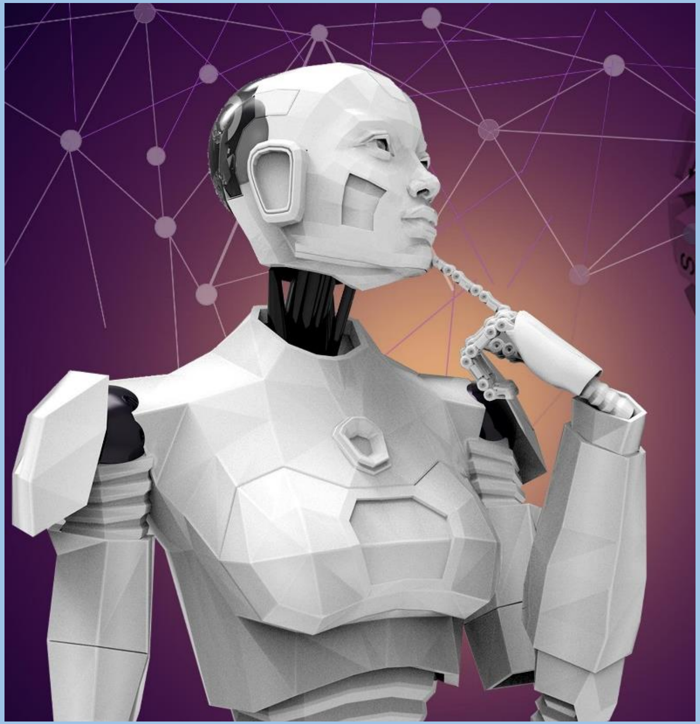
華東理工大學 EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY | 信息科学与工程学院 School of Information Science and Engineering

第7章：操作臂动力学



主讲：许璟、周家乐

单位：信息科学与工程学院

邮箱：jingxu@ecust.edu.cn

办公：徐汇校区 实验19楼1213室

主要内容

7.1 操作臂动力学概述

- 动力学研究的是物体运动和受力之间的关系，解决两个问题：
  - 动力学正问题——根据关节驱动力或力矩，计算操作臂的运动(位移、速度和加速度)。正问题与操作臂仿真有关。
  - 动力学逆问题——根据末端执行器运动轨迹，计算各关节所需力或力矩。逆问题与系统实时控制相关。
- 研究动力学目的：实时最优控制、机器人设计
- 动力学建模方法：
  - 拉格朗日法（基于能量）
  - 牛顿-欧拉法（基于运动坐标系和达朗贝尔原理）
  - 指数积法（基于矩阵指数）
  - 高斯法、凯恩法、旋量对数法等

7.2 质点系动力学

- **牛顿第二定律：对质量为m的质点施加作用力f**

$$\boldsymbol{f} = m\ddot{\boldsymbol{r}},\quad \boldsymbol{r} \in \Re^3$$

- **对于由p个质点组成的系统，有：**

$$\boldsymbol{f}_k = m_k\ddot{\boldsymbol{r}}_k,\quad \boldsymbol{r}_k \in \Re^3,\quad k = 1, 2, \ldots, p$$

- **为描述p个质点的位置约束，引入约束方程（完整约束）：**

$$g_j\left(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_p\right) = 0,\quad j = 1, 2, \ldots, q$$

- **如果将每个约束方程视为 $\Re^{3p}$ 中光滑曲面，那么约束力垂直于该曲面，系统速度位于曲面的切平面内。动力学方程的矢量形式：**

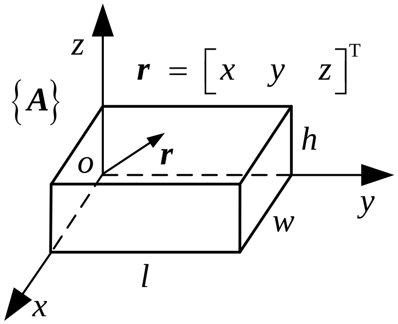
$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} m_1\boldsymbol{I} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_p\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{r}}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\boldsymbol{r}}_p \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \boldsymbol{\Gamma}_j$$

式中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \Re$ 为拉氏乘子、Γ_j (与约束正交)为约束 $g_j(\boldsymbol{r}) = 0$ 的梯度。

惯性张量和伪惯性矩阵

- 刚体动力学中，质量、惯性矩和惯性积是三个重要的概念；
- 单自由度系统，要考虑质量；绕轴线转动，要考虑惯性矩和惯性积；
- 如图，刚体相对给定的坐标系，绕x、y、z的质量惯性矩为：

$$
\begin{cases}
I_{xx} = \iiint_V \left(y^2 + z^2\right)\rho \mathrm{d}V = \iiint_m \left(y^2 + z^2\right)\mathrm{d}m \\
I_{yy} = \iiint_V \left(x^2 + z^2\right)\rho \mathrm{d}V = \iiint_m \left(x^2 + z^2\right)\mathrm{d}m \\
I_{zz} = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right)\rho \mathrm{d}V = \iiint_m \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}m
\end{cases}
$$



分别表示质量元素 $dm = \rho dV$ 乘以到相应轴的垂直距离的平方。

- 刚体质量在坐标系的分布，除惯性矩描述，还有惯性积（混合矩）：

$$
\begin{cases}
I_{xy} = \iiint_V xy\rho \mathrm{d}V = \iiint_m xy\mathrm{d}m \\
I_{yz} = \iiint_V yz\rho \mathrm{d}V = \iiint_m yz\mathrm{d}m \\
I_{zx} = \iiint_V zx\rho \mathrm{d}V = \iiint_m zx\mathrm{d}m
\end{cases}
$$

惯性张量和伪惯性矩阵

- 惯性张量(相对坐标系{A})定义为：

$$ {}^{A}\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} $$

表示质量分布特征；与坐标系{A}的选取有关；

- 设坐标系{B}与 {A}原点重合，姿态为 ${}^{A}_{B}\boldsymbol{R}$，则惯性张量 ${}^{A}\boldsymbol{I},{}^{B}\boldsymbol{I}$ 关系为

$$ {}^{A}\boldsymbol{I} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\ {}^{B}\boldsymbol{I}\ {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} $$

- 选取坐标系使各惯性积为零时，惯性张量是**对角阵**，此时坐标系各轴为**惯性主轴**，相应的惯性矩为**主惯性矩**。
- 惯性张量是刚体相对某坐标系质量分布的二阶矩。质量分布一阶矩：

$$ \begin{cases} m\bar{x} = \iiint_V x\rho \mathrm{d}V = \iiint_m x\mathrm{d}m, \quad m\bar{y} = \iiint_V y\rho \mathrm{d}V = \iiint_m y\mathrm{d}m \\ m\bar{z} = \iiint_V z\rho \mathrm{d}V = \iiint_m z\mathrm{d}m \end{cases} $$

惯性张量和伪惯性矩阵

- 伪惯性矩阵由质量分布的一阶矩和二阶矩组成：

$$\bar{\boldsymbol{I}} = \iiint_V \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz & x \\ xy & y^2 & yz & y \\ xz & yz & z^2 & z \\ x & y & z & 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}m$$

- 惯性张量和伪惯性矩阵均与坐标系的**原点和方位**有关。
- 刚体在两轴平行坐标系{A，C}的惯性矩和惯性积存在以下关系：

$$^{A}I_{zz} = {}^{C}I_{zz} + m\left(x_c^2 + y_c^2\right), \quad ^{A}I_{xy} = {}^{C}I_{xy} + m x_c y_c$$

- 惯性张量与伪惯性矩阵具有性质：

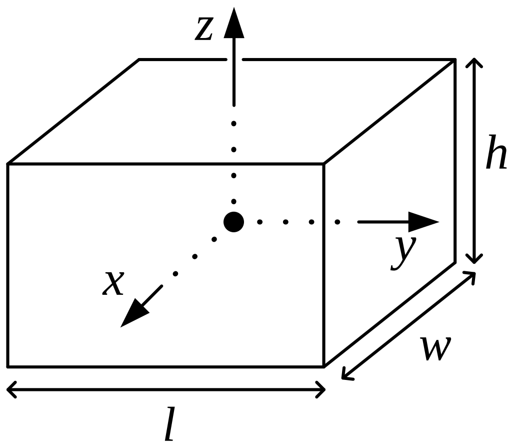
◆ 所有惯性矩为正，惯性积可正可负；

◆ 坐标系方位改变时，$I_o = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}$ (相对原点的惯性矩)不变；

◆ 惯性张量的**特征值**和**特征向量**分别是刚体的**主惯性矩**和**惯性主轴**。

惯性张量和伪惯性矩阵

□ 密度均匀、质量m的长方体/圆柱体/椭球体的主惯性轴与主惯性距：

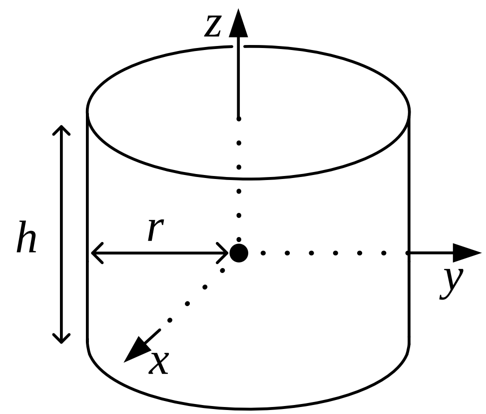


$$V = lwh$$

$$I_{xx} = m\left(l^2 + h^2\right)/12$$

$$I_{yy} = m\left(w^2 + h^2\right)/12$$

$$I_{zz} = m\left(l^2 + w^2\right)/12$$

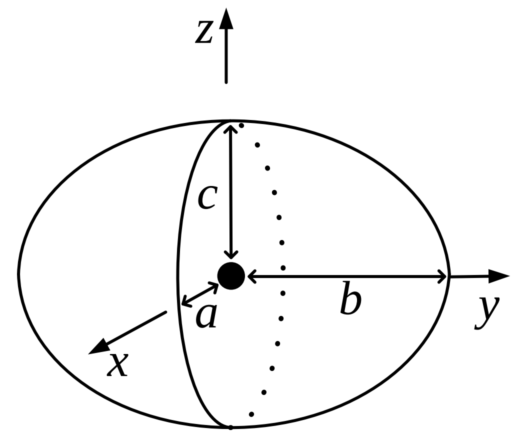


$$V = \pi r^2 h$$

$$I_{xx} = m\left(3r^2 + h^2\right)/12$$

$$I_{yy} = m\left(3r^2 + h^2\right)/12$$

$$I_{zz} = mr^2/2$$



$$V = 4\pi abc/3$$

$$I_{xx} = m\left(b^2 + c^2\right)/5$$

$$I_{yy} = m\left(a^2 + c^2\right)/5$$

$$I_{zz} = m\left(a^2 + b^2\right)/5$$

牛顿-欧拉公式

- 达朗贝尔原理可归结为：

◆牛顿第二定律（力平衡）：

$$^{C}\boldsymbol{f} = d\left(m\,^{C}\boldsymbol{\upsilon}\right)/dt = m\,^{C}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}$$

◆欧拉方程（力矩平衡）：

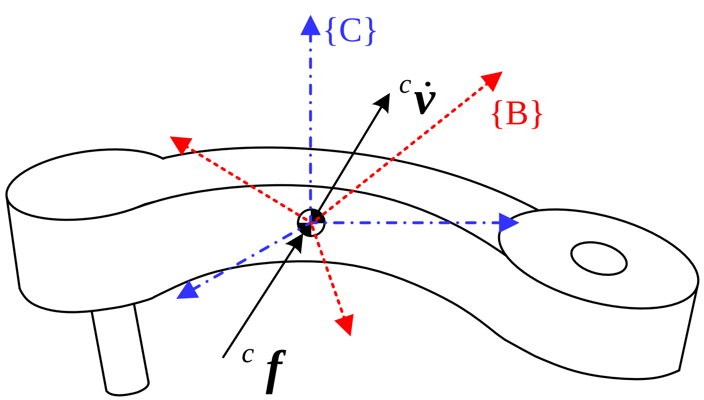
$$^{C}\boldsymbol{\tau} = d\left(^{C}\boldsymbol{I}\,^{C}\boldsymbol{\omega}\right)/dt = {}^{C}\boldsymbol{I}\,^{C}\dot{\boldsymbol{\omega}} + {}^{C}\boldsymbol{\omega}\times\left(^{C}\boldsymbol{I}\,^{C}\boldsymbol{\omega}\right)$$

