第五章 粘性流体运动基础

粘性流体运动

粘性流体中的应力、N-S方程、流动的两种状态、N-S方程层流解析解、湍流概述

基础知识

张量、牛顿内摩擦定律、牛顿第二定律、理想流体运动欧拉方程、雷诺数

粘性流体运动基础

纳维-斯托克斯方程

应力张量、本构方程、定解条件

层流解析解

库埃特-泊肃叶流动

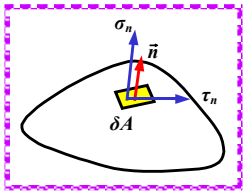
湍流概述

雷诺应力、圆管湍流速度分布

5.1 粘性流体中的应力

理想流体 → $p = p(x, y, z)$

粘性流体 →
- 法向应力 σ_n *normal stress*
- 切向应力 τ_n *shear stress*



- 应力大小与作用面方位有关

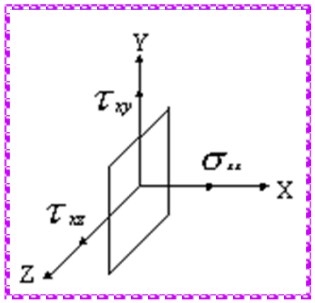
应力的双下标表示法

- 取 $\vec{n}$ 与 x 正方向一致

σ_{xx} τ_{xy} τ_{xz}

下标 1 → 作用面法线方向

下标 2 → 应力分量的指向



粘性流体中一点的应力状态

- 过一点作三个相互垂直的平面，则过该点任意方位表面上的应力都可以用这三个平面上的九个应力分量来表示

应力张量 ⇒

stress tensor

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

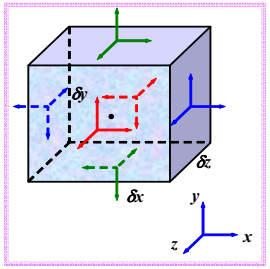
九个应力分量中只有六个是独立的

六面体流体微团表面力1

应力正方向表示规则

- 表面外法线方向和坐标轴正向一致

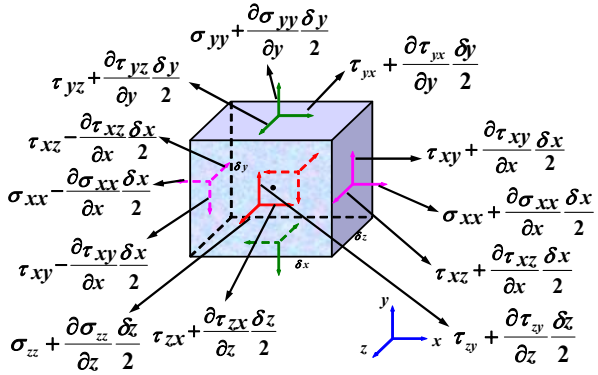
⇒ 应力分量正向分别与各坐标轴正向一致



- 表面外法线方向和坐标轴正向相反

⇒ 应力分量正向分别与各坐标轴正向相反

六面体流体微团表面力2



六面体流体微团表面力3

表面力合力

⇒

$$\delta F_{sx}=\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z$$

$$\delta F_{sy}=\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z$$

$$\delta F_{sz}=\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z$$

5.2 Navier-Stokes方程

微分形式动量方程 *differential momentum equation*

→ **牛顿第二定律应用于流体微团** $\Sigma\vec{F}=m\vec{a}$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho g_x+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho g_y+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho g_z+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}$$

本构方程1 *constitutive equations*

应力与变形速度的关系 → **Stokes假设**

- 小变形，应力与变形速度之间成线性关系
- 各向同性，应力与变形速度的关系不随坐标变换而变化
- 当$\mu\to 0$时，应力状态简化为理想流体应力状态

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=-p$$

本构方程2

应力与变形速度的关系

法向应力 →

$$\sigma_{xx}=-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}$$

$$\sigma_{yy}=-p+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}$$

$$\sigma_{zz}=-p+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}$$

其中，p 为压强 $p=-\frac{1}{3}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)$

本构方程3

应力与变形速度的关系

切向应力 →

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{zx}=\tau_{xz}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

- 切向应力与流体的角变形率成正比

Navier-Stokes方程1

微分形式动量方程(运动方程) — N-S方程

Navier-Stokes equations

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{1}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)\right]$$

Navier-Stokes方程2－可压缩

可压缩流体的控制方程组

- 连续方程、运动方程、能量方程

五个方程，六个未知数 p、u、v、w、ρ、T， 方程组不封闭

- 增加完全气体状态方程

六个方程，六个未知数 p、u、v、w、ρ、T，方程组封闭

Navier-Stokes方程3－不可压缩

不可压缩流体，且 $\mu=\text{const}$ $\quad\nabla\cdot\vec{V}=0$

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{V}$$

Navier-Stokes方程4－不可压缩

连续方程 $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V})=0$

动量方程

$\Rightarrow$ $\rho\dfrac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{V}$

- 不可压缩流动：四个未知数 u，v，w，p，四个方程，方程组封闭

Navier-Stokes方程5－理想流体

理想流体欧拉运动方程，$\mu = 0$

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y}$$
$$\rho\frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z}$$

