第 13 章（之 2）（总第 74 次）

教学内容：§13.2 格林公式

1.选择

*(1) 设 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$负向一周，则曲线积分 （ ）

$$\oint_L (x^3-x^2y)\mathrm{d}x+(xy^2-y^3)\mathrm{d}y=$$

(A) $-\dfrac{\pi a^4}{2}$ (B) $-\pi a^4$

(C) πa^4 (D) $\dfrac{2\pi a^3}{3}$

答：(A)

**（2）设 L 是 $|y|=1-x^2$ 表示的围线的正向，则 $\oint_L \dfrac{2x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{2x^2+y^2}=$ （ ）

(A) 0. (B) 2π. (C) -2π. (D) $4\ln 2$.

答：(A)

2．求下列曲线积分：

*（1）计算曲线积分 $\oint_L y^2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$，式中 L 是由 $x^2+y^2\leqslant x, x^2+y^2\leqslant y$ 所确定的公共闭区域的正向边界（逆时针方向）.

解： 记 $O(0,0)$． $A(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$．

记 L_1 为从 $O(0,0)$沿 $x^2+y^2=y$ $(x\geqslant 0)$至 $A(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

记 L_2 为从 $A(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$沿 $x^2+y^2=x$ $(x\leqslant\frac{1}{2})$ 至 $O(0,0)$.

$$\text{原式}=\int_{L1}+\int_{L2} y^2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} y^2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^0 (x-x^2)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{48}+(-\frac{2}{48})$$

$$=-\frac{1}{48}.$$

*（2） 计算曲线积分 $\oint_L (y^2-x^2)(\mathrm{d}y-2x\mathrm{d}x)$，式中 L 是由 $y=|x|$ 及 $y=x^2-2$ 所围成的有界闭区域的正向边界.

解： 在 $y=|x|$ 上，$y^2-x^2=0$.

在 $y=x^2-2$ 上，$dy=2x\mathrm{d}x$

即 $dy-2x\mathrm{d}x=0$.

故 原式 $=\int_{y=|x|}+\int_{y=x^2-2}(y^2-x^2)(\mathrm{d}y-2x\mathrm{d}x)$

$=0+0$

$=0$.

**（3）计算曲线积分 $\oint_L |y|\mathrm{d}x+|x|\mathrm{d}y$ ，其中 L 是以 $A(1,0)$，$B(0,1)$及 $E(-1,0)$为顶点的三角形正向周界.

解：$L_1: ABOA$　　$L_2: OBEO$

$$\text{原式}=\oint_{L_1}(ydx+xdy)+\oint_{L_{21}}(ydx-xdy)$$

$$=\iint_{D_1}0d\sigma+\iint_{D_2}(-2)d\sigma=0+(-2)\times\frac{1}{2}=-1$$

3．利用曲线积分计算下列曲线所围成平面图形的面积：

**（1）用曲线积分计算由闭曲线 L 所围成的图形的面积，其中 $L:\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=b\sin^3 t\end{cases}$.

解：$A=\dfrac{1}{2}\oint_L xdy-ydx=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos^3 t\cdot 3b\sin^2 t\cos t+b\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t)dt$

$=\dfrac{3ab}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 tdt=\dfrac{3}{8}\pi ab$.

***（2）笛卡尔叶形线 $x=\dfrac{at}{1+t^3}, y=\dfrac{at^2}{1+t^3}(0\le t\le+\infty)$.

解：面积

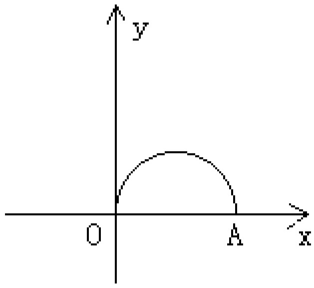
$$A=\frac{1}{2}\oint_{\partial D}xdy-ydx=\frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{2t^2-t^5}{(1+t^3)^3}-\frac{t^2-2t^5}{(1+t^3)^3}\right]dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2+t^5}{(1+t^3)^3}dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt=-\frac{a^2}{6}\frac{1}{(1+t^3)}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{a^2}{6}$$

4．在下列各题中适当补上一条曲线，使积分路径成闭曲线，再考虑用格林公式：

**（1）$\int_L(xy-\sin x\sin y)dx+(x^2+\cos x\cos y)dy$，其中 L 自 $O(0,0)$点出发，沿曲线 $y=x-x^2$ 至点 $A(1,0)$.

解：补上直线 AO：从点A（1，0）沿x轴到点O（0，0），



于是

$$\int_L + \int_{AO} = \oint_{L+AO} = -\iint_D x d\delta = -\int_0^1 x dx \int_0^{x-x^2} dy$$

$$= -\int_0^1 (x^2 - x^3) dx = -(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = -\frac{1}{12}$$

而$\int_{AO} = \int_1^0 0 dx = 0$，

$$\therefore \int_L = \oint_{L+AO} - \int_{AO} = -\frac{1}{12}.$$

***（2） 计算曲线积分 $\int_L xy^2 \mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$ ，式中L是从$O=(0,0)$沿曲线$y=\tan x$到

$A=(\frac{\pi}{4},1)$的有向弧段.

