Examen blanc - physique moderne

Instructions à lire avant de commencer l'examen
考试开始时要阅读的指示

- Durée de l'examen : 2 heures.
  考试时间：2小时。

- 5 points sur 100 sont attribués en fonction de la qualité de la rédaction. Les copies illisibles, mal présentées ou avec trop de mots en anglais seront pénalisées. Les mots en chinois ne seront pas lus.
  总分100分，其中5分根据书写质量评分。字迹难以辨认、格式混乱或含有英文单词过多的试卷会被扣分，中文内容将不被阅读。

- En fin de sujet se trouve un formulaire de mathématiques et de physique que vous pouvez utiliser sans démonstration.
  在主题的末尾有一个数学和物理公式表单，你们可以直接应用，而无需进行证明。

- L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Les autres outils électroniques (téléphone, tablette, montre connectée etc.) et tous les documents sur papier sont strictement interdits. Il est également interdit d'apporter son propre papier de brouillon.
  可以使用计算器，但不能使用任何其它电子设备（包括手机、平板电脑, 智能手表...）和参考资料，也不能带自己的草稿纸。

- Les exercices sont indépendants. Vous devez traiter tous les exercices, au moins partiellement.
  各个大题是不相关的。请尽量作答所有的大题，至少是其中一部分题目。

- Même si vous n'arrivez pas à obtenir la réponse finale, toute réflexion ou calcul pertinent sera valorisé en points.
  即使您没有得出最终答案，任何相关的思考过程和计算都会获得分数。

Qualité de la rédaction (5 points)

5 points sur 100 jugent la qualité de la rédaction. 100分中有5分用于评估写作质量。

- Les résultats seront mis en valeur ($\boxed{\text{encadrés}}$, <u>soulignés</u> ou surlignés). 结果需突出显示（用$\boxed{\text{框框}}$标出、<u>下划线</u>或高亮标记）。
- L'écriture sera lisible et la présentation sera soignée. 书写需清晰，版面需整洁。
- Les réponses seront rédigées en français. Les mots en anglais sont possibles, mais s'ils sont en excès, ce sera pénalisé. Les mots en chinois ne seront pas lus. 答案必须用法语书写。可以使用英文单词，但如果过多，将会被扣分。中文单词将不会被阅读。

Exercice 1 - Questions de cours (40 points)

1. Dans l'ensemble microcanonique, quelle est la probabilité p_i d'un micro-état i?
2. Dans l'ensemble canonique, comment s'exprime la fonction de partition Z, pour des niveaux d'énergie discrets E_i, de dégénérescence $W(E_i)$?
3. Dans l'ensemble canonique, en notant $\beta = 1/k_BT$, calculer la quantité $\partial \ln Z/\partial\beta$ puis montrer qu'elle est reliée à la moyenne de l'énergie par
$$\langle E\rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}. \tag{1}$$
4. Comment s'exprime, à une constante de proportionnalité près, la distribution des vitesses vectorielles de Maxwell $g(\vec{v})$, en fonction de la température T et de la masse des particules m?
5. Pour un gaz parfait diatomique, tracer l'allure de l'évolution de la capacité thermique molaire $C_{V,m}(T)$ en fonction de la température T, en justifiant.
6. Exprimer la différentielle du grand potentiel dJ en utilisant $J = E - TS - \mu N$ et la différentielle de l'énergie $\mathrm{d}E = T\ \mathrm{d}S - P\ \mathrm{d}V + \mu \mathrm{d}N$.
7. Donner deux exemples de particules qui sont des fermions.
8. Quelle est l'allure de la distribution de Fermi-Dirac à température nulle 0 K et à température finie $T > 0$ K?
9. Dans l'effet Doppler, quels sont les signes des décalages $\Delta f = f' - f$ et $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ dans le cas où l'émetteur s'éloigne du récepteur?
10. On mesure la longueur d'onde d'une raie d'absorption $\lambda'_K = 396,20$ nm dans le spectre d'une galaxie lointaine. En comparant avec la longueur d'onde au repos $\lambda_K = 393,37$ nm, dire si la galaxie s'éloigne ou si elle se rapproche et estimer sa vitesse v_E.

