第六章　离散系统z域分析

6.1　z 变换

6.2　z 变换的性质

6.3　逆z变换

6.4　z 域分析

在连续系统中，为了避开解微分方程的困难，可以通过拉氏变换把微分方程转换为代数方程。出于同样的动机，也可以通过一种称为z变换的数学工具，把差分方程转换为代数方程。

6.1 z变换

一、从拉氏变换到z变换

对连续信号进行均匀冲激取样后，就得到离散信号:

取样信

$$f_S(t)=f(t)\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)\delta(t-kT)$$

两边取双边拉普拉斯变换，得

$$F_{Sb}(s)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)\mathrm{e}^{-kTs}$$

令$z=e^{sT}$，上式将成为复变量z的函数，用F(z)表示；f(kT) →f(k) ，得

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}$$

称为序列f(k)的双边z变换

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}$$

称为序列f (k)的单边z变换

若f(k)为因果序列，则单边、双边z 变换相等，否则不等。今后在不致混淆的情况下，统称它们为z变换。

$$F(z) = Z[f(k)]\ ,f(k)= Z^{-1}[F(z)]\ ;\quad f(k)\longleftrightarrow F(z)$$

二、收敛域

z变换定义为一无穷幂级数之和，显然只有当该幂级数收敛，即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f(k)z^{-k}\right|<\infty$$

时，其z变换才存在。上式称为绝对可和条件，它是序列f(k)的z变换存在的充分必要条件。

6.1　z变

收敛域的定义：

对于序列f(k)，满足　$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f(k)z^{-k}\right|<\infty$

所有z值组成的集合称为z变换**F(z)的收敛域**。

例1：求以下有限序列的z变换

(1) $f_1(k)=\delta(k)$　↓ k=0

(2) $f_2(k)=\{1,2,3,2,1\}$

解：(1)

$$F_1(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(k)z^{-k}=1$$

可见，其单边、双边z变换相等，与z 无关，所以其收敛域为整个z 平面。

6.1 z变

(2) **$f_2(k)$的双边z 变换为**

$$F_2(z)=z^2+2z+3+2z^{-1}+z^{-2}$$

收敛域为$0<|z|<\infty$

$f_2(k)$的单边z 变换为

$$F_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f_2(k)z^{-k}=3+2z^{-1}+z^{-2}$$

收敛域为$|z|>0$

对有限序列的z变换的收敛域一般为$0<|z|<\infty$，有时它在0或/和∞也收敛。

例2 求因果序列

$$f_y(k)=a^k\varepsilon(k)=\begin{cases}0, & k<0\\ a^k, & k\ge 0\end{cases}$$

的z变换（式中a为常数）

解： 代入定义

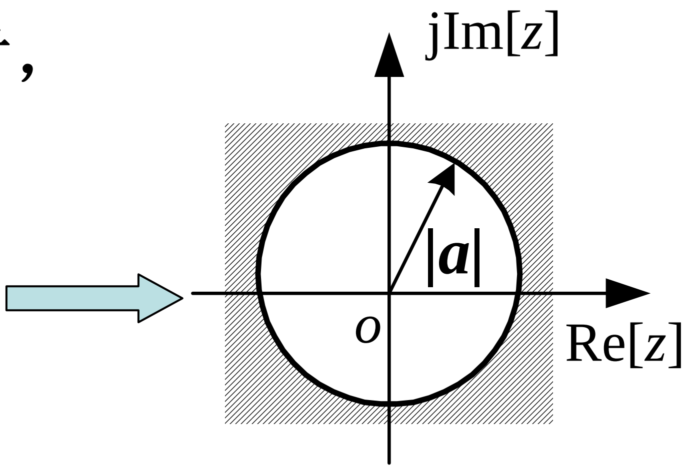
$$F_y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}(az^{-1})^k=\lim_{N\to\infty}\frac{1-(az^{-1})^{N+1}}{1-az^{-1}}$$

可见，仅当 $|az^{-1}|<1$，即 $|z|>|a|$ 时，

其z变换存在。

$$F_y(z)=\frac{z}{z-a}$$

收敛域为



6.1 z变

例3 求反因果序列

$$f_f(k)=\begin{cases} b^k, & k<0 \\ 0, & k\ge 0 \end{cases} = b^k\varepsilon(-k-1)$$

的z变换。

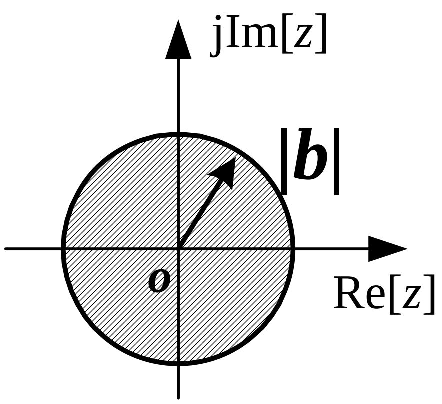
解:

$$F_f(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}(bz^{-1})^k=\sum_{m=1}^{\infty}(b^{-1}z)^m=\lim_{N\to\infty}\frac{b^{-1}z-(b^{-1}z)^{N+1}}{1-b^{-1}z}$$

可见，$|b^{-1}z|<1$, 即 $|z|<|b|$ 时，其z变换存在，

$$F_f(z)=\frac{-z}{z-b}$$

收敛域为 $|z|<$

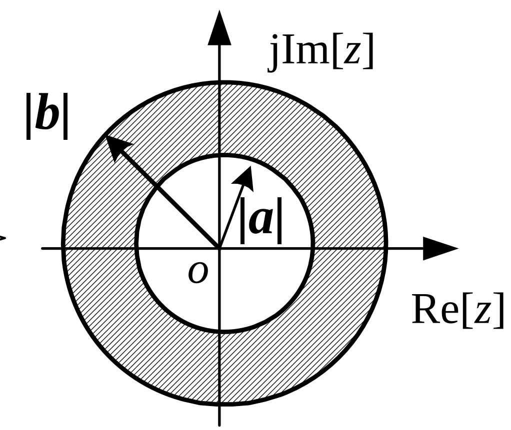


例4 双边序列$f(k)=f_y(k)+f_f(k)=\begin{cases} b^k, & k<0 \\ a^k, & k\ge 0 \end{cases}$ 的z变换。

解 $$F(z)=F_y(z)+F_f(z)=\frac{-z}{z-b}+\frac{z}{z-a}$$

可见，其收敛域为 $|a|<|z|<|b|$

（显然要求 $|a|<|b|$，否则无共同收敛域)



序列的收敛域大致有一下几种情况：

（1）对于有限长的序列，其双边z变换在整个平面；

（2）对因果序列，其z变换的收敛域为某个圆外区域；

（3）对反因果序列，其z变换的收敛域为某个圆内区域；

（4）对双边序列，其z变换(若存在)的收敛域为环状区域。

6.1 z变

注意：对双边z变换必须标明收敛域，否则其对应的原序列将不唯一。

例

$$f_1(k)=2^k\varepsilon(k)\longleftrightarrow F_1(z)=\frac{z}{z-2}\ ,\quad |z|>2$$

$$f_2(k)=-2^k\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow F_2(z)=\frac{z}{z-2}\ ,\quad |z|<2$$

