第 16 次作业

教学内容：§3.3.3 几点注意　　§3.3.4 $0\cdot\infty$ 型与 $\infty-\infty$ 型　　§3.3.5 1^{∞} 型，∞^{0} 型及 0^{0} 型　§3.3.6 洛必达法则在求数列极限中的应用

1．填空题

**（1）$\lim\limits_{x\to 0} x^{100}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿；

解：$+\infty$　　.

**（2）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ ，其中 a，b，c 为正的常数；

解：$\sqrt[3]{abc}$

***（3）$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(a^x+b^x+c^x\right)^{\frac{1}{x}} =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿ ，其中 a，b，c 为正的常数；

解：$\max(a,b,c)$

***（4）若 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a+x}{1+ax}\right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{-3}$，则 $a =$ ＿＿＿＿＿＿.

解：-2

2．选择题

**（1）$\lim\limits_{x\to +\infty} x\sqrt{\sin\dfrac{2}{x^2}}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（ B ）

（A）等于 0　　(B)等于 $\sqrt{2}$　　　(C)为无穷大　　（D）不存在，也不为无穷大.

***（2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x+\sin x}$ 时，下列各种解法中正确的是　　　　　　　　（ C ）

（A）因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x+\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{1+\cos x}$ 不存在，所以原极限不存在；

（B）因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x+\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x+\sin x}\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$，而其中 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，所以原极限不存在；

（C）因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x+\sin x} = 0$，而 $x\to 0$ 时（$x\neq 0$）$\sin\frac{1}{x}$ 是有界量，所以原极限为 0；

（D）因为 $x\to 0$ 时，分子是二阶无穷小，而分母是一阶无穷小，所以原极限为 0.

3．求下列极限：

***（1）$\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(1+\mathrm{e}^{ax})\ln(1+\dfrac{b}{x})$　（a, b 为常数，$a>0$）；

解法一：$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+\mathrm{e}^{ax})\ln(1+\dfrac{b}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+\mathrm{e}^{ax})\dfrac{b}{x}=b\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\mathrm{e}^{ax}}{(1+\mathrm{e}^{ax})}=b\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^2\mathrm{e}^{ax}}{a\mathrm{e}^{ax}}=ab$.

解法二：原 式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left[\mathrm{e}^{ax}(1+\mathrm{e}^{-ax})\right]\dfrac{b}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+\ln(1+e^{-ax}))\dfrac{b}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(ab+\dfrac{b\ln(1+e^{-ax})}{a})=ab+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b\ln(1+e^{-ax})}{a}=ab+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{be^{-ax}}{a}=ab$

注：解法二没有用到洛必达法则.

***（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-\csc^2\dfrac{1}{x})$；

解：原式 $\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\lim\limits_{t\to0}(\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{\sin^2 t})=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin^2 t-t^2}{t^2\sin^2 t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{1}{2}(1-\cos2t)-t^2}{t^4}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin2t-2t}{4t^3}=\lim_{t\to0}\frac{2\cos2t-2}{12t^2}=2\lim_{t\to0}\frac{-\frac{(2t)^2}{2}}{12t^2}=-\frac{1}{3}.$$

**（3）$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{\ln(1-x)}+\dfrac{1}{x})$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\ln(1-x)}{-x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{1}{1-x}}{-2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{2x(1-x)}=\dfrac{1}{2}$.

4．求下列极限：

**（1）$\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$;

解法一：$\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\exp\left[\lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{1}{x}\ln\cos\sqrt{x})\right]=\exp\left[\lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{-\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}.\dfrac{1}{2\sqrt{x}})\right]$

$$=\exp\left(-\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

解法二：$\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\exp\left[\lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{1}{x}\ln\cos\sqrt{x})\right]=\exp\left[\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+\cos\sqrt{x}-1)}{x}\right]$

$$=\exp\left[\lim_{x\to0^+}\frac{(\cos\sqrt{x}-1)}{x}\right]=\exp\left[\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{x}{2}}{x}\right]=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

