

Semaine 11

Questions pour réviser

1/3] 1. On calcule

$$\begin{aligned}\hat{\vec{p}} \psi &= -i\hbar \vec{\text{grad}} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = -\frac{i\hbar}{\sqrt{V}} \left(\frac{\partial}{\partial x} (e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}) \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} (e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}) \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} (e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}) \vec{e}_z \right) \\ &= -\frac{i\hbar}{\sqrt{V}} \left(i k_x \vec{e}_x + i k_y \vec{e}_y + i k_z \vec{e}_z \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ &= \hbar \vec{k} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}}{\sqrt{V}}\end{aligned}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = k_x x + k_y y + k_z z$$

$$\hat{\vec{p}} \psi = \hbar \vec{k} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}}{\sqrt{V}}$$

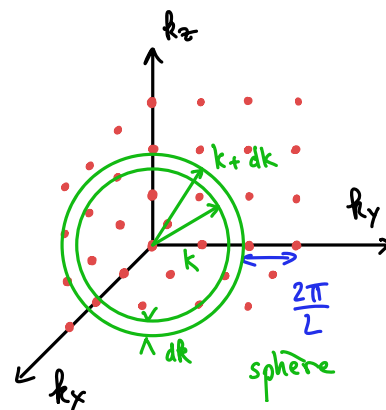
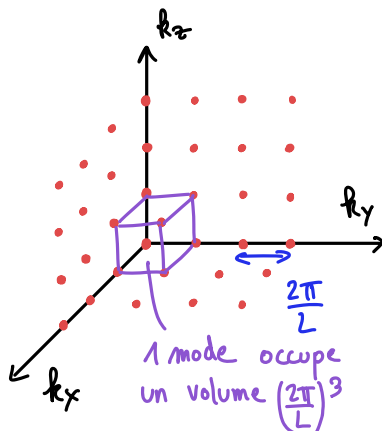
$$\boxed{\hat{\vec{p}} \psi = \hbar \vec{k} \psi}$$

donc ψ est fonction propre de $\hat{\vec{p}}$
avec valeur propre $\vec{p} = \hbar \vec{k}$

$$2. \text{ On déduit } \hat{H} \psi = |\hat{\vec{p}}| c \psi = \underbrace{|\hbar \vec{k}|}_{E = \hbar k} c \psi = \hbar \omega \psi$$

donc ψ est fonction propre du Hamiltonien. L'énergie est $E = \hbar k c = \hbar \omega$.

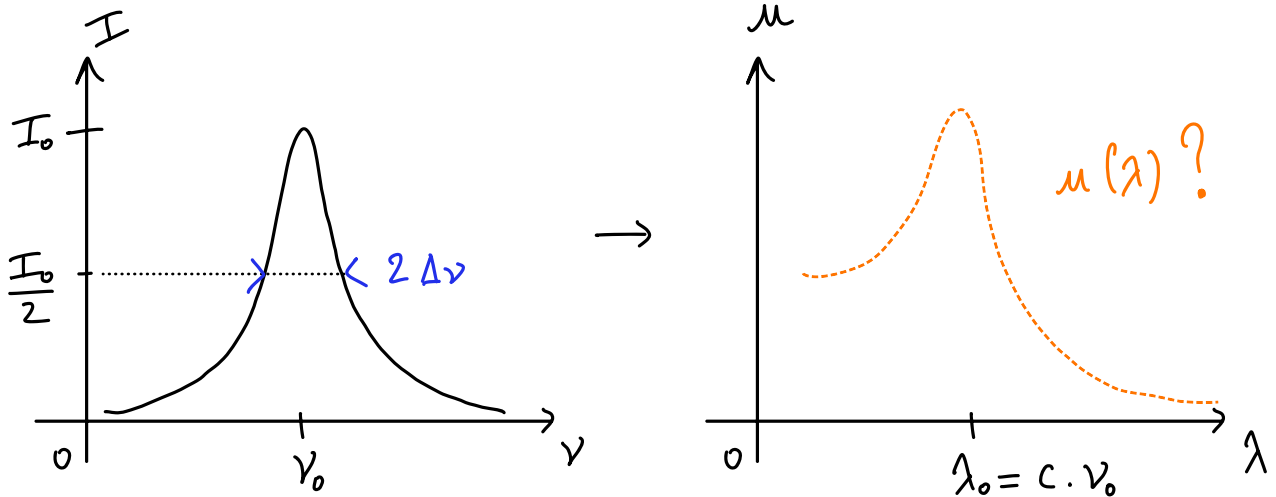
2/3] On compte le nombre d'états



$$g(k) dk \equiv \text{nombre de modes entre } k \text{ et } k+dk = \underbrace{\text{densité de modes}}_{\substack{2 \times \frac{1}{(2\pi)^3} \\ \text{spin}}} \times \underbrace{\text{volume de la coquille}}_{4\pi k^2 dk} = \overset{\checkmark}{L^3} \frac{8\pi k^2 dk}{(2\pi)^3}$$

densité d'états en vecteur d'onde k

3/3) Comment passer de $I(\nu)$ à $u(\lambda)$?



