

第三章 离散系统的时域分析

3.1 LTI离散系统的响应

3.2 单位序列响应和阶跃响应

3.3 卷积和

3.1 LTI离散系统的响应

一、差分与差分方程

设有序列 $f(k)$ ，则 $\dots, f(k+2), f(k+1), \dots, f(k-1), f(k-2)\dots$

等称为 $f(k)$ 的移位序列。

1. 差分运算

定义离散信号的差分运算

一阶前向差分定义： $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$

一阶后向差分定义： $\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$

式中， Δ 和 ∇ 称为差分算子，无原则区别；本书主要用后向差分，简称为差分。

3.1 LTI离散系统的响应

(1) 差分的线性性质:

$$\nabla[af_1(k) + bf_2(k)] = a \nabla f_1(k) + b \nabla f_2(k)$$

(2) 二阶差分定义:

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(k) &= \nabla[\nabla f(k)] = \nabla[f(k) - f(k-1)] = \nabla f(k) - \nabla f(k-1) \\ &= f(k) - f(k-1) - [f(k-1) - f(k-2)] = f(k) - 2f(k-1) + f(k-2)\end{aligned}$$

(3) m阶差分:

$$\nabla^m f(k) = f(k) + b_1 f(k-1) + \dots + b_m f(k-m)$$

3.1 LTI离散系统的响应

2. 差分方程

包含未知序列 $y(k)$ 及其各阶差分的方程式称为差分方程。
将差分展开为移位序列，得一般形式

$$y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \dots + a_0y(k-n) = b_m f(k) + \dots + b_0 f(k-m)$$

差分方程本质上是递推的代数方程，若已知初始条件和激励，利用迭代法可求得其数值解。

例：若描述某系统的差分方程为

$$y(k) + 3y(k-1) + 2y(k-2) = f(k)$$

已知初始条件 $y(0)=0, y(1)=2$, 激励 $f(k)=2k \varepsilon(k)$, 求 $y(k)$ 。

3.1 LTI离散系统的响应

解:

$$y(k) = -3y(k-1) - 2y(k-2) + f(k)$$

$$y(2) = -3y(1) - 2y(0) + f(2) = -2$$

$$y(3) = -3y(2) - 2y(1) + f(3) = 10$$

.....

一般不易得到解析形式的(闭合)解。

3.1 LTI离散系统的响应

二、差分方程的经典解

$$y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \dots + a_0y(k-n) = b_m f(k) + \dots + b_0 f(k-m)$$

与微分方程经典解类似, $y(k) = y_h(k) + y_p(k)$

1. 齐次解 $y_h(k)$

齐次方程 $y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \dots + a_0y(k-n) = 0$

其特征方程为 $1 + a_{n-1}\lambda^{-1} + \dots + a_0\lambda^{-n} = 0$, 即

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

其根 λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 称为差分方程的特征根。

齐次解的形式取决于特征根。

3.1 LTI离散系统的响应

齐次解的函数形式见P87表3-1:

表3-1 不同特征根所对应的齐次解

特征根 λ	齐次解 $y_h(k)$
单实根	$C\lambda^k$
r 重实根	$(C_{r-1}k^{r-1} + C_{r-2}k^{r-2} + \cdots + C_1k + C_0)\lambda^k$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = a \pm jb = \rho e^{\pm j\beta}$	$\rho^k [C \cos(\beta k) + D \sin(\beta k)]$ 或 $A\rho^k \cos(\beta k - \theta)$ 其中 $Ae^{j\theta} = C + jD$
r 重共轭复根	$\rho^k [A_{r-1}k^{r-1} \cos(\beta k + \theta_{r-1}) + A_{r-2}k^{r-2} \cos(\beta k + \theta_{r-2}) + \cdots + A_0 \cos(\beta k + \theta_0)]$

3.1 LTI离散系统的响应

2. 特解 $y_p(k)$:

特解的形式与激励函数的形式有关。P87表3-2列出了几种典型得 $f(k)$ 所对应的特解 $y_p(k)$:

(1) 激励 $f(k)=k^m$ ($m \geq 0$)