Euler's equation

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p$$

Navier-Stokes方程6

质量 × 加速度 = 流体微团所受到的合外力

惯性力 = 质量力 + 压力 + 粘性力

N-S方程 → $\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\vec{V}$

欧拉运动微分方程 → $\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p$

欧拉平衡方程 → $0 = \rho\vec{f} - \nabla p$

粘性流体流动的定解条件

初始条件 → 非定常流动 $t = 0$ 时刻的物理量场

initial conditions

边界条件 *boundary conditions*

固壁 → 无滑移边界条件 $\vec{V}_{流} = \vec{V}_{固}$

no-slip conditions

进出口、无穷远处 → 物理量分布

流体相界面 → 速度、压强、粘性应力等连续

求解途径

解析解 → 第5章：无限大平板及圆管中充分发展层流

圆管充分发展层流，无限大平板间充分发展层流等

近似解 → 第10章：顺流平板层流边界层流动

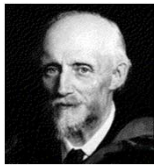
Re数很大（高Re数绕流）和很小（蠕流）两种极端情况下，略去方程中某些次要项

数值解 → 利用数值方法 (CFD)

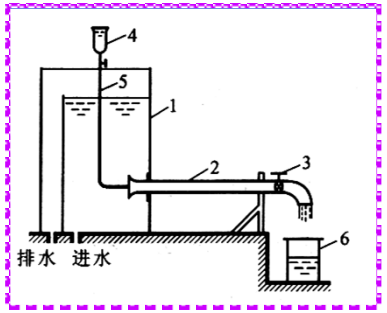
5.3 两平行平板间的库埃特-泊肃叶流动

流动的两种状态

雷诺实验（1883）

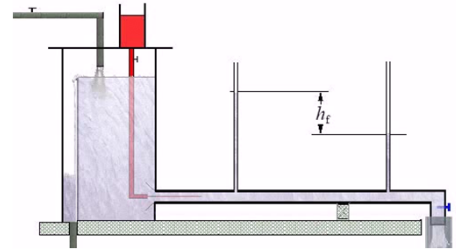


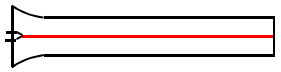
Osborne Reynolds



流动的两种状态1

阀门开度小，小流量（流速）时





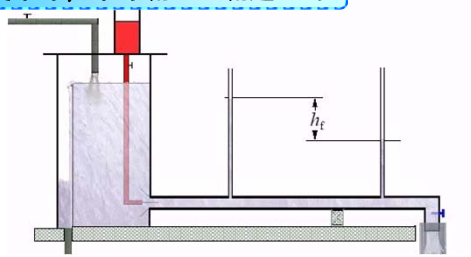
层流

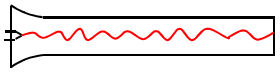
laminar flow

☞ 流体分层流动，各层互补干扰、掺混，流线（迹线）光滑

流动的两种状态2

阀门开度中等，中等流量（流速）时





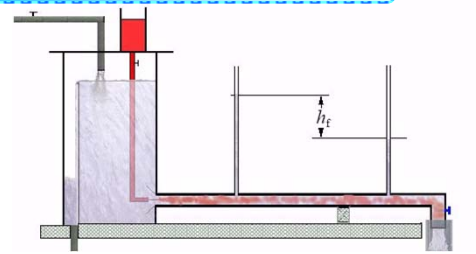
过渡(转捩)

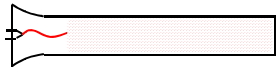
transition

☞ 流体各层之间存在相混，流线（迹线）波动

流动的两种状态3

阀门开度大，大流量（流速）时





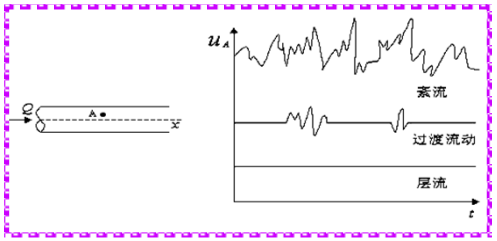
湍流（紊流）

turbulent flow

☞ 流线剧烈波动，各层之间剧烈掺混，流体质点存在随机运动

流动的两种状态4

热线测速仪测量流体速度



- 湍流状态下，物理量随时间存在不规则的随机脉动
- 湍流状态下，物理量同样随空间存在不规则随机脉动

流动的两种状态5

层流	湍流
分层流动，各部分互不掺混	各部分激烈掺混
质点轨迹光滑	质点轨迹杂乱无章
流动稳定	流动极不稳定

湍流是随机的三维非定常有旋流动

流动的两种状态6

决定流动状态的判据

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho\bar{V}D}{\mu}=\frac{\bar{V}D}{\nu}$$

临界雷诺数与实验外部条件有关

平面库埃特流 → $\mathrm{Re}_{cr}=hU/\nu=1300$

平面泊肃叶流 → $\mathrm{Re}_{cr}=2h\bar{V}/\nu=3000$

critical Reynolds number

层流稳定性及其向湍流的过渡1

层流稳定性及其向湍流的过渡

Re较小 → 粘性力影响显著

→ 扰动受粘性阻尼作用衰减

→ 稳定层流

层流稳定性及其向湍流的过渡2

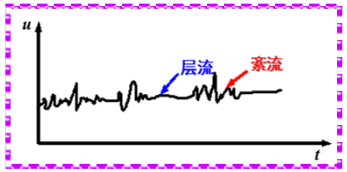
Re较大 ⟹ 惯性力远高于粘性力

⟹ 惯性力对扰动的放大远超过粘性阻尼作用

⟹ 失稳，层流转化为湍流

过渡区

湍栓、分叉



流动的两种状态－例题

有ν = 1.13×10^{-6} m^2/s的水和ν = 200×10^{-6} m^2/s的油，分别以 u = 1 m/s的流速通过直径 d = 300 mm的管道，试判别其流动状态.

