第 2 章 （之 6）

第 7 次作业

教学内容：§2.2.5 极限的运算法则 E　　§2.2.6 无穷小的比较

1．选择题

**（1）设$\alpha(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，$\beta(x)=3-3\sqrt[3]{x}$，则当$x\to 1$时（　　）

$(A)\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶无穷小，但不是 等价无穷小；

$(B)\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价无穷小；

$(C)\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小；

$(D)\beta(x)$是比$\alpha(x)$高阶的无穷小．

答：A

**(2) 设　$f(x)$为可导函数且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-x)}{2x}=-1$，则曲线$y=f(x)$在点

$(a，f(a))$处的切线斜率为　(　　　)

$(A)2$　$(B)-1$　$(C)1$　$(D)-2$

分析：$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a-x)-f(a)}{-x}=\dfrac{1}{2}f'(a)=-1$，

$\therefore f'(a)=-2$．

答(D)

**(3)设 $f(x)=(2+|x|)\sin x$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处　　　　（　　　）

（A）$f'(0)=2$　　　　（B）$f'(0)=0$

（C）$f'(0)=1$　　　　（D）不可导

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(2+|x|)}{x}=2\right)$$

答(A)

**2. 试求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x^2\sin x)}{(\arctan x)^3}$；（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{x-1}$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$（$x$ 为不等于零的常数）；（5）$\lim\limits_{x\to\infty}x^2(1-\cos\dfrac{1}{x})$；

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{\ln(1+x)}$　．

解：（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2}=\dfrac{1}{e^2}$。

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x^2\sin x)}{(\arctan x)^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2\cdot x}{x^3}=5$。

（3）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[5]{1+(x-1)}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{x-1}{5}}{x-1}=\dfrac{1}{5}$。

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2^n\cdot\dfrac{x}{2^n}=x$.

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}x^2(1-\cos\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x})^2=\dfrac{1}{2}$。

（6）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x-1}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln3}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln3}{x}=\ln3$。

.

**3．试求 $f(x)=\cos x$ 的导数。

解：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to0}-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\lim_{\Delta x\to0}\left[-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]\cdot\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x,$$

$\therefore\quad f'(x)=(\cos x)'=-\sin x$.

**4. 研究极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2-2\cos ax}}{x}(a>0)$的存在性 .

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\left|\sin\frac{ax}{2}\right|}{x}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2\left|\sin\frac{ax}{2}\right|}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\sin\frac{ax}{2}}{x}=a,\quad \lim_{x\to0^-}\frac{2\left|\sin\frac{ax}{2}\right|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-2\sin\frac{ax}{2}}{x}=-a$$

由于左、右极限不相等 ，所以原极限不存在 .

***5．适当选取 A 、k 的值，使下式成立：$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}\sim Ax^k$（当 $x\to0$）.

解：$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}=\dfrac{\tan x-\sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=\dfrac{\sin x(\frac{1-\cos x}{\cos x})}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$

$$=\frac{\sin x\cdot2\sin^2\frac{x}{2}}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\cdot\cos x},$$

$\because\quad x\to0$ 时，$\sin x\sim x$， $\therefore$ 上式等价于 $\dfrac{2\cdot x\cdot(\frac{x}{2})^2}{1+1}=\dfrac{x^3}{4}$，

$\therefore\quad A=\dfrac{1}{4},\quad k=3.$

6．当 $x \to 0$ 时，试确定下列各无穷小对 x 的阶数.

*（1） $x^3 + 10000x^2$；　　　　**（2） $\dfrac{x(x+1)}{1+\sqrt[3]{x}}$.

解：（1）$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+10000x^2}{x^2} = 10000$，　$\therefore$ 阶数为 2。

（2）$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+1)}{(1+\sqrt[3]{x})\cdot x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{1+\sqrt[3]{x}} = 1$，　$\therefore$ 阶数为 1.

**7. $设f(x)=\begin{cases}\alpha(x)\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $其中\alpha(x)为x的高阶无穷小.(x\to 0)$，

试证明函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处可导.

