华 东 理 工 大 学

复 变 函 数 与 积 分 变 换 作 业 （第 6 册）

第十一次作业

教学内容：5.3 利用留数计算实积分 5.4 对数留数与辐角原理 6.1 Fourier 积分公式 6.2 Fourier 变换

1 计算下列积分：

(1) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}, 0<b<a$；

解：设 $z=e^{i\theta}$，$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$

原式

$$=\oint_{|z|=1}\frac{1}{a+b\frac{z^2+1}{2z}}\frac{1}{iz}dz$$

$$=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{2}{bz^2+2az+b}dz=2\pi i\frac{2}{i}\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{bz^2+2az+b},\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}]=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$；

令 $f(z)=\frac{\mathrm{z}^2-z+2}{z^4+10\mathrm{z}^2+9}$ 则 $f(z)$ 在上半平面有两个一级极点 $z_1=i, z_2=3i$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),z_1]=\frac{z^2-z+2}{(z^4+10z^2+9)'}\Big|_{z_1=i}=-\frac{1}{16}(1+i)$$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),z_1]=\frac{z^2-z+2}{(z^4+10z^2+9)'}\Big|_{z=3i}=\frac{3-7i}{48}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx=2\pi i[-\frac{1}{16}(1+i)+\frac{3-7i}{48}]=\frac{5}{12}\pi$$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}$

解 ： 令 $f(z)=\frac{1}{1+z^4}$ $f(z)$ 在 上 半 平 面 上 有 两 个 一 级 极 点 $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$

$$\operatorname{Re}s[f(z),z_1]=\left.\frac{1}{(1+z^4)'}\right|_{z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}=-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)$$

$$\operatorname{Re}s[f(z),z_2]=\left.\frac{1}{(1+z^4)'}\right|_{z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)}=\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=2\pi i[-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)+\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)]=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx,(a>0,b>0)$;

解：令 $f(z)=\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{iax}}{x^2+b^2}dx=2\pi i[f(z),bi]=2\pi i\frac{ze^{iaz}}{(z^2+b^2)'}_{z=bi}=\pi ie^{-ab}$$

所以 $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{iax}}{x^2+b^2}dx=\frac{1}{2}\pi e^{-ab}$

（5） $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos xdx}{(x^2+4x+5)^2}$

所求的积分是积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+4x+5)^2}dx$ 的实部

而 $I=2\pi i\operatorname{Re}s[\frac{e^{iz}}{(z^2+4z+5)^2},-2+i]$

$$=2\pi i[\frac{e^{iz}}{(z+2+i)^2}]'\Big|_{z=i-2}$$

$$=\pi e^{-1-2i}$$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+4x+5)^2}dx=\frac{\pi}{e}\cos 2$

2．证明方程 $z^7-z^3+12=0$ 的根都在圆环域 $1\le|z|\le 2$ 内。

证明：当 $|z|<2$ 时，取 $f(z)=z^7$， $g(z)=12-z^3$，当 $|z|=2$ 时，

$|g(z)|=|12-z^3|\le|12+z^3|\le 20<|z^7|=|f(z)|$

所以， $z^7-z^3+12=0$ 的根与 z^7 的根的个数相同，因此， $z^7-z^3+12=0$ 的根全部在 $|z|=2$ 内部

当 $|z|<1$ 时，取 $f(z)=12$， $g(z)=z^7-z^3$

当 $|z|=1$ 时，$|f(z)|>|z^7|+|z^3|\ge|z^7-z^3|=|g(z)|$

故 $z^7-z^3+12=0$ 的根与 12 的根个数相同，即在 $|z|=1$ 内无根。

综上所述， $z^7-z^3+12=0$ 的根都在圆环域 $1\le|z|\le 2$ 内

3、 求下列函数的 Fourier 积分变换

（1） $f(t)=\begin{cases}-1 & -1<t<0\\ 1 & 0<t<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

解： $\mathcal{F}[\mathrm{f(t)}]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-1}^{0}-e^{-it}dt+\int_{0}^{1}e^{-it}dt$

$=\frac{1}{i\omega}\cdot e^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{0}-\frac{1}{i\omega}\cdot e^{-i\omega t}\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{i\omega}(1-e^{i\omega}-e^{-i\omega}+1)=\frac{-2i}{\omega}(1-\cos\omega)$

（2） $f(t)=\begin{cases}e^{t} & t\le 0\\ 0 & t>0\end{cases}$

解：$\mathcal{F}[\mathrm{f(t)}]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{t}e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{(1-i\omega)t}dt$

$=\frac{1}{1-i\omega}\cdot e^{(1-i\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{1-i\omega}$