注意：

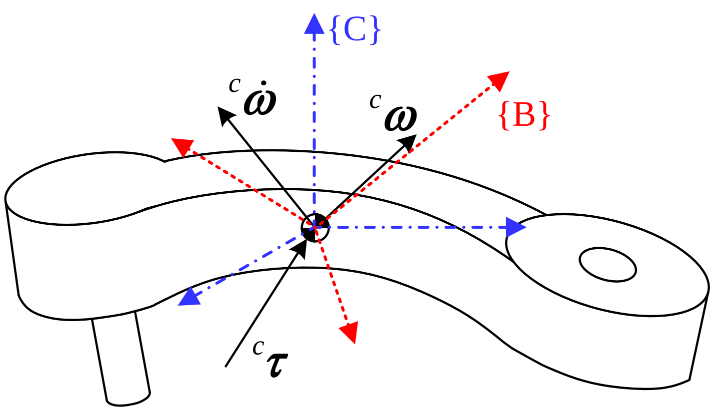
1) 坐标系{C}的原点为刚体的质心，与大地固结。

2) 坐标系{B}的原点位于刚体的质心，与刚体固结

式中 ^{C}I 是刚体在{C}中惯性张量、$^{C}\dot{\upsilon}$ 是质心相对{C}的加速度、$^{C}\omega$, $^{C}\dot{\omega}$ 是角速度和角加速度、^{C}f, $^{C}\tau$ 是刚体上作用合力和力矩



刚体平移加速度与作用力的关系



刚体角速度、角加速度与力矩的关系

牛顿-欧拉公式

□ 相对于物体坐标系{B}

◆ 牛顿第二定律（力平衡）：

$$
\begin{aligned}
{}^{B}\boldsymbol{f} &= m\left({}^{B}\dot{\boldsymbol{\upsilon}} + {}^{B}\boldsymbol{\omega}\times{}^{B}\boldsymbol{\upsilon}\right)\\
&= m\left({}^{B}\dot{\boldsymbol{\upsilon}} + \left[{}^{B}\boldsymbol{\omega}\right]{}^{B}\boldsymbol{\upsilon}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{B}\boldsymbol{f} &= {}^{C}_{B}\mathbf{R}^{T}\cdot{}^{C}\boldsymbol{f} = m\,{}^{C}_{B}\mathbf{R}^{T}\,{}^{C}\dot{\boldsymbol{v}} = m\,{}^{C}_{B}\mathbf{R}^{T}\frac{d({}^{C}_{B}\mathbf{R}\cdot{}^{B}\boldsymbol{v})}{dt}\\
&= {}^{C}_{B}\mathbf{R}^{T}(m\,{}^{C}_{B}\dot{\mathbf{R}}\cdot{}^{B}\boldsymbol{v} + m\,{}^{C}_{B}\mathbf{R}\cdot{}^{B}\dot{\boldsymbol{v}})\\
&= {}^{C}_{B}\mathbf{R}^{T}(m\,{}^{C}_{B}\mathbf{R}[{}^{B}\boldsymbol{\omega}]\cdot{}^{B}\boldsymbol{v} + m\,{}^{C}_{B}\mathbf{R}\cdot{}^{B}\dot{\boldsymbol{v}})\\
&= m[{}^{B}\boldsymbol{\omega}]{}^{B}\boldsymbol{v} + m\,{}^{B}\dot{\boldsymbol{v}}\\
&= m\,{}^{B}\boldsymbol{\omega}\times{}^{B}\boldsymbol{v} + m\,{}^{B}\dot{\boldsymbol{v}}
\end{aligned}
$$

◆ 欧拉方程（力矩平衡）：

$$
\begin{aligned}
{}^{B}\boldsymbol{\tau} &= {}^{B}\boldsymbol{I}\,{}^{B}\dot{\boldsymbol{\omega}} + {}^{B}\boldsymbol{\omega}\times\left({}^{B}\boldsymbol{I}\,{}^{B}\boldsymbol{\omega}\right)\\
&= {}^{B}\boldsymbol{I}\,{}^{B}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \left[{}^{B}\boldsymbol{\omega}\right]{}^{B}\boldsymbol{I}\,{}^{B}\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{B}\boldsymbol{\tau} &= {}^{C}_{B}\mathbf{R}^{T}\cdot{}^{C}\boldsymbol{\tau} = {}^{C}_{B}\mathbf{R}^{T}\cdot\left({}^{C}\boldsymbol{I}\,{}^{C}\dot{\boldsymbol{\omega}} + {}^{C}\boldsymbol{\omega}\times\left({}^{C}\boldsymbol{I}\,{}^{C}\boldsymbol{\omega}\right)\right)\\
&= {}^{C}_{B}\mathbf{R}^{T}\,{}^{C}\boldsymbol{I}\,{}^{C}\dot{\boldsymbol{\omega}} + {}^{C}_{B}\mathbf{R}^{T}\,[{}^{C}\boldsymbol{\omega}]\,{}^{C}\boldsymbol{I}\,{}^{C}\boldsymbol{\omega}\\
&= {}^{B}_{C}\mathbf{R}\,{}^{C}\boldsymbol{I}\,{}^{B}_{C}\mathbf{R}^{T}\,{}^{B}_{C}\mathbf{R}\,{}^{C}\dot{\boldsymbol{\omega}} + {}^{C}_{B}\mathbf{R}^{T}\,[{}^{C}\boldsymbol{\omega}]\,{}^{C}_{B}\mathbf{R}\,{}^{C}_{B}\mathbf{R}^{T}\,{}^{C}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\boldsymbol{I}\,{}^{C}_{B}\mathbf{R}^{T}\,{}^{C}\boldsymbol{\omega}\\
&= {}^{B}\boldsymbol{I}\,{}^{B}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [{}^{B}_{C}\mathbf{R}\,{}^{C}\boldsymbol{\omega}]{}^{B}\boldsymbol{I}\,{}^{B}\boldsymbol{\omega}\\
&= {}^{B}\boldsymbol{I}\,{}^{B}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [{}^{B}\boldsymbol{\omega}]\,{}^{B}\boldsymbol{I}\,{}^{B}\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}
$$

式中方括号的含义（叉乘运算转化为矩阵运算）：

$$
\left[{}^{B}\boldsymbol{\omega}\right]{}^{B}\boldsymbol{\upsilon} = {}^{B}\boldsymbol{\omega}\times{}^{B}\boldsymbol{\upsilon},\quad \left[{}^{B}\boldsymbol{\omega}\right]{}^{B}\boldsymbol{I}\,{}^{B}\boldsymbol{\omega} = {}^{B}\boldsymbol{\omega}\times\left({}^{B}\boldsymbol{I\omega}\right)
$$

牛顿-欧拉公式

□ 相对于其它物体坐标系{B}

◆ **上面两式合并得到牛顿-欧拉动力学方程矩阵形式：**

$$
{}^{B}F=\begin{bmatrix}{}^{B}\boldsymbol{f}\\{}^{B}\boldsymbol{\tau}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m\boldsymbol{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}^{B}\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^{B}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}\\{}^{B}\dot{\boldsymbol{\omega}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\left[{}^{B}\boldsymbol{\omega}\right] & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \left[{}^{B}\boldsymbol{\omega}\right]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\boldsymbol{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}^{B}\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^{B}\boldsymbol{\upsilon}\\{}^{B}\boldsymbol{\omega}\end{bmatrix}
$$

◆ **利用叉积性质：**$[\upsilon]\upsilon=\upsilon\times\upsilon=0$ **和** $[\upsilon]^{\mathrm{T}}=-[\upsilon]$ **，上式写成：**

$$
{}^{B}F=\begin{bmatrix}{}^{B}\boldsymbol{f}\\{}^{B}\boldsymbol{\tau}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m\boldsymbol{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}^{B}\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^{B}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}\\{}^{B}\dot{\boldsymbol{\omega}}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\left[{}^{B}\boldsymbol{\omega}\right] & \left[{}^{B}\boldsymbol{\upsilon}\right]\\ \mathbf{0} & \left[{}^{B}\boldsymbol{\omega}\right]\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}m\boldsymbol{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}^{B}\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^{B}\boldsymbol{\upsilon}\\{}^{B}\boldsymbol{\omega}\end{bmatrix}
$$

牛顿-欧拉公式

将6维力旋量坐标、6维运动旋量坐标以及6×6的空间惯性矩阵表示为：

$$
{}^{B}F=\begin{bmatrix}{}^{B}\boldsymbol{f}\\{}^{B}\boldsymbol{\tau}\end{bmatrix},\quad {}^{B}V=\begin{bmatrix}{}^{B}\boldsymbol{\upsilon}\\{}^{B}\boldsymbol{\omega}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}m\boldsymbol{I}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&{}^{B}\boldsymbol{I}\end{bmatrix}
$$

则：

$$
{}^{B}F=\begin{bmatrix}{}^{B}\boldsymbol{f}\\{}^{B}\boldsymbol{\tau}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m\boldsymbol{I}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&{}^{B}\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^{B}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}\\{}^{B}\dot{\boldsymbol{\omega}}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\left[{}^{B}\boldsymbol{\omega}\right]&\left[{}^{B}\boldsymbol{\upsilon}\right]\\\mathbf{0}&\left[{}^{B}\boldsymbol{\omega}\right]\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}m\boldsymbol{I}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&{}^{B}\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^{B}\boldsymbol{\upsilon}\\{}^{B}\boldsymbol{\omega}\end{bmatrix}
$$

- **因此，刚体动能可用空间惯性矩阵表示：**

$$
\boxed{T=\frac{1}{2}\,{}^{B}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\,{}^{B}\boldsymbol{I}\,{}^{B}\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}m\,{}^{B}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}}\,{}^{B}\boldsymbol{\upsilon}=\frac{1}{2}\,{}^{B}V^{T}\,{}^{B}\boldsymbol{M}\,{}^{B}V}
$$

- **空间** ${}^{B}P\in\Re^{6}$ **动量定义为：**

$$
\boxed{{}^{B}P=\begin{bmatrix}m\,{}^{B}\boldsymbol{\upsilon}\\{}^{B}\boldsymbol{I}\,{}^{B}\boldsymbol{\omega}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m\boldsymbol{I}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&{}^{B}\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^{B}\boldsymbol{\upsilon}\\{}^{B}\boldsymbol{\omega}\end{bmatrix}={}^{B}\boldsymbol{M}\,{}^{B}V}
$$

牛顿-欧拉公式

- 定义运动旋量^{B}V的伴随作用：

$$ad(V)=\begin{bmatrix}[\omega] & [\upsilon]\\ 0 & [\omega]\end{bmatrix}$$

- 单刚体动力学方程表示为：

$${}^{B}F={}^{B}\boldsymbol{M}\,{}^{B}\dot{V}-ad^{\mathrm{T}}\left({}^{B}V\right){}^{B}\boldsymbol{M}\,{}^{B}V$$

- 考虑刚体动能与坐标系选取无关（相对任意坐标系A）：

$$\frac{1}{2}\,{}^{A}V^{\mathrm{T}}\,{}^{A}\boldsymbol{M}\,{}^{A}V=\frac{1}{2}\,{}^{B}V^{\mathrm{T}}\,{}^{B}\boldsymbol{M}\,{}^{B}V=\frac{1}{2}\left(\underline{Ad_{V}\left({}_{A}^{B}\boldsymbol{T}\right){}^{A}V}\right)^{\mathrm{T}}\,{}^{B}\boldsymbol{M}\underline{Ad_{V}\left({}_{A}^{B}\boldsymbol{T}\right){}^{A}V}$$

$$=\frac{1}{2}\,{}^{A}V^{\mathrm{T}}\underline{Ad_{V}^{\mathrm{T}}\left({}_{A}^{B}\boldsymbol{T}\right){}^{B}\boldsymbol{M}Ad_{V}\left({}_{A}^{B}\boldsymbol{T}\right)}\,{}^{A}V$$