①所有特征根均不等于1时

$$y_p(k) = P_m k^m + \dots + P_1 k + P_0$$

②有 r 重等于1的特征根时

$$y_p(k) = k^r [P_m k^m + \dots + P_1 k + P_0]$$

(2) 激励 $f(k)=a^k$

①当 a 不等于特征根时 $y_p(k) = P a^k$

②当 a 是 r 重特征根时 $y_p(k) = (P_r k^r + P_{r-1} k^{r-1} + \dots + P_1 k + P_0) a^k$

(3) 激励 $f(k) = \cos(\beta k)$ 或 $\sin(\beta k)$ 且所有特征根均不等于 $e^{\pm j\beta}$;

$$y_p(k) = P \cos(\beta k) + Q \sin(\beta k)$$

3.1 LTI离散系统的响应

例：若描述某系统的差分方程为

$$y(k) + 4y(k-1) + 4y(k-2) = f(k)$$

已知初始条件 $y(0)=0$, $y(1)=-1$;激励 $f(k)=2^k$, $k \geq 0$, 求方程的全解。

解：特征方程为 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

可解得特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, 其齐次解

$$y_h(k) = (C_1 k + C_2) (-2)^k$$

特解为

$$y_p(k) = P (2)^k, \quad k \geq 0$$

代入差分方程得 $P(2)^k + 4P(2)^{k-1} + 4P(2)^{k-2} = f(k) = 2^k$,

解得 $P = 1/4$

所以得特解： $y_p(k) = 2^{k-2}, \quad k \geq 0$

故全解为 $y(k) = y_h + y_p = (C_1 k + C_2) (-2)^k + 2^{k-2}, \quad k \geq 0$

代入初始条件解得 $C_1 = 1, C_2 = -1/4$

3.1 LTI离散系统的响应

三、零输入响应和零状态响应

$y(k) = y_x(k) + y_f(k)$ ，也可以分别用经典法求解

$$y(j) = y_x(j) + y_f(j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

系统的激励为零，仅由系统的初始状态引起的响应，称为零输入响应，用 $y_x(k)$ 表示。系统的初始状态为零，仅由激励 $f(k)$ 引起的响应，称为零状态响应，用 $y_f(k)$ 表示。

设激励 $f(k)$ 在 $k=0$ 时接入系统，在 $k<0$ 时，激励尚未接入。

通常以 $y(-1), y(-2), \dots, y(-n)$ 描述系统的初始状态。

$$y_f(-1) = y_f(-2) = \dots = y_f(-n) = 0$$

所以 $y(-1) = y_x(-1), y(-2) = y_x(-2), \dots, y(-n) = y_x(-n)$

然后利用迭代法分别求得零输入响应和零状态响应的初始值

$y_x(j)$ 和 $y_f(j)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n-1$)

3.1 LTI离散系统的响应

例：若描述某离散系统的差分方程为

$$y(k) + 3y(k-1) + 2y(k-2) = f(k)$$

已知激励 $f(k)=2^k$ ， $k \geq 0$ ，初始状态 $y(-1)=0$ ， $y(-2)=1/2$ ，求系统的零输入响应、零状态响应和全响应

解：（1） $y_x(k)$ 满足方程 $y_x(k) + 3y_x(k-1) + 2y_x(k-2) = 0$

其初始状态 $y_x(-1) = y(-1) = 0$ ， $y_x(-2) = y(-2) = 1/2$

首先递推求出初始值 $y_x(0)$ ， $y_x(1)$ ，

$$y_x(k) = -3y_x(k-1) - 2y_x(k-2)$$

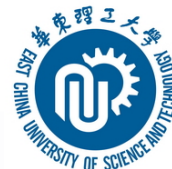
$$y_x(0) = -3y_x(-1) - 2y_x(-2) = -1, \quad y_x(1) = -3y_x(0) - 2y_x(-1) = 3$$

方程的特征根为 $\lambda_1 = -1$ ， $\lambda_2 = -2$ ，

其解为 $y_x(k) = C_{x1}(-1)^k + C_{x2}(-2)^k$

将初始值代入并解得 $C_{x1} = 1$ ， $C_{x2} = -2$

所以 $y_x(k) = (-1)^k - 2(-2)^k$ ， $k \geq 0$



3.1 LTI离散系统的响应

(2) 零状态响应 $y_f(k)$ 满

$$y_f(k) + 3y_f(k-1) + 2y_f(k-2) = f(k)$$

初始状态 $y_f(-1)=y_f(-2)=0$

递推求初始值 $y_f(0), y_f(1),$

$$y_f(k) = -3y_f(k-1) - 2y_f(k-2) + 2^k, k \geq 0$$

$$y_f(0) = -3y_f(-1) - 2y_f(-2) + 1 = 1$$

$$y_f(1) = -3y_f(0) - 2y_f(-1) + 2 = -1$$

分别求出齐次解和特解，得

$$\begin{aligned} y_f(k) &= C_{f1}(-1)^k + C_{f2}(-2)^k + y_p(k) \\ &= C_{f1}(-1)^k + C_{f2}(-2)^k + (1/3)2^k \end{aligned}$$