证明：由于 $x \to 0$ 时，$\dfrac{\alpha(x)}{x}$ 是无穷小量，$\cos\dfrac{1}{x}$ 是有界量，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x}\cos\frac{1}{x} = 0,$$

$\therefore f(x)在x=0处可导.$

***8. 设 $f(x) = \dfrac{\varphi(x)\cdot\tan 5x}{x}$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\varphi(0)=0, \varphi'(0)=1$，

试证明：$f(x) \sim 5x,\quad (x\to 0)$.

证明：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)\cdot\tan 5x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{x}\cdot\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = 5\varphi'(0) = 5,$$

$\therefore f(x)与5x为等价无穷小(x\to 0时)$.

***9. 设 $f(x) = \dfrac{\varphi(x)\sin x}{(1-\mathrm{e}^{2x})x}$，$其中\varphi(x)在x=0处可导，且\varphi(0)=0, 求\lim\limits_{x\to 0}f(x).$

解：$\lim\limits_{x\to 0}f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{1-\mathrm{e}^{2x}} = \varphi'(0)\cdot(-\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{1}{2}\varphi'(0)$.

***10. 设 $a_n = \dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n+9}{2n-1}$，试证明数列 $\{a_n\}$ 有极限，并求出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

解：由于数列的极限存在与否与该数列的有限项无关，故我们从第 10 项开始考虑，当

$n \ge 10$ 时，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+10}{2n+1} \le \dfrac{20}{21}$，　$\dfrac{a_n}{a_{10}} \le \left(\dfrac{20}{21}\right)^{n-10}$，

$$0 \le a_n \le \left(\frac{20}{21}\right)^{n-10} a_{10},$$

$\therefore$ 由夹逼定理知，数列 $\{a_n\}$ 存在极限，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$.

注：本题也可利用“单调有界数列收敛定理”证明该数列收敛，再计算其极限.

***11.　设 $x_0=2, x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_{n-1}+\dfrac{1}{x_{n-1}}\right)(n=1,2,\cdots)$，试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

证明：显见 $x_n>0$，且 $x_n=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+\dfrac{1}{x_{n-1}})\ge\sqrt{x_{n-1}\cdot\dfrac{1}{x_{n-1}}}=1$，

$$x_n-x_{n-1}=\frac{1-{x_{n-1}}^2}{2x_{n-1}}\le 0，$$

∴ $\{x_n\}$ 单调下降，且有下界，　∴ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。设此极限为 A，

对 $x_n=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+\dfrac{1}{x_{n-1}})$ 两边取极限得：$A=\dfrac{1}{2}(A+\dfrac{1}{A})$，　解得 $A=1$（舍负根）.

所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1$$

***12. 证明数列 $\sqrt{2}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，…收敛，并求其极限.

解：$x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$（n =1，2，…）

利用数学归纳法证明数列 $\{x_n\}$ 有界

当 n=1 时，　$x_1=\sqrt{2}<2$，

假定当 n=k 时，　$x_k<2$，　则当 n=k+1 时，　$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$，

∴ $x_n<2$，（n =1，2，…）

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\frac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n}=-\frac{(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n}>0$$

于是数列 $\{x_n\}$ 递增.

由数列的单调有界收敛准则，得 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，

则由 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，取 $n\to\infty$，得 $a=\sqrt{2+a}$，解得 $a=2$，（$a=-1$ 舍去）.

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

第 2 章　（之 7）

第 8 次作业

教学内容：§2.3.1 函数连续的概念　§2.3.2 连续函数的运算性质　§2.3.3 初等函数的连续性

**1.　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x+\mathrm{e}^{2ax}-1}{x}, & 当\ x\ne 0\\ a, & 当\ x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $a=$____________.

解答：-1

2.　试利用极限四则运算的性质，重要极限，等价无穷小，基本初等函数连续性等各种已知结果，求下列极限：

**（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\tan(x^2-1)}{x-\frac{1}{x}}$；

解： $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\tan(x^2-1)}{x-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\cdot\sin(x^2-1)}{(x^2-1)\cdot\cos(x^2-1)}=1$.

