

Méthodologie expérimentale

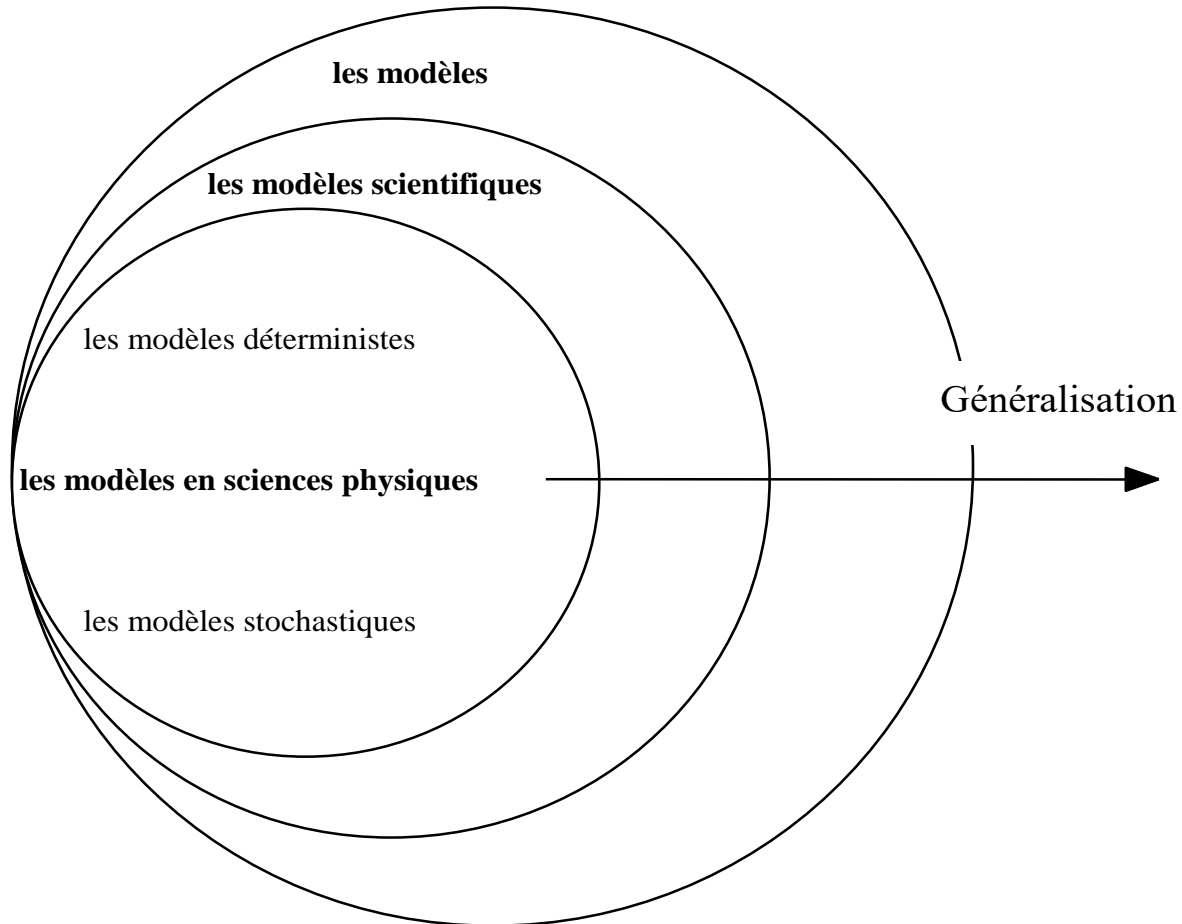
Analyse Dimensionnelle

Pierre Le Cloirec
Ecole Nationale Supérieure de Chimie de Rennes
11 Allée de Beaulieu, CS 50837
35708 Rennes cedex 07, France

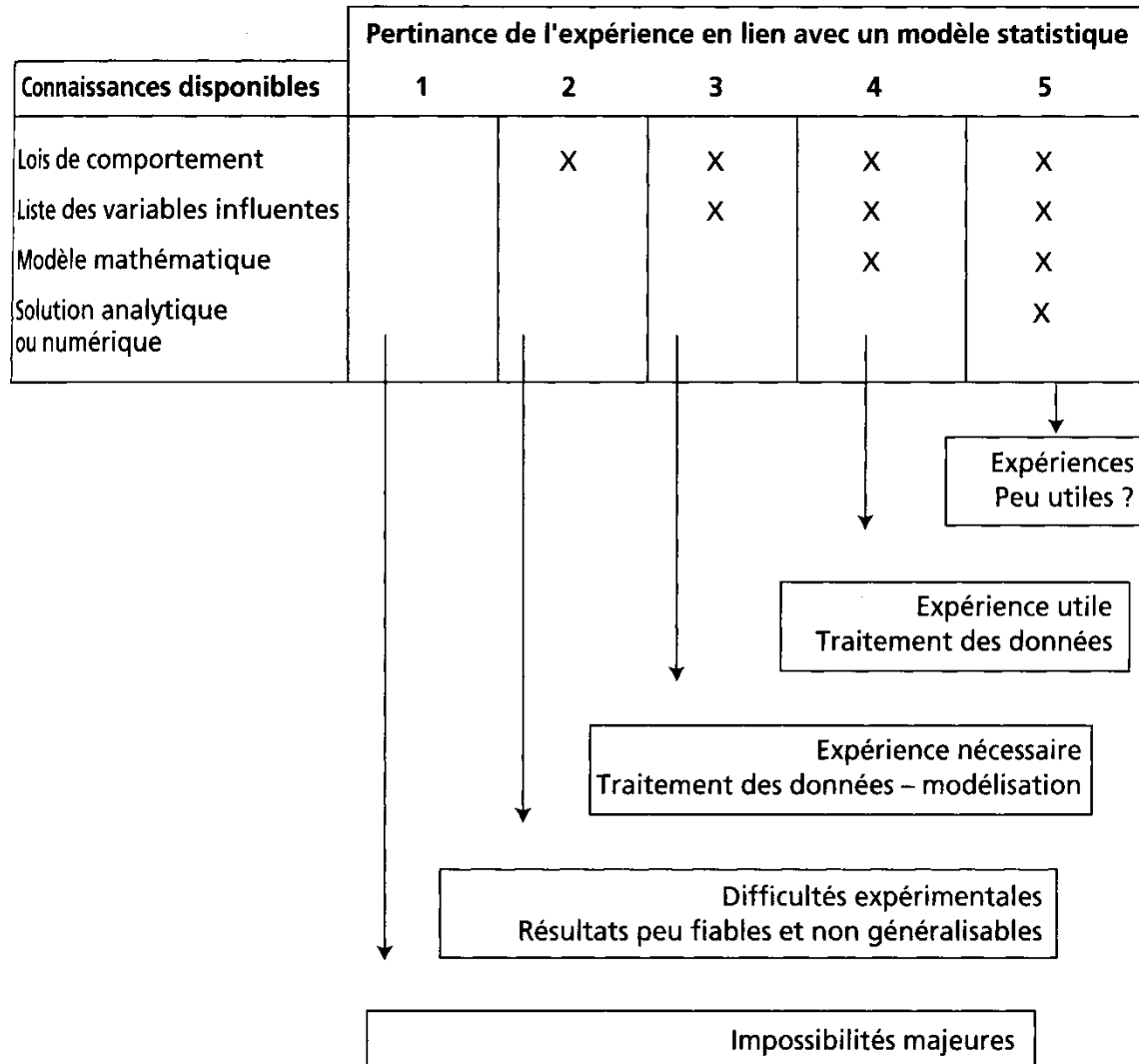
Tel 33 (0) 2 23 23 80 00
e-mail Pierre.Le-Cloirec@ensc-rennes.fr

