华东理工大学 2021 - 2022 学年第一学期

《空间解析几何》课程期末考试试卷　A　2022. 1. 4

开课学院: 数学学院,　　专业: 数学类,　　考试形式: 闭卷,　　所需时间 120 分钟

考生姓名: ____________　学号: ____________　班级: ____________　任课教师: 杨勤民

题序	一	二	三	四	五	总　分
得分						
评卷人						

一、(10分) 用向量法证明 ΔABC 的三条中线相交于一点.

二、(10分) 证明椭圆抛物面上不存在直线.

三、(15分) 设有不全为零的实数 a, b, c, 试就 a, b, c 的不同取值情况讨论直线 $\dfrac{x-1}{a}=\dfrac{y-1}{b}=\dfrac{z-1}{c}$ 绕 z 轴旋转所得的旋转面的类型(例如: 平面(含平面区域), 圆柱面, 圆锥面, 旋转单叶双曲面, 旋转双叶双曲面, ...).

四、填空题（请将最简结果直接填在横线上，每小题5分，共30分）

1. $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ 的几何意义是 __________________________________.

2. 某个三棱锥在某个直角坐标系中的四个顶点为 $A(1,1,1)$, $B(5,4,-1)$, $C(2,3,5)$, $D(6,0,-3)$, 则它的体积为 ____________.

3. 直线 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ 上与点 $(3,2,6)$ 距离最近的点为 ______________.

4. 直线 $\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-5}{1}$ 与平面 $x+y+2z-5=0$ 的夹角为 ______________.

5. 曲线 $\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1\\ z=2\end{cases}$ 往 xOy 面上的投影曲线方程为 ____________________.

6. 平面 $x-2y+z-12=0$ 上到点 $(1,0,-1)$ 和点 $(3,2,1)$ 距离之和最小的点为 ______________.

五、选择题（请将唯一正确选项的序号填在括号里，每小题5分，共35分）

1. 已知向量 $\vec{a}$ 的终点坐标是 $(2,-1,0)$, 模 $\left|\vec{a}\right|=14$, 其方向与向量 $(-2,3,6)$ 同向, 则向量 $\vec{a}$ 的起点坐标是 .... (　　)

(A) $(-6,7,12)$; 　(B) $(6,-7,-12)$; 　(C) $(6,7,-12)$; 　(D) $(6,-7,12)$.

2. 过点 $(0,2,4)$ 且与平面 $x+2z-1=0$ 和 $y-3z-2=0$ 都平行的直线是 (　　)

(A) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-4}{2}$; 　(B) $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-4}{-3}$;

(C) $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$; 　(D) $-2x+3(y-2)+z-4=0$.

3. 直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ 3x-y-9=0 \end{cases}$ 在平面 $4x-y+z-1=0$ 上的投影为 .... (　　)

(A) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+3}{-13}$;　　(B) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z+3}{-13}$;

(C) $\begin{cases} 5x-5y+z-9=0 \\ 4x-y+z-1=0 \end{cases}$;　　(D) $\begin{cases} x+3y-z-9=0 \\ 4x-y+z-1=0 \end{cases}$.

4. 到两条异面直线的距离的平方和为定值的点的轨迹是 .... (　　)

(A) 椭球面;　(B) 平面;　(C) 双曲抛物面;　(D) 椭圆抛物面.

5. 顶点为 $(1,2,4)$, 母线与平面 $2x+2y+z=0$ 所成角度为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的锥面为 .. (　　)

(A) $x^2+y^2+7z^2+16xy+8yz-8zx+62x-44y-32z-27=0$;

(B) $x^2+y^2+7z^2-16xy+8yz+8zx+62x+44y+32z-459=0$;

(C) $x^2+y^2+7z^2-16xy-8yz-8zx+62x+44y-32z-11=0$;

(D) $x^2+y^2+7z^2+16xy-8yz+8zx-62x+44y-32z-15=0$.

6. 直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ 绕直线 $x=y=z$ 旋转所成的旋转面为 .... (　　)

(A) $2(x^2+y^2+z^2)-5(xy+yz+zx)+5(x+y+z)-7=0$;

(B) $2(x^2+y^2+z^2)+5(xy+yz+zx)-5(x+y+z)+3=0$;

(C) $2(x^2+y^2+z^2)-5(xy+yz+zx)-5(x+y+z)+3=0$;

(D) $2(x^2+y^2+z^2)+5(xy+yz+zx)+5(x+y+z)-7=0$.

