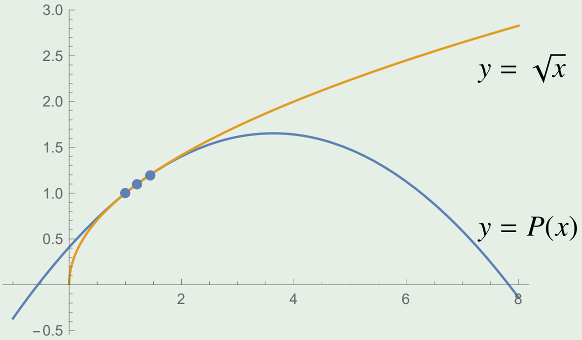
$f(x)=\sqrt{x}$ 关于节点 $1, 1.21, 1.44$ 的插值多项式为

$$P(x)=\frac{(x-1.21)(x-1.44)}{(1-1.21)(1-1.44)}\cdot 1+\frac{(x-1)(x-1.44)}{(1.21-1)(1.21-1.44)}\cdot 1.1+\frac{(x-1)(x-1.21)}{(1.44-1)(1.44-1.21)}\cdot 1.2$$

$P(1.15)\approx 1.07228$. $\sqrt{1.15}\approx 1.07238$

插值多项式与插值余项

例（续）



插值多项式与插值余项

情况 2：对任意的 i, $1 \leqslant i \leqslant m$，$P(x_i) = f(x_i)$, $P'(x_i) = f'(x_i)$,

构造方法.

构造 $2m$ 个 $2m-1$ 次多项式：$p_1(x), q_1(x), p_2(x), q_2(x), \cdots, p_m(x), q_m(x)$ 使它们满足

	(x_1)	(x_2)	$\cdots$	(x_m)	$'(x_1)$	$'(x_2)$	$\cdots$	$'(x_m)$
p_1	1	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0
q_1	0	0	$\cdots$	0	1	0	$\cdots$	0
p_2	0	1	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0
q_2	0	0	$\cdots$	0	0	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
p_m	0	0	$\cdots$	1	0	0	$\cdots$	0
q_m	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	1

则 $P(x) = \sum_{i=1}^{m} (f(x_i)p_i(x) + f'(x_i)q_i(x))$ 就是一个满足条件的多项式。 □

插值多项式与插值余项

例

求 $f(x)=\sqrt{x}$ 关于节点 $1,4$ 的插值多项式 p，使得在这两点函数值及导数值相等，并用这个多项式求 $\sqrt{2}$ 的近似值。

解

先建立函数值对应表。

	(1)	(2)	(4)	′(1)	′(4)
P	1	?	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
p_1	1	-	0	0	0
q_1	0	-	0	1	0
p_2	0	-	1	0	0
q_2	0	-	0	0	1

插值多项式与插值余项

例

求 $f(x)=\sqrt{x}$ 关于节点 1, 4 的插值多项式 P，使得在这两点函数值及导数值相等，并用这个多项式求 $\sqrt{2}$ 的近似值。

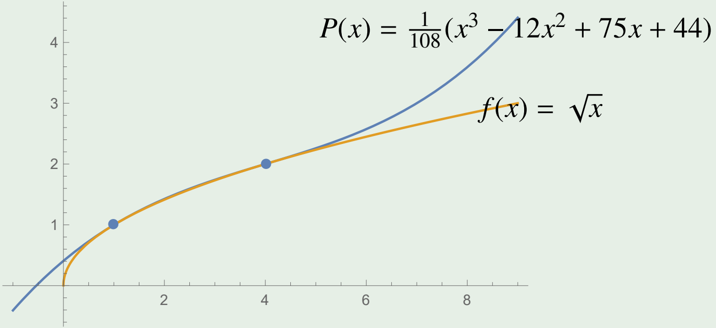
解 (续)

$$
\begin{aligned}
P(x) =&\left(1-2\frac{x-1}{1-4}\right)\left(\frac{x-4}{1-4}\right)^2\cdot 1+(x-1)\left(\frac{x-4}{1-4}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\\
&+\left(1-2\frac{x-4}{4-1}\right)\left(\frac{x-1}{4-1}\right)^2\cdot 2+(x-4)\left(\frac{x-1}{4-1}\right)^2\cdot\frac{1}{4}\\
=&\frac{1}{108}(x^3-12x^2+75x+44)
\end{aligned}
$$

$P(2)=\frac{77}{54}\approx 1.42593.$ $\sqrt{2}\approx 1.41421$

插值多项式与插值余项

例（续）



插值多项式与插值余项

定理

$\{x_i\}_{i=1}^m \subset [a,b]$，$\{n_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{N}$，$n = \sum\limits_{i=1}^m n_i + m - 1$.

f 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，f 在开区间 $[a,b]$ 上有 $n+1$ 阶导数，则存在唯一一个 n 次多项式 P 满足：

$$\text{对任意的 } i,\ \text{对任意的 } k,\ 0 \leqslant k \leqslant n_i,\ P^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i).$$