对单边z变换，其收敛域比较简单，一定是某个圆以外的区域，可以省略。

常用序列的z变换：

$$\delta(k)\longleftrightarrow 1\ ,\quad |z|>0$$

$$\varepsilon(k)\longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\ ,\quad |z|>1$$

$$-\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\ ,\quad |z|<1$$

结论：双边$F_b(z)$ + 收敛域 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ $f(k)$

单边$F(z)$ $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ $f(k)$

6.2　z变换的性质

本节讨论z变换的性质，若无特殊说明，它既适用于单边也适用于双边z变换。

一、线性

若　$f_1(k) \longleftrightarrow F_1(z)$，　$\alpha_1 < |z| < \beta_1$，

$f_2(k) \longleftrightarrow F_2(k)$，　$\alpha_2 < |z| < \beta_2$

对任意常数a_1、a_2，则

$$a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k) \longleftrightarrow a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z) \quad \max(\alpha_1, \alpha_2) < |z| < \min(\beta_1, \beta_2)$$

其收敛域至少是$F_1(z)$ 与$F_2(z)$收敛域的相交部分。

例1：　$2\delta(k) + 3\varepsilon(k) \longleftrightarrow 2 + \dfrac{3z}{z-1}$，　$|z| > 1$

例2：$f(k)=2^{-|k|}$，求 $f(k)$ 的双边z变换 $F(z)$。

解：$$f(k)=2^{k}\varepsilon(-k-1)+2^{-k}\varepsilon(k)$$

$$Z[2^{k}\varepsilon(-k-1)]=-\frac{z}{z-2},\quad |z|<2$$

$$Z[2^{-k}\varepsilon(k)]=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}=\frac{2z}{2z-1},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$\therefore F(z)=\frac{2z}{2z-1}-\frac{z}{z-2}=\frac{-3z}{(2z-1)(z-2)},\quad \frac{1}{2}<|z|<2$$

6.2　z变换的性质

二、移位（移序）特性　　　　单边、双边差别

双边z变换的移位：

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$, $\alpha < |z| < \beta$，且对整数m>0，则

$$f(k \pm m) \longleftrightarrow z^{\pm m}F(z),$$

证明：$Z[f(k+m)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k+m)z^{-k} \overset{n=k+m}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n}z^{m} = z^{m}F(z)$

单边z变换的移位：

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$, $|z| > \alpha$，且有整数m>0,

$$f(k-1) \longleftrightarrow z^{-1}F(z) + f(-1)$$

$$f(k-2) \longleftrightarrow z^{-2}F(z) + f(-2) + f(-1)z^{-1}$$

$$f(k-m) \longleftrightarrow z^{-m}F(z) + \sum_{k=0}^{m-1} f(k-m)z^{-k}$$

6.2 z变换的性质

$$f(k+1) \longleftrightarrow zF(z) - f(0)z$$

$$f(k+2) \longleftrightarrow z^2F(z) - f(0)z^2 - f(1)z$$

$$f(k+m) \longleftrightarrow z^m F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{m-k}$$

证明（右移）：

$$Z[f(k-m)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-m) z^{-k} = \sum_{k=0}^{m-1} f(k-m) z^{-k} + \sum_{k=m}^{\infty} f(k-m) z^{-(k-m)} z^{-m}$$

上式第二项令$k-m=n$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} f(k-m) z^{-k} + \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} z^{-m} = \sum_{k=0}^{m-1} f(k-m) z^{-k} + z^{-m} F(z)$$

特例：若$f(k)$为因果序列，则 $f(k-m) \longleftrightarrow z^{-m}F(z)$。

即：$f(k-m)\varepsilon(k-m) \longleftrightarrow z^{-m}F(z)$

6.2 z变换的性质

例1：求周期为N的有始周期性单位序列

$$\sum_{m=0}^{\infty}\delta(k-mN)$$

的z变换。

解：

$$\sum_{m=0}^{\infty}\delta(k-mN)\longleftrightarrow\sum_{m=0}^{\infty}z^{-mN}=\frac{1}{1-z^{-N}}=\frac{z^{N}}{z^{N}-1}\qquad |z|>1$$

例2：求f(k)= k ε (k)的单边z变换F(z).

解：

f(k+1)= (k+1) ε (k+1) = (k+1) ε (k) = f(k) + ε (k)

$$zF(z)-zf(0)=F(z)+\frac{z}{z-1}$$

$$F(z)=\frac{z}{(z-1)^{2}}$$

三、序列乘a^k(z域尺度变换)

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$，$\alpha<|z|<\beta$， 且有常数$a\neq 0$

则 $a^k f(k) \longleftrightarrow F(z/a)$, $\alpha|a|<|z|<\beta|a|$

证明：$Z[a^k f(k)]= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k f(k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = F(\frac{z}{a})$

若a=-1，有 $(-1)^k f(k) \leftrightarrow F(-z) \qquad \alpha<|z|<\beta$

例1：$a^k \varepsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{z-a}$

例2：$\cos(\beta k)\varepsilon(k) \longleftrightarrow ?$

$$\cos(\beta k)\varepsilon(k)=0.5(e^{j\beta k}+e^{-j\beta k})\varepsilon(k) \longleftrightarrow \frac{0.5z}{z-e^{j\beta}}+\frac{0.5z}{z-e^{-j\beta}}$$

6.2 z变换的性质

四、卷积定理

若 $f_1(k) \longleftrightarrow F_1(z)\quad \alpha_1<|z|<\beta_1,$

$f_2(k) \longleftrightarrow F_2(z)\quad \alpha_2<|z|<\beta_2$

则 $f_1(k)*f_2(k) \longleftrightarrow F_1(z)F_2(z)$

对单边z变换，要求$f_1(k)$、$f_2(k)$为因果序列

其收敛域一般为$F_1(z)$与$F_2(z)$收敛域的相交部分。

例：求$f(k)= k\,\varepsilon(k)$的z变换$F(z)$。

解：

$$f(k)= k\,\varepsilon(k)$$

$$= \varepsilon(k)*\varepsilon(k-1)$$

$$\longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\frac{z^{-1}z}{z-1}=\frac{z}{(z-1)^2}$$

五、序列乘k（z域微分）

若　$f(k) \longleftrightarrow F(z)$ ，$\alpha < |z| < \beta$

则　$kf(k) \longleftrightarrow -z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z)$ ，$\alpha < |z| < \beta$

例： **求f(k)= k ε (k)的z变换F(z)**

解：

$$\varepsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$k\varepsilon(k) \longleftrightarrow -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right) = -z\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

六、序列除(k+m)(z域积分)

若 f(k) ←→F(z) ，α< |z |<β，设有整数m，且

则 $$\frac{f(k)}{k+m} \longleftrightarrow z^m \int_z^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta^{m+1}} d\eta \quad ,\alpha<|z|<\beta$$

若m=0 ,且k>0，则 $$\frac{f(k)}{k} \longleftrightarrow \int_z^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} d\eta$$

例：求序列 $\frac{1}{k+1}\varepsilon(k)$ 的z变换

解

$$\varepsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{1}{k+1}\varepsilon(k) \longleftrightarrow z\int_z^{\infty} \frac{\eta}{(\eta-1)\eta^2} d\eta = z\int_z^{\infty} (\frac{1}{\eta-1} - \frac{1}{\eta}) d\eta = z\ln(\frac{\eta-1}{\eta})\Big|_z^{\infty} = z\ln(\frac{z}{z-1})$$