解： $\mathrm{Re}=\dfrac{\rho u d}{\mu}=\dfrac{ud}{\nu}$

水 $\mathrm{Re}=\dfrac{1\times 0.3}{1.13\times 10^{-6}}=265486.7$ ⟹ 湍流

油 $\mathrm{Re}=\dfrac{1\times 0.3}{200\times 10^{-6}}=1500$ ⟹ 层流

层流解析解

粘性、均质不可压、定常 ⟹ $\rho=\mathrm{const}$ ， $\dfrac{\partial}{\partial t}=0$

连续方程

N-S方程

⟹ 层流 解析解 ⟹ 泊肃叶流（Poiseuille） 库埃特流（Couette）

边界条件 ⟹ 固面无滑移条件 相界面压强、粘性应力连续

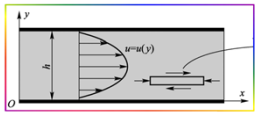
N-S方程的简化1

N-S 方程精确解

fully developed laminar flow between parallel plates

假设 ◎ 定常、充分发展层流、只有x方向流动

⟹ $\dfrac{\partial}{\partial t}=0$ $v=w=0$



◎ 均质不可压缩 ⟹ $\rho=\mathrm{const}$

◎ 温度变化不大 ⇓ $\mu=\mathrm{const}$

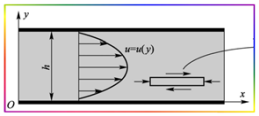
◎ 无限大平板 ⟹ $\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

N-S方程的简化2

- 质量力仅为重力

$$g_x = g_z = 0 \qquad g_y = -g$$

建立方程组

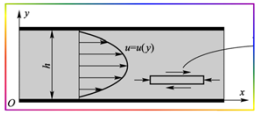


- 连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(y)$$

N-S方程的简化3

- N-S 方程



x 方向

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + \cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial u}{\partial y}} + \cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}}\right) = \cancel{\rho g_x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

y 方向

$$\cancel{\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}\right)$$

N-S方程的简化4

$$\Rightarrow 0 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial y}$$

z 方向

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}} + \cancel{u\frac{\partial w}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial w}{\partial y}} + \cancel{w\frac{\partial w}{\partial z}}\right) = \cancel{\rho g_z} - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}\right)$$

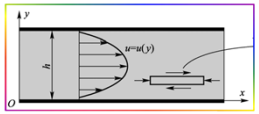
$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial p}{\partial z}$$

N-S方程的简化5

- N-S 方程

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\vec{V}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} 0 &= \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \\ 0 &= -\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}}$$



$$\Rightarrow p = -\rho g y + f(x) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = f'(x)$$ 仅是x函数

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y^2 + c_1 y + c_2$$

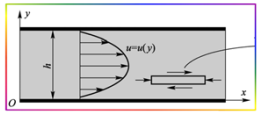
平面泊肃叶流动1

恒定压差作用下平板间层流—泊肃叶流 *Poiseuille flow*

定解条件 $y=0,\ u=0 \quad y=h,\ u=0$

$$c_2=0 \qquad c_1=-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}h$$

$$u=-\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)$$



设相距为 l 的两点压降为 Δp

$$u=\frac{h^2}{2\mu}\frac{\Delta p}{l}\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)$$

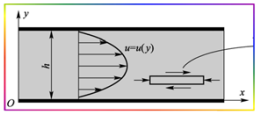
抛物线分布
parabolic profile

平面泊肃叶流动2

截面最大速度 $\Rightarrow$ $u_{\max}=u|_{y=\frac{h}{2}}=\frac{h^2}{8\mu}\frac{\Delta p}{l}$

两平板间的体积流量，z 方向为单位长度

$$Q=\int u dA=\int_0^h u dy$$

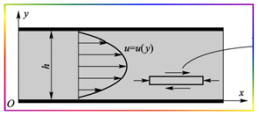


$$Q=\frac{h^3}{12\mu}\frac{\Delta p}{l}$$

平面泊肃叶流动3

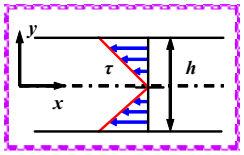
截面平均速度

$$\bar{V}=\frac{Q}{A}=\frac{h^2\Delta p}{12\mu l}$$



$$u_{\max}=1.5\bar{V}$$

切应力分布 $\tau=\mu\frac{du}{dy}$



方向与流动方向相反

平面泊肃叶流动4

压强分布 $p=-\rho gy+f(x)$ $\Rightarrow$ $p=-\rho gy+\frac{\partial p}{\partial x}x+C$

$$p=p_0-\rho gy+\frac{\partial p}{\partial x}x$$

流体质点沿流动方向作匀速直线运动

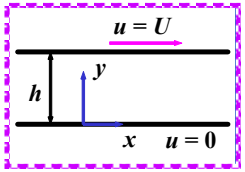
- x 方向粘性力与压力平衡 $\Rightarrow$ 粘性力导致压强变化
- y 方向重力与压力平衡 $\Rightarrow$ 重力导致压强变化

平面库埃特—泊肃叶流动1

恒定压差、剪切作用 *general Couette flow*

$$u=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y^2+C_1y+C_2$$

$$p=-\rho gy+f(x)$$

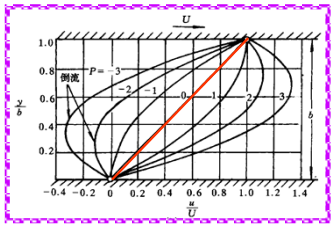


定解条件 $y=0 \Rightarrow u=0$ $y=h \Rightarrow u=U$

$$\Rightarrow \frac{u}{U}=\frac{y}{h}-\frac{h^2}{2\mu U}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)=\frac{y}{h}+P\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)$$