且对任意的 $x \in [a,b]$, 存在 $\xi \in (\min(\{x_i : 1 \leqslant i \leqslant m\} \cup \{x\}), \max(\{x_i : 1 \leqslant i \leqslant m\} \cup \{x\}))$, 使得

$$r(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=1}^m (x - x_i)^{n_i}.$$

Taylor 公式和插值公式

作业

1. 课本第 155 页习题 27
2. 课本第 170 页习题 5
3. 课本第 183 页习题 1 (5)(9), 2(3), 6(5)(6), 10, 12

思考讨论

1. 课本第 170 页习题 3，4
2. 课本第 183 页习题 3，4

用 Taylor 公式证明不等式

例

证明：

1. $0<\alpha<1$ 时，对任意的 $x>-1$, $(1+x)^{\alpha}\leqslant 1+\alpha x$，不等式中等号只在 $x=0$ 时成立。
2. 当 $\alpha>1$ 或 $\alpha<0$ 时，对任意的 $x>-1$, $(1+x)^{\alpha}\geqslant 1+\alpha x$; 不等式中等号只在 $x=0$ 时成立。

用 Taylor 公式证明不等式

例

证明：

1. $0 < \alpha < 1$ 时，对任意的 $x > -1$, $(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x$，不等式中等号只在 $x = 0$ 时成立。
2. 当 $\alpha > 1$ 或 $\alpha < 0$ 时，对任意的 $x > -1$, $(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$; 不等式中等号只在 $x = 0$ 时成立。

证明.

函数 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 在 $(-1, +\infty)$ 上二阶可导。对任意的 $x > -1$, 存在介于 0 和 x 之间的 ξ, 使得 $f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(1+\xi)^{(\alpha-2)}x^2$, 由于 $\frac{1}{2}(1+\xi)^{(\alpha-2)}x^2 \geqslant 0$, 等号只在 $x = 0$ 时成立。$f(x) - (1 + \alpha x)$ 的符号与 $\alpha(\alpha-1)$ 相同。 □

用 Taylor 公式证明不等式

例

证明：

1. $0 < \alpha < 1$ 时，对任意的 $x > -1$, $(1+x)^{\alpha} \leqslant 1 + \alpha x$，不等式中等号只在 $x = 0$ 时成立。
2. 当 $\alpha > 1$ 或 $\alpha < 0$ 时，对任意的 $x > -1$, $(1+x)^{\alpha} \geqslant 1 + \alpha x$; 不等式中等号只在 $x = 0$ 时成立。

用 Taylor 公式证明不等式

例

证明：

1. $0<\alpha<1$ 时，对任意的 $x>-1$, $(1+x)^{\alpha}\leqslant 1+\alpha x$，不等式中等号只在 $x=0$ 时成立。
2. 当 $\alpha>1$ 或 $\alpha<0$ 时，对任意的 $x>-1$, $(1+x)^{\alpha}\geqslant 1+\alpha x$; 不等式中等号只在 $x=0$ 时成立。

推论

1. $0<\alpha<1$ 时，对任意的 $x>0$, $x^{\alpha}\leqslant \alpha x+1-\alpha$，等号只在 $x=1$ 时成立。
2. 当 $\alpha>1$ 或 $\alpha<0$ 时，对任意的 $x>0$, $x^{\alpha}\geqslant \alpha x+1-\alpha$; 等号只在 $x=1$ 时成立。

几个重要不等式

推论

1. 当 $0<\alpha<1$ 时，对任意的 $x>0$, $x^{\alpha}\leqslant\alpha x+1-\alpha$，等号只在 $x=1$ 时成立。
2. 当 $\alpha>1$ 或 $\alpha<0$ 时，对任意的 $x>0$, $x^{\alpha}\geqslant\alpha x+1-\alpha$; 等号只在 $x=1$ 时成立。

设 $a>0$, $b>0$, $p\neq 0$, $p\neq 1$, $q\neq 0$, $q\neq 1$, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 把 $x=\frac{a}{b}$, $\alpha=\frac{1}{p}$ 代入推论中的不等式，得到下面的重要不等式。

几个重要不等式

推论

1. 当 $0<\alpha<1$ 时，对任意的 $x>0$, $x^\alpha \leqslant \alpha x+1-\alpha$，等号只在 $x=1$ 时成立。
2. 当 $\alpha>1$ 或 $\alpha<0$ 时，对任意的 $x>0$, $x^\alpha \geqslant \alpha x+1-\alpha$; 等号只在 $x=1$ 时成立。

设 $a>0$, $b>0$, $p\neq 0$, $p\neq 1$, $q\neq 0$, $q\neq 1$, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 把 $x=\frac{a}{b}$, $\alpha=\frac{1}{p}$ 代入推论中的不等式，得到下面的重要不等式。

