数学分析（上）

数学学院

靳勇飞

2024 年 9 月

什么是实数

实数是什么？

什么是实数

什么是实数？

什么是实数

什么是有理数？

什么是实数

什么是整数？

什么是实数

什么是自然数？

什么是实数

什么是自然数？

思考讨论

搜索讨论“自然数的皮亚诺公理”，并思考为什么可以用数学归纳法来证明有关自然数的一些结论？

什么是实数

什么是整数？

什么是实数

什么是整数？

思考讨论

自然数集中添上所有的“负自然数”可以得到整数集。那么这些“负自然数”怎么定义和确定？

什么是实数

什么是有理数？

什么是实数

什么是有理数？

思考讨论

整数集中添上不能整除的那些“商”可以得到有理数集。那么这些“商”怎么定义和确定？

什么是实数

什么是实数？

什么是实数

什么是实数？

思考讨论

有理数集中添上“无理数”可以得到实数集。那么这些“无理数”怎么定义和确定？

什么是实数

什么是实数？

思考讨论

有理数集中添上“无理数”可以得到实数集。那么这些“无理数”怎么定义和确定？

1. 开方开不尽的数

什么是实数

什么是实数？

思考讨论

有理数集中添上“无理数”可以得到实数集。那么这些“无理数”怎么定义和确定？

1. 开方开不尽的数
2. 无限不循环小数

什么是实数

什么是实数？

思考讨论

有理数集中添上“无理数”可以得到实数集。那么这些“无理数”怎么定义和确定？

1. 开方开不尽的数
2. 无限不循环小数
3. 把有理数之间的缝隙都填上

什么是实数

什么是实数?

思考讨论

有理数集中添上“无理数”可以得到实数集。那么这些“无理数”怎么定义和确定?

1. 开方开不尽的数
2. 无限不循环小数
3. 把有理数之间的缝隙都填上
4. 让数轴上每一个点对应一个数

什么是实数

什么是实数？

思考讨论

有理数集中添上“无理数”可以得到实数集。那么这些“无理数”怎么定义和确定？

1. 开方开不尽的数
2. 无限不循环小数
3. 把有理数之间的缝隙都填上
4. 让数轴上每一个点对应一个数
5. 还有其他想法不？

什么是实数

什么是实数？

思考讨论

有理数集中添上“无理数”可以得到实数集。那么这些“无理数”怎么定义和确定？

1. 开方开不尽的数
2. 无限不循环小数
3. 把有理数之间的缝隙都填上
4. 让数轴上每一个点对应一个数
5. 还有其他想法不？

思考讨论

搜索了解、讨论：代数数，超越数

有理数集

从现在开始我们只知道有理数，不知道实数！

有理数集

有理数集 $\mathbb{Q}$ 上定义了加法 $+$，使得加法满足下面的性质：

1. 【封闭的】$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, x + y \in \mathbb{Q}.$
2. 【交换的】$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, x + y = y + x.$
3. 【结合的】$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, \forall z \in \mathbb{Q}, (x + y) + z = x + (y + z).$
4. 【加法有幺元】$\exists \theta \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{Q}, x + \theta = \theta + x = x.$
   满足这个条件的 θ 是唯一的，记为 0.
5. 【每个元素有加法逆元】$\forall x \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{Q}, x + y = y + x = 0.$
   满足这个条件的 y 是唯一的，记为 $-x$.

减法的定义为：

$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}$，$x - y \triangleq x + (-y).$

有理数集

有理数集 $\mathbb{Q}$ 上定义了加法 $+$，使得加法满足下面的性质：

1. 【封闭的】$\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},\ x + y \in \mathbb{Q}$.
2. 【交换的】$\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},\ x + y = y + x$.
3. 【结合的】$\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},\ \forall z \in \mathbb{Q},\ (x + y) + z = x + (y + z)$.
4. 【加法有幺元】$\exists \theta \in \mathbb{Q},\ \forall x \in \mathbb{Q},\ x + \theta = \theta + x = x$.
   满足这个条件的 θ 是唯一的，记为 0.
5. 【每个元素有加法逆元】$\forall x \in \mathbb{Q},\ \exists y \in \mathbb{Q},\ x + y = y + x = 0$.
   满足这个条件的 y 是唯一的，记为 $-x$.

事实

有理数集 $\mathbb{Q}$ 在加法下是一个交换群。
$(\mathbb{Q}, +)$ 是交换群。

减法的定义为：
$\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q}$，$x - y \triangleq x + (-y)$.

有理数集

有理数集上定义了乘法 $\cdot$，使得乘法满足下面的性质：

1. 【封闭的】$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q},\ x \cdot y \in \mathbb{Q}.$
2. 【交换的】$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q},\ x \cdot y = y \cdot x.$
3. 【结合的】$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, \forall z \in \mathbb{Q},\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$
4. 【乘法有幺元】$\exists e \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{Q},\ x \cdot e = e \cdot x = x.$
   满足这个条件的 e 是唯一的，记为 1.
5. 【非零元有乘法逆元】$\forall x \in \mathbb{Q}$, 若 $x \neq 0$, $\exists y \in \mathbb{Q}$, 使得 $x \cdot y = y \cdot x = 1$.
   满足这个条件的 y 是唯一的，记为 $\frac{1}{x}$.