Solution

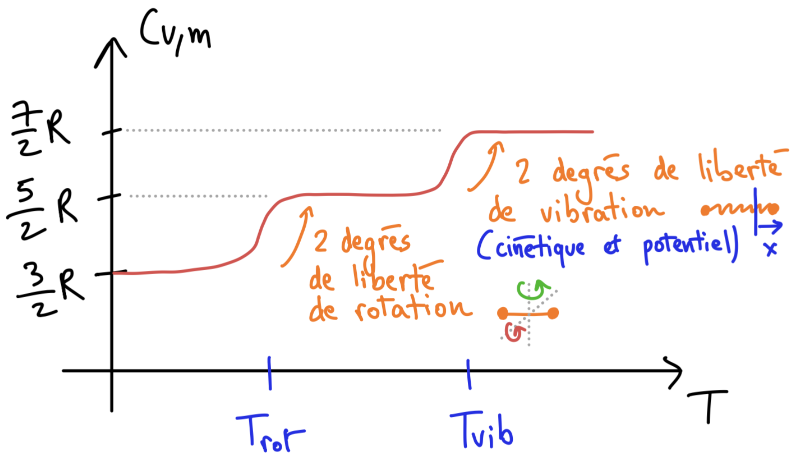
1. Dans l'ensemble microcanonique, la probabilité p_i d'un micro-état i est $\boxed{p_i = 1/W}$, avec W le nombre de micro-états accessibles au système. Les micro-états sont équiprobables (ils ont la même probabilité $1/W$).
2. Dans l'ensemble canonique, la fonction de partition Z s'exprime
$$\boxed{Z = \sum_{\{i \text{ micro-états}\}} e^{-\dfrac{E_i}{k_BT}} = \sum_{\{E_i \text{ énergies}\}} W(E_i) e^{-\dfrac{E_i}{k_BT}}} \tag{2}$$
3. On calcule, en notant $\beta = 1/k_BT$, pour des niveaux d'énergie discrets,
$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta} &= \frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sum_{\{i \text{ micro-états}\}} e^{-\beta E_i}\right) = \frac{1}{Z}\sum_{\{i \text{ micro-états}\}}(-E_i)e^{-\beta E_i} \\ &= -\sum_{\{i \text{ micro-états}\}} p_i E_i = -\langle E\rangle\end{aligned} \tag{3}$$
On trouve donc
$$\boxed{\langle E\rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta}} \tag{4}$$

4. La distribution des vitesses de Maxwell vectorielle $g(\vec{v})$ est proportionnelle au facteur de Boltzmann $\exp(-E_c/k_BT)$ avec $E_c = m\vec{v}^2/2$ l'énergie cinétique d'une particule

$$\boxed{g(\vec{v}) = Ce^{-\frac{\frac{1}{2}m\vec{v}^2}{k_BT}}} \tag{5}$$

avec C une constante indépendante de $\vec{v}$.

5. Pour un gaz parfait diatomique, à basse température $T < T_{rot}$, seuls les 3 degrés de liberté de translation dans l'énergie cinétique contribuent à l'énergie moyenne $\langle E \rangle$. Si $T_{rot} < T < T_{vib}$, deux degrés de liberté de rotation sont activés. Si $T_{vib} < T$, deux degrés de liberté de vibration sont activés (1 degré de liberté cinétique, 1 degré de liberté potentiel).