定理 (Young 不等式)

设 $a>0$, $b>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 则

1. 当 $p<1$ 且 $p\neq 0$ 时，$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}} \geqslant \dfrac{1}{p}a+\dfrac{1}{q}b$; 等号只在 $a=b$ 时成立。
2. 当 $p>1$ 时，$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}} \leqslant \dfrac{1}{p}a+\dfrac{1}{q}b$; 等号只在 $a=b$ 时成立。

几个重要不等式

定理（赫尔德 (Hölder) 不等式）

$1 \leqslant i \leqslant n$ 时 $x_i \geqslant 0$, $y_i \geqslant 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 则

1. 当 $p < 1$ 且 $p \neq 0$ 时，$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}};$$
   等号只在向量 $(x_1^p, x_2^p, \cdots, x_n^p)$ 与向量 $(y_1^q, y_2^q, \cdots, y_n^q)$ 线性相关时成立。
2. 当 $p > 1$ 时，$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}};$$
   等号只在向量 $(x_1^p, x_2^p, \cdots, x_n^p)$ 与向量 $(y_1^q, y_2^q, \cdots, y_n^q)$ 线性相关时成立。

几个重要不等式

Hölder 不等式的证明.

$1 \leqslant i \leqslant n$ 时 $x_i \geqslant 0$, $y_i \geqslant 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 令 $X = \sum_{i=1}^n x_i^p$, $Y = \sum_{i=1}^n y_i^q$.
当 $p > 1$ 时，对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n$ 时，

$$\frac{x_i y_i}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}} = \left(\frac{x_i^p}{X}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{y_i^q}{Y}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{x_i^p}{X} + \frac{1}{q} \cdot \frac{y_i^q}{Y}$$

把 n 个式子求和，得到

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}} \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} \cdot \frac{x_i^p}{X} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{q} \cdot \frac{y_i^q}{Y} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

几个重要不等式

续.

$1 \leqslant i \leqslant n$ 时 $x_i \geqslant 0, y_i \geqslant 0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 令 $X=\sum_{i=1}^n x_i^p$, $Y=\sum_{i=1}^n y_i^q$.
当 $p<1$ 且 $p \neq 0$ 时，对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n$ 时，

$$\frac{x_i y_i}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}}=\left(\frac{x_i^p}{X}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{y_i^q}{Y}\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{x_i^p}{X}+\frac{1}{q} \cdot \frac{y_i^q}{Y}$$

把 n 个式子求和，得到

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}}=\sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}} \geqslant \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} \cdot \frac{x_i^p}{X}+\sum_{i=1}^n \frac{1}{q} \cdot \frac{y_i^q}{Y}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

□

几个重要不等式

定理 (闵可夫斯基（ Minkowski ）不等式)

$1 \leqslant i \leqslant n$ 时 $x_i \geqslant 0,\ y_i \geqslant 0$, 则

1. 当 $p < 1$ 且 $p \neq 0$ 时, $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$;
   等号只在向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与向量 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 线性相关时成立。
2. 当 $p > 1$ 时, $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$;
   等号只在向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与向量 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 线性相关时成立。

几个重要不等式

Minkowski 不等式的证明.

当 $p<1$ 且 $p\neq 0$ 时，设 q 使得 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则 $p+q=pq$，

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p=\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i+y_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}y_i(x_i+y_i)^{p-1}$$

$$\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

所以

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

等号只在向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与向量 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 线性相关时成立。 □

几个重要不等式

续.

当 $p>1$ 时，设 q 使得 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则 $p+q=pq$，

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p=\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i+y_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}y_i(x_i+y_i)^{p-1}$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

所以

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

等号只在向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与向量 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 线性相关时成立。 □

Taylor 公式和插值公式

作业

1. 课本第 184 页习题 7

函数的凹凸性

定义 (下凸函数)

函数 f 在区间 I 上定义，若对任意的 $x_1, x_2 \in I$, 和任意的 $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, 都成立

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

则称 f 是区间 I 上的下凸函数。

函数的凹凸性

定义（下凸函数）

函数 f 在区间 I 上定义，若对任意的 $x_1, x_2 \in I$, 和任意的 $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, 都成立

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

则称 f 是区间 I 上的下凸函数。

定义（严格下凸函数）

函数 f 在区间 I 上定义，若对任意的 $x_1, x_2 \in I$, 和任意的 $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, 都成立

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

则称 f 是区间 I 上的严格下凸函数。

函数的凹凸性

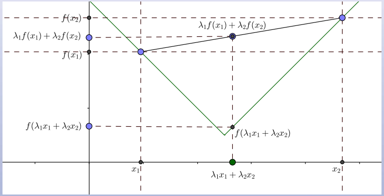


图: 下凸函数

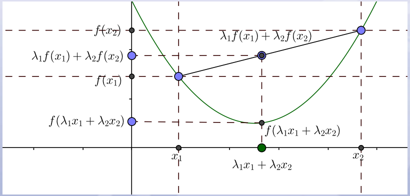


图: 严格下凸函数

函数的凹凸性

定义 (上凸函数)