除法的定义为：

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q},\quad y \neq 0,\ x \div y = \frac{x}{y} \triangleq x \cdot \frac{1}{y}.$$

有理数集

有理数集上定义了乘法 ·，使得乘法满足下面的性质：

1. 【封闭的】$\forall x \in \mathbb{Q}$, $\forall y \in \mathbb{Q}$, $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.
2. 【交换的】$\forall x \in \mathbb{Q}$, $\forall y \in \mathbb{Q}$, $x \cdot y = y \cdot x$.
3. 【结合的】$\forall x \in \mathbb{Q}$, $\forall y \in \mathbb{Q}$, $\forall z \in \mathbb{Q}$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
4. 【乘法有幺元】$\exists e \in \mathbb{Q}$, $\forall x \in \mathbb{Q}$, $x \cdot e = e \cdot x = x$.
   满足这个条件的 e 是唯一的，记为 1.
5. 【非零元有乘法逆元】$\forall x \in \mathbb{Q}$, 若 $x \neq 0$, $\exists y \in \mathbb{Q}$, 使得 $x \cdot y = y \cdot x = 1$.
   满足这个条件的 y 是唯一的，记为 $\frac{1}{x}$.

事实

非零有理数集 $\mathbb{Q} - \{0\}$ 在乘法下是一个交换群。
$(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ 是交换群。

除法的定义为：

$$\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},\ \ y \neq 0,\ x \div y = \frac{x}{y} \triangleq x \cdot \frac{1}{y}.$$

有理数集

有理数集上的加法、乘法还满足下面的性质：

1. 【分配的】$\forall x \in \mathbb{Q}$, $\forall y \in \mathbb{Q}$, $\forall z \in \mathbb{Q}$,

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

有理数集

有理数集上的加法、乘法还满足下面的性质：

1. 【分配的】$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, \forall z \in \mathbb{Q}$,

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

事实

有理数集在加法、乘法下是一个域，称为有理数域。
$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 是域。

有理数集

有理数集上的加法、乘法还满足下面的性质：

1. 【分配的】$\forall x \in \mathbb{Q}$, $\forall y \in \mathbb{Q}$, $\forall z \in \mathbb{Q}$,

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

事实

有理数集在加法、乘法下是一个域，称为有理数域。
$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 是域。

思考讨论

搜索了解、讨论抽象概念：群，环，域

有理数集

事实 (有理数和整数的关系)

每个整数是有理数。任何有理数都等于某两个整数的商。

有理数集

事实 (有理数和整数的关系)

每个整数是有理数。任何有理数都等于某两个整数的商。

事实 (有理数和整数的关系)

$\forall x \in \mathbb{Q},\ x > 0$，则存在互质的自然数 $m, n \in \mathbb{N}^+$，使得 $x = \dfrac{n}{m}$.

有理数集

事实 (有理数和整数的关系)

每个整数是有理数。任何有理数都等于某两个整数的商。

事实 (有理数和整数的关系)

$\forall x \in \mathbb{Q},\ x > 0$，则存在互质的自然数 $m, n \in \mathbb{N}^+$，使得 $x = \dfrac{n}{m}$.

事实

$0 \neq 1$.

有理数集

有理数集上定义了“小于 $<$”，满足下面的性质：

1. $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q},$

   $x < y,\ x = y,\ y < x$ 三者有并且只有一个成立。

2. $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, \forall z \in \mathbb{Q},$

   如果 $x < y,\ y < z,$ 那么 $x < z.$

符号 $y > x$ 等价于 $x < y.$
符号 $x \leqslant y$ 表示“$y < x$ 的否定”，也就是“$x < y$ 或 $x = y$”
符号 $x \geqslant y$ 表示“$x < y$ 的否定”，也就是“$y < x$ 或 $x = y$”，也就是“$x > y$ 或 $x = y$”

有理数集

有理数集上定义了“小于 $<$”，满足下面的性质：

1. $\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q}$,
$$x < y,\ x = y,\ y < x \text{ 三者有并且只有一个成立。}$$
2. $\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},\ \forall z \in \mathbb{Q}$,
$$\text{如果 } x < y,\ y < z, \text{ 那么 } x < z.$$

事实

有理数集按照 $<$ 是一个有序集。
$(\mathbb{Q}, <)$ 是有序集。

符号 $y > x$ 等价于 $x < y$.
符号 $x \leqslant y$ 表示“$y < x$ 的否定”，也就是“$x < y$ 或 $x = y$”
符号 $x \geqslant y$ 表示“$x < y$ 的否定”，也就是“$y < x$ 或 $x = y$”，也就是“$x > y$ 或 $x = y$”

有理数集

$\leqslant$ 是有理数集上的序关系：

1. 【自反性】$\forall x \in \mathbb{Q},\ x \leqslant x.$
2. 【反对称性】$\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},$
   如果 $x \leqslant y,\ y \leqslant x$, 那么 $x = y.$
3. 【传递性】$\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},\ \forall z \in \mathbb{Q},$
   如果 $x \leqslant y,\ y \leqslant z$, 那么 $x \leqslant z.$

有理数集

$\leqslant$ 是有理数集上的序关系：

1. 【自反性】$\forall x \in \mathbb{Q},\ x \leqslant x$.
2. 【反对称性】$\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q}$,
   如果 $x \leqslant y,\ y \leqslant x$, 那么 $x = y$.
3. 【传递性】$\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},\ \forall z \in \mathbb{Q}$,
   如果 $x \leqslant y,\ y \leqslant z$, 那么 $x \leqslant z$.