***（2）$\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{\csc^2\varphi}$；

解法一：$\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{\csc^2\varphi}=\exp\left(\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(\dfrac{\ln\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}}{\sin^2\varphi}\right)\right)=\exp\left(\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\ln\sin\varphi-\ln\varphi}{\varphi^2}\right)$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\exp\left(\lim_{\varphi\to 0}\frac{\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}-\frac{1}{\varphi}}{2\varphi}\right)=\exp\left(\frac{1}{2}\lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi\cos\varphi-\sin\varphi}{\varphi^2\sin\varphi}\right)=\exp\left(\frac{1}{2}\lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi\cos\varphi-\sin\varphi}{\varphi^3}\right)$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\exp\left(\frac{1}{2}\lim_{\varphi\to 0}\frac{\cos\varphi-\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}{3\varphi^2}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.$$

解法二：$\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{\csc^2\varphi}=\exp\left(\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(\dfrac{\ln\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}}{\sin^2\varphi}\right)\right)=\exp\left(\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\ln(1+\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}-1)}{\varphi^2}\right)$

$$=\exp\left(\lim_{\varphi\to 0}\frac{\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}-1}{\varphi^2}\right)=\exp\left(\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi-\varphi}{\varphi^3}\right)=\exp\left(\lim_{\varphi\to 0}\frac{\cos\varphi-1}{3\varphi^2}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{\varphi\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}\varphi^2}{3\varphi^2}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.$$

**（3）$\lim\limits_{x\to 1-}\left(\dfrac{2}{\pi}\arcsin x\right)^{\frac{1}{\arccos x}}$；

解：$\lim\limits_{x\to 1-}\left(\dfrac{2}{\pi}\arcsin x\right)^{\frac{1}{\arccos x}}=\exp\left(\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{\ln(\dfrac{2}{\pi}\arcsin x)}{\arccos x}\right)$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 1-}\frac{\ln\dfrac{2}{\pi}+\ln\arcsin x}{\arccos x}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}\exp\left(\lim_{x\to 1-}\frac{\dfrac{1}{\arcsin x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}$$

5．求下列极限：

**（1）$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{1+\ln\sqrt{x}}}$；

解：$\lim\limits_{x\to0^+} x^{\frac{1}{1+\ln\sqrt{x}}} = \exp[\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{1+\ln\sqrt{x}}] = \exp[\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{1+\frac{1}{2}\ln x}] = \exp[\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x}}] = \mathrm{e}^2$；

***（2）$\lim\limits_{x\to1+}(\ln x)^{x-1}$.

解：原式$\underline{\underline{0^0}}\exp[\lim\limits_{x\to1+}(x-1)\ln(\ln x)] = \exp[\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{\ln(\ln x)}{(x-1)^{-1}}]$

$= \exp[\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{\frac{1}{x\ln x}}{-(x-1)^{-2}}] = \exp[-\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{(x-1)^2}{x\ln x}] = \exp[-\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{(x-1)^2}{x\ln(1+x-1)}]$

$= \exp[-\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{(x-1)^2}{x(x-1)}] = \exp[-\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{(x-1)}{x}] = e^0 = 1$.

6．求下列极限：

**（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}(2+\mathrm{e}^x)^{-\frac{1}{x}}$；

解：原式$= \exp\left[\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x}\ln(2+\mathrm{e}^x)\right] = \exp\left[\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{\mathrm{e}^x}{2+\mathrm{e}^x}\right] = \mathrm{e}^{-1}$.

***（2）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}(\tan x)^{\frac{3}{\ln(\pi-2x)}}$.

解：原式$\underline{\underline{\infty^0}}\exp\left[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\dfrac{3\ln\tan x}{\ln(\pi-2x)}\right] = \exp\left[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\dfrac{3\sec^2 x}{\tan x}\cdot\dfrac{\pi-2x}{-2}\right]$

$= \mathrm{e}^{-3}$.

7．求下列极限：

**（1）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+xa^x}{1+xb^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$　$(a>0, b>0, a\neq1, b\neq1, a\neq b)$；

解：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+xa^x}{1+xb^x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{1+xa^x}{1+xb^x})$

$= \exp(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\ln(1+\dfrac{x(a^x-b^x)}{1+xb^x}))$

$= \exp(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\dfrac{x(a^x-b^x)}{1+xb^x}) = \exp(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(a^x-b^x)}{x(1+xb^x)})$

$= \exp(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(a^x-b^x)}{x}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{(1+xb^x)}) = \exp(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x\ln a-b^x\ln b}{1}) = \dfrac{a}{b}$

**（2） $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{\ln(1+x^3)}}$.

解：原式 $\overset{\infty^0}{=\!=} \exp\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{\ln(1+x^3)}\right]=\exp\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{1+x^3}{3x^2}\right]=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$.