解： $\mathrm{d}y = sec^2 x \mathrm{d}x$，

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [x(sec^2 x - 1) - x \cdot sec^2 x] \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -x \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\pi^2}{32}.$$

***5. 计算曲线积分 $\int_L \frac{y\mathrm{d}x + (a\pi - x)\mathrm{d}y}{(x-\pi a)^2 + \pi^2 y^2}$ ，式中L是从原点$O=(0,0)$沿摆线

$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 到达$A=(2\pi a,0)$的一拱有向弧段(a>0).

解：$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x-\pi a)^2 - \pi^2 y^2}{[(x-\pi a)^2 + \pi^2 y^2]^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，点$(\pi a, 0)$除外.

故在不包括点$(\pi a, 0)$的单连通区域内积分与路径无关.

取L_1为曲线$\begin{cases} x = \pi(a + a\cos t) \\ y = a\sin t \end{cases}$ t从 π 到 0.

则$\int_L = \int_{L_1} = \int_\pi^0 \frac{a\sin t(-a\pi \sin t) - (a\pi \cos t \cdot a\cos t)}{a^2 \pi^2} \mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi}\int_\pi^0 \mathrm{d}t = 1.$

第 13 章 （之 3）（总第 75 次）

教学内容：§13.2 格林公式（续）

1．选择题

**（1） 曲线积分$\int_L (4x^3+2y^3)\mathrm{d}x+6xy^2\mathrm{d}y$的值 （ ）

(A) 与曲线 L 及起点、终点均有关；

(B) 与曲线 L 无关，仅与其起点及终点有关；

(C) 与曲线 L 及起点无关，仅与终点无关；

(D) 与曲线 L 及起点终点都无关.

答：（B）

**（2） 设 C 是从 A(1，1)到 B(2，3)的直线，则$\int_C (x+3y)\,\mathrm{d}\,x+(y+3x)\,\mathrm{d}\,y=$（ ）

(A) $\int_1^2[(x+2x-1)+(2x-1+3x)]\mathrm{d}x$；

(B) $\int_1^2(x+2x+1)\mathrm{d}x+\int_1^3(y+3\cdot\frac{y+1}{2})\mathrm{d}y$；

(C) $\int_1^2[(x+6x)+(2x+3x)]\mathrm{d}x$；

(D) $\int_1^2(x+3)\mathrm{d}x+\int_1^3(y+6)\mathrm{d}y$.

答：（D）.

（3）若可微函数$u(x,y)$的全微分为

$\mathrm{d}u(x,y)=(x^2+pxy-y^2)\mathrm{d}x+(3x^2+qxy+y^2)\mathrm{d}y$，则 （ ）

（A） $p=6,q=-2$； （B） $p=3,q=-1$；

（C） $p=-6,q=2$； （D） $p=-3,q=1$.

答：（A）.

**2．验证下列曲线积分的积分路径无关性，并据此而另取一特殊路径L'以计算其值：

$\int_L\frac{(1-y)dx+xdy}{(x+y-1)^2}$，其中$L$是圆周$x^2+y^2=4$在第一象限自$A=(2,0)$至$B=(0,2)$的一段圆弧.

解：$P=\frac{1-y}{(x+y-1)^2}$，$Q=\frac{x}{(x+y-1)^2}$，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-x+y-1}{(x+y-1)^3}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-x+y-1}{(x+y-1)^3}$，

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以积分在区域 $x+y>1$ 或 $x+y<1$ 内与路径无关.

$$\int_L \frac{(1-y)dx+xdy}{(x+y-1)^2}=\int_{(2,0)}^{(2,2)}+\int_{(2,2)}^{(0,2)}=\int_0^2\frac{2dy}{(y+1)^2}+\int_2^0\frac{-dx}{(x+1)^2}=2\,.$$

**3．验证：存在 $u(x,y)$ 使 $(2xe^y+y)\mathrm{d}x+(x^2e^y+x-2y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)$，并求 $u(x,y)$。