- 可见，空间惯性矩阵的变换：$${}^{A}\boldsymbol{M}=Ad_{V}^{\mathrm{T}}\left({}_{A}^{B}\boldsymbol{T}\right){}^{B}\boldsymbol{M}Ad_{V}\left({}_{A}^{B}\boldsymbol{T}\right)$$

- 所以在{A}坐标系中：$${}^{A}F={}^{A}\boldsymbol{M}\,{}^{A}\dot{V}-ad^{\mathrm{T}}\left({}^{A}V\right){}^{A}\boldsymbol{M}\,{}^{A}V$$

运动旋量的李括号

- 我们知道，对3维矢量 $\omega \in \Re^3$ ：

$$\hat{\omega} := [\omega] \in so(3), \quad [\omega]^{\vee} := \omega \in \Re^3$$

- 对6维运动旋量 $V \in \Re^6$，同样存在：

$$\hat{V} := [V] \in se(3), \quad [V]^{\vee} := V \in \Re^6$$

- 根据 $\omega_1 \times \omega_2 = [\omega_1]\omega_2 \in \Re^3$，可以推导方括号对叉积的运算：

$$[\omega_1 \times \omega_2] = [\omega_1][\omega_2] - [\omega_2][\omega_1]$$

- 定义：对于任意运动旋量 $[V_1] \in se(3)$，$[V_2] \in se(3)$ 的伴随作用：

$$ad([V_1])[V_2] := [[V_1],[V_2]] := [V_1][V_2] - [V_2][V_1]$$

运动旋量伴随

- 定义：对于任意运动旋量坐标 V_1，V_2 的伴随作用：

$$ad(V_1)V_2 := [V_1,V_2] = ([V_1][V_2] - [V_2][V_1])^{\vee}$$

运动旋量坐标伴随

7.3 拉格朗日动力学

□ **拉格朗日函数L定义为动能T和势能U之差：**

$$L = T - U$$

□ **对于广义坐标 q_i，系统动力学方程（第二类拉氏方程）：**

$$\boldsymbol{\tau}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}_i}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

式中 $\dot{q}_i$ 为广义速度：线速度时 τ_i 为力，角速度时 τ_i 为力矩。

□ **由于势能不显含 $\dot{q}_i$，动力学方程可改写为：**

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}_i} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{q}_i}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)}$$

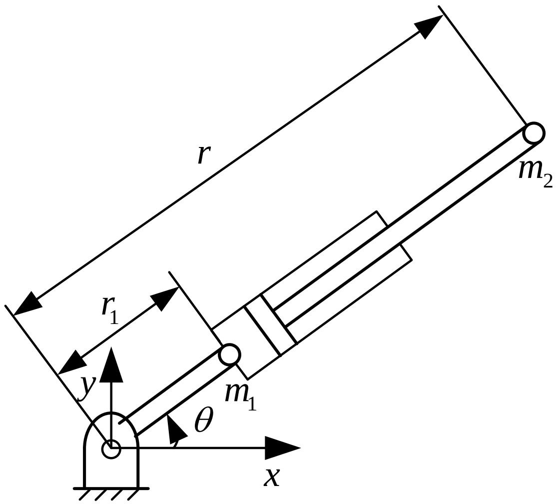
质点系动力学方程

- 对于质点m_1，笛卡尔坐标系位置和速度：

$$x_1 = r_1 \cos\theta, \qquad y_1 = r_1 \sin\theta$$
$$\dot{x}_1 = -r_1\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{y}_1 = r_1\dot{\theta}\cos\theta$$

- 对于质点m_2，笛卡尔坐标系位置和速度：

$$x_2 = r\cos\theta, \qquad y_2 = r\sin\theta$$
$$\dot{x}_2 = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{y}_2 = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$



R-P机械手

- 系统总动能：

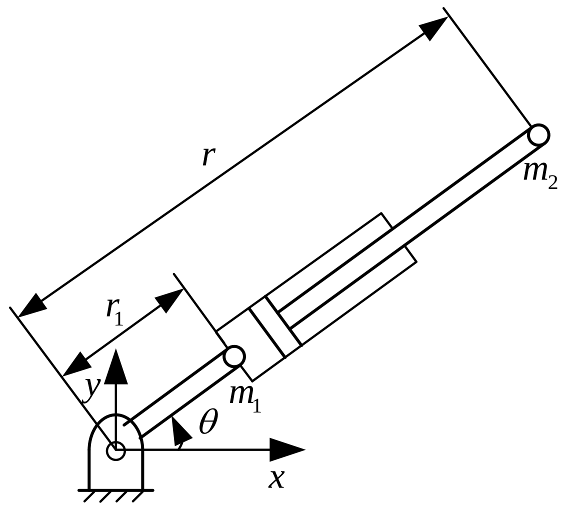
$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1 r_1^2\dot{\theta}^2 + \left(\frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_2 r^2\dot{\theta}^2\right)$$

- 系统总势能： $U = m_1 g r_1 \sin\theta + m_2 g r \sin\theta$

质点系动力学方程

口系统总动能： $T=\frac{1}{2}m_1r_1^2\dot{\theta}^2+\left(\frac{1}{2}m_2\dot{r}^2+\frac{1}{2}m_2r^2\dot{\theta}^2\right)$

口系统总势能： $U=m_1gr_1\sin\theta+m_2gr\sin\theta$



口 首先计算 θ 关节的力矩τ_θ：

R-P 机械手

◆ **因为：** $\frac{\partial T}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial\theta}=g\cos\theta\left(m_1r_1+m_2r\right)$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=m_1r_1^2\dot{\theta}+m_2r^2\dot{\theta},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right)=m_1r_1^2\ddot{\theta}+m_2r^2\ddot{\theta}+2m_2r\dot{r}\dot{\theta}$$

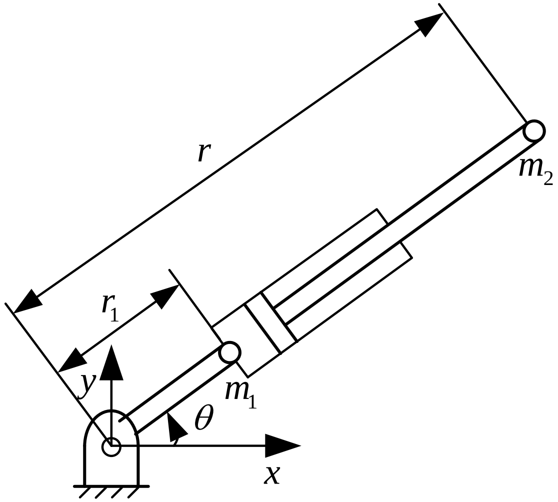
◆ **所以：** $\tau_\theta=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_i}-\frac{\partial T}{\partial\theta_i}+\frac{\partial U}{\partial\theta_i}$

$$=m_1r_1^2\ddot{\theta}+m_2r^2\ddot{\theta}+2m_2r\dot{\theta}\dot{r}+g\cos\theta\left(m_1r_1+m_2r\right)$$

质点系动力学方程

□系统总动能： $$T = \frac{1}{2}m_1 r_1^2\dot{\theta}^2 + \left(\frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_2 r^2\dot{\theta}^2\right)$$

□系统总势能： $$U = m_1 g r_1 \sin\theta + m_2 g r \sin\theta$$



R-P 机械手

◆同理因为：

$$\frac{\partial T}{\partial r} = m_2 r\dot{\theta}^2, \quad \frac{\partial U}{\partial r} = m_2 g\sin\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m_2\dot{r}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m_2\ddot{r}$$

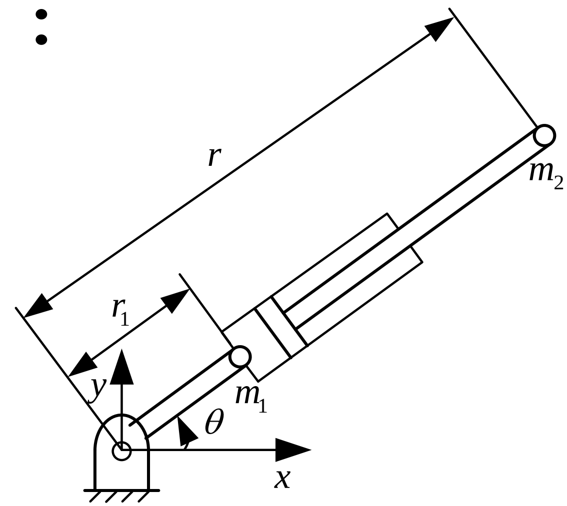
◆所以可得： $$f_r = m_2\ddot{r} - m_2 r\dot{\theta}^2 + m_2 g\sin\theta$$

质点系动力学方程

□ 上式可写成一般形式（θ, r 分别为关节1、2）：

$$\tau_\theta = \underbrace{D_{11}\ddot{\theta} + D_{12}\ddot{r}}_{\text{惯性力项}} + \underbrace{D_{111}\dot{\theta}^2 + D_{122}\dot{r}^2}_{\text{向心力项}} + \underbrace{D_{112}\dot{\theta}\dot{r} + D_{121}\dot{r}\dot{\theta}}_{\text{科氏力}} + \underbrace{D_1}_{\text{重力项}}$$

$$f_r = \underbrace{D_{21}\ddot{\theta} + D_{22}\ddot{r}}_{\text{惯性力项}} + \underbrace{D_{211}\dot{\theta}^2 + D_{222}\dot{r}^2}_{\text{向心力项}} + \underbrace{D_{212}\dot{\theta}\dot{r} + D_{221}\dot{r}\dot{\theta}}_{\text{科氏力}} + \underbrace{D_2}_{\text{重力项}}$$



R-P 机械手

◆ 惯性力项：加速度有关

◆ 向心力项：速度的平方有关

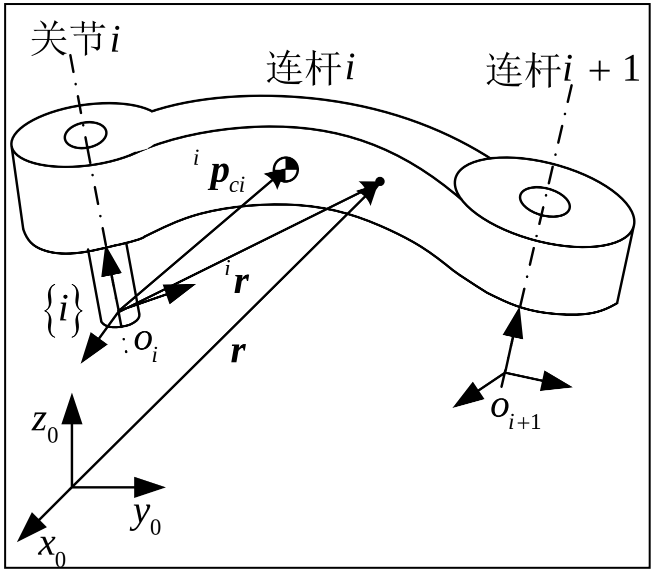
◆ 科氏力项：不同速度乘积有关

◆ 重力项：与速度、加速度无关

□ 形式 D_{ii} 为关节i的有效惯量、$D_{ij}\,(i \neq j)$ 为关节j对i的耦合惯量

7.4 操作臂的拉格朗日方程

- □ **拉格朗日法计算动力学方程5大步骤：**
- ◆ **计算连杆各点速度**
- ◆ **计算系统的动能**
- ◆ **计算系统的势能**
- ◆ **构造拉格朗日函数**
- ◆ **推导动力学方程**



1. 计算速度

□ **连杆i上一点在{i}和{0}齐次坐标为** ${}^{i}\boldsymbol{r}$ **和** $\boldsymbol{r}$**，存在：** $\boldsymbol{r} = {}^{0}_{i}\boldsymbol{T}\,{}^{i}\boldsymbol{r}$

□ **该点的速度为：** $$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = = \left(\sum_{j=1}^{i} \frac{\partial \left({}^{0}_{i}\boldsymbol{T} \right)}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) {}^{i}\boldsymbol{r}$$

□ **速度的平方为：** $$\dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{r}} = Tr\left(\dot{\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}\right) = Tr\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} \frac{\partial \left({}^{0}_{i}\boldsymbol{T} \right)}{\partial q_j} {}^{i}\boldsymbol{r}\,{}^{i}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \left({}^{0}_{i}\boldsymbol{T} \right)^{\mathrm{T}}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