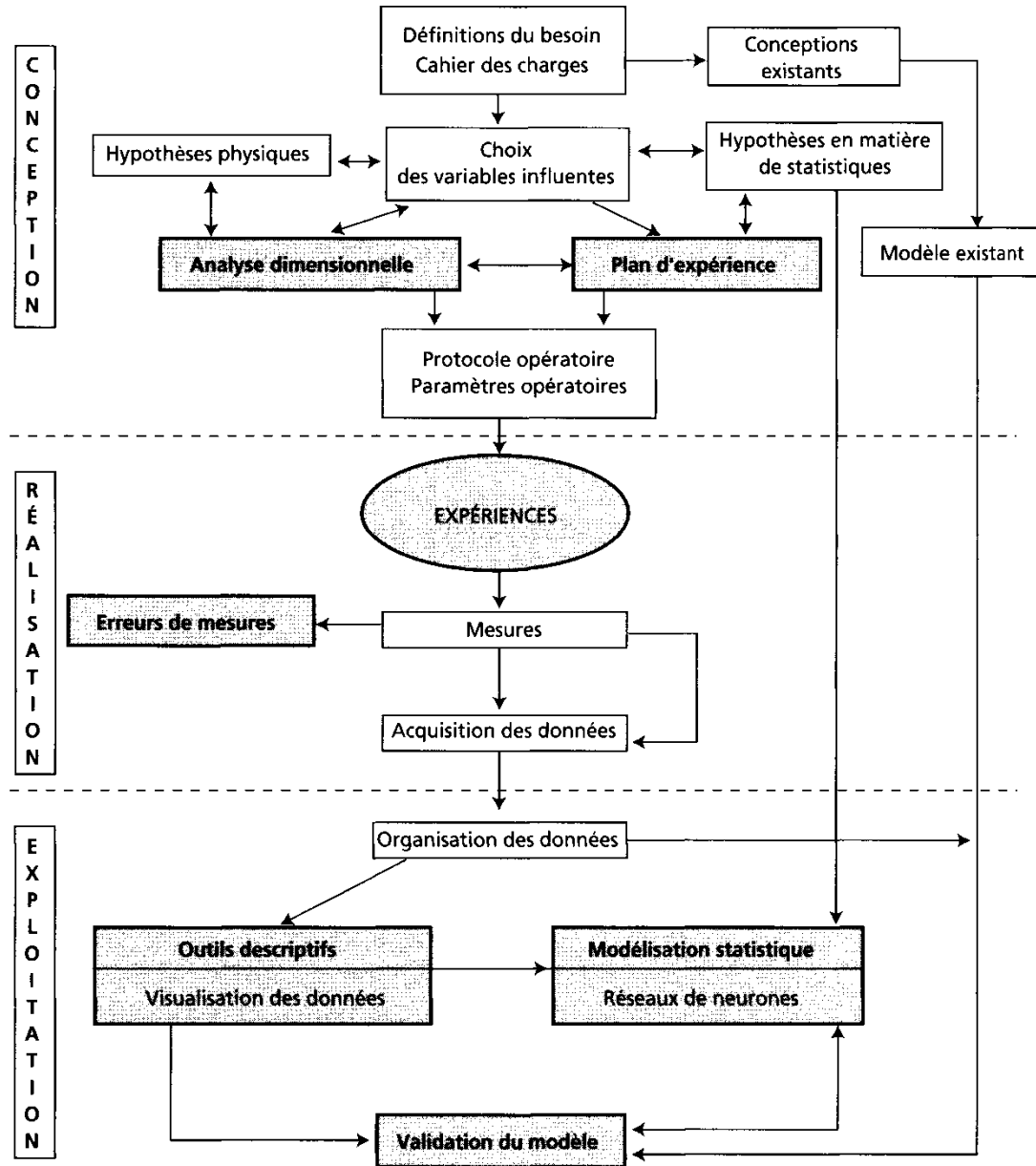
La méthodologie expérimentale

La notion de modèle



Domaines d'utilisation potentielle de l'approche expérimentale pour l'élaboration d'un modèle statistique empirique selon les connaissances disponibles

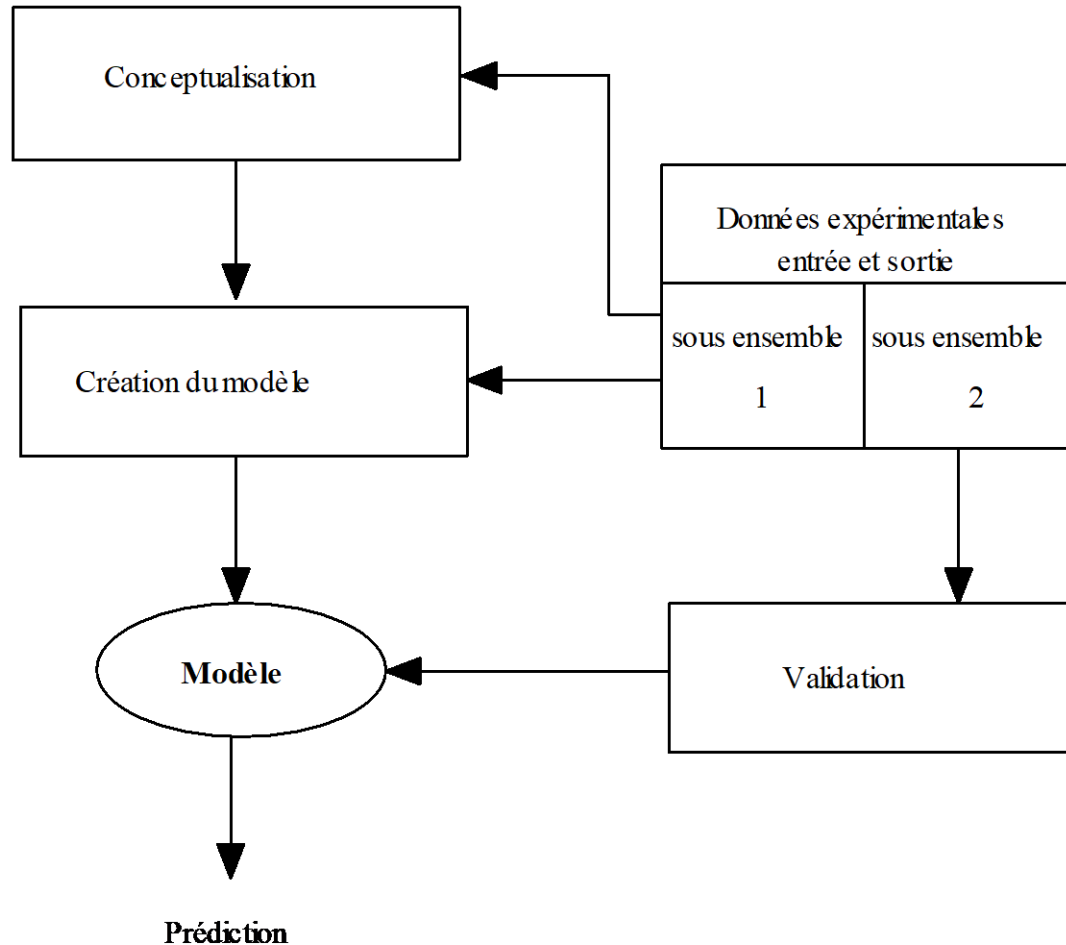




Les deux grands types de modèles scientifiques

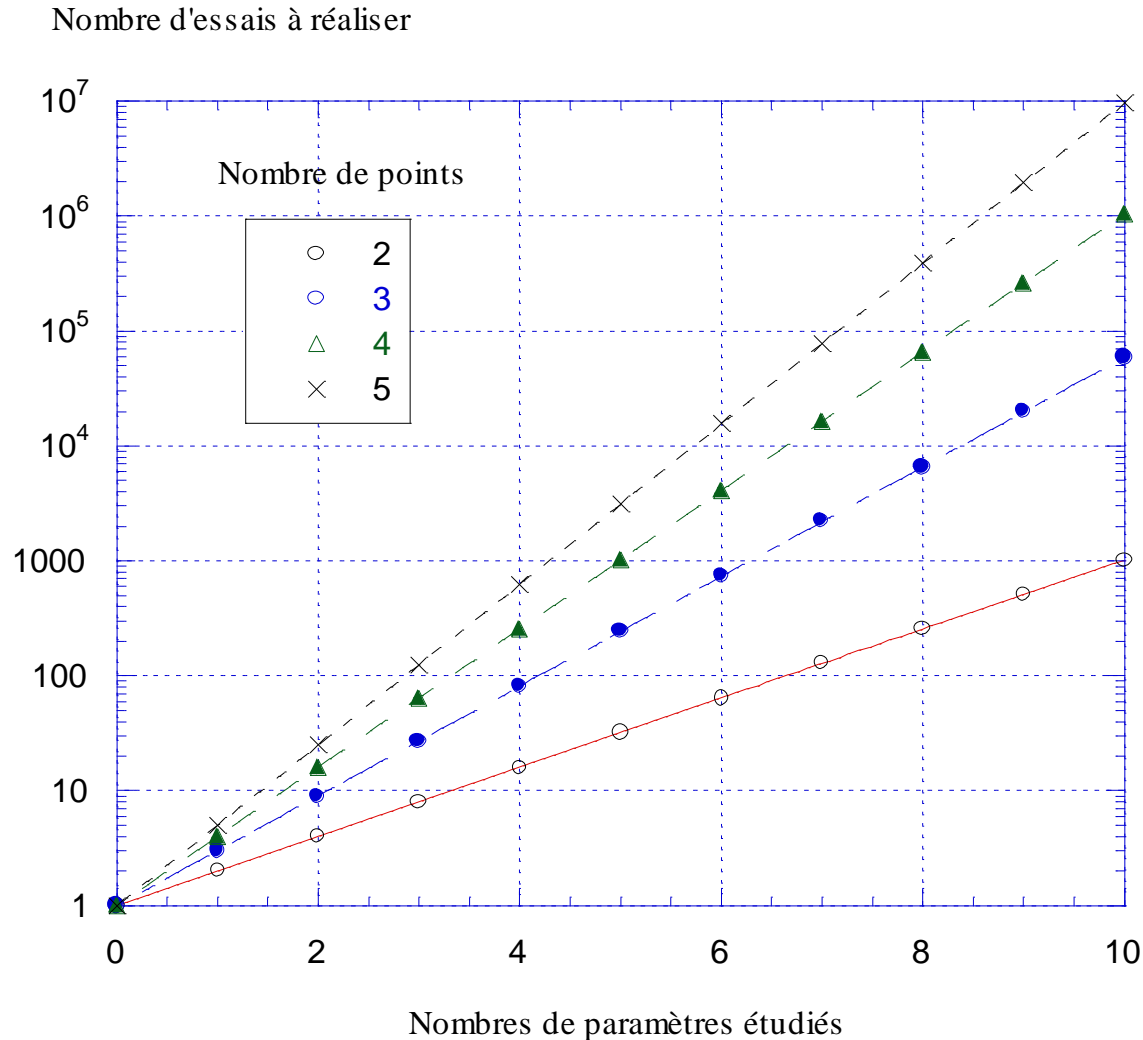
Modèles de connaissance	Modèles de comportement
Phénoménologiques Physiques Théoriques Déductifs a priori Analytiques Déterministes	Empiriques Statistiques Expérimentaux Inductifs a posteriori Boîte noire Aléatoires (stochastiques, probabilistes)