7. 曲面 $x^2+y^2=2(z^2+1)$ 上经过点 $(1,1,0)$ 的直母线的方向为 .... (　　)

(A) $(1,-1,1)$ 或 $(1,1,1)$;　　(B) $(1,-1,1)$ 或 $(1,1,-1)$;

(C) $(1,-1,1)$ 或 $(1,-1,1)$;　　(D) $(1,-1,1)$ 或 $(1,-1,-1)$.

华东理工大学 2021 - 2022 学年第一学期

《空间解析几何》课程期末考试试卷 B 2022. 1. 4

开课学院：数学学院，　专业：数学类，　考试形式：闭卷，　所需时间 120 分钟

考生姓名：________　学号：________　班级：________　任课教师：杨勤民

题序	一	二	三	四	五	总　分
得分						
评卷人						

一、(10分) 用向量法证明 ΔABC 三边的垂直平分线相交于一点.

二、(10分) 证明双叶双曲面上不存在直线.

三、(15分) 空间中有两个球面 B_1 和 B_2, B_2 包含在 B_1 所围球体的内部, 两球面之间的闭区域为 D. 设 B 是含在 D 中的一个球面, 它与球面 B_1 和 B_2 均相切. 问:

(1) B 的球心轨迹构成的曲面 S 是何种曲面?

(2) B_1 的球心和 B_2 的球心是曲面 S 的何种点?

证明你的论断.

四、填空题（请将最简结果直接填在横线上, 每小题5分, 共30分）

1. 设直角坐标系中的向量 $\vec{a}=(1,3,\lambda), \vec{b}=(2\lambda,1,1)$, 且 $\vec{a}\perp\vec{b}$, 则 $\lambda=$ ____________.

2. 设 $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=2$, 则 $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}+\vec{a})=$ ____________.

3. 平面 $x+2y+3z-26=0$ 上与点 $(3,-1,-1)$ 距离最近的点为 ____________.

4. 直线 $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-5}{2}$ 与平面 $2x-y+z-5=0$ 的夹角为 ____________.

5. 曲线 $\begin{cases}2x-z=0\\ x=y^2+z^2\end{cases}$ 往 xOy 面上的投影曲线方程为 ____________.

6. 光线 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 照在镜面 $x+y+z+1=0$ 上所产生的反射光线方程为

____________.

五、选择题（请将唯一正确选项的序号填在括号里, 每小题5分, 共35分）

1. 对于任意向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, 下列等式一定正确的是 .... (　　)

(A) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$;　　(B) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$;

(C) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{c}\times(\vec{b}\times\vec{a})$;　　(D) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$.

2. 平行平面 $19x-4y+8z+21=0$ 和 $19x-4y+8z+42=0$ 之间的距离是 (　　)

(A) 1;　　(B) 2;　　(C) 7;　　(D) 21.

3. 两条直线 $\begin{cases}x+y-1=0\\ z=0\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x-z+1=0\\ 2y+z-2=0\end{cases}$ 的公垂线为 .... (　　)

(A) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$;　　(B) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$;

(C) $\begin{cases}x+y+4z-1=0\\ x-2y-2z+3=0\end{cases}$;　　(D) $\begin{cases}x-y+4z-1=0\\ x+2y-2z+3=0\end{cases}$.

4. 设点 B 是两条不垂直的异面直线 L_1 和 L_2的公垂线段的中点, 点 A_1 和 A_2 分别在 L_1 和 L_2 上滑动, 且使得 $A_1B \perp A_2B$, 则动直线 A_1A_2 的轨迹是 .... (　　)

(A) 柱面;　　(B) 单叶双曲面;　　(C) 锥面;　　(D) 双曲抛物面.

5. 经过点 $(1, -2, 1)$, 轴线方程为 $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{-2}$ 的圆柱面为 .... (　　)

(A) $8x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy + 8yz - 4zx + 16x + 14y + 22z - 15 = 0$;

(B) $8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 8yz + 4zx + 16x + 14y + 22z - 39 = 0$;

(C) $8x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 8yz + 4zx + 16x - 14y + 22z - 111 = 0$;

(D) $8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 8yz - 4zx + 16x - 14y + 22z - 119 = 0$.