7.4 操作臂的拉格朗日方程

2. 计算系统动能

□ 经推导，操作臂总动能：

$$T_i=\int_{linki} dT_i=\frac{1}{2}Tr\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial\left({}_i^0\boldsymbol{T}\right)}{\partial q_j}\int_{linki}{}^i\boldsymbol{r}\,{}^i\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}dm\frac{\partial\left({}_i^0\boldsymbol{T}\right)^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k\right]$$

$$=\frac{1}{2}Tr\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial\left({}_i^0\boldsymbol{T}\right)}{\partial q_j}\bar{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{i}}\frac{\partial\left({}_i^0\boldsymbol{T}\right)^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k\right]$$

□ 如果考虑驱动连杆传动机构的动能： $T_i=\frac{1}{2}\boldsymbol{I}_{ai}\dot{q}_i^2$

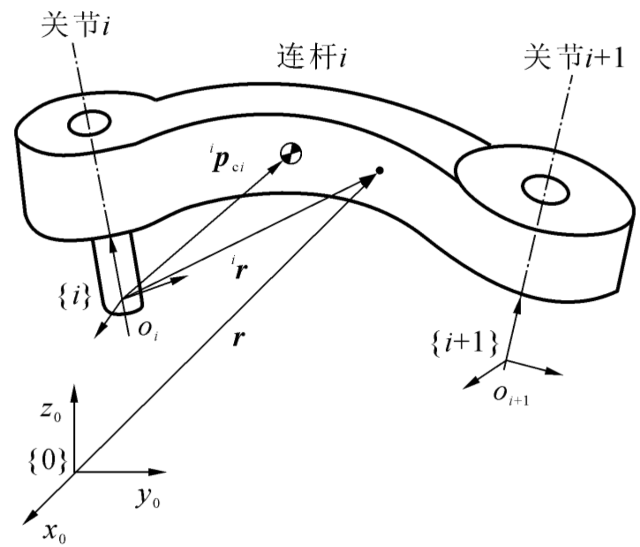
□ 操作臂总动能：

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}Tr\frac{\partial\left({}_i^0\boldsymbol{T}\right)}{\partial q_j}\bar{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{i}}\frac{\partial\left({}_i^0\boldsymbol{T}\right)^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k+\boldsymbol{I}_{ai}\dot{q}_i^2\right]$$

式中 I_{ai} 是广义等效惯量，移动关节是等效质量/转动关节是等效惯性矩

2. 计算系统势能

□ 操作臂总势能： $U=-\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{g}\, {}_i^0\boldsymbol{T}\, {}^i\boldsymbol{p}_{ci}$



3. 构造朗格朗日函数L=T-U：

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} Tr\left(\frac{\partial\left({}_i^0\boldsymbol{T}\right)}{\partial q_j}\bar{\boldsymbol{I}}_i\frac{\partial\left({}_i^0\boldsymbol{T}\right)^{\mathrm{T}}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k+I_{ai}\dot{q}_i^2\right]+\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{g}_i\, {}_i^0\boldsymbol{T}\, {}^i\boldsymbol{p}_{ci}$$

4. 操作臂动力学方程：

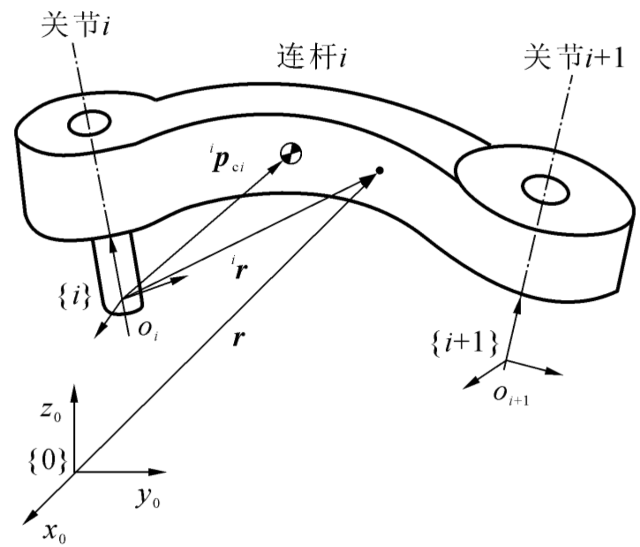
□ 具体公式为： $\tau_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$

□ 写成矩阵形式和矢量形式：

$$\boxed{\begin{aligned}&\tau_i=\sum_{k=1}^{n} D_{ik}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} h_{ikm}\dot{q}_k\dot{q}_m+G_i,\\ &\boldsymbol{\tau}(t)=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q}(t))\ddot{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t))+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}(t))\end{aligned}}$$

7.5 拉格朗日方程的其它形式

1. 矢量积雅克比



□ 连杆速度（坐标系{i}与连杆i固结）：

◆ 连杆i质心线速度和{i}空间角速度：

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}}_{ci} \\ \boldsymbol{\omega}_i^s \end{bmatrix} = {}^i\boldsymbol{J}^s(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}, \quad \boxed{{}^i\boldsymbol{J}^s(\boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{i} \begin{bmatrix} {}_j^i\boldsymbol{J}_t^s \\ {}_j^i\boldsymbol{J}_a^s \end{bmatrix}} = \sum_{j=1}^{i} \begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{z}_{j-1} \times (\boldsymbol{p}_{ci} - \boldsymbol{p}_{j-1}) \\ {}^0\boldsymbol{z}_{j-1} \end{bmatrix}$$

式中${}_j^iJ^s$为第j个关节对应的矢量积雅克比。

□ 系统动能： $T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{p}}_{ci}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{p}}_{ci} + \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\omega}_i^s\right)^{\mathrm{T}} \left({}_i^0\boldsymbol{R}\, {}^C\boldsymbol{I}_i\, {}_i^0\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\right) \boldsymbol{\omega}_i^s$

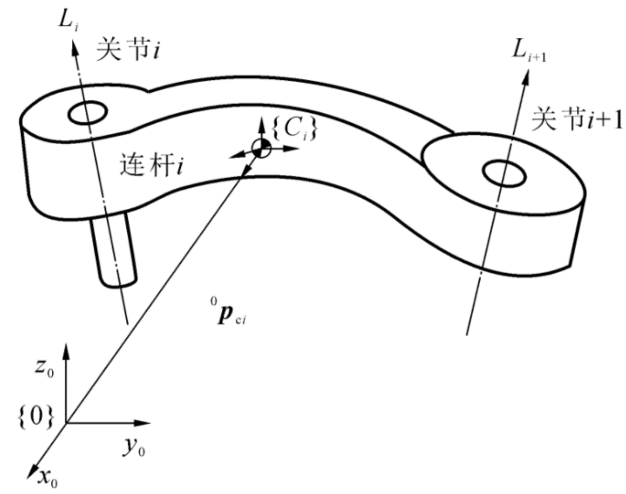
□ 系统势能： $U_i = -m_i \boldsymbol{g} \boldsymbol{p}_{ci}$

□ 拉格朗日函数： $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{n} (T_i - U_i)$

□ 操作臂动力学方程： $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}_i} = \boldsymbol{\tau}_i$

2. 指数积

□ 连杆速度（物体坐标系{C_i}，原点在质心）



◆ 坐标系{C_i}相对{0}的位姿：

$${}^0_i\boldsymbol{T}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{e}^{[L_1]q_1}\cdots\boldsymbol{e}^{[L_i]q_i}\,{}^0_i\boldsymbol{T}(0)$$

◆ 坐标系{C_i} 的物体速度 $\left(\boldsymbol{e}^{[L_j]q_j}\cdots\boldsymbol{e}^{[L_i]q_i}\,{}^0_i\boldsymbol{T}(0)\right)L_j^s,\ j$

$$V_i^b = \boldsymbol{J}_i^b(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

式中 $\boldsymbol{J}_i^b(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} L_1^\dagger & \cdots & L_i^\dagger & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$，其中

表示第j瞬时关节螺旋在坐标系{C_i}中的表示。

□ 系统动能（第i连杆）

$$T_i(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\left(V_i^b\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_i^b\boldsymbol{V}_i^b = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{J}_i^b(\boldsymbol{q})\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_i^b\boldsymbol{J}_i^b(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

$\boldsymbol{M}_i^b$ 为{C_i}中表示的第i连杆广义惯量矩阵：$\boldsymbol{M}_i^b = \begin{bmatrix} m_i\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & {}^C\boldsymbol{I}_i \end{bmatrix}$

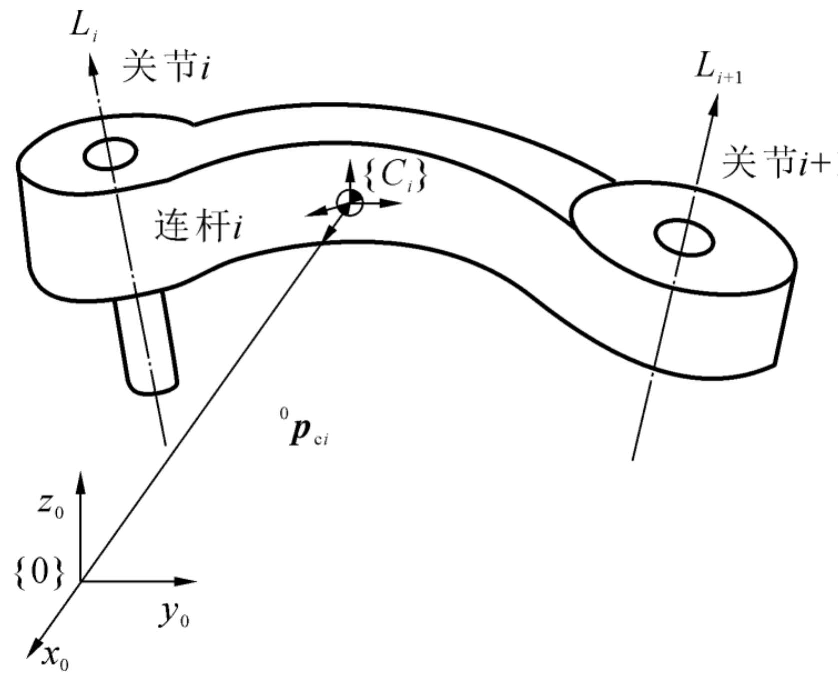
2. 指数积

系统总动能:

$$T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\sum_{i=1}^{n}T_i(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

式中 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})$ 为机器人惯量矩阵

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})=\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{J}_i^b(\boldsymbol{q})\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_i^b\boldsymbol{J}_i^b(\boldsymbol{q})$$



- **系统势能(第i连杆)**

$$U_i(\boldsymbol{q})=m_i\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{p}_{ci}(\boldsymbol{q})$$

- **拉格朗日函数:** $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})-U(\boldsymbol{q})=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}-U(\boldsymbol{q})$

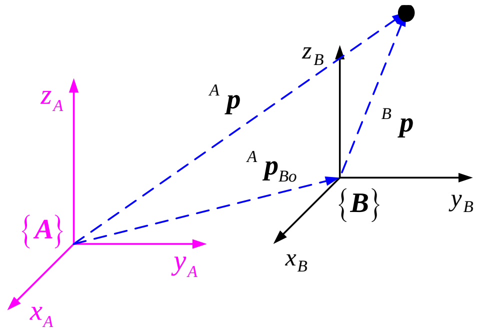
- **操作臂动力学方程:**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\tau_i \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n}D_{ij}\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}h_{ijk}\dot{q}_k\dot{q}_j+\frac{\partial U}{\partial q_i}=\tau_i$$

7.6 连杆运动的传递：一般情况

□ 已知两坐标系{A,B}，任一点的坐标描述满足：

$$ {}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo} + {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p} $$



□ 两边对时间求导： ${}^{A}\boldsymbol{\upsilon}_{p} = {}^{A}\dot{\boldsymbol{p}} = {}^{A}\dot{\boldsymbol{p}}_{Bo} + {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\dot{\boldsymbol{p}} + {}^{A}_{B}\dot{\boldsymbol{R}}\,{}^{B}\boldsymbol{p}$

