

## 161 期终试卷

一、求下列各题（每小题 5 分，共 10 分）：

1、计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ .

2、计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 - n}{2n^2 + 1} \right)^n$ .

二、解下列各题（每小题 6 分，共 18 分）：

1、记曲线  $3x + 2y^3 - 2x^2 \sin y = 2$  与  $y$  轴交点为  $P$ ，求曲线在  $P$  点处的法线方程.

2、设  $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) + t \\ y = \arctan t \end{cases}$ ，求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1}$ .

3、求函数  $f(x) = (x-1)e^{-x}$  在区间  $[0, +\infty)$  上的最大值.

三、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、若  $f(x) = \frac{x+1}{1-\frac{1}{x^2}}$  间断点的个数为  $n$ ，可去间断点的个数为  $k$ ，则 ( )

(A)  $n=2, k=1$

(B)  $n=2, k=2$

(C)  $n=3, k=1$

(D)  $n=3, k=2$

2、若  $f'(a) = 0$ ，则 ( )

(A)  $f(x) - f(a) = o(x-a)$

(B)  $f(x) - f(a) \sim x-a$

(C)  $x-a = o[f(x) - f(a)]$

(D) 以上都不对

3、设  $f(x) = |\sin \pi x|$ ，则 ( )

(A)  $f'_-(1) = \pi, f'_+(1) = -\pi$

(B)  $f'_-(1) = -\pi, f'_+(1) = \pi$

(C)  $f'_-(1) = f'_+(1) = \pi$

(D)  $f'_-(1) = f'_+(1) = -\pi$

4、若  $\int f(x) dx = \cos(x^2) + C$ ，则  $f'(\sqrt{\pi}) =$  ( )

- (A)  $-1$  (B)  $0$   
 (C)  $-2\sqrt{\pi}$  (D)  $4\pi$

5、“ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = L$ ”是“ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(2n) = L$ ”的 ( )

- (A) 充要条件 (B) 必要条件, 非充分条件  
 (C) 充分条件, 非必要条件 (D) 既不是必要条件, 也不是充分条件

四、解下列各题 (每小题 6 分, 共 18 分):

1、计算不定积分  $\int \cos^3 x \, dx$ .

2、计算广义积分  $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} \, dx$ .

3、设  $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{t}}} \, dt$ , 计算  $f'(3)$ .

五、(本题 6 分) 计算定积分  $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{(1-x)^2} \, dx$ .

六、(本题 6 分) 计算不定积分  $\int \frac{1}{x^2(1+x)} \, dx$ .

七、(本题 8 分) 往半径为 1 米, 深为 2 米的圆锥形容器内注水, 注水的速度为  $\frac{1}{200} \, \text{m}^3/\text{s}$ . 当液面高度达到容器一半深度时, 求液面升高的速度.

八、(本题 8 分) 设  $x > 0$ , 试证明:  $0 < x - \arctan x < \frac{x^3}{3}$ .

九、(本题 6 分) 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 在开区间  $(a, b)$  内有二阶导数,

且函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上的最大值点和最小值点都在开区间  $(a, b)$  内. 试证明:

存在  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f''(\xi) = 2f'(\xi)$ .