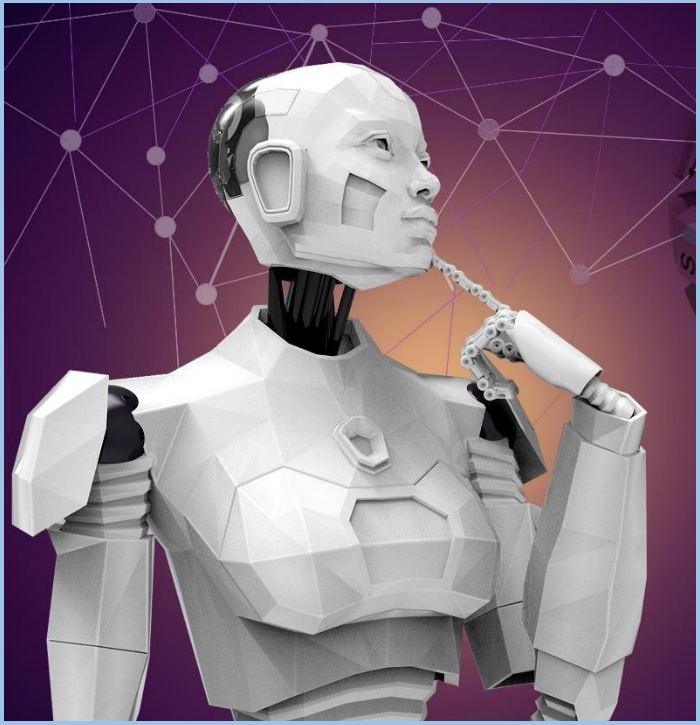
第6章：操作臂的雅克比矩阵



主讲：许璟、周家乐

单位：信息科学与工程学院

邮箱：jingxu@ecust.edu.cn

办公：徐汇校区 实验19楼1213室

主要内容

6.1 引例

6.2 速度雅克比矩阵

6.3 逆雅克比矩阵和奇异性

6.4 操作臂的灵巧度

6.5 力雅克比矩阵

6.6 冗余度机器人

6.7 刚度与柔度

6.8 误差标定与补偿

- 位移分析：第三章运动学方程建立（D-H、指数积）
- 速度分析：操作空间速度与关节空间速度的线性映射关系—雅可比矩阵J (q)
- 力分析：末端操作力与各关节驱动力的线性映射关系——力雅可比矩阵$J^T(q)$

6.1 引例

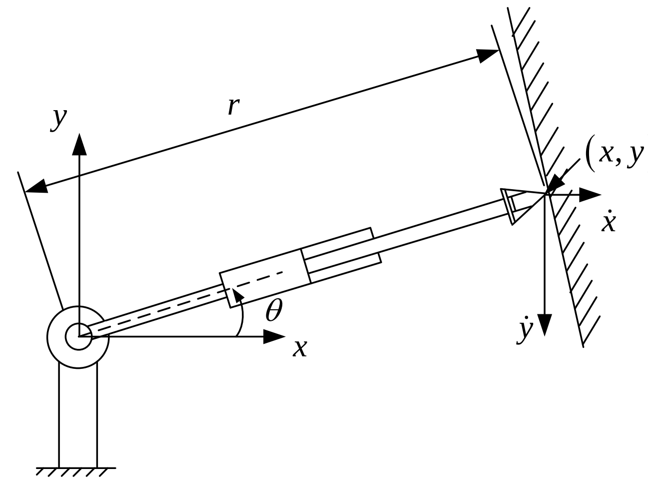
- **R-P平面机械手，有2个关节，一个旋转关节（关节变量 θ），一个为移动关节（关节变量 r），运动学方程：**

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta$$

- **对时间求导，得操作速度与关节速度关系：**

$$\dot{x} = -\dot{\theta} r\sin\theta + \dot{r}\cos\theta,$$
$$\dot{y} = \dot{\theta} r\cos\theta + \dot{r}\sin\theta \qquad \dot{\boldsymbol{q}}$$

- **写成矩阵形式：**



R-P平面机械手

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ **表示末端操作速度、** $\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} & \dot{r} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ **表示关节速度**