解：$\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x\mathrm{e}^y+1=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，

故要存在　$u=u(x,y)$. 使 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，

这里 $P=2x\mathrm{e}^y+y$.　$Q=x^2\mathrm{e}^y+x-2y$.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=(2x\mathrm{e}^y+y)\mathrm{d}x+(x^2\mathrm{e}^y+x-2y)\mathrm{d}y\\&=\mathrm{e}^y(2x\mathrm{d}x)+x^2(\mathrm{e}^y\mathrm{d}y)+y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}y\\&=\mathrm{d}(x^2\cdot\mathrm{e}^y)+\mathrm{d}(xy)-\mathrm{d}y^2\\&=\mathrm{d}(x^2\mathrm{e}^y+xy-y^2)\end{aligned}$$

故　$u(x,y)=x^2\mathrm{e}^y+xy-y^2+C$　（C 为任意常数）

4．试用求原函数的方法，计算下列与路径无关的曲线积分：

**（1）$\displaystyle\int_{(1,1)}^{(1,2)}(3x^2-4xy+y^2)dx-(2x^2-2xy+9y^2)dy$.

解：因为　$(3x^2-4xy+y^2)dx-(2x^2-2xy+9y^2)dy$

$$=3x^2dx-4xydx+y^2dx-2x^2dy+2xydy-9y^2dy=d(x^3-2x^2y+xy^2-3y^3)\,,$$

所以原函数　　$\varphi(x,y)=x^3-2x^2y+xy^2-3y^3$

$$\int_{(1,1)}^{(1,2)}(3x^2-4xy+y^2)dx-(2x^2-2xy+9y^2)dy$$

$$=(x^3-2x^2y+xy^2-3y^3)\Big|_{(1,1)}^{(1,2)}=(-23)-(-3)=-20\,.$$

**（2）$\displaystyle\int_{(0,2)}^{(\frac{\pi}{2},1)}(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$.

解：$(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$

$$=(2xy^3dx+3x^2y^2dy)-(y^2\cos xdx+2y\sin xdy)+dy$$

$$=d(x^2y^3dx)-d(y^2\sin x)+dy=d(x^2y^3dx-y^2\sin x+y)$$

原函数 $\varphi(x,y)=x^2y^3dx-y^2\sin x+y$

所以 原积分 $=(x^2y^3-y^2\sin x+y)\Big|_{(0,2)}^{(\frac{\pi}{2},1)}=\dfrac{\pi^2}{4}-2$

5．求下列全微分方程得通解

**（1） $(\cos y-y\sin x)dx+(\cos x-x\sin y)dy=0$；

解：$\varphi(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(\cos y-y\sin x)dx+(\cos x-x\sin y)dy$

$$=\int_0^x dx+\int_0^y(\cos x-x\sin y)dy=x+y\cos x+x\cos y-x=y\cos x+x\cos y,$$

故通解为 $y\cos x+x\cos y=C$.

**（2） $(e^y-ye^{-x}-1)dx+(e^{-x}+xe^y+1)dy=0$.

解：应用凑微分方法：

$$(e^y-ye^{-x}-1)dx+(e^{-x}+xe^y+1)dy=e^ydx-ye^{-x}dx-dx+e^{-x}dy+xe^ydy+dy$$

$$=(e^ydx+xe^ydy)+(-ye^{-x}dx+e^{-x}dy)-dx+dy$$

$$=d(e^ydx)+d(ye^{-x})-dx+dy=d(e^ydx+ye^{-x}-x+y)$$

微分形式的原函数 $\varphi(x,y)=e^ydx+ye^{-x}-x+y$

所以方程得通解： $e^ydx+ye^{-x}-x+y=C$

解二：$\varphi(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(e^y-ye^{-x}-1)dx+(e^{-x}+xe^y+1)dy$

$$=\int_0^x(1-1)dx+\int_0^y(e^{-x}+xe^y+1)dy=ye^{-x}+xe^y-x+y,$$

故通解为 $ye^{-x}+xe^y-x+y=C$.