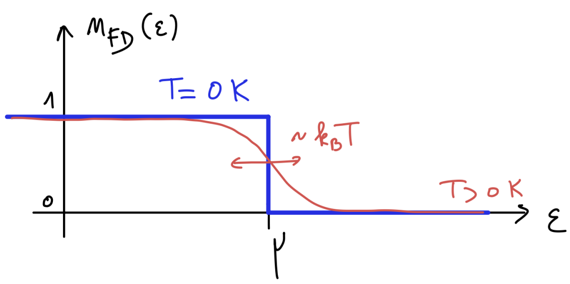


6. On calcule la différentielle

$$\mathrm{d}J = \mathrm{d}(E - TS - \mu N) = (T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N) - (T\mathrm{d}S + S\mathrm{d}T) - (\mu\mathrm{d}N + N\mathrm{d}\mu)$$
$$\boxed{\mathrm{d}J = -P\mathrm{d}V - S\mathrm{d}T - N\mathrm{d}\mu} \tag{6}$$

7. Les protons et les électrons sont des fermions.

8. Voir figure ci-dessous.



9. Lorsque l'émetteur s'éloigne du récepteur, $\boxed{\Delta f < 0}$ et $\boxed{\Delta\lambda > 0}$.

10. On mesure $\lambda'_K > \lambda_K$ donc la galaxie s'éloigne. En notant v_E la vitesse de la galaxie, en comptant $v_E > 0$ lorsque la galaxie s'éloigne (et $v_E < 0$ si elle se rapproche, donc $\vec{v}_E = -v_E\vec{u}_{ER}$ ici). La formule de l'effet Doppler donne ici $\lambda'_K = \lambda_K(1 + v_E/c)$ donc

$$\boxed{v_E = c\left(\frac{\lambda'_K}{\lambda_K} - 1\right) = 3 \times 10^8 \left(\frac{396.2}{393.37} - 1\right) = 2{,}158 \times 10^3\,\mathrm{km\,s^{-1}}} \tag{7}$$

Exercice 2 - Système d'électrons à deux niveaux (40 points)

On considère un système ouvert Σ composés d'électrons, à l'équilibre avec un thermostat à température T et un réservoir d'électrons de potentiel chimique μ.

On suppose que ce système Σ possède deux niveaux d'énergie non dégénérés $\epsilon_1 = \varepsilon$ et $\epsilon_2 = 2\varepsilon$, qui peuvent contenir des électrons. On note $\beta = 1/k_B T$.

1. Pour étudier le système Σ, dans quel ensemble statistique se place-t-on?
2. Le système Σ est-il un système de fermions ou un système de bosons?
3. Montrer que la fonction de partition du système Σ est

$$Z_G = \left(1 + e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}\right)\left(1 + e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}\right) \tag{8}$$

Pour les questions suivantes, on pourra utiliser le formulaire en fin d'énoncé (题目末尾的公式表).

4. Donner l'expression du grand potentiel J du système Σ.
5. Exprimer le nombre moyen d'électrons $\langle N \rangle$ dans le système Σ en fonction de ε, β et μ.
6. Exprimer l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ en fonction de ε, β et μ.
7. Calculer la limite à haute température $\lim\limits_{T\to+\infty} \langle N \rangle$ et commenter le résultat.
8. Calculer la limite à basse température $\lim\limits_{T\to 0} \langle N \rangle$, en distinguant les cas selon les valeurs de ϵ et μ. Commenter le résultat.
9. Déduire l'expression de l'entropie S.

Solution

1. La température T et le potentiel chimique μ du système Σ sont fixés par le contact avec le thermostat et le réservoir de particules. Donc, on se place dans l'ensemble grand canonique.
2. Les électrons sont des fermions, donc Σ est un système de fermions.
3. La fonction de partition Z_G se factorise en $Z_G = Z_1 Z_2$ avec Z_1 la fonction de partition grand canonique pour l'état d'énergie ϵ_1 et Z_2 la fonction de partition pour l'état d'énergie ϵ_2. Pour un fermion, à cause du principe d'exclusion de Pauli, les nombres d'occupation possibles sont $N = 0$ ou $N = 1$ donc

$$Z_1 = \sum_{N=0}^{1} e^{-\beta(N\epsilon_1 - N\mu)} = 1 + e^{-\beta(\epsilon_1-\mu)} = 1 + e^{-\beta\epsilon+\beta\mu} \tag{9}$$

Similairement pour l'état 2,

$$Z_2 = \sum_{N=0}^{1} e^{-\beta(N\epsilon_2 - N\mu)} = 1 + e^{-\beta(\epsilon_2-\mu)} = 1 + e^{-2\beta\epsilon+\beta\mu} \tag{10}$$