代入初始值求得 $C_{f1} = -1/3, C_{f2} = 1$

所以 $y_f(k) = -(-1)^k/3 + (-2)^k + (1/3)2^k, k \geq 0$

3.2 单位序列响应和阶跃响应

一、单位序列响应

由单位序列 $\delta(k)$ 所引起的零状态响应称为单位序列响应或单位样值响应或单位取样响应，或简称单位响应，记为 $h(k)$

$$h(k) = T[\{0\}, \delta(k)]$$

求解系统的单位序列响应可用求解差分方程法或z变换法。

例1 已知某系统的差分方程为 $y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = f(k)$ 求单位序列响应 $h(k)$ 。

解 根据 $h(k)$ 的定义 有

$$h(k) - h(k-1) - 2h(k-2) = \delta(k) \quad (1)$$

$$h(-1) = h(-2) = 0$$

1) 递推求初始值 $h(0)$ 和 $h(1)$

3.2 单位序列响应和阶跃响应

方程 (1) 移项写为

$$h(k) = h(k-1) + 2h(k-2) + \delta(k)$$

$$h(0) = h(-1) + 2h(-2) + \delta(0) = 1$$

$$h(1) = h(0) + 2h(-1) + \delta(1) = 1$$

(2) 求 $h(k)$. 对于 $k > 0$, $h(k)$ 满足齐次方程

$$h(k) - h(k-1) - 2h(k-2) = 0$$

其特征方程为 $(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$

所以 $h(k) = C_1(-1)^k + C_2(2)^k$, $k > 0$

$$h(0) = C_1 + C_2 = 1, \quad h(1) = -C_1 + 2C_2 = 1$$

解得 $C_1 = 1/3$, $C_2 = 2/3$

$$h(k) = (1/3)(-1)^k + (2/3)(2)^k, \quad k \geq 0$$

或写为 $h(k) = [(1/3)(-1)^k + (2/3)(2)^k] \varepsilon(k)$

3.2 单位序列响应和阶跃响应

例2：若方程为

$$y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = f(k) - f(k-2)$$

求单位序列响应 $h(k)$ 。

解 $h(k)$ 满足

$$h(k) - h(k-1) - 2h(k-2) = \delta(k) - \delta(k-2)$$

令只有 $\delta(k)$ 作用时，系统的单位序列响应 $h_1(k)$ ，
它满足

$$h_1(k) - h_1(k-1) - 2h_1(k-2) = \delta(k)$$

根据线性时不变性

$$h(k) = h_1(k) - h_1(k-2) = [(1/3)(-1)^k + (2/3)(2)^k] \varepsilon(k) - [(1/3)(-1)^{k-2} + (2/3)(2)^{k-2}] \varepsilon(k-2)$$

3.2 单位序列响应和阶跃响应

二、阶跃响应

当LTI系统的激励为单位序列 $\varepsilon(k)$ 时，系统的零状态响应称为阶跃响应，用 $g(k)$ 表示。

$$g(k) = T[\varepsilon(k), \{0\}]$$

由于

$$\varepsilon(k) = \sum_{j=-\infty}^k \delta(j) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta(k-j) \quad \delta(k) = \nabla \varepsilon(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)$$

所以（由线性和移位不变性）

$$g(k) = \sum_{j=-\infty}^k h(j) = \sum_{j=0}^{\infty} h(k-j) \quad h(k) = \nabla g(k) = g(k) - g(k-1)$$