***6. 试确定λ的值，使得 $\int_c\dfrac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda\mathrm{d}x-\dfrac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda\mathrm{d}y$ 的值与路径无关，其中 C 为与 X 轴不相交(或不相接触)；并计算

$$I=\int_{(1,1)}^{(0,2)}\frac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda\mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda\mathrm{d}y.$$

解：$P=\dfrac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda$，$Q=-\dfrac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda-1}[2\lambda y^2-(x^2+y^2)]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda-1}[-2\lambda x^2-2(x^2+y^2)]$$

由 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，推出 $2\lambda y^2-(x^2+y^2)=-2\lambda x^2-2(x^2+y^2)$，即 $\lambda=-\frac{1}{2}$

即当 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 时，曲线积分与路径无关.

$$I=\int_{(1,1)}^{(0,2)}\frac{x}{y}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,x-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_1^0\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,x-\int_1^2\frac{0^2}{y^2}(0^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,y=\sqrt{1+x^2}\Big|_1^0=1-\sqrt{2}\ .$$

**7. 试检验向量场

$$\vec{f}(x,y)=(x-y\cos x)\vec{i}-\sin x\vec{j}$$

是否为梯度场？若是，则求出函数 $\varphi(x,y)$，使 $\mathrm{grad}\varphi=\boldsymbol{f}$.

解：$\vec{f}(x,y)=(x-y\cos x)\vec{i}-\sin x\vec{j}$，

$\because \frac{\partial}{\partial y}(x-y\cos x)=-\cos x=\frac{\partial}{\partial x}(-\sin x)$，

$\therefore$是梯度场．而且

$$\varphi(x,y)=C+\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x-y\cos x)dx-\sin xdy$$

$$=C+\int_0^x xdx+\int_0^y-\sin xdy=\frac{1}{2}x^2-y\sin x+C\ .$$

****8. 求满足 $\varphi(0)=2$ 且具有一阶连续导数的函数 $\varphi(x)$，使对任一简单闭曲线 L，恒有

$$\oint_L(x^2+y\varphi(x))dx+(x^2+\varphi(x))dy=0\,.$$

解：因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\varphi(x)$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x+\varphi'(x)$，为使任一简单闭曲线 L，恒有

$$\oint_L(x^2+y\varphi(x))dx+(x^2+\varphi(x))dy=0 \quad\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\ ,\ (x,y)\in R^2$$

$\Leftrightarrow$ $\varphi(x)$ 满足方程 $\varphi'(x)-\varphi(x)=-2x$.

解得 $\varphi(x)=ce^x+2x+2$. 由 $\varphi(0)=2$，知 $c=0$，所以 $\varphi(x)=2x+2$.

第 13 章 （之 4）（总第 76 次）

教学内容：§13.3 第二型曲面积分

**1．设Σ为柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0$及$z=3$所截得的第一卦限部分的前侧，则

$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy+xdydz+ydxdz=$ （　　）

（A）$3\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\int_0^3\mathrm{d}y\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$；

（B）$2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\int_0^3\mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y$；

（C）$3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$；　　　　（D）$3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos\theta\,\mathrm{d}r$.

答：（B）

**2．计算曲面积分：$\iint\limits_S (x+y-z-1)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$为马鞍面$z=xy$上

$(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$部分，积分沿S的上侧.

解：$\iint\limits_S (x+y-z-1)^2\,dxdy$

$$=\iint\limits_D (x+y-xy-1)^2\,dxdy，\text{其中}D:(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$$

$$=\iint\limits_D (x-1)^2(y-1)^2\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^5\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\rho$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\varphi}{8}d\varphi=\frac{1}{8}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{24}\ .$$

**3．计算曲面积分：$\iint\limits_S z(x^2+y^2)(\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\mathrm{d}z)$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$

在第一、四卦限（$x\ge 0$，$z\ge 0$）的部分，积分沿S的上侧.

解：S的单位正法向为

$$\vec{n}^0=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}=\frac{1}{R}\{x,y,z\}.$$

$$\therefore\iint\limits_S z(x^2+y^2)(dydz+dxdz)=\frac{1}{R}\iint\limits_S\{z(x^2+y^2),z(x^2+y^2),0\}\{x,y,z\}dS$$

$$=\frac{1}{R}\iint\limits_S z(x^2+y^2)(x+y)dS\ .$$

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,,\quad z_x=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,,\quad z_y=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,.$$

$$\therefore dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy\,.$$

$$\therefore \text{原式}=\frac{1}{R}\iint_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\cdot\sqrt{R^2-x^2-y^2}\left(x^2+y^2\right)(x+y)dxdy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R\rho^3\cdot\rho(\cos\theta+\sin\theta)d\rho=\frac{2R^5}{5}\,.$$

**4．若 $\vec{v}=a\,i+b\,j+c\,k$，其中 a，b，c 为常数，S 为单位闭球面．试证 $\oiint_S\vec{v}\cdot d\vec{S}=0$．

解：利用第一型与第二型曲面积分的联系及 S 的方程 $x^2+y^2+z^2=1$，S 的单位正法为

$$\vec{n}^0=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}=\{x,y,z\}\,.$$