P—无量纲压强梯度

平面库埃特—泊肃叶流动2



最早由Couette于1890年分析

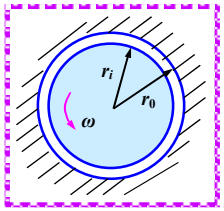
$$\frac{u}{U}=\frac{y}{h}+P\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)$$

$$P=-\frac{h^2}{2\mu U}\frac{\partial p}{\partial x}$$

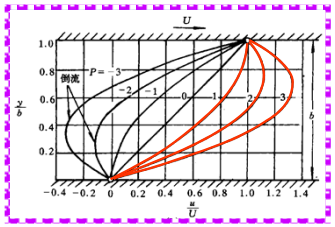
$$\frac{\partial p}{\partial x}=0 \Rightarrow u=\frac{y}{h}U$$

Couette flow

纯剪切流，速度线性分布



平面库埃特—泊肃叶流动3



$$\frac{u}{U}=\frac{y}{h}+P\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)$$

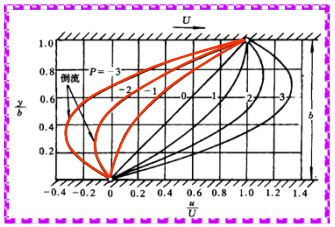
$$P=-\frac{h^2}{2\mu U}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$\frac{\partial p}{\partial x}<0$ 顺压梯度

Positive (favorable) pressure gradient

- 流速廓线是斜直线（纯剪切流）与抛物线（泊肃叶流）的叠加
- 全场速度为正，每点速度大于或等于泊肃叶流

平面库埃特—泊肃叶流动4



$$\frac{u}{U}=\frac{y}{h}+P\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)$$

$$P=-\frac{h^2}{2\mu U}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$\frac{\partial p}{\partial x}>0$ 逆压梯度

negative (unfavorable) pressure gradient

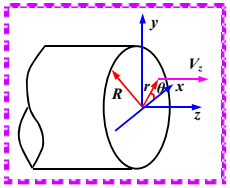
- 流速廓线是斜直线（纯剪切流）与抛物线（泊肃叶流）相减
- 全场速度有正有负，在固定平板一侧出现倒流

5.4 圆管内的泊肃叶流动

N-S方程精确解

fully developed laminar flow in circular pipe

假设



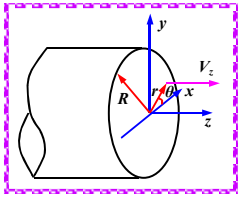
- 定常、充分发展层流 ⇒ $\frac{\partial}{\partial t}=0 \quad V_r=V_\theta=0$
- 均质不可压缩 ⇒ $\rho=\text{const}$
- 圆管内轴对称流动 ⇒ $\frac{\partial V_z}{\partial \theta}=0$
- 温度变化不大 ⇓ $\mu=\text{const}$

圆管内的泊肃叶流动2

- 质量力仅为重力

$$g_r=-g\sin\theta \qquad g_\theta=-g\cos\theta \qquad g_z=0$$

建立方程组



- 连续方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rV_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0$$

⇒ $\partial V_z/\partial z=0$ ⇒ $V_z=V_z(r)$

圆管内的泊肃叶流动3

- N-S 方程 (r 方向)

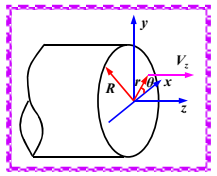
steady　　$V_r=V_\theta=0$

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial V_r}{\partial t}}+\cancel{V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}-\frac{V_\theta^2}{r}+V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}}\right)=\rho f_r-\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$+\mu\left[\cancel{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}}\right] \quad V_r=V_\theta=0$$

⇓

$$-\rho g\sin\theta-\frac{\partial p}{\partial r}=0$$



圆管内的泊肃叶流动4

θ 方向

steady　　$V_r=V_\theta=0$

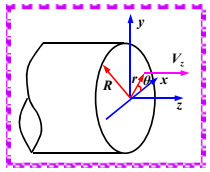
$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial V_\theta}{\partial t}}+\cancel{V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+\frac{V_r V_\theta}{r}+V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}}\right)=\rho f_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$V_r=V_\theta=0$

$$+\mu\left[\cancel{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}}\right]$$

⇓

$$0=-\rho g\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$



圆管内的泊肃叶流动5

z 方向

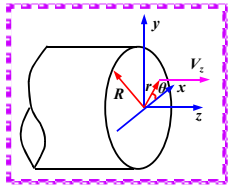
steady　　$V_r = V_\theta = 0$　　fully developed

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial V_z}{\partial t}} + V_r\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z\cancel{\frac{\partial V_z}{\partial z}}\right) = \rho \cancel{f_z} - \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cancel{\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}}\right]$$

fully developed

symmetric flow



$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)$$

圆管内的泊肃叶流动6

简化后方程组

$$0 = -\rho g\sin\theta - \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$0 = -\rho g\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right]$$

方程组积分

$$p = -\rho g r\sin\theta + f_1(z) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = f_1'(z)$$

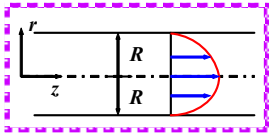
$$V_z = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}r^2 + C_1\ln r + C_2$$

圆管内的泊肃叶流动7

$$V_z = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}r^2 + C_1\ln r + C_2$$

Poiseuille flow

边界条件



$r = R \Rightarrow V_z = 0$

$r = 0 \Rightarrow V_z$ 为有限值 $\Rightarrow C_1 = 0$

$$\Rightarrow V_z = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}(r^2 - R^2)$$