On déduit donc

$$\boxed{Z_G = Z_1 Z_2 = \left(1 + e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}\right)\left(1 + e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}\right)} \tag{11}$$

4. Le grand potentiel J s'exprime

$$\boxed{J = -k_B T \ln Z_G = -k_B T \ln\left(\left(1+e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}\right)\left(1+e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}\right)\right)} \tag{12}$$

On peut aussi écrire

$$\boxed{J = -k_B T\left(\ln\left(1+e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}\right)+\ln\left(1+e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}\right)\right)} \tag{13}$$

5. **Méthode 1 :** Le nombre moyen d'électrons $\langle N\rangle$ se calcule à partir de Z_G

$$\begin{aligned}
\langle N\rangle =& \frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z_G}{\partial\mu} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\ln\left(1+e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}\right)+\ln\left(1+e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\beta}\left(\frac{\beta e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}}{1+e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}}+\frac{\beta e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}}{1+e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}}\right)\\
&= \frac{e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}}{1+e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}}+\frac{e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}}{1+e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}}\\
&\boxed{\langle N\rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon-\beta\mu}+1}+\frac{1}{e^{2\beta\varepsilon-\beta\mu}+1}}
\end{aligned} \tag{14}$$

On pouvait aussi utiliser le calcul de $\langle N\rangle$ de la question précédente pour éviter de refaire des calculs similaires. **Méthode 2 :** On peut faire moins de calculs en utilisant directement la distribution de Fermi-Dirac qui donne la valeur moyenne du nombre d'électrons qui occupent l'état i : $\langle N_i\rangle = n_{FD}(\epsilon_i)$. Donc

$$\begin{aligned}
&\langle N\rangle = \langle N_1\rangle + \langle N_2\rangle = n_{FD}(\epsilon_1)+n_{FD}(\epsilon_2) = n_{FD}(\epsilon)+n_{FD}(2\epsilon)\\
&\boxed{\langle N\rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}+\frac{1}{e^{\beta(2\epsilon-\mu)}+1}}
\end{aligned} \tag{15}$$

6. **Méthode 1 :** L'énergie moyenne $\langle E\rangle$ se calcule à partir de Z_G

$$\begin{aligned}
\langle E\rangle &= \left(-\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\mu}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\ln Z_G = \left(-\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\mu}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\left(\ln\left(1+e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}\right)+\ln\left(1+e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}\right)\right)\\
&= -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\ln\left(1+e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}\right)+\ln\left(1+e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}\right)\right)+\frac{\mu}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\ln\left(1+e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}\right)+\ln\left(1+e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}\right)\right)\\
&= -\frac{(\mu-\epsilon)e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}}{1+e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}}-\frac{(\mu-2\epsilon)e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}}{1+e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}}+\frac{\mu}{\beta}\left(\frac{\beta e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}}{1+e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}}+\frac{\beta e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}}{1+e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}}\right)\\
&= \frac{\epsilon e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}}{1+e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}}+\frac{2\epsilon e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}}{1+e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}}\\
&\boxed{\langle E\rangle = \frac{\epsilon}{e^{\beta\varepsilon-\beta\mu}+1}+\frac{2\epsilon}{e^{2\beta\varepsilon-\beta\mu}+1}}
\end{aligned} \tag{16}$$

Méthode 2 : En fait, on pouvait faire moins de calcul et en utilisant que l'énergie moyenne $\langle E\rangle$ est la somme des énergies ϵ_i multipliées par le nombre de fermions moyen $\langle N_i\rangle$ qui occupent l'état i

$$\begin{aligned}
&\langle E\rangle = \sum_{i=1}^{2}\epsilon_i\langle N_i\rangle = \sum_{i=1}^{2}\epsilon_i n_{FD}(\epsilon_i) = \sum_{i=1}^{2}\epsilon_i\frac{1}{1+e^{\beta(\epsilon_i-\mu)}} = \frac{\epsilon_1}{1+e^{\beta(\epsilon_1-\mu)}}+\frac{\epsilon_2}{1+e^{\beta(\epsilon_2-\mu)}}\\
&\boxed{\langle E\rangle = \frac{\epsilon}{1+e^{\beta(\epsilon-\mu)}}+\frac{2\epsilon}{1+e^{\beta(2\epsilon-\mu)}}}
\end{aligned} \tag{17}$$

