# 第 4 章 （之 4）
# 第 22 次作业

**教学内容：**§4 .3 .1 曲率的概念　　§4 .3 .2 曲率的计算公式　　§4 .3 .3 曲率半径

**1. 曲线$y=\sqrt{4ax-x^2}$在点$(a,\sqrt{3}a)$处的曲率为　　　　　　（　　）

$(A)\quad \dfrac{1}{a}$,　　$(B)\quad a$,　　$(C)\quad \dfrac{1}{2a}$,　　$(D)\quad 2a$

答：$(C)$

2．填空题：

**（1）抛物线$y=x^2-4x+3$在其顶点处的曲率$K=$______和曲率半径$R=$_______.

答：$K=2, R=\dfrac{1}{2}$.

**（2）椭圆$4x^2+y^2=4$在点$(0,2)$处的曲率$K=$______和曲率半径$R=$_______.

答：$K=2, R=\dfrac{1}{2}$.

**（3）曲线$y=ax^2+bx+c$与$y=\sin x$在点$\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$处相切、曲率相同且有相同的凹向，则$(a,b,c)=$____________.

答：$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\pi}{2},1-\dfrac{\pi^2}{8}\right)$.

**3. 求曲线$r=a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 在点$M\left(\dfrac{\pi}{2},a\right)$处的曲率.

解：曲线的参数方程为$\begin{cases} x=a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$,

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{d\left[a(1+\cos\theta)\sin\theta\right]}{d\left[a(1+\cos\theta)\cos\theta\right]}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-\left.\frac{\cos 2\theta+\cos\theta}{\sin 2\theta+\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=1,$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{d\left[-\dfrac{\cos 2\theta+\cos\theta}{\sin 2\theta+\sin\theta}\right]}{d\left[a(1+\cos\theta)\sin\theta\right]}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left.\frac{(2\sin 2\theta+\sin\theta)(\sin 2\theta+\sin\theta)+(\cos 2\theta+\cos\theta)(2\cos 2\theta+\cos\theta)}{a(\sin 2\theta+\sin\theta)^3}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{a}$$

$\therefore$ 曲率为 $K=\dfrac{|y''|}{\left[1+y'^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\frac{3}{a}}{[1+1]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4a}$.

**4．证明曲线 $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}(a>0)$ 在点 $(x,y)$ 处的曲率半径为 $R=\dfrac{y^2}{a}$.

证明： $y'=\operatorname{sh}\dfrac{x}{a}$， $y''=\dfrac{1}{a}\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$， $K=\dfrac{\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}}{(1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a})^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}}=\dfrac{a}{y^2}$，

$$R=\frac{1}{K}=\frac{y^2}{a}.$$

**5．求曲线 $y=\sin x(0<x<\pi)$ 上曲率半径最小的点，并求出该最小值.

解： $K=\dfrac{|y''|}{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}$，

显然 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，分子最大，分母最小, 曲线上曲率在点 $(\dfrac{\pi}{2},1)$ 处有最大值，所以在此点有

$$R_{\min}=1.$$

# 第 4 章 （之 5）
# 第 23 次作业

**教学内容：**§4 .4 .5 函数图形的的描绘　　§4.5 相关变化率

**1．曲线 $y=\dfrac{x^3-1}{|x^3-x|}$ 的渐近线的条数为　　　　（　　）

（A） 2 条；　（B）3 条；　（C）4 条；　（D）5 条.

答：（C）

**2．画出函数 $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ 的图形

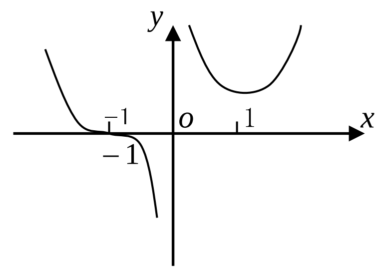
解：$y'=2x-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2x^3-1}{x^2}$，　$y''=2+\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2(x^3+1)}{x^3}$，

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | 0 | $(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ | $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ | $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | − | | − | | − | 0 | + |
| $y''$ | + | 0 | − | | + | + | + |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 单调减少<br>凸函数 | 拐点<br>$(-1,0)$ | 单调减少<br>凹函数 | 垂直<br>渐近线 | 单调减少<br>凸函数 | 极小值 $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ | 单调增加<br>凸函数 |

$\lim\limits_{x\to 0} y=\infty$

$x=0$ 为垂直渐近线.




**3[*]　求曲线 $y=x+4\sqrt{x^2+x}$ 的斜渐近线.

解：$x\to+\infty$ 时，$k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=5$ , $h=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-5x)=2$ ; $x\to-\infty$ 时，

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-3\,,\ h=\lim_{x\to-\infty}(y+3x)=-2\quad,$$

所以斜渐近线有两条　$y=5x+2$　和　$y=-3x-2$.

**4．设球的体积以常数速率变化，证明其表面积的变化速率与半径成反比.

证：$\dfrac{dV}{dt}=k$

$\because V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，$S=4\pi R^2$，

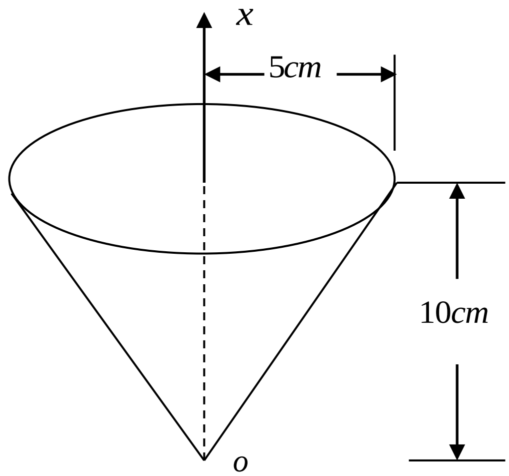
对 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$ 两边求导，$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{4}{3}\pi\cdot 3R^2\cdot\dfrac{dR}{dt}$.