Schéma simplifié de la création et de la validation d'un modèle du type "boite noire"



L'analyse dimensionnelle

Evolution du nombre d'essais à réaliser en fonction du nombre de variables influentes étudiées et du nombre de niveaux par variable

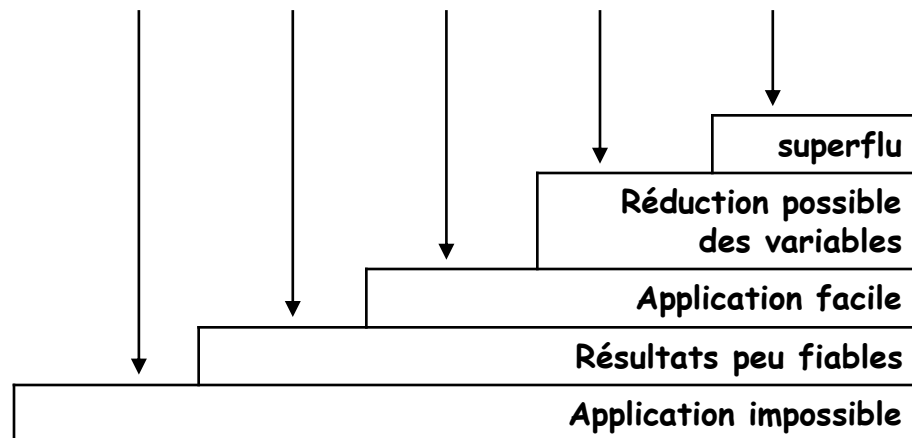


Intérêt de l'analyse dimensionnelle :

- Réduction du nombre de paramètres
- Changement d'échelle par notion de similitude
- Compréhension de phénomènes physiques
- Flexibilité dans le choix des variables

Domaines d'applications potentielles de l'analyse dimensionnelle en fonction des connaissances préalable sur le système étudié

Connaissances disponibles	1	2	3	4	5
Bases physiques du procédé		X	X	X	X
Liste des paramètres			X	X	X
Expression mathématique				X	X
Solution mathématique					X



Notions de grandeurs physiques

Notions d'unités

La normalisation

ISO	:	International Organization for Standardization, Genève, Suisse
AFNOR	:	Association Française de Normalisation, Paris, France
IEEE	:	Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc
ASTM	:	American Standard Testing Material
CSA	:	Canadian Standard Association
ACNOR	:	Association Canadienne de Normalisation, Ontario, Canada

Le Système International d'Unités (SI)

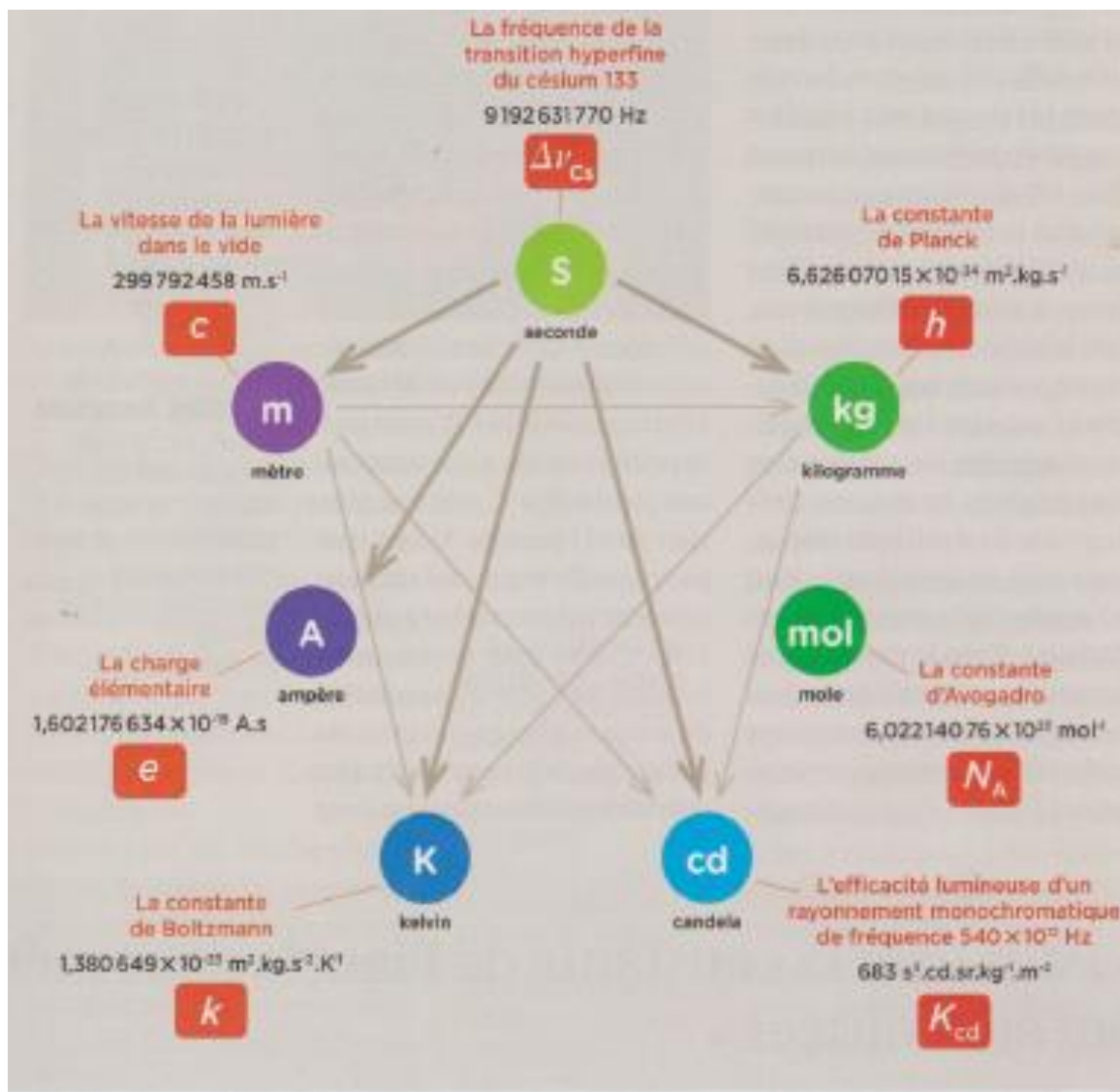
Exemple du mètre

4 août 1789	Abolition du privilège d'étalonnage royal (800 unités de longueur dans le royaume de France et de Navarre)
19 mars 1791	1 unité de longueur prise dans la nature
20 mai 1875	Convention du mètre (mètre étalon) le bureau international des poids et mesure (BIPM)
1960	6 unités de base m, kg, s, A, K, Cd
1971	6 + 1 unités de base m, kg, s, A, K, Cd + mol
2018	6 + 1 unités de base reliées à des constantes universelles