- **速度雅克比矩阵J(q)表示：从关节速度矢量　到操作速度 $\dot{x}$ 的映射**

- **雅克比矩阵行列式为零 $|J(\boldsymbol{q})| = 0$，机器人形位处于奇异状态（避免）**

6.1 引例

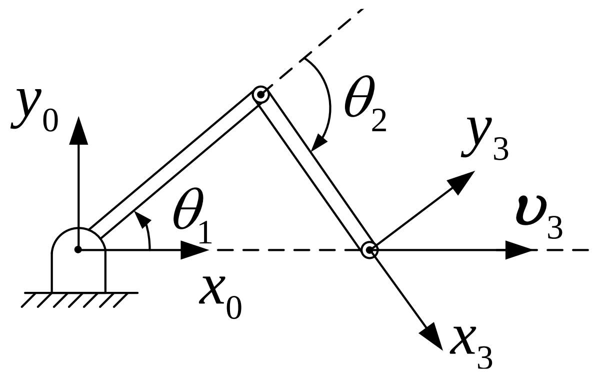
□ 2R平面机械手，有2个转动关节，关节变量 θ_1, θ_2

运动学方程：

$$x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\left(\theta_1 + \theta_2\right)$$

$$y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\left(\theta_1 + \theta\right)_2$$

雅克比矩阵：



2R平面机械手

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin\left(\theta_1 + \theta_2\right) & -l_2 \sin\left(\theta_1 + \theta_2\right) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) & l_2 \cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) \end{bmatrix}$$

逆雅克比矩阵：

$$\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{l_1 l_2 \sin\theta_2} \begin{bmatrix} l_2 \cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) & l_2 \sin\left(\theta_1 + \theta_2\right) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) & -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin\left(\theta_1 + \theta_2\right) \end{bmatrix}$$

行列式为零：$\theta_2 = 0$ **或** $\theta_2 = \pi$ **，即机器人完全拉直或缩回时处于奇异状态；机器人末端只能沿一个方向（切向）运动，退化为1个自由度。**

6.2 速度雅克比矩阵

- 速度可以看作时单位时间内的微分运动，故雅克比可以看成是关节空间的微分运动dq向操作空间微分运动D的转换矩阵，即：

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{q}\right)d\boldsymbol{q}$$

- 雅克比矩阵：不一定是方阵，行数等于机器人操作空间维，列数等于机器人的关节数。对于n个关节的机器人，雅克比是6 ×n的矩阵，前3行代表末端线速度映射、后3行代表末端角速度映射，分块为：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\upsilon} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{l1} & \cdots & \boldsymbol{J}_{ln} \\ \boldsymbol{J}_{a1} & \cdots & \boldsymbol{J}_{an} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

- 微分移动矢量 d 和微分转动矢量 δ 与各关节微分运动dq的关系：

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{J}_{l1}d\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{J}_{l2}d\boldsymbol{q}_2 + \cdots + \boldsymbol{J}_{l\mathrm{n}}d\boldsymbol{q}_n,$$
$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{J}_{a1}d\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{J}_{a2}d\boldsymbol{q}_2 + \cdots + \boldsymbol{J}_{an}d\boldsymbol{q}_n$$

矢量积方法

- 对于移动关节i，末端线速度 υ 与z_i方向相同：

$$\begin{bmatrix} \upsilon \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_i \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \dot{q}_i, \qquad \boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_i \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

- 对于转动关节i，末端角速度为 $\omega = z_i \dot{q}_i$ ，线速度为矢量积，故：

$$\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_i \times \left({}_i^0\boldsymbol{R}\, {}^i\boldsymbol{p}_n \right) \\ \boldsymbol{z}_i \end{bmatrix}$$

式中 $\left({}_i^0\boldsymbol{R}\, {}^i\boldsymbol{p}_n \right)$ 表示末端原点在{i}坐标系的位置矢量在基坐标系{0}的表示

- 当需要在工具坐标系{T}中表示线速度和角速度时：

$$\begin{bmatrix} {}^n\upsilon \\ {}^n\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_n^o\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & {}_n^o\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_n^o\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & {}_n^o\boldsymbol{R} \end{bmatrix} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = \boxed{{}^T\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})}\dot{\boldsymbol{q}}$$

工具坐标系{T}中的雅克比

微分变换法（D-H方法基础上）

- 相对工具坐标系的微分与相对基坐标系的微分存在如下关系：

$$\begin{bmatrix} {}^{T}d_x \\ {}^{T}d_y \\ {}^{T}d_z \\ {}^{T}\delta_x \\ {}^{T}\delta_y \\ {}^{T}\delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_x & \boldsymbol{n}_y & \boldsymbol{n}_z & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_x & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_y & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_z \\ \boldsymbol{o}_x & \boldsymbol{o}_y & \boldsymbol{o}_z & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_x & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_y & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_z \\ \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_x & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_y & (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_z \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \\ 0 & 0 & 0 & o_x & o_y & o_z \\ 0 & 0 & 0 & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix}$$