事实

有理数集按照 $\leqslant$ 是一个全序集。$(\mathbb{Q}, \leqslant)$ 是全序集。

$\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q}$,

$$x \leqslant y,\ y \leqslant x \text{ 中至少有一个成立。}$$

有理数集

$\leqslant$ 是有理数集上的序关系：

1. 【自反性】$\forall x \in \mathbb{Q},\ x \leqslant x.$
2. 【反对称性】$\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},$

$$\text{如果 } x \leqslant y,\ y \leqslant x,\ \text{那么 } x = y.$$

3. 【传递性】$\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},\ \forall z \in \mathbb{Q},$

$$\text{如果 } x \leqslant y,\ y \leqslant z,\ \text{那么 } x \leqslant z.$$

事实

有理数集按照 $\leqslant$ 是一个全序集。$(\mathbb{Q}, \leqslant)$ 是全序集。

$\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},$

$$x \leqslant y,\ y \leqslant x \text{ 中至少有一个成立。}$$

思考讨论

搜索了解抽象概念：偏序集

有理数集

有理数集上的加法 +、乘法 ·、小于 < 之间满足下面的性质：

1. $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, \forall z \in \mathbb{Q},$

$$\text{如果 } x < y, \text{ 那么 } x + z < y + z.$$

2. $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, \forall z \in \mathbb{Q},$

$$\text{如果 } x > 0,\ y > 0, \text{ 那么 } x \cdot y > 0.$$

有理数集

有理数集上的加法 $+$、乘法 $\cdot$、小于 $<$ 之间满足下面的性质：

1. $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, \forall z \in \mathbb{Q},$
$$\text{如果 } x < y, \text{ 那么 } x + z < y + z.$$
2. $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, \forall z \in \mathbb{Q},$
$$\text{如果 } x > 0,\ y > 0, \text{ 那么 } x \cdot y > 0.$$

事实

有理数数集在加法、乘法、小于下是有序域。
$(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ 是有序域。

有理数集

有序域 $(\mathbb{Q},+,\cdot,<)$ 上的加法、乘法、小于之间满足下面的性质：

1. $\forall x\in\mathbb{Q}$, 如果 $x>0$, 那么 $-x<0$.
2. $\forall x\in\mathbb{Q}$, $\forall y\in\mathbb{Q}$, $\forall z\in\mathbb{Q}$,
$$\text{如果 } x>0,\ y<z,\ \text{那么 } x\cdot y<x\cdot z.$$
3. $\forall x\in\mathbb{Q}$, 如果 $x\neq 0$, 那么 $x^2=x\cdot x>0$.
4. $\forall x\in\mathbb{Q}$, $\forall y\in\mathbb{Q}$,
$$\text{如果 } 0<x<y,\ \text{那么 } 0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}.$$
5. $\forall x\in\mathbb{Q}$, $\forall y\in\mathbb{Q}$,
$$\text{如果 } x<y,\ \text{那么存在 } z\in\mathbb{Q},\ \text{使得 } x<z<y.$$

有理数集

接下来的几页中，叙述

$$(O, \leqslant) \text{ 是全序集}$$

均可替换为

$$(O, \leqslant) \text{ 是偏序集}$$

有理数集

定义

$(O, \leqslant)$ 是全序集, $E \subset O$. 若 $\alpha \in O$, 使得对 $\forall x \in E$, 都成立 $x \leqslant \alpha$. 称 α 是 E 的一个上界。

有理数集

定义

$(O, \leqslant)$ 是全序集, $E \subset O$. 若 $\alpha \in O$, 使得对 $\forall x \in E$, 都成立 $x \leqslant \alpha$. 称 α 是 E 的一个上界。

定义

$(O, \leqslant)$ 是全序集, $E \subset O$. 若 E 至少有一个上界，称 E 上方有界, 或 E 有上界。若 E 不存在上界，称 E 无上界。

有理数集

定义

$(O, \leqslant)$ 是全序集, $E \subset O$. 若 $\alpha \in O$, 使得对 $\forall x \in E$, 都成立 $x \leqslant \alpha$. 称 α 是 E 的一个上界。

定义

$(O, \leqslant)$ 是全序集, $E \subset O$. 若 E 至少有一个上界，称 E 上方有界, 或 E 有上界。若 E 不存在上界，称 E 无上界。

定理

$(O, \leqslant)$ 是全序集, $E \subset O$. α 是 E 的一个上界，$\beta \in O$, 且 $\alpha \leqslant \beta$, 则 β 是 E 的一个上界。

有理数集

定义

$(O,\leqslant)$ 是全序集，$E\subset O$. 若 $\alpha\in E$，使得对 $\forall x\in E$，都成立 $x\leqslant\alpha$. 称 α 是 E 的一个最大值。

有理数集

定义

$(O, \leqslant)$ 是全序集，$E \subset O$. 若 $\alpha \in E$，使得对 $\forall x \in E$，都成立 $x \leqslant \alpha$. 称 α 是 E 的一个最大值。

事实

$(O, \leqslant)$ 是全序集，$E \subset O$. 若 E 有最大值，则 E 的最大值是唯一的，用 $\max E$ 表示。

有理数集

定义

$(O, \leqslant)$ 是全序集，$E \subset O$. 若 $\alpha \in E$，使得对 $\forall x \in E$，都成立 $x \leqslant \alpha$. 称 α 是 E 的一个最大值。