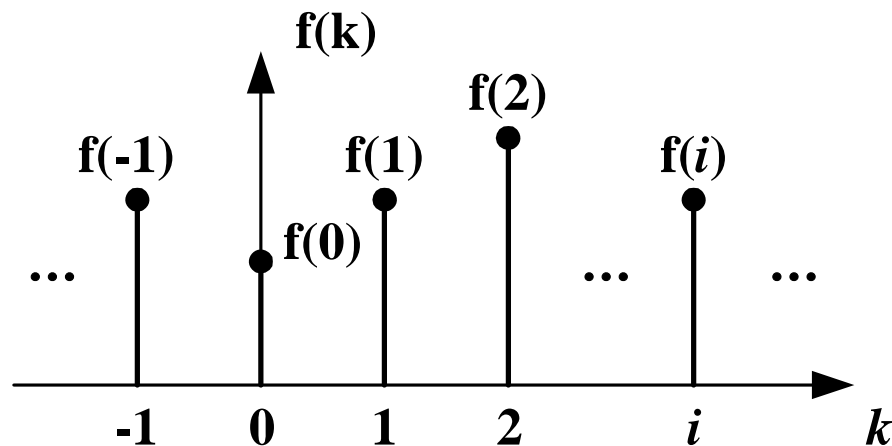
两个常用的
求和公式：

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=k_1}^{k_2} a^j = \begin{cases} \frac{a^{k_1} - a^{k_2+1}}{1-a} & a \neq 1 \\ k_2 - k_1 + 1 & a = 1 \end{cases} \\ \sum_{j=k_1}^{k_2} j = \frac{(k_2 + k_1)(k_2 - k_1 + 1)}{2} \end{array} \right. \quad (k_2 \geq k_1)$$

3.3 卷积和

一、卷积和

1. 序列的时域分解



任意离散序列 $f(k)$ 可表示为

$$\begin{aligned} f(k) &= \dots + f(-1) \delta(k+1) + f(0) \delta(k) + f(1) \delta(k-1) + f(2) \delta(k-2) \\ &\quad + \dots + f(i) \delta(k-i) + \dots \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i) \delta(k-i) \end{aligned}$$

3.3 卷积和

2.任意序列作用下的零状态响应



根据 $h(k)$ 的定义: $\delta(k) \Rightarrow h(k)$

由时不变性: $\delta(k-i) \Rightarrow h(k-i)$

由齐次性: $f(i) \delta(k-i) \Rightarrow f(i) h(k-i)$

由叠加性: $\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i) \delta(k-i) \Rightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i) h(k-i)$

\parallel \parallel

$f(k)$ $y_f(k)$

$$y_f(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i) h(k-i) \quad \text{卷积和}$$

3.3 卷积和

3.卷积和的定义

已知定义在区间 $(-\infty, \infty)$ 上的两个函数 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$, 则定义和

$$f(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) f_2(k-i)$$

为 $f_1(k)$ 与 $f_2(k)$ 的卷积和, 简称卷积; 记为

$$f(k) = f_1(k) * f_2(k)$$

注意: 求和是在虚设的变量 i 下进行的, i 为求和变量, k 为参变量。结果仍为 k 的函数

$$y_f(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i) h(k-i) = f(k) * h(k)$$

3.3 卷积和

例: $f(k) = a^k \varepsilon(k)$, $h(k) = b^k \varepsilon(k)$, 求 $y_f(k)$

解: $y_f(k) = f(k) * h(k)$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a^i \varepsilon(i)b^{k-i} \varepsilon(k-i)$$

当 $i < 0$, $\varepsilon(i) = 0$; 当 $i > k$ 时, $\varepsilon(k-i) = 0$

$$y_f(k) = \left[\sum_{i=0}^k a^i b^{k-i} \right] \varepsilon(k) = b^k \left[\sum_{i=0}^k \left(\frac{a}{b} \right)^i \right] \varepsilon(k) = \begin{cases} b^k \frac{1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{k+1}}{1 - \frac{a}{b}}, & a \neq b \\ b^k (k+1), & a = b \end{cases}$$

$$\varepsilon(k) * \varepsilon(k) = (k+1) \varepsilon(k)$$

3.3 卷积和

二、卷积的图解法

$$f(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) f_2(k-i)$$

卷积过程可分解为**四步**：

- (1) **换元**： k 换为 $i \rightarrow$ 得 $f_1(i)$, $f_2(i)$
- (2) **反转平移**： 由 $f_2(i)$ 反转 $\rightarrow f_2(-i)$ 右移 $k \rightarrow f_2(k-i)$
- (3) **乘积**： $f_1(i) f_2(k-i)$
- (4) **求和**： i 从 $-\infty$ 到 ∞ 对乘积项求和