- 应用广泛：机器人速度分析、标定、补偿、夹具、加工等

微分变换法（D-H方法基础上）

- 对于第i个关节，微分运动矢量

$$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\delta}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\mathrm{d}\theta_i$$

$${}^{T}\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_z\\(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_z\\(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_z\end{bmatrix}\quad {}^{T}\boldsymbol{\delta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}_z\\\boldsymbol{o}_z\\\boldsymbol{a}_z\end{bmatrix}$$

转动关节i

$$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\mathrm{d}d_i\quad \boldsymbol{\delta}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$${}^{T}\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}_z\\\boldsymbol{o}_z\\\boldsymbol{a}_z\end{bmatrix}\mathrm{d}d_i,\quad {}^{T}\boldsymbol{\delta}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

移动关节i

- 注意：T表示在工具坐标系{T}中表示线速度和角速度时

微分变换法（D-H方法基础上）

- 对于第i个关节，雅克比矩阵 ${}^{T}J(q)$ 的第i列：

$$
{}^{T}\boldsymbol{J}_{li}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_z\\(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_z\\(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_z\end{bmatrix}
\qquad
{}^{T}\boldsymbol{J}_{ai}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}_z\\\boldsymbol{o}_z\\\boldsymbol{a}_z\end{bmatrix}
$$

转动关节i

$$
{}^{T}\boldsymbol{J}_{li}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}_z\\\boldsymbol{o}_z\\\boldsymbol{a}_z\end{bmatrix}
\qquad
{}^{T}\boldsymbol{J}_{ai}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}
$$

移动关节i

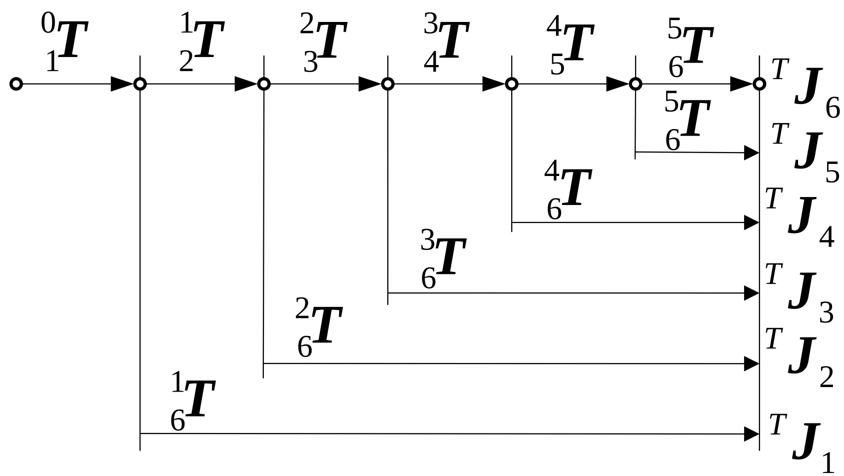
- 注意：T表示在工具坐标系{T}中表示线速度和角速度时

微分变换法（PUMA560）

- 计算各连杆变换：${}^{0}_{1}\boldsymbol{T}, {}^{1}_{2}\boldsymbol{T}, \cdots, {}^{n-1}_{n}\boldsymbol{T}$
- 计算末端与各连杆的变换：

$$ {}^{n-1}_{n}\boldsymbol{T} = {}^{n-1}_{n}\boldsymbol{T}\ ,\quad {}^{n-2}_{n}\boldsymbol{T} = {}^{n-2}_{n-1}\boldsymbol{T}\,{}^{n-1}_{n}\boldsymbol{T}\ ,\quad \cdots\ ,\quad {}^{i-1}_{n}\boldsymbol{T} = {}^{i-1}_{i}\boldsymbol{T}\,{}^{i}_{n}\boldsymbol{T}\ ,\quad \cdots\ ,\quad {}^{0}_{n}\boldsymbol{T} = {}^{0}_{1}\boldsymbol{T}\,{}^{1}_{n}\boldsymbol{T} $$

- 计算雅克比 ${}^{T}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$ 的各列，第i列 ${}^{T}\boldsymbol{J}_i$ 由 ${}^{i}_{n}\boldsymbol{T}$ 所决定：



- 工件坐标系中雅克比 ${}^{T}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$ 与 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$ 之间的关系：

$$ {}^{T}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} {}^{0}_{n}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & {}^{0}_{n}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}), \qquad \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} {}^{0}_{n}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & {}^{0}_{n}\boldsymbol{R} \end{bmatrix} {}^{T}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) $$