函数 f 在区间 I 上定义，若对任意的 $x_1, x_2 \in I$, 和任意的 $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, 都成立

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

则称 f 是区间 I 上的上凸函数。

函数的凹凸性

定义 (上凸函数)

函数 f 在区间 I 上定义，若对任意的 $x_1, x_2 \in I$, 和任意的 $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, 都成立

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

则称 f 是区间 I 上的上凸函数。

定义 (严格上凸函数)

函数 f 在区间 I 上定义，若对任意的 $x_1, x_2 \in I$, 和任意的 $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, 都成立

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

则称 f 是区间 I 上的严格上凸函数。

函数的凹凸性

定理

1. 下凸函数与正常数的乘积是下凸函数。
2. 有限个下凸函数的和是下凸函数。
3. f 是单调上升的下凸函数，g 是下凸函数，则 $f \circ g$ 是下凸函数。
4. f 是单调上升的下凸函数，则它的反函数 f^{-1} 是单调上升的上凸函数。
5. 在区间 I 上的下凸函数，如果不是常数，则最大值不能在区间内部达到。
6. f 在 $[x_1, x_2]$ 之间是下凸的，则下面的情况有且只有一种成立：
    1. 对任意的 $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, 成立 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$;
    2. 对任意的 $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, 成立 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$;

函数的凹凸性

I 是区间，$x_1, x_2 \in I$，$x_1 < x < x_2$，则 $x = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2$. 于是 f 在区间 I 上是下凸的当且仅当

$$f(x) = f\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2\right) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2)$$

当且仅当

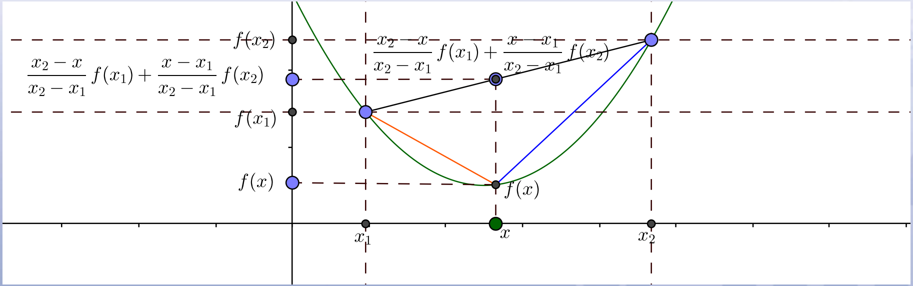
$$(x_2 - x + x - x_1)f(x) = (x_2 - x_1)f(x) \leqslant (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)$$

$$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \leqslant (x - x_1)(f(x_2) - f(x))$$

当且仅当

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

函数的凹凸性



$f(x_2)$
$\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$
$f(x_1)$
$f(x)$
$\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$
$f(x)$
x_1
x
x_2

函数的凹凸性

I 是区间，$x, x_1, x_2 \in I$, $x < x_1 < x_2$, 则 $x_1 = \frac{x_2-x_1}{x_2-x}x + \frac{x_1-x}{x_2-x}x_2$. 于是 f 在区间 I 上是下凸的当且仅当

$$f(x_1) = f\left(\frac{x_2-x_1}{x_2-x}x + \frac{x_1-x}{x_2-x}x_2\right) \leqslant \frac{x_2-x_1}{x_2-x}f(x) + \frac{x_1-x}{x_2-x}f(x_2)$$

当且仅当

$$f(x_1) - f(x) \leqslant \frac{x-x_1}{x_2-x}f(x) + \frac{x_1-x}{x_2-x}f(x_2) = \frac{x_1-x}{x_2-x}(f(x_2)-f(x))$$

当且仅当

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

函数的凹凸性

I 是区间， $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 < x$, 则 $x_2 = \frac{x-x_2}{x-x_1}x_1 + \frac{x_2-x_1}{x-x_1}x$. 于是 f 在区间 I 上是下凸的当且仅当

$$f(x_2) = f\left(\frac{x-x_2}{x-x_1}x_1 + \frac{x_2-x_1}{x-x_1}x\right) \leqslant \frac{x-x_2}{x-x_1}f(x_1) + \frac{x_2-x_1}{x-x_1}f(x)$$

当且仅当

$$f(x_2) - f(x) \leqslant \frac{x-x_2}{x-x_1}f(x_1) + \frac{x_2-x}{x-x_1}f(x) = \frac{x_2-x}{x_1-x}(f(x_1) - f(x))$$

当且仅当

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

函数的凹凸性

I 是区间，$x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$, 则 f 在区间 I 上是下凸的当且仅当

$$(x_2 - x_1)f(x) \leqslant (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)$$

$$(x_2 - x)f(x_1) - (x_2 - x_1)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geqslant 0$$