6. 直线 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ 绕 $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ 旋转所成的旋转面为 .. (　　)

(A) $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 2xy - 4yz + 4zx + 4x - 4y - 4z - 22 = 0$;

(B) $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 4yz + 4zx + 4x - 4y - 4z - 18 = 0$;

(C) $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4yz - 4zx + 4x - 4y - 4z - 18 = 0$;

(D) $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 2xy + 4yz - 4zx + 4x - 4y - 4z - 6 = 0$.

7. 曲面 $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = z$ 上平行于平面 $3x + 2y - 4z = 0$ 的直母线的方向为 .. (　　)

(A) $(2, 1, 2)$ 或 $(2, -1, 1)$;　　(B) $(2, -1, 2)$ 或 $(2, 1, -1)$;

(C) $(2, 1, 2)$ 或 $(-2, -1, 1)$;　　(D) $(2, -1, 2)$ 或 $(-2, 1, -1)$.

华东理工大学 2021 - 2022 学年第一学期
《空间解析几何》课程期末考试标准答案 A 2022. 1. 4

一、(10分) 用向量法证明 ΔABC 的三条中线相交于一点.

证 设 ΔABC 的三边中点依次为 D, E 和 F, 连接 BE 和 CF 交于一点 M, 则 $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{FM}+2\overrightarrow{ME}$, 即 $\overrightarrow{BM}-2\overrightarrow{ME}=2\overrightarrow{FM}-\overrightarrow{MC}$. 结合 $\overrightarrow{BM}//\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{FM}//\overrightarrow{MC}$, 且 $\overrightarrow{BM}$ 与 $\overrightarrow{MC}$ 不共线知 $\overrightarrow{BM}-2\overrightarrow{ME}=0$, 即 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{ME}$.

....(6分)

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{EC}+2\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{ME}=2\overrightarrow{MD}$.

因此 A, M, D 三点共线, 即 ΔABC 的三条中线交于一点. ....(4分)

二、(10分) 证明椭圆抛物面上不存在直线.

证 设椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ 上有一条直线, 其参数方程为

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt. \quad \text{....................(4分)}$$

代入椭圆抛物面的方程得到 $\forall t$ 有 $\frac{(x_0+lt)^2}{a^2}+\frac{(y_0+mt)^2}{b^2}=z_0+nt$, 即

$$\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)t^2+\left(\frac{2lx_0}{a^2}+\frac{2my_0}{b^2}-n\right)t+\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-z_0\right)=0. \quad \text{.............(3分)}$$

因此 $\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}=0$, $\frac{2lx_0}{a^2}+\frac{2my_0}{b^2}-n=0$, $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-z_0=0$, 于是 $l=m=n=0$.

而这与 (l,m,n) 为直线的方向相矛盾. 故椭圆抛物面上不存在直线. ....(3分)

四、填空题（请将最简结果直接填在横线上, 每小题5分, 共30分）

1. 以 $\vec{a}, \vec{b}$ 为相邻边的平行四边形的面积
2. 13
3. $(3,-1,0)$
4. $\frac{\pi}{6}$
5. $\begin{cases}\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1\\ z=0\end{cases}$
6. $(4,-3,2)$

五、选择题（请将唯一正确选项的序号填在括号里, 每小题5分, 共35分）

B　　C　　D　　A　　C　　A　　D

三、(15分) 设有不全为零的实数 a, b, c, 试就 a, b, c 的不同取值情况讨论直线 $\dfrac{x-1}{a}=\dfrac{y-1}{b}=\dfrac{z-1}{c}$ 绕 z 轴旋转所得的旋转面的类型(例如: 平面(含平面区域), 圆柱面, 圆锥面, 旋转单叶双曲面, 旋转双叶双曲面, …).

解 z 轴上的一点为 $O=(0,0,0)$, 方向为 $\vec{k}=(0,0,1)$. 所给直线上的一点为 $M=(1,1,1)$, 方向为 $\vec{v}=(a,b,c)$, 则混合积 $(\overrightarrow{OM},\vec{k},\vec{v})=a-b$.

(1) 当 $a=b$ 时, 上述混合积为零, 此时两条直线共面, 分以下两种情形讨论.

(1.1) 当 $\vec{v}\cdot\vec{k}=0$, 即 $c=0$ 时, 两条直线垂直相交, 所得旋转面是平面 $z=1$.