七、k域反转(仅适用双边z变换)

若 $\mathbf{f(k) \longleftrightarrow F(z)}$， $\alpha < |z| < \beta$

则 $\mathbf{f(-k) \longleftrightarrow F(z^{-1})}$， $1/\beta < |z| < 1/\alpha$

例：已知 $a^k\varepsilon(k) \longleftrightarrow \dfrac{z}{z-a}$ ， $|z| > a$

求 $a^{-k}\varepsilon(-k-1)$ 的z变换

解

$$a^{k-1}\varepsilon(k-1) \longleftrightarrow \frac{z^{-1}z}{z-a} = \frac{1}{z-1}, \qquad |z| > a$$

$$a^{-k-1}\varepsilon(-k-1) \longleftrightarrow \frac{1}{z^{-1}-a}, \qquad |z| < 1/a$$

乘a得

$$a^{-k}\varepsilon(-k-1) \longleftrightarrow \frac{a}{z^{-1}-a}, \qquad |z| < 1/a$$

6. 2　z变换的性质

八、部分和

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$ ，$\alpha < |z| < \beta$，

$$\sum_{i=-\infty}^{k} f(i) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}F(z) \text{ ， } \max(\alpha,1) < |z| < \beta$$

证明

$$f(k) * \varepsilon(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\varepsilon(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{k} f(i) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}F(z)$$

例： 求序列(a为实数) $\sum_{i=0}^{k} a^i$ (k≥0)的z变换

解

$$\sum_{i=0}^{k} a^i = \sum_{i=-\infty}^{k} a^i \varepsilon(i) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\frac{z}{z-a} \text{ ，} \qquad |z| > \max(|a|,1)$$

九、初值定理和终值定理

初值定理适用于右边序列，即适用于k<M(M为整数)时f(k)=0的序列。它用于由象函数直接求得序列的初值f(M),f(M+1),…，而不必求得原序列

初值定理：

如果序列在k<M时，f(k)=0，它与象函数的关系为

$$f(k)\longleftrightarrow F(z)\ ,\quad \alpha<|z|<\infty$$

则序列的初值

$$f(M)=\lim_{z\to\infty} z^M F(z)$$

对因果序列

$$f(0)=\lim_{z\to\infty} F(z)$$

6.2 z变换的性质

证明：

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

$$=\sum_{k=M}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

$$=f(M)z^{-M}+f(M+1)z^{-(M+1)}+f(M+2)z^{-(M+2)}+\ldots$$

两边乘z^M得

$$z^M(z)=f(M)+f(M+1)z^{-1}+f(M+2)z^{-2}+\cdots$$

$$f(M)=\lim_{z\to\infty} z^m F(z)$$

6.2　z变换的性质

终值定理：

终值定理适用于右边序列，用于由象函数直接求得序列的终值，而不必求得原序列。

如果序列在**k<M**时，**f(k)=0**，它与象函数的关系

$$f(k) \longleftrightarrow F(z)\text{，}\quad \alpha<|z|<\infty \text{且} 0\le\alpha<1$$

含单位圆

则序列的终值

$$f(\infty)=\lim_{k\to\infty} f(k)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

6.3 逆z变换

求逆z变换的方法有：幂级数展开法、部分分式展开法和反演积分（留数法）、用z 变换性质求逆z 变换等。

一般而言，双边序列f(k)可分解为因果序列$f_1(k)$和反因果序列$f_2(k)$两部分，即

$$f(k) = f_2(k)+f_1(k) = f(k)\varepsilon(-k-1) + f(k)\varepsilon(k)$$

相应地，其z变换也分为两部分

$$F(z) = F_2(z) + F_1(z), \quad \alpha < |z| < \beta$$

其中 $F_1(z)= Z[f(k)\varepsilon(k)]= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}, \quad |z| > \alpha$

$$F_2(z)=Z[f(k)\varepsilon(-k-1)]= \sum_{k=-\infty}^{-1} f(k)z^{-k}, \quad |z| < \beta$$

6.3 逆z变换

当已知象函数F(z)时，根据给定的收敛域不难由F(z)求得$F_1(z)$和$F_2(z)$，并分别求得它们所对应的原序列$f_1(k)$和$f_2(k)$，将两者相加得原序列f(k)。

一、幂级数展开法

根据z变换的定义，因果序列和反因果序列的象函数分别是z^{-1}和z的幂级数。其系数就是相应的序列值。

例：已知象函数

$$F(z)=\frac{z^2}{(z+1)(z-2)}=\frac{z^2}{z^2-z-2}$$

其收敛域如下，分别求其相对应的原序列f(k)。

（1） $|z| > 2$ (2) $|z| < 1$ (3) $1 < |z| < 2$

解 （1） 由于F(z)的收敛域在半径为2的圆外，故f(k)为因果序列。用长除法将F(z)展开为z^{-1}的幂级数：

$$z^2/(z^2-z-2)=1+z^{-1}+3z^{-2}+5z^{-3}+\ldots$$

$$f(k)=\{1,\ 1,\ 3,\ 5,\ \ldots\}$$

↑ k=0

（2） 由于F(z)的收敛域为|z|<1，故f(k)为反因果序列。用长除法将F(z)（按升幂排列）展开为z的幂级数:

$$z^2/(-2-z-z^2)=-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}z^3-\frac{3}{8}z^4+\frac{5}{16}z^5+\cdots$$

$$f(k)=\left\{\cdots,\frac{5}{16},-\frac{3}{8},\frac{1}{4},-\frac{1}{2},0\right\}\leftarrow k=-1$$

6.3 逆z变换

(3) F(z)的收敛域为1< |z| <2，其原序列f(k)为双边序列。将F(z)展开为部分分式，有

$$F(z)=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}z}{z-2}$$

第一项属于因果序列的项函数$F_1(z)$，第二项属于反因果序列的象函数$F_2(z)$，

$$F_1(z)=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1}\text{，}\quad |z|>1 \qquad\qquad F_2(z)=\frac{\frac{2}{3}z}{z-2}\text{，}\quad |z|<2$$

即将它们分别展开为z^{-1}及z的幂级数，有

$$F_1(z)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}-\frac{1}{3}z^{-3}+\cdots \qquad F_2(z)=\cdots+\frac{1}{12}z^{3}-\frac{1}{6}z^{2}-\frac{1}{3}z$$

$$f(k)=\left\{\cdots,-\frac{1}{12},-\frac{1}{6},-\frac{1}{3},\underset{\substack{\uparrow\\ K=0}}{\frac{1}{3}},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\cdots\right\}$$

用上述方法求逆z变换，
原序列通常难以写成闭合形式。

6.3 逆z变换

二、部分分式展开法

$$F(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots..+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots..+a_1 z+a_0}$$ 式中m≤n

（1）F(z)均为单极点，且不为0

$\frac{F(z)}{z}$ 可展开为： $$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_0}{z}+\frac{K_1}{z-z_1}+\ldots.+\frac{K_n}{z-z_n}$$

式中各系数： $K_i=(z-z_i)\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=z_i}$ 所以：$F(z)=K_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i z}{z-z_i}$

根据给定的收敛域，将上式划分为$F_1(z)$（$|z|>\alpha$）和$F_2(z)$（$|z|<\beta$）两部分，根据已知的变换对，如

$$\delta(k)\longleftrightarrow 1,\ a^k\varepsilon(k)\longleftrightarrow\frac{z}{z-a},\ |z|>|a|,\ -a^k\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow\frac{z}{z-a},\ |z|<|a|$$

