

1 算法复杂度作业

1.1 按照从增长量级低至高对下列函数进行排序

$$f_2 < f_1 < f_4 < f_3$$

1.2 按照从增长量级低至高对下列函数进行排序

$$f_1 < f_4 < f_3 < f_2$$

1.3 按照从增长量级低至高对下列函数进行排序

$$f_4 < f_1 < f_3 < f_2$$

1.4 课本 4.3-1: 证明 $T(n) = T(n-1) + n$ 的解为 $O(n^2)$

即证明 $T(n) \leq cn^2$ 。

假定 $m = n - 1$, 有 $T(n-1) \leq c(n-1)^2$, 即

$$\begin{aligned} T(n) &\leq c(n-1)^2 + n \\ &= cn^2 - (2c-1)n + c \\ &= cn^2 \end{aligned}$$

证毕。

1.5 课本 4.3-2: 证明 $T(n) = T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 1$ 的解为 $O(\lg n)$

即证明 $T(n) \leq c \lg n$ 。

假定 $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, 有 $T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) \leq c \lg \lceil \frac{n}{2} \rceil$, 即

$$\begin{aligned} T(n) &\leq c \lg \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ &= c \lg \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ &= c \lg n \end{aligned}$$

证毕。

1.6 $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + n \lg n$ 是否可用主方法求解复杂度, 如果可以请求解

$$a = 2, b = 3, f(n) = n \lg n, n^{\log_b a} = O(n^{0.63})$$

当 n 足够大时, 取 $c = \frac{2}{3}$, 有 $af(\frac{n}{b}) = 2\frac{n}{3} \lg \frac{n}{3} \leq \frac{2}{3}n \lg n = cf(n)$, 由情况 3, 解为 $T(n) = \Theta(n \lg n)$

1.7 $T(n) = 10T(\frac{n}{3}) + 17n^{1.2}$ 是否可用主方法求解复杂度, 如果可以请求解

$$a = 10, b = 3, f(n) = 17n^{1.2} = \Theta(n^{1.2}), n^{\log_b a} = O(n^{2.09})$$

应用第一种方法得 $T(n) = n^{\log_3 10} = \Theta(n^{2.09})$

1.8 $T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + 100n$ 是否可用主方法求解复杂度, 如果可以请求解

$T(n)$ 系数与参数不是常数, 不能使用主方法。