实例：计算$^TJ(q)$

$$^TJ_{li}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n})_z\\(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{o})_z\\(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})_z\end{bmatrix}\qquad {}^TJ_{li}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}_z\\\boldsymbol{o}_z\\\boldsymbol{a}_z\end{bmatrix}$$

$$^TJ_{ai}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}_z\\\boldsymbol{o}_z\\\boldsymbol{a}_z\end{bmatrix}\qquad {}^TJ_{ai}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$^TJ(q)$第一列$^TJ_1(q)$对应的变换是 ${}^1_6T$

$${}^1_6\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}_x & \boldsymbol{o}_x & \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{p}_x\\\boldsymbol{n}_y & \boldsymbol{o}_y & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{p}_y\\\boldsymbol{n}_z & \boldsymbol{o}_z & \boldsymbol{a}_z & \boldsymbol{p}_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$n_x=c_{23}(c_4c_5c_6-s_4s_6)-s_{23}s_5c_6$$
$$n_y=-s_4c_5c_6-c_4s_6$$
$$n_z=-s_{23}(c_4c_5c_6-s_4s_6)-c_{23}s_5c_6$$
$$o_x=-c_{23}(c_4c_5c_6+s_4s_6)+s_{23}s_5c_6$$
$$o_y=s_4c_5c_6-c_4s_6$$
$$o_z=s_{23}(c_4c_5c_6+s_4s_6)+c_{23}s_5c_6$$
$$a_x=-c_{23}c_4s_5-s_{23}c_5$$
$$a_y=s_4s_5$$
$$a_z=s_{23}c_4s_5-c_{23}c_5$$
$$p_x=a_2c_2+a_3c_{23}-d_4s_{23}$$
$$p_y=d_2$$
$$p_z=-a_3s_{23}-a_2s_2-d_4c_{23}$$

$$^TJ_1(q)=\begin{bmatrix}{}^TJ_{1x}\\{}^TJ_{1y}\\{}^TJ_{1z}\\-s_{23}(c_4c_5c_6-s_4s_6)-c_{23}s_5c_6\\s_{23}(c_4c_5c_6+s_4s_6)+c_{23}s_5c_6\\s_{23}c_4s_5-c_{23}c_5\end{bmatrix}$$

$$
{}^{T}\boldsymbol{J}_{1x} = (p\times n)_z = \begin{bmatrix} a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23} \\ d_2 \\ -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6 \\ -s_4c_5c_6 - c_4s_6 \\ -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6 \end{bmatrix}
$$

$$
= (a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23})(-s_4c_5c_6 - c_4s_6) - d_2(c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6)
$$

$$
{}^{T}\boldsymbol{J}_{1y} = (p\times o)_z = \begin{bmatrix} a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23} \\ d_2 \\ -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -c_{23}(c_4c_5c_6 + s_4s_6) + s_{23}s_5c_6 \\ s_4c_5c_6 - c_4s_6 \\ s_{23}(c_4c_5c_6 + s_4s_6) + c_{23}s_5c_6 \end{bmatrix}
$$

$$
= (a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23})(s_4c_5c_6 - c_4s_6) - d_2(-c_{23}(c_4c_5c_6 + s_4s_6) + s_{23}s_5c_6)
$$

$$
{}^{T}\boldsymbol{J}_{1z} = (p\times a)_z = \begin{bmatrix} a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23} \\ d_2 \\ -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -c_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \\ s_4s_5 \\ s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \end{bmatrix}
$$

$$
= s_4s_5(a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}) + d_2(c_{23}c_4s_5 + c_{23}c_5)
$$

指数积法

- 经推导，末端速度与各个关节速度成**线性关系**，运动旋量坐标：

$$ {}_T^S V^s = {}_T^S \boldsymbol{J}^s(\theta)\dot{\boldsymbol{\theta}} $$

式中 ${}_T^S J^S(\theta) \in \Re^{6\times n}$ 称为操作臂的空间雅克比矩阵

- 经推导（参考**教材**），速度雅克比的每一列为：

$$ \boxed{\begin{aligned} &{}_T^S \boldsymbol{J}^s(\theta) = \begin{bmatrix} V_1^{'} & V_2^{'} & \cdots & V_n^{'} \end{bmatrix}, \\ &V_i^{'} = Ad\left(e^{[V_1]\theta_1} \ldots e^{[V_{i-1}]\theta_{i-1}}\right)V_i \end{aligned}} $$

显然： 雅克比第i列 $V_i^{'}$ 仅与 $\theta_1,\ldots,\theta_{i-1}$ 有关；第i个关节的运动旋量坐标

经伴随变换即可得到雅克比的第i列 $V_i^{'}$ 。

- 空间雅克比与物体雅克比存在关系：

$$ {}_T^S \boldsymbol{J}^s(\theta) = Ad\left({}_T^S \boldsymbol{T}(\theta)\right){}_T^S \boldsymbol{J}^b(\theta) $$

- **练习**：用指数积方法推导SCARA机器人空间雅克比?