****8. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left[(\dfrac{x+1}{x-1})^{\frac{1}{x}}-1\right]$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\frac{x+1}{x-1}}-1\right]=\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left[\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{x+1}{x-1}\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})-\ln(1-\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1-\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1-(-1)=2.$$

解二：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\frac{x+1}{x-1}}-1\right]=\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left[\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{x+1}{x-1}\right]=\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln(1+\dfrac{2}{x-1})\right]$

$$=\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{2}{x-1}\right]=2.$$

***9. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot a^{\frac{1}{x+1}}(a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1)$

$$=\lim_{x\to+\infty} a^{\frac{1}{x+1}}\cdot\lim_{x\to+\infty} x^2\left(a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\ln a\frac{1}{x(x+1)}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\frac{1}{x(x+1)}\ln a$$

$=\ln a$.

****10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin x-\mathrm{e}^{x\cos x}x\cos x}{x^3}$.

解：令 $f(u)=u\mathrm{e}^u$，$f'(u)=(u+1)\mathrm{e}^u$，$u_1=x\cos x$，$u_2=\sin x$，

$f(u_2)-f(u_1)=(\xi+1)\mathrm{e}^{\xi}(u_2-u_1)$，$\xi$ 介于 u_1 与 u_2 之间

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x e^{\sin x}-x\cos x e^{x\cos x}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}(\xi+1)e^{\xi}\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}(当x\to0,\xi\to0)$$

$$=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

***11．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sin\frac{1}{n})^{n^2}$.

解：首先可求： $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sin\frac{1}{x})^{x^2}\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to0^+}(\frac{\sin t}{t})^{\frac{1}{t^2}}$

$$=\exp\left[\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}\ln\frac{\sin t}{t}\right]=\exp\left[\lim_{t\to0^+}\frac{\ln\sin t-\ln t}{t^2}\right]=\exp\left[\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{\cos t}{\sin t}-\frac{1}{t}}{2t}\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{t\to0^+}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^2\sin t}\right]=\exp\left[\lim_{t\to0^+}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^3}\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{t\to0^+}\frac{\cos t-t\sin t-\cos t}{6t^2}\right]=\exp\left[\lim_{t\to0^+}\frac{-t\sin t}{6t^2}\right]=e^{-\frac{1}{6}},$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(n\sin\frac{1}{n})^{n^2}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

第 3 章 （之 5）
第 17 次作业

教学内容: 3.4.1 泰勒公式

*1. $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+R_3(x)$, 则 $R_3(x)=$ （ ）

$(A)\ \frac{\sin\xi}{3!}x^3$ $(B)\ \frac{-\sin\xi}{3!}x^3$

$(C)\ \frac{\cos\xi}{4!}x^4$ $(D)\ \frac{-\cos\xi}{4!}x^4$

(式中ξ介于0与x之间)

答: C

**2. 设 $f(x)$ 的泰勒展开式 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+R_n(x)$ 中拉格朗日型余项 $R_n(x)=$

（ ）

$(A)\quad \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad (0<\theta<1)$;

$(B)\quad \dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad (0<\theta<1)$;

$(C)\quad \dfrac{f^{(n)}\left[x_0+\theta(x-x_0)\right]}{n!}(x-x_0)^{n}\quad (0<\theta<1)$;

$(D)\quad \dfrac{f^{(n+1)}\left[x_0+\theta(x-x_0)\right]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad (0<\theta<1)$。

答: D

**3. 求 $f(x)=\arctan x$ 的3阶麦克劳林展开式(带皮亚诺余项).

解: $f(x)=\arctan x$，$\qquad f(0)=0$，

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$\qquad f'(0)=1$，

$f''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$，$\qquad f''(0)=0$，

$f'''(x)=\dfrac{-2(1+x^2)^2+2x\cdot 2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}=\dfrac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}$，$\quad f'''(0)=-2$，

$f(x)=x-\dfrac{2}{3!}x^3+o(x^3)=x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$.