$\therefore \dfrac{dR}{dt}=\dfrac{1}{4\pi R^2}\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{k}{4\pi R^2}$.

对 $S=4\pi R^2$ 两边求导，$\dfrac{dS}{dt}=8\pi R\cdot\dfrac{dR}{dt}$.

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=8\pi R\cdot\dfrac{k}{4\pi R^2}=\dfrac{2k}{R}$.

**5.　有一个圆锥形容器，锥顶向下放置，容器深 $10$ 厘米，圆形的容器口半径为 $5$ 厘米.现向该容器以每秒 $10$ 立方厘米的速度注入水，求当水面升高到 $5$ 厘米时，水面升高的速度为多少？




解：设水面高为$h$厘米，水平面半径为$r$厘米时，体积为$V$立方厘米，所以，$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

又由条件，$\dfrac{h}{r}=\dfrac{10}{5}$，得$V=\dfrac{\pi h^3}{12}$，

两边求导，$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{\pi h^2}{4}\dfrac{dh}{dt}$

将条件$\dfrac{dV}{dt}=10$，$h=5$代入得$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{8}{5\pi}$厘米/秒.

**6. 一小球从坐标原点出发，沿着曲线 $y=f(x)$ $[f(0)=0,\quad f'(x)<0,\quad f''(x)>0]$ 往下滚，已知其铅直速度$\dfrac{dy}{dt}=C$为常数，求它在任一点$M=(x,y)(x>0)$处的运动速度与运动方向.

解： 由 $\dfrac{dy}{dt}=f'(x)\dfrac{dx}{dt}$，可得 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{f'(x)}\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{C}{f'(x)}$，所以

所以运动速度为 $$v=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}=-C\sqrt{\frac{1}{[f'(x)]^2}+1},$$

而运动方向为 $$\tan\theta=\frac{dy}{dx}=f'(x).$$

注意：这里常数$C$必定是一个负数.

# 第 5 章 （之 1）
# 第 24 次作业

**教学内容：** §5. 1 定积分概念　　§5. 2 定积分的性质

1．选择题

*（1）定积分所表示的和式极限是　　（　　）

$(A).\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left[\dfrac{i}{n}(b-a)\right]$　$(B).\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left[\dfrac{i-1}{n}(b-a)\right]$

$(C).\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i(\xi_i\in[x_{i-1},\ x_i])$

$(D).\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i(\lambda=\max\{\Delta x_i|i=1,2,\cdots n\},\ \ \xi_i\in[x_{i-1},\ x_i])$

答:D

*（2） 设 $I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$，根据定积分的几何意 义可知　　　　（　　）

$(A)$. $I$ 是由曲线$y=f(x)$及直线$x=a$，$x=b$与$x$轴所围平面图形的面积，所以$I>0$.

$(B)$. 若$I=0$，则上述图形面积为零，从而图形的“高”$f(x)=0$.

$(C)$. $I$ 是由曲线$y=f(x)$及直线$x=a$，$x=b$和$x$轴所围各部分面积的代 数和.

$(D)$. $I$ 是由曲线$y=|f(x)|$及直线$x=a$，$x=b$和$x$轴所围图形的面积。

答:C

*（3） 函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续是$f(x)$在$[a,b]$上可积的　　　　（　　）

$(A)$. 必要条件　　　　$(B)$. 充分条件

$(C)$. 充分必要条件　　$(D)$. 既非充分也非必要条 件.

答: B

*（4） 由$[a,b]$上连续曲线$y=f(x)$，直线$x=a$，$x=b$ $(a<b)$ 和 $x$ 轴围成图形的面积$S=$　　　　（　　）

$(A).\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$　$(B).\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right|$　$(C).\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,x$　$(D).\dfrac{[f(b)+f(a)](b-a)}{2}$ .

答: C

**（5） 设在区间 $[a,b]$上 $f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$，令 $S_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$，

$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\dfrac{1}{2}[f(b)+f(a)](b-a)$，则有　　　　（　　）

$(A)S_1<S_2<S_3$;　$(B)S_2<S_1<S_3$;　$(C)S_3<S_1<S_2$;　$(D)S_2<S_3<S_1$.

答: B

*2. 试证不等式:　$\dfrac{\pi}{4}\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}2^{-\sin x}\mathrm{d}x\le\dfrac{\pi}{2}$.

证明：$0\le\sin x\le 1$，　$x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，　$\therefore\dfrac{1}{2}\le 2^{-\sin x}\le 1$，

$$\therefore\frac{\pi}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}2^{-\sin x}\mathrm{d}x\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

**3. 试估计下列积分值：$\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x-x^2}}$。

解：当$0 \le x \le 1$时，　　$x-x^2 = \frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4}$，

且$\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2 \ge 0$，　　$\therefore 1 \le 1+\sqrt{x-x^2} \le 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

因而有　　$\frac{2}{3} \le \frac{1}{1+\sqrt{x-x^2}} \le 1$，

从而　　$\frac{2}{3} \le \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x-x^2}} \le 1$.

***4. 试用定积分表示极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$.

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$.