6.3 雅克比矩阵几何性质

- 线性映射J的域空间R(J)是操作空间R^m的子空间，代表机器人在该形位时能达到的操作速度的集合（或微分运动的集合）
- 线性映射J的零空间N(J)是关节空间R^n的子空间，代表不产生操作速度（或微分运动）的关节速度（或微分运动）的集合

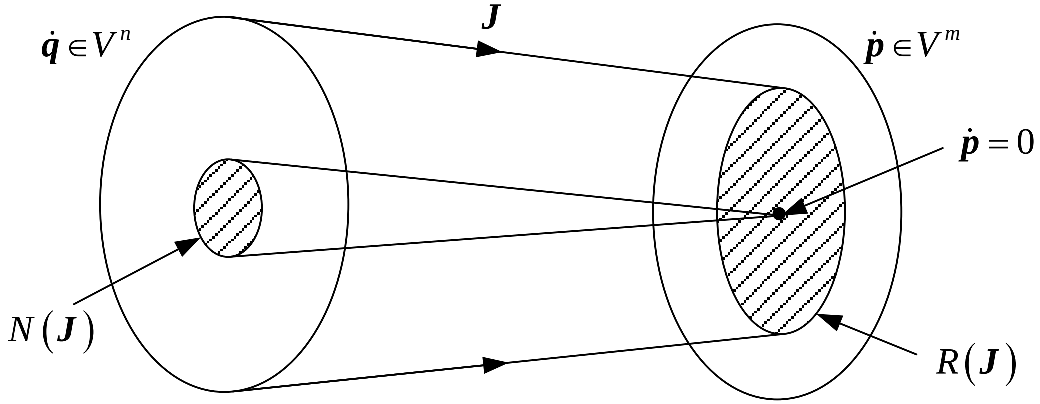
$$\dim\left[R\left(\boldsymbol{J}\right)\right]+\dim\left[N\left(\boldsymbol{J}\right)\right]=n$$

6.3 雅克比矩阵几何性质

- 线性映射J的域空间R(J)是操作空间R^m的子空间，代表机器人在该形位时能达到的操作速度的集合（或微分运动的集合）
- 线性映射J的零空间N(J)是关节空间R^n的子空间，代表不产生操作速度（或微分运动）的关节速度（或微分运动）的集合

$$\dim\left[R\left(\boldsymbol{J}\right)\right]+\dim\left[N\left(\boldsymbol{J}\right)\right]=n$$

- 当n>m且J满秩时，机器人具有冗余自由度，冗余度定义为N(J)的维数；当n=m且J满秩时，机器人具有满自由度；当n<m，机器人是欠自由度。机器人处于奇异形位时，机器人冗余度将减少。



关节速度与操作速度的线性映射

雅克比伪逆的计算

- 雅克比表达式复杂，其逆$J^{-1}(q)$的求解十分困难，数值计算较慢，会碰到奇异和病态情况。有学者提出采用伪逆J^{+}处理奇异状态速度反解：

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{+}\left(\boldsymbol{q}\right)\dot{\boldsymbol{x}}$$

式中 $\boldsymbol{J}^{+} \in \boldsymbol{R}^{n\times m}$ 是雅克比矩阵J伪逆，是下面方程最小范数的最小二乘解：

$$\min\left\|\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{x}}\right\| = \left\|\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{+}\dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{x}}\right\|$$

- 伪逆J^{+}满足$J\,J^{+}=I$，如果J(q)的秩等于m，可由下式计算：

$$\boldsymbol{J}^{+} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

- 机器人处于奇异形位时，可采用Mayne修改算法计算J^{+}。

6.4 操作臂的灵巧度

- **雅克比的奇异性定性描述了操作臂灵巧度，定量指标与奇异值有关：**

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{U}\Sigma\boldsymbol{V}$$

式中 $U\in\Re^{m\times m},\boldsymbol{V}\in\Re^{n\times n}$ **为正交矩阵，而：**

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m & 0\end{bmatrix}$$

式中 $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_m\ge 0$ **为J的奇异值。**

- **对角阵** Σ **与雅克比矩阵J具有相同的秩，当** $rank(\Sigma)=rank(\boldsymbol{J})=r$ **时**

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}$$

灵巧性度量指标

- 条件数（Salibury和Craig）：采用条件数（可证明 $k(J)=\sigma_1/\sigma_r$）：

$$k(J)=\begin{cases}\|J(q)\|\ \ \|J^{-}(q)\| & (m=n\text{时})\\ \|J(q)\|\ \ \|J^{+}(q)\| & (m<n\ \text{时})\end{cases}$$