当且仅当

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geqslant 0$$

行列式是以 $(x_1, f(x_1))$, $(x, f(x))$,$(x_2, f(x_2))$ 三点为顶点的三角形的面积的两倍，为正的充分必要条件是三点是正向的。

函数的凹凸性

I 是区间，$x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$，则 f 在区间 I 上是下凸的当且仅当

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

若 f 在 x_1, x_2 可导，则

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_2)$$

如果 f 在区间 I 上还是可导的，且导函数单调上升，则存在 $\xi_1 \in (x_1, x)$, $\xi_2 \in (x, x_2)$, 使得 $f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$, $f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$, 于是

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

函数的凹凸性

定理

I 是区间，f 在区间 I 上连续，f 在区间 I 内可导，则

1. f 在 I 上是下凸的当且仅当 f' 单调上升;
2. f 在 I 上是严格下凸的当且仅当 f' 严格单调上升。

函数的凹凸性

定理

I 是区间，f 在区间 I 上连续，f 在区间 I 内可导，则

1. f 在 I 上是下凸的当且仅当 f' 单调上升；
2. f 在 I 上是严格下凸的当且仅当 f' 严格单调上升。

推论

I 是区间，f 在区间 I 上连续，f 在区间 I 内二阶可导，

1. f 在 I 上是下凸的，当且仅当，对任意的 $x \in I^{\circ}$, $f''(x) \geqslant 0$.
2. 当对任意的 $x \in I^{\circ}$, $f''(x) > 0$ 时，f 在 I 上是严格下凸的。

函数的凹凸性

定义

f 在 x_0 连续，若存在 $\delta > 0$，使得 f 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0 + \delta)$ 的凸性相反，称 x_0 是 f 的拐点。

函数的凹凸性

定义

f 在 x_0 连续，若存在 $\delta > 0$, 使得 f 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0 + \delta)$ 的凸性相反，称 x_0 是 f 的拐点。

例

0 是 $f(x) = x^3$ 的拐点，不是 $g(x) = x^2$ 的拐点。

函数的凹凸性

定理

f 在 x_0 连续，

1. 存在 $\delta > 0$, 使得 f 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上二阶可导，
   若 f'' 符号在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上相反，则 x_0 是 f 的拐点；
   若 f'' 符号在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上相同，则 x_0 不是 f 的拐点。
2. 存在 $\delta > 0$, 使得 f 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上二阶可导，若 x_0 是 f 的拐点，则 $f''(x_0) = 0$.

函数的凹凸性

定理

f 在 x_0 连续，

1. 存在 $\delta > 0$, 使得 f 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上二阶可导，
   若 f'' 符号在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上相反，则 x_0 是 f 的拐点；
   若 f'' 符号在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上相同，则 x_0 不是 f 的拐点。
2. 存在 $\delta > 0$, 使得 f 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上二阶可导，若 x_0 是 f 的拐点，则 $f''(x_0) = 0$.

例

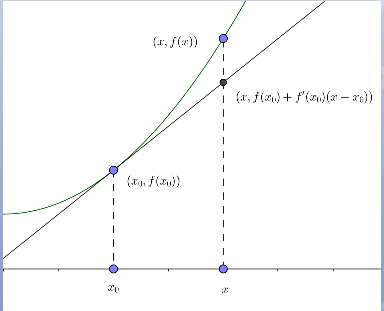
0 是 $f(x) = \sin x$ 的拐点。

函数的凹凸性

定理

f 在区间 I 上连续，在区间 I 内可导，则 f 在 I 上是下凸的当且仅当

$$\text{对任意的 } x_0 \in I,\ \text{对任意的 } x \in I,\ f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



函数的凹凸性

定理

f 在区间 I 上连续，在区间 I 内可导，则 f 在 I 上是下凸的当且仅当

$$\text{对 } I \text{ 内任意的 } x_0,\ \text{对任意的 } x \in I,\ f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

函数的凹凸性

定理

f 在区间 I 上连续，在区间 I 内可导，则 f 在 I 上是下凸的当且仅当

$$\text{对 } I \text{ 内任意的 } x_0, \text{对任意的 } x \in I,\ f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

必要性.