□ 结合空间角速度公式 ${}^{A}_{B}\dot{\boldsymbol{R}} = \left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}$，上式表示为：

$$ {}^{A}\boldsymbol{\upsilon}_{p} = {}^{A}\boldsymbol{\upsilon}_{Bo} + {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{\upsilon}_{p} + \left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p} $$

□ 公式两边求导，得加速度关系：

$$ {}^{A}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{p} = {}^{A}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{Bo} + {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{p} + 2\left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{\upsilon}_{p} + \left[{}^{A}_{B}\dot{\boldsymbol{\omega}}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p} + \left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]\left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p} $$

特例1：{A}固定不动，刚体与{B}固接 ${}^{B}\boldsymbol{p} = const,\ {}^{B}\boldsymbol{\upsilon}_{p} = {}^{B}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{p} = \boldsymbol{0}$

$$ {}^{A}\boldsymbol{\upsilon}_{p} = {}^{A}\boldsymbol{\upsilon}_{Bo} + \left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p}, $$

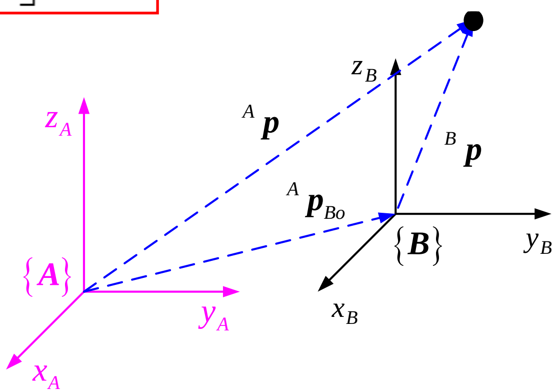
$$ {}^{A}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{p} = {}^{A}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{Bo} + \left[{}^{A}_{B}\dot{\boldsymbol{\omega}}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p} + \left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]\left[{}^{A}_{B}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p} $$

7.6 连杆运动的传递：一般情况

特例2：{B}只相对于{A}移动 $\ {}^A_B\boldsymbol{R} = const,\ {}^A\boldsymbol{\omega}_B = {}^A\dot{\boldsymbol{\omega}}_B = \mathbf{0}$

$$\boxed{\begin{aligned}{}^A\upsilon_p &= {}^A\upsilon_{Bo} + {}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\upsilon_p + \left[{}^A_B\boldsymbol{\omega}^s\right]{}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\boldsymbol{p}\\ {}^A\dot{\upsilon}_p &= {}^A\dot{\upsilon}_{Bo} + {}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\dot{\upsilon}_p + 2\left[{}^A_B\boldsymbol{\omega}^s\right]{}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\upsilon_p + \left[{}^A_B\dot{\boldsymbol{\omega}}^s\right]{}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\boldsymbol{p} + \left[{}^A_B\boldsymbol{\omega}^s\right]\left[{}^A_B\boldsymbol{\omega}^s\right]{}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\boldsymbol{p}\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}{}^A\upsilon_p &= {}^A\upsilon_{Bo} + {}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\upsilon_p,\\ {}^A\dot{\upsilon}_p &= {}^A\dot{\upsilon}_{Bo} + {}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\dot{\upsilon}_p\end{aligned}$$



特例3：{B}只相对于{A}转动 $\ {}^A\boldsymbol{p}_{Bo} = const,\ {}^A\upsilon_{Bo} = {}^A\dot{\upsilon}_{Bo} = \mathbf{0}$

$$\boxed{\begin{aligned}{}^A\upsilon_p &= {}^A\upsilon_{Bo} + {}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\upsilon_p + \left[{}^A_B\boldsymbol{\omega}^s\right]{}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\boldsymbol{p}\\ {}^A\dot{\upsilon}_p &= {}^A\dot{\upsilon}_{Bo} + {}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\dot{\upsilon}_p + 2\left[{}^A_B\boldsymbol{\omega}^s\right]{}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\upsilon_p + \left[{}^A_B\dot{\boldsymbol{\omega}}^s\right]{}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\boldsymbol{p} + \left[{}^A_B\boldsymbol{\omega}^s\right]\left[{}^A_B\boldsymbol{\omega}^s\right]{}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\boldsymbol{p}\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}{}^A\upsilon_p &= {}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\upsilon_p + \left[{}^A_B\boldsymbol{\omega}^s\right]{}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\boldsymbol{p},\\ {}^A\dot{\upsilon}_p &= {}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\dot{\upsilon}_p + 2\left[{}^A_B\boldsymbol{\omega}^s\right]{}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\upsilon_p + \left[{}^A_B\dot{\boldsymbol{\omega}}^s\right]{}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\boldsymbol{p} + \left[{}^A_B\boldsymbol{\omega}^s\right]\left[{}^A_B\boldsymbol{\omega}^s\right]{}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\boldsymbol{p}\end{aligned}$$

7.6 旋转关节的速度和加速度

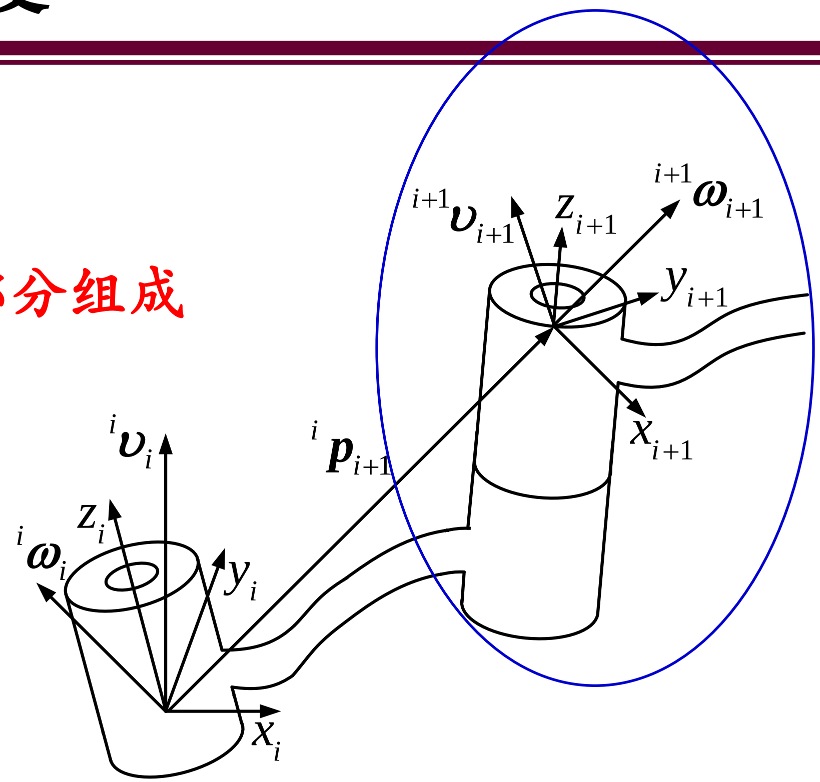
□ 连杆角速度递推公式：

$$\boxed{{}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1}}$$

由两部分组成

$\dot{\theta}_{i+1}$ 是关节角速度，

${}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1}$ 是{i+1}的z轴单位矢量



□ 原点线速度递推公式：

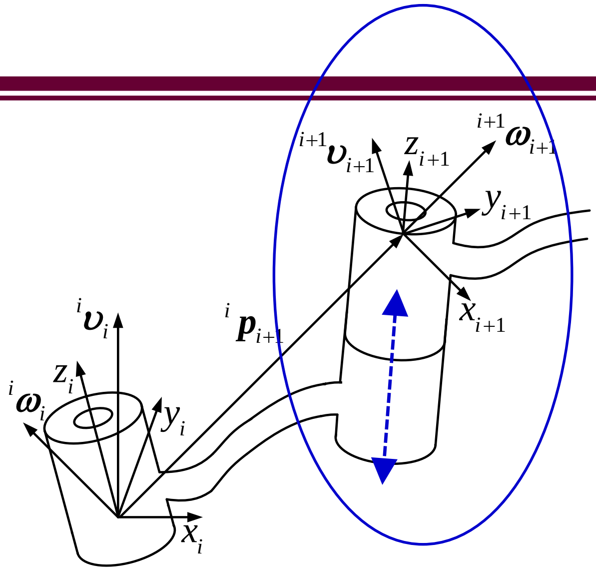
$$\boxed{{}^{i+1}\boldsymbol{\upsilon}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\left({}^{i}\boldsymbol{\upsilon}_{i} + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1}\right)}$$

□ 由此可得角加速度和线加速度递推公式：

$${}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i} + {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \times \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1},$$

$${}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\left[{}^{i}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{i} + {}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i} \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1} + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \times \left({}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1}\right)\right]$$

7.6 移动关节的速度和加速度



□ 连杆角速度递推公式：

$$\boxed{{}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{\ \ i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1}} \Rightarrow \boxed{{}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{\ \ i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i}}$$

□ 原点线速度递推公式：

$$\boxed{{}^{i+1}\boldsymbol{\upsilon}_{i+1} = {}^{i+1}_{\ \ i}\boldsymbol{R}\left({}^{i}\boldsymbol{\upsilon}_{i} + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1}\right)} \Rightarrow \boxed{{}^{i+1}\boldsymbol{\upsilon}_{i+1} = {}^{i+1}_{\ \ i}\boldsymbol{R}\left({}^{i}\boldsymbol{\upsilon}_{i} + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1}\right) + \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1}}$$

□ 由此可得角加速度和线加速度递推公式：

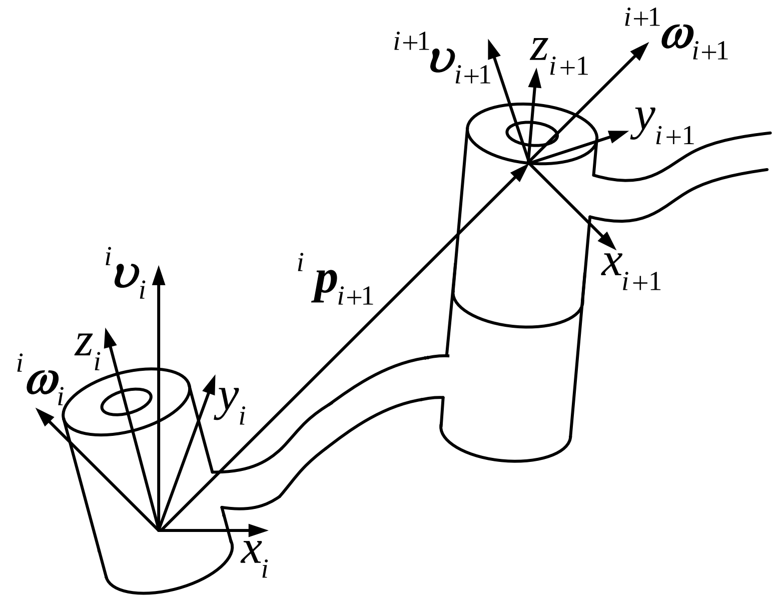
$$\begin{aligned}
&{}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} = {}^{i+1}_{\ \ i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i},\\
&{}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{i+1} = {}^{i+1}_{\ \ i}\boldsymbol{R}\left[{}^{i}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{i} + {}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i} \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1} + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \times \left({}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1}\right)\right]\\
&\qquad + 2\,{}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1} + \ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1}
\end{aligned}$$

注意 ${}^{i+1}_{\ \ i}\boldsymbol{R}$ 为常量

7.6 质心的速度和加速度

□ 各连杆质心的线速度/加速度：

$$\boxed{\begin{aligned} {}^{i}\upsilon_{ci} &= {}^{i}\upsilon_{i} + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{ci}, \\ {}^{i}\dot{\upsilon}_{ci} &= {}^{i}\dot{\upsilon}_{i} + {}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i} \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{ci} + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \times \left({}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{ci} \right) \end{aligned}}$$



