191 期终卷

一、求下列极限（每小题 5 分，共 10 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2dt}{\sin^{10}x}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(a+e^x)^{\frac{1}{x}}$　（a>0）

二、计算题（每小题 6 分，共 18 分）

1. 函数 $y=y(x)$ 由方程 $x+\tan y=y,$ 确定，求 $y'(x), y''(x).$

2. 求曲线 $\rho=a\sin 2\theta(a>0)$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程和法线方程.

3. 求函数 $y=xe^{-x}$ 的拐点.

三、选择题(每小题 4 分，共 5 小题，共 20 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在区间[-1,1]上连续，则 x=0 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 的 （　　）.

（A）跳跃间断点；　　（B）可去间断点；

（C）无穷间断点；　　（D）振荡间断点

2. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得　　（　　）.

（A）$f(x)$在$(0,\delta)$内递增；　　（B）$f(x)$在$(0,\delta)$内递减；

（C）对任意的$x\in(0,\delta), f(x)>f(0)$；（D）对任意的$x\in(-\delta,0), f(x)>f(0)$.

3. 设函数 $f(x)=x\sin x+\cos x,$ 则下列命题正确的是　　（　　）

(A) $f(0)$是极大值$,f(\dfrac{\pi}{2})$是极小值　　(B) $f(0)$是极小值$,f(\dfrac{\pi}{2})$是极大值

(C) $f(0)$是极大值$,f(\dfrac{\pi}{2})$是极大值　　(D) $f(0)$是极小值$,f(\dfrac{\pi}{2})$是极小值

4. 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 有一个原函数为　　（　　）

(A) $x+\sin x$　(B) $x-\sin x$　(C) $x+\cos x$　(D) $x-\cos x$

5. 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} f(t)dt$，则 $F'(x)$ 等于（　　）

（A）$\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})$；　　（B）$\frac{1}{x}f(\ln x)+f(\frac{1}{x})$；

（C）$\frac{1}{x}f(\ln x)-\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})$；　　（D）$f(\ln x)-f(\frac{1}{x})$.

四、求下列积分（每小题 6 分，共 18 分）

1. $\int x^2e^{-x}dx$

2. $\int \frac{1}{x^3-2x^2+x}dx$

3. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

五、(6 分) 证明不等式 $e^{\pi}>\pi^{e}$.

六、（6 分）计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

七、(8 分) 求 $f(x)=xe^{1+x^2}$ 的带皮亚诺余项的 2n+1 阶的麦克劳林公式.

八、（8 分）设 A>0,D 是由曲线 $y=A\sin x, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 及直线 $y=0, x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域，V_1, V_2 分别表示 D 绕 x 轴与 y 轴旋转成的旋转体的体积，若 $V_1=V_2$,求 A 的值.

九、（6 分）设函数 $f(x)$ 在[0,1]连续，在(0,1)内二阶可导，且 $f''(x)\geq 0$,

证明：$\int_0^1 f(x^{\alpha})\mathrm{d}x \geq f(\frac{1}{\alpha+1})\ (\alpha>0)$.