7. Dans la limite haute température $T \to \infty$, $\beta = 1/k_B T \to 0$, donc

$$\lim_{T\to+\infty} \langle N\rangle = \lim_{\beta\to 0}\langle N\rangle = \lim_{\beta\to 0} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} + \frac{1}{e^{\beta(2\epsilon-\mu)}+1} = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1}$$
$$\boxed{\lim_{T\to+\infty} \langle N\rangle = 1} \tag{18}$$

À haute température, chaque état est occupé en moyenne par 1/2 électron.

8. Dans la limite basse température $T \to 0$, $\beta = 1/k_B T \to +\infty$, donc

- si $2\epsilon < \mu$, alors $\epsilon - \mu < 0$ et $2\epsilon - \mu < 0$, donc

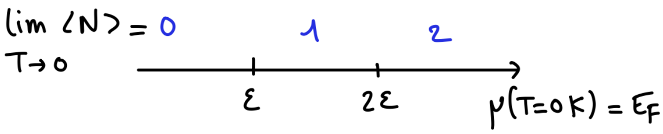
$$\lim_{T\to 0} \langle N\rangle = \lim_{\beta\to+\infty}\langle N\rangle = \lim_{\beta\to+\infty} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} + \frac{1}{e^{\beta(2\epsilon-\mu)}+1} = \frac{1}{0+1} + \frac{1}{0+1}$$
$$\boxed{\lim_{T\to 0} \langle N\rangle = 2, \quad 2\epsilon < \mu} \tag{19}$$

- si $\epsilon < \mu < 2\epsilon$, alors $\epsilon - \mu < 0$ et $2\epsilon - \mu > 0$, donc

$$\lim_{T\to 0} \langle N\rangle = \lim_{\beta\to+\infty}\langle N\rangle = \lim_{\beta\to+\infty} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} + \frac{1}{e^{\beta(2\epsilon-\mu)}+1} = \frac{1}{0+1} + 0$$
$$\boxed{\lim_{T\to 0} \langle N\rangle = 1, \quad \epsilon < \mu < 2\epsilon} \tag{20}$$

- si $\mu < \epsilon$, alors $\epsilon - \mu > 0$ et $2\epsilon - \mu > 0$, donc

$$\lim_{T\to 0} \langle N\rangle = \lim_{\beta\to+\infty}\langle N\rangle = \lim_{\beta\to+\infty} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} + \frac{1}{e^{\beta(2\epsilon-\mu)}+1} = 0 + 0$$
$$\boxed{\lim_{T\to 0} \langle N\rangle = 0, \quad \mu < \epsilon} \tag{21}$$



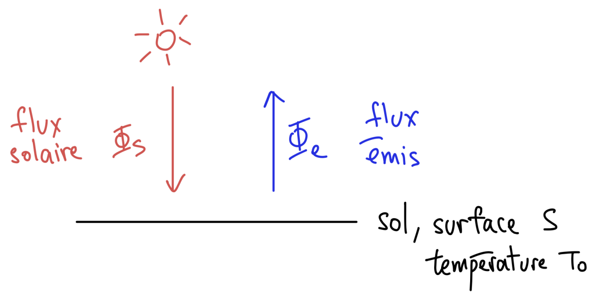
On retrouve qu'à température nulle, les états d'énergie $E < \mu(T = 0\,\mathrm{K}) = E_F$, avec E_F l'énergie de Fermi sont remplis : $n_{FD}(E) = 1$, alors que les états d'énergie $E > E_F$ sont vides : $n_{FD}(E) = 0$.