事实

$(O, \leqslant)$ 是全序集，$E \subset O$. 若 E 有最大值，则 E 的最大值是唯一的，用 $\max E$ 表示。

判断

$(O, \leqslant)$ 是全序集，$E \subset O$. 若 E 有上界，则 E 有最大值。

有理数集

定义

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$. 若 $\alpha\in E$, 使得对 $\forall x\in E$, 都成立 $x\leqslant\alpha$. 称 α 是 E 的一个最大值。

事实

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$. 若 E 有最大值，则 E 的最大值是唯一的，用 $\max E$ 表示。

判断

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$. 若 E 有上界, 则 E 有最大值。

定理

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$. 若 α 是 E 的最大值，则 α 一定是 E 的上界。

有理数集

定义

$(O, \leqslant)$ 是全序集，$E \subset O$. 若 $\beta \in O$，使得对 $\forall x \in E$，都成立 $\beta \leqslant x$. 称 β 是 E 的一个下界。

有理数集

定义

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$. 若 $\beta\in O$, 使得对 $\forall x\in E$, 都成立 $\beta\leqslant x$. 称 β 是 E 的一个下界。

定义

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$. 若 E 至少有一个下界, 称 E 下方有界, 或 E 有下界。若 E 不存在下界, 称 E 无下界。

有理数集

定义

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$. 若 $\beta\in O$, 使得对 $\forall x\in E$, 都成立 $\beta\leqslant x$. 称 β 是 E 的一个下界。

定义

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$. 若 E 至少有一个下界，称 E 下方有界, 或 E 有下界。若 E 不存在下界，称 E 无下界。

定理

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$. β 是 E 的一个下界，$\gamma\in O$, 且 $\gamma\leqslant\beta$, 则 γ 是 E 的一个下界。

有理数集

定义

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$. 若 $\beta\in E$, 使得对 $\forall x\in E$, 都成立 $\beta\leqslant x$. 称 β 是 E 的一个最小值。

有理数集

定义

$(O, \leqslant)$ 是全序集, $E \subset O$. 若 $\beta \in E$, 使得对 $\forall x \in E$, 都成立 $\beta \leqslant x$. 称 β 是 E 的一个最小值。

定理

$(O, \leqslant)$ 是全序集, $E \subset O$. 若 E 有最小值，则 E 的最小值是唯一的，用 $\min E$ 表示。

有理数集

定义

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$. 若 $\beta\in E$, 使得对 $\forall x\in E$, 都成立 $\beta\leqslant x$. 称 β 是 E 的一个最小值。

定理

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$. 若 E 有最小值, 则 E 的最小值是唯一的, 用 $\min E$ 表示。

判断

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$. 若 E 有下界, 则 E 有最小值。

有理数集

定义

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$. 若 $\beta\in E$, 使得对 $\forall x\in E$, 都成立 $\beta\leqslant x$. 称 β 是 E 的一个最小值。

定理

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$. 若 E 有最小值，则 E 的最小值是唯一的，用 $\min E$ 表示。

判断

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$. 若 E 有下界, 则 E 有最小值。

定理

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$. 若 β 是 E 的最小值，则 β 一定是 E 的下界。

有理数集

定义 (上确界 supremum)

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$, E 上方有界。若 $\alpha\in O$ 满足:

1. α 是 E 的一个上界;
2. 对任意的 $\beta\in O$, 若 β 是 E 的一个上界, 则 $\alpha\leqslant\beta$.

称 α 是 E 的上确界。

有理数集

定义 (上确界 supremum)

$(O,\leqslant)$ 是全序集，$E\subset O$，E 上方有界。若 $\alpha\in O$ 满足：

1. α 是 E 的一个上界；
2. 对任意的 $\beta\in O$，若 β 是 E 的一个上界，则 $\alpha\leqslant\beta$.

称 α 是 E 的上确界。

事实

上确界是上界的最小值。

有理数集

定义 (上确界 supremum)

$(O, \leqslant)$ 是全序集, $E \subset O$, E 上方有界。若 $\alpha \in O$ 满足:

1. α 是 E 的一个上界;
2. 对任意的 $\beta \in O$, 若 β 是 E 的一个上界, 则 $\alpha \leqslant \beta$.

称 α 是 E 的上确界。

事实

上确界是上界的最小值。

事实

用符号 $\sup E$ 表示 E 的上确界。

有理数集

定理

$(O, \leqslant)$ 是全序集，$E \subset O$. 若 α 是 E 的上确界，且 $\alpha \in E$, 则 α 是 E 的最大值。

有理数集

定义 (下确界 infimum)

$(O, \leqslant)$ 是全序集, $E \subset O$, E 下方有界。若 $\beta \in O$ 满足：

1. β 是 E 的一个下界；
2. 对任意的 $\alpha \in O$, 若 α 是 E 的一个下界, 则 $\alpha \leqslant \beta$.

称 β 是 E 的下确界。

有理数集

定义 (下确界 infimum)

$(O, \leqslant)$ 是全序集，$E \subset O$，E 下方有界。若 $\beta \in O$ 满足：

1. β 是 E 的一个下界；
2. 对任意的 $\alpha \in O$，若 α 是 E 的一个下界，则 $\alpha \leqslant \beta$.

