第二章 连续系统的时域分析

LTI连续系统的时域分析，归结为：建立并求解线性微分方程 由于在其分析过程涉及的函数变量均为时间t，故称为时域分析法。这种方法比较直观，物理概念清楚，是学习各种变换域分析法的基础。

2.1 LTI连续系统的响应

一、微分方程的经典解

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t)$$
$$= b_mf^{(m)}(t) + b_{m-1}f^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1f^{(1)}(t) + b_0f(t)$$

微分方程的经典解:

$y(t)$(完全解) $= y_h(t)$(齐次解) $+ y_p(t)$(特解)

齐次解是齐次微分方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=0$$

的解。

2.1 LTI连续系统的响应

齐次解$y_p(t)$的函数形式由上述微分方程的特征根确定。

P41表2-1.

表2-1 不同特征根所对应的齐次解

特征根λ	齐次解$y_h(t)$
单实根	$Ce^{\lambda t}$
r重实根	$(C_{r-1}t^{r-1}+C_{r-2}t^{r-2}+\cdots+C_1t+C_0)e^{\lambda t}$
一对共轭复根$\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$	$e^{\alpha t}[C\cos(\beta t)+D\sin(\beta t)]$或$Ae^{\alpha t}\cos(\beta t-\theta)$，其中$Ae^{j\theta}=C+jD$
r重共轭复根	$[A_{r-1}t^{r-1}\cos(\beta t+\theta_{r-1})+A_{r-2}t^{r-2}\cos(\beta t+\theta_{r-2})+\cdots+A_0\cos(\beta t+\theta_0)]e^{\alpha t}$

2.1 LTI连续系统的响应

特解$y_h(t)$的函数形式与激励函数的形式有关。

P41表2-2.

表2-2 不同激励所对应的特解

激励$f(t)$	特解$y_p(t)$
t^m	$P_m t^m + P_{m-1} t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0$　所有的特征根均不等于0； $t^r[P_m t^m + P_{m-1} t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0]$　有r重等于0的特征根；
$e^{\alpha t}$	$Pe^{\alpha t}$　α不等于特征根； $(P_1 t + P_0)e^{\alpha t}$　α等于特征单根； $(P_r t^r + P_{r-1} t^{r-1} + \cdots + P_1 t + P_0)e^{\alpha t}$　α等于r重特征根；
$\cos(\beta t)$或$\sin(\beta t)$	$P\cos(\beta t)+Q\sin(\beta t)$　所有的特征根均不等于$\pm j\beta$ 或$A\cos(\beta t-\theta)$，其中$Ae^{j\theta}=P+jQ$

2.1 LTI连续系统的响应

齐次解的函数形式仅与系统本身的特性有关，而与激励f(t)的函数形式无关，称为系统的固有响应或自由响应；特征方程的根称为系统的“固有频率”，它决定了系统自由响应的形式。但应注意，齐次解的系数是与激励有关的。

特解的函数形式由激励确定，称为强迫响应。

例 描述某系统的微分方程为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f(t)$$

求（1）当$f(t) = 2e^{-t}$，$t\geq 0$；$y(0)=2$，$y'(0)= -1$时的全解；

（2）当$f(t) = e^{-2t}$，$t\geq 0$；$y(0)= 1$，$y'(0)=0$时的全解。

解: (1) 特征方程为$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ 其特征根$\lambda_1= -2$，$\lambda_2= -3$。

齐次解为

$$y_h(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t}$$

由表2-2可知，当$f(t) = 2e^{-t}$时，其特解可设为

$$y_p(t) = Pe^{-t}$$

将其代入微分方程得

$$Pe^{-t} + 5(-Pe^{-t}) + 6Pe^{-t} = 2e^{-t}$$ 解得 $P=1$

于是特解为 $y_p(t) = e^{-t}$

全解为：$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} + e^{-t}$

其中 待定常数C_1, C_2由初始条件确定

$$y(0) = C_1+C_2+ 1 = 2，\quad y'(0) = -2C_1 - 3C_2 - 1= -1$$

解得 $C_1 = 3$， $C_2 = -2$

最后得全解：$y(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} + e^{-t}$ ，$t\geq 0$

（2）齐次解同上。当激励$f(t)=e^{-2t}$时，其指数与特征根之一相重。由表知：其特解为

$$y_p(t) = (P_1 t + P_0)e^{-2t}$$

代入微分方程可得 $P_1 e^{-2t} = e^{-2t}$

所以 $P_1 = 1$ 但P_0不能求得。

全解为

$$y(t)= C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + te^{-2t} + P_0 e^{-2t}$$
$$= (C_1+P_0)e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + te^{-2t}$$

将初始条件代入，得

$$y(0) = (C_1+P_0) + C_2=1\ ,\quad y'(0)= -2(C_1+P_0) -3C_2+1=0$$

解得 $C_1 + P_0 = 2$,$C_2= -1$ 最后得微分方程的全解为

$$y(t) = 2e^{-2t} - e^{-3t} + te^{-2t}\ ,\ t\geq 0$$

上式第一项的系数$C_1+P_0= 2$，不能区分C_1和P_0，因而也不能区分自由响应和强迫响应。

二、关于0-和0+初始值

若输入f(t)是在t=0时接入系统，则确定待定系数C_i时用t = 0_+时刻的初始值，即$y^{(j)}(0+)$ (j=0,1,2…， n-1)。

而$y^{(j)}(0+)$包含了输入信号的作用，不便于描述系统的历史信息。

在t=0-时，激励尚未接入，该时刻的值$y^{(j)}(0-)$反映了系统的历史情况而与激励无关。称这些值为初始状态或起始值。

通常，对于具体的系统，初始状态一般容易求得。这样为求解微分方程，就需要从已知的初始状态$y^{(j)}(0-)$设法求得$y^{(j)}(0+)$。下列举例说明。

例：描述某系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 6f(t)$$

已知$y(0_-)=2$，$y'(0_-)= 0$，$f(t)=\varepsilon(t)$，求$y(0_+)$和$y'(0_+)$

解：将输入$f(t)=\varepsilon(t)$代入上述微分方程得

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t) \qquad （1）$$

利用系数匹配法分析：上式对于$t=0_-$也成立，在$0_-<t<0_+$区间等号两端$\delta(t)$项的系数应相等。

由于等号右端为$2\delta(t)$，故$y''(t)$应包含冲激函数，从而$y'(t)$在$t= 0$处将发生跃变，即$y'(0+)\neq y'(0-)$。

但$y'(t)$不含冲激函数，否则$y''(t)$将含有$\delta'(t)$项。由于$y'(t)$中不含$\delta(t)$，故$y(t)$在$t=0$处是连续的。

故 $$y(0+) = y(0-) = 2$$

对式(1)两端积分有

$$\int_{0-}^{0+} y''(t)dt + 3\int_{0-}^{0+} y'(t)dt + 2\int_{0-}^{0+} y(t)dt = 2\int_{0-}^{0+} \delta(t)dt + 6\int_{0-}^{0+} \varepsilon(t)dt$$

由于积分在无穷小区间[0-，0_+]进行的，且y(t)在t=0连续，故

$$\int_{0-}^{0+} y(t)dt = 0, \int_{0-}^{0+} \varepsilon(t)dt = 0$$

于是由上式得

$$[y'(0_+) - y'(0-)] + 3[y(0_+) - y(0-)]=2$$

考虑 y(0+) = y(0-)=2， 所以

$$y'(0_+) - y'(0-) = 2 \quad , \quad y'(0+) = y