图论

Graph Theory

Dijkstra算法

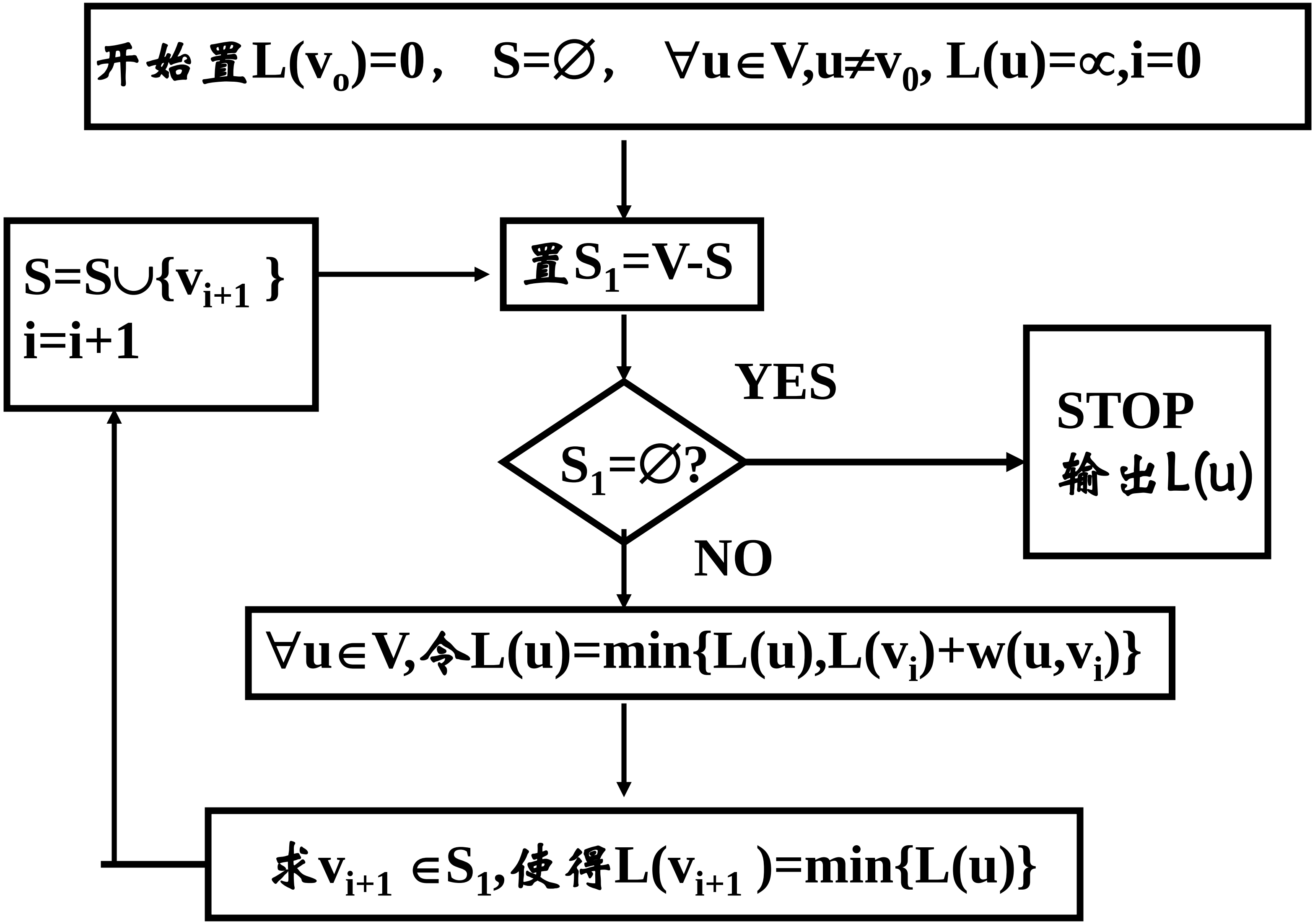
1959年，Dijkstra标号法

这个算法能求出从给定结点到图中其它每个结点的最短路。

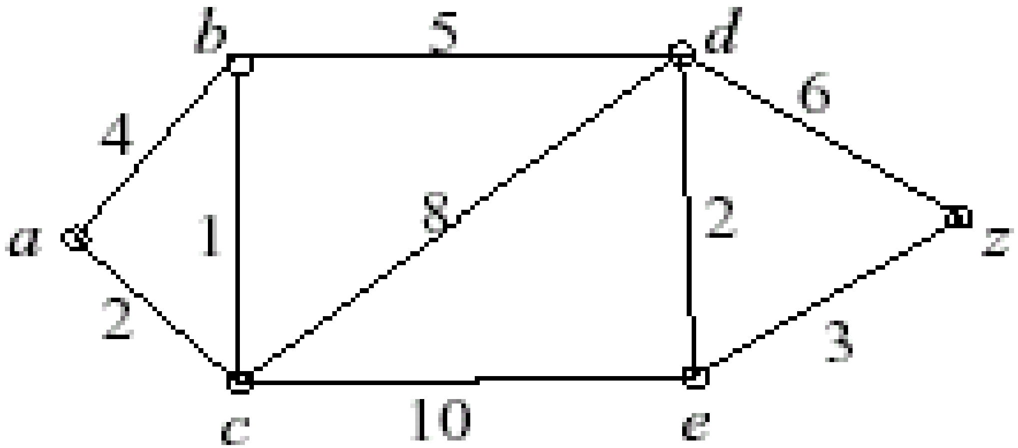
设 $G=(V,E)$ ， $V=\{v_0,\ldots,v_n\}$， $w(v_i, v_i)$是边 $e=(v_i, v_i)$的权

令$L(v_i)$:表示v_0到结点v_i的最短路径的距离

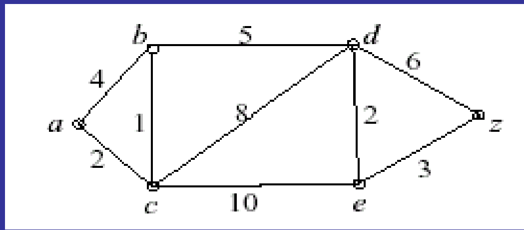
S:已求得最短路径的结点集合


开始置$L(v_o)=0$， $S=\varnothing$， $\forall u\in V, u\neq v_0$, $L(u)=\infty, i=0$
置$S_1=V-S$
$S=S\cup\{v_{i+1}\}$
$i=i+1$
YES
$S_1=\varnothing$?
STOP
输出L(u)
NO
$\forall u\in V$,令$L(u)=\min\{L(u),L(v_i)+w(u,v_i)\}$
求$v_{i+1}\in S_1$,使得$L(v_{i+1})=\min\{L(u)\}$

例



求a结点到图中其他每个结点的最短路?



		L(a)	L(b)	L(c)	L(d)	L(e)	L(z)
i=0	**∅**	**0**	∝	∝	∝	∝	∝
i=1	**{a}**	**0**	**4**	**2/a**	∝	∝	∝
i=2	**{a,c}**	**0**	**3/c**		**10**	**12**	∝
i=3	**{a,c,b}**	**0**			**8/b**	**12**	∝
i=4	**{a,c,b,d}**	**0**				**10/d**	**14**
i=5	**{a,c,b,d,e}**	**0**					**13/e**
i=6	**{a,c,b,d,e,z}**	**0**					**13**

货郎担问题
旅行商问题

设有n个城市，一个旅行商从某个城市出发，要经过每个城市一次且仅一次，最后回到出发城市，问他的旅行路线应怎样安排才能使他走的路线最短?