称 β 是 E 的下确界。

事实

下确界是下界的最大值。

有理数集

定义 (下确界 infimum)

$(O,\leqslant)$ 是全序集, $E\subset O$, E 下方有界。若 $\beta\in O$ 满足:

1. β 是 E 的一个下界;
2. 对任意的 $\alpha\in O$, 若 α 是 E 的一个下界, 则 $\alpha\leqslant\beta$.

称 β 是 E 的下确界。

事实

下确界是下界的最大值。

事实

用符号 $\inf E$ 表示 E 的下确界。

有理数集

定理

$(O, \leqslant)$ 是全序集, $E \subset O$. 若 β 是 E 的下确界，且 $\beta \in E$, 则 β 是 E 的最小值。

有理数集

下面的例子都在全序集 $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ 中考虑。

例

集合 $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$. A 的上界的集合是_____,A 的下界的集合是_____, A 的上确界是_____,A 的下确界是_____.

例

集合 $B = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$. B 的上界的集合是_____,B 的下界的集合是_____, B 的上确界是_____,B 的下确界是_____.

有理数集

例

集合 $C=\{x\in\mathbb{Q}:1<x\leqslant 2\}$. C 的上界的集合是______,C 的下界的集合是______, C 的上确界是______,C 的下确界是______.

例

集合 $D=\{\frac{n}{m}:m,n\in\mathbb{N},0<n<m\}$. D 的上界的集合是______,D 的下界的集合是______, D 的上确界是______,D 的下确界是______.

有理数集

问题

是否存在全序集 $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ 的子集 T, 满足：T 有上界，但是 T 没有上确界？

有理数集

问题

是否存在全序集 $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ 的子集 T，满足：T 有上界，但是 T 没有上确界？

思考讨论

该如何去构造或找到 T 的有界但没有上确界的子集？
或者
该怎么去证明 T 没有满足有界但没有上确界的子集？

有理数集

例 (课本第 25 页例 2.1.3)

求证：全序集 $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ 中，子集 $T = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0$ 且$x^2 < 2\}$ 满足：T 有上界，但是 T 没有上确界。

有理数集

例 (课本第 25 页例 2.1.3)

求证：全序集 $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ 中，子集 $T = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0$ 且$x^2 < 2\}$ 满足：T 有上界，但是 T 没有上确界。

证明.

3 是 T 的上界，所以 T 有上界。$\sqrt{2}$ 是 T 的上确界，但 $\sqrt{2} \notin T$，所以 T 没有上确界。 $\square$

有理数集

例 (课本第 25 页例 2.1.3)

求证：全序集 $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ 中，子集 $T = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ 且} x^2 < 2\}$ 满足：T 有上界，但是 T 没有上确界。

提示

把证明的步骤分成若干个小结论：

1. $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ 且} x^2 > 2\}$ 中的元素都是 T 的上界；
2. T 中的元素都不是 T 的上界 (T 没有最大值)；
3. $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ 且} x^2 > 2\}$ 中的元素都不是 T 的上确界；
4. 对任意的 $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$，则 $x^2 \neq 2$.

有理数集

证明.

声明 1：对任意的 $x \in \mathbb{Q}$，若 $x^2 > 2$，且 $x > 0$，则 x 是 T 的上界。

声明 1 的证明：对任意的 $x \in \mathbb{Q}$，若 $x^2 > 2$，且 $x > 0$，如果 x 不是 T 的上界，则存在 $t \in T$，使得 $t > x$，则 $t^2 > tx > x^2 > 2$，但是根据 $t \in T$，应有 $t^2 < 2$. 两者之间是矛盾的，因此 x 是 T 的上界。

因为 $3 \in \mathbb{Q}$, $3^2 = 9 > 2$，且 $3 > 0$，根据前面的声明 1，所以 3 是 T 的上界。

(证明未完，待续) □

有理数集

提示

声明 2：T 中的元素都不是 T 的上界 (T 没有最大值).

等价的叙述：对任意的 $x \in T$，存在 $x' \in T$，使得 $x < x'$.

有理数集

提示

声明 2：T 中的元素都不是 T 的上界 (T 没有最大值).
等价的叙述：对任意的 $x \in T$, 存在 $x' \in T$, 使得 $x < x'$.

分析

为了找到 $x' \in T$, 使得 $x < x'$. 需要 $0 < x' - x < \sqrt{2} - x$, 且 x' 还得是有理数，注意到 $x \in T$ 是个有理数, 也就是要找一个介于 0 和 $\sqrt{2} - x$ 之间的有理数。因为 $x \in T$, $2 - x^2 > 0$, 注意到 $0 < 2 - x^2 = (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) < (\sqrt{2} - x)(2 + x)$, 所以 $\sqrt{2} - x > \frac{2-x^2}{2+x}$, 且这里 $\frac{2-x^2}{2+x}$ 是一个正的有理数，这就是我们要找的。
而对于任何介于 0 和 $\frac{2-x^2}{2+x}$ 之间的有理数 r, 都可以使得 $x < x + r$, 且 $(x + r)^2 < 2$.

有理数集

证明.

(证明继续) 声明 2：T 中的元素都不是 T 的上界 (T 没有最大值).