可得 $$\oiint_S\vec{v}\cdot d\vec{S}=\oiint_S\{a,b,c\}\cdot\vec{n}^0\,dS=\oiint_S(ax+by+cz)dS\,.$$

由于 ax 关于 x 为奇函数，且 S 关于 yz 坐标面对称，故 $\oiint_s axdS=0$．同理

$\oiint_S bydS=\oiint_S czdS=0$．从而有 $\oiint_S\vec{v}\cdot d\vec{S}=0$．

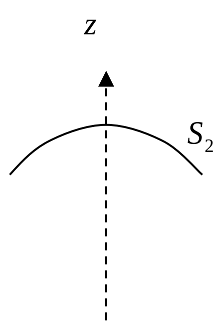
***5．计算下列闭曲面上的曲面积分（积分沿区域 Ω 之边界曲面 $\partial\Omega$ 的外侧）：

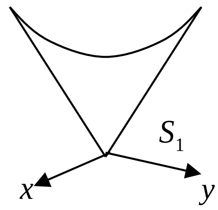
$\oiint_{\partial\Omega}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{dxdy}$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\right\}$；

解：$$\iint_{S_1}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\iint_{D_{xy}}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{e^\rho}{\rho}\rho d\rho=-(e-1)2\pi\,.$$

$$\iint_{S_2}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{e}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{e}{\rho}\rho\,d\rho=e2\pi\,.$$

$$\therefore\oiint_{\partial\Omega}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=2\pi\,.$$





***6．试用两种方法（按 13.3.3 中的化为二重积分,或先化为第一型曲面积分后再计算）计算下列曲面积分：$\iint\limits_S z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为双叶双曲面 $z^2 - x^2 - y^2 = 1$（$z \ge 1$）上 $x^2 + y^2 \le 2ax$ 部分，积分沿 S 的下侧.

解法一：$\iint\limits_S z^2 dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} \left(1 + x^2 + y^2\right) dxdy$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \left(1 + \rho^2\right) \cdot \rho d\rho = -\left(a^2 + \frac{3}{2}a^4\right)\pi \ .$$

解法二：S 的单位正法向为

$$\vec{n}^0 = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, -\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\}$$

$\therefore$ 原式 $= \iint\limits_S \frac{-z^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS$.

$$z = \sqrt{1 + x^2 + y^2} \ , \quad z_x = -\frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \ , \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \ ,$$

$$dS = \sqrt{1 + z_z^2 + z_y^2} dxdy = \frac{\sqrt{1 + 2x^2 + 2y^2}}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} dxdy \ .$$

$\therefore$ 原式 $= -\iint\limits_{D_{xy}} \frac{\left(1 + x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 + 2x^2 + 2y^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + 2x^2 + 2y^2}}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} dxdy$

$$= -\iint\limits_{D_{xy}} \left(1 + x^2 + y^2\right) dxdy = -\left(a^2 + \frac{3}{2}a^4\right)\pi \ .$$

***7．计算下列闭曲面上的曲面积分（积分沿区域 Ω 之边界曲面 $\partial\Omega$ 的外侧）：

$$\oiint\limits_{\partial\Omega} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x^3 + y^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x^3 - y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ ,$$

其中$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad 0\le z\le 1\}$；

解：在曲面$\partial\Omega$上$x=0, y=0, z=0$及$z=1$部分的S上$\iint\limits_S xzdydz=0$，所以

$$\oiint\limits_{\partial\Omega} xzdydz=\iint\limits_{D_{yz}} z\sqrt{1-y^2}dydz=\int_0^1 zdz\int_0^1\sqrt{1-y^2}dy=\frac{\pi}{8}.$$

在曲面$\partial\Omega$上$x=0, z=0$及$z=1$部分的S上$\iint\limits_S (x^3+z^3)dzdx=0$，所以

$$\oiint\limits_{\partial\Omega}(x^3+y^3)dzdx=-\iint\limits_{D_{xz}} x^3dzdx+\iint\limits_{D_{xz}}\left[x^3+(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]dzdx=\frac{3\pi}{16}.$$

在曲面$\partial\Omega$上$x=0, y=0$及$x^2+y^2=1$部分的S上$\iint\limits_S (x^3-y^3)dxdy=0$，所以

$$\oiint\limits_{\partial\Omega}(x^3-y^3)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(x^3-y^3)dxdy-\iint\limits_{D_{xy}}(x^3-y^3)dxdy=0,$$

$$\therefore\quad 原式=\frac{5\pi}{16}.$$