图论

Graph Theory

用Huffman算法产生最佳前缀码

例：在通信中，八进制数字出现的频率如下：

0：25%　　1：20%

2：15%　　3：10%

4：10%　　5：10%

6：5%　　7：5%

求传输它们的最佳前缀码，并求传输10^n（$n≥2$）个按上述比例出现的八进制数字需要多少个二进制数字？若用等长的（长为3）的码字传输需要多少个二进制数字？

求最佳前缀码

解 用100个八进制数字中各数字出现的个数，即以100乘各频率为权，并将各权由小到大排列，得w_1=5, w_2=5, w_3=10, w_4=10, w_5=10, w_6=15, w_7=20, w_8=25. 用此权产生的最优树如图所示.

01-----0	11-----1
001-----2	100-----3
101-----4	0001-----5
00000-----6	00001-----7

$W(T)$=285，

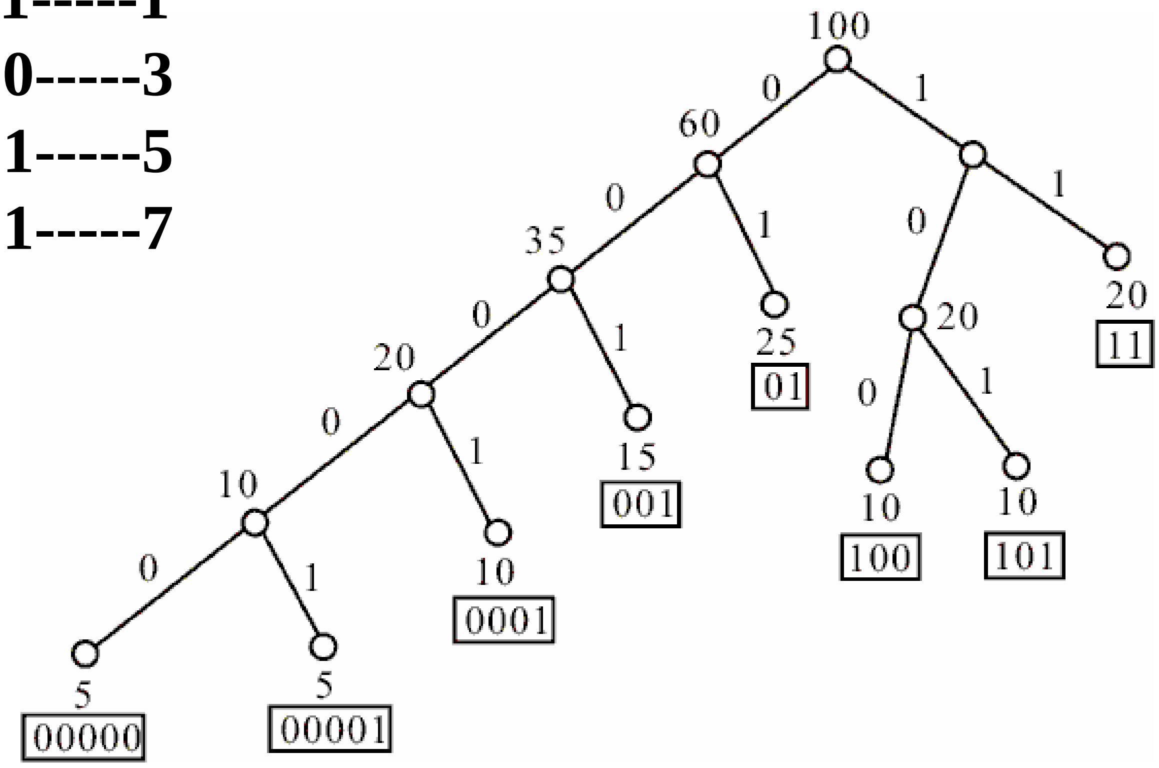
传$10^n(n≥2)$个

用二进制数字需

$2.85×10^n$个，

用等长码需

$3×10^n$个数字.



波兰符号法与逆波兰符号法

行遍或周游根树T——对T的每个顶点访问且仅访问一次.