声明 2 的证明：对任意的 $x \in T$, 则 $x^2 < 2$, 且 $x > 0$, 又由 $x \in T$ 是个有理数, 可得 $\frac{2-x^2}{2+x}$ 是一个正的有理数。任取有理数 $r \in \left(0, \frac{2-x^2}{2+x}\right)$, 则 $x + r \in \mathbb{Q}$, 且 $0 < x < x + r$, 而

$$(x+r)^2 < \left(x + \frac{2-x^2}{2+x}\right)^2 = \left(\frac{2+2x}{2+x}\right)^2 = \frac{4x^2+8x+4}{x^2+4x+4} = \frac{2x^2+8x+4+2x^2}{x^2+4x+4}$$
$$< \frac{2x^2+8x+4+4}{x^2+4x+4} = 2$$

所以 $x + r \in T$. 所以 x 不是 T 的上确界。

所以，T 中的元素都不是 T 的上界 (T 没有最大值)。

(证明未完，待续) □

有理数集

证明.

(证明继续) 声明 3：$U=\{x\in\mathbb{Q}: x>0$ 且$x^2>2\}$ 中的元素都不是 T 的上确界。(U 没有最小值。)

等价的叙述：对任意的 $x\in U$, 存在 $x'\in U$, 使得 $x'<x$.

声明 3 的证明：对任意的 $x\in U$, 则由声明 1，x 是 T 的上界。由 $x\in U$，则 x 是个有理数，且 $x^2>2$, $x>0$, 可得 $\frac{x^2-2}{2+x}$ 是一个正的有理数。任取有理数 $r\in\left(0,\frac{x^2-2}{2+x}\right)$, 则 $x-r\in\mathbb{Q}$, 且 $0<x-\frac{x^2-2}{2+x}<x-r<x$, 而

$$(x-r)^2>\left(x+\frac{2-x^2}{2+x}\right)^2=\left(\frac{2+2x}{2+x}\right)^2=\frac{4x^2+8x+4}{x^2+4x+4}=\frac{2x^2+8x+4+2x^2}{x^2+4x+4}$$
$$>\frac{2x^2+8x+4+4}{x^2+4x+4}=2$$

所以 $x-r\in U$. 由声明 1，$x-r$ 是 T 的上界，所以 x 不是 T 的上确界。

所以，U 中的元素都不是 T 的上确界 (U 没有最小值)。(证明未完，待续) $\square$

有理数集

证明.

(证明继续) 声明 4：对任意的 $x\in\mathbb{Q}$, $x>0$，则 $x^2\neq 2$.

声明 4 的证明：对任意的 $x\in\mathbb{Q}$, $x>0$，存在互质的自然数 $m,n\in\mathbb{N}^+$, 使得 $x=\dfrac{n}{m}$.

若 $x^2=2$, 则 $n^2=2m^2$. 由于 $2m^2$ 是偶数，而奇数的平方是奇数，所以 n 是偶数，所以 $4|n^2$, 从而 $4|2m^2$, $2|m^2$，从而 m^2 是偶数，从而 m 是偶数。m, n 都是偶数与 m, n 互质矛盾。

所以 $x^2\neq 2$.

(证明未完，待续) $\square$

有理数集

例 (课本第 25 页例 2.1.3)

求证：全序集 $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ 中，子集 $T = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ 且} x^2 < 2\}$ 满足：T 有上界，但是 T 没有上确界。

证明.

(证明继续) 由 $1 \in T$，所以 T 若有上确界，上确界必在 $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ 中。由声明 4，

$$\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} = T \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ 且} x^2 > 2\}$$

由声明 2，声明 3 可得，$T, \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ 且} x^2 > 2\}$ 中的元素都不是 T 的上确界，从而 $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ 中的元素都不是 T 的上确界，所以 T（作为全序集 $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ 的子集）没有上确界。 □

有理数集

事实

存在有理数集的子集有上界没有上确界!

有理数集

事实

存在有理数集的子集有上界没有上确界!

问题

把所有子集的上确界添到有理数集中，能不能组成“实数”?

有理数集

事实

存在有理数集的子集有上界没有上确界！

问题

把所有子集的上确界添到有理数集中，能不能组成“实数”？

思考讨论

阅读第 25 页附录：Dedekind(戴德金) 切割定理，了解戴德金如何构造实数。

有理数集

作业

1. 课本第 28 页习题 4, 8

思考讨论

1. 课本第 28 页习题 6

有理数集

现在从另一个角度研究有理数集！

有理数集

有理数集上定义了一个绝对值函数 $|\cdot|$,

$$\forall x \in \mathbb{Q}, |x| = \begin{cases} x, & 如果 x > 0 \\ 0, & 如果 x = 0 \\ -x, & 如果 x < 0 \end{cases}.$$

根据定义，可得绝对值函数 $|\cdot|$ 满足下面的性质：

1. $\forall x \in \mathbb{Q}, |x| \geqslant 0.$
   $\forall x \in \mathbb{Q}, |x| = 0$ 当且仅当 $x = 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall \lambda \in \mathbb{Q}, |\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|$
3. 【三角不等式】$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, |x + y| \leqslant |x| + |y|$

有理数集

有理数集上定义了一个绝对值函数 $|\cdot|$,

$$\forall x \in \mathbb{Q}, |x| = \begin{cases} x, & 如果 x > 0 \\ 0, & 如果 x = 0 \\ -x, & 如果 x < 0 \end{cases}.$$

