第四章 傅里叶变换和系统的频域分析

第四章 傅里叶变换和系统的频域分析

时域分析，以冲激函数为基本信号，任意输入信号可分解为一系列冲激函数；而$y_f(t) = h(t)*f(t)$。

本章将以正弦信号和虚指数信号$e^{j\omega t}$为基本信号，任意输入信号可分解为一系列不同频率的正弦信号或虚指数信号之和。

这里用于系统分析的独立变量是频率，故称为频域分析。

4.1 信号分解为正交函数

一、矢量正交与正交分解

矢量$\mathbf{V}_x = (v_{x1}, v_{x2}, v_{x3})$与$\mathbf{V}_y = (v_{y1}, v_{y2}, v_{y3})$正交的定义：其内积为0。即

$$\mathbf{V}_x \mathbf{V}_y^{T} = \sum_{i=1}^{3} v_{xi} v_{yi} = 0$$

由两两正交的矢量组成的矢量集合---称为正交矢量集。

如三维空间中，以矢量

$\mathbf{v}_x$=（2，0，0）、$\mathbf{v}_y$=（0，2，0）、$\mathbf{v}_z$=（0，0，2)

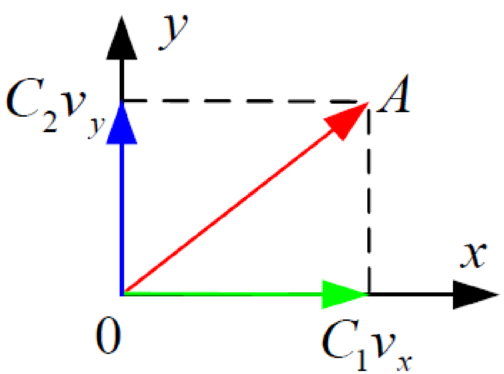
所组成的集合就是一个正交矢量集。

4.1 信号分解为正交函数

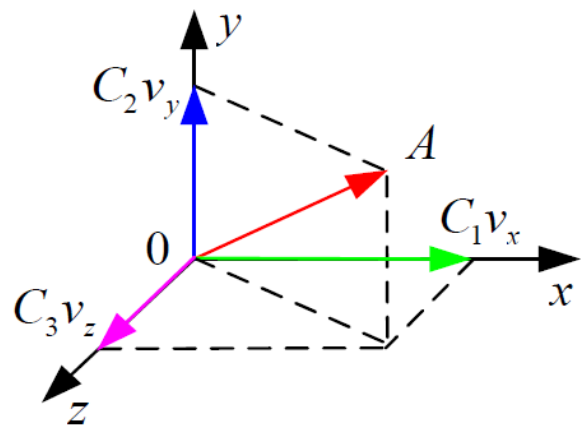
例如对于一个三维空间的矢量**A** =(2，5，8)，可以用一个三维正交矢量集{ $\mathbf{v}_x$，$\mathbf{v}_y$，$\mathbf{v}_z$}分量的线性组合表示。即

$$\mathbf{A}= \mathbf{v}_x+ 2.5\ \mathbf{v}_y+ 4\ \mathbf{v}_z$$

矢量空间正交分解的概念可推广到信号空间，在信号空间找到若干个相互正交的信号作为基本信号，使得信号空间中任意信号均可表示成它们的线性组合。



(a) 平面矢量分解



(b) 空间矢量分解

二、信号正交与正交函数集

1. 定义：

定义在(t_1，t_2)区间的两个函数$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$,若满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t)\varphi_2^*(t)\,\mathrm{d}t = 0$$ (两函数的内积为0)

则称$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$ 在区间(t_1，t_2)内正交。

2. 正交函数集：

若n个函数$\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，…，$\varphi_n(t)$构成一个函数集，当这些函数在区间(t_1，t_2)内满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j^*(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i \neq 0, & i = j \end{cases}$$

则称此函数集为在区间(t_1，t_2)的正交函数集。

3. 完备正交函数集：

如果在正交函数集$\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$之外，不存在函数$\varphi(t)$ ($\neq 0$) 满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\varphi_i(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

则称此函数集为完备正交函数集。

例如：三角函数集$\{1, \cos(n\Omega t), \sin(n\Omega t), n=1,2,\ldots\}$和虚指数函数集$\{e^{jn\Omega t}, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$是两组典型的在区间$(t_0, t_0+T)$($T=2\pi/\Omega$)上的完备正交函数集。

4.1　信号分解为正交函数

三、信号的正交分解

设有n个函数$\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，…，$\varphi_n(t)$在区间(t_1, t_2)构成一个正交函数空间。将任一函数f(t)用这n个正交函数的线性组合来近似，可表示为

$$f(t) \approx C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \ldots + C_n\varphi_n$$

问题：如何选择各系数C_j使f(t)与近似函数之间误差在区间(t_1, t_2)内为最小。

通常使误差的方均值(称为均方误差)最小。均方误差为

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi_j(t)]^2 \, \mathrm{d}t$$

4.1 信号分解为正交函数

为使上式最小（系数Cj变化时），有

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial C_i}=\frac{\partial}{\partial C_i}\int_{t_1}^{t_2}[f(t)-\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(t)]^2\,\mathrm{d}t=0$$

展开上式中的被积函数，并求导。上式中只有两项不为0，写为

$$\frac{\partial}{\partial C_i}\int_{t_1}^{t_2}[-2C_i f(t)\varphi_i(t)+C_i^2\varphi_i^2(t)]\mathrm{d}t=0$$

即

$$-2\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i(t)\,\mathrm{d}t+2C_i\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^2(t)\,\mathrm{d}t=0$$

所以系数

$$C_i=\frac{\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i(t)\,\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^2(t)\,\mathrm{d}t}=\frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i(t)\,\mathrm{d}t$$

4.1 信号分解为正交函数

代入，得最小均方误差（推导过程见教材）

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{t_2-t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2}f^2(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{j=1}^{n}C_j^2K_j\right]\geq 0$$

在用正交函数去近似f(t)时，所取得项数越多，即n越大，则均方误差越小。当n→∞时（为完备正交函数集），均方误差为零。此时有

$$\int_{t_1}^{t_2}f^2(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{j=1}^{\infty}C_j^2K_j$$

上式称为(Parseval)巴塞瓦尔公式，表明：在区间(t_1,t_2)， f(t)所含能量恒等于f(t)在完备正交函数集中分解的各正交分量能量的总和。

函数f(t)可分解为无穷多项正交函数之和 $f(t)=\sum_{j=1}^{\infty}C_j\varphi_j(t)$

4.2　傅里叶级数

一、傅里叶级数的三角形式

设周期信号f(t)，其周期为T，角频率Ω=2π/T，当满足狄里赫利(Dirichlet)条件时，它可分解为如下三角级数—— 称为f(t)的傅里叶级数。

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega t)$$

系数a_n , b_n称为傅里叶系数

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t \qquad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(n\Omega t)\,\mathrm{d}t$$

可见， a_n 是n的偶函数， b_n是n的奇函

4.2 傅里叶级数

将上式同频率项合并，可写为

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

式中，$\mathbf{A_0}=\boldsymbol{a_0}$ $\quad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ $\quad \varphi_n=-\arctan\frac{b_n}{a_n}$

可见A_n是n的偶函数，φ_n是n的奇函数

$a_n=A_n\cos\varphi_n$，$b_n=-A_n\sin\varphi_n$，

上式表明，周期信号可分解为直流和许多余弦分量。

其中，$A_0/2$为直流分量；

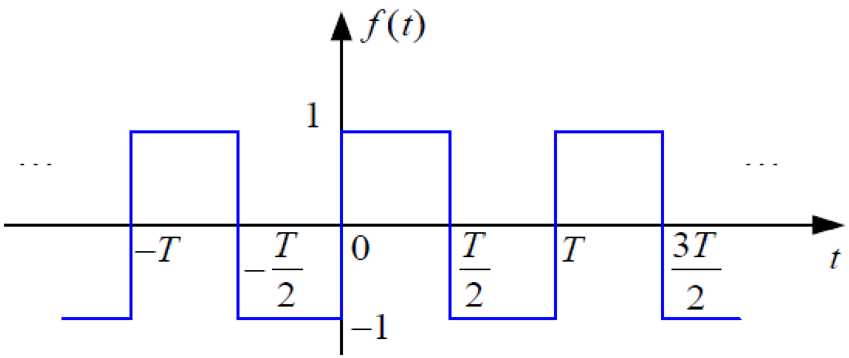
$A_1\cos(\Omega t+\varphi_1)$称为基波或一次谐波，它的角频率与原周期信号相同；

$A_2\cos(2\Omega t+\varphi_2)$称为二次谐波，它的频率是基波的2倍；

一般而言，$A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$称为n次谐波

4.2 傅里叶级数

例1：将图示方波信号$f(t)$展开为傅里叶级数。



解：$f(t)$为$T=3, \Omega=2\pi/T=2\pi/3$的周期信号，傅里叶系数为

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\Omega t)dt=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-1)\times\cos(n\Omega t)dt+\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}1\times\cos(n\Omega t)dt$$

$$=\frac{2}{T}\frac{1}{n\Omega}[-\sin(n\Omega t)]\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{0}+\frac{2}{T}\frac{1}{n\Omega}[\sin(n\Omega t)]\Bigg|_{0}^{\frac{T}{2}}$$

考虑到 Ω =2 π /T，可得：$a_n=0$

4.2 傅里叶级数

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\Omega t)dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-1)\times\sin(n\Omega t)dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} 1\times\sin(n\Omega t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\frac{1}{n\Omega}[\cos(n\Omega t)]\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{0} + \frac{2}{T}\frac{1}{n\Omega}[-\cos(n\Omega t)]\Bigg|_{0}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{2}{T}\frac{T}{n2\pi}\{[1-\cos(-n\pi)]+[1-\cos(n\pi)]$$

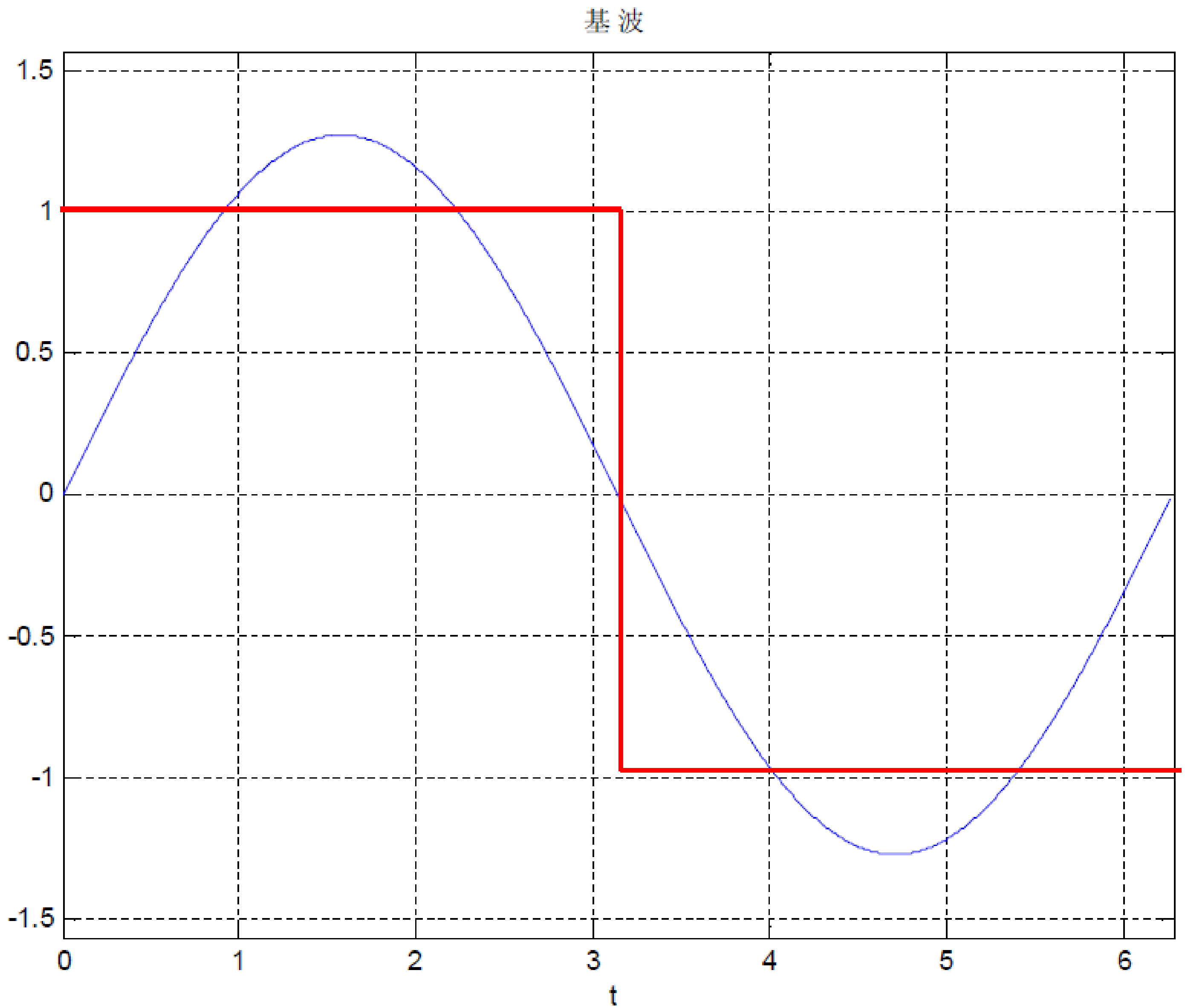
$$= \frac{2}{n\pi}[1-\cos(-n\pi)] = \begin{cases} 0, & n = 2,4,6,\cdots \\ \dfrac{4}{n\pi}, & n = 1,3,5,\cdots \end{cases}$$