Paramètres et unités de base dans le système international d'unités

Nom	Nom et symbole en SI	Symbole	Dimension
Longueur	mètre (m)	l	L
Masse	kilogramme (kg)	m	M
Temps	seconde (s)	t	T
Intensité du courant	ampère (A)	I	I
Température thermodynamique	kelvin (K)	T	θ
Quantité de matière	mole (mol)	n	N
Intensité lumineuse	candela (cd)	I	J

Sept constantes pour construire le nouveau système



La Recherche, 2018,
n° 541 p 65

Paramètres et unités complémentaires dans le système international d'unités

Nom	Symbole en SI	Symbole	Dimension	Définition
Radian	rad	a	A	Angle plat
Stéradian	sr	W	W	Angle solide

Grandeur	Nom	Symbole	Expression en d'autres unités	Expression en unités SI de base
Fréquence	hertz	Hz		s^{-1}
Force	newton	N		$m\ kg\ s^{-2}$
Pression	pascal	Pa	N/m^2	$m^{-1}\ kg\ s^{-2}$
Energie, travail, quantité de chaleur	joule	J	$N\ m$	$m^2\ kg\ s^{-2}$
Puissance, flux d'énergie	watt	W	J/s	$m^2\ kg\ s^{-3}$
Quantité d'électricité, Charge électrique	coulomb	C		$s\ A$
Potentiel électrique, Tension électrique, Force électromotrice	volt	V	W/A	$m^2\ kg\ s^{-3}A^{-1}$
Capacité électrique	farad	F	C/V	$m^{-2}\ kg^{-1}\ s^4A^2$
Résistance électrique	ohm	Ω	V/A	$m^2\ kg\ s^{-3}A^{-2}$
Conductance	siemens	S	A/V	$m^{-2}\ kg^{-1}\ s^3A^2$
Flux d'induction magnétique	weber	Wb	$V\ s$	$m^2\ kg\ s^{-2}A^{-1}$
Induction magnétique	tesla	T	Wb/m^2	$kg\ s^{-2}A^{-1}$
Inductance	henry	H	Wb/A	$m^2\ kg\ s^{-2}A^{-2}$
Température	degré celsius	$^{\circ}C$		K
Flux lumineux	lumen	lm		cd sr
Eclairement lumineux	lux	lx	lm/m^2	$m^{-2}\ cd\ sr$
Activité ionisants) (rayonnement	becquerel	Bq		s^{-1}
Dose absorbée, énergie communiquée massique, indice de dose absorbée, kerma,	gray	Gy	J/kg	$m^2\ s^{-2}$
Equivalent de dose	sievert	Sv	J/kg	$m^2\ s^{-2}$

Facteur multiplicatif	Préfixe	Symbole
10^{24}	yotta	Y
10^{21}	zetta	Z
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	téra	T
10^9	giga	G
10^6	méga	M
10^3	kilo	k
10^2	hecto	h
10	déca	da
1		
10^{-1}	déci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y

	Unité anglo - saxonne	Unité SI ou usuelle
Longueur	1 mil nautique	1,852 km
	1 mil (mi)	1,609 km
	1 yard (yr)	0,9144 m
	1 foot (ft)	0,3048 m
	1 inch (in)	2,54 cm
Surface	1 acre	0,4046 ha
	1 square yard (yd ²)	0,8361 m ²
	1 square foot (ft ²)	0,0929 m ²
	1 square inch (in ²)	64,516 mm ²
Volume	1 cubic yard (yd ³)	0,7645 m ³
	1 barrel (bbl)	158, 987 L
	1 cubic foot (ft ³)	0,0283 m ³ = 28,3 L
	1 UK gallon (UK gal)	4,546 L
	1 US gallon (US gal)	3,785 L
	1 UK fluid ounce (UK fl oz)	28,41 cm ³
	1 US fluid ounce (US fl oz)	29,57 cm ³
	1 cubic inch (in ³)	16,387 cm ³
Masse	1 UK ton	1016 kg
	1 US ton	907 kg
	1 pound (lb ou lbm)	0,453 kg
	1 ounce (oz troy)	31,10 g
	1 ounce (oz av)	28,34 g
	1 gramme (gr)	64,79 mg
Température	1 degré Farenheint (°F)	$\frac{5}{9} (°F + 32) = °C$
Energie - travail	1 British thermal unit (Btu)	1,055 kJ
		0,293 Wh
Consommation d'essence	1 erg	1 J
	1 mi/US gal	0,425 km/L 235,2 L/100 km

Changement de système d'unités

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_1 \left(\frac{U_1}{U_2} \right) = \mathbf{k} \mathbf{g}_1$$

$$L_2 = k_L L_1$$

$$M_2 = k_M M_1$$

$$T_2 = k_T T_1$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_L^\alpha \mathbf{k}_M^\beta \mathbf{k}_T^\gamma$$

$$[\mathbf{G}] = [\mathbf{L}^\alpha \mathbf{M}^\beta \mathbf{T}^\gamma \dots]$$

Grandeur	Symbole	Dimensions	Unités SI
Mécanique			
longueur	l	L	m
masse	m	M	kg
temps	t	T	s
vitesse	v	LT^{-1}	$m\ s^{-1}$
accélération	a	LT^{-2}	$m\ s^{-2}$
vitesse angulaire	ω	αT^{-1}	$rd\ s^{-1}$
accélération angulaire	α	αT^{-2}	$rd\ s^{-2}$
fréquence	ν	T^{-1}	s^{-1}
période	T	T	s
force	F	MLT^{-2}	$kg\ m\ s^{-2}$
masse volumique	ρ	ML^{-3}	$kg\ m^{-3}$
énergie	E	ML^2T^{-2}	$kg\ m^2\ s^{-2}$
travail	W	ML^2T^{-2}	$kg\ m^2\ s^{-2}$
puissance	P	ML^2T^{-3}	$kg\ m^2\ s^{-3}$
moment d'une force	M	ML^2T^{-2}	$kg\ m^2\ s^{-2}$
moment d'inertie de masse	I	ML^2	$kg\ m^2$
quantité de mouvement	p	MLT^{-1}	$kg\ m\ s^{-1}$
moment cinétique	L	ML^2T^{-1}	$kg\ m^2\ s^{-1}$
pression	p	$ML^{-1}T^{-2}$	$kg\ m^{-1}s^{-2}\ (Pa)$
module d'élasticité	E	$ML^{-1}T^{-2}$	$kg\ m^{-1}s^{-2}$
viscosité dynamique	μ	$ML^{-1}T^{-1}$	$kg\ m^{-1}s^{-1}\ (Pa)$
viscosité cinématique	ν	L^2T^{-1}	$m^2\ s^{-1}$
tension superficielle	σ	MT^{-2}	$kg\ s^{-2}$
débit massique	Q_m	MT^{-1}	$kg\ s^{-1}$
débit volumique	Q_v	L^3T^{-1}	$m^3\ s^{-1}$
angle	α	α	rd
dilatation linéique relative	ε	$-$	$-$
dilatation volumique relative	θ	$-$	$-$
coefficient de Poisson	μ	$-$	$-$
aire	A	L^2	m^2
volume	V	L^3	m^3
Thermodynamique			
température thermodynamique	T	θ	K
quantité de chaleur, entropie, enthalpie	Q, S, H	ML^2T^{-2}	$kg\ m^2\ s^{-2}\ (J)$
capacité thermique massique	C	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	$J\ kg^{-1}K^{-1}$
coefficient de dilatation	α	θ^{-1}	K^{-1}
conductivité thermique	λ	$LMT^{-3}\theta^{-1}$	$W\ m^{-1}K^{-1}$
coefficient de convection thermique	h_c	$MT^{-3}\theta^{-1}$	$W\ m^{-2}K^{-1}$
flux thermique	Φ	$ML^{-2}T^{-3}$	$J\ s^{-1}$
coefficient de rayonnement thermique	h_r	$MT^{-3}\theta^{-1}$	$W\ m^{-2}K^{-1}$
densité de flux thermique	φ	MT^{-3}	$W\ m^{-2}$
constante molaire des gaz	R	$ML^2T^{-2}\theta^{-1}$	$J\ mol^{-1}K^{-1}$