根据定义，可得绝对值函数 $|\cdot|$ 满足下面的性质：

1. $\forall x \in \mathbb{Q}, |x| \geqslant 0.$
   $\forall x \in \mathbb{Q}, |x| = 0$ 当且仅当 $x = 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall \lambda \in \mathbb{Q}, |\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|$
3. 【三角不等式】$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, |x + y| \leqslant |x| + |y|$

思考讨论

搜索了解抽象概念：范数

有理数集

利用绝对值函数 $|\cdot|$ 定义二元函数 d 为

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, d(x, y) = |x - y|.$$

利用绝对值函数 $|\cdot|$ 的性质可得函数 $d(\cdot, \cdot)$ 满足下面的性质：

1. $\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},\ d(x, y) \geqslant 0.$
   $\forall x \in \mathbb{Q},\ ,\ \forall y \in \mathbb{Q},\ d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.
2. 【对称性】
   $\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},\ d(x, y) = d(y, x).$
3. 【三角不等式】
   $\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},\ \forall z \in \mathbb{Q},\ d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z).$

有理数集

利用绝对值函数 $|\cdot|$ 定义二元函数 d 为

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, d(x,y) = |x - y|.$$

利用绝对值函数 $|\cdot|$ 的性质可得函数 $d(\cdot,\cdot)$ 满足下面的性质：

1. $\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},\ d(x,y) \geqslant 0.$
   $\forall x \in \mathbb{Q},\ ,\ \forall y \in \mathbb{Q},\ d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y.$
2. 【对称性】
   $\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},\ d(x,y) = d(y,x).$
3. 【三角不等式】
   $\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},\ \forall z \in \mathbb{Q},\ d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z).$

思考讨论

搜索了解抽象概念：距离

有理数集

定义

对数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 及数 A, 若

$$\text{对任意的 } \varepsilon > 0, \text{ 存在正整数 } N, \text{ 使得当 } n > N \text{ 时，} |a_n - A| < \varepsilon$$

称 (当 n 趋于 $+\infty$ 时,) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 A.
"数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 A" 用符号表示为：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$.

有理数集

定义

对数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 及数 A, 若

$$\text{对任意的 } \varepsilon > 0, \text{ 存在正整数 } N, \text{ 使得当 } n > N \text{ 时，} |a_n - A| < \varepsilon$$

称（当 n 趋于 $+\infty$ 时，）数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 A.
"数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 A" 用符号表示为：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$.

定义

对数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 若

$$\text{存在数 } A, \text{ 使得数列 } \{a_n\}_{n=1}^{+\infty} \text{ 收敛到 } A$$

称（当 n 趋于 $+\infty$ 时，）数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛。
"数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛" 用符号表示为：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在。

有理数集

例

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时，$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, 所以数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 0，$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

所以数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛。

有理数集

例

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时，$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, 所以数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 0，$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

所以数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛。

例

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时，$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, 所以数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 0，$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

所以数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛。

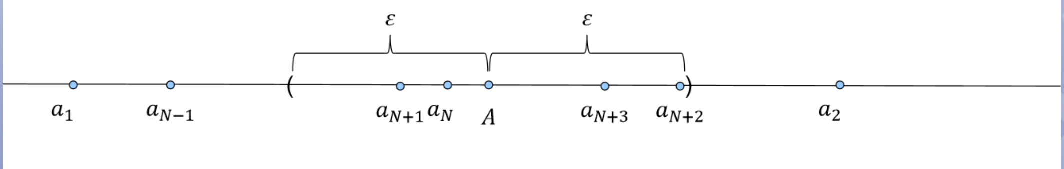
有理数集

定义

对数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 及数 A, 若

$$\text{对任意的 } \varepsilon > 0, \text{ 存在正整数 } N, \text{ 使得当 } n > N \text{ 时，} |a_n - A| < \varepsilon$$

称 (当 n 趋于 $+\infty$ 时,) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 A. A 称为是数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的极限。
"数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 A" 用符号表示为： $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$.



有理数集

例

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 不收敛到 A 的含义是：____________________.

解

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 不收敛到 A 的含义是：存在 $\varepsilon > 0$, 对任意正整数 N, 使得存在 $n > N$, 使得 $|a_n - A| \geqslant \varepsilon$.

有理数集

例

数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 不收敛到 -1 的含义是：____________________.

解

数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 不收敛到 -1 的含义是：存在 $\varepsilon > 0$, 对任意正整数 N, 使得存在 $n > N$, 使得 $\left|\frac{1}{n} - (-1)\right| \geqslant \varepsilon$.

证明的话.

$(\varepsilon = 1,)$ 对任意正整数 N, 对任意的 $n > N$, $\left|\frac{1}{n} - (-1)\right| = \frac{1}{n} + 1 \geqslant 1$, 所以数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 不收敛到 -1. □

有理数集

例

数列 $\{(-1)^n\}_{n=1}^{+\infty}$ 不收敛到 1 的含义是：________________________.

例

数列 $\{(-1)^n\}_{n=1}^{+\infty}$ 不收敛到 -1 的含义是：________________________.

例

对任意的数 A, 数列 $\{(-1)^n\}_{n=1}^{+\infty}$ 不收敛到 A 的含义是：________________________.

有理数集

定理

数列收敛有下面的性质：

1. 收敛数列的极限是唯一的。
2. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, 而 $A > B$, 则存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时， $x_n > B$.