- 最小条件数：采用最小奇异值作为控制关节速度上限的指标

$$\|\dot{q}\|<(1/\sigma_r)\|\dot{x}\|$$

- 运动灵巧性（Angeles和Rojas）：采用最小条件数的倒数

$$D=\frac{1}{k_m}\times 100\%,\qquad k_m=\min_{q_2,q_3,\cdots,q_5} k(J)$$

- 可操作性（Yoshikawa）：采用雅克比与其转置的行列式

$$\boxed{w=\sqrt{\det\left[J(q)J^{\mathrm{T}}(q)\right]}=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m}$$

显然：当m=n时，$w=|\det(J(q))|$；处于奇异时，$rank(J(q))<m$，$w=0$，操作臂的可操作性为0

6.5 力雅克比矩阵

- **操作臂末端受到的外力 f_n 和力矩 m_n 组成6维矢量：**

$$F_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_n \\ \boldsymbol{m}_n \end{bmatrix}$$

- **定义各个关节驱动力（或力矩）矢量：** $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2 \ldots \tau_n]^{\mathrm{T}}$
- **虚功原理：关节空间虚位移产生的虚功等于操作空间产生的虚功**

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} \delta \boldsymbol{q} = F^{\mathrm{T}} D$$

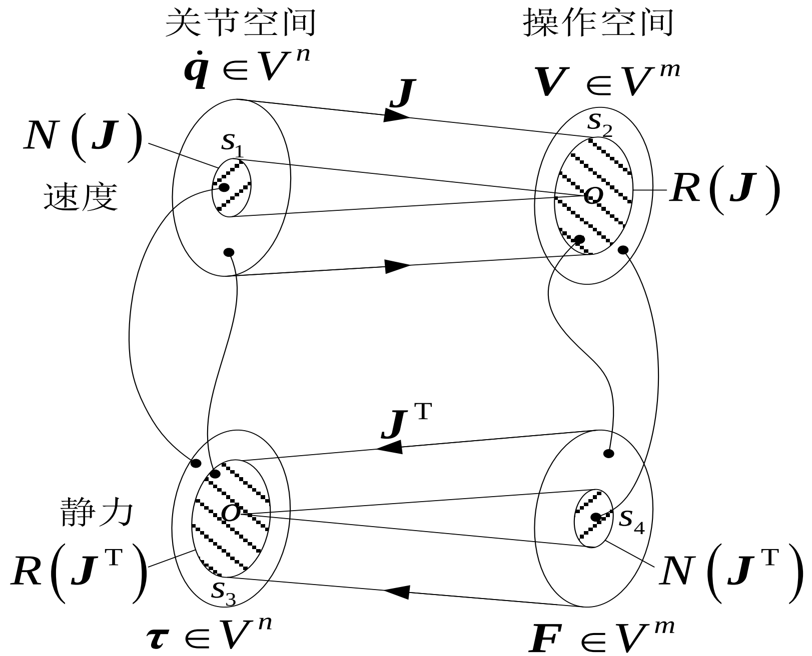
- **将** $D = J(\boldsymbol{q})d\boldsymbol{q}$ **代入上式可得：** $\boxed{\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})F}$
- **上式是无摩擦时操作臂力平衡的条件。J的转置$J^{\mathrm{T}}(q)$就是力雅克比矩阵，表示将作用在末端的力F线性映射为相应的关节驱动力。**

6.5 力雅克比矩阵

- **操作臂速度传递与静力传递存在对偶关系：**

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}},\quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})F$$

- **J(q)是m×n阶矩阵，n表示关节数，m表示操作空间的维数；**
- **J的值域R(J)和零空间N(J)前面已经讨论；值域空间R(J^{T} (q))表示操作力能够平衡的所有关节力矢量的集合，零空间N(J^{T} (q))代表不需要任何关节驱动力能承受的所有操作力的集合,末端操作力由机构本身承受：**