4 求下列函数的 Fourier 变换，并证明所列的积分等式

（1）$f(t)=e^{-|t|}\cos t,$　　证明$\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t$

解：

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|r|}\cos te^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|r|}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{[1+i(1-\omega)]t}dt+\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{[1-i(1+\omega)]t}dt+\int_0^{+\infty}e^{[-1+i(1-\omega)]t}dt+\int_0^{+\infty}e^{[-1-i(1+\omega)]t}dt\right.\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{e^{[1+i(1-\omega)]t}\Big|_{-\infty}^{0}}{1+i(1-\omega)}+\frac{e^{[1-i(1+\omega)]t}\Big|_{-\infty}^{0}}{1-i(1+\omega)}+\frac{e^{[-1+i(1-\omega)]t}\Big|_{0}^{+\infty}}{-1+i(1-\omega)}+\frac{e^{[-1-i(1+\omega)]t}\Big|_{0}^{+\infty}}{-1-i(1+\omega)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+i(1-\omega)}+\frac{1}{1-i(1+\omega)}+\frac{1}{1-i(1-\omega)}+\frac{1}{1+i(1+\omega)}\right\}=\frac{2\omega^2+4}{\omega^4+4}$$

$f(t)$的积分表达式为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\omega^2+4}{\omega^4+4}e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2\omega^2+4}{\omega^4+4}\cos\omega t d\omega$$

因此有$\int_0^{+\infty}\frac{2\omega^2+4}{\omega^4+4}\cos\omega t d\omega=\frac{\pi}{2}f(t)=\frac{\pi}{2}e^{-|r|}\cos t$

（2）$f(t)=e^{-\beta|t|}(\beta>0)$，证明$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}$

解：$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta|r|}e^{-i\omega t}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\cos\omega t dt=2\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\frac{e^{\omega i t}+e^{-i\omega t}}{2}dt$

$$=\int_0^{+\infty}[e^{-(\beta-i\omega)t}+e^{-(\beta+i\omega)t}]dt=\frac{e^{-(\beta-i\omega)t}\Big|_0^{+\infty}}{-(\beta-i\omega)}+\frac{e^{-(\beta-i\omega)t}\Big|_0^{+\infty}}{-(\beta+i\omega)}$$

$$=\frac{1}{\beta-i\omega}+\frac{1}{\beta+i\omega}=\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$$

$f(t)$的积分表达式为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}e^{i\omega t}d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t d\omega$$

即：$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}$

第十二次作业

教学内容 ：6.3 δ 函数及其 Fourier 变换；6.4Fourier 变换的性质

1．填空

（1） $f(t)=\frac{1}{2}[\delta(t+a)+\delta(t-a)$ Fourier 变换为 $\underline{\cos\omega a}$

(2) 函数 $F(\omega)=\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$ 的 Fourier 逆变换为 $\underline{\cos\omega_0 t}$

（3） $f(t)=\sin t\cos t$ Fourier 变换为 $\underline{\frac{\pi i}{2}[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)]}$

2． 若 $F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]$，证明

$$\mathcal{F}\left[f(t)\cos\omega_0 t\right]=\frac{1}{2}\left[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)\right];$$

$$\mathcal{F}\left[f(t)\sin\omega_0 t\right]=\frac{1}{2i}\left[F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)\right].$$

证：$\mathcal{F}\left[f(t)\cos\omega_0 t\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}e^{-i\omega t}dt$

$$=\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i(\omega-\omega_0)t}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i(\omega+\omega_0)t}dt]$$
$$=\frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)]$$

$\mathcal{F}\left[f(t)\sin\omega_0 t\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}}{2i}e^{-i\omega t}dt$

$$=\frac{1}{2i}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t}dt-\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i(\omega+\omega_0)t}dt]$$
$$=\frac{1}{2i}[F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)]$$

3．求下列函数的 Fourier 变换

（1）$f(t)=e^{2it}\sin t$

解：因为$\mathcal{F}[\mathrm{sint}]=i\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)$，由位移性质得

$\mathcal{F}[e^{2it}\sin t]=i\pi[\delta(\omega-1)-\delta(\omega-3)]$

（2）$f(t)=\sin^2 t$

解：$\mathcal{F}[\sin^2\mathrm{t}]=\mathcal{F}\ [\frac{1}{2}(1-\cos 2\mathrm{t})]=\ \frac{1}{2}\mathcal{F}[1]-\frac{1}{2}\ \ \mathcal{F}[\cos 2t]$

$$=\pi\delta(\omega)-\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]$$

（3）$f(t)=e^{i\omega_0 t}u\left(t\right)$

解：由像函数的位移性质及$\mathcal{F}[u(t)]=\dfrac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$得