等，就可求得原函数。

6.3 逆z变换

例1：已知象函数

$$F(z)=\frac{z^2}{(z+1)(z-2)}$$

其收敛域分别为：（1） $|z|>2$ (2) $|z|<1$ (3) $1<|z|<2$

解：部分分式展开为
$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z}{(z+1)(z-2)}=\frac{\frac{1}{3}}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}}{z-2}$$

$$F(z)=\frac{1}{3}\frac{z}{z+1}+\frac{2}{3}\frac{z}{z-2}$$

(1)当 $|z|>2$，故f(k)为因果序列 $f(k)=[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k)$

(2) 当 $|z|<1$，故f(k)为反因果序列 $f(k)=[-\frac{1}{3}(-1)^k-\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(-k-1)$

(3)当 $1<|z|<2$，*f*(k)为双边序列

$$f(k)=\frac{1}{3}(-1)^k\varepsilon(k)-\frac{2}{3}(2)^k\varepsilon(-k-1)$$

例2：已知象函数

$$F(z)=\frac{z(z^3-4z^2+\frac{9}{2}z+\frac{1}{z})}{(z-\frac{1}{2})(z-1)(z-2)(z-3)}\ ,1<|z|<2$$

的逆z变换。

解

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{K_2}{z-1}+\frac{K_3}{z-2}+\frac{K_4}{z-3}$$

$$F(z)=\frac{-z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{2z}{z-1}+\frac{-z}{z-2}+\frac{z}{z-3}$$

由收敛域可知，上式前两项的收敛域满足$|z|>1$，后两项满足$|z|<2$。

$$f(k)=-(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)+2\varepsilon(k)+(2)^k\varepsilon(-k-1)-(3)^k\varepsilon(-k-1)$$

(2) F(z)有共轭单极点

如 $z_{1,2}=c+jd=\alpha e^{\pm j\beta}$, 则 $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{K_1}{z-c-jd}+\dfrac{K_1^*}{z-c+jd}$

令 $K_1=|K_1|e^{j\theta}$

则:

$$F(z)=\frac{|K_1|e^{j\theta}z}{z-\alpha e^{j\beta}}+\frac{|K_1|e^{-j\theta}z}{z-\alpha e^{-j\beta}}$$

若 $|z|>\alpha$, 则: $f(k)=2|K_1|\alpha^k\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(k)$

若 $|z|<\alpha$, 则: $f(k)=-2|K_1|\alpha^k\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(-k-1)$

6.3 逆z变换

例： $F(z)=\dfrac{z}{z^2-4z+8}$， $f(k)\leftrightarrow F(z)$

（1）$|z|>2\sqrt{2}$ ，求 $f(k)$

（2）$|z|<2\sqrt{2}$ ，求 $f(k)$

解：

$$F(z)=\frac{z}{[z-(2+j2)][z-(2-j2)]}$$

$$=-j\frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z-(2+j2)}+j\frac{1}{4}\frac{z}{z-(2-j2)}$$

$$=\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{z}{(z-2\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}})}+\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}\frac{z}{(z-2\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})}$$

（1）$|z|>2\sqrt{2}$, $f(k)$为因果序列

$$f(k)=[\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}(2\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{2}})^k+\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}(2\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{2}})^k]\varepsilon(k)$$

$$=\frac{1}{4}(2\sqrt{2})^k[e^{j(\frac{\pi}{4}k-\frac{\pi}{2})}+e^{-j(\frac{\pi}{4}k-\frac{\pi}{2})}]\varepsilon(k)$$

$$=\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^k\cos(\frac{\pi}{4}k-\frac{\pi}{2})\varepsilon(k)$$

（2）$|z|<2\sqrt{2}$, $f(k)$为反因果序列

$$f(k)=-\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^k\cos(\frac{\pi}{4}k-\frac{\pi}{2})\varepsilon(-k-1)$$

(3) F(z)有重极点

$$F(z)=F_a(z)+F_b(z)=\frac{K_{11}z}{(z-a)^r}+\frac{K_{12}z}{(z-a)^{r-1}}+\dots+\frac{K_{1r}z}{(z-a)}+F_b(z)$$

$$K_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}[(z-a)^r\frac{F(z)}{z}]\Big|_{z=a}$$

F(z)展开式中含$\frac{z}{(z-a)^r}$项(r>1)，则逆变换为：

若|z|>a ,对应原序列为因果序列：

$$\frac{k(k-1)\dots\dots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}\varepsilon(k)$$

6.3 逆z变换

以 |z|>a 为例：

当**r=2**时，为 $ka^{k-1}\varepsilon(k)$

当**r=3**时，为 $\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(k)$

可这样推导记忆：

$$Z[a^k\varepsilon(k)]=\frac{z}{z-a}$$

两边对a求导得：$Z[ka^{k-1}\varepsilon(k)]=\frac{z}{(z-a)^2}$

再对a求导得：$Z[k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(k)]=\frac{2z}{(z-a)^3}$

故：$Z[\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(k)]=\frac{z}{(z-a)^3}$

6.3 逆z变换

例：已知象函数

$$F(z)=\frac{z^3+z^2}{(z-1)^3}\quad,\quad |z|>1$$

的原函数

解

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z^2+z}{(z-1)^3}=\frac{K_{11}}{(z-1)^3}+\frac{K_{12}}{(z-1)^2}+\frac{K_{13}}{z-1}$$

$$K_{11}=(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=1}=2$$

$$K_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\right]\bigg|_{z=1}=3$$

$$K_{13}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\right]\bigg|_{z=1}=1$$

$$F(z)=\frac{2z}{(z-1)^3}+\frac{3z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}$$

$$f(k)=[k(k-1)+3k+1]\varepsilon(k)$$

6.4 z域分析

单边z变换将系统的初始条件自然地包含于其代数方程中，可求得零输入、零状态响应和全响应。

一、差分方程的变换解

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} f(k-j)$$

设f(k)在k=0时接入，系统初始状态为y(-1),y(-2),…y(-n)

取单边z变换得

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}[z^{-i}Y(z) + \sum_{k=0}^{i-1} y(k-i) z^{-i}] = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j}[z^{-j}F(z)]$$

$$[\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^{-i}]Y(z) + \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}[\sum_{k=0}^{i-1} y(k-i) z^{-k}] = (\sum_{j=0}^{m} b_{m-j} z^{-j})F(z)$$