注意： k 为参变量。

3.3 卷积和

例： $f_1(k)$ 、 $f_2(k)$ 如图所示， 已知 $f(k)$
 $= f_1(k) * f_2(k)$ ， 求 $f(2) = ?$

解：
$$f(2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) f_2(2-i)$$

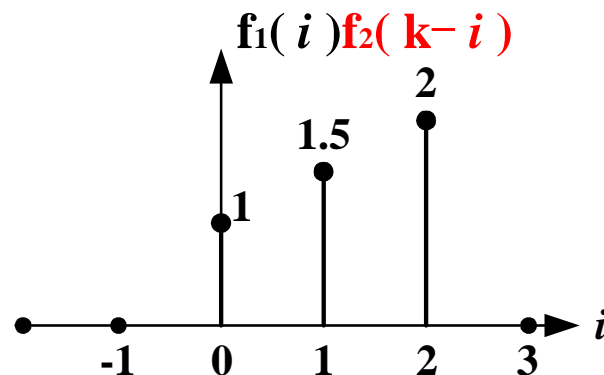
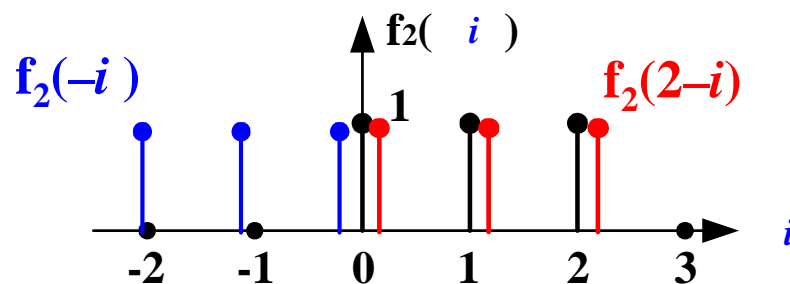
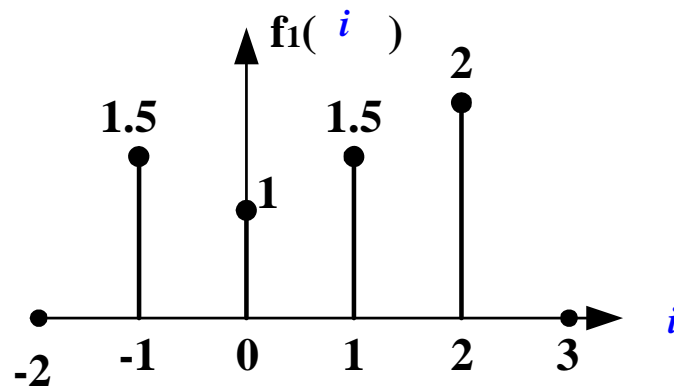
(1) 换元

(2) $f_2(i)$ 反转得 $f_2(-i)$

(3) $f_2(-i)$ 右移2得 $f_2(2-i)$

(4) $f_1(i)$ 乘 $f_2(2-i)$

(5) 求和， 得 $f(2) = 4.5$



3.3 卷积和

三、不进位乘法求卷积

$$\begin{aligned} f(k) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) f_2(k-i) \\ &= \dots + f_1(-1)f_2(k+1) + f_1(0)f_2(k) + f_1(1)f_2(k-1) + f_1(2)f_2(k-2) \\ &\quad + \dots + f_1(i) f_2(k-i) + \dots \end{aligned}$$

$f(k)$ =所有两序列序号之和为 k 的那些样本乘积之和。

如 $k=2$ 时

$$f(2) = \dots + f_1(-1)f_2(3) + f_1(0)f_2(2) + f_1(1)f_2(1) + f_1(2)f_2(0) + \dots$$

例 $f_1(k) = \{0, f_1(1), f_1(2), f_1(3), 0\}$

$$f_2(k) = \{0, f_2(0), f_2(1), 0\}$$

3.3 卷积和

排成乘法

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc} f_1(1), & f_1(2), & f_1(3) \\ & f_2(0), & f_2(1) \end{array} \\
 \times \hline
 \begin{array}{ccc} f_1(1)f_2(1), & f_1(2)f_2(1), & f_1(3)f_2(1) \\ f_1(1)f_2(0), & f_1(2)f_2(0), & f_1(3)f_2(0) \end{array} \\
 + \hline
 \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0) & & f_1(3)f_2(1) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f_1(1)f_2(0) & f_1(2)f_2(1)+f_1(3)f_2(0) & \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 f(k) = \{ & 0, \quad f_1(1)f_2(0), \quad f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0) \\
 & f_1(2)f_2(1)+f_1(3)f_2(0), \quad f_1(3)f_2(1), \quad 0 \}
 \end{aligned}$$