设 f 在 I 上是下凸的，对 I 内任意的 x_0, 对任意的 $x \in I$, 当 $x \neq x_0$ 时，由 Lagrange 中值定理，存在 ξ 介于 x, x_0 之间，使得 $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$.
f 在 I 上是下凸的，则 f' 是单调上升的，所以 $(f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0) \geqslant 0$, 所以

$$f'(\xi)(x - x_0) \geqslant f'(x_0)(x - x_0).$$

于是

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

□

函数的凹凸性

定理

f 在区间 I 上连续，在区间 I 内可导，则 f 在 I 上是下凸的当且仅当

$$对\ I\ 内任意的\ x_0,\ 对任意的\ x \in I,\ f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

函数的凹凸性

定理

f 在区间 I 上连续，在区间 I 内可导，则 f 在 I 上是下凸的当且仅当

$$\text{对 } I \text{ 内任意的 } x_0, \text{对任意的 } x \in I,\ f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

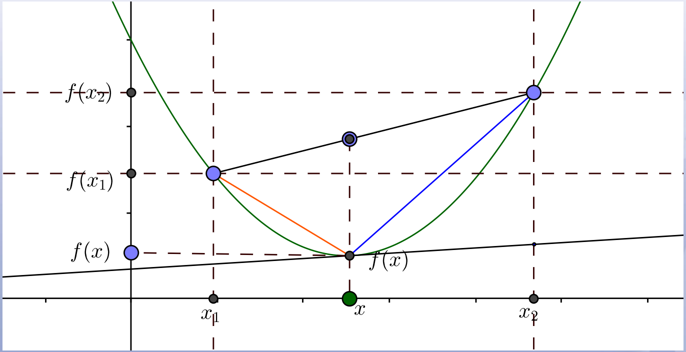
充分性.

设对 I 内任意的 x_0, 任意的 $x \in I$, $f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. 则对任意的 $x_0, x \in I$, 当 $x > x_0$ 时，$f'(x_0) \leqslant \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$; 当 $x < x_0$ 时，$f'(x_0) \geqslant \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,
则对任意的 $x_1, x, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x < x_2$ 时，

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

所以 f 在 I 上是下凸的。 □

函数的凹凸性



函数的凹凸性

事实

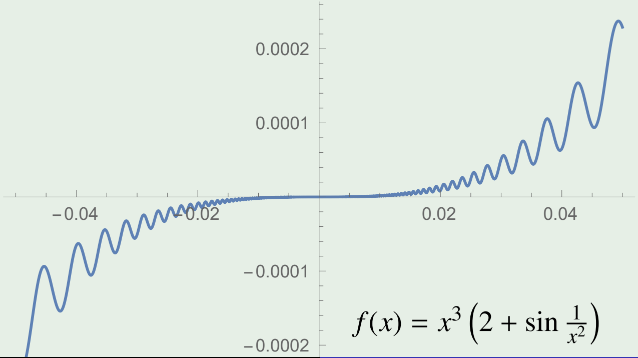
曲线在拐点的地方如果有切线的话，曲线从切线的一侧穿过到切线另一侧。
但曲线在某一点从切线一侧穿过到另一侧，不能判定为在这点是拐点！

函数的凹凸性

事实

曲线在拐点的地方如果有切线的话，曲线从切线的一侧穿过到切线另一侧。
但曲线在某一点从切线一侧穿过到另一侧，不能判定为在这点是拐点！

例



函数的凹凸性

定理 (詹森 (Jensen) 不等式)

f 在区间 I 上连续，则 f 在 I 上是下凸的当且仅当对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, 对任意的 $\{x_i\}_{i=1}^n \subset I$, 及任意的 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset (0,1)$ 使得 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 则成立

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

函数的凹凸性

定理 (詹森 (Jensen) 不等式)

f 在区间 I 上连续，则 f 在 I 上是下凸的当且仅当对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, 对任意的 $\{x_i\}_{i=1}^n \subset I$, 及任意的 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset (0,1)$ 使得 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 则成立

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

提示

$$1 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} + (\lambda_n + \lambda_{n+1})$$

$$\lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} = (\lambda_n + \lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_{n+1}\right)$$

函数的凹凸性

例

函数 $f(x) = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格上凸，所以对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, 对任意的 $\{x_i\}_{i=1}^n \subset (0, +\infty)$, 及任意的 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset (0, 1)$ 使得 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 则成立

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln x_i \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right).$$

所以

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

特别的，对任意的 i, 取 $\lambda_i = \frac{1}{n}$, 得

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

函数的凹凸性

例

$p>1$ 时，函数 $f(x)=x^p$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下凸，所以对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$, 对任意的 $\{x_i\}_{i=1}^n\subset(0,+\infty)$, 及任意的 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n\subset(0,1)$ 使得 $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$, 则成立

$$\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\right)^p\leqslant\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i^p.$$

取 $q=\frac{p}{p-1}$, $\lambda_i=\frac{b_i^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q}$, $x_i=\frac{a_i\sum_{k=1}^n b_k^q}{b_i^{\frac{1}{p-1}}}$,

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

函数的凹凸性

作业

1. 课本第 155 页习题 23,24

画函数的图像

事实 (画函数草图的一般步骤)

如果知道一个函数的解析表达式，一般可以按照下面的步骤画出它的草图：

1. 求出函数的定义域
2. 找出函数的一些明显特征，例如：奇偶性、周期性、它的图像是否经过简单的坐标变换 (平移或旋转等) 与某已知的函数的图像重合
3. 讨论函数在定义的边界点的性质，如果有渐近线的话，求出渐近线
4. 求出函数的单调区间并求出极值点
5. 讨论函数的凹凸性，并求出拐点
6. 标出函数的一些特殊点，例如跟坐标轴的交点等

洛必达 L' Hospital 法则

定理

函数 f, g 在 $(a,b)(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ 上可微，对任意的 $x \in (a,b)$, $g'(x) \neq 0$. $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(-\infty \leqslant A \leqslant +\infty)$, 则在

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 \text{ 且 } \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$$

或者

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$$

时都成立：

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

L' Hospital 法则

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

L' Hospital 法则

例

求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

解

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos 2x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin 2x}{2x}=2.$$

L' Hospital 法则

例

$\varepsilon > 0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\varepsilon}\ln x$.