信号的傅里叶级数展开式为：

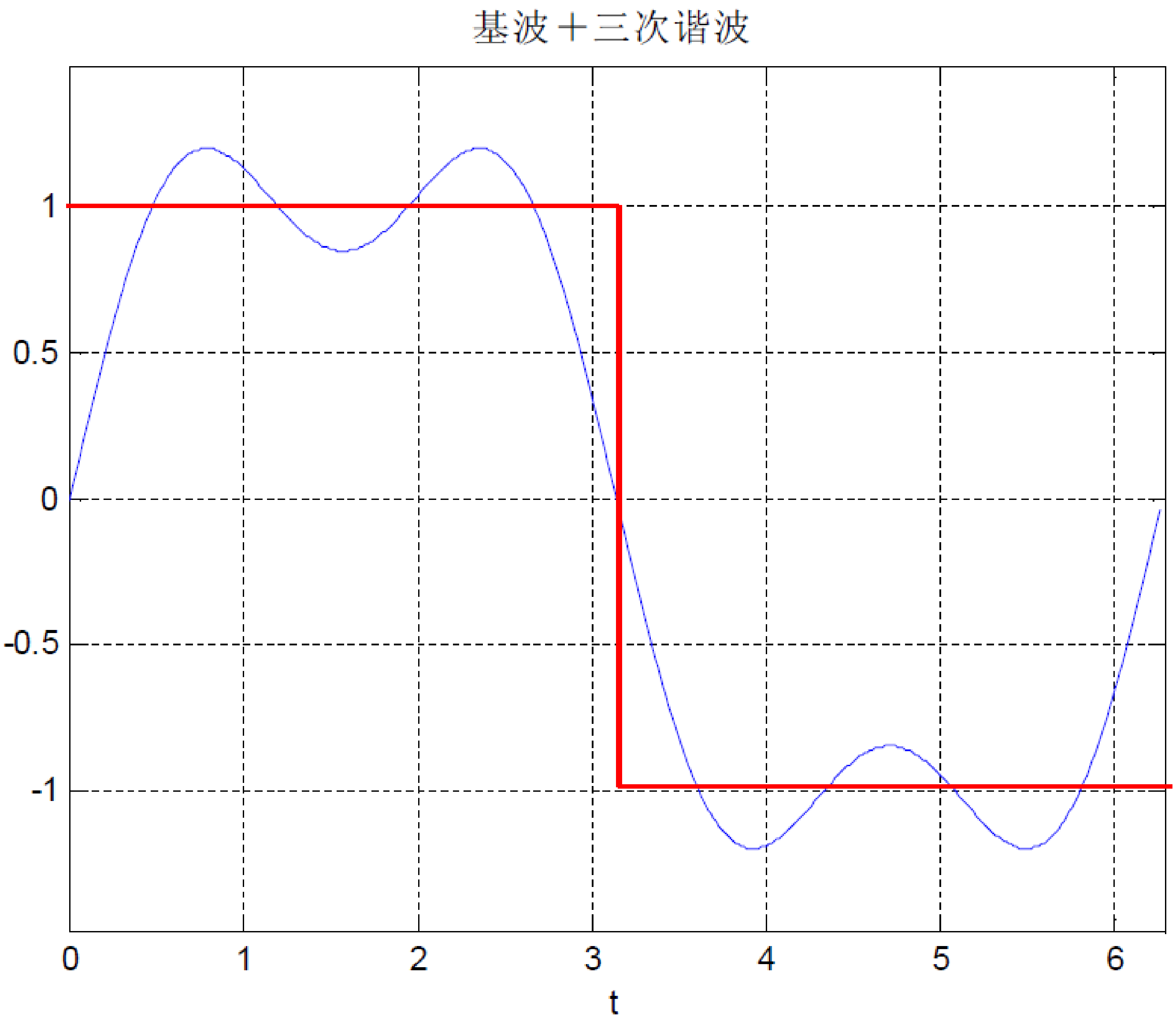
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\Omega t)$$

$$= \frac{4}{\pi}[\sin(\Omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\Omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\Omega t) + \cdots + \frac{1}{n}\sin(n\Omega t) + \cdots], \quad n = 1,3,5,\cdots$$

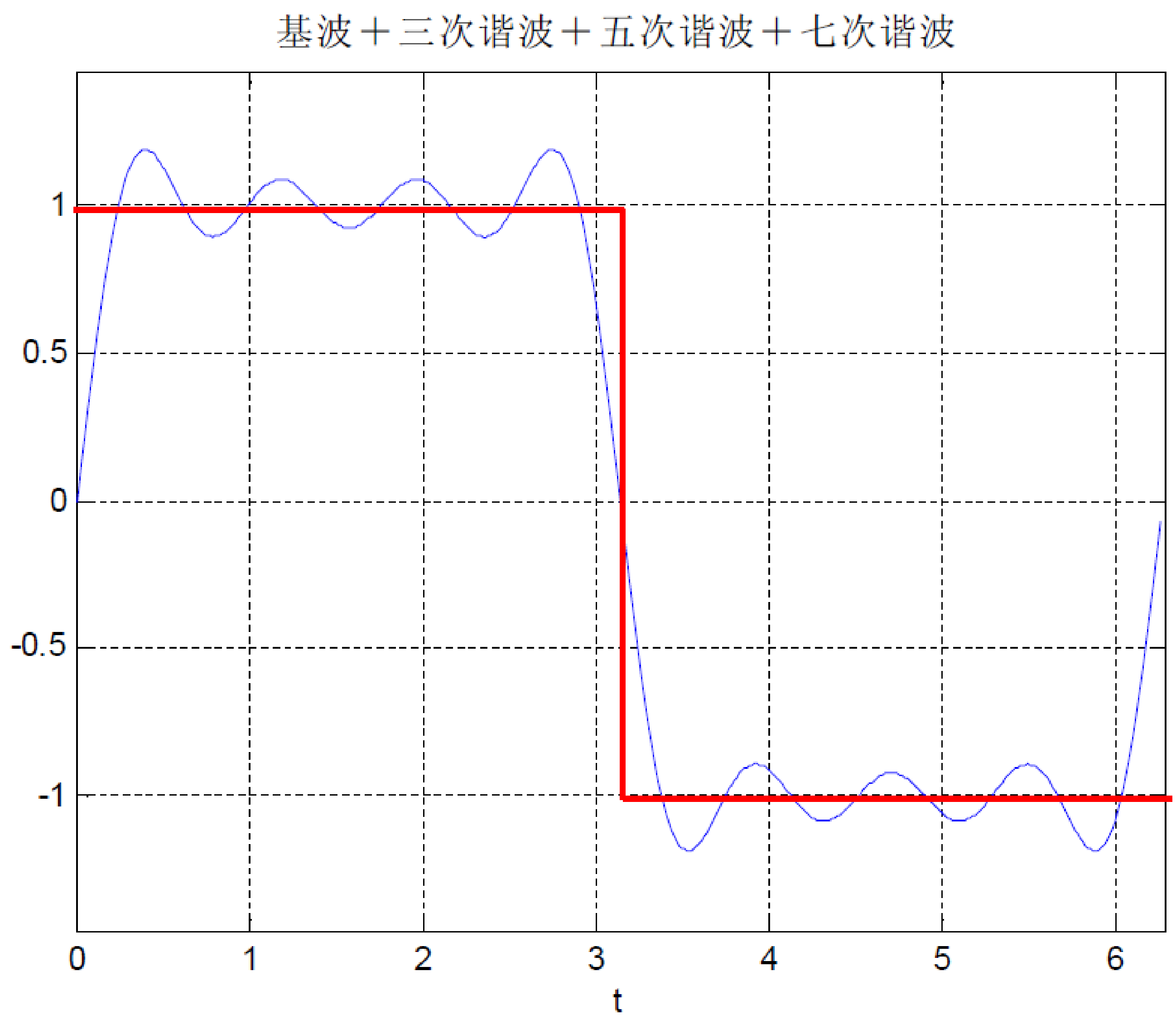
4.2 傅里叶级数



4.2 傅里叶级数



4.2　傅里叶级数



4.2 傅里叶级数

二、波形的对称性与谐波特性

1 . f(t)为偶函数—对称纵坐

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\Omega t)\,\mathrm{d}t$$

b_n=0，展开为余弦级

2 . f(t)为奇函数—对称于原

a_n=0，展开为正弦级

实际上，任意函数f(t)都可分解为奇函数和偶函数两部分，

即 $f(t) = f_{od}(t) + f_{ev}(t)$

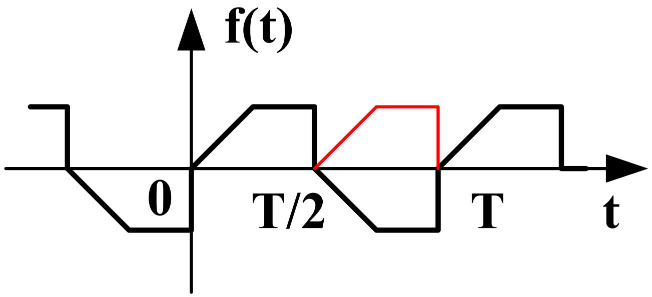
由于 $f(-t) = f_{od}(-t) + f_{ev}(-t) = -f_{od}(t) + f_{ev}(t)$ 所以

$$f_{od}(t)=\frac{f(t)-f(-t)}{2} \qquad f_{ev}(t)=\frac{f(t)+f(-t)}{2}$$

3 . f(t)为奇谐函数——$f(t) = -f(t \pm T/2)$

此时 其傅里叶级数中只含奇次谐波分量，而不含偶次谐波分量即

$a_0=a_2=\ldots=b_2=b_4=\ldots=0$



三、傅里叶级数的指数形式

三角形式的傅里叶级数，含义比较明确，但运算常感不便，因而经常采用指数形式的傅里叶级数。可从三角形式推出：利用 $\cos x=(e^{jx}+e^{-jx})/2$

4.2 傅里叶级数

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{2}[\mathrm{e}^{j(n\Omega t+\varphi_n)}+\mathrm{e}^{-j(n\Omega t+\varphi_n)}]$$

$$=\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{e}^{j\varphi_n}\mathrm{e}^{jn\Omega t}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{e}^{-j\varphi_n}\mathrm{e}^{-jn\Omega t}$$

上式中第三项的n用–n代换，$A_{-n}=A_n$，$\varphi_{-n}=-\varphi_n$，

则上式写为

$$\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{e}^{j\varphi_n}\mathrm{e}^{jn\Omega t}+\frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{-\infty}A_n\,\mathrm{e}^{j\varphi_n}\mathrm{e}^{jn\Omega t}$$