规定： 质心坐标系{C_i}与连杆{i}固接

坐标原点位于连杆 i 的质心，

坐标方向与{ i }同向

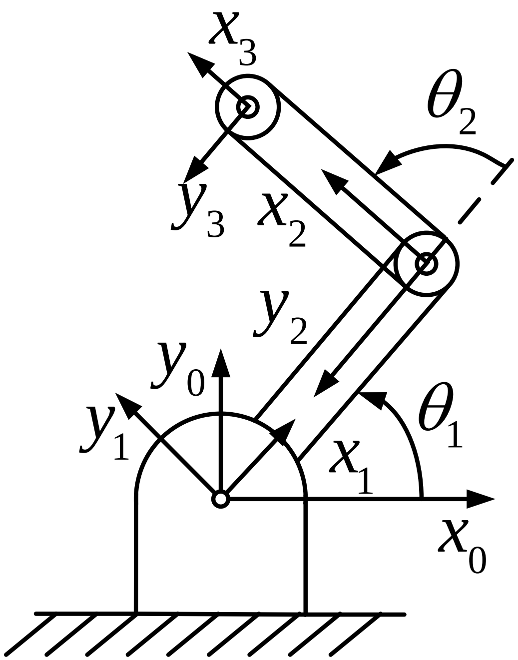
□ 注意：这样递推得到的连杆速度/角速度、加速度/角加速度都是相对连杆本身坐标系表示的。相对基坐标系描述，则：

$$\omega_i = {}^{0}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\omega_i;\ \ \upsilon_i = {}^{0}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\upsilon_i;\ \ i = 1, 2, \cdots, n$$

7.6 质心的速度和加速度

□ 用递推法计算手臂末端的线速度和角速度：

计算：{3}固结在手臂末端，连杆变换：



$$
{}_1^0\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ {}_2^1\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ {}_3^2\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

因为基坐标系{0}固定不动： $\boldsymbol{\omega}_0=\mathbf{0};\ \boldsymbol{\upsilon}_0=\mathbf{0}$

所以线速度、角速度递推为：

$$
{}^1\boldsymbol{\omega}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix},\ {}^1\boldsymbol{\upsilon}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ {}^2\boldsymbol{\omega}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2 \end{bmatrix},\ {}^2\boldsymbol{\upsilon}_2=\begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix} l_1 s_2\dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix},\ {}^3\boldsymbol{\omega}_3={}^2\boldsymbol{\omega}_2,\ {}^3\boldsymbol{\upsilon}_3=\ldots
$$

所以： $\boldsymbol{\omega}_3={}_3^0\boldsymbol{R}\,{}^3\boldsymbol{\omega}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\upsilon}_3={}_3^0\boldsymbol{R}\,{}^3\boldsymbol{\upsilon}_3=\begin{bmatrix} -l_1 s_1\dot{\theta}_1-l_2 s_{12}\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right) \\ l_1 c_1\dot{\theta}_1+l_2 c_{12}\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right) \\ 0 \end{bmatrix}$

7.7 牛顿-欧拉递推动力学方程

□ 连杆处于平衡状态时，所受合力/力矩为零，平衡方程({i}中)：

$$^i f_i - {}^i f_{i+1} + m_i {}^i g = 0$$

$$^i \tau_i - \underline{{}^i \tau_{i+1} - {}^i p_{i+1} \times {}^i f_{i+1}} + {}^i p_{ci} \times m_i {}^i g = 0$$

连杆i+1对连杆i的支反力力矩

绕i轴线

□ 不考虑连杆重力时，质心受到的合力与合力矩分别为：

$$^i f_{ci} = {}^i f_i - {}^i f_{i+1}$$

$$^i \tau_{ci} = {}^i \tau_i - {}^i \tau_{i+1} - {}^i p_{ci} \times {}^i f_{ci} - {}^i p_{i+1} \times {}^i f_{i+1}$$

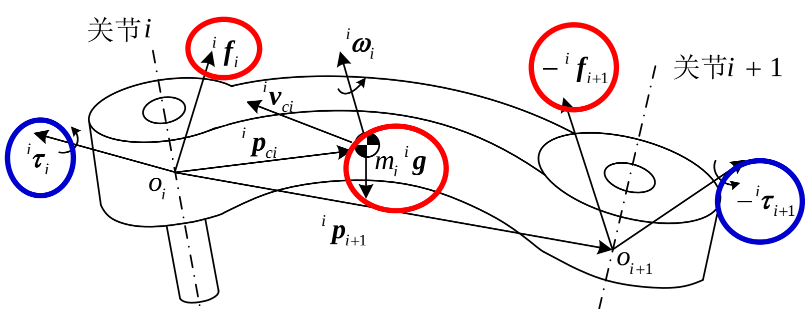
绕质心c

将上式右端力/力矩在**自身坐标系**表示，**递推**形式为：

$$^i f_i = {}^i f_{ci} + {}_{i+1}^{\ \ i}R \, \underline{^{i+1} f_{i+1}}$$

各连杆力/力矩在其坐标系中的表示

$$^i \tau_i = {}^i \tau_{ci} + {}_{i+1}^{\ \ i}R \, \underline{^{i+1} \tau_{i+1}} + {}^i p_{ci} \times {}^i f_{ci} + {}^i p_{i+1} \times {}_{i+1}^{\ \ i}R \, \underline{^{i+1} f_{i+1}}$$



7.7 牛顿-欧拉递推动力学方程

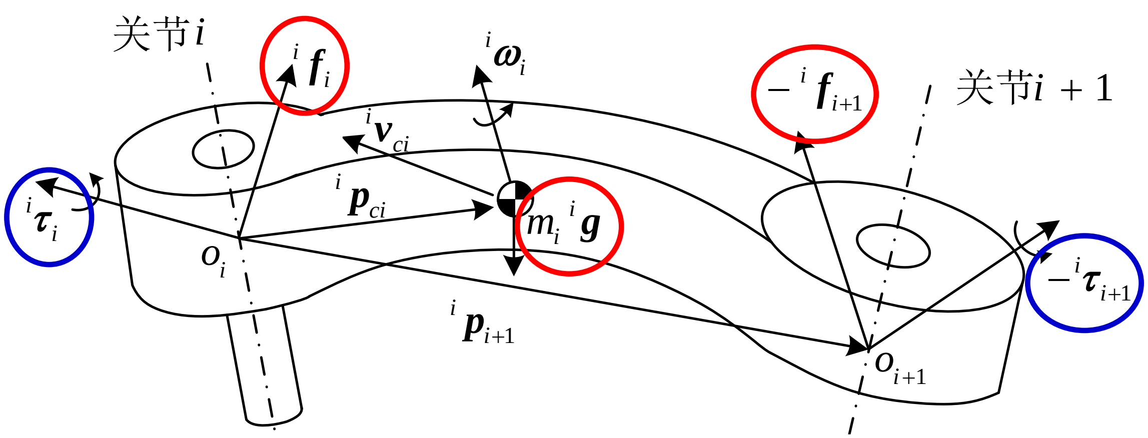
各个连杆所承受的力和力矩中，某些分量由操作臂本身的连杆结构所平衡，一部分被各关节的驱动力/力矩所平衡。

- **对于转动关节，关节驱动力矩为平衡力矩的z轴分量：**

$$\tau_i = {}^i\boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{T}}\ {}^i\boldsymbol{z}_i$$

- **对于移动关节，关节驱动力为平衡力的z轴分量：**

$$\tau_i = {}^i\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{T}}\ {}^i\boldsymbol{z}_i$$



7.7 牛顿-欧拉递推动力学方程

□ 根据关节位移、速度和加速度：**计算所需的关节力矩或力**。

1）向外递推计算各**连杆的速度和加速度**，由牛顿-欧拉公式算出各连杆的惯性力和力矩；2）向内递推计算各连杆相互作用的**力和力矩，以及关节驱动力或力矩**。

1）向外递推：$(i:0\rightarrow n-1)$

$$
\begin{aligned}
{}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1} \\
{}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i} + {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i}\times\dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1} \\
{}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\left[{}^{i}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{i} + {}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i}\times{}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1} + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i}\times\left({}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i}\times{}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

旋转关节i+1

$$
\begin{aligned}
{}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i} \\
{}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i} \\
{}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\left[{}^{i}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{i} + {}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i}\times{}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1} + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i}\times\left({}^{i}\boldsymbol{\omega}_{i}\times{}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1}\right)\right] \\
&\quad + 2\,{}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1}\times\dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1} + \ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\boldsymbol{z}_{i+1}
\end{aligned}
$$

移动关节i+1

7.7 牛顿-欧拉递推动力学方程

$$
\begin{aligned}
{}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{ci+1} &= {}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{i+1} + {}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} \times {}^{i+1}\boldsymbol{r}_{ci+1} + {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \left({}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}\boldsymbol{r}_{ci+1} \right), \\
{}^{i+1}\boldsymbol{f}_{ci+1} &= m_{i+1}\, {}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_{ci+1} + {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \left(m_{i+1}\, {}^{i+1}\boldsymbol{\upsilon}_{i+1} \right), \\
{}^{i+1}\boldsymbol{\tau}_{ci+1} &= {}^{Ci+1}\boldsymbol{I}_{i+1}\, {}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} + {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \left({}^{Ci+1}\boldsymbol{I}_{i+1}\, {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \right)
\end{aligned}
$$

连杆质心

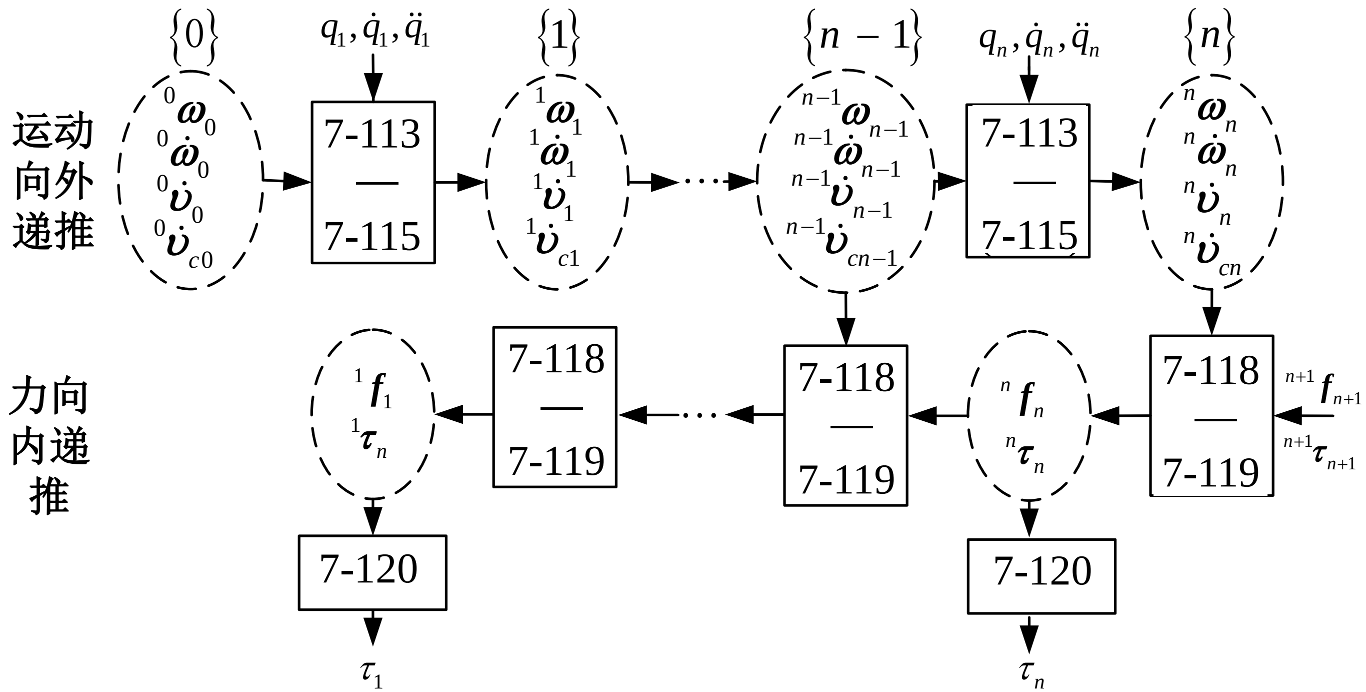
2）向内递推：$(i : n \to 1)$

$$
\begin{aligned}
{}^{i}\boldsymbol{f}_{i} &= {}^{i}_{i+1}\boldsymbol{R}\, {}^{i+1}\boldsymbol{f}_{i+1} + {}^{i}\boldsymbol{f}_{ci}, \\
{}^{i}\boldsymbol{\tau}_{i} &= {}^{i}_{i+1}\boldsymbol{R}\, {}^{i+1}\boldsymbol{\tau}_{i+1} + {}^{i}\boldsymbol{\tau}_{c_i} + {}^{i}\boldsymbol{p}_{c_i} \times {}^{i}\boldsymbol{f}_{c_i} + {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}\boldsymbol{R}\, {}^{i+1}\boldsymbol{f}_{i+1},
\end{aligned}
$$

$$
\tau_i = \begin{cases} {}^{i}\boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{T}\,i}\boldsymbol{z}_i & (\text{旋转关节}) \\ {}^{i}\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{T}\,i}\boldsymbol{z}_i & (\text{移动关节}) \end{cases}
$$