L' Hospital 法则

例

$\varepsilon > 0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\varepsilon \ln x$.

解

$$\lim_{x\to 0^+} x^\varepsilon \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-\varepsilon})'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-\varepsilon x^{-\varepsilon}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\varepsilon}{-\varepsilon} = 0.$$

L' Hospital 法则

例

$n > 0$, 求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$.

L' Hospital 法则

例

$n > 0$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$.

解

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = n \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-1}}{e^x} = n(n-1) \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-2}}{e^x} = \cdots = n(n-1)\cdots(n-[n]) \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-[n]}}{e^x} = 0.$$

L' Hospital 法则

例

求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \tan x}{x^3}$.

L' Hospital 法则

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sec^2 x\tan x}{6x}=-\frac{1}{3}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{3x^2}=-\frac{1}{3}.$$

L' Hospital 法则

例

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

L' Hospital 法则

例

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

判断

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=-1+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1+\cos x}$$

极限不存在，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$ 不存在。

L' Hospital 法则

例

求 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(x^3+1\right)^{\frac{1}{3}}}{x}$.

L' Hospital 法则

例

求 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(x^3+1\right)^{\frac{1}{3}}}{x}$.

判断

因为

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^3+1\right)^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^3+1\right)^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}} = \cdots\cdots$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(x^3+1\right)^{\frac{1}{3}}}{x}$ 求不出来。

L' Hospital 法则

作业

1. 课本第 161 页习题 2，3，4，6，7

方程的近似解

问题

找一个实数 x^*, 使得 $f(x^*) = 0$, 可以用什么方法?

方程的近似解

问题

找一个实数 x^*，使得 $f(x^*)=0$，可以用什么方法？

常用方法大类.

1. 解析法
2. 数值方法

方程的近似解

事实 (二分法)

可以由零点存在定理判断出方程在某闭区间有根的情况下，可以使用二分法求近似解。

方程的近似解

事实 (二分法)

可以由零点存在定理判断出方程在某闭区间有根的情况下，可以使用二分法求近似解。

特点.

精度可以由分割次数提前确定，而且所需计算次数少！ □

方程的近似解

定理 (课本第 56 页例 2.4.14)

设数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足压缩条件：

$$\text{存在 } r \in (0,1), \text{ 使得对任意的 } n > 2,\ |x_{n+1} - x_n| \leqslant r|x_n - x_{n-1}|,$$

则数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛。

方程的近似解

定理 (课本第 56 页例 2.4.14)

设数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足压缩条件：

$$存在\ r \in (0,1),\ 使得对任意的\ n > 2,\ |x_{n+1} - x_n| \leqslant r|x_n - x_{n-1}|,$$

则数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛。

定理 (压缩映射的不动点原理, 迭代法)

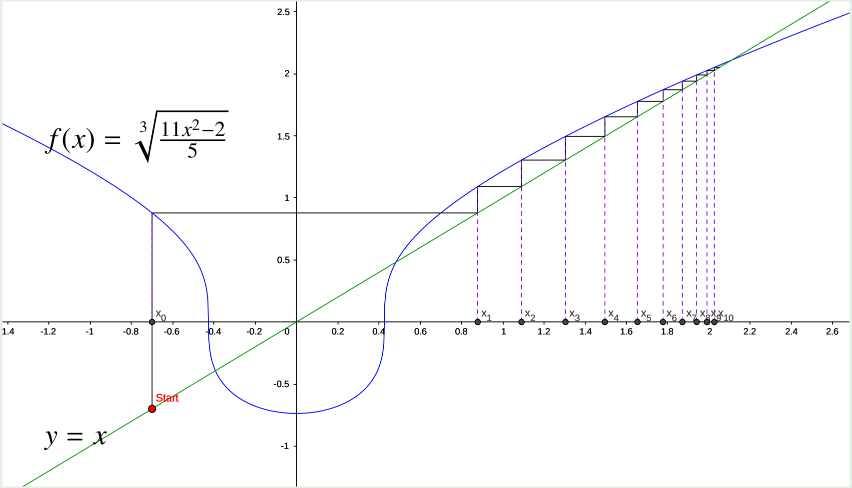
设闭区间 $[a,b]$ 上的函数 f 使得 $f([a,b]) \subset [a,b]$ 且满足压缩条件：

$$存在\ r \in (0,1),\ 使得对任意的\ x, x' \in [a,b],\ |f(x) - f(x')| \leqslant r|x - x'|,$$

则 f 在区间 $[a,b]$ 上有唯一不动点，即存在唯一的 $x^* \in [a,b]$，使得 $x^* = f(x^*)$.
若对任意的 n, 令 $x_{n+1} = f(x_n)$, 则数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 x^*.