Grandeur	Symbole	Dimensions	Unités SI
Électricité			
courant électrique	I	I	A
densité de courant	J	$L^{-2}I$	$A\ m^{-2}$
charge électrique	Q	TI	Cb
potentiel	V	$ML^2T^{-3}I^{-1}$	V
champ électrique	E	$MLT^{-3}I^{-1}$	$V\ m^{-1}$
résistance	R	$ML^2T^{-3}I^{-2}$	Ω
conductance électrique	G	$M^{-1}L^{-2}T^3I^2$	S
capacité électrique	C	$M^{-1}L^{-2}T^4I^2$	F
puissance électrique	P	ML^2T^{-3}	W
induction électrique	D	$L^{-2}TI$	$Cb\ m^{-2}$
moment du dipôle électrique	p	$LT I$	$Cb\ m$
résistivité	ρ	$ML^3T^{-3}I^{-2}$	$\Omega\ m$
conductivité	γ	$M^{-1}L^{-3}T^3I^2$	$\Omega^{-1}\ m^{-1}$
Magnétisme			
flux magnétique	Φ	$ML^2T^{-2}I^{-1}$	Wb
induction magnétique	B	$MT^{-2}I^{-1}$	T
champ magnétique	H	$L^{-1}I$	$A\ m^{-1}$
différence de potentiel magnétique	U_m	I	A
perméabilité magnétique	μ	$MLT^{-2}I^{-2}$	$H\ m^{-1}$
inductance propre	L	$ML^2T^{-2}I^{-2}$	H
moment magnétique	m	$ML^3T^{-2}I^{-1}$	$Nm^2\ A^{-1}$ ou $Wb\ m$
polarisation magnétique	B_i	$MT^{-2}I^{-1}$	T
Optique			
flux lumineux	Φ	Ω	Lm
intensité lumineuse	I	J	cd
éclairage lumineux	I	$L^{-2}J$	lx
existence lumineuse	M	$L^{-2}J$	$cd\ m^{-2}$
luminance	L	$L^{-2}J$	$cd\ m^{-2}$
vergence des systèmes optiques		L^{-1}	m^{-1}
quantité de lumière	Q	TJ	cd s
Physique corpusculaire - Radioactivité			
charge élémentaire	e	TI	Cb (eV)
énergie de désintégration	Q	ML^2T^{-2}	J
activité	A	T^{-1}	s^{-1}
densité de courant de particule	J	$L^{-2}T^{-1}$	$A\ m^{-2}$

L'analyse dimensionnelle

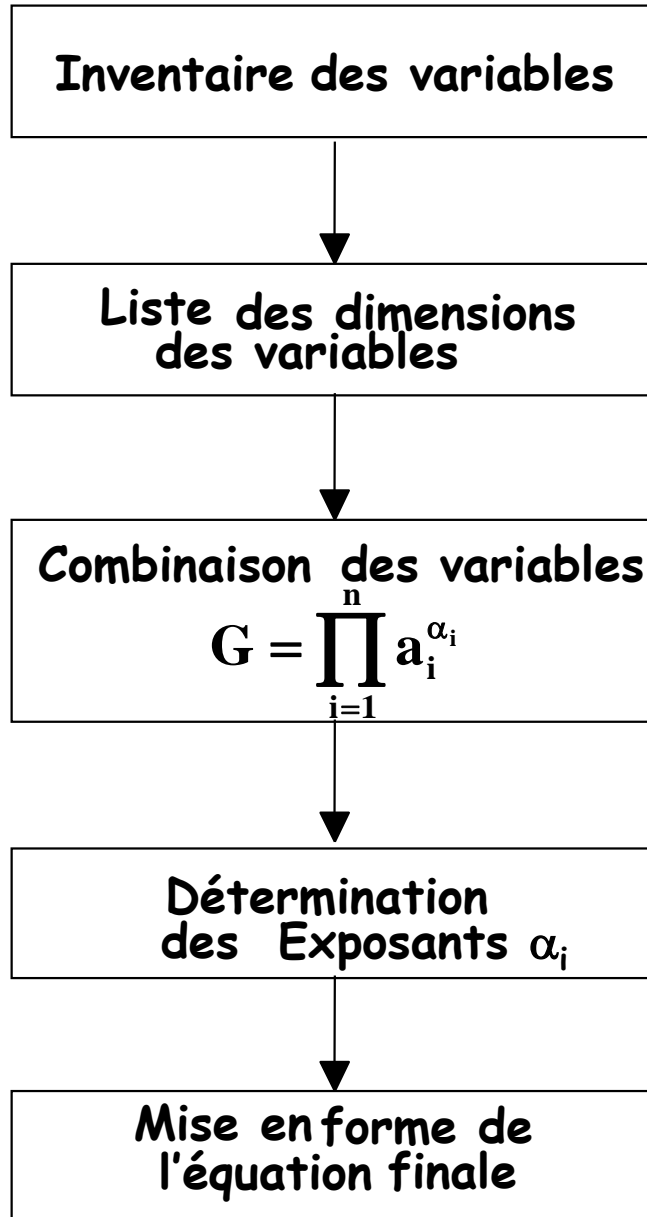
- ✓ Obtention de lois physiques
- ✓ Génération de nombres sans dimension

Génération de lois physiques

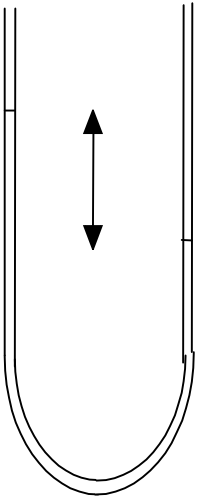
Méthode de Rayleigh

$$G = k a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \dots$$

$$G = k \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i}$$



Exemple : le tube en U



Variable	Symbole	Dimension
Amplitude de la colonne de liquide	l	L
Masse volumique du fluide	ρ	ML^{-3}
Accélération de la pesanteur	g	LT^{-2}
Période d'oscillation	T	T

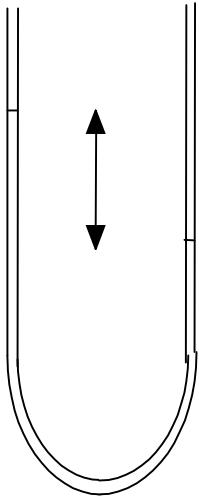
$$G = k \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i}$$

$$T = kl^{\alpha} g^{\beta} \rho^{\gamma}$$

$$T = kL^{\alpha} L^{\beta} T^{-2\beta} M^{\gamma} L^{-3\gamma}$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta - 3\gamma \\ 0 = \gamma \\ 1 = -2\beta \end{cases}$$

Exemple : le tube en U



Variable	Symbole	Dimension
Amplitude de la colonne de liquide	l	L
Masse volumique du fluide	ρ	ML^{-3}
Accélération de la pesanteur	g	LT^{-2}
Période d'oscillation	T	T

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta - 3\gamma \\ 0 = \gamma \\ 1 = -2\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} & \beta = -\frac{1}{2} & \gamma = 0 \end{cases}$$

$$T = k \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Par expérience on obtient
 $k = \pi$

$$T = \pi \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

Génération de lois physiques La méthode de Rayleigh

Critique de la méthode

L'analyse dimensionnelle

Génération de nombres sans dimension

Théorème Π de Vaschy - Buckingham

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-p}) = 0$$

1. Faire l'inventaire des paramètres indépendants influant sur le phénomène étudié (n).
2. Ecrire les dimensions de cet ensemble de variables.
3. Définir un nombre p de grandeurs primaires, p correspond au nombre de grandeurs fondamentales
4. Calculer le nombre de groupements sans dimension : $n-p$.
5. Combiner une variable indépendante en relation adimensionnelle d'un produit avec les p grandeurs primaires sous la forme suivante :

$$\Pi_i = \frac{X_i}{\prod_{j=1}^p a_j^{\alpha_j}} \quad i \in [1, p] \text{ et } j \in [p, n-p]$$

avec

Π_i	:	nombre adimensionnel
x_i	:	variable indépendante
a_j	:	grandeur primaire
α_i	:	exposant

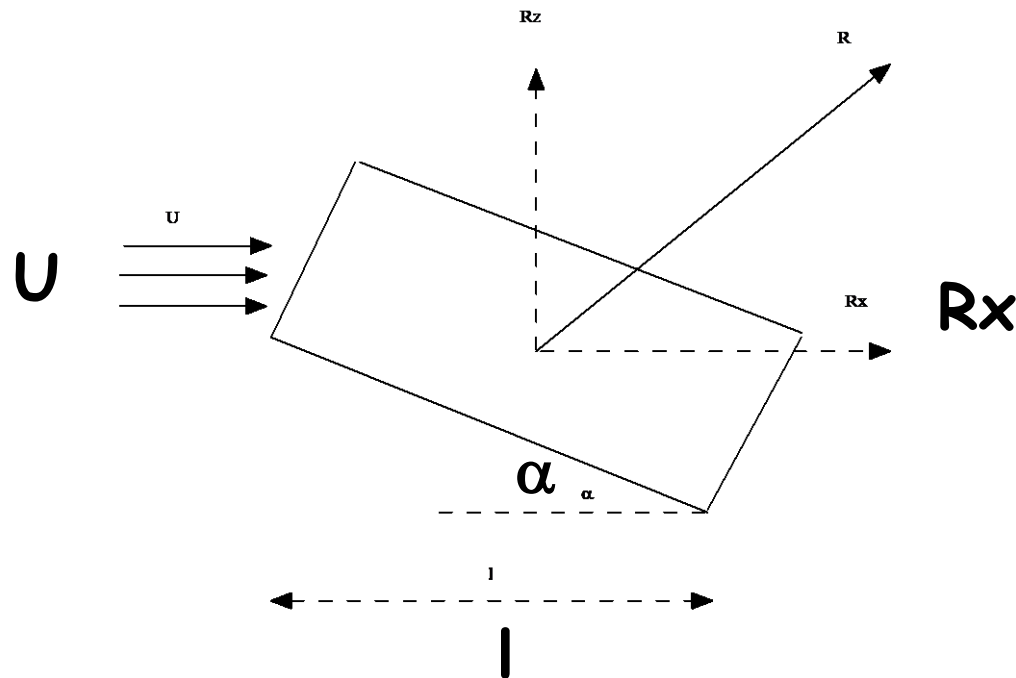
6. Résoudre l'équation précédente et déterminer les différents a_i .
7. Présenter explicitement chaque nombre sans dimension.