抛物线分布

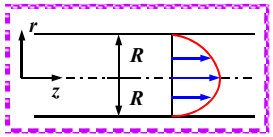
parabolic profile

圆管内的泊肃叶流动8

设相距为 l 的两点压降为Δp

$$\Rightarrow V_z = \frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{l}\left(R^2 - r^2\right)$$

截面最大速度

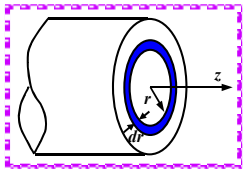


$$\Rightarrow V_{z\max} = \frac{R^2}{4\mu}\frac{\Delta p}{l}$$

圆管内的泊肃叶流动9

哈根—伯肃叶（Hagen-Poiseuille）定律

$$dQ = V_z 2\pi r dr$$



$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\Delta p}{l} = \frac{\pi D^4}{128\mu}\frac{\Delta p}{l}$$

与精密实验的测定结果完全一致，验证了层流理论和实践的完美一致性

圆管内的泊肃叶流动10

截面平均速度

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{R^2 \Delta p}{8\mu l}$$

$$V_{z\max} = 2\bar{V}_z$$

- 层流状态下圆管过流断面上的速度分布很不均匀
- $\alpha = 2.0$ （动能修正系数）

圆管内的泊肃叶流动11

压强分布 $p = -\rho g r \sin\theta + f(z)$

$$p = -\rho g r \sin\theta + \frac{\partial p}{\partial z} z + C$$

设 $z = 0$，$r = 0$ 时，$p = p_0$

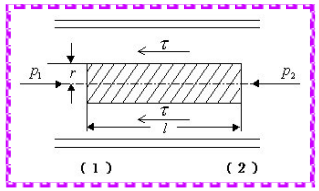
$$p = p_0 - \rho g r \sin\theta + \frac{\partial p}{\partial z} z$$

粘性力和重力导致压强变化

圆管内的泊肃叶流动12

解二：*elemental approach*

控制体在圆管轴线方向受力平衡



$$\tau = \frac{\Delta p}{2l} r$$

当 $r = R$ $\quad \tau_w = \frac{\Delta p}{2l} R$ $\quad \tau = \frac{r}{R}\tau_w$

园管过流断面上切应力沿径向成线性分布

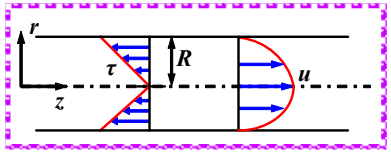
圆管内的泊肃叶流动13

速度分布

$$\tau = -\mu \frac{dV_z}{dr} \qquad \frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{dV_z}{dr} = -\frac{r\Delta p}{2\mu l} \Rightarrow V_z = -\frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{l} r^2 + C$$

$$\Rightarrow V_z = \frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{l}(R^2 - r^2)$$

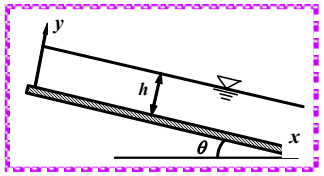


层流－降膜流动1

降膜流动：不可压缩流体在倾斜平板上呈液膜状向下流动，液膜厚度 h 不变，表面与大气接触。流动是定常层流流动

- 降膜流动在湿壁塔、冷凝器、蒸发器及产品涂层方面有广泛的应用

靠重力产生，特点是液膜的一侧与大气接触，沿流动方向没有压力差



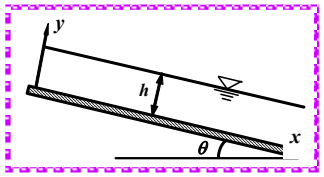
层流－降膜流动2

解：
- 定常、层流 $\Rightarrow v = w = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$
- 连续方程 $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(y)$
- N-S方程

$$0 = \rho g \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

$$0 = -\rho g \cos\theta - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial z}$$



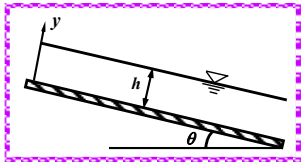
层流－降膜流动3

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos\theta \Rightarrow p = -\rho g y \cos\theta + f(x)$$