6.4 z域分析

$$Y(z) = \frac{M(z)}{A(z)} + \frac{B(z)}{A(z)} F(z) = Y_x(z) + Y_f(z)$$

令 $H(z) = \frac{Y_f(z)}{F(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$ 称为系统函数。

$$\mathbf{h(k)} \longleftrightarrow \mathbf{H(z)}$$

例1：若某系统的差分方程为

$$y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = f(k) + 2f(k-2)$$

已知$y(-1)=2$，$y(-2)=-1/2$，$f(k)=\varepsilon(k)$，求系统的$y_x(k)$、$y_f(k)$、$y(k)$。

解　方程取单边z变换

$$Y(z)-[z^{-1}Y(z)+y(-1)]-2[z^{-2}Y(z)+y(-2)+y(-1)z^{-1}]=F(z)+2z^{-2}F(z)$$

$$Y(z)=$$

$$\frac{(1+2z^{-1})y(-1)+2y(-2)}{1-z^{-1}-2z^{-2}}+\frac{1+2z^{-2}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}F(z)=\frac{z^2+4z}{z^2-z-2}+\frac{z^2+2}{z^2-z-2}\frac{z}{z-1}$$

$$Y_x(z)=\frac{z^2+4z}{(z-2)(z+1)}=\frac{2z}{z-2}+\frac{-z}{z+1}\rightarrow y_x(k)=[2(2)^k-(-1)^k]\varepsilon(k)$$

$$Y_f(z)=\frac{2z}{z-2}+\frac{1}{2}\frac{z}{z+1}-\frac{3}{2}\frac{z}{z-1}\rightarrow y_f(k)=[2^{k+1}+\frac{1}{2}(-1)^k-\frac{3}{2}]\varepsilon(k)$$

例2： 某系统，已知当输入f(k)=(– 1/2)^{k}ε(k)时，其零状态响应

$$y_f(k)=[\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^k+4(-\frac{1}{3})^k-\frac{9}{2}(-\frac{1}{2})^k]\varepsilon(k)$$

求系统的单位序列响应**h(k)**和描述系统的差分方程

解：

$$H(z)=\frac{Y_f(z)}{F(z)}=\frac{z^2+2z}{z^2-\frac{1}{6}z-\frac{1}{6}}=\frac{3z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{-2z}{z+\frac{1}{3}}$$

$$h(k)=\left[3\left(\frac{1}{2}\right)^k-2\left(\frac{1}{3}\right)^k\right]\varepsilon(k)$$

系统的差分方程为：

$$y(k)-\frac{1}{6}y(k-1)-\frac{1}{6}y(k-2)=f(k)+2f(k-1)$$

例3： (求LTI系统差分方程的3种响应)

已知离散系统的方程为：

$$y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k-2)$$

$$y(-1)=1,\quad y(-2)=0,\quad f(k)=\varepsilon(k)$$

求：$y(k),\quad y_x(k),\quad y_f(k).$

解： 1、求完全响应 $y(k)$：

由单边z变换的右移性质：

$$f(k-m)\leftrightarrow z^{-m}F(z)+\sum_{k=0}^{m-1}f(k-m)z^{-k},$$

根据右移性质，对系统差分方程取单边z变换，得

$$Y(z)+3[z^{-1}Y(z)+\sum_{k=0}^{0}y(k-1)z^{-k}]+2[z^{-2}Y(z)+\sum_{k=0}^{1}y(k-2)z^{-k}]=z^{-2}F(z)$$

由上式得：

$$Y(z)(1+3z^{-1}+2z^{-2})=(-3-2z^{-1})y(-1)-2y(-2)+z^{-2}F(z)$$

$$Y(z)=\frac{(-3-2z^{-1})y(-1)-2y(-2)}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}+\frac{z^{-2}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}F(z)$$

$$=\frac{-3z^{3}+z^{2}+3z}{(z+1)(z-1)(z+2)},\quad F(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$=\frac{1}{6}\frac{z}{(z-1)}+\frac{1}{2}\frac{z}{(z+1)}-\frac{11}{3}\frac{z}{(z+2)},\quad |z|>2$$

$$y(k)=\frac{1}{6}\times 1^{k}+\frac{1}{2}\times(-1)^{k}-\frac{11}{3}(-2)^{k},\quad k\geq 0$$

2、求零输入响应 $y_x(k)$： $y_x(-1)=y(-1)=1,\quad y_x(-2)=y(-2)=0$

$y_x(k)$的方程：$y_x(k)+3y_x(k-1)+2y_x(k-2)=0$

根据右移性质，对 $y_x(k)$ 的方程取单边 z 变换，得：

$$Y_x(z)+3[z^{-1}Y_x(z)+\sum_{k=0}^{0}y_x(k-1)z^{-k}]+2[z^{-2}Y_x(z)+\sum_{k=0}^{1}y_x(k-2)z^{-k}]=0$$

由上式得：

$$Y_x(z)=\frac{(-3-2z^{-1})y_x(-1)-2y_x(-2)}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{-3z^2-2z}{(z+1)(z+2)},\quad |z|>2$$

$$=\frac{z}{z+1}-\frac{4z}{z+2}$$

$$y_x(k)=(-1)^k-(-2)^{k+2},\quad k\ge 0$$

3、求零状态响应 $y_f(k)$： $f(k)=\varepsilon(k),\ \ y_f(-1)=y_f(-2)=0$

$y_f(k)$的方程：$y_f(k)+3y_f(k-1)+2y_f(k-2)=f(k-2)$

由右移性质，对 $y_f(k)$ 的方程取单边 z 变换，得

$$Y_f(z)+3z^{-1}y_f(z)+2z^{-2}Y_f(z)=z^{-2}F(z)$$

$$Y_f(z)=\frac{z^{-2}}{(1+3z^{-1}+2z^{-2})}F(z),\ \ F(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$=\frac{z}{(z+1)(z-1)(z+2)},\quad |z|>2$$

$$=\frac{1}{6}\frac{z}{(z-1)}-\frac{1}{2}\frac{z}{(z+1)}+\frac{1}{3}\frac{z}{(z+2)},$$

$$y_f(k)=[\frac{1}{6}\times1^k-\frac{1}{2}(-1)^k+\frac{1}{3}(-2)^k]\varepsilon(k)$$

6.4　z域分析

说明：前向差分方程的解法：

（1）用左移性质：$f(k+m) \leftrightarrow z^m F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{m-k}$，

初始条件：对 $y(k)$： $y(0)$、$y(1)$、 $\cdots$

对$y_x(k)$： $y_x(0)$、$y_x(1)$、 $\cdots$

（2）转变为由后向差分方程，用右移性质求解，

初始条件：对 $y(k)$： $y(-1)$、$y(-2)$、 $\cdots$

对$y_x(k)$： $y_x(-1)$、$y_x(-2)$、 $\cdots$

若初始条件不适用，则用递推法由相应的差分方程递推得到需要的初始条件。

二、系统函数H(z):

1、**定义**: $H(z) = \dfrac{Y_f(z)}{F(z)}$

$$Y_f(z) = Z[y_f(k)],\ \ F(z) = Z[f(k)]$$

2、**物理意义**:

$$H(z) = Z[h(k)]$$

3、**计算**:

（1） $H(z) = \dfrac{Y_f(z)}{F(z)}$

（2） $H(z) = Z[h(k)]$

（3） 由系统差分方程求 $H(z)$

6.4 z域分析

例： 已知：$y_f(k)+a_1y_f(k-1)+a_0y_f(k-2)=b_1f(k-1)+b_0f(k-2)$;

求：$H(z)$。

解： 由于是零状态响应，对方程取z变换，得：

$$Y_f(z)+a_1z^{-1}Y_f(z)+a_0z^{-2}Y_f(z)=b_1z^{-1}F(z)+b_0z^{-2}F(z)$$

$$(1+a_1z^{-1}+a_0z^{-2})Y_f(z)=(b_1z^{-1}+b_0z^{-2})F(z)$$

$$H(z)=\frac{Y_f(z)}{F(z)}=\frac{b_1z^{-1}+b_0z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_0z^{-2}}$$

$$=\frac{b_1z+b_0}{z^2+a_1z+a_0}$$

6.4 z域分析

4、应用:

（1）求 $y_f(k)=Z^{-1}[Y_f(z)],\ Y_f(z)=H(z)F(z);$

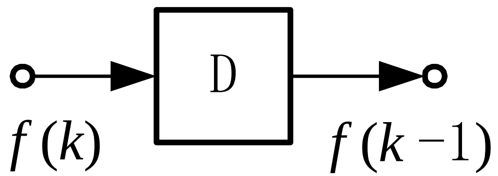
（2）求 $h(k)=Z^{-1}[H(z)];$

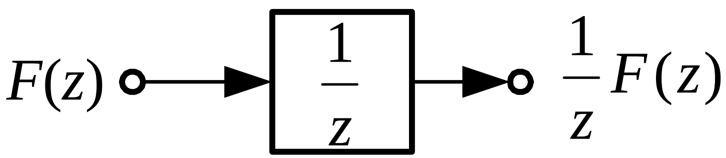
（3）求 $f(k)=Z^{-1}[F(z)],\ F(z)=\dfrac{Y_f(z)}{H(z)};$

（4）表示系统特性：频率特性、稳定性等。

6.4 z域分析

三、系统的z域框图

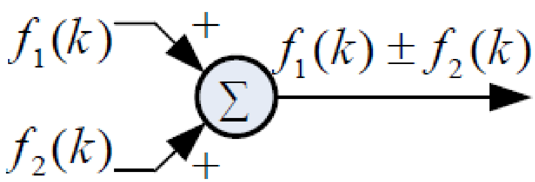
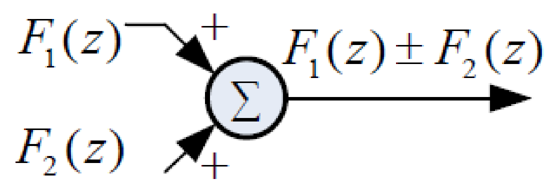
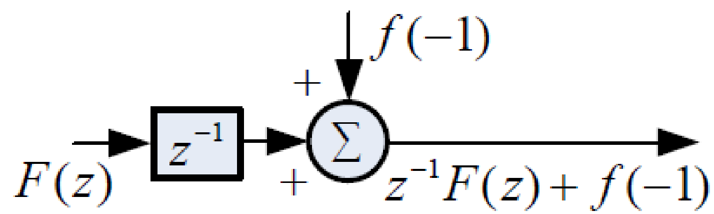




另外两个基本单元：数乘器和加法器，**k**域和**z**域框图相同

6.4 z域分析

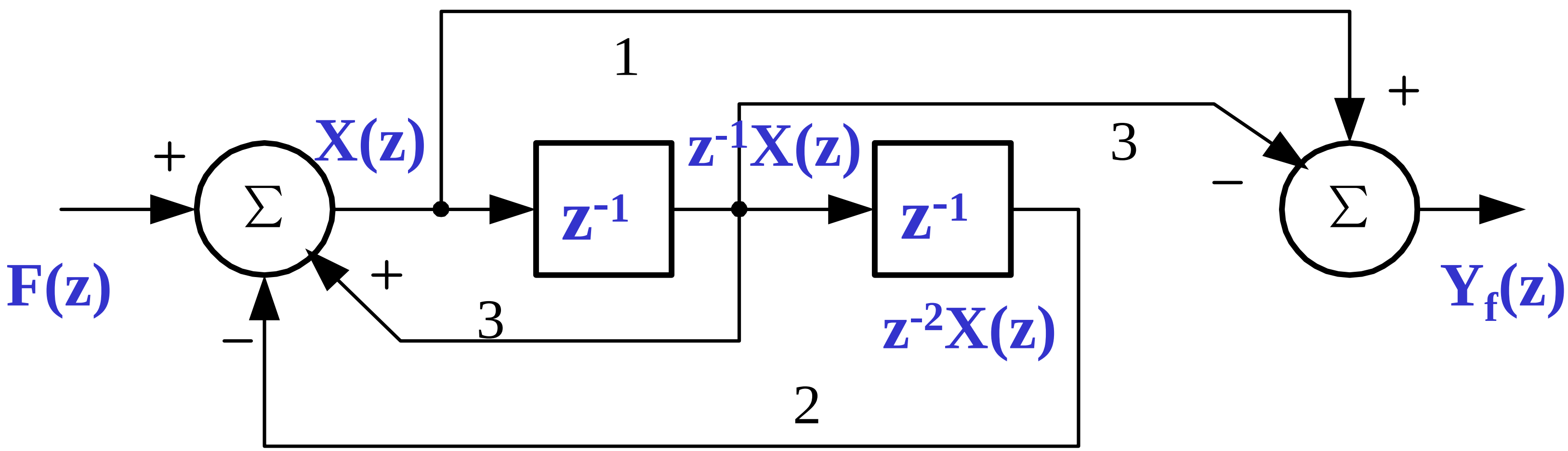
基本运算部件的z域模型

名　称	k 域模型	z 域模型
数乘器 （标量乘法器）	$f(k) \to \boxed{a} \to af(k)$ 或 $f(k) \xrightarrow{a} af(k)$	$F(z) \to \boxed{a} \to aF(z)$ 或 $F(z) \xrightarrow{a} aF(z)$
加法器		
迟延单元	$f(k) \to \boxed{\mathrm{D}} \to f(k-1)$	
迟延单元 （零状态）	$f(k) \to \boxed{\mathrm{D}} \to f(k-1)$	$F(z) \to \boxed{z^{-1}} \to z^{-1}F(z)$

例3： 某系统的k域框图如图，已知输入f(k)= ε(k) 。

（1）求系统的单位序列响应h(k)和零状态响应$y_f(k)$ 。

（2）若y(-1)=0，y(-2)=0.5，求零输入响应$y_x(k)$。



解:(1)画z域框　　设中间变量X(z)

$$X(z)=3z^{-1}X(z)-2z^{-2}X(z)+F(z) \qquad X(z)=\frac{1}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}F(z)$$

$$Y_f(z)=X(z)-3z^{-1}X(z)=(1-3z^{-1})X(z)$$

$$Y_f(z)=\frac{1-3z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}F(z)$$

$$H(z)=\frac{1-3z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{z^2-3z}{z^2-3z+2}=\frac{2z}{z-1}+\frac{-z}{z-2}$$