令$A_0=A_0\mathrm{e}^{j\varphi_0}\mathrm{e}^{j0\Omega t}$，$\varphi_0=0$

所以

$$f(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\,\mathrm{e}^{j\varphi_n}\mathrm{e}^{jn\Omega t}$$

4.2 傅里叶级数

令复数

$$\frac{1}{2}A_n\,\mathrm{e}^{j\varphi_n} = \left|F_n\right|\mathrm{e}^{\varphi_n} = F_n$$

称其为复傅里叶系数，简称傅里叶系数

$$F_n = \frac{1}{2}A_n e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}(A_n\cos\varphi_n + jA_n\sin\varphi_n) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t - j\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\Omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{e}^{-jn\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\,\mathrm{e}^{jn\Omega t} \qquad F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{e}^{-jn\Omega t}\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{n} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

表明：任意周期信号f(t)可分解为许多不同频率的虚指数信号之和。F_n是频率为nΩ的分量的系数，$F_0 = A_0/2$为直流分量。

四、周期信号的功率——Parseval等式

周期信号一般是功率信号，其平均功率为

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = (\frac{A_0}{2})^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}A_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$$

直流和n次谐波分量在1Ω电阻上消耗的平均功率之和。

n≥0时，$|F_n| = A_n/2$。

4.3 周期信号的频谱

一、信号频谱的概念

从广义上说，信号的某种特征量随信号频率变化的关系，称为信号的频谱，所画出的图形称为信号的频谱图。

周期信号的频谱是指周期信号中各次谐波幅值、相位随频率的变化关系，即

将$A_n \sim \omega$和$\varphi_n \sim \omega$的关系分别画在以ω为横轴的平面上得到的两个图，分别称为振幅频谱图和相位频谱图。因为$n \geqslant 0$，所以称这种频谱为单边谱。

也可画$|F_n| \sim \omega$和$\varphi_n \sim \omega$的关系，称为双边谱。若F_n为实数，也可直接画F_n。

4.3 周期信号的频谱

例：周期信号 $f(t)=1-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)$

试求该周期信号的基波周期T，基波角频率 Ω，画出它的单边频谱图，并求$f(t)$ 的平均功率。

解 首先应用三角公式改写$f(t)$的表达式，即

$$f(t)=1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{2\pi}{3}+\pi\right)+\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)$$

显然1是该信号的直流分量

$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)$ 的周期$\mathbf{T_1=8}$ $\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)$ 的周期$\mathbf{T_2=6}$

所以f(t)的周期$\mathbf{T=24}$，基波角频率 $\Omega=2\pi/T=$

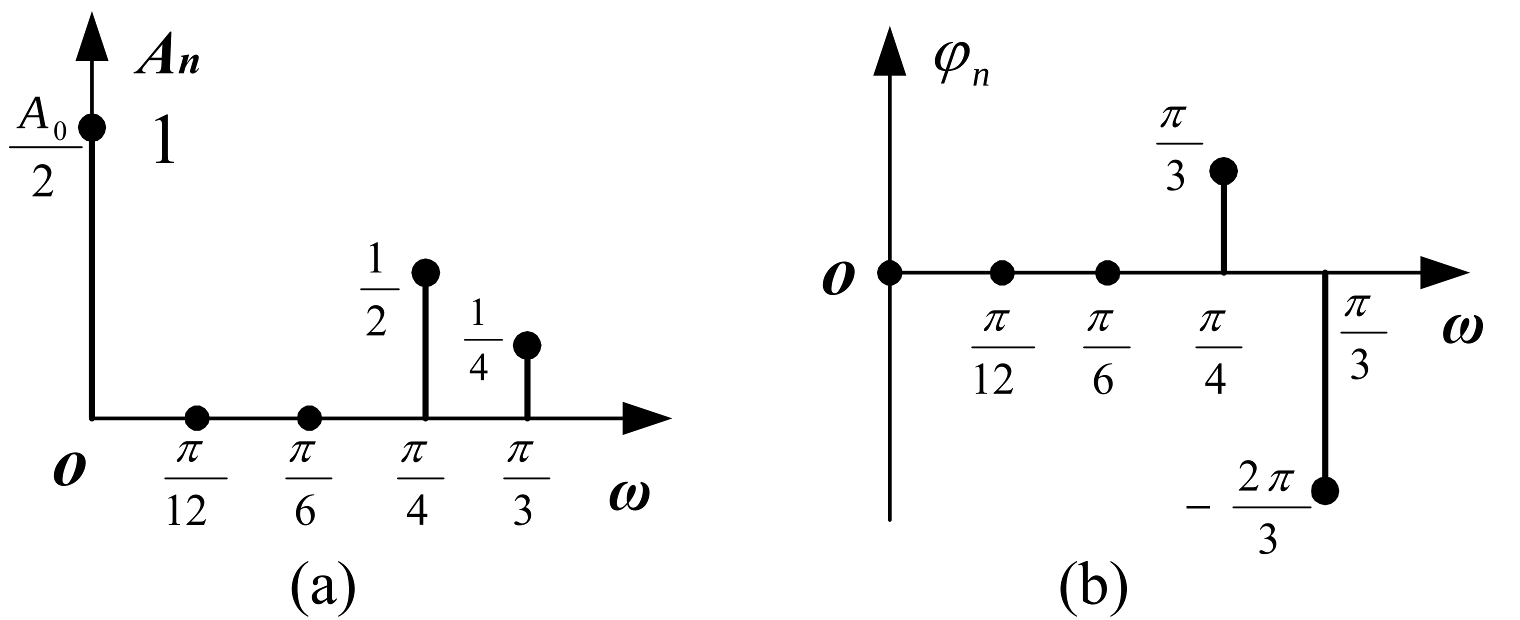
根据帕斯瓦尔等式，其功率为 P= $1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{37}{32}$

4.3 周期信号的频谱

$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)$ 是f(t)的[π/4]/[π/12]=3次谐波分量；

$\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)$ 是f(t)的[π/3]/[π/12]=4次谐波分

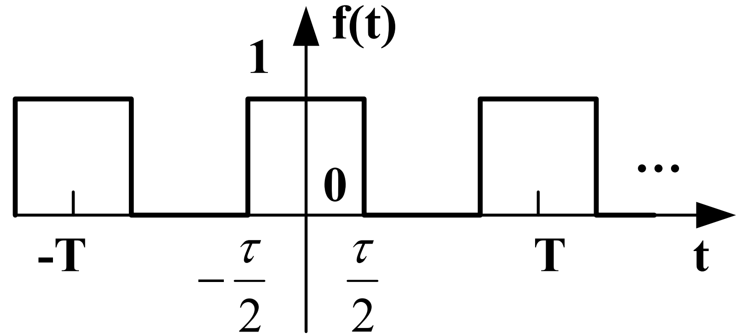
画出$f(t)$的单边振幅频谱图、相位频谱图如图



4.3 周期信号的频谱

二、周期信号频谱的特点

举例：有一幅度为1，脉冲宽度为τ的周期矩形脉冲，其周期为T，如图所示，求频谱。



$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-jn\Omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\mathrm{e}^{-jn\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\frac{\mathrm{e}^{-jn\Omega t}}{-jn\Omega}\Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{2}{T}\frac{\sin(\frac{n\Omega\tau}{2})}{n\Omega}=\frac{\tau}{T}\frac{\sin\frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}}$$

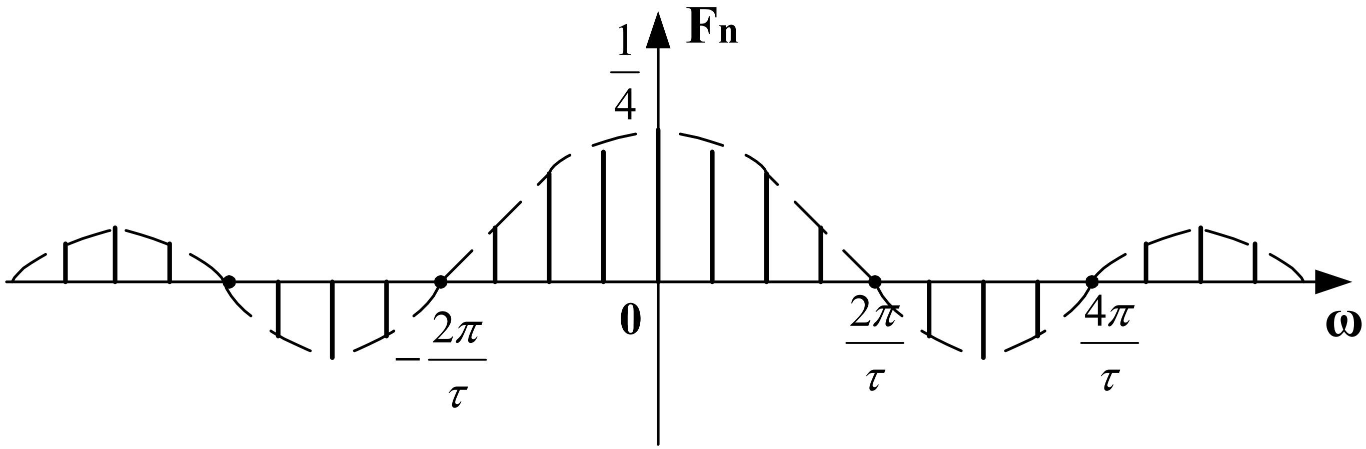
令Sa(x)=sin(x)/x (取样函数）

4.3 周期信号的频谱

$$F_n = \frac{\tau}{T} Sa(\frac{n\Omega\tau}{2}) = \frac{\tau}{T} Sa(\frac{n\pi\tau}{T})$$ **, n = 0 ,±1， ±2， …**

F_n为实数，可直接画成一个频谱图，设T = 4 τ 画图:

零点为 $\frac{n\Omega\tau}{2} = m\pi$ 所以 $n\Omega = \frac{2m\pi}{\tau}$ ，***m*为整**



特点： (1)周期信号的频谱具有谐波(离散)性，谱线位置是基频Ω的整数倍；(2)一般具有收敛性，总趋势减小。

4.3 周期信号的频谱

谱线的结构与波形参数的关系：

(a) T一定，τ变小，此时Ω（谱线间隔）不变。两零点之间的谱线数目：$\omega_1/\Omega=(2\pi/\tau)/(2\pi/T)=T/\tau$ 增多

(b) τ一定，T增大，间隔Ω减小，频谱变密，幅度减小

如果周期T无限增长（这时就成为非周期信号），那么，谱线间隔将趋近于零，周期信号的离散频谱就过渡到非周期信号的连续频谱。各频率分量的幅度也趋近于无穷小。

4.4 傅里叶变换

一、傅里叶变换

非周期信号f(t)可看成是周期T→∞时的周期信号。

前已指出当周期T趋近于无穷大时，谱线间隔Ω趋近于无穷小，从而信号的频谱变为连续频谱。各频率分量的幅度也趋近于无穷小，不过，这些无穷小量之间仍有差别。

为了描述非周期信号的频谱特性，引入频谱密度的概念。令

$$F(j\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{F_n}{1/T}=\lim_{T\to\infty}F_nT \quad \text{(单位频率上的频谱)}$$

称F(jω)为频谱密度函数。

4.4 傅里叶变换

根据傅里叶级数

$$F_n T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{e}^{-jn\Omega t}\,\mathrm{d}t \qquad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n T\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}\,\frac{1}{T}$$

考虑到：**T→∞**， Ω→无穷小，记为**dω**；

n Ω→ ω （由离散量变为连续量），

$$\frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi} \to \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$ 同时，Σ→∫

于是，

$$F(j\omega) = \lim_{T\to\infty} F_n T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$ 傅里叶变换式“–”

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$ 傅里叶反变换式

F(jω)称为**f(t)**的傅里叶变换或频谱密度函数，简称频谱。

f(t)称为**F(jω)**的傅里叶反变换或原函数。

4.4 傅里叶变换

也可简记为 $F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$

$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)]$

或 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$

$F(j\omega)$一般是复函数，写为

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

说明：(1)前面推导并未遵循严格的数学步骤。可证明，函数$f(t)$的傅里叶变换存在的充分条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \mathrm{d}t < \infty$$