方程的近似解

例



方程的近似解

例

$x_1 > 0$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$, 证明数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

证明.

考虑定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$, 则对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $x_{n+1} = f(x_n)$. 对任意的 $x, x' \in (0, +\infty)$,

$$\left|f(x) - f(x')\right| = \left|\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(x' + \frac{2}{x'}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|1 - \frac{2}{xx'}\right| \cdot \left|x - x'\right|$$

f 在 $[\sqrt{2}, +\infty)$ 上是个压缩映射。由 $x_1 > 0$, 得 $x_2 \geqslant \sqrt{2}$, 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 f 在 $[\sqrt{2}, +\infty)$ 上的不动点。方程 $x = f(x)$ 在 $[\sqrt{2}, +\infty)$ 上唯一解是 $x = \sqrt{2}$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{2}$. □

方程的近似解

例

$x_1 \in \mathbb{R}$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $x_{n+1} = \cos x_n$, 证明数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛。

证明.

考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x) = \cos x$, 则对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $x_{n+1} = f(x_n)$. 对任意的实数 x, x', 存在介于 x 与 x' 之间的 ξ, 使得

$$\left|\cos x - \cos x'\right| = \left|f(x) - f(x')\right| = |\sin \xi| \cdot \left|x - x'\right|$$

f 在 $[-1, 1]$ 上是个压缩映射。由 $x_1 \in \mathbb{R}$, 得 $x_2 \in [-1, 1]$, 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 f 在 $[-1, 1]$ 上的唯一不动点。 □

方程的近似解

定理 (Newton 迭代 (切线) 法)

函数 f 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，且满足

1. $f(a)f(b)<0$;
2. f' 在 (a,b) 符号不变；
3. f'' 在 (a,b) 符号不变；

$x_0\in(a,b)$ 且满足 $f(x_0)f''(x_0)>0$, 则以 x_0 为初值的迭代过程

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

产生的数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 f 在 $[a,b]$ 上的唯一解。

方程的近似解

例

用 Newton 法求方程 $\ln x = 2 - x$ 的近似解.

解

考虑定义在 $(0\ +\infty)$ 上的函数 $f(x) = \ln x + x - 2$. $f(1) = 0 + 1 - 2 < 0$, $f(2) = \ln 2 + 2 - 2 > 0$, 对任意的 $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$. 对任意的 $x \in (0, +\infty)$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. 因此 $x = 1$ 为初值的迭代过程 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{x_n(\ln x_n - 3)}{x_n + 1}$ 产生的数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 f 在 $[1,2]$ 上的唯一解，也是 f 在 $(0\ +\infty)$ 上的唯一解。

$x_1 = 1$,

$x_2 = -\frac{x_1(\ln x_1 - 3)}{x_1 + 1} = 1.5$,

$x_3 = -\frac{x_2(\ln x_2 - 3)}{x_2 + 1} \approx 1.5567209351351015$,

$x_4 = -\frac{x_3(\ln x_3 - 3)}{x_3 + 1} \approx 1.5571455763466027$,

$x_5 = -\frac{x_4(\ln x_4 - 3)}{x_4 + 1} \approx 1.557145598997611$

$x^* = 1.5571455989761\ldots$

方程的近似解

例

用 Newton 法求 $\sqrt{2}$ 的近似值。

方程的近似解

例

用 Newton 法求 $\sqrt{2}$ 的近似值。

解

$\sqrt{2}$ 是方程 $x^2-2=0$ 的根。考虑函数 $f(x)=x^2-2$，则 $f'(x)=2x$，$f''(x)=2$ 在 $(0,+\infty)$ 上都保号，则迭代过程

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-2}{2x_n}=x_n-\left(\frac{x_n}{2}-\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$$

(后面的略)

方程的近似解

例

用 Newton 法求 $\sqrt{2}$ 的近似值。

解

$\sqrt{2}$ 是方程 $x^2-2=0$ 的根。考虑函数 $f(x)=x^2-2$，则 $f'(x)=2x$，$f''(x)=2$ 在 $(0,+\infty)$ 上都保号，则迭代过程

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-2}{2x_n}=x_n-\left(\frac{x_n}{2}-\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$$

(后面的略)

思考讨论

迭代过程 $x_{n+1}=x_n+x_n^2-2$ 是否可以保证构造的序列收敛到 $\sqrt{2}$?

方程的近似解

作业

1. 课本第 203 页习题 1(1), 2(2)