$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}u(t)]=\dfrac{1}{i(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)$

（4）$f(t)=e^{-\beta t}u(t)\cdot\cos\omega_0 t$

解：$\mathcal{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta t}u(t)\cos\omega_0 te^{-i\omega t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\ \dfrac{e^{-i\omega_0 t}+e^{i\omega_0 t}}{2}e^{-i\omega t}dt$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(e^{-[\beta+i(\omega-\omega_0)]t}+e^{-[\beta+i(\omega+\omega)]t_0})dt=\frac{1}{2}(\frac{1}{\beta+i(\omega-\omega_0)}+\frac{1}{\beta+i(\omega+\omega_0)})$$

$$=\frac{\beta+i\omega}{(\beta+i\omega)^2+\omega_0^2}$$

4 设$\mathcal{F}\left[f(t)\right]=F(\omega)$，$a$为非零常数，试证明

（1）$\mathcal{F}\left[f(at-t_0)\right]=\dfrac{1}{|a|}F(\dfrac{\omega}{a})e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$

（2）$\mathcal{F}\left[f(t_0-at)\right]=\dfrac{1}{|a|}F(-\dfrac{\omega}{a})e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$

证明：（1）由定义有

$$\mathcal{F}\left[f(at-t_0)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at-t_0)e^{-i\omega t}dt$$

$$(\text{令}at-t_0=u,\text{且}a>0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\omega\frac{u+t_0}{a}}\frac{1}{a}du$$

（u 换为 t） $$=\frac{1}{a}e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\frac{\omega}{a}t}dt$$

$$=\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$$

当 $a<0$ 时，$\mathcal{F}\left[f(at-t_0)\right]=-\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$

因此$\mathcal{F}\left[f(at-t_0)\right]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$

注：也可以由位移性质和相似性质加以证明。例如令 g（t）$=f(at)$ 由位移性质得

$$\mathcal{F}\left[f(at-t_0)\right]=\mathcal{F}\left[f[a(t-\frac{t_0}{a})]\right]=\mathcal{F}\left[g(t-\frac{t_0}{t})\right]=\mathcal{F}\left[g(t)e^{-i\omega\frac{t_0}{a}}\right]$$

$$=\mathcal{F}\left[f(at)e^{-i\omega\frac{t_0}{a}}\right]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$$ （相似性质）

（2）在结论（1）中取a,t_0分别为$-a,-t_0$即得。

注; 此题也可由定义出发证明，或利用位移性质和相似性质证明。

5 已知 $F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]$，利用 Fourier 变换的性质求下列函数的 Fourier 变换

（1）$tf(t)$

解：由像函数的微分性质，有$\mathcal{F}[tf(t)]=-\frac{1}{i}F'(\omega)$

（2）$(t-2)f(t)$

解：由线性性质及像函数的微分性质

$$\mathcal{F}[(t-2)f(t)]=\mathcal{F}[tf(t)]-2\mathcal{F}[f(t)]=-\frac{1}{i}F'(\omega)-2F(\omega)$$

（3）$tf'(t)$

解：由微分性质

$\mathcal{F}[f'(t)]=i\omega F(\omega)$，再由像函数的微分性质，有

$$\mathcal{F}[tf'(t)]=-\frac{1}{i}\frac{d}{d\omega}[i\omega F(\omega)]=-F(\omega)-\omega F'(\omega).$$

（4）$f(1-t)$

解：由相似性质$\mathcal{F}\ [f(-t)]=F(-\omega)$

再由位移性质

$\mathcal{F}[f(1-t)]=e^{-i\omega}F(-\omega)$

6.求函数 $f(t)=\sin(5t+\frac{\pi}{3})$ 的 Fourier 变换.

解：$\mathcal{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(5t+\frac{\pi}{3})e^{-i\omega t}dt$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(5t+\sqrt{3}\cos 5t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2}i\pi[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)]+\frac{\sqrt{3}}{2}\pi[\delta(\omega+5)+\delta(\omega-5)]$$

$$=\frac{1}{2}\pi[(\sqrt{3}+i)\delta(\omega+5)+(\sqrt{3}-i)\delta(\omega-5)]$$

解二：由于 $f(t)=\sin(5t+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\sin 5\mathrm{t}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5t$

所以$\mathcal{F}[f(t)]=\frac{i\pi}{2}[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)]+\frac{\sqrt{3}}{2}\pi[\delta(\omega+5)+\delta(\omega-5)]$