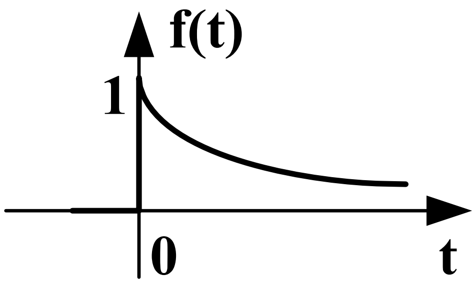
(2)用下列关系还可方便计算一些积分

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \qquad f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\mathrm{d}\omega$$

4. 4 傅里叶变换

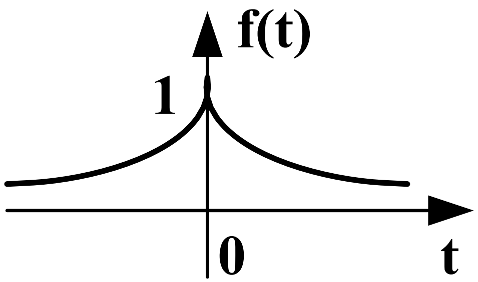
二、常用函数的傅里叶变换

1. 单边指数函数 $f(t) = e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$，$\alpha > 0$实数



$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

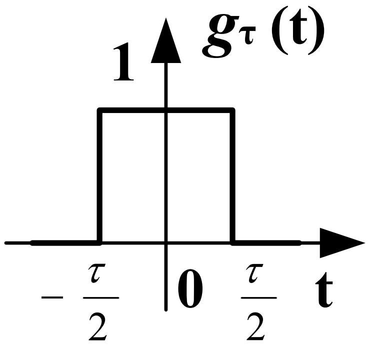
2. 双边指数函数 $f(t) = e^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$



$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

3. 门函数(矩形脉冲)

$$g_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|\le \dfrac{\tau}{2}\\ 0, & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$



$$F(j\omega)=\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-\mathrm{e}^{j\omega\frac{\tau}{2}}}{-j\omega}$$

$$=\frac{2\sin(\dfrac{\omega\tau}{2})}{\omega}=\tau\ \mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

4. 冲激函数δ(t)、δ′(t)

$$\delta(t)\longleftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=1$$

$$\delta'(t)\longleftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-j\omega t}\Big|_{t=0}=j\omega$$

4.4 傅里叶变换

5. 常数

有一些函数不满足绝对可积这一充分条件，如1，ε(t) 等，但傅里叶变换却存在，直接用定义式不好求解。

可构造一函数序列$\{f_n(t)\}$逼近f (t)，即

$$f(t)=\lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

而$f_n(t)$满足绝对可积条件，并且$\{f_n(t)\}$的傅里叶变换所形成的序列$\{F_n(j\omega)\}$是极限收敛的，则可定义f(t)的傅里叶变换F (jω)为

$$F(j\omega)=\lim_{n\to\infty} F_n(j\omega)$$

这样定义的傅里叶变换也称为广义傅里叶变换。

4.4 傅里叶变换

构造 $f_\alpha(t)=e^{-\alpha|t|}$，$\alpha>0\longleftrightarrow$ $F_\alpha(j\omega)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

$$f(t)=1=\lim_{\alpha\to 0} f_\alpha(t)$$

所以 $F(j\omega)=\lim_{\alpha\to 0}F_\alpha(j\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}=\begin{cases}0, & \omega\neq 0\\ \infty, & \omega=0\end{cases}$

又 $\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{2}{1+\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)^2}d\dfrac{\omega}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}2\arctan\dfrac{\omega}{\alpha}\Big|_{-\infty}^{\infty}=2\pi$

因此， $1\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

另一种求法： $\delta(t)\longleftrightarrow 1$代入反变换定义式，

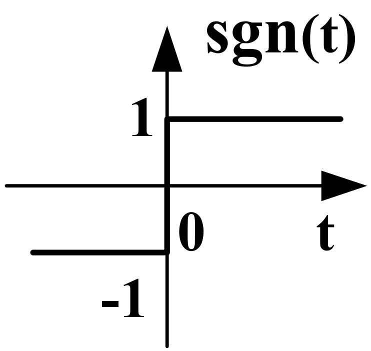
$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}d\omega=\delta(t)$ 将$\omega\to t$，$t\to -$ $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}dt=\delta(-\omega)$

再根据傅里叶变换定义式，得

$$1\longleftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta(-\omega)=2\pi\delta(\omega)$$

6. 符号函

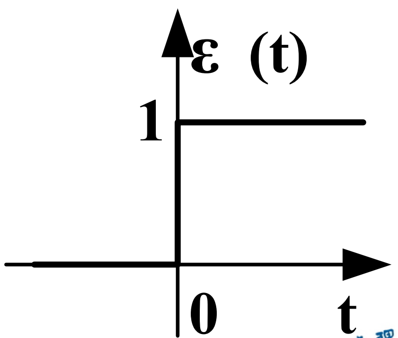
$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}-1, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$



$$f_\alpha(t)=\begin{cases}-\mathrm{e}^{\alpha t}, & t<0\\ \mathrm{e}^{-\alpha t}, & t>0\end{cases}\qquad \alpha>0$$

$$\mathrm{sgn}(t)=\lim_{\alpha\to 0} f_\alpha(t)\qquad f_\alpha(t)\longleftrightarrow F_\alpha(j\omega)=\frac{1}{\alpha+j\omega}-\frac{1}{\alpha-j\omega}=-\frac{j2\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$\mathrm{sgn}(t)\longleftrightarrow \lim_{\alpha\to 0}F_\alpha(j\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\left(-\frac{j2\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right)=\frac{2}{j\omega}$$



7. 阶跃函数ε(t)

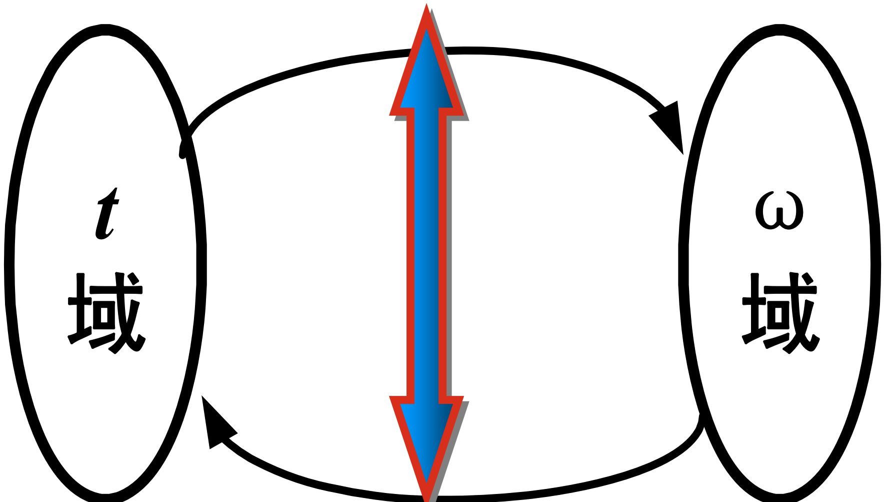
$$\varepsilon(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)\longleftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

4.4 傅里叶变换

归纳记忆:

1. F 变换对

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$



$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

2. 常用函数 F 变换对:

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega)$$

$$\varepsilon(t) \longleftrightarrow \pi\,\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

$$e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega+\alpha}$$

$$g_{\tau}(t) \longleftrightarrow \tau\,Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\mathrm{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

4.5 傅里叶变换的性质

一、线性(Linear Property)

如果 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\mathrm{j}\,\omega)$， $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\mathrm{j}\,\omega)$

则有：

$$\boxed{[\mathrm{a}\, f_1(t) + \mathrm{b}\, f_2(t)\,] \longleftrightarrow [\mathrm{a}\, F_1(\mathrm{j}\,\omega) + \mathrm{b}\, F_2(\mathrm{j}\,\omega)\,]}$$

证明： $\mathcal{F}\ [\mathrm{a}\, f_1(t) + \mathrm{b}\, f_2(t)]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [af_1(t) + bf_2(t)]\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{a}\ f_1(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{b}\ f_1(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$= [\mathrm{a}\, F_1(\mathrm{j}\,\omega) + \mathrm{b}\, F_2(\mathrm{j}\,\omega)\,]$$

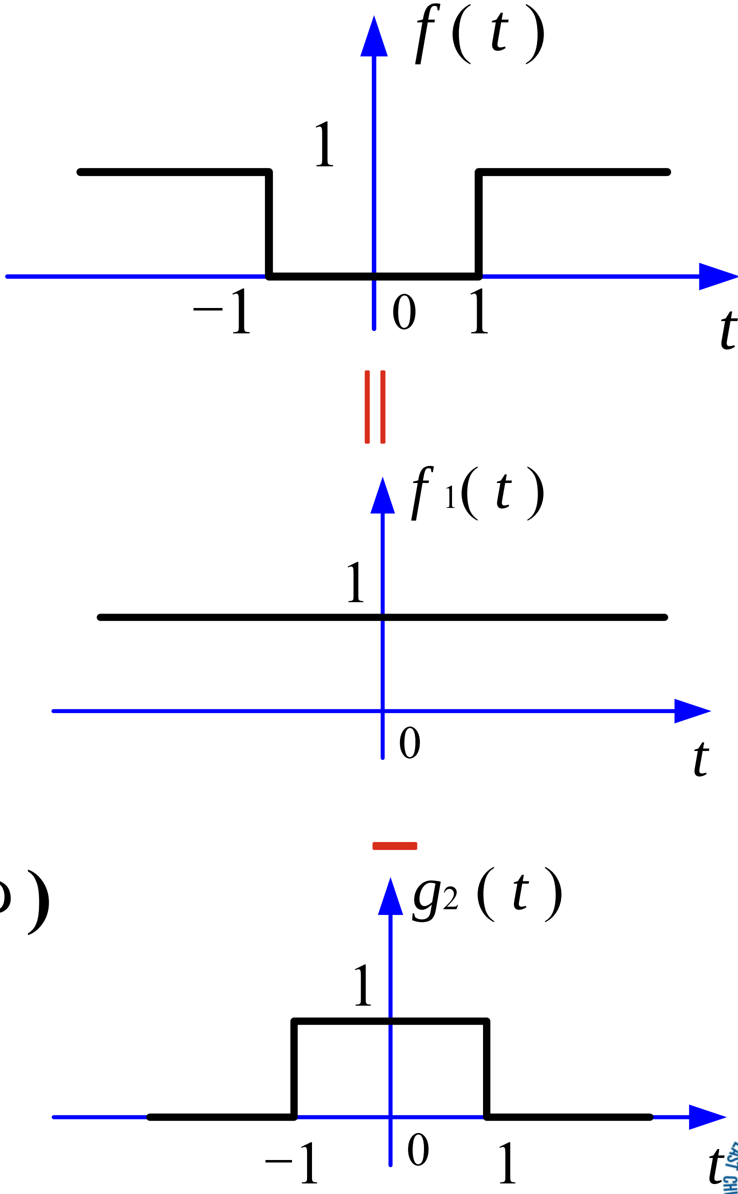
例： 求 $F(j\omega)=?$

解： $f(t)=f_1(t)-g_2(t)$

$$f_1(t)=1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$g_2(t) \longleftrightarrow 2Sa(\omega)$$

$$\therefore F(j\omega)=2\pi\delta(\omega)-2Sa(\omega)$$



4.5 傅里叶变换的性质

二、奇偶性(Parity)

如果 $f(t)$ 是实函数，则

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t-j\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$$

$$=R(\omega)+jX(\omega)$$

$$|F(j\omega)|=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)} \qquad \varphi(\omega)=\arctan\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right)$$

所以有：(1) $R(\omega)=R(-\omega)$，$X(\omega)=-X(-\omega)$

$|F(j\omega)|=|F(-j\omega)|$，$\varphi(\omega)=-\varphi(-\omega)$

（2）若f(t)=f(-t), 则：$X(\omega)=0$，$F(j\omega)=R(\omega)$

若f(t)=-f(-t), 则：$R(\omega)=0$，$F(j\omega)=jX(\omega)$

三、对称性质(Symmetrical Property)