Théorème Π de Vaschy - Buckingham

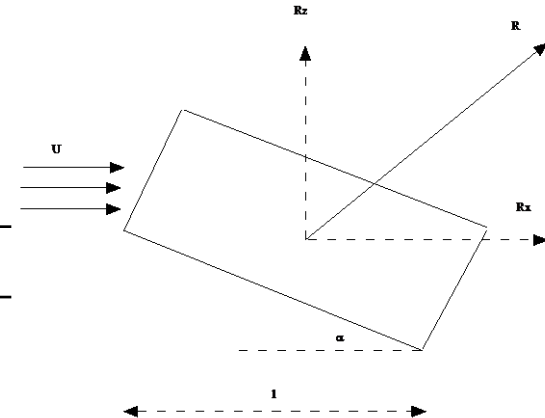
$$F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-p}) = 0$$

$$\Pi_i = \frac{X_i}{\prod_{j=1}^p a_j^{\alpha_j}}$$

Exemple : un corps dans un écoulement permanent Fluide réel



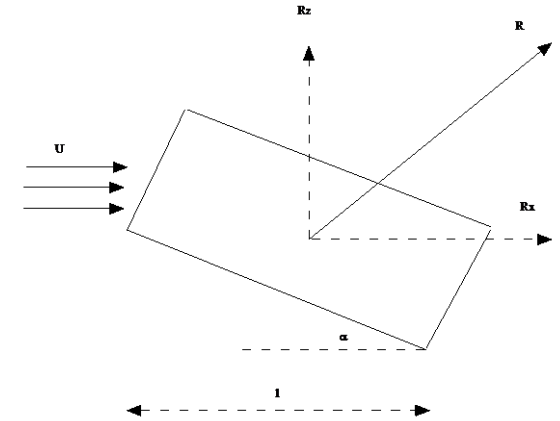
Exemple : un corps dans un écoulement permanent



Variable	Symbole	Dimension
Longueur du corps	l	L
Vitesse de l'écoulement	U	LT^{-1}
Masse volumique du fluide	ρ	ML^{-3}
Viscosité dynamique	μ	$ML^{-1}T^{-1}$
Accélération de la pesanteur	g	LT^{-2}
Vitesse locale du son dans le fluide	c	LT^{-1}
Angle incident (angle entre la composante de la vitesse et l'axe du corps)	α	-
Traînée du corps	R_x	MLT^{-2}

Exemple : un corps dans un écoulement permanent

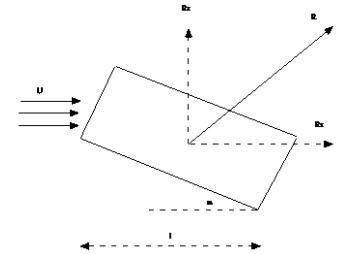
$$\Pi_i = \frac{X_i}{\prod_{j=1}^p a_j^{\alpha_j}}$$



$$\Pi_i = \frac{X_i}{l^\alpha \rho^\beta U^\gamma}$$

Exemple : un corps dans un écoulement permanent

$$\Pi_i = \frac{x_i}{l^\alpha \rho^\beta U^\gamma}$$



$$\Pi_1 = \frac{\mu}{l \rho U} = \frac{1}{\text{Re}}$$

Re : nombre de Reynolds

$$\Pi_2 = \frac{lg}{U^2} = \frac{1}{\text{Fr}^2}$$

Fr : nombre de Froude

$$\Pi_3 = \frac{c}{U} = \frac{1}{M}$$

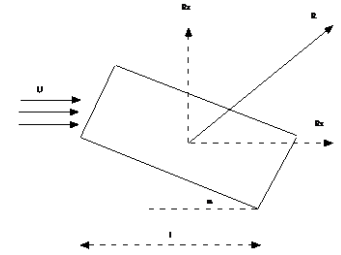
M : nombre de Mach

$$\Pi_4 = \alpha$$

$$\Pi_5 = \frac{R_x}{l^2 \rho U^2} = C_x$$

C_x : coefficient de traînée

Exemple : un corps dans un écoulement permanent



$$\mathbf{R}_x = k \rho l^2 U^2 \left(\frac{l \rho}{\mu} \right)^{-x} \left(\frac{U^2}{l g} \right)^{-y} \left(\frac{U}{c} \right)^{-z} \alpha$$

Quelques nombres sans dimension

Nom	Symbole	Définition	Signification	Domaine d'utilisation	Origine du nom
Archimède	Ar	$\frac{gL^3 \rho(\rho_p - \rho)}{\pi^2}$	Force d'inertie-force d'Archimède (Force visqueuse) ²	Sédimentation	Archimède de Syracuse (287-212 av JC)
Arrhenius	–	$\frac{E_a}{RT}$	Énergie d'activation Énergie potentielle du fluide	Vitesse de réaction	Svante August Arrhenius (Suédois, 1859-1927)
Bingham	Bm	$\frac{\tau L}{\mu_\infty U}$	Contrainte seuil Contrainte visqueuse	Rhéologie	
Bingham Reynolds	Re_b	$\frac{LU_p}{\mu_\infty}$	Force d'inertie Force visqueuse	Rhéologie	
Biot (transfert de chaleur) (voir Nusselt)	Bi_h	$\frac{hL}{k}$	Contrainte seuil Contrainte visqueuse	Transfert de chaleur instationnaire	Jean-Baptiste Biot (Français, 1774-1862)
Biot (transfert de masse)	Bi_m	$\frac{k_c L}{D_{int}}$	Résistance interne thermique Résistance de surface de film	Transfert de masse fluide-solide	
Blake	B	$\frac{U_p}{\mu(1-\epsilon)S}$	Force d'inertie Force visqueuse	Lits de solides	
Bond	Bo	$\frac{gL^2(\rho_l - \rho_g)}{\sigma}$	Force de gravitation Tension de surface	Atomisation Bulles, gouttes	
Boussinesq (voir aussi Froude)	B	$\frac{U}{(2gRe)^{1/2}}$	Force d'inertie (Force gravitationnelle) ^{1/2}	Écoulement dans un chenal	Joseph Boussinesq (Français, 1842-1929)
Capillarité	Ca	$\frac{\mu U}{\sigma}$	Force visqueuse Tension de surface	Écoulement de surface ou de 2 phases fluides	
Carnot	Ca	$\frac{T_2 - T_1}{T_2}$	Rendement théorique de cycles de Carnot opérant entre T_1 et T_2		Nicolas Léonard Sadi Carnot (Français, 1796-1832)
Cauchy (voir aussi Hook)	C	$\frac{\rho U^2}{E_b}$	Force d'inertie Force de compressibilité	Fluide compressible	Augustin Louis Cauchy (Français, 1789-1851)
Cavitation	σ	$\frac{P - P_v}{\rho \frac{U^2}{2}}$	Écart de pression Charge dynamique	Cavitation	