速度与静力的线性映射

力旋量坐标的伴随表示

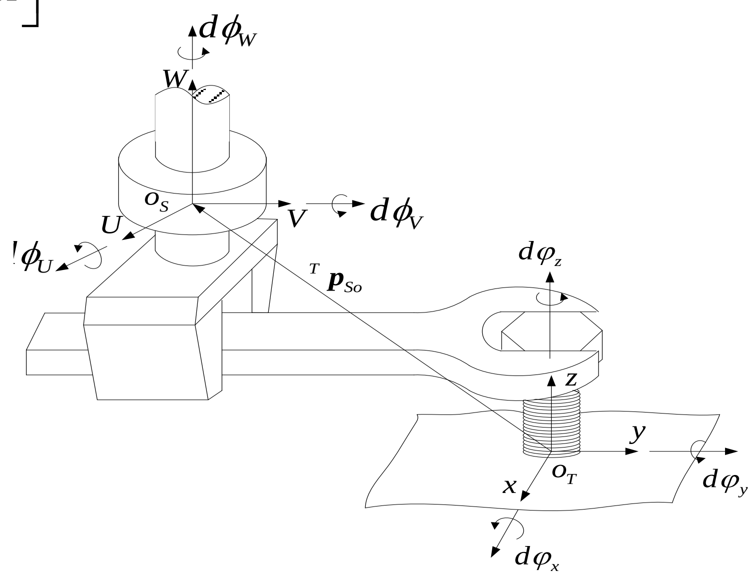
- 由虚功原理，6维力旋量坐标F从坐标系{B}到{A }可用伴随变换表示：

$$ {}^{A}F = Ad_{F}\left({}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\right){}^{B}F $$

- 力旋量坐标的伴随变换（与速度伴随变换对偶）：

$$ Ad_{F}\left({}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\right) = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0} \\ \left[{}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R} & {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} \end{bmatrix} $$

练习：已知作用在手腕的 ${}^{S}F$，求 ${}^{T}F$



解答：

1）求变换矩阵： $ {}^{T}_{S}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} {}^{T}_{S}\boldsymbol{R} & {}^{T}\boldsymbol{p}_{So} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} $

2）微分运动传递（速度伴随）：

$$ \begin{bmatrix} {}^{S}\boldsymbol{d} \\ {}^{S}\boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{S}_{T}\boldsymbol{R} & \left[{}^{S}\boldsymbol{p}_{To}\right]{}^{S}_{T}\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} & {}^{S}_{T}\boldsymbol{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{T}\boldsymbol{d} \\ {}^{T}\boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} $$

3）由对偶性得静力传递：

$$ \begin{bmatrix} {}^{T}\boldsymbol{f} \\ {}^{T}\boldsymbol{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{T}_{S}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0} \\ \left[{}^{T}\boldsymbol{p}_{So}\right]{}^{T}_{S}\boldsymbol{R} & {}^{T}_{S}\boldsymbol{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{S}\boldsymbol{f} \\ {}^{S}\boldsymbol{m} \end{bmatrix} $$

6.6 冗余度机器人

- 冗余度机器人：完成某一任务具有多余的自由度；增加了机器人的灵巧性、避免奇异性、躲避障碍物、改善动力学性能。
- 关节空间维数大于操作空间维数：n>m；J 满秩时，冗余度定义为：

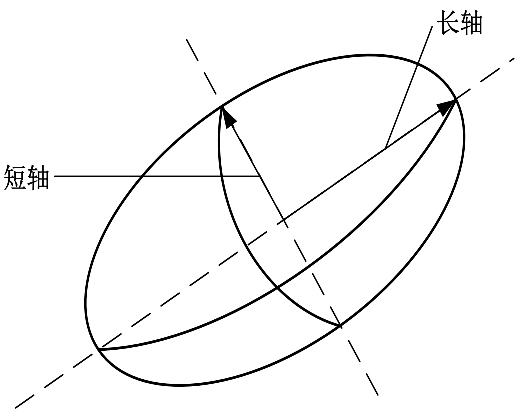
$$\dim\left[N\left(\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{q}\right)\right)\right]=n-m>0$$

- 冗余度机器人运动反解有无限个、速度反解：$\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{J}^{+}\dot{\boldsymbol{x}}+\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}^{+}\boldsymbol{J}\right)\dot{\boldsymbol{\phi}}$
- 速度比椭球：度量冗余度机器人运动过程的灵巧性：

$$\gamma_{v}=\sqrt{\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_{x}\dot{\boldsymbol{x}}}\Big/\sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_{q}\dot{\boldsymbol{q}}}$$

式中$\boldsymbol{w}_{x}\in\boldsymbol{R}^{m\times m},\boldsymbol{w}_{q}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$是加权矩阵，一般为对角阵。