$h(k) = [\,2 - (2)^k]\varepsilon(k)$

当f(k)= ε(k)时， F(z)= z/(z-1)

$$Y_f(z)=\frac{z^2-3z}{z^2-3z+2}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{z^2(z-3)}{(z-1)^2(z-2)}=\frac{2z}{(z-1)^2}+\frac{3z}{z-1}+\frac{-2z}{z-2}$$

$$y_f(z)=[2k+3-2(2)^k]\varepsilon(k)$$

(2)由H(z)可知，差分方程的特征根为$\lambda_1=1$， $\lambda_2=2$

$$y_x(k) = C_{x1} + C_{x2}\,(2)^k$$

由y(-1)=0，y(-2)=0.5，

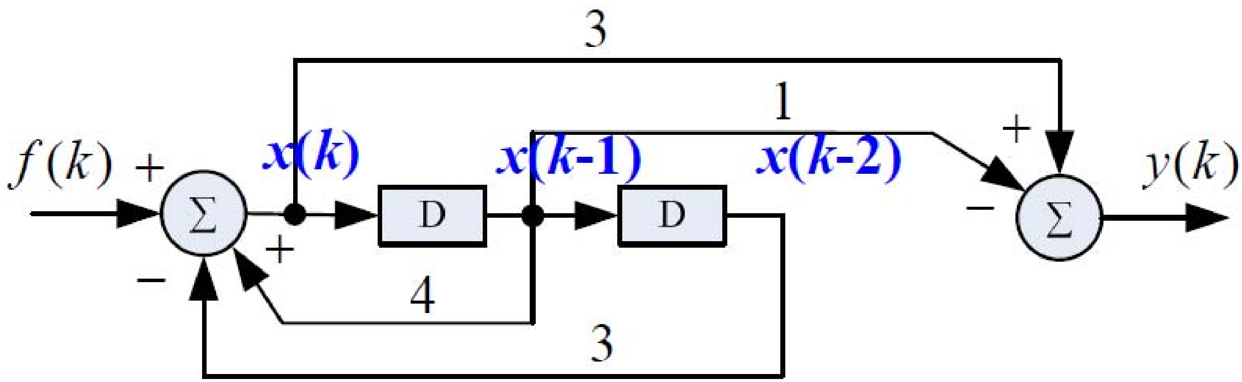
$$\begin{cases} C_{x1} + C_{x2}\,(2)^{-1} = 0 \\ C_{x1} + C_{x2}\,(2)^{-2} = 0.5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $C_{x1} = 1,\ C_{x2} = -2$

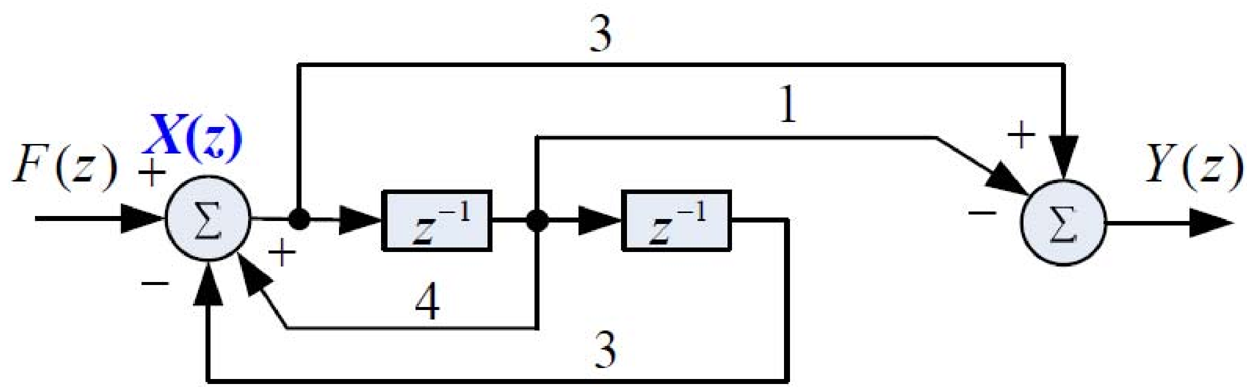
$$y_x(k) = 1 - 2\,(2)^k$$

6.4 z域分析

例1：求图示LTI因果系统的单位序列响应。



解：画出z域框图：



由右边加法器可得： $X(z)=F(z)+4z^{-1}X(z)-3z^{-2}X(z)$

由左边加法器可得： $Y(z)=3X(z)-z^{-1}X(z)$

系统函数为：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)}=\frac{Y(z)}{X(z)}\frac{X(z)}{F(z)}=\frac{3-z^{-1}}{1-4z^{-1}+3z^{-2}}=\frac{z(3z-1)}{z^2-4z+3}$$

由部分分式展开得：

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{3z-1}{z^2-4z+3}=\frac{4}{z-3}+\frac{-1}{z-1} \Rightarrow H(z)=\frac{-z}{z-1}+\frac{4z}{z-3}$$

所以系统的单位序列响应为：

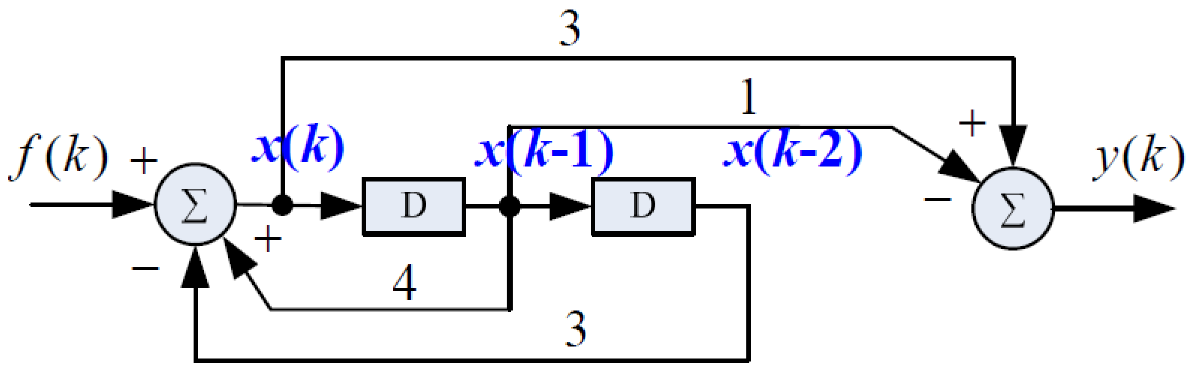
$$h(k)=[-1+4(3)^k]\varepsilon(k)$$

$$H(z)=\frac{-z}{z-1}+\frac{4z}{z-3}$$

所以系统的单位序列响应为：

$$h(k)=[-1+4(3)^{k}]\varepsilon(k)$$

例2：求图示LTI因果系统的单位序列响应。 例1经典解法



解： 设一中间变量$x(k)$，则左边的加法器输出为：

$$x(k)=f(k)+4x(k-1)-3x(k-2)$$

整理得：$x(k)-4x(k-1)+3x(k-2)=f(k) \qquad (1)$

右边加法器输出为：

$$y(k)=3x(k)-x(k-1)$$

6. 4 z域分析

所以，图示系统的差分方程为：

$$y(k)-4y(k-1)+3y(k-2)=3f(k)-f(k-1) \qquad (2)$$

k≥2时，(2)式的零状态响应化为齐次方程：

$$h(k)-4h(k-1)+3h(k-2)=0 \qquad (3)$$

初始状态：

$$h(-1)=h(-2)=0$$

由(2)得： $h(k)=4h(k-1)-3h(k-2)+3\delta(k)-\delta(k-1)$

迭代得：

$$h(0)=4h(-1)-3h(-2)+3=3$$

$$h(1)=4h(0)-3h(-1)-1=11$$

（3）式的特征根为：

$$\lambda_1=1,\lambda_2=3$$

所以： $h(k)=[C_1(1)^k+C_2(3)^k]\varepsilon(k)$

代入初始条件得：

$$h(0)=C_1+C_2=3$$

$$h(1)=C_1+3C_2=11$$

解得： $C_1=-1,C_2=4$

由于$h(0)$,$h(1)$作为初始值代入，因而方程的解也满足k=0和k=1。所以系统的单位序列响应为：

$$h(k)=[-1+4(3)^k]\varepsilon(k)$$

1* [$2^{-k}\varepsilon(k)$]?

四、利用z变换求卷积和

例：求$2^{k}\varepsilon(-k)*[2^{-k}\varepsilon(k)]$

解：$2^{-k}\varepsilon(k)\longleftrightarrow\dfrac{z}{z-0.5},|z|>0.5$

$$2^{k}\varepsilon(-k)\longleftrightarrow\frac{z^{-1}}{z^{-1}-0.5}=\frac{-2}{z-2},|z|<2$$

原式象函数为

$$\frac{-2z}{(z-0.5)(z-2)}=\frac{\frac{4}{3}z}{z-0.5}+\frac{\frac{-4}{3}z}{z-2}$$

$\Longrightarrow$ 原式=$\dfrac{4}{3}(0.5)^{k}\varepsilon(k)+\dfrac{4}{3}(2)^{k}\varepsilon(-k-1)$

6.4 z域分析

五、s域与z域的关系

$$z = e^{sT} \qquad s = \frac{1}{T}\ln z$$ 式中T为取样周期

如果将s表示为直角坐标形式 $s = \sigma + j\omega$ ，将z表示为极坐标形式

$z = \rho e^{j\theta}$ → $\rho = e^{\sigma T}$ ， $\theta = \omega T$

由上式可看出： s平面的左半平面（$\sigma<0$）--->z平面的单位圆内部（$|z|=\rho<1$）

s平面的右半平面（$\sigma>0$）--->z平面的单位圆外部（$|z|=\rho>1$）

s平面的$j\omega$轴（$\sigma=0$）--->z平面中的单位圆上（$|z|=\rho=1$）

s平面上实轴（$\omega=0$）--->z平面的正实轴（$\theta=0$）

s平面上的原点（$\sigma=0$，$\omega=0$）---->z平面上$z=1$的点（$\rho=1$，$\theta=0$）

6.4 z域分析

六、离散系统的频率响应

若连续系统的H(s)收敛域含虚轴，则连续系统频率响应

$$H(\mathrm{j}\omega) = H(s)\Big|_{s=\mathrm{j}\omega}$$

由于$z = e^{sT}$， $s=\sigma+j\omega$，若离散系统H(z)收敛域含单位圆，则

$H(z)\Big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}}$ 存在

令$\omega T = \theta$，称为数字角频

离散系统频率响应定义为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\theta)}$$

只有H(z)收敛域含单位圆才存在频率响应

式中 $|H(e^{j\theta})|$称为幅频响应,偶函数；$\varphi(\theta)$称为相频响应

6.4 z域分析

设LTI离散系统的单位序列响应为h(k),系统函数为H(z)，其收敛域含单位圆，则系统的零状态响应

$$y_f(k)=h(k)*f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(i)f(k-i)$$

当$f(k)=e^{j\theta k}$时

$$y_f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(i)\mathrm{e}^{j\theta(k-i)}=\mathrm{e}^{j\theta k}\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(i)(\mathrm{e}^{j\theta})^{-i}=\mathrm{e}^{j\theta k}H(\mathrm{e}^{j\theta})$$

若输入$f(k)=A\cos(\theta k+\phi) = 0.5Ae^{j\theta k}e^{j\phi} + 0.5Ae^{-j\theta k}e^{-j}$

则其正弦稳态响应为

$y_s(k)= 0.5A\, e^{j\phi}\, e^{j\theta k} H(e^{j\theta}) + 0.5A\, e^{-j\phi}\, e^{-j\theta k} H(e^{-j\theta})$

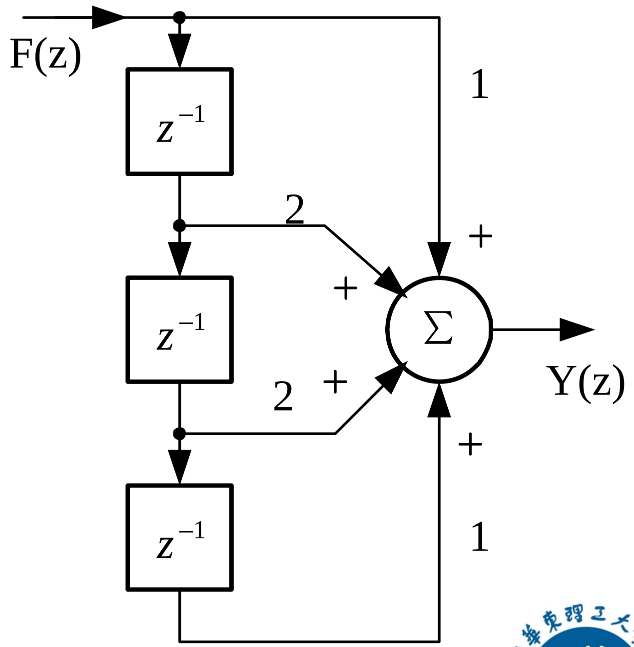
$= 0.5A\, e^{j\phi}\, e^{j\theta k} |H(e^{j\theta})| e^{j\varphi(\theta)} + 0.5A\, e^{-j\phi}\, e^{-j\theta k} |H(e^{-j\theta})|\, e^{-j\varphi(\theta)}$

$=A\, |H(e^{j\theta})| \cos[\theta k + \varphi + \varphi(\theta)]$

例 图示为一横向数字滤波器

（1）求滤波器的频率响应；

（2）若输入信号为连续信号$f(t)=1+2\cos(\omega_0 t)+3\cos(2\omega_0 t)$经取样得到的离散序列$f(k)$，已知信号频率$f_0=100\text{Hz}$，取样$f_s=600\text{Hz}$，求滤波器的稳态输出$y_{ss}(k)$



解 （1）求系统函数

$$Y(z)=F(z)+2z^{-1}F(z)+2z^{-2}F(z)+z^{-3}F(z)$$

$$H(z)=1+2z^{-1}+2z^{-2}+z^{-3},$$

令$\theta=\omega T_S$，z取e^{j}

$$H(e^{j\theta})=1+2e^{-j\theta}+2e^{-j2\theta}+e^{-j3\theta}$$

$$=e^{-j1.5\theta}[2\cos(1.5\theta)+4\cos(0.5\theta)]$$

6.4 z域分析

(2) 连续信号 $f(t) = 1+2\cos(\omega_0 t)+3\cos(2\omega_0 t)$

经取样后的离散信号为(f_0=100Hz, f_s=600Hz)

$$f(k)=f(kT_s)= 1+2\cos(k\omega_0 T_s)+3\cos[k(2\omega_0 T_s)]$$

令 $\theta_1=0$ ，$\theta_2=\omega_0 T_s=\pi/3$, $\theta_3=2\omega_0 T_s= 2\pi/3$

所以 $H(e^{j\theta_1})=6$ ，$H(e^{j\theta_2})=3.46e^{-j\pi/2}$, $H(e^{j\theta_3})= 0$

稳态响应为

$$y_{ss}(t)= H(e^{j\theta_1})+2|H(e^{j\theta_2})|\cos[k\omega_0 T_s+\varphi(\theta_2)]$$
$$+3|H(e^{j\theta_3})|\cos[2k\omega_0 T_s+\varphi(\theta_3)]$$
$$= 6 + 6.92\cos(k\pi/3-\pi/2)$$

可见消除了输入序列的二次谐波