9. L'entropie s'exprime

$$\begin{aligned} S &= \frac{\langle E\rangle}{T} - \frac{\mu\langle N\rangle}{T} - \frac{J}{T} \\ &= \frac{1}{T}\Bigg(\frac{\epsilon}{1+e^{\beta(\epsilon-\mu)}} + \frac{2\epsilon}{1+e^{\beta(2\epsilon-\mu)}} - \mu\left(\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} + \frac{1}{e^{\beta(2\epsilon-\mu)}+1}\right) \\ &\qquad - \left[-k_B T\left(\ln\left(1+e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}\right) + \ln\left(1+e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}\right)\right)\right]\Bigg) \end{aligned}$$
$$\boxed{S = \frac{1}{T}\left(\frac{\epsilon-\mu}{1+e^{\beta(\epsilon-\mu)}} + \frac{2\epsilon-\mu}{1+e^{\beta(2\epsilon-\mu)}}\right) + k_B\left(\ln\left(1+e^{-\beta\varepsilon+\beta\mu}\right) + \ln\left(1+e^{-2\beta\varepsilon+\beta\mu}\right)\right)} \tag{22}$$

Exercice 3 - Effet de serre d'une vitre idéale (15 points)

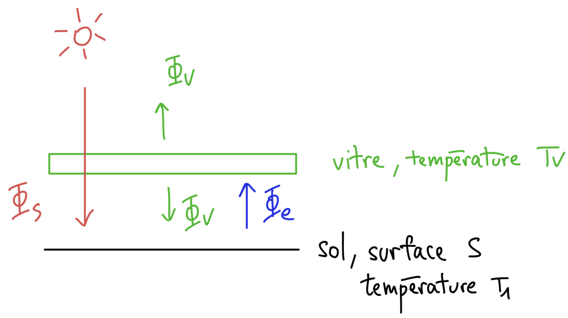
Le sol est assimilable à un corps noir émettant un rayonnement thermique de flux surfacique $\Phi_e = \sigma T_0^4$, avec la constante de Stefan $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2/K^4}$. Il reçoit le rayonnement solaire, de flux surfacique Φ_S (voir figure ci-dessous).



1. À l'équilibre thermique, exprimer la température d'équilibre du sol T_0 en fonction de Φ_S et de σ.

2. Calculer la valeur numérique de T_0 avec $\Phi_S = 1$ kW.m^{-2} et la commenter.

On place maintenant une vitre (玻璃) au-dessus de la surface du sol, qu'on modélise comme un corps noir de température T_V. La vitre est supposée totalement transparente (透明) au rayonnement solaire (situé principalement dans le domaine visible et dans le proche infrarouge) et totalement absorbante (吸收的) au rayonnement émis par le sol (situé dans l'infrarouge lointain). Les différents flux sont représentés dans la figure ci-dessous.



3. En présence de la vitre, en effectuant deux bilans énergétiques, écrire deux équations qui permettent de trouver la température de la vitre T_V et la température du sol T_1.

4. Résoudre ces deux équations pour calculer la température T_1 du sol et commenter le résultat en comparant T_1 à T_0.

Solution

1. À l'équilibre thermique, un corps noir émet une puissance égale à celle absorbée. Les flux vérifient donc $\Phi_S = \Phi_e = \sigma T_0^4$ donc

$$\boxed{T_0 = \left(\frac{\Phi_S}{\sigma}\right)^{1/4}} \tag{23}$$

2. L'application numérique donne

$$T_0 = \left(\frac{\Phi_S}{\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{10^3}{5,67 \times 10^{-8}}\right)^{1/4} = \underline{364\,\mathrm{K} = 91.3°\mathrm{C}} \tag{24}$$

Cette valeur est très élevée. En fait, il aurait fallu tenir compte de l'albedo A du sol pour avoir une température plus réaliste.

3. On effectue un bilan d'énergie sur le sol (température T_1) et sur la vitre (température T_V), tous deux à l'équilibre thermique, donc la puissance émise est égale à celle absorbée.

   - équilibre thermique du sol : $\boxed{\Phi_S + \sigma T_V^4 = \sigma T_1^4}$;
   - équilibre thermique de la vitre : $\boxed{\sigma T_1^4 = 2\sigma T_V^4}$ car la vitre émet par ses deux faces, vers le sol et vers l'extérieur.