**4. 求函数 $f(x)=xe^x$ 的 n 阶麦克劳林公式（带拉格朗日型余项）.

解：由 $f'(x)=e^x(1+x)$, $\quad f''(x)=e^x(2+x)$, $\quad \cdots$, $\quad f^{(n+1)}(x)=e^x(n+1+x)$，知

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$=x+x^2+\frac{1}{2!}x^3+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^n+\frac{e^{\xi}(n+1+\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},\qquad (\xi\text{在}0,\ x\text{之间}).$$

说明:其中 ξ 也可以表示为 $\theta x(0<\theta<1)$.

**5. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在基点 $x_0=3$ 处带拉格朗日型余项的四阶泰勒公式.

解: $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $f(3)=\dfrac{1}{3}$, $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $f'(3)=-\dfrac{1}{9}$, $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$, $f''(3)=\dfrac{2}{27}$,

$f'''(x)=-\dfrac{3!}{x^4}$, $f'''(3)=-\dfrac{3!}{81}$, $f^{(4)}(x)=\dfrac{4!}{x^5}$, $f^{(4)}(3)=\dfrac{4!}{243}$, $f^{(5)}(x)=-\dfrac{5!}{x^6}$

$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}(x-3)+\frac{1}{27}(x-3)^2-\frac{1}{81}(x-3)^3+\frac{1}{243}(x-1)^4-\frac{1}{\xi^6}(x-3)^5$, 其中$\xi$在 3 与$x$之间.

第 3 章 （之 6）

第 18 次作业

教学内容：3.4.2 几个常用函数的泰勒公式　　3.4.3 泰勒公式的应用

**1. 求a_0,a_1,a_2,a_3, 使当 $x\to 1$ 时, 有

$$10^x=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+a_3(x-1)^3+o((x-1)^3).$$

解: 设 $f(x)=10^x$, 则上式即为函数$f(x)$ 在基点$x_0=1$处带皮亚诺余项的三阶泰勒公式.

因为$f(x)$ 在基点$x_0=1$处带皮亚诺余项的三阶泰勒公式为

$$10^x=10e^{(x-1)\ln 10}$$

$$=10[1+(x-1)\ln 10+\frac{1}{2!}(x-1)^2\ln^2 10+\frac{1}{3!}(x-1)^3\ln^3 10+o((x-1)^3)],$$

由带皮亚诺余项的泰勒公式的唯一性知

$$a_0=10, a_1=10\ln 10, a_2=5\ln^2 10, a_3=\frac{5}{3}\ln^3 10.$$

**2. 求函数$f(x)=xe^{1+x^2}$ 的带皮亚诺型余项的$2n+1$阶的麦克劳林公式.

解：因为　$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$,

在上式中令 $x=x^2$，得

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{(x^2)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x^2)^n}{n!}+o(x^{2n})=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+o(x^{2n}).$$

所以，$f(x)$的带皮亚诺型余项的$2n+1$阶的泰勒公式

$$f(x)=xe^{1+x^2}=exe^{x^2}=ex[1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+o(x^{2n})]$$

$$=ex+ex^3+\frac{e}{2!}x^5+\cdots+\frac{e}{n!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1}).$$

**3. 求函数$f(x)=\frac{1}{x+2}$在基点$x_0=1$处的带皮亚诺型余项的n阶泰勒公式.

解：由于　$f(x)=\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3+(x-1)}=\frac{1}{3(1+\frac{x-1}{3})}$,

$$\frac{1}{1+x}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-k+1)}{k!}x^k+o(x^n)=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n)\text{。}$$

在上式中令 $\frac{x-1}{3}$ 代 x，得 $f(x)$ 在基点 $x_0=1$ 处的带皮亚诺型余项的 n 阶泰勒公式

$$f(x)=\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3(1+\frac{x-1}{3})}=\frac{1}{3}\left[1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(\frac{x-1}{3})^k+o((\frac{x-1}{3})^n)\right]$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{x-1}{3^2}+\frac{(x-1)^2}{3^3}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}+o((x-1)^n)$$

***4. 利用泰勒公式计算 $\ln 1.05$ 的近似值，使其绝对误差不超过 0.001 .

解：由于 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}$ ，$0<\xi<x$.