若 $f(t) \longleftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$ 则 $\boxed{F(\mathrm{j}t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)}$

证明:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad (1)$$

(1) 中 $t \to \omega$， $\omega \to t$ 有

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(jt)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}t \qquad (2)$$

(2) 中 $\omega \to -\omega$ 有

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(jt)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$\therefore \quad F(\mathrm{j}t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

4. 5　傅里叶变换的性质

例:

$$f(t)=\frac{1}{1+t^2}\longleftrightarrow F(\mathrm{j}\,\omega)=?$$

解: $$\mathrm{e}^{-\alpha|t|}\longleftrightarrow\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

若 α =1, $$\mathrm{e}^{-|t|}\longleftrightarrow\frac{2}{1+\omega^2}$$

∴ $$\frac{2}{1+t^2}\longleftrightarrow 2\pi\,\mathrm{e}^{-|\omega|}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+t^2}\longleftrightarrow\pi\,\mathrm{e}^{-|\omega|}}$$

四、尺度变换性质(Scaling Transform Property)

若 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ 则 $\boxed{f(at) \longleftrightarrow \dfrac{1}{|a|} F\left(j\dfrac{\omega}{a}\right)}$

其中 “*a*” 是非零实常数

证： $\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t$

对于 $a>0$，$\mathcal{F}[f(at)] \overset{\tau=at}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \mathrm{e}^{-j\omega \frac{\tau}{a}} \frac{1}{a} \mathrm{d}\tau \quad = \frac{1}{a} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$

对于 $a<0$，

$$\mathcal{F}[f(at)] \overset{\tau=at}{=} \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau) \mathrm{e}^{-j\omega \frac{\tau}{a}} \frac{1}{a} \mathrm{d}\tau = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \mathrm{e}^{-j\omega \frac{\tau}{a}} \mathrm{d}\tau$$

$$= -\frac{1}{a} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

即 $\quad f(at) \longleftrightarrow \dfrac{1}{|a|} F\left(j\dfrac{\omega}{a}\right)$

令 $a=-1$，$\boxed{f(-t) \longleftrightarrow F(-j\omega)}$

4.5 傅里叶变换的性质

例：

$$f(t)=\frac{1}{jt-1}\longleftrightarrow F(j\omega)=?$$

解：

$$e^{-t}\varepsilon(t)\longleftrightarrow\frac{1}{j\omega+1}$$

由对称性，

$$\frac{1}{jt+1}\longleftrightarrow 2\pi e^{\omega}\varepsilon(-\omega)$$

当a = -1，由尺度变换性质

$$\frac{1}{-jt+1}\longleftrightarrow 2\pi e^{-\omega}\varepsilon(\omega)$$

4.5 傅里叶变换的性质

五、时移性质(Timeshifting Property)

如果 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ 那么

$$\boxed{f(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(j\omega)}$$

其中 "t_0" 实常数

证明:　　$\mathcal{F}[f(t-t_0)]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

$$\overset{t-t_0=\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} \mathrm{d}\tau \ e^{-j\omega t_0}$$

$$= e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

4.5 傅里叶变换的性质

例 1:

已知 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$，求 $f(at-b) \longleftrightarrow ?$

解: $f(t-b) \longleftrightarrow e^{-j\omega b} F(j\omega)$

$$f(at-b) \qquad \frac{1}{|a|} e^{-j\frac{\omega}{a}b} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

或

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

$$f(at-b) = f\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right] \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} e^{-j\frac{\omega}{a}b} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

4.5 傅里叶变换的性质

例 2： $F(j\omega) = ?$

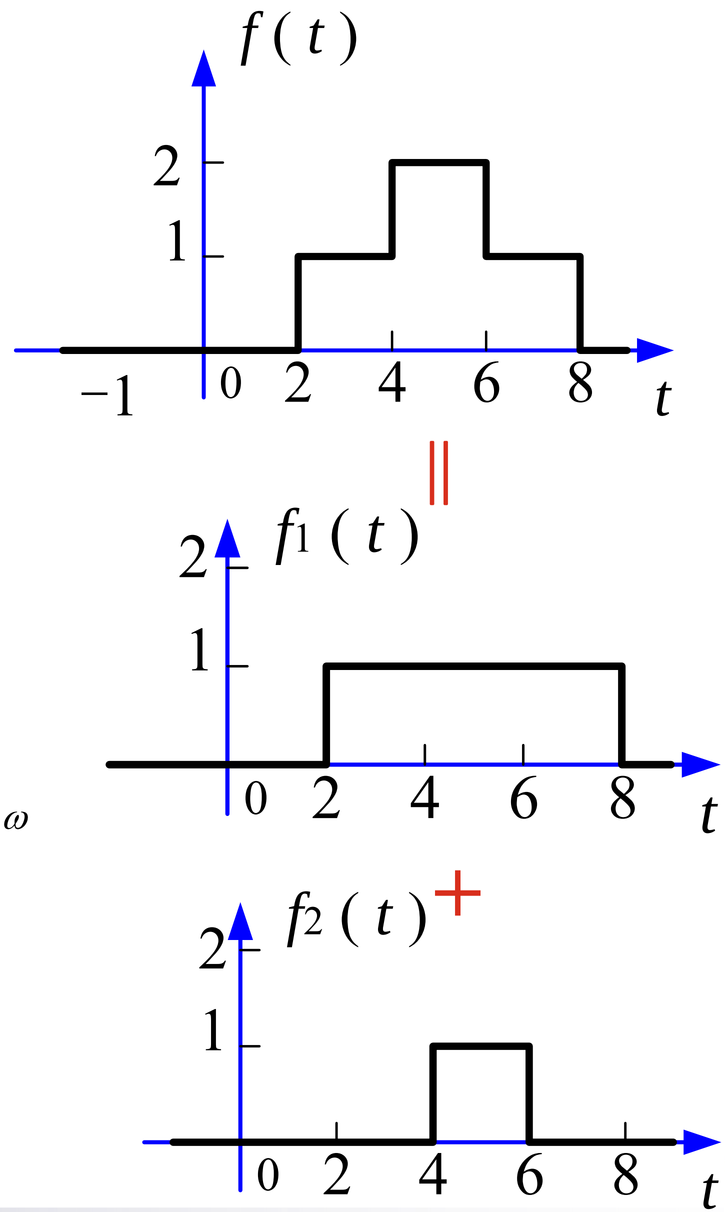
解： $f_1(t) = g_6(t-5)$

$f_2(t) = g_2(t-5)$

$g_6(t-5) \longleftrightarrow 6\,\mathrm{Sa}(3\omega)\,e^{-j5\omega}$

$g_2(t-5) \longleftrightarrow 2\,\mathrm{Sa}(\omega)\,e^{-j5\omega}$

$\therefore F(j\omega) = [6\,\mathrm{Sa}(3\omega) + 2\,\mathrm{Sa}(\omega)]\,e^{-j5\omega}$



六、频移性质(Frequency Shifting Property)

若 $f(t) \longleftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$ 则 $\boxed{F[j(\omega-\omega_0)] \longleftrightarrow \mathrm{e}^{j\omega_0 t} f(t)}$

其中 "t_0" 实常数

证明:

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j\omega_0 t} f(t) \mathrm{e}^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-j(\omega-\omega_0)t} \mathrm{d}t$$

$$= F[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)]$$

4.5 傅里叶变换的性质

例 1:

$$f(t) = e^{j3t} \longleftrightarrow F(j\omega) = ?$$

解:

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$e^{j3t} \times 1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-3)$$

例 2:

$$f(t) = \cos\omega_0 t \longleftrightarrow F(j\omega) = ?$$

解:

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

$$F(j\omega) = \pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$$

七、卷积性质(Convolution Property)

时域卷积定理：

若 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)$， $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\mathrm{j}\omega)$

则 $f_1(t)*f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)F_2(\mathrm{j}\omega)$

频域卷积定理：

若 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)$， $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\mathrm{j}\omega)$

则 $f_1(t)\,f_2(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$

4.5 傅里叶变换的性质

证明: $$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

F $[f_1(t)*f_2(t)]=$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t]\mathrm{d}\tau$$

由时移性

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t = F_2(j\omega)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}$$

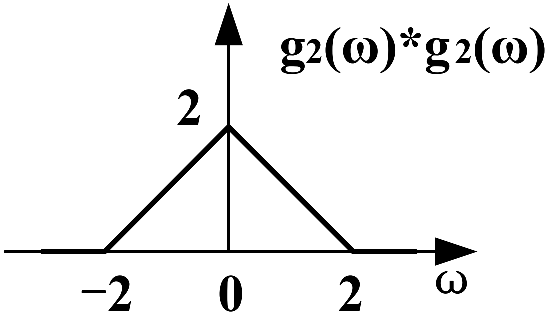
因此, F $[f_1(t)*f_2(t)]=$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)F_2(j\omega)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau = F_2(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$= F_1(j\omega)F_2(j\omega)$$

例：

$$\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \longleftrightarrow F(j\omega)=?$$



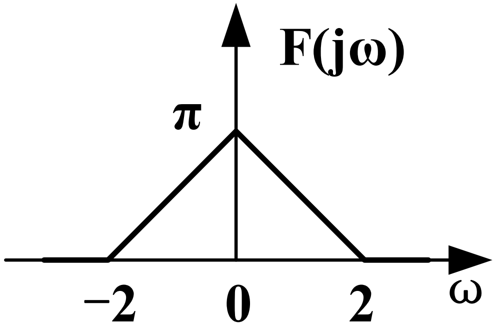
解:

$$g_2(t) \longleftrightarrow 2\,\mathrm{Sa}(\omega)$$

由对称性，

$$2\,\mathrm{Sa}(t) \longleftrightarrow 2\pi\ g_2(-\omega)$$

$$\mathrm{Sa}(t) \longleftrightarrow \pi\ g_2(\omega)$$



$$\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}[\pi\ g_2(\omega)]*[\pi\ g_2(\omega)]=\frac{\pi}{2}g_2(\omega)*g_2(\omega)$$

八、时域的微分和积分

(Differentiation and Integration in time domain)

若 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ 则

$$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \longleftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

$$F(0) = F(j\omega)\Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

证明:

$$f^{(n)}(t) = \delta^{(n)}(t) * f(t) \longleftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

$$f^{(-1)}(t) = \varepsilon(t) * f(t) \longleftrightarrow [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}]F(j\omega) = \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

例 1:

f(t)= 1/t² ←→?