$$y = h \Rightarrow p = p_0$$

$$\Downarrow$$

$$p = -\rho g (y - h)\cos\theta + p_0$$



$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\rho g \sin\theta}{\mu}$$

层流—降膜流动4

$$u=-\frac{\rho g\sin\theta}{\mu}\frac{y^2}{2}+C_1y+C_2$$

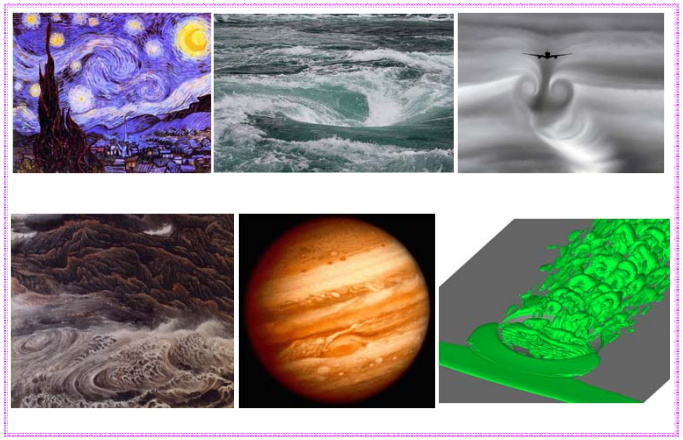
- 定解条件

$y=0 \Rightarrow u=0$　　$y=h \Rightarrow \frac{du}{dy}=0$

$$\Rightarrow u=\frac{\rho g\sin\theta}{\mu}y\left(h-\frac{y}{2}\right)$$

体积流量 $\Rightarrow dQ=udy \Rightarrow Q=\frac{\rho g\sin\theta}{3\mu}h^3$

5.6 湍流概述



湍流概述

湍流的基本特征

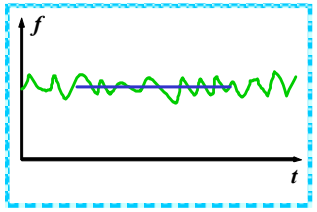
- 层间流体质点剧烈掺混-雷诺实验
  - 雷诺实验　随机而混乱 、湍流各流层间流体质点相互掺杂
- 湍流各物理量随时间和空间做不规则随机性脉动
  - 三维非定常流动，但参数是时间和空间坐标的随机函数
- 湍流的旋涡特性
  - 由各种尺度、各种频率的旋涡构成。大尺度旋涡分解成小尺度，小尺度分解成更小尺度。涡中有涡，涡上加涡的复杂涡旋结构

湍流的描述方法

瞬时参数的统计平均具有一定的规律性

采用统计平均方法

- 时间平均法（时均法）
- 空间平均法（体均法）
- 概率（统计）平均法



- 概率论的各态遍历假设：一个随机量在在重复多次实验中出现的所有可能的值，能够在相当长时间内（相当大空间范围内）的一次实验中出现许多次并具有相同概率

三种方法等价，具有相同的平均值

湍流的时均表示方法

时均速度 ⇒ $\bar{u} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)dt$ *time-averaged velocity*

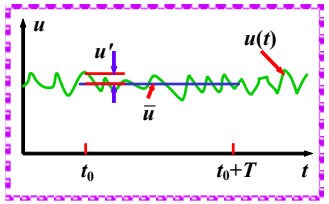
速度脉动周期 << T << 时均速度的不稳定变化周期

瞬时速度 ⇒ $u(t)$

instantaneous velocity

脉动速度 *fluctuating velocity*

⇒ $u' = u - \bar{u}$



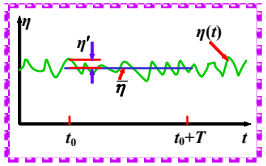
时均及脉动物理量

时均物理量 ⇒ $\bar{\eta} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \eta(t)dt$ *time-averaged variables*

脉动物理量 ⇒ $\eta' = \eta - \bar{\eta}$

$p = \bar{p} + p'$, $T = \bar{T} + T'$

$\rho = \bar{\rho} + \rho'$



脉动物理量的时均值

⇒ $\bar{\eta'} = 0$ 脉动在时均物理量两侧的分布机会均等

湍流脉动程度的衡量

湍动能 ⇒ $K = \frac{\overline{|\vec{V}'|^2}}{2} = \frac{\overline{(u')^2} + \overline{(v')^2} + \overline{(w')^2}}{2}$

湍流度 ⇒ $I = \sqrt{\frac{1}{3}\left[\overline{(u')^2} + \overline{(v')^2} + \overline{(w')^2}\right]} \Big/ \bar{U}_\infty$

其中 $\overline{(u')^2} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} (u')^2\, dt > 0$

- 湍流度越大，速度的脉动幅度越大，相应的其它参数的脉动幅度也越大

湍流的时间平均法

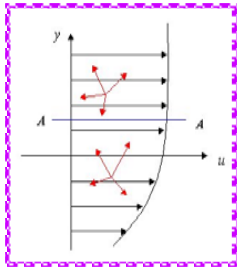
- 严格来说，时均平均法只适用定常湍流，实际上已推广用于非定常湍流
- 定常湍流是指时均特性不随时间变化的湍流流动
- 将湍流流动分为两部分，即：时均流动和脉动运动
- 时均流动代表主流，关注的重点是时均流动特性
- 脉动流动反映湍流的实质，对时均流动一切特性都产生影响

5.7 湍流附加应力（雷诺应力）1

层流切应力 ⇐ 分子粘性应力

$$\tau_{\text{lam}} = \mu \frac{du}{dy}$$

laminar (viscous) shear stress



液体 ⇒ 分子间内聚力

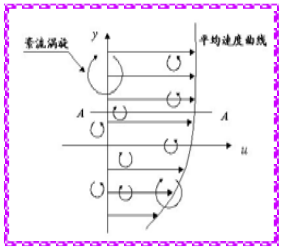
气体 ⇒ 分子热运动

湍流附加应力（雷诺应力）2

湍流切应力

分子间内聚力，分子热运动

⇒ $\tau_{\text{lam}} = \mu \frac{d\bar{u}}{dy}$



流体质点的随机运动

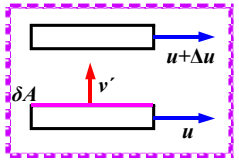
湍流附加应力(雷诺应力)

turbulent shear stress
Reynolds stress

湍流附加应力（雷诺应力）3

湍流附加应力

单位时间通过 δA 的流体微团 x 方向动量的时均值



⇒ $\overline{\rho v' \delta A(\bar{u} + u')} = \rho \overline{u'v'} \delta A$

由动量对时间的变化率＝外力之和

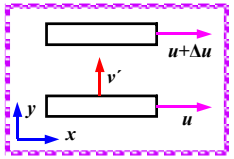
⇒ $\rho \overline{u'v'}$ 应力

湍流附加应力（雷诺应力）4

流体质点由下层→上层

$v' > 0$ ⇒ $u' < 0$

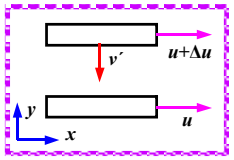
⇒ $\overline{u'v'} < 0$



流体质点由上层→下层

$v' < 0$ ⇒ $u' > 0$

⇒ $\overline{u'v'} < 0$



雷诺（湍流附加）应力 ⇒ $\tau = -\rho \overline{u'v'}$

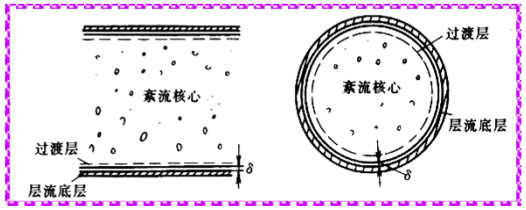
湍流切应力1

$$\tau = \tau_{\text{lam}} + \tau_{\text{turb}} = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho \overline{u'v'}$$