Quelques nombres sans dimension

Nom	Symbole	Définition	Signification	Domaine d'utilisation	Origine du nom
Clausius	Cl	$\frac{U^3 L_p}{k \Delta T}$		Conduction de chaleur dans un écoulement forcé	Rudolph Julius Clausius (Allemand, 1822-1888)
Damköler (groupe I)	$Da I$	$\frac{\tau L}{U}$	$\frac{\text{Vitesse de réaction chimique}}{\text{Vitesse du flux}}$	Réaction chimique transferts	
Damköler (groupe II)	$Da II$	$\frac{\tau L^2}{D}$	$\frac{\text{Vitesse de réaction chimique}}{\text{Diffusion moléculaire}}$	Réaction chimique transferts	
Damköler (groupe III)	$Da III$	$\frac{q \tau L}{C_p \rho U t}$	$\frac{\text{Chaleur libérée}}{\text{Chaleur transportée}}$	Réaction chimique transferts	
Damköler (groupe IV)	$Da IV$	$\frac{q U L^2}{k t}$	$\frac{\text{Chaleur libérée}}{\text{Transfert de chaleur conductif}}$	Réaction chimique transferts	
Dean	D_e	$\frac{Re}{(D_c/D)^{1/2}}$	Reynolds . $\frac{\text{Force d'inertie}}{\text{Force centrifuge}}$	Écoulement dans des canaux curvilignes	
Deborah	De	$\frac{\theta_r}{\theta}$	$\frac{\text{Temps de relaxation du fluide}}{\text{Temps d'écoulement}}$	Fluide viscoélastique	
Coefficient de traînée	C_x	$\frac{\Delta \rho L g}{\rho U^2}$	$\frac{\text{Force de gravité}}{\text{Force d'inertie}}$	Écoulement autour d'objets, décantation	
Élasticité	El	$\frac{\lambda \mu}{\rho L^2}$	$\frac{\text{Force d'élasticité}}{\text{Force d'inertie}}$	Fluide viscoélastique	
Euler	Eu	$\frac{\Delta P}{\rho U^2}$	$\frac{\text{Perte de charge par friction}}{\text{Pression dynamique}}$	Friction de fluide dans une conduite	Leonhard Euler (Suisse, 1707-1783)
Facteur de friction	f	$\frac{D \Delta P}{2 \rho U^2 L}$	$\frac{\text{Contrainte de paroi}}{\text{Pression dynamique}}$	Friction de fluide dans une conduite	
Froude (voir Boussinesq)	Fr	$\frac{U^2}{gL}$ ou $\frac{U}{\sqrt{gL}}$	$\frac{\text{Force d'inertie}}{\text{Force gravitationnelle}}$	Écoulement en système ouvert	
Galilée	Ga	$\frac{L^3 g \rho^2}{\mu^2}$	Reynolds . $\frac{\text{Force de gravité}}{\text{Force d'inertie}}$	Circulation de fluide visqueux	Galileo Galilei (Italien, 1564-1642)

Quelques nombres sans dimension

(d'après Sherwood, 1950 et de Perry et Green, 1997)

Nom	Symbole	Définition	Signification	Domaine d'utilisation	Origine du nom
Grashof	Gr	$\frac{L^3 \rho \beta \Delta T}{\mu^2}$	Reynolds . $\frac{\text{Force d'archimède}}{\text{Force visqueuse}}$	Convection libre	
Hedstrom	He	$Bm Re_b$	Bingham x Bingham Reynolds	Rhéologie	
Hodgson	H	$\frac{U' \omega \Delta P}{qP}$	Constante de temps du système Temps de pulsation	Écoulement de gaz pulsé	
Knudsen	Kn	$\frac{\lambda}{L}$	Libre parcours moyen Dimension caractéristique	Écoulement Sous vide	
Mach	M	$\frac{U}{c}$	Vitesse du fluide Vitesse du son	Écoulement de fluide compressible	
Newton	Ne	$\frac{Fr}{\rho U^2 L^2}$	Force de résistance Force d'inertie	Friction dans un écoulement de fluide	
Nusselt (voir aussi Bingham)	Nu	$\frac{hL}{k}$	Résistance interne thermique Résistance de surface de film	Convection forcée	Ernst Kraft Nusselt (Allemand, 1882-1957)
Ohnesorge	Z	$\frac{\mu}{(\rho L \sigma)^{1/2}}$	Force visqueuse (force d'inertie.tension de surface) ^{1/2}	Atomisation	
Peclet	Pe	$\frac{LU}{D}$	Transport convectif Transport diffusif	Transfert de masse, chaleur, mélange	
Puissance	Po	$\frac{P}{\rho N^3 L^5}$	Force de traînée Force d'inertie	Agitation	
Prandtl	Pr	$\frac{C_p \mu}{k}$	Diffusivité du moment Diffusivité thermique	Convection libre et forcée	
Reynolds	Re	$\frac{LU \rho}{\mu}$	Force d'inertie Force visqueuse	Régime de turbulence dans un écoulement	Osborne Reynolds (Anglais, 1842-1912)
Schmidt	Sc	$\frac{\mu}{\rho D}$	Viscosité cinématique Diffusivité	Transfert de masse	
Sherwood	Sh	$\frac{kL}{D}$	Diffusivité massique Diffusivité moléculaire	Transfert de masse	Thomas K. Sherwood (Américain)
Weber	We	$\frac{\rho U^2 L}{\sigma}$	Force d'inertie Tension de surface	Formation de bulles, agitation	

Similitude

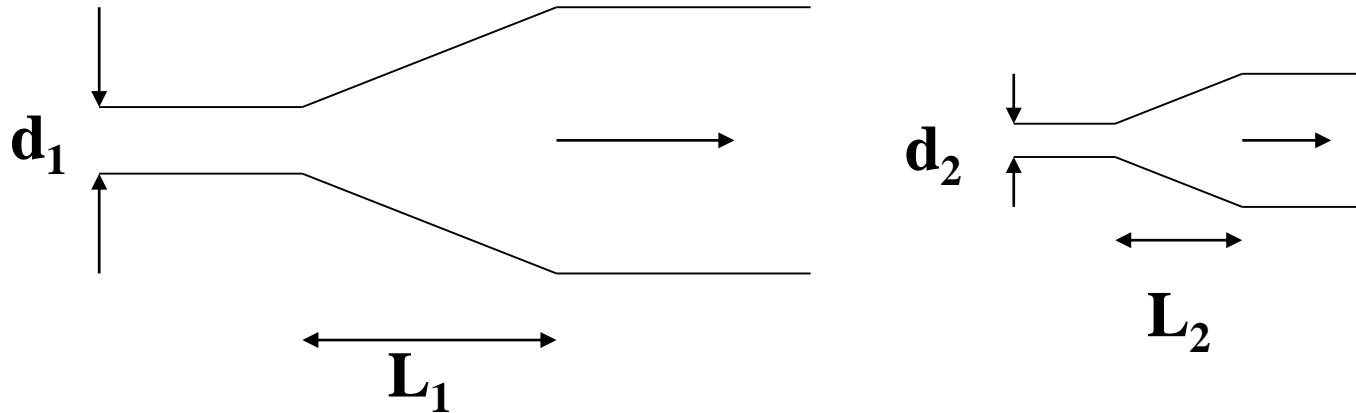
Changement d'échelle

Similitude géométrique

$$\frac{D_{i1}}{D_{i2}} = \text{constante}$$

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{L_1}{L_2} = \text{constante}$$

Similitude - Exemple



Paramètre	Maquette	Prototype
L_i (m)	0,3	3
d_i (m)	0,05	0,5
U (m/s)	-	2
DP (Pa)	$0,2 \cdot 10^5$?

La perte de charge dans le diffuseur est fonction de 4 paramètres soit :

$$f(\Delta P, d, \rho, \mu, U) = 0$$

En utilisant le théorème P, on obtient :

$$\frac{\Delta P}{\rho U^2} = f\left(\frac{dU\rho}{\mu}\right)$$

La similitude entre la maquette et le prototype être assurée en gardant la même valeur pour le nombre de Reynolds soit :

$$\frac{d_1 U_1 \rho_1}{\mu_1} = \frac{d_2 U_2 \rho_2}{\mu_2}$$

En supposant que l'on utilise le même fluide dans les deux installations, on doit faire fonctionner la maquette à une vitesse donnée par la relation :

$$U_2 = \frac{d_1}{d_2} U_1$$

Sachant que la vitesse nominale dans le prototype est de $U_1 = 2 \text{ m/s}$, la vitesse dans la maquette est de $U_2 = 20 \text{ m/s}$.