4. La combinaison de ces deux équations donne : $\Phi_S = \sigma T_V^4$ (cela traduit l'équilibre thermique du système { vitre + sol }). Donc $T_V = 364\,\mathrm{K}$ et la nouvelle température d'équilibre du sol T_1 est donc

$$\boxed{T_1 = 2^{1/4} T_V = 433\,\mathrm{K} = 160\,^\circ\mathrm{C}} \tag{25}$$

   Elle est $2^{1/4} \simeq 1.2$ fois plus grande qu'en l'absence de vitre ($T_1 = 2^{1/4} T_0$): c'est l'effet de serre.

Formulaire mathématique

- Formule de Stirling : $\ln N! \sim N \ln N - N$, $N \gg 1$.

Ensemble canonique, ensemble grand canonique

Ensemble statistique	Ensemble canonique	Ensemble grand canonique
Potentiel thermodynamique	$F = -k_B T \ln Z$	$J = -k_B T \ln Z_G$
Transformée de Legendre	$F = \langle E \rangle - TS$	$J = \langle E \rangle - TS - \mu \langle N \rangle$ $J = -pV$
Valeurs moyennes	$\langle E \rangle = -\dfrac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$	$\langle N \rangle = \dfrac{1}{\beta} \dfrac{\partial \ln Z_G}{\partial \mu}$ $\langle E \rangle = \left(-\dfrac{\partial}{\partial \beta} + \dfrac{\mu}{\beta} \dfrac{\partial}{\partial \mu} \right) \ln Z_G$
Moments quadratiques	$\left\langle E^2 \right\rangle = \dfrac{1}{Z} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}$	$\left\langle N^2 \right\rangle = \dfrac{1}{\beta^2} \dfrac{1}{Z_G} \dfrac{\partial^2 Z_G}{\partial \mu^2}$ $\left\langle E^2 \right\rangle = \dfrac{1}{Z_G} \left[-\dfrac{\partial}{\partial \beta} + \dfrac{\mu}{\beta} \dfrac{\partial}{\partial \mu} \right]^2 Z_G$
Entropie	$S = \dfrac{\langle E \rangle - F}{T}$	$S = \dfrac{\langle E \rangle}{T} - \dfrac{\mu \langle N \rangle}{T} - \dfrac{J}{T}$
Pression	$p = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N}$	$p = -\dfrac{J}{V} = -\left(\dfrac{\partial J}{\partial V} \right)_{T,\mu}$

Rayonnement d'équilibre thermique, rayonnement du corps noir

La fonction de partition d'un gaz de photons à une température T et dans un volume V s'exprime

$$\ln Z_G = -\frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \ln \left(1 - e^{-\beta \hbar \omega} \right) \tag{26}$$

avec $\beta = 1/k_B T$.

Le spectre de Planck est, en longueur d'onde λ,

$$u_\lambda(\lambda, T) = \left(\frac{8\pi hc}{\lambda^5} \right) \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}. \tag{27}$$

En pulsation ω, le spectre de Planck s'écrit

$$u_\omega(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1} \tag{28}$$

Statistiques quantiques

Pour des fermions, la distribution de Fermi-Dirac s'exprime

$$n_{FD}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}} + 1}. \tag{29}$$

Pour des bosons, la distribution de Bose-Einstein s'exprime

$$n_{BE}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}} - 1}. \tag{30}$$

Effet Doppler classique

Pour l'effet Doppler classique ($v_R, v_E \ll 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$), la fréquence reçue f' en fonction de la fréquence émise f s'exprime

$$f' = f\frac{1 - \dfrac{\vec{v}_R \cdot \vec{u}_{ER}}{c}}{1 - \dfrac{\vec{v}_E \cdot \vec{u}_{ER}}{c}} \tag{31}$$

où $\vec{v}_E$, $\vec{v}_R$ sont respectivement la vitesse de l'émetteur E et du récepteur R et $\vec{u}_{ER} = \overrightarrow{ER}/ER$ est le vecteur unitaire dirigé de E vers R.