分子粘性应力（层流切应力、粘性切应力）是由流体层间分子内聚力及分子热运动引起的

雷诺应力（湍流附加应力）是由流体微团的脉动进而产生动量横向传递引起的

湍流切应力2—壁面附近湍流结构



层流底层的厚度 ⟹ $\delta = \dfrac{14.1d}{\text{Re}\sqrt{f}}$

Re 数越大，层流底层越薄

viscous sublayer
viscous wall layer

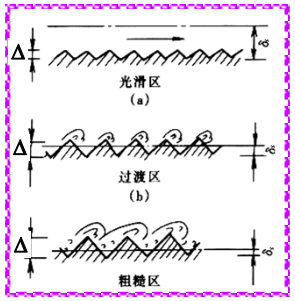
湍流切应力3—水力学光滑管和水力学粗超管

$\Delta << \delta_s$ ⟹ 水力光滑管

hydraulically smooth pipe

$\Delta \approx \delta_s, \Delta \geq \delta_s$ ⟹ 水力粗糙管

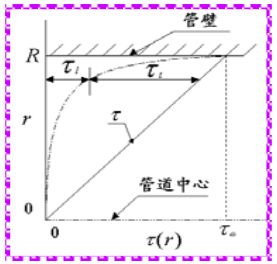
hydraulically rough pipe

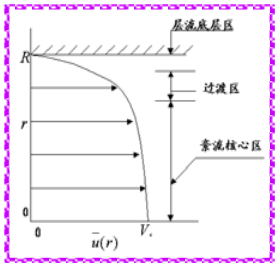


水力光滑管不仅与管壁粗糙度有关，还与 Re 有关

湍流切应力4—各切应力作用

$$\tau = \tau_{\text{lam}} + \tau_{\text{turb}} = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho \overline{u'v'}$$





湍流切应力5—三元湍流切应力

应力张量

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{xx} & \bar{\tau}_{xy} & \bar{\tau}_{xz} \\ \bar{\tau}_{yx} & \bar{\sigma}_{yy} & \bar{\tau}_{yz} \\ \bar{\tau}_{zx} & \bar{\tau}_{zy} & \bar{\sigma}_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\rho\overline{u'^2} & -\rho\overline{u'v'} & -\rho\overline{u'w'} \\ -\rho\overline{u'v'} & -\rho\overline{v'^2} & -\rho\overline{v'w'} \\ -\rho\overline{u'w'} & -\rho\overline{v'w'} & -\rho\overline{w'^2} \end{bmatrix}$$

分子粘性应力　　雷诺应力

- 六个独立的雷诺应力分量，需补充六个本构方程

湍流数值模拟1

雷诺平均数值模拟（RANS）

Reynolds Averaged Navier-Stokes simulation

- 以时均流动控制方程组为基础
- 湍流模式理论

Boussinesq 涡粘性假设 ⟹ $-\rho\overline{u'v'} = \eta\dfrac{d\bar{u}}{dy}$

- η 取决于流体的种类、流场的结构、流动条件等 *eddy viscosity*

湍流数值模拟2

零方程模型（代数模型） ⟹ 只需补充代数方程

普朗特（Prandtl）混合长度模型

$$\eta = \rho l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|$$

其中 $l = Ky$ ⟹ 混合长度 *mixing length*

两方程模型 ⟹ 需补充两个微分方程

湍流数值模拟3

K - ε 模型 ⟹ $\eta = C_\mu \rho \dfrac{K^2}{\varepsilon}$

其中 $K = \dfrac{1}{2}\overline{u'^2 + v'^2 + w'^2}$ 湍动能 *turbulent kinetic energy*

$$\varepsilon = \nu\overline{\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2\right]}$$

湍动能耗散率

dissipation rate of turbulent kinetic energy

湍流数值模拟4

直接数值模拟（DNS） *Direct numerical simulation*

- 直接求解三维非定常的N-S方程，可以获得流场的全部信息

大涡模拟（LES） *Large eddy simulation*

⇒ 大尺度涡 – 直接求解
小尺度涡 – 建立模型

5.8圆管湍流——光滑圆管内的湍流速度分布1

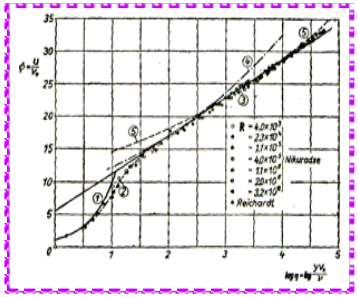
光滑圆管—速度分布主要依据实验测量确定

近壁区层流底层

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{yu_*}{\nu}$$ *law of the wall*