7.7 牛顿-欧拉递推动力学方程

□ 递推结构图：

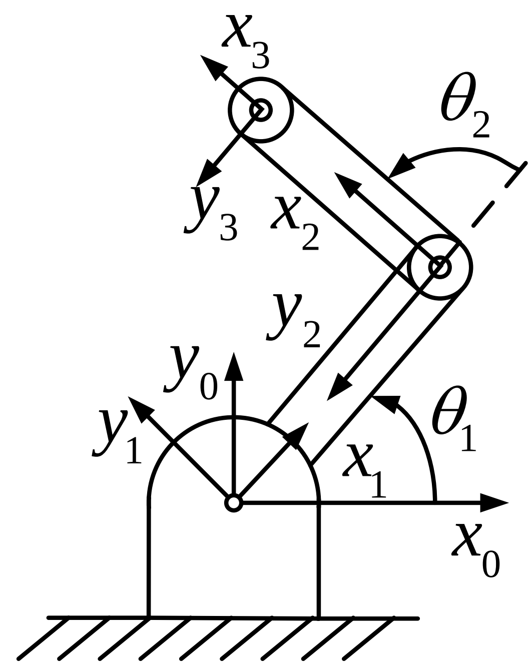


- ◆ **操作臂末端所受力/力矩作为内推的初值，自由状态：** $^{n+1}\boldsymbol{f}_{n+1} = {}^{n+1}\boldsymbol{\tau}_{n+1} = 0$
- ◆ **只要知道各连杆质量、惯性张量、质心** $^{i}p_{ci}$ **和旋转矩阵** $^{i+1}_{\ i}\boldsymbol{R}$ **，即可直接计算给定运动所需的关节驱动力和力矩；**
- ◆ **为阐明动力学结构：写成封闭解，即将关节力矩和力写成关节位移、速度和加速度** $(q,\dot q,\ddot q)$ **的显函数形式。**

7.7 牛顿-欧拉递推动力学方程

□ 如图2R机械手，质量m_1、m_2集中在末端连杆，求动力学方程

$^{1}\boldsymbol{r}_{c1}=l_1\boldsymbol{x}_1$	$^{2}\boldsymbol{r}_{c2}=l_2\boldsymbol{x}_2$	两连杆质心矢径
$^{C_1}\boldsymbol{I}_1=\boldsymbol{0}$	$^{C_2}\boldsymbol{I}_2=\boldsymbol{0}$	相对质心惯性张量为0
$\boldsymbol{f}_3=\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{\tau}_3=\boldsymbol{0}$	末端执行器自由
$\boldsymbol{\omega}_0=\boldsymbol{0}$	$\dot{\boldsymbol{\omega}}_0=\boldsymbol{0}$	基座固定
$^{0}\dot{\boldsymbol{v}}_0=g\boldsymbol{y}_0$		考虑重力作用



求解：连杆间变换矩阵

$$ {}^{i}_{i+1}\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} c_{i+1} & -s_{i+1} & 0 \\ s_{i+1} & c_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} c_{i+1} & s_{i+1} & 0 \\ -s_{i+1} & c_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

7.7 牛顿-欧拉递推动力学方程

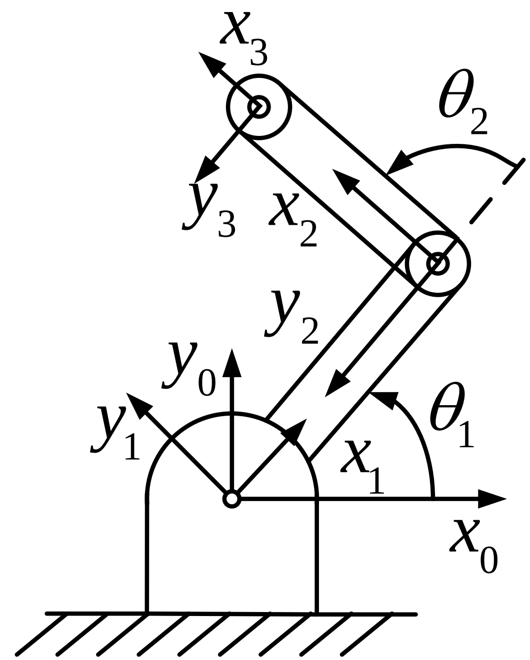
□ 外推连杆速度和加速度（连杆1）：

$$^{1}\boldsymbol{\omega}_1=\dot{\theta}_1\,{}^{1}\mathbf{z}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_1\end{bmatrix},\qquad {}^{1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1=\ddot{\theta}_1\,{}^{1}\mathbf{z}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\\ddot{\theta}_1\end{bmatrix}$$

$$^{1}\dot{\boldsymbol{v}}_1=\begin{bmatrix}c_1&s_1&0\\-s_1&c_1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\g\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}gs_1\\gc_1\\0\end{bmatrix}$$

$$^{1}\dot{\boldsymbol{v}}_{c1}=\begin{bmatrix}gs_1\\gc_1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\\ddot{\theta}_1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}l_1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_1\end{bmatrix}\times\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}l_1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}gs_1-l_1\dot{\theta}_1^2\\gc_1+l_1\ddot{\theta}_1\\0\end{bmatrix}$$

$$^{1}\boldsymbol{f}_{c1}=m_1\,{}^{1}\dot{\mathbf{v}}_{c1}=m_1\begin{bmatrix}gs_1-l_1\dot{\theta}_1^2\\gc_1+l_1\ddot{\theta}_1\\0\end{bmatrix},\qquad {}^{1}\boldsymbol{\tau}_{c1}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$



7.7 牛顿-欧拉递推动力学方程

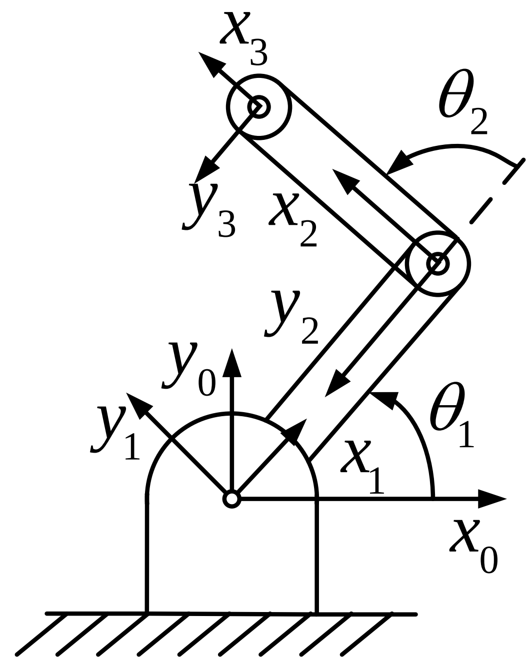
□ 外推连杆速度和加速度（连杆2）：

$$
{}^{2}\boldsymbol{\omega}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot\theta_1+\dot\theta_2\end{bmatrix},\qquad {}^{2}\dot{\boldsymbol{\omega}}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\\ddot\theta_1+\ddot\theta_2\end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}\dot{\boldsymbol{v}}_2=\begin{bmatrix}c_2 & s_2 & 0\\-s_2 & c_2 & 0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}gs_1-l_1\dot\theta_1^2\\gc_1+l_1\ddot\theta_1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}gs_{12}-l_1\dot\theta_1^2c_2+l_1\ddot\theta_1s_2\\gc_{12}+l_1\dot\theta_1^2s_2+l_1\ddot\theta_1c_2\\0\end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}\dot{\boldsymbol{v}}_{c2}=\begin{bmatrix}0\\l_2(\ddot\theta_1+\ddot\theta_2)\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-l_2(\dot\theta_1+\dot\theta_2)^2\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}gs_{12}-l_1\dot\theta_1^2c_2+l_1\ddot\theta_1s_2\\gc_{12}-l_1\dot\theta_1^2s_2+l_1\ddot\theta_1c_2\\0\end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}\boldsymbol{f}_{c2}=m_2\begin{bmatrix}gs_{12}-l_1\dot\theta_1^2c_2+l_1\ddot\theta_1s_2-l_2(\dot\theta_1+\dot\theta_2)^2\\gc_{12}-l_1\dot\theta_1^2s_2+l_1\ddot\theta_1c_2+l_2(\ddot\theta_1+\ddot\theta_2)\\0\end{bmatrix},\quad {}^{2}\boldsymbol{\tau}_{c2}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}
$$



□ 内推连杆关节力和力矩（连杆2）：

$$
{}^{2}\boldsymbol{f}_{2}={}^{2}\boldsymbol{f}_{c2},\ {}^{2}\boldsymbol{\tau}_{2}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2l_1l_2c_2\ddot{\theta}_1+m_2l_1l_2s_2\dot{\theta}_1^2+m_2l_2\,\mathrm{g}\,c_{12}+m_2l_2^2\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right) \end{bmatrix}
$$

□ 内推连杆关节力和力矩（连杆1）：

$$
{}^{1}\boldsymbol{f}_{1}=\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_2l_1s_2\ddot{\theta}_1-m_2l_1c_2\dot{\theta}_1^2-m_2l_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2+m_2gs_{12} \\ m_2l_1c_2\ddot{\theta}_1-m_2l_1s_2\dot{\theta}_1^2+m_2l_2\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+m_2gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -m_1l_1\dot{\theta}_1^2+m_1gs_1 \\ m_1l_1\ddot{\theta}_1+m_1gc_1 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

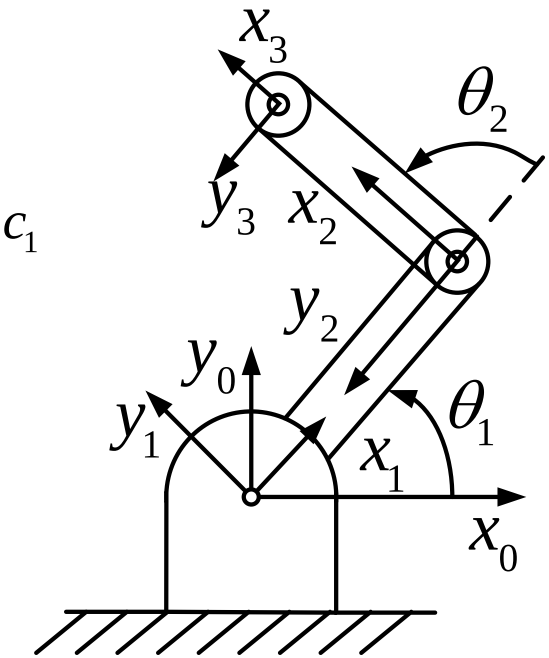
$$
{}^{1}\boldsymbol{\tau}_{1}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2l_1l_2c_2\ddot{\theta}_1+m_2l_2^2\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+m_2l_1l_2s_2\dot{\theta}_1^2+m_2l_2\,\mathrm{g}\,c_{12} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1l_1^2\ddot{\theta}_1+m_1l_1\,\mathrm{g}\,c_1 \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2l_1^2\ddot{\theta}_1+m_2l_1l_2c_2\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)-m_2l_1l_2s_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2+m_2l_1\,\mathrm{g}\,c_1 \end{bmatrix}
$$