(1.2) 当 $\vec{v}\cdot\vec{k}\neq 0$, 即 $c\neq 0$ 时, 两条直线平行或者斜交, 此时又分两种情形.

(1.2.1) 当 $\vec{v}//\vec{k}$, 即 $a=b=0$ 时, 两条直线平行, 所得旋转面是一个圆柱面 $x^2+y^2=2$.

(1.2.2) 当 $\vec{v}$ 不与 $\vec{k}$ 平行, 即 $a=b\neq 0$ 时, 两条直线斜交, 所得旋转面是一个圆锥面 $x^2+y^2-\frac{2a^2}{c^2}\left(z-\frac{a-c}{a}\right)=0$.

(2) 当 $a\neq b$ 时, 上述混合积非零, 此时两条直线异面, 分垂直和不垂直两种情形.

(2.1) 当 $\vec{v}\cdot\vec{k}=0$, 即 $c=0$ 时, 两条直线垂直, 所得旋转面是平面上挖去一个圆盘后的区域 $\begin{cases} x^2+y^2\geq \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}, \\ z=1. \end{cases}$

(2.2) 当 $\vec{v}\cdot\vec{k}\neq 0$, 即 $c\neq 0$ 时, 两条直线不垂直. 由所给的母线方程得

$$x=1+\tfrac{a}{c}(z-1),\quad y=1+\tfrac{b}{c}(z-1).$$

在绕 z 轴旋转的过程中, 旋转面上的点 (x,y,z) 到达 z 轴的距离 $\sqrt{x^2+y^2}$ 以及该点的竖坐标 z 都保持不变, 因此这两个不变量之间的等式关系

$$x^2+y^2=\left[1+\tfrac{a}{c}(z-1)\right]^2+\left[1+\tfrac{b}{c}(z-1)\right]^2$$

即为旋转面的方程, 整理得

$$x^2+y^2-\tfrac{a^2+b^2}{c^2}\left[z-1+\tfrac{(a+b)c}{a^2+b^2}\right]^2=\tfrac{(a-b)^2}{a^2+b^2}.$$

它是一个旋转单叶双曲面.

综上可知,

当 $a=b$ 且 $c=0$ 时, 所得旋转面是一个平面; ……………………(3分)

当 $a=b=0$ 且 $c\neq 0$ 时, 所得旋转面是一个圆柱面; ……………………(3分)

当 $a=b\neq 0$ 且 $c\neq 0$ 时, 所得旋转面是一个圆锥面; ……………………(3分)

当 $a\neq b$ 且 $c=0$ 时, 所得旋转面是一个平面挖去一个圆盘后剩下的区域; ……(3分)

当 $a\neq b$ 且 $c\neq 0$ 时, 所得旋转面是一个旋转单叶双曲面. ……………………(3分)

华东理工大学 2021 - 2022 学年第一学期
《空间解析几何》课程期末考试标准答案 B 2022. 1. 4

一、(10分) 用向量法证明 ΔABC 三边的垂直平分线相交于一点.

证法一 设 ΔABC 的三边中点依次为 D, E 和 F, AC 与 BC 的垂直平分线交于一点 O, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EO}=0, \overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{EO}=0$. ....(3分)

由 $\overrightarrow{AO}^2=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EO})^2=\overrightarrow{AE}^2+\overrightarrow{EO}^2$, $\overrightarrow{CO}^2=(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EO})^2=\overrightarrow{CE}^2+\overrightarrow{EO}^2$, 以及 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}$ 知 $\overrightarrow{AO}^2=\overrightarrow{CO}^2$. 同理可得 $\overrightarrow{AO}^2=\overrightarrow{CO}^2$, 因此 $\overrightarrow{AO}^2=\overrightarrow{BO}^2$. ....(4分)

结合 $\overrightarrow{AO}^2=(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FO})^2=\overrightarrow{AF}^2+\overrightarrow{FO}^2+2\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{BO}^2=(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FO})^2=\overrightarrow{BF}^2+\overrightarrow{FO}^2+2\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FO}$ 以及 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FB}$ 知 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FO}=0$, 即 FO 为 AB 的垂直平分线. (3分)

故 ΔABC 三边的垂直平分线相交于一点.