解: $$\mathrm{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$\frac{2}{jt} \longleftrightarrow 2\pi\,\mathrm{sgn}(-\omega)$$

$$\frac{1}{t} \longleftrightarrow -j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t}\right) \longleftrightarrow -(j\omega)\,j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega) = \pi\ \omega\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

$$\frac{1}{t^2} \longleftrightarrow -\pi\ \omega\,\mathrm{sgn}(\omega) = -\pi\,|\,\omega\,|$$

4.5 傅里叶变换的性质

例 2　已知 $f'(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega)$

证明 $f(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{j\omega}F_1(j\omega) + \pi[f(-\infty)+f(\infty)]\delta(\omega)$

证明：

$$f(t)-f(-\infty)=\int_{-\infty}^{t}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega}F_1(j\omega)+\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\,\delta(\omega)$$

$$=\frac{1}{j\omega}F_1(j\omega)+\pi[f(\infty)-f(-\infty)]\delta(\omega)$$

$$F(j\omega)-2\pi\ f(-\infty)\delta(\omega)=\frac{1}{j\omega}F_1(j\omega)+\pi[f(\infty)-f(-\infty)]\delta(\omega)$$

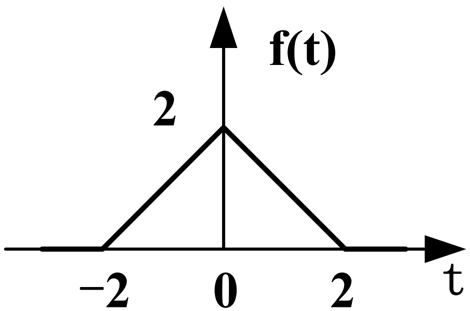
因此：

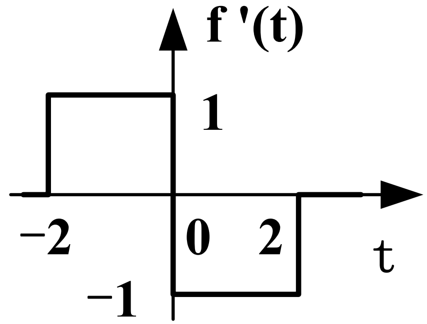
$$F(j\omega)=\frac{1}{j\omega}F_1(j\omega)+\pi[f(\infty)+f(-\infty)]\delta(\omega)$$

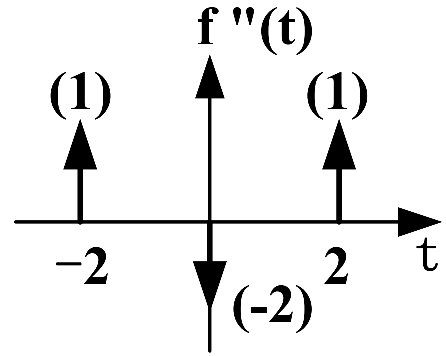
结论：　若 $f^{(n)}(t) \longleftrightarrow F_n(j\omega)$，且 $f(-\infty)+f(\infty)=0$

则 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)=F_n(j\omega)/(j\omega)^n$

例 3







确定 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$

解: $f''(t) = \delta(t+2) - 2\delta(t) + \delta(t-2)$

$$F_2(j\omega) = \mathrm{F}[f''(t)] = e^{j2\omega} - 2 + e^{-j2\omega} = 2\cos(2\omega) - 2$$

$$F(j\omega) \quad \frac{F_2(j\omega)}{(j\omega)^2} = \frac{2-2\cos(2\omega)}{\omega^2}$$

注意: $d\varepsilon(t)/dt = \delta(t) \longleftrightarrow$ $\quad \varepsilon(t) \leftarrow\times\rightarrow 1/(j\omega)$

九、频域的微分和积分
(Differentiation and Integration in frequency domain)

若 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ 则

$$(-jt)^n f(t) \longleftrightarrow F^{(n)}(j\omega)$$

$$\pi f(0)\delta(t) + \frac{1}{-jt} f(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(jx)\,\mathrm{d}x$$

其中 $$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

例： 确定 $f(t) = t\,\varepsilon(t) \longleftrightarrow F(j\omega) = ?$

解：

$$\varepsilon(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \qquad -jt\,\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]$$

$$t\varepsilon(t) \longleftrightarrow j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$$

4.5 傅里叶变换的性质

注意: $t\varepsilon(t) = \varepsilon(t) * \varepsilon(t) \longleftrightarrow$

$$\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] \times \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]$$

错误. 因为 $\delta(\omega)\delta(\omega)$ 及 $(1/j\omega)\delta(\omega)$ 没有定义.

例 2 求 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} \mathrm{d}\omega$

解: $g_{2a}(t) \longleftrightarrow \frac{2\sin(a\omega)}{\omega}$

$$g_{2a}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(a\omega)}{\omega} \mathrm{e}^{j\omega t} \mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} \mathrm{e}^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

$$g_{2a}(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} \mathrm{d}\omega \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} \mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}$$

4.6 能量谱和功率谱

一、能量谱

信号(电压或电流)$f(t)$在1 Ω 电阻上的瞬时功率为$|f(t)|^2$，在区间（-T, T）的能量为

$$\int_{-T}^{T} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

1. 信号能量的定义：时间（-∞, ∞）区间上信号的能量。

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

如果信号能量有限，即$0<E<\infty$，信号称为能量有限信号，简称能量信号。例如门函数，三角形脉冲，单边或双边指数衰减信号等。

4.6 能量谱和功率谱

2. 帕斯瓦尔方程（能量方程）：

$$E = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$$

证明：$E = \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)\,\mathrm{d}t$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F^*(j\omega)\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F^*(j\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F^*(j\omega)F(j\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$$

4.6 能量谱和功率谱

3. 能量密度谱$\mathscr{E}(\omega)$： (Energy-density Spectrum)

为了表征能量在频域中的分布情况，可以借助于密度的概念，定义一个能量密度函数，简称为能量频谱或能量谱。

能量频谱$\mathscr{E}(\omega)$定义为单位频率的信号能量。

在频带df内信号的能量为$\mathscr{E}(\omega)\,df$，因而信号在整个频率区间（$-\infty$, ∞）的总能量为：

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{E}(\omega)\,\mathrm{d}f=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{E}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

上式与帕斯瓦尔公式进行比较可知，能量密度谱$\mathscr{E}(\omega)$为：

$$\mathscr{E}(\omega)=\left|F(j\omega)\right|^2$$

信号的能量谱$\mathscr{E}(\omega)$是ω的偶函数，它只取决于频谱函数的模量，而与相位无关。单位：J·s。

4.6 能量谱和功率谱

例 计算信号的能量 $2\cos(997t)\dfrac{\sin 5t}{\pi t}$

解:
$$\frac{\sin 5t}{\pi t} \longleftrightarrow g_{10}(\omega)$$

$$2\cos(997t)\frac{\sin 5t}{\pi t} \longleftrightarrow g_{10}(\omega-997)+g_{10}(\omega+997)$$

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|^{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}(10+10)=\frac{10}{\pi}$$

二、功率谱

1. 信号功率：定义为时间（-∞, ∞）区间上信号$f(t)$的平均功率，用P表示。

$$P \stackrel{def}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t$$

如果$f(t)$为实函数，则

$$P \stackrel{def}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

如果信号功率有限，即$0<P<\infty$，信号称为功率有限信号，简称功率信号。如阶跃信号，周期信号等。

由信号能量和功率的定义可知，若信号能量E有限，则$P=0$；若信号功率P有限，则$E=\infty$。

二、功率谱

功率有限信号的能量趋于无穷大，即 $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t \to \infty$

从$f(t)$中截取$|t|\leqslant T/2$的一段，得到一个截尾函数$f_T(t)$，它可以表示为：

$$f_T(t)=f(t)[\varepsilon(t+\frac{T}{2})-\varepsilon(t-\frac{T}{2})]$$

如果T是有限值，则$f_T(t)$的能量也是有限的。令

$$F_T(j\omega)=\mathscr{F}[f_T(t)]$$

$f_T(t)$的能量E_T可表示为：

$$E_T=\int_{-\infty}^{\infty} f_T^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F_T(j\omega)\right|^2 d\omega$$

由于 $\int_{-\infty}^{\infty} f_T^2(t)dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt$

4.6 能量谱和功率谱

二、功率谱

$f(t)$的平均功率为：

$$P \overset{def}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{\left|F_T(j\omega)\right|^2}{T}d\omega$$

当T增加时，$f_T(t)$的能量增加，$|F_T(j\,\omega)|^2$也增加。当$T\to\infty$时，$f_T(t)\to f(t)$，此时$|F_T(j\,\omega)|^2/T$可能趋于一极限。

2. 功率密度谱： 类似于能量密度谱，定义功率密度谱函数$\mathscr{P}(\omega)$为单位频率的信号功率。从而平均功率：

$$P = \int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{P}(\omega)\,\mathrm{d}f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{P}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

比较得：$$\mathscr{P}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{\left|F_T(j\omega)\right|^2}{T}$$

信号的功率谱$\mathscr{P}(\omega)$是ω的偶函数，它只取决于频谱函数的模量，而与相位无关。单位：**W·s**。

4.7 周期信号的傅里叶变换

一、正、余弦的傅里叶变换

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

由频移特性得

$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$e^{-j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\cos(\omega_0 t)=(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})/2 \longleftrightarrow \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$\sin(\omega_0 t)=(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t})/(2j) \longleftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

4.7 周期信号的傅里叶变换

二、一般周期信号的傅里叶变换

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}\qquad F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\,\mathrm{e}^{-jn\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}\longleftrightarrow F_T(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\Omega)}\qquad \textbf{(1)}$$

例1：周期为T的单位冲激周期函数 $\delta_T(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT)$

解：

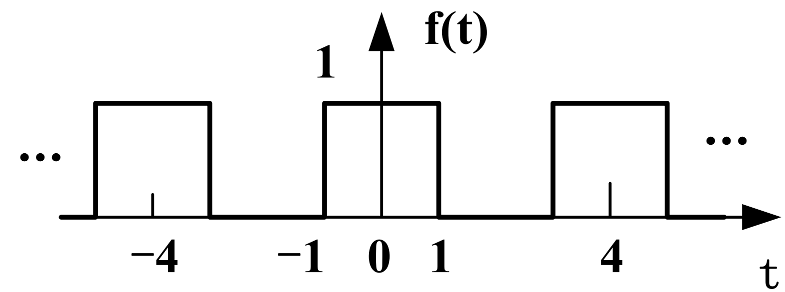
$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\Omega t}dt=\frac{1}{T}$$

$$\delta_T(t)\longleftrightarrow\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)=\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)=\Omega\delta_\Omega(t)$$

4.7 周期信号的傅里叶变换

例2：周期信号如图，求其傅里叶变换。

解：周期信号f(t)也可看作一时限非周期信号$f_0(t)$的周期拓展。即 $f(t) = \delta_T(t) * f_0(t)$



$$F(j\omega) = \Omega\,\delta_\Omega(\omega)\,F_0(j\omega) = \Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(jn\Omega)\delta(\omega - n\Omega) \quad (2)$$

本题 $f_0(t) = g_2(t) \longleftrightarrow 2\,\mathrm{Sa}(\omega)$ $\quad \Omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}$

$$F(j\omega) = \Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\,\mathrm{Sa}(n\Omega)\delta(\omega - n\Omega) = \pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\delta\left(\omega - \frac{n\pi}{2}\right)$$

(2)式与上页(1)式比较， $F_n = \dfrac{\Omega}{2\pi}F_0(jn\Omega) = \dfrac{1}{T}F_0\left(j\dfrac{2n\pi}{T}\right)$

这也给出求周期信号傅里叶级数的另一种方法。

4.8 LTI系统的频域分析

傅里叶分析是将任意信号分解为无穷多项不同频率的虚指数函数之和。

对周期信号： $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}$

对非周期信号： $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$

其基本信号为 $\mathrm{e}^{j\omega t}$

一、基本信号$\mathrm{e}^{j\omega t}$作用于LTI系统的响应

说明：频域分析中，信号的定义域为(-∞，∞)，而t=－∞总可认为系统的状态为0，因此本章的响应指零状态响应，常写为y(t)。

4.8 LTI系统的频域分析

设LTI系统的冲激响应为h(t)，当激励是角频率ω的基本信号$e^{j\omega t}$时，其响应

$$y(t) = h(t) * e^{j\omega t}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\mathrm{e}^{j\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\cdot\mathrm{e}^{j\omega t}$$

而上式积分 $\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$ 正好是h(t)的傅里叶变换，记为H(j ω)，常称为系统的频率响应函数。

$$y(t) = H(j\omega)\, e^{j\omega t}$$

H(j ω)反映了响应y(t)的幅度和相位。

4.8 LTI系统的频域分析

二、一般信号f(t)作用于LTI系统的响应

$$e^{j\omega t} \longrightarrow H(j\omega)\, e^{j\omega t}$$

齐次性

$$\frac{1}{2\pi} F(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \longrightarrow \frac{1}{2\pi} F(j\omega) H(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