对2叉有序正则树的周游方式：

① 中序行遍法——次序为：左子树、根、右子树

② 前序行遍法——次序为：根、左子树、右子树

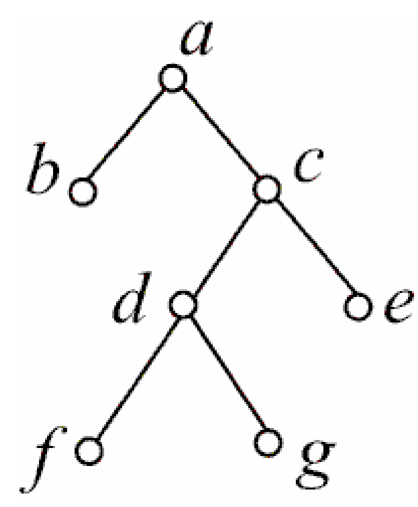
③ 后序行遍法——次序为：左子树、右子树、根

对图所示根树按中序、前序、后序行遍法访问结果分别为：

$b\ \underline{a}\ (f\ \underline{d}\ g)\ \underline{c}\ e$,

$\underline{a}\ b\ (\underline{c}\ (\underline{d}\ f\ g)\ e)$,

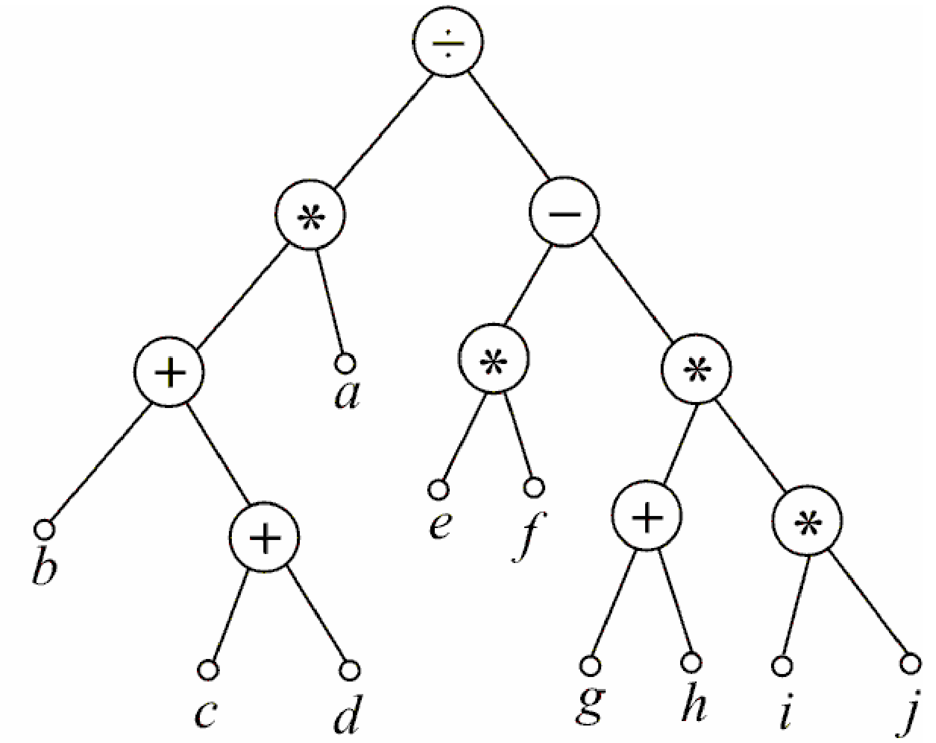
$b\ ((f\ g\ \underline{d})\ e\ \underline{c})\ \underline{a}$



用2叉有序正则树存放算式

存放规则

- 最高层次运算放在树根
- 后依次将运算符放在根子树的根上
- 数放在树叶上
- 规定：被除数、被减数放在左子树树叶上



算式 $((b+(c+d))*a)\div((e*f)-(g+h)*(i*j))$
存放在图所示2叉树上.