$$y^+ = \frac{yu_*}{\nu} \le 5$$

y：到壁面的距离



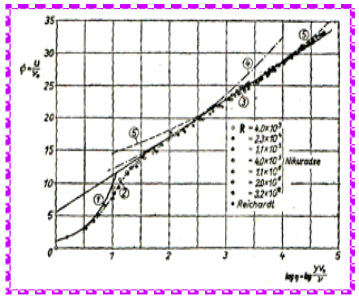
光滑圆管内的湍流速度分布2

u_*：摩擦速度 *friction velocity*

⇒ $u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$

层流底层厚度 δ_s

⇒ $\delta_s = \frac{5\nu}{u_*}$



过渡区 ⇒ $5 < y^+ < 30$

光滑圆管内的湍流速度分布3

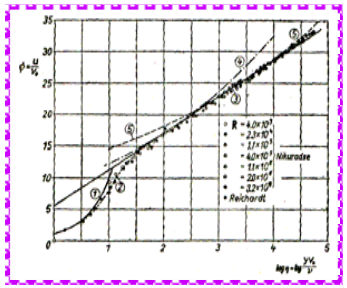
湍流核心区 $y^+ \ge 30$

对数分布律

logarithm law profile

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 5.75\lg\frac{yu_*}{\nu} + 5.5$$

$$= 2.5\ln\frac{yu_*}{\nu} + 5.5$$



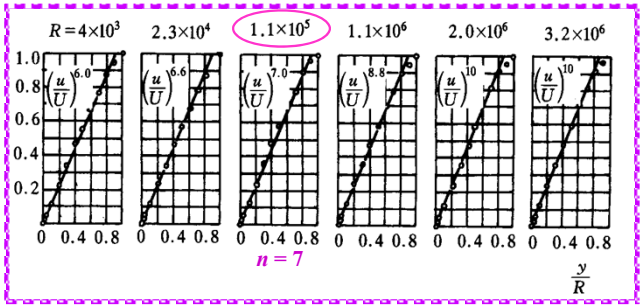
管中心区域 ⇒ $\frac{U-\bar{u}}{u_*} = 2.5\ln\frac{R}{y}$ *velocity defect law*

光滑圆管内的湍流速度分布4

幂次分布律

power law profile

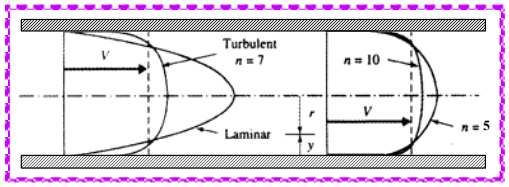
$$\frac{\bar{u}}{U}=\left(\frac{y}{R}\right)^{1/n}=\left(1-\frac{r}{R}\right)^{1/n}$$



光滑圆管内的湍流速度分布5

平均速度与管中心速度的比

$$\frac{\bar{V}}{U}=0.8\sim0.85$$



$$\bar{V}=\frac{Q}{A}=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi r\bar{u}dr$$

$n=6$ ⟹ $\bar{V}/U=0.79$

$$\Rightarrow \frac{\bar{V}}{U}=\frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}$$

$n=10$ ⟹ $\bar{V}/U=0.87$

作业

作业：P.182～184

- 5 – 2
- 5 – 9
- 5 –14

小结1

粘性流体中一点的应力状态

⟹ 由九个应力分量确定，其中六个是独立的

本构方程

⟹ 应力与变形速度的关系

小结2

流动的两种状态

→ 层流、湍流、流动状态的判据 Re

N-S方程精确解

- 简化模型：定常、均质不可压缩、质量力只有重力、二元流动、充分发展
- 边界条件：无滑移、园管中心、自由面等

小结3

切应力

- 层流：分子间内聚力、分子热运动

→ $$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

- 湍流：分子间内聚力、分子热运动、流体质点随机运动导致的湍流附加应力

→ $$\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho \overline{u'v'}$$

小结4

两无限大平板间的充分发展层流

- 速度分布规律
- 平均速度与最大速度之间的关系
- 压强分布规律
- 库埃特流速度分布与压强梯度的关系

小结5

园管内充分发展层流

- 速度分布规律
- 平均速度与最大速度之间的关系
- 切应力沿径向的分布规律
- 湍流时，两种不同原因引起的切应力在层流底层及湍流核心区中的分布

小结6

有关湍流的几个概念

- 时均物理量及其平均物理量的区别
- 脉动物理量及其时均值、湍动能、湍流度

小结7

其它公式

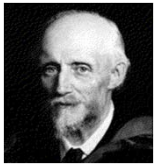
园管内层流速度分布 $\Rightarrow$ $V_z = \frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{l}\left(R^2 - r^2\right)$

园管内切应力分布

$\Rightarrow$ $\tau = \frac{\Delta p}{2l} r$ $\tau = \frac{r}{R}\tau_w$

雷诺

- 英国力学家、物理学家和工程师
  - 发现流动的相似律
  - 1883，经典论文—《决定水流为直线或曲线运动的条件以及在平行水槽中的阻力定律的探讨》
  - 早期研究：磁场、电场以及天体特性
  - 流体力学，固体和流体之间冷凝和传热，涡轮泵，河流的波浪运动和潮汐运动
  - 1867，毕业于剑桥大学王后学院；1868，曼彻斯特欧文学院首席工程学教授；1877，当选为皇家学会会员 1888，获皇家勋章

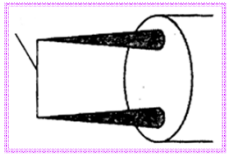


Osborne Reynolds
1842-1912

热线风速仪

热线风速仪 $\Rightarrow$ 气流中电阻丝的散热率与气流速度间的关系

hot-wire anemometer



铂丝或钨丝：直径0.0038-0.005 mm，长1-2 mm

圆管内的充分发展层流

当一个人情绪激动时，脸部常常涨得通红，这可以用泊肃叶定律解释

- 流体粘度表达式

$$\mu = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8Ql}$$

在一定管径和比压降条件下，流体粘度可通过测量流量得到。这就是所谓的毛细管式粘度计的工作原理