**（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{(\arcsin x)^3}$；

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{(\arcsin x)^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x\cdot(1-\cos x)}{(\arcsin x)^3}$，

$\because$ $x\to0$ 时，有$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$， $\tan x\sim x$， $\arcsin x\sim x$，

所以 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

**（3）计算极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{\cos x}-\mathrm{e}}{x^2}$；

解：因当$x\to0$ $\mathrm{e}^{\cos x}-\mathrm{e}=\mathrm{e}(\mathrm{e}^{\cos x-1}-1)$

$$\sim\mathrm{e}(\cos x-1)\sim-\frac{\mathrm{e}}{2}x^2$$

故原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{\mathrm{e}}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

**（4）计算极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\mathrm{e}^{\sin x}-1)^4\cdot\sqrt{1+x^2}}{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}$.

解：因当$x\to0$时

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$， $\ln(1+x^2)\sim x^2$， $\mathrm{e}^{\sin x}-1\sim\sin x\sim x$，

原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4\sqrt{1+x^2}}{\frac{1}{2}x^2\cdot x^2}=2$.

**（5）$\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{3x+1}{3+x})^{\frac{1}{x-1}}$；

解：$\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{3x+1}{3+x})^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}\left(1+\dfrac{2x-2}{3+x}\right)^{\frac{3+x}{2(x-1)}\cdot\frac{2}{3+x}}=\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{2}{3+x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$。

**（6）$\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$

解：$\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\mathrm{e}^6$.

**(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-3}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-3}\cdot\frac{-3n}{n+1}}=e^{-3}$

**3．讨论函数 $f(x)=\begin{cases}|x|\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点的连续性.

解：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续.

**4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}ae^x, & x<0\\ b-1, & x=0\\ bx+1, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 求常数 a 与 b 的值.

解: $f(0-0)=a, f(0+0)=1, f(0)=b-1$,

$\therefore a=1, b=2$.

**5. 设 $f(x)=\begin{cases}|x-1|, & |x|>1\\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\le 1\end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 的连续性.

解：容易看出 $f(x)$ 在 $(-\infty，-1)$，$(-1，1)$ 及 $(1，+\infty)$ 内 均连续

在 $x=-1$ 处，

$\lim\limits_{x\to -1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to -1-0}(1-x)=2,$

$\lim\limits_{x\to -1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to -1+0}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0,$

$f(-1-0)\neq f(-1+0)$ 故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处不连续

在 $x=1$ 处，$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)=0,$

$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0,$

$f(1)=\cos\dfrac{\pi}{2}=0,$

$f(1-0)=f(1)=f(1+0)$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

第 2 章 （之 8）

第 9 次作业

教学内容：§2.3.4 函数的间断点及其分类　§2.3.5 闭区间上连续函数的性质
§2.4.1 函数可导与连续的关系　§2.4.2 函数的和差积商的求导法则

**1．函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点为 $x=1、2$，则此函数间断点的类 型为（　　）

A．$x=1,2$ 都是第一类；　　　B．$x=1,2$ 都是第二类；

C．$x=1$是第一类，$x=2$是第二类；

D．$x=1$是第二类，$x=2$是第一类.

解答：C

***2．设 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{\left|x^2-1\right|}\sin\dfrac{1}{x}$，则 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的______间断点；

$x=0$ 是 $f(x)$ 的______间断点；$x=1$ 是 $f(x)$ 的______间断点.

解答:1、无穷；2、可去；3、跳跃.

**3．指出$f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x-1|\sin x}$的间断点，并判定其类型.

解：$x=0$，$x=1$，$x=\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots,\pm n\pi,\cdots$，都是$f(x)$的间断点，

在$x=n\pi$ $(n\neq 0$，$n\in z)$处，$\sin n\pi=0$，$\lim\limits_{x\to n\pi} f(x)=\infty$，

故$x=\pm\pi,\pm 2\pi,\pm 3\pi,\cdots$是$f(x)$的第二类间断点;

在$x=0$处，$f(0)$无意义，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-1)}{|x-1|\sin x}=-1$,

$\therefore x=0$是$f(x)$的可去间断点；

在$x=1$处　$f(1-0)=\dfrac{-1}{\sin 1}$，$f(1+0)=\dfrac{1}{\sin 1}$，$f(1-0)\neq f(1+0)$

$\therefore x=1$是$f(x)$的跳跃间断点.

***4 、指出下面函数的无穷间断点：$f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

解：依题意，$x=0$ 及 $x=k\pi$ $(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是 $f(x)$ 的间断点.

而$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x\cdot x}=\dfrac{1}{2}$.　故$x=0$不是无穷间断点.