7.7 牛顿-欧拉递推动力学方程

- 计算z轴分量，得到两关节力矩：

$$
\begin{cases}
\tau_1 = m_2 l_2^2\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+m_2 l_1 l_2 c_2\left(2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+\left(m_1+m_2\right)l_1^2\ddot{\theta}_1 \\
\qquad -m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_2^2-2m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+m_2 l_2\,\mathrm{g}\,c_{12}+\left(m_1+m_2\right)l_1\,\mathrm{g}\,c_1 \\
\tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2\ddot{\theta}_1+m_2 l_2^2\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_1^2+m_2 l_2\,\mathrm{g}\,c_{12}
\end{cases}
$$



- 上式为关节驱动力矩作为关节位移、速度和加速度的显函数表达式，即为平面2R机械手动力学方程的封闭形式。

7.8 基于指数积的牛顿-欧拉方法

□ 速度变换关系（物体坐标系—第4章公式）：

速度递推：外推 $$V_i^b = \mathrm{Ad}_V({}^{i-1}_{\ i}\boldsymbol{T}^{-1})V_{i-1}^b + L_i\dot{\boldsymbol{q}}_i$$ 运动旋量的坐标变换

□ 对上式求导得加速度变换关系：

L_i表示i关节轴线在{i}中的表示

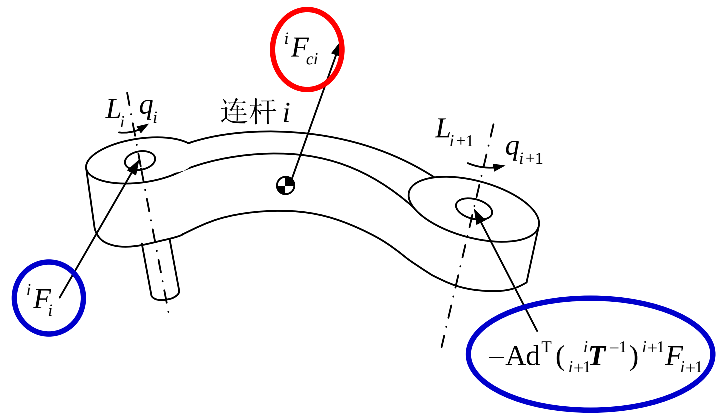
加速度递推：外推

$$\begin{aligned}\dot{V}_i^b &= L_i\ddot{q}_i + \mathrm{Ad}_V({}^{i-1}_{\ i}\boldsymbol{T}^{-1})\dot{V}_{i-1}^b + \mathrm{Ad}_V({}^{i-1}_{\ i}\dot{\boldsymbol{T}}^{-1})V_{i-1}^b \\ &= L_i\ddot{q}_i + \mathrm{Ad}_V({}^{i-1}_{\ i}\boldsymbol{T}^{-1})\dot{V}_{i-1}^b - \mathrm{ad}_V(L_i\dot{q}_i)\left\{\mathrm{Ad}_V({}^{i-1}_{\ i}\boldsymbol{T}^{-1})V_{i-1}^b\right\}\end{aligned}$$

□ 坐标系{i}中，力旋量平衡方程式为：

力递推：内推 $${}^iF_{ci} = {}^iF_i - \mathrm{Ad}_V^{\mathrm{T}}({}_{i+1}^{\ \ i}\boldsymbol{T}^{-1})\,{}^{i+1}F_{i+1}$$

□ 将 ${}^iF_{ci}$ 表示为 $V_i^b, \dot{V}_i^b$ 的形式得递推式：



$$\begin{aligned}{}^iF_i &= \mathrm{Ad}_V^{\mathrm{T}}({}_{i+1}^{\ \ i}\boldsymbol{T}^{-1})\,{}^{i+1}F_{i+1} + {}^iF_{ci} \\ &= \mathrm{Ad}_V^{\mathrm{T}}({}_{i+1}^{\ \ i}\boldsymbol{T}^{-1})\,{}^{i+1}F_{i+1} + \boldsymbol{M}_i^b\dot{V}_i^b - \mathrm{ad}_V^{\mathrm{T}}\left(V_i^b\right)\boldsymbol{M}_i^bV_i^b\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{M}_i^b = \begin{bmatrix} m_i\boldsymbol{I} & -m_i[{}^i\boldsymbol{p}_{ci}] \\ m_i[{}^i\boldsymbol{p}_{ci}] & {}^{C_i}\boldsymbol{I}_i - m_i[{}^i\boldsymbol{p}_{ci}]^2 \end{bmatrix}$$

7.8 基于指数积的牛顿-欧拉方法

- **关节驱动力或力矩表示为：**

$$\tau_i = {}^{i}L_i^{\mathrm{T}}\,{}^{i}F_i$$

- **递推动力学方程为**

1）向外递推： $\left(i:0\rightarrow n-1\right)$

$$^{i-1}_{\ \ i}\boldsymbol{T} = {}^{i-1}_{\ \ i}\boldsymbol{T}(0)e^{[L_i]q_i}$$

$$V_i^b = \mathrm{Ad}_V({}^{i-1}_{\ \ i}\boldsymbol{T}^{-1})V_{i-1}^b + L_i\dot{q}_i$$

$$\dot{V}_i^b = L_i\ddot{q}_i + \mathrm{Ad}_V({}^{i-1}_{\ \ i}\boldsymbol{T}^{-1})\dot{V}_{i-1}^b - \mathrm{ad}_V(L_i\dot{q}_i)\left\{\mathrm{Ad}_V({}^{i-1}_{\ \ i}\boldsymbol{T}^{-1})V_{i-1}^b\right\}$$

2）向内递推： $\left(i:n\rightarrow 1\right)$

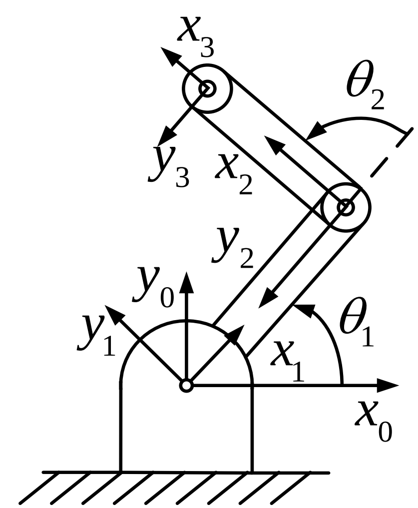
$$^{i}F_i = \mathrm{Ad}_V^{\mathrm{T}}({}^{\ \ i}_{i+1}\boldsymbol{T}^{-1})\,{}^{i+1}F_{i+1} + \boldsymbol{M}_i^b\dot{V}_i^b - \mathrm{ad}_V^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{V}_i^b\right)\boldsymbol{M}_i^b V_i^b,$$

$$\boldsymbol{\tau}_i = {}^{i}L_i^{\mathrm{T}}\,{}^{i}F_i$$

7.9 关节空间的动力学方程

□ 2R平面机械手动力学方程：

$$
\begin{cases}
\tau_1 = m_2 l_2^2\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+m_2 l_1 l_2 c_2\left(2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+\left(m_1+m_2\right)l_1^2\ddot{\theta}_1 \\
\qquad -m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_2^2-2m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+m_2 l_2\,\mathrm{g}\,c_{12}+\left(m_1+m_2\right)l_1\,\mathrm{g}\,c_1 \\
\tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2\ddot{\theta}_1+m_2 l_2^2\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)+m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_1^2+m_2 l_2\,\mathrm{g}\,c_{12}
\end{cases}
$$



$$
\boldsymbol{\tau}=\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} m_1 l_1^2+m_2\left(l_1^2+l_2^2+2l_1 l_2 c_2\right) & m_2\left(l_2^2+l_1 l_2 c_2\right)\\ m_2\left(l_2^2+l_1 l_2 c_2\right) & m_2 l_2^2\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}})=\begin{bmatrix}-m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_2^2-2m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\ m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_1^2\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} m_2 l_2\,\mathrm{g}\,c_{12}+\left(m_1+m_2\right)l_1\,\mathrm{g}\,c_1\\ m_2 l_2\,\mathrm{g}\,c_{12}\end{bmatrix}
$$

7.9 关节空间的动力学方程

□ 2R平面机械手动力学方程可表示为:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})}$$

◆ 状态变量为 $(q,\ \dot{q})$，上式是在关节空间描述的动力学方程

◆ 其中 $D(q)$为n×n质量矩阵（对称、正定）、 $h(q,\ \dot{q})$是n×1离心力和科氏力矢量，$G(q)$是n×1的重力矢量;

◆ 科氏力 $\left(-2m_2l_1l_2s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)$ 与两个关节速度的乘积有关；离心力 $\left(-m_2l_1l_2s_2\dot{\theta}_2^2\right)$ 与关节速度的平方有关;

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}})=\begin{bmatrix}-m_2l_1l_2s_2\dot{\theta}_2^2-2m_2l_1l_2s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\ m_2l_1l_2s_2\dot{\theta}_1^2\end{bmatrix}$$

◆ 故与速度有关的项可进一步表示为: $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}}\ \dot{\boldsymbol{q}}]+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})\left[\dot{\boldsymbol{q}}^2\right]$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix}-2m_2l_1l_2s_2\\ 0\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix}0 & -m_2l_1l_2s_2\\ m_2l_1l_2s_2 & 0\end{bmatrix}$$

7.9 操作空间的动力学方程

- 与关节空间动力学方程相同，操作力F与末端加速度 $\ddot{x}$ 存在关系：

$$F = V(q)\ddot{x} + u(q,\dot{q}) + p(q)$$

$V(q), u(q,\dot{q}), p(q)$ 分别称为操作空间的惯性矩阵、科氏力和离心力向量、重力向量；x表示末端操作臂位姿；F是广义操作力矢量。

- 关节力与操作力之间关系：$\boxed{\tau = J^{\mathrm{T}}(q)F}$

- 操作空间速度与关节空间速度之间关系：$\boxed{\dot{x} = J(q)\dot{q}}$

- 进而可推导操作空间动力学方程与关节空间动力学方程关系：

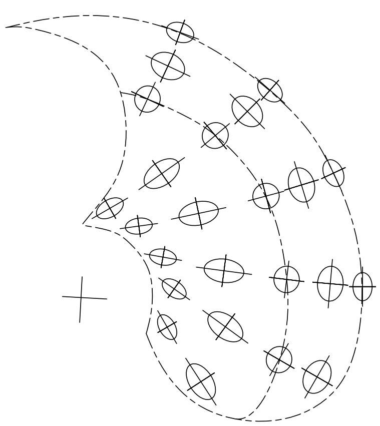
$$V(q) = J^{-\mathrm{T}}(q)D(q)J^{-1}(q),$$

$$u(q,\dot{q}) = J^{-\mathrm{T}}(q)h(q,\dot{q}) - V(q)\dot{J}(q)\dot{q},$$

$$p(q) = J^{-\mathrm{T}}(q)G(q)$$

7.10 动力学性能指标

- 机器人在奇异点处会丧失一个或多个自由度，在奇异点附近，其动力学性能也会变差；
- 评价动力学性能：对于机器人结构设计、工作空间的选择、轨迹规划和控制方案的拟定都具有重要作用；
- Asada提出广义惯性椭球GIE：实质是利用笛卡尔惯性矩阵 $V(q)=J^{-T}(q)D(q)J^{-1}(q)$ 的**特征值度量笛卡尔各方向的加速特性**；
- 对于二次型方程：$x^{T}V(q)x=1$，表示n维空间的一个椭球，椭球主轴方向是V(q)的特征矢量方向，主轴长度是特征值的平方根。
- 在工作空间任一点，由公式可构造一个椭球，该点动力学特性可由该点对应的椭球评估，**椭球越接近球，动力学特性越好**。



2R机械手广义GIE

7.10 动力学性能指标

- Yoshikawa提出动态可操作性椭球DME：基于m×n阶矩阵E(q)(表示机器人关节驱动力矩与操作加速度之间的关系)奇异值分解：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{U}\Sigma\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 & \\ & \sigma_2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \sigma_m & \end{bmatrix}$$

- 构造动态性能指标：

$$\begin{cases} w_1 = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m \\ w_2 = \sigma_1/\sigma_m \\ w_3 = \sigma_m \\ w_4 = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m)^{\frac{1}{m}} = w_1^{\frac{1}{m}} \end{cases}$$

- 仿照运动学灵巧度，将 w_1 定义为动态可操作性度量指标：

$$w_1 = \sqrt{\det \boldsymbol{E}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})}$$