取 $x=0.05$，要使 $\left|R_n(0.05)\right|=\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}(0.05)^{n+1}\right|<\frac{(0.05)^{n+1}}{n+1}<(0.05)^{n+1}<0.001$，

只需 $n\geq 2$ 。所以

$$\ln 1.05=\ln(1+0.05)\approx 0.05-\frac{(0.05)^2}{2}=0.049\,.$$

5. 利用泰勒公式求下列极限：

****（1） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$;

解：$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$

$$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}(-\frac{x^2}{2})^2+o(x^4)$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}\,.$$

***（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$；

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)][x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)]-(x+x^2)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[x+x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)]-(x+x^2)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\dfrac{1}{3}$.

****（3） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}-\sqrt{1+x^2}+1}{x^2\left(\cos x-e^{x^2}\right)}$；

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}-\left[1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o\left(x^4\right)\right]+1}{x^2\left\{\left[1-\frac{x^2}{2!}+o\left(x^2\right)\right]-\left[1+x^2+o\left(x^2\right)\right]\right\}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{8}x^4+o\left(x^4\right)}{x^2\left\{-\frac{3}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right\}}=-\dfrac{1}{12}$.

****（4） $\lim\limits_{x\to\infty}x[2x-1-2x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$.

解： 令 $x=\frac{1}{t}$， 根据 $\ln(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+o(t^3)$，可得

原式

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t}\left[\dfrac{2}{t}-1-\dfrac{2}{t^2}\ln\left(1+t\right)\right]=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t-t^2-2\ln(1+t)}{t^3}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t-t^2-2[t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+o(t^3)]}{t^3}$

$=-\dfrac{2}{3}$.

****6．设 $f''(x)$ 在 $x=a$ 点连续， $f(a)=0$， $f'(a)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{f'(a)(x-a)}\right]^{\frac{1}{x-a}}$.

解：原式＝$\exp\left\{\lim\limits_{x\to a}[\dfrac{f(x)}{f'(a)(x-a)}-1]\dfrac{1}{x-a}\right\}=\exp[\lim\limits_{x\to a}[\dfrac{f(x)-f'(a)(x-a)}{f'(a)(x-a)^2}]$

$=\exp[\lim\limits_{x\to a}[\dfrac{f'(x)-f'(a)}{f'(a)2(x-a)}]=e^{\frac{f''(a)}{2f'(a)}}$.

***7. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有 $(n-1)$ 阶导数, 在 x_0 处有连续的 n 阶导数,

且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}$.

解: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x_0)+\dfrac{1}{\mathrm{n}!}\cdot f^{(n)}(\xi)\cdot(x-x_0)^n-f(x_0)}{(x-x_0)^n}$（$\xi$ 在x与x_0之间）

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

****8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 1 阶连续导数， $f''(x)$ 在 (a,b) 内存在，且 $f(a)=f(b)=0$. 又存在常数 $c\in(a,b)$，使 $f(c)>0$. 试证，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)<0$.

解法一：（多次利用拉格朗日定理） 依题意， $f(x)$ 在 $[a,c]$ 及 $[c,b]$ 上均满足拉格朗日中值定理的条件，所以存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0,\ f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0.$$

又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数，且 $f'(x)$ 在 (a,b) 内可导，所以， $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上也满足拉格朗日中值定理的条件. 所以，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0.$$

解法二：（泰勒公式）反证法，假设对一切 $\xi\in(a,b)$，有 $f''(\xi)\geq 0$.

将 $f(a)$ 和 $f(b)$ 在 c 处展开为一阶泰勒公式：

$f(a)=f(c)+f'(c)(a-c)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(a-c)^2$,

$f(b)=f(c)+f'(c)(b-c)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(b-c)^2$，其中 $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$.

由于 $f(a)=f(b)=0$，所以

$$0=f(c)+f'(c)(a-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(a-c)^2$$

$$0=f(c)+f'(c)(b-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-c)^2$$

再注意到 $f(c)>0$，有 $f'(c)(a-c)<0$ 且 $f'(c)(b-c)<0$，这是个矛盾！因此结论成立.