有理数集

例

一个”感觉”该收敛却不收敛的数列.

解

存在有理数 a，使得 $1)a>0$; $2)a^2<2$;$3)$ $(a+1)^2>2$. 任取一个记为 x_1.
存在有理数 a，使得 $1)a>0$; $2)a^2<2$;$3)$ $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2>2$. 任取一个记为 x_2.
一般的，对任意的自然数 $n>1$，如果已经找到了 n 个有理数 $\{x_k\}_{k=1}^n$，使得对任意的自然数 k, $1\leqslant k\leqslant n$, 满足

$$1)x_k>0;\ 2)x_k^2<2;\ 3)\left(x_k+\frac{1}{2^{k-1}}\right)^2>2.$$

如果 $\left(x_n+\frac{1}{2^n}\right)^2<2$, 令 $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{2^n}$; 如果 $(x_n+\frac{1}{2^n})^2>2$, 任取有理数 x_{n+1} 满足 $1)x_{n+1}>x_n>0$; $2)x_{n+1}^2<2$; $3)\left(x_{n+1}+\frac{1}{2^n}\right)^2>2$.

有理数集

例

一个“感觉应该”收敛却不收敛的数列.

解 (续)

由数学归纳法，可到一个数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$，使得它满足

1. 对任意的自然数 k,$x_k > 0$;
2. 对任意的自然数 k, $x_k^2 < 2$;
3. 对任意的自然数 k, $\left(x_k + \frac{1}{2^{k-1}}\right)^2 > 2$.
4. 对任意的自然数 k, $x_k < x_{k+1}$.

数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 不收敛！.

实数集

事实

实数集是一个包含有理数集，且可以定义加法、乘法、序关系，使得在加法乘法下成为一个域，且这些运算和关系在有理数集上时跟有理数集上原有的含义性质一样，且满足下面性质的最小的一个集合：

这个集合的任何一个有上界的子集都在这个集合里有上确界。

实数集

事实

实数集是一个包含有理数集，且可以定义加法、乘法、序关系，使得在加法乘法下成为一个域，且这些运算和关系在有理数集上时跟有理数集上原有的含义性质一样，且满足下面性质的最小的一个集合：

这个集合的任何一个单调有界数列都是收敛的。

实数集

事实

实数集是一个包含有理数集，且可以定义加法、乘法、序关系，使得在加法乘法下成为一个域，且这些运算和关系在有理数集上时跟有理数集上原有的含义性质一样，且满足下面性质的最小的一个集合：

这个集合上成立闭区间套定理。

实数集

事实

实数集是一个包含有理数集，且可以定义加法、乘法、序关系，使得在加法乘法下成为一个域，且这些运算和关系在有理数集上时跟有理数集上原有的含义性质一样，且满足下面性质的最小的一个集合：

这个集合的任何一个有界数列都有收敛子列。

实数集

事实

实数集是一个包含有理数集，且可以定义加法、乘法、序关系，使得在加法乘法下成为一个域，且这些运算和关系在有理数集上时跟有理数集上原有的含义性质一样，且满足下面性质的最小的一个集合：

这个集合的任何一个数列收敛的充分必要条件是这个数列是基本数列。

实数集

事实

实数集是一个包含有理数集，且可以定义加法、乘法、序关系，使得在加法乘法下成为一个域，且这些运算和关系在有理数集上时跟有理数集上原有的含义性质一样，且满足下面性质的最小的一个集合：

这个集合的成立有限覆盖定理。

实数集

事实

用这些方法构造出的实数集是一样的。

实数集

事实

用这些方法构造出的实数集是一样的。

思考讨论

现在我们有了实数集了！

实数集

事实 (关于符号 ∞ 的约定)

1. $\infty, +\infty, -\infty$ 都不是实数!
2. 对任意的实数 x, $-\infty < x < +\infty$.
3. 对任意的实数 x,

$$x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty$$
$$x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty$$
$$x + \infty = \infty + x = \infty$$

4. 对任意的实数 $x > 0$,

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$$
$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$$
$$x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$$

实数集

事实 (关于符号 ∞ 的约定 (续))

1. $-(-\infty) = +\infty$, $-(+\infty) = -\infty$.

事实 (关于无界集的上下确界)

1. A 是实数集的非空子集。A 无上界，可称 A 的上确界为 $+\infty$, 可记为 $\sup A = +\infty$; A 无下界，可称 A 的下确界为 $-\infty$, 可记为 $\inf A = -\infty$.

实数集

作业

1. 课本第 28 页习题 1
2. A,B 是实数集的两个非空子集，证明：
   1. 若 $A\cup B$ 有上界，则 A 也有上界，且 $\sup A\leqslant\sup(A\cup B)$;
   2. 若 $A\cup B$ 有下界，则 A 也有下界，且 $\inf(A\cup B)\leqslant\inf A$.
3. A 是实数集的有界非空子集，$c\in\mathbb{R}$. $c+A=\{c+x:x\in A\}$. 证明：
   1. $\sup(c+A)=c+\sup A$;
   2. $\inf(c+A)=c+\inf A$.
4. A,B 是实数集的两个有界非空子集，$A+B=\{x+y:x\in A,y\in B\}$. 证明：
   1. $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$;
   2. $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

思考讨论

1. 课本第 28 页习题 6