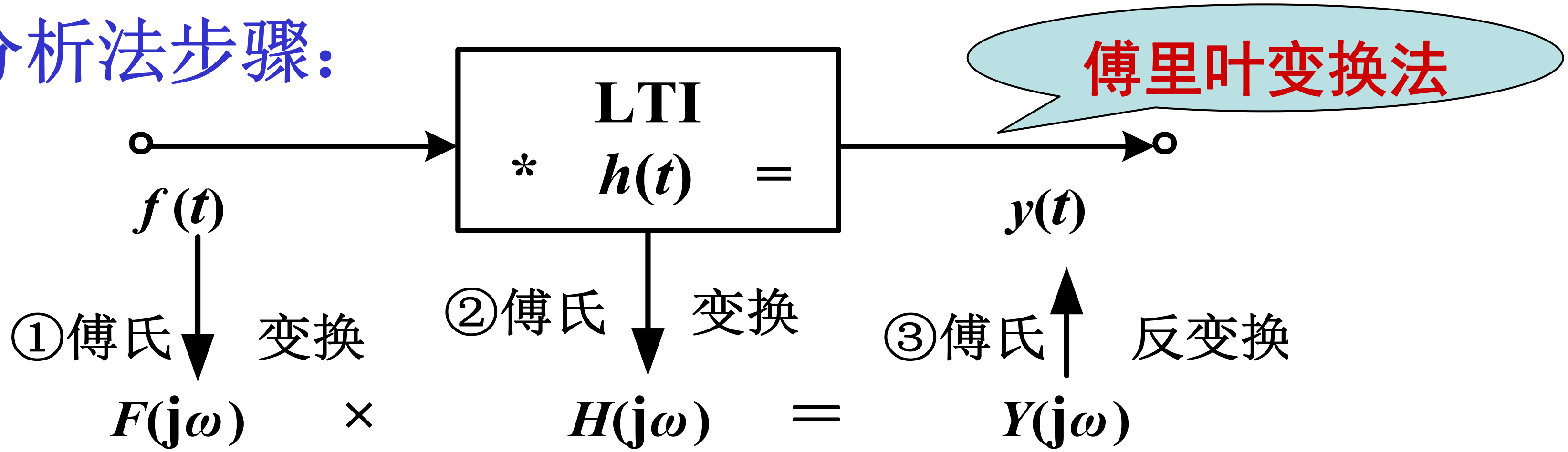
可加性

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$f(t) \longrightarrow y(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega) H(j\omega)]$$

$$Y(j\omega) = F(j\omega) H(j\omega)$$

频域分析法步骤：



频率响应**H(jω)**可定义为系统零状态响应的傅里叶变换**Y(jω)**与激励**f(t)**的傅里叶变换**F(jω)**之比，即

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} \qquad H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}=\frac{|Y(j\omega)|}{|F(j\omega)|}e^{j[\varphi_y(\omega)-\varphi_f(\omega)]}$$

$|H(j\omega)|$称为幅频特性（或幅频响应）； θ (ω)称为相频特性（或相频响应）。 $|H(j\omega)|$是ω的偶函数， θ (ω)是ω的奇函数。

4.8 LTI系统的频域分析

对周期信号还可用傅里叶级数法。

周期信号 $f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{jn\Omega t}$

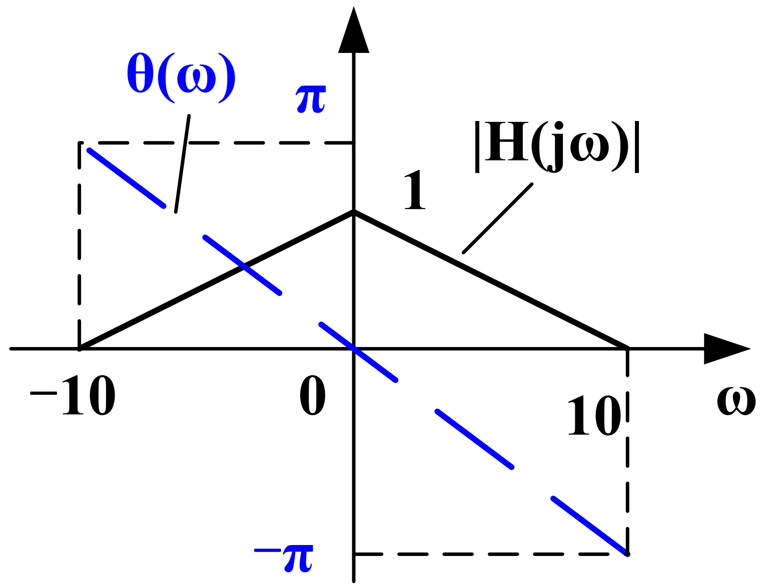
$$y(t)=h(t)*f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n[h(t)*\mathrm{e}^{jn\Omega t}]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_nH(jn\Omega)\mathrm{e}^{jn\Omega t}$$

若 $f_T(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$ $\qquad H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$

则可推导出

$$y(t)=\frac{A_0}{2}H(0)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,|H(jn\Omega)|\cos[n\Omega t+\varphi_n+\theta(n\Omega)]$$

例：某LTI系统的 $|H(j\omega)|$ 和 $\theta(\omega)$ 如图，
若 $f(t)= 2 + 4\cos(5t) + 4\cos(10t)$，求系统的响应。



解法一：用傅里叶变换

$$F(j\omega) = 4\pi\,\delta(\omega) + 4\pi[\delta(\omega-5) + \delta(\omega+5)] + 4\pi[\delta(\omega-10) + \delta(\omega+10)]$$

$$H(j\omega)= |H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$

$$Y(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega) =$$
$$4\pi\,\delta(\omega)H(0) + 4\pi[\delta(\omega-5)H(j5) + \delta(\omega+5)H(-j5)] + 4\pi[\delta(\omega-10)H(j10) + \delta(\omega+10)H(-j10)]$$
$$= 4\pi\,\delta(\omega) + 4\pi[-j0.5\,\delta(\omega-5) + j0.5\,\delta(\omega+5)]$$

$$y(t) = F^{-1}[Y(j\omega)]= 2 + 2\sin(5t)$$

解法二：用三角傅里叶级数

f(t)的基波角频率Ω=5rad/s

$$f(t)= 2 + 4\cos(\Omega t) + 4\cos(2\Omega t)$$

$$H(0) =1, \quad H(j\Omega) = 0.5e^{-j0.5\pi}, \quad H(j2\Omega) = 0$$

$$y(t) = 2 + 4\times 0.5\cos(\Omega t - 0.5\pi)$$
$$= 2 + 2\sin(5t)$$

4.8 LTI系统的频域分析

三、频率响应H(jω)的求法

1. $H(j\omega) = F[h(t)]$

2. $H(j\omega) = Y(j\omega)/F(j\omega)$

(1) 由微分方程求，对微分方程两边取傅里叶变换。

(2) 由电路直接求出。

例1：某系统的微分方程为

$$y'(t) + 2y(t) = f(t)$$

求$f(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$时的响应$y(t)$。

解：微分方程两边取傅里叶变换

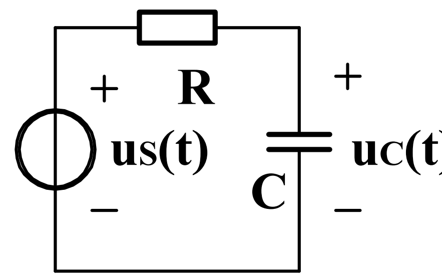
$$j\omega Y(j\omega) + 2Y(j\omega) = F(j\omega) \qquad H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{j\omega + 2}$$

4.8 LTI系统的频域分析

$$f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)\longleftrightarrow F(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$$

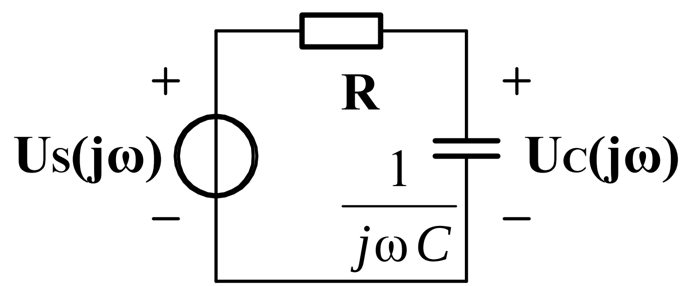
$$Y(j\omega)=H(j\omega)F(j\omega)$$

$$=\frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)}=\frac{1}{j\omega+1}-\frac{1}{j\omega+2}$$



$$y(t)=(e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

例2：如图电路，R=1Ω，C=1F，以$u_C(t)$为输出，求其h(t)。解：画电路频域模型



$$H(j\omega)=\frac{U_C(j\omega)}{U_S(j\omega)}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{j\omega+1}$$

$$h(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$$

4.8 LTI系统的频域分析

四、无失真传输与滤波

系统对于信号的作用大体可分为两类：一类是信号的传输，一类是滤波。传输要求信号尽量不失真，而滤波则滤去或削弱不需要有的成分，必然伴随着失真。

1、无失真传输

（1）定义：信号无失真传输是指系统的输出信号与输入信号相比，只有幅度的大小和出现时间的先后不同，而没有波形上的变化。即

输入信号为f(t)，经过无失真传输后，输出信号应为

$$y(t) = K\,f(t-t_d)$$

其频谱关系为 $Y(j\omega)=Ke^{-j\omega t_d}F(j\omega)$

4.8 LTI系统的频域分析

(2)无失真传输条件：

系统要实现无失真传输，对系统h(t)，H(jω)的要求是：

(a)对h(t)的要求：

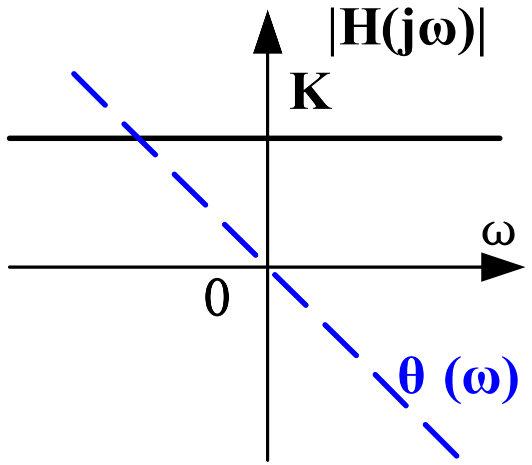
$$h(t)=K\delta(t-t_d)$$

(b)对H(jω)的要求：

$$H(j\omega)=Y(j\omega)/F(j\omega)=Ke^{-j\omega t_d}$$

即

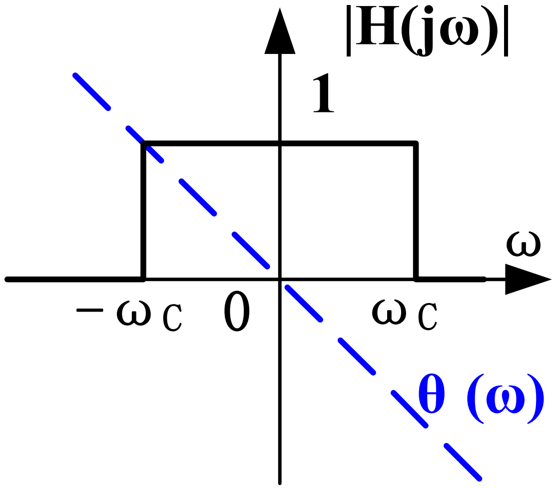
$$|H(j\omega)|=K \quad , \theta(\omega)=-\omega t_d$$



上述是信号无失真传输的理想条件。当传输有限带宽的信号是，只要在信号占有频带范围内，系统的幅频、相频特性满足以上条件即可。

4.8 LTI系统的频域分析

2、理想低通滤波器



具有如图所示幅频、相频特性的系统称为理想低通滤波器。ω_c称为截止角频率。

理想低通滤波器的频率响应可写为：

$$H(j\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega t_d}, & |\omega|<\omega_C \\ 0, & |\omega|>\omega_C \end{cases} = g_{2\omega_C}(\omega)e^{-j\omega t_d}$$

(1)冲激响应

$$h(t)=\mathscr{F}^{-1}[g_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d}]=\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_c(t-t_d)]$$

可见，它实际上是不可实现的非因果系统。

4.8 LTI系统的频域分析

(2)阶跃响应

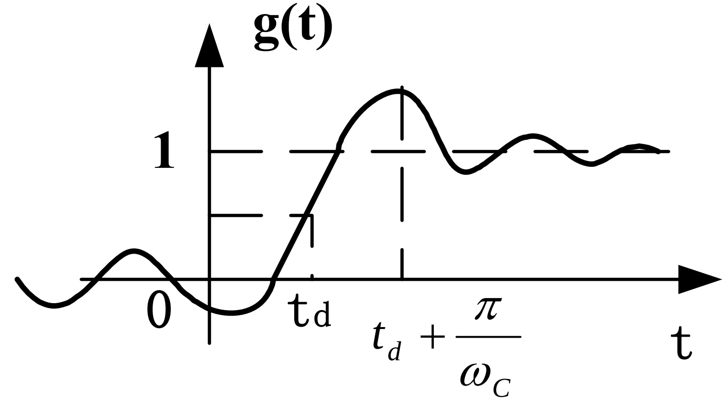
$$g(t)=h(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(\tau-t_d)]}{\omega_c(\tau-t_d)}\,\mathrm{d}\tau$$