3.3 卷积和

例 $f_1(k) = \{0, 2, 1, 5, 0\}$

$\uparrow k=1$

$f_2(k) = \{0, 3, 4, 0, 6, 0\}$

$\uparrow k=0$

求 $f(k) = f_1(k) * f_2(k)$

解

$$\begin{array}{r} 3, 4, 0, 6 \\ \times \quad 2, 1, 5 \\ \hline 15, 20, 0, 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3, 4, 0, 6 \\ 6, 8, 0, 12 \\ + \hline 6, 11, 19, 32, 6, 30 \end{array}$$

$f(k) =$

$\{0, 6, 11, 19, 32, 6, 30\}$

$\uparrow k=1$

注：教材中提到的列表法
与这里介绍的不进位乘法
本质是一样的。

3.3 卷积和

四、卷积和的性质

1. 满足乘法的三律：(1) 交换律, (2) 分配律, (3) 结合律.

$$2. f(k) * \delta(k) = f(k), \quad f(k) * \delta(k - k_0) = f(k - k_0)$$

$$3. f(k) * \varepsilon(k) = \sum_{i=-\infty}^k f(i)$$

$$4. f_1(k - k_1) * f_2(k - k_2) = f_1(k - k_1 - k_2) * f_2(k)$$

$$5. \nabla[f_1(k) * f_2(k)] = \nabla f_1(k) * f_2(k) = f_1(k) * \nabla f_2(k)$$

求卷积和是本章的重点。

3.3 卷积和

例1 如图复合系统由三个子系统组成，其中

$h_1(k) = \varepsilon(k)$, $h_2(k) = \varepsilon(k-5)$, 求复合系统的单位序列响应 $h(k)$

解 根据 $h(k)$ 的定义，有

$$h(k) = [\delta(k) * h_1(k) - \delta(k) * h_2(k)] * h_1(k)$$

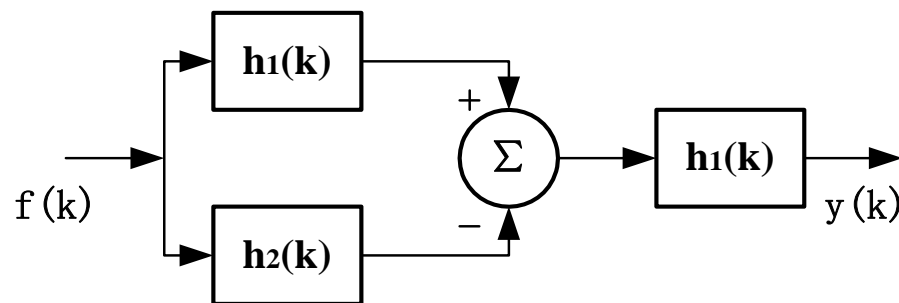
$$= [h_1(k) - h_2(k)] * h_1(k)$$

$$= h_1(k) * h_1(k) - h_2(k) * h_1(k)$$

$$= \varepsilon(k) * \varepsilon(k) - \varepsilon(k-5) * \varepsilon(k)$$

$$= (k+1)\varepsilon(k) - (k+1-5)\varepsilon(k-5)$$

$$= (k+1)\varepsilon(k) - (k-4)\varepsilon(k-5)$$



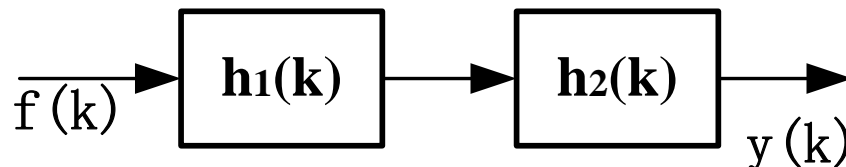
3.3 卷积和

例2 如图复合系统由两个子系统级联组成，其中

$$h_1(k) = 2\cos(k\pi),$$

$$h_2(k) = a^k \varepsilon(k),$$

激励 $f(k) = \delta(k) - a\delta(k-1)$ ，求复合系统的零状态响应 $y_f(k)$



解

$$\begin{aligned} y_f(k) &= f(k) * h_1(k) * h_2(k) \\ &= 2\cos(k\pi) * [a^k \varepsilon(k)] * [\delta(k) - a\delta(k-1)] \\ &= 2\cos(k\pi) * [a^k \varepsilon(k) - a^k \varepsilon(k-1)] \\ &= 2\cos(k\pi) * \delta(k) \\ &= 2\cos(k\pi) \end{aligned}$$