On écrit la conservation de l'énergie

$$I(\nu) d\nu = u(\lambda) |d\lambda| \quad \text{avec} \quad \nu = \frac{c}{\lambda}, \quad d\nu = \frac{c}{\lambda^2} |d\lambda|$$

$$I\left(\frac{c}{\lambda}\right) \cdot \frac{c}{\lambda^2} |d\lambda|$$

donc
$$u(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2} I\left(\frac{c}{\lambda}\right)$$

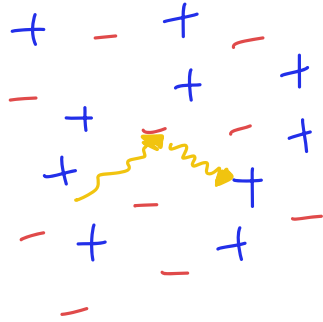
par exemple, avec une Lorentzienne $I(\nu) = \frac{I_0}{1 + \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu}\right)^2}$

on trouve
$$u(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2} \frac{I_0}{1 + \left(\frac{\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda_0}}{\Delta\nu}\right)^2}$$

Slide 9

Big Bang
inflation
formation
des noyaux

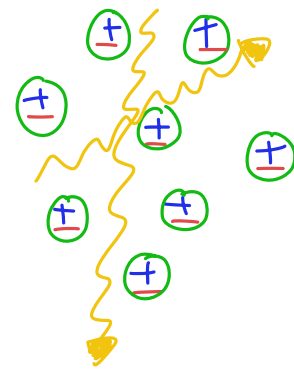
les photons sont
rapidement absorbés
et émis par les
particules chargées



refroidissement
de l'Univers

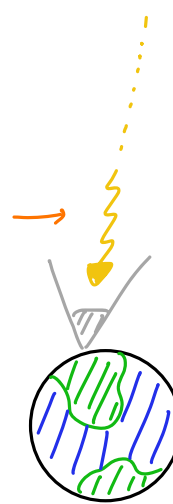
→
recombinaison
et
émission de
photons

les photons peuvent
voyager quasi-librement
dans le milieu neutre



atomes
neutres

photon du
fond diffus
cosmologique



13,7 milliards
d'années

slide 11

On cherche le maximum dans la loi de Planck

$$0 = \frac{\partial u}{\partial \lambda}(\lambda, T) = 8\pi h c \left[-\frac{5}{\lambda^6} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} - \frac{1}{\lambda^5} \frac{\left(-\frac{hc}{\lambda^2 k_B T}\right) e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1\right)^2} \right]$$

$$0 = \frac{8\pi h c}{e^x - 1} \cdot \frac{1}{\lambda^6} \cdot \left[-5 + \frac{x e^x}{e^x - 1} \right]$$

on note $x \equiv \frac{hc}{\lambda k_B T}$

$$x \text{ est solution de } 5(e^x - 1) = x e^x \Leftrightarrow 5(1 - e^{-x}) = x \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{5} = e^{-x}$$

La solution (numérique) est $x \approx 4,965$.

D'où $x = 4,965 = \frac{hc}{k_B \lambda_{\max} T} \rightarrow \lambda_{\max} T = \frac{hc}{k_B x} = \text{cte} = 2,897 \times 10^{-3} \text{ K.m}$

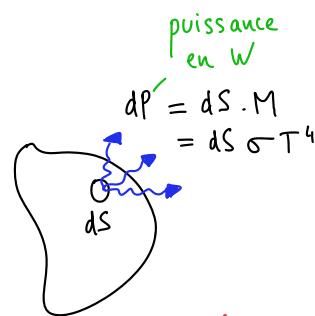
loi de Wien

slide 15

On calcule l'énergie moyenne

$$\begin{aligned} \frac{\langle E \rangle}{V} &= \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{dx}{(\beta \hbar)^4} \frac{x^3}{e^x - 1} \\ &\quad \begin{matrix} x = \beta \hbar \omega \\ dx = \beta \hbar d\omega \end{matrix} \\ &= \frac{1}{\pi^2 c^3 \hbar^3} (k_B T)^4 \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1}}_{\frac{\pi^4}{15}} = \frac{\pi^2}{15} \cdot \frac{k_B^4}{c^3 \hbar^3} T^4 \end{aligned}$$

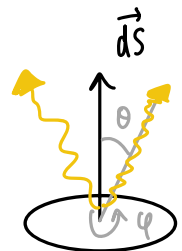
$$\frac{\langle E \rangle}{V} = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} T^4$$



Explication du facteur $\frac{1}{4}$

Flux d'énergie à travers dS

$$\begin{aligned} &= u \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \underbrace{\sin \theta}_{\substack{\text{c. sin } 2\theta \\ 2}} \underbrace{(\cos \theta)}_{\substack{\text{projection} \\ \text{selon la} \\ \text{normale } \vec{dS}}} \\ &= \frac{cU}{4\pi} \cdot 2\pi \cdot \left[-\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{cU}{2} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right] = \frac{cU}{4} \end{aligned}$$



Slide 22

$$\begin{aligned}\langle n_i \rangle &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} (\ln z_{G,i}) = \frac{1}{\beta} \frac{1}{z_{G,i}} \frac{\partial}{\partial \mu} (z_{G,i}) \\ &= \frac{1}{\cancel{\beta}} \cancel{(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_i)})} \cancel{(-1)} \frac{(+\cancel{\beta} e^{\beta(\mu - \epsilon_i)})}{(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_i)})^2} = \frac{e^{\beta(\mu - \epsilon_i)}}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_i)}}\end{aligned}$$

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}$$

statistique de Bose-Einstein