经推导，可得

$$g(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_c(t-t_d)}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$\mathrm{Si}(y)=\int_0^{y}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$ 称为正弦积分

$$g(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}[\omega_C(t-t_d)]$$



特点：有明显失真，只要$\omega_c<\infty$，则必有振荡，其过冲比稳态值高约9%。这一由频率截断效应引起的振荡现象称为吉布斯现象。 $g_{max}=0.5+\mathrm{Si}(\pi)/\pi=1.0895$

4.8 LTI系统的频域分析

3、物理可实现系统的条件

就时域特性而言，一个物理可实现的系统，其冲激响应在t<0时必须为0，即 **h(t)=0 ,t<0**

即 响应不应在激励作用之前出现。

就频域特性来说，佩利（**Paley)**和维纳（**Wiener)**证明了物理可实现的幅频特性必须满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|H(j\omega)\right|^2 d\omega < \infty \quad 并且 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\ln\left|H(j\omega)\right|\right|}{1+\omega^2} d\omega < \infty$$

称为佩利-维纳准则。（必要条件）

从该准则可看出，对于物理可实现系统，其幅频特性可在某些孤立频率点上为0，但不能在某个有限频带内为0。

4.9 取样定理

取样定理论述了在一定条件下，一个连续信号完全可以用离散样本值表示。这些样本值包含了该连续信号的全部信息，利用这些样本值可以恢复原信号。可以说，取样定理在连续信号与离散信号之间架起了一座桥梁。为其互为转换提供了理论依据。

一、信号的取样

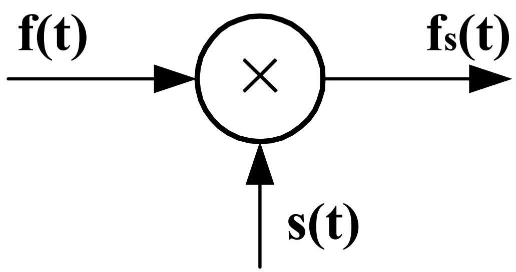
所谓“取样”就是利用取样脉冲序列**s(t)**从连续信号**f(t)**中“抽取”一系列离散样本值的过程。

这样得到的离散信号称为**取样信号**。

4.9 取样定理

如图一连续信号f(t)

用取样脉冲序列s(t)(开关函数）进行取样，取样间隔为T_S，$f_S=1/T_S$称为取样频率。

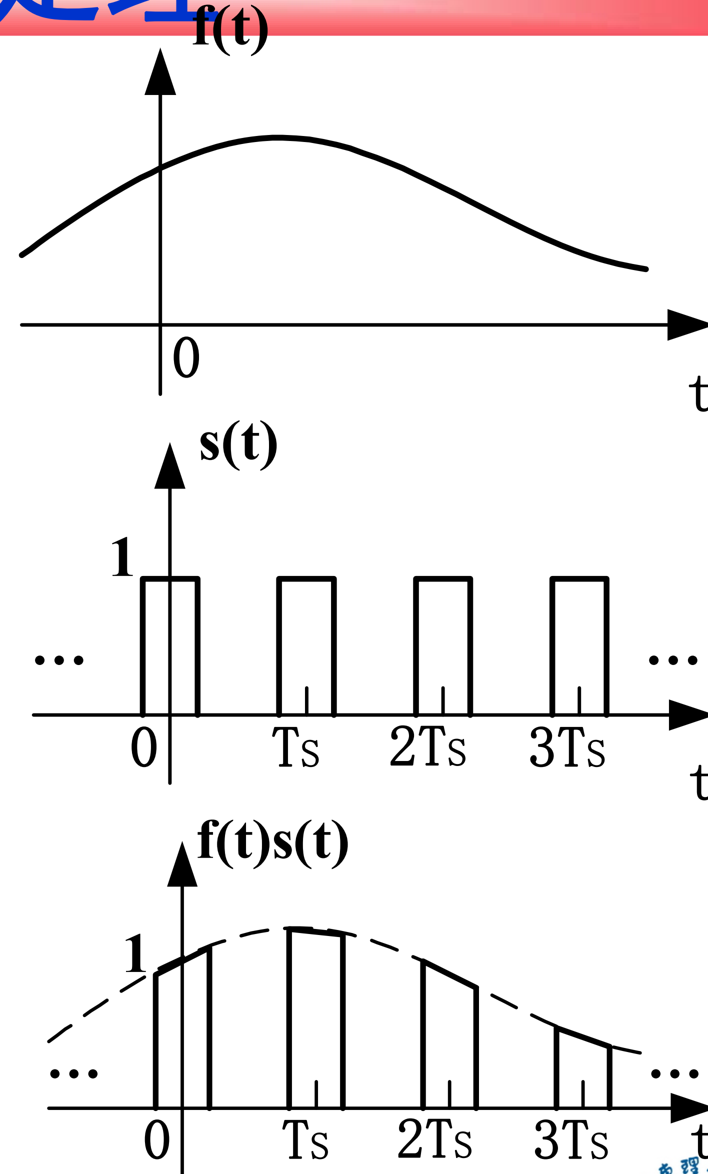


得取样信号

$$f_S(t) = f(t)s(t)$$

取样信号$f_S(t)$的频谱函数为

$$F_S(j\omega)=(1/2\pi)F(j\omega)*S(j\omega)$$



4.9 取样定理

冲激取样

若s(t)是周期为T_s的冲激函数序列$\delta_{T_s}(t)$,则称为冲激取样。

$$s(t)=\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_S)\longleftrightarrow \omega_S\delta_{\omega_s}(\omega)=\omega_S\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_S)$$

$$\omega_S=2\pi/T_S$$

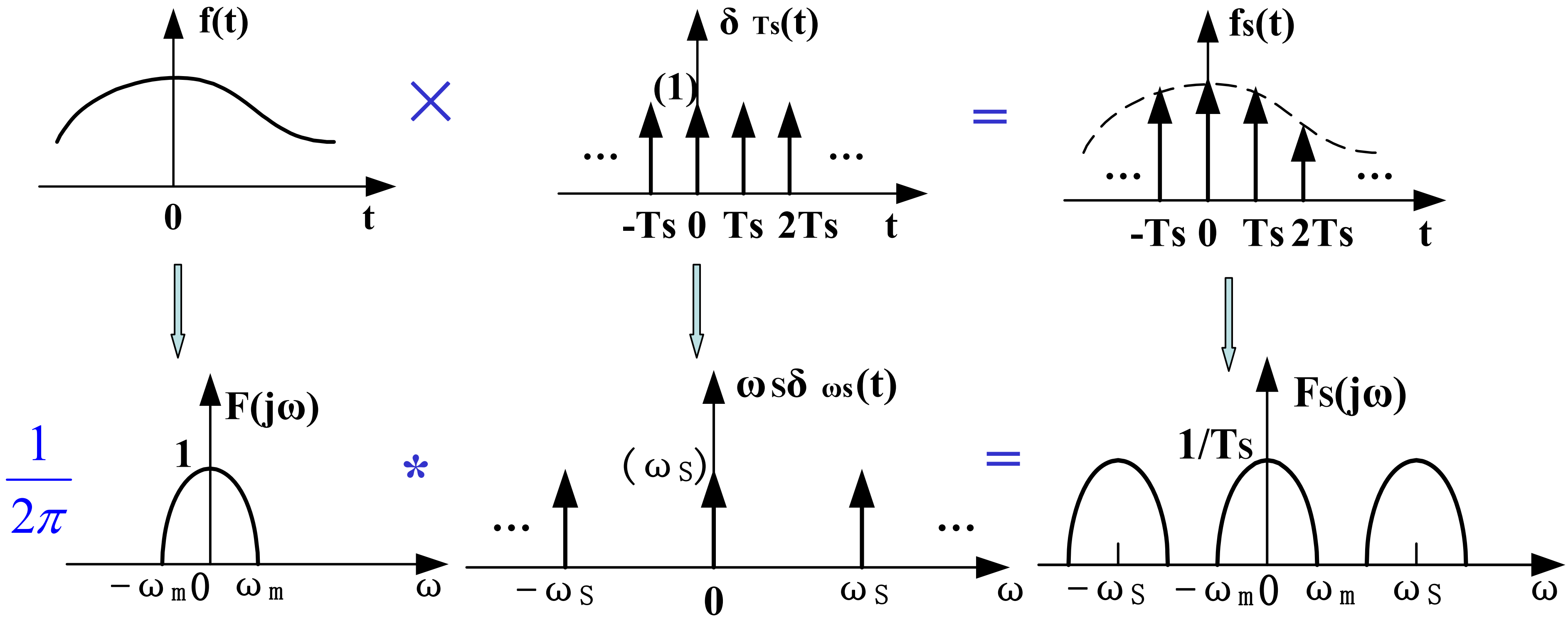
如果f(t) 是带限信号 [即f(t)的频谱只在区间（- ω_m， ω_m)为有限值，而其余区间为0]。

设$f(t)\longleftrightarrow F(j\omega)$，取样信号$f_S(t)$的频谱函数

$$F_S(j\omega)=(1/2\pi)F(j\omega)*\omega_S\delta_{\omega_s}(\omega)$$

$$=\frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F[j(\omega-n\omega_S)]$$

4.9 取样定理



上面在画取样信号$f_S(t)$的频谱时，设定$\omega_S \geq 2\omega_m$，这时其频谱**不发生混叠**，因此能设法(如利用低通滤波器)，从$F_S(j\omega)$中取出$F(j\omega)$，即**从$f_S(t)$中恢复原信号f(t)**。否则将发生混叠，而无法恢复原信号。

4.9 取样定理

二、时域取样定理

当$\omega_s \geqslant 2\omega_m$时，将取样信号通过下面的低通滤波器

$$H(j\omega)=\begin{cases} T_S, & |\omega|<\omega_C \\ 0, & |\omega|>\omega_C \end{cases}$$

其截止角频率ω_C取$\omega_m < \omega_C < \omega_S - \omega_m$。即可恢复原信号。

由于 $\mathbf{f_s(t)= f(t)s(t) = f(t)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)$

$\mathbf{H(j\omega) \longleftrightarrow h(t) =} \; T_S\dfrac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c t)$

为方便，选$\omega_C = 0.5\omega_S$，则$T_S\omega_C/\pi=1$

4.9 取样定理

所以 $h(t)=Sa(\frac{\omega_S t}{2})$ 根据 $f(t)=f_S(t)*h(t)$，有

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s)*\mathrm{Sa}(\frac{\omega_s t}{2})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\mathrm{Sa}[\frac{\omega_s}{2}(t-nT_s)]$$

只要已知各取样值 $f(nT_s)$,就出唯一地确定出原信号 $f(t)$。

时域取样定理：

一个频谱在区间（$-\omega_m$，ω_m）以外为0的带限信号 $f(t)$,可唯一地由其在均匀间隔 T_s [$T_s<1/(2f_m)$] 上的样值点 $f(nT_s)$确定。

注意：为恢复原信号，必须满足两个条件：（1）**f(t)必须是带限信号**；（2）**取样频率不能太低，必须 $f_s>2f_m$**，或者说，**取样间隔不能太大，必须 $T_s<1/(2f_m)$**；否则将发生混叠。

4.9 取样定理

通常把最低允许的取样频率$f_s=2f_m$称为奈奎斯特（Nyquist)频率，把最大允许的取样间隔$T_s=1/(2f_m)$称为奈奎斯特间隔。

频域取样定理：

根据时域与频域的对偶性，可推出频域取样定理。P188

一个在时域区间（$-t_m,t_m$)以外为0的时限信号f(t)的频谱函数F(jω)，可唯一地由其在均匀频率间隔$f_s[f_s<1/(2t_m)]$上的样值点$F(jn\omega_s)$确定。

$$F(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(j\frac{n\pi}{t_m})\mathrm{Sa}(\omega t_m-n\pi),\qquad t_m=\frac{1}{2f_m}$$