- 给定机器人形位和末端速度，γ_{v} 表面形成椭球：
- ◆ 长轴等于J最大特征值，短轴等于最小特征值;
- ◆ 短轴方向，机械手灵巧性最差，末端变向很困难;
- ◆ 奇异点处，短轴为零，末端在短轴方向不能运动;
- ◆ 椭球越大、长短越均匀，灵巧性就越好。



操作臂速度比椭球

6.7 刚度与柔度

- 操作臂末端外力作用下变形：与操作臂刚度和作用力大小有关，刚度影响操作臂动态特性和在负载情况下的定位精度；
- 工业机器人变形：传动、减速装置和伺服驱动系统；
- 关节力矩 $\tau_i = k_i \cdot \Delta q_i$ 称为静态误差力矩，其矢量形式：

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{K}\Delta\boldsymbol{q}$$

式中 $\boldsymbol{K} = diag\left[k_1, k_2, \dots, k_n\right]$ 为由刚度系数组成的对角阵

- 根据 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{J}\Delta\boldsymbol{q}$ 的对偶关系，得：

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{F},$$

$$\boldsymbol{F} = \boxed{\boldsymbol{C}^{-1}}\boldsymbol{D}$$

式中柔度矩阵C表示操作力F和末端变形D之间的线性关系；柔度矩阵的逆表示末端刚度矩阵，操作臂末端柔度和刚度矩阵决定了各关节的刚度和雅克比矩阵。

6.8 误差标定与补偿

- 机器人标定：**运动参数标定**、视觉系统标定、多维力传感标定等；
- 连杆变换法：

$$ {}^{i-1}_{i}\boldsymbol{T}\left(a_{i-1},\alpha_{i-1},d_i,\theta_i\right)=Trans\left(x,a_{i-1}\right)Rot\left(x,\alpha_{i-1}\right)Trans\left(z,d_i\right)Rot\left(z,\theta_i\right) $$

考虑了两轴线平行时奇异情况：$Rot\left(y,\beta\right)$

$$ {}^{i-1}_{i}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c\theta_i c\beta_i & -s\theta_i & c\theta_i s\beta_i & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1}c\beta_i+s\alpha_{i-1}s\beta_i & c\theta_i c\alpha_{i-1} & s\theta_i c\alpha_{i-1}s\beta_i-s\alpha_{i-1}c\beta_i & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1}c\beta_i-c\alpha_{i-1}s\beta_i & c\theta_i s\alpha_{i-1} & s\theta_i c\alpha_{i-1}s\beta_i+c\alpha_{i-1}c\beta_i & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

微分移动矢量和微分转动矢量

$$ \boldsymbol{d}=\boldsymbol{M}_{\theta}\Delta\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{M}_{d}\Delta\boldsymbol{d}+\boldsymbol{M}_{a}\Delta\boldsymbol{a}+\boldsymbol{M}_{\alpha}\Delta\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{M}_{\beta}\Delta\boldsymbol{\beta}, $$

$$ \boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{R}_{\theta}\Delta\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{R}_{\alpha}\Delta\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{R}_{\beta}\Delta\boldsymbol{\beta} $$

求解线性方程：B偏导数矩阵、x变量、b观测矢量

$$ \boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{b} $$

6.8 误差标定与补偿

- 机器人标定：**运动参数标定**、视觉系统标定、多维力传感标定等；
- 指数积法：

◆ 变换矩阵由各误差引起的微分：

$$\delta \boldsymbol{T} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial L}\delta V + \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial V_T}\delta V_T$$

式中三项分别为 $\boldsymbol{T} = e^{[V_1]\theta_1} e^{[V_2]\theta_2} \dots e^{[V_n]\theta_n} e^{[V_T]} = {}^S_T T(0)$ 为 V, θ, $e^{[V_T]}$ 引入的分量

◆ 最终可转化为如下运动参数辨识的约束求解问题：

$$Minimize: \quad \left\| \boxed{\delta \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial V}\delta V + \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial V_T}\delta V_T\right)\boldsymbol{T}^{-1}} \right\|^2$$

$$Subject\ to: \quad \begin{cases} r-\text{joint} & \|\omega_i + \delta\omega_i\| = 1, \quad (\omega_i + \delta\omega_i)\cdot(\upsilon_i + \delta\upsilon_i) = 0 \\ p-\text{joint} & \|\upsilon_i + \delta\upsilon_i\| = 1 \end{cases}$$

◆ 带等式约束的最小二乘法问题：可采用拉格朗日乘子求解