又$\lim\limits_{x\to 2k\pi}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 2k\pi}\dfrac{1-\cos(2k\pi-x)}{-x\sin(2k\pi-x)}=\lim\limits_{x\to 2k\pi}\dfrac{\frac{1}{2}(2k\pi-x)^2}{-x(2k\pi-x)}=0(k\neq 0)$，

而$\lim\limits_{x\to 2k\pi+\pi}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}=\infty(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的无穷间断点为 $x=\pm\pi,\pm 3\pi,\pm 5\pi,\cdots$.

**5．设 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $0\le f(x)\le 1$。试证：存在 $\xi\in[0,1]$ 使 $f(\xi)=\xi$ 成立.

证：构造函数 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续。且 $F(0)=f(0)-0\ge 0$，$F(1)=f(1)-1\le 0$。则由闭区间上连续函数的零值定理知，必存在一个 $\xi\in[0,1]$ 使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$ 成立.　证毕.

***6．证明方程 $x=a\sin x+b$ $(a>0,b>0)$ 至少有一个不超过 $a+b$ 的正数根.

证：令 $F(x)=x-a\sin x-b$，则 $F(x)$ 必在 $[0,a+b]$ 上连续。且有 $F(0)=-b<0$，
$F(a+b)=a[1-\sin(a+b)]\geq 0$，故由闭区间上连续函数的零值定理知必存在一个
$\xi\in(0,a+b]$，使得 $F(\xi)=0$，即 $\xi=a\sin\xi+b$． 证毕.

***7．如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，$x_1<x_2<\cdots<x_n$ 是该区间内任意 n 个点，试证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$．

证：因为函数 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n](\subset(a,b))$ 上连续。由闭区间上连续函数最值定理有

$$m=\min_{x_1\leq x\leq x_n} f(x),\quad M=\max_{x_1\leq x\leq x_n} f(x).$$

所以，
$$m\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leq M\ .$$

再由闭区间上连续函数的介值定理，知命题得证。证毕.

**8． 证明方程$x^5-3x=1$至少有一个根介于1和2之间.

解：设 $f(x)=x^5-3x-1$，

$f(x)$在$[1，2]$上连续，且$f(1)=-3<0$，$f(2)=25>0$, 由

零值定理知至少存在一点$\xi\in(1,2)$，使$f(\xi)=0$

即方程$x^5-3x=1$至少有一个根介于1和2之间.

****9． 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，试证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

证明：依题意，取 $\varepsilon=1$, $\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<1$，于是

$$|f(x)|\leq|f(x)-A|+|A|<1+|A|.$$

又当 $|x|\leq X$ 时，利用闭区间上连续函数的有界性定理，

$\exists M_1>0,\forall x\in[-X,X]$，有 $|f(x)|\leq M_1$，

取 $M=\max(M_1,1+|A|)$，则在 $(-\infty,+\infty)$ 上有 $|f(x)|\leq M$ 成立.

**10．试问曲线 $y=\begin{cases}x^2, & x\geq 1\\ 2-x, & x<1\end{cases}$ 在点 $(1,1)$ 处是否有切线，为什么？试简单说明之.

解：没有。

$\because\ \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$， $\lim\limits_{x\to1^-}=\dfrac{(2-x)-1}{x-1}=-1$，

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(2-x)-1}{x-1}$，

即曲线在点 $(1,1)$ 处没有切线.

***11．试确定式中 a,b 之值，使 $f(x)$ 处处可导：

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ ax+b, & x\geq 0.\end{cases}$$

解：$\because$ $f(x)$ 在 0 点处可微，所以必连续。

$f\ (0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=1$，

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax+b)=b$，　　$\therefore\ \ b=1$。

$f_-^{/}(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-b}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{x}=1$，

$f_+^{/}(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ax+b-b}{x}=a$，　　$\therefore\ \ a=1.$

***12. 设 $f(x)=|x-a|g(x)$，其中 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续且 $g(a)=0$，讨论 $f(x)$ 在$x=a$处的连续性与可导性.

解：$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}|x-a|g(x)=0=f(a)$　　$\therefore f(x)$在$x=a$处连续

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|x-a|}{x-a}g(x)=0$　　$\therefore f(x)$在$x=a$处可导.