证法二 设 ΔABC 的三边中点依次为 D, E 和 F, AC 与 BC 的垂直平分线交于一点 O, 则 $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CB}=0$, $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CA}=0$. ....(3分)

$$0=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CB}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OC}^2)\implies\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2.$$

$$0=\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CA}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{OC}^2)\implies\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OC}^2.$$

因此 $\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2$. ....(4分)

$$\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{AB}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2)=0,$$

即 FO 为 AB 的垂直平分线. ....(3分)

故 ΔABC 三边的垂直平分线相交于一点.

证法三 设 ΔABC 的三边中点依次为 D, E 和 F, AC 与 BC 的垂直平分线交于一点 O, 则 $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CB}=0$, $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CA}=0$. ....(3分)

$$0=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}$$

$$0=\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CA}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE})\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CA}$$

上述两式相减得 $\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ ....(4分)

即 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}^2=0$, 即 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=0$,

即 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, 即 $\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, 即 $\overrightarrow{OF}\perp\overrightarrow{AB}$ ....(3分)

故 ΔABC 三边的垂直平分线相交于一点.

二、(10分) 证明双叶双曲面上不存在直线.

证 设双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 上有一条直线, 其参数方程为

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt.\ \dots\dots\dots\dots(4分)$$

代入双叶双曲面的方程得到 $\forall t$ 有 $\frac{(x_0+lt)^2}{a^2}-\frac{(y_0+mt)^2}{b^2}-\frac{(z_0+nt)^2}{c^2}=1.$ ……………(3分)

当 $l\neq 0$ 时, 以 $t=-\frac{x_0}{l}$ 代入上式得 $\frac{(y_0+mt)^2}{b^2}+\frac{(z_0+nt)^2}{c^2}=-1$. 这是一个矛盾式子.

当 $l=0$ 时, 上述关于 t 恒等式中 t^2 的系数应为零, 即 $\frac{l^2}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}=0$ 于是 $l=m=n=0$. 而这与 (l,m,n) 为直线的方向相矛盾. 故椭圆抛物面上不存在直线. …………(3分)

三、(15分) 空间中有两个球面 B_1 和 B_2, B_2 包含在 B_1 所围球体的内部, 两球面之间的闭区域为 D. 设 B 是含在 D 中的一个球面, 它与球面 B_1 和 B_2 均相切. 问:

(1) B 的球心轨迹构成的曲面 S 是何种曲面?

(2) B_1 的球心和 B_2 的球心是曲面 S 的何种点?

证明你的论断.

答 B 的球心轨迹构成的曲面 S 为旋转椭球面; ……………(2分+2分 = 4分)

B_1 和 B_2 的球心是 S 的两个焦点. ……………………………………(2分)

证 设 B_1, B_2, B 的球心分别为 O_1, O_2, P, 半径分别为 R_1, R_2, r. 以 O_1O_2 的中点 O 为坐标原点, 以 $\overrightarrow{O_1O_2}$ 为 z 轴正向建立空间直角坐标系.

由题设条件知 B 与 B_1 内切, B 与 B_2 外切, 因此 $|PO_1|=R_1-r$, $|PO_2|=R_2+r$. 因此 $|PO_1|+|PO_2|=R_1+R_2$ 为常数. ……………………………………(4分)

因此由椭圆的定义知, S 与任意一个过 z 轴的平面的交线都是一个以 O_1, O_2 为焦点, 长轴长为 R_1+R_2 的椭圆, 特别是 S 在 yOz 坐标面上的截线为 $\dfrac{z^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 其中 $a=\dfrac{R_1+R_2}{2}, b=\sqrt{a^2-c^2}, c=\dfrac{|O_1O_2|}{2}$.

将这个截线绕 z 轴旋转所成的旋转面即为曲面 S, 方程为 $\dfrac{z^2}{a^2}+\dfrac{x^2+y^2}{b^2}=1$, 故为旋转椭球面, 并且 O_1 和 O_2 是 S 的两个焦点. ……………………………(5分)

四、填空题（请将最简结果直接填在横线上, 每小题5分, 共30分）

① -1 ② 4 ③ $(5,3,5)$

④ $\dfrac{\pi}{6}$ ⑤ $\begin{cases}4x^2+y^2-x=0\\ z=0\end{cases}$ ⑥ $\dfrac{x-5}{-5}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+4}{1}$

五、选择题（请将唯一正确选项的序号填在括号里, 每小题5分, 共35分）

C A C B B D A