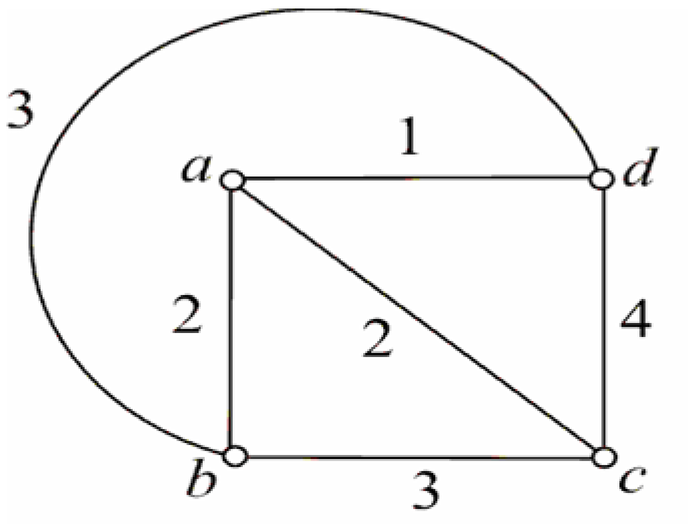
- 找一条路权最小的哈密顿路。

完全带权图K_n（$n \geq 3$）中不同的哈密顿回路数

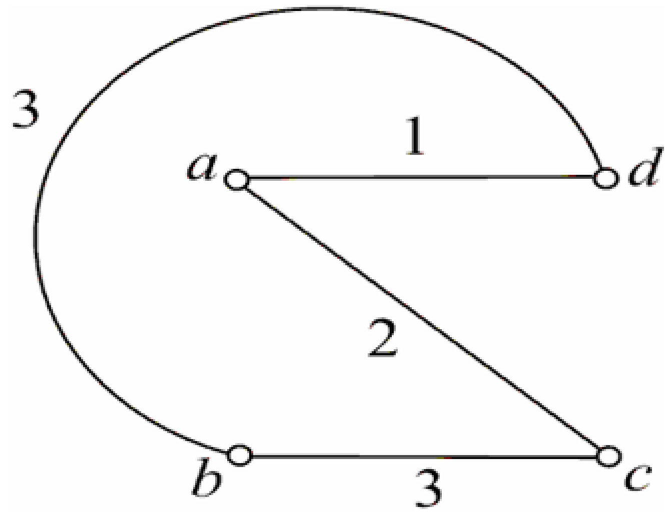
(1) K_n中有$(n-1)!$ 条不同的哈密顿回路（定义意义下）

(2) 用穷举法解货郎担问题算法的复杂度为$(n-1)!$，当n较大时，计算量惊人地大

例 求图中(1) 所示带权图K_4中最短哈密顿回路.



(1)



(2)

解 $C_1 = a\,b\,c\,d\,a$, $W(C_1)=10$

$C_2 = a\,b\,d\,c\,a$, $W(C_2)=11$

$C_3 = a\,c\,b\,d\,a$, $W(C_3)=9$

可见C_3是最短的，其权为9.

5、树

概念：

无向树，生成树，最小生成树，Kruskal

根树，m叉树，最优二叉树，Huffman算法

无向树

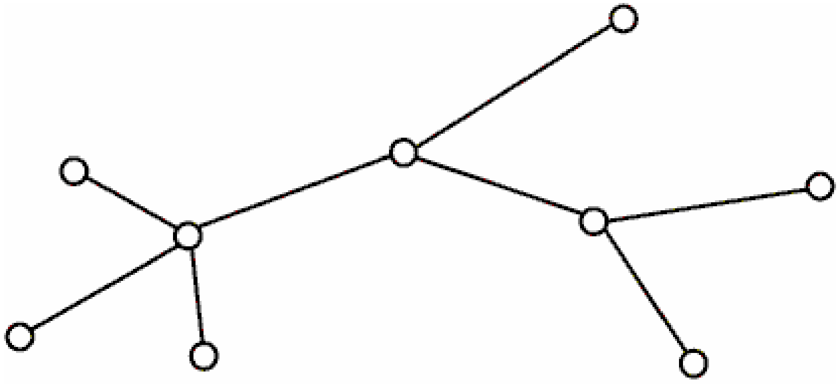
连通且无初级回路的无向图。

- 树叶——1度顶点
- 分支点——度数≥2的顶点

森林

每个连通分支都是树的无向图。

例：



无向树的等价定义

设$G=\langle V,E\rangle$是n阶m条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1) G 是树.

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无圈且 $m=n-1$.

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

(5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥.

(6) G 中没有圈，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.

证明思路

(1)⇒(2). 关键一步是, 若路径不惟一必有回路.

(2)⇒(3). 若G中有回路，则回路上任意两点之间的路径不惟一. 对n用归纳法证明$m=n-1$.

$n=1$正确. 设$n\le k$时对，证$n=k+1$时也对：取G中边e，$G-e$有且仅有两个连通分支G_1,G_2(为什么?)．$n_i\le k$，由归纳假设得$m_i=n_i-1$, $i=1,2$. 于是，$m=m_1+m_2+1=n_1+n_2-2+1=n-1$.

(3)⇒(4). 只需证明G连通. 用反证法. 否则G有s（$s\ge2$）个连通分支都是小树. 于是有$m_i=n_i-1$, ,

$$m=\sum_{i=1}^{s} m_i=\sum_{i=1}^{s} n_i-s=n-s\ (s\ge 2)$$

这与$m=n-1$矛盾.

证明思路

(4)$\Rightarrow$(5). 只需证明G 中每条边都是桥. 为此只需证明命题

“G 是 n 阶 m 条边的无向连通图，则 $m \geq n-1$”.

命题的证明: 对n归纳.

$\forall e \in E$, $G-e$只有$n-2$条边， 由命题可知$G-e$不连通， 故e为桥.

(5)$\Rightarrow$(6). 由(5)易知G为树， 由(1)$\Rightarrow$(2)知，$\forall u,v \in V$（$u \neq v$），u到v有惟一路径，加新边(u,v)得惟一的一个圈.

(6)$\Rightarrow$(1). 只需证明G连通，这是显然的.