波兰符号法

波兰符号法(Polish Notation)

按前序行遍法访问存放算式的2叉有序正则树，其结果不加括号，规定每个运算符号与其后面紧邻两个数进行运算，运算结果正确. 称此算法为波兰符号法或前缀符号法. 对上图的访问结果为

$$\div * + b + c\, d\, a - * e\, f * + g\, h * i\, j$$

逆波兰符号法(Reverse Polish Notation)

按后序行遍法访问，规定每个运算符与前面紧邻两数运算，称为逆波兰符号法或后缀符号法. 对上图的访问结果为

$$b\, c\, d + + a * e\, f * g\, h + i\, j * * - \div$$

6、平面图

概念：

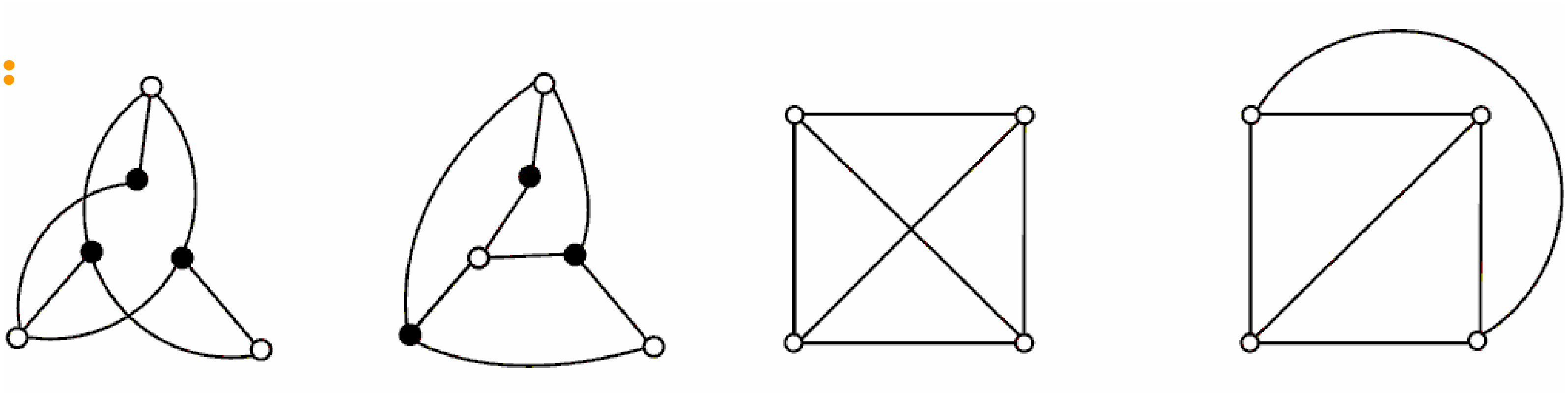
平面图，面，欧拉公式，Kuratoski定理

平面图

设G =<V, E>是一个无向图，如果能够画在平面上，它的边恰在顶点相交，则称G是平面图。(或G能“嵌入平面”)

- 平面嵌入——画出的无边相交的平面图
- 非平面图——无平面嵌入的无向图

例：



(1) (2) (3) (4)

在图中，(2)是(1) 的平面嵌入，(4)是(3)的平面嵌入.

面与次数

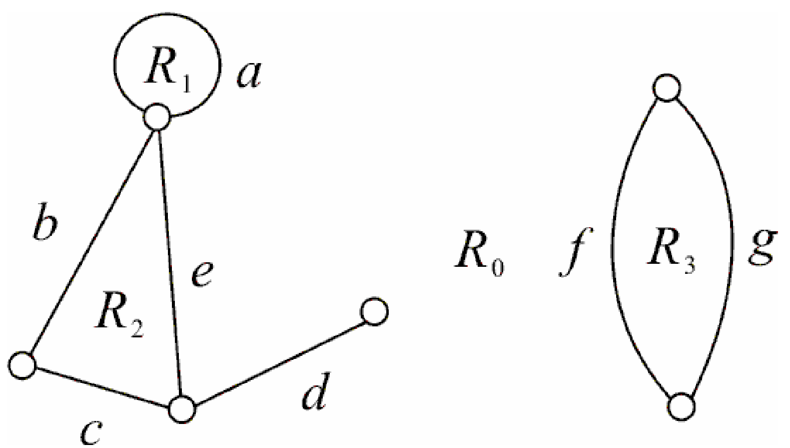
定义：

(1) G的面：由G的平面嵌入的边将平面化分成的区域

(2) 面 R_i 的边界：包围R_i的回路的所有边。

(3) 面 R_i 的次数：R_i边界的长度，用$\deg(R_i)$表示

例：



平面图有4个面，
$\deg(R_1)=1$, $\deg(R_2)=3$,
$\deg(R_3)=2$, $\deg(R_0)=8$.
请写各面的边界.

定理：平面图中，面的次数之和等于其边数的两倍.

欧拉公式

定理 设G为n阶m条边r个面的连通平面图，则$n-m+r=2$（此公式称为欧拉公式）

推论（欧拉公式的推广）设G是具有k（$k\geq 2$）个连通分支的平面图，则$n-m+r=k+1$

欧拉公式应用实例

（1）设G为连通的平面图，且$\deg(R_i) \geq l, l \geq 3$，则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

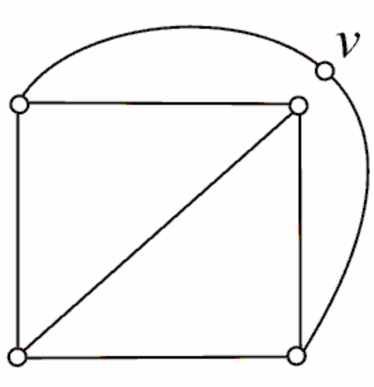
（2）设G为n（$n \geq 3$）阶m条边的简单平面图，则$m \leq 3n-6$.

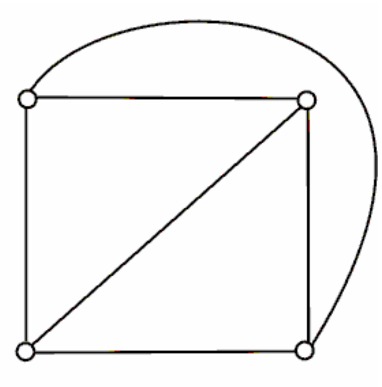
（3）设G 为简单平面图，则 $\delta(G) \leq 5$.

插入2度顶点和消去2度顶点

(1) 消去2度顶点*v*，见下图中，由(1) 到(2)

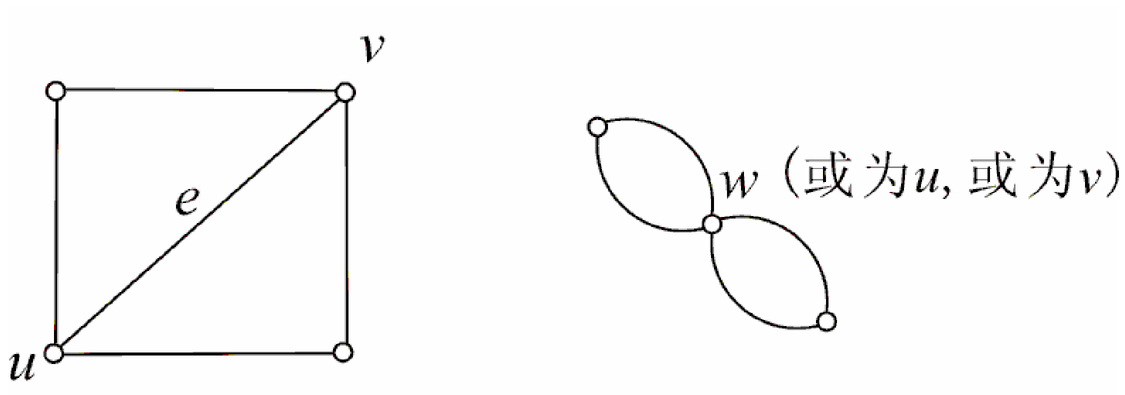
(2) 插入2度顶点*v*，见下图中，从(2) 到(1) .