Les coefficients de pression dans les deux systèmes étant identiques on a :

$$\frac{\Delta P_1}{\rho_1 U_1^2} = \frac{\Delta P_2}{\rho_2 U_2^2}$$

Cette relation permet d'accéder à la perte de charge dans le diffuseur échelle 1 soit :

$$\Delta P_1 = \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 \Delta P_2 \quad \text{L'application numérique donne} \quad \Delta P_1 = 0,002.10^5 \text{ Pa}$$

Limites de la similitude

- Similitude géométrique : exemple rugosité...
- Difficultés à avoir la similitude entre tous les nombres sans dimension

$$\Pi_1 = \prod_{i=2}^n \pi_i^{\alpha_i}$$

Relations entre nombres sans dimension

Relations empiriques

Relations entre nombres sans dimension

Relations empiriques

$$\Pi_1 = \prod_{i=2}^n \Pi_i^{\alpha_i}$$

**Relations entre nombres sans dimension
Relations empiriques**

Exemples :

**Echange de chaleur
Détermination du coefficient d'échange par convection**

$$\mathbf{Nu = 0,023 Re^{0,83} Pr^{0,3}}$$

avec 4000 < Re < 60 000 et 0,6 < Pr < 3 000

$$\mathbf{Nu = \frac{hD}{K}}$$

$$\mathbf{Re = \frac{DU\rho}{\mu}}$$

$$\mathbf{Pr = \frac{C_p\mu}{K}}$$

Relations entre nombres sans dimension Relations empiriques

Exemples : Echangeur de matières

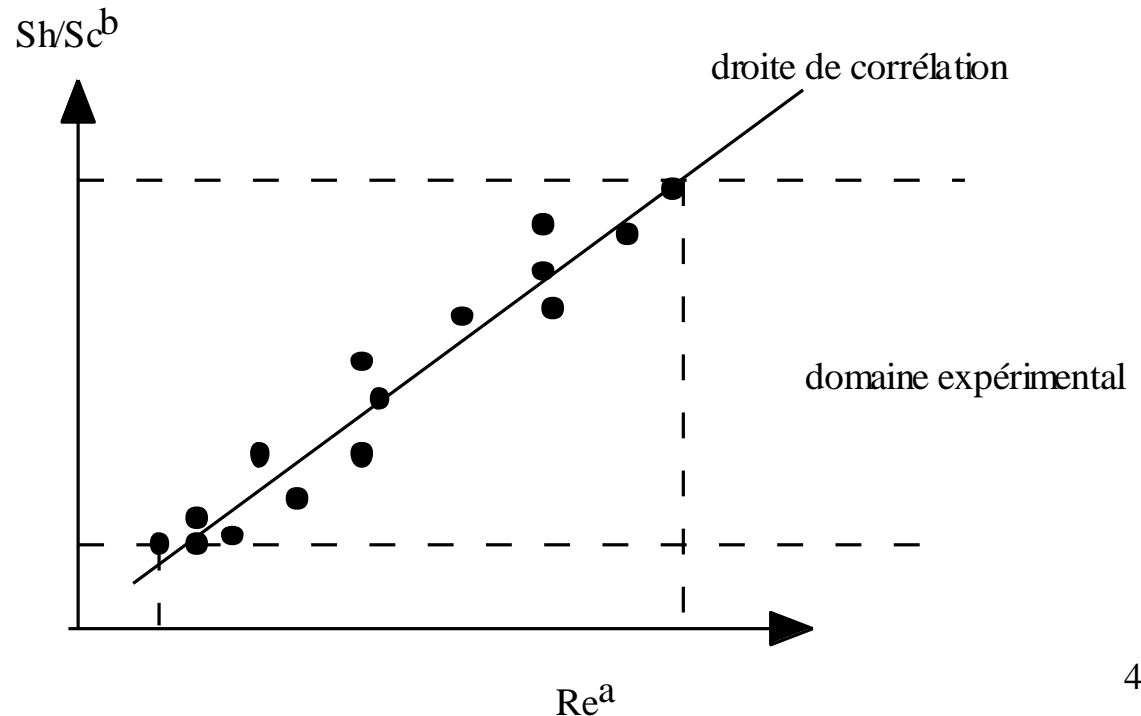
$$Sh = k Re^a Sc^b$$

pour $Re_{\min} \leq Re \leq Re_{\max}$ et $Sc_{\min} \leq Sc \leq Sc_{\max}$

$$Sh = \frac{kL}{D}$$

$$Re = \frac{LU\rho}{\mu}$$

$$Sc = \frac{\mu}{D\rho}$$



Walking (1)



Velocity
Length of leg
Weight
Gravity
Stride

U	LT
l	L
m	M
g	LT ⁻²
f	L

5 parameters
3 dimensions

$$N - p = 2$$

2 dimensionless numbers

Walking (2)

Velocity		U	LT
Length of leg		l	L
Weight		m	M
Gravity	g	LT ⁻²	
Stride	f	L	

$$\Pi_1 = f/l$$

$$\Pi_2 = U^2/lg$$

Nombre de Froude



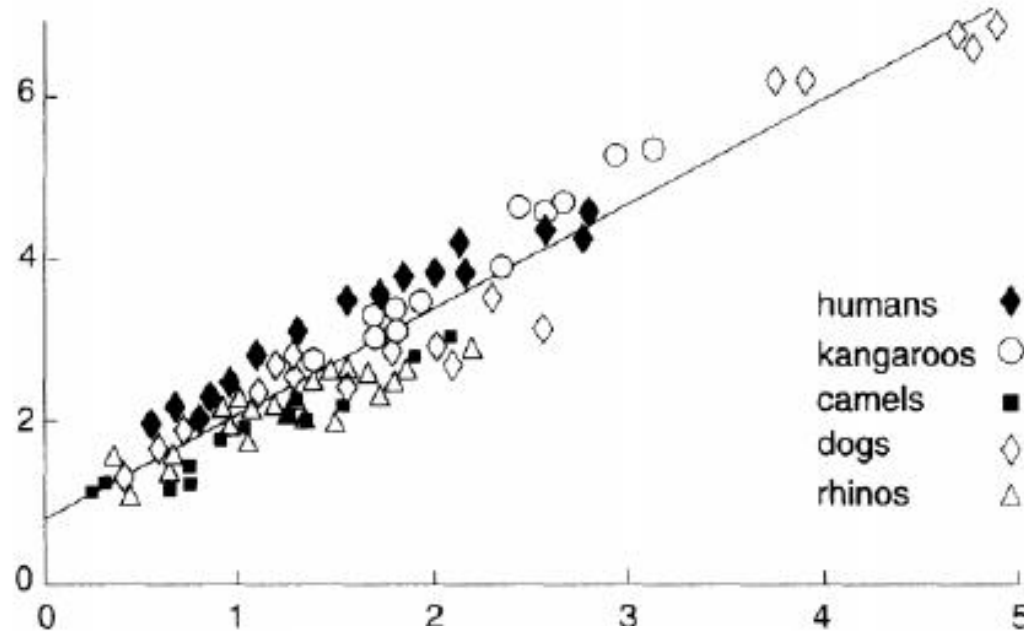
William Froude
1810 - 1869

Walking (3)

$$\Pi_1 = f/l$$

$$\Pi_2 = U^2/lg$$

$$\Pi_1 = f/l$$



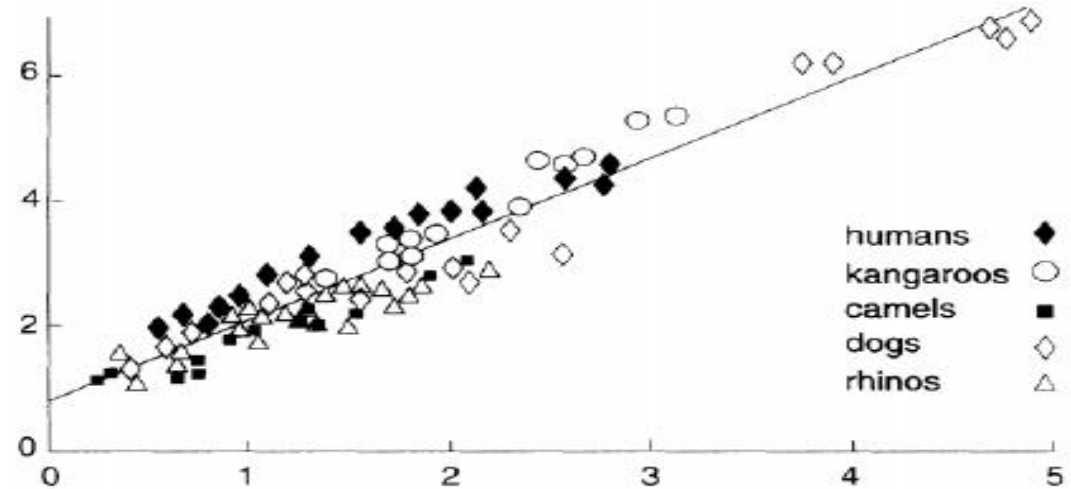
R. McNeill Alexander, Walking and Running,
The mathematical gazette, 80 (1996) 262

$$\sqrt{\Pi_2} = \sqrt{\frac{U^2}{lg}}$$

Walking(4)



$$\Pi_1 = f/l$$



$$\sqrt{\Pi_2} = \sqrt{\frac{U^2}{lg}}$$

knowing f/l , we deduce $\Pi_2 = \sqrt{\frac{U^2}{lg}}$

$$U \sim 1 \text{ m/s} \sim 3,6 \text{ km/h}$$