(1) **(2)**

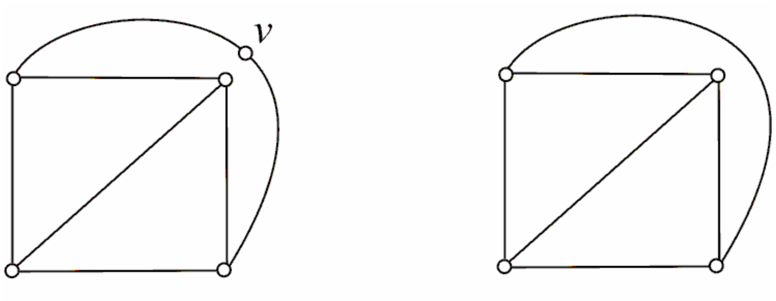
收缩边e，见下图所示.



图的同胚

若$G_1 \cong G_2$，或经过反复插入或消去2度顶点后所得$G'_1 \cong G'_2$，则称G_1与G_2同胚.

例：右边两个图同胚

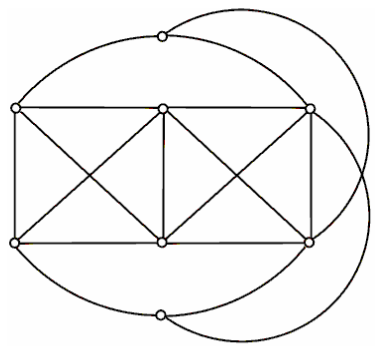


Kuratoski定理

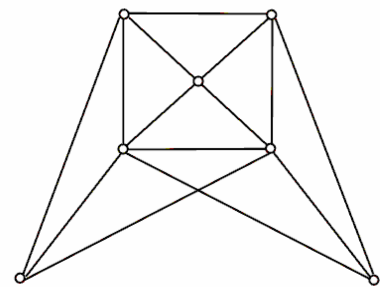
(1) G是平面图 ⇔ G中不含与K_5或$K_{3,3}$同胚的子图.

(2) G是平面图 ⇔ G中无可收缩为K_5或$K_{3,3}$的子图

例：证明所示图(1)与(2)均为非平面图.

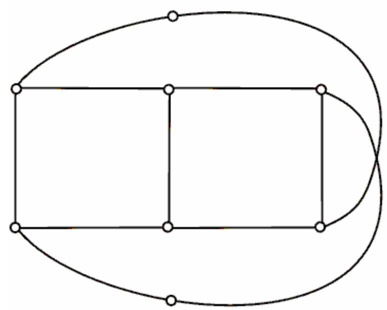


(1)

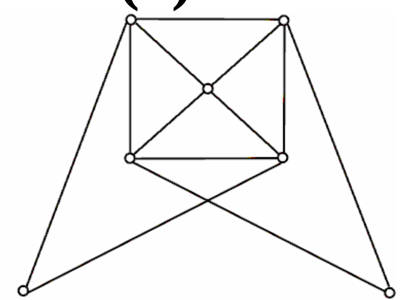


(2)

右图(1),(2)分别为原图(1), (2)的子图与$K_{3,3}$, K_5同胚.



子图 (1)



(2)

图论总结

1. 图的基本概念：无向图、有向图、关联与相邻、简单图、完全图、正则图、子图、补图，握手定理，图的同构
2. 图的连通性:通路，回路，简单通路，简单回路（迹）初级通路（路径），初级回路（圈），点连通，连通图，点割集，割点，边割集，割边，点连通度，边连通度，弱连通图，单向连通图，强连通图，二部图（二分图）
3. 图的矩阵表示：关联矩阵，邻接矩阵，可达矩阵
4. 欧拉图与哈密顿图：欧拉通路、欧拉回路、欧拉图、半欧拉图，哈密顿通路、哈密顿回路、哈密顿图、半哈密顿图
5. 无向树与根树：无向树，生成树，最小生成树，Kruskal，根树，m叉树，最优二叉树，Huffman算法
6. 平面图:平面图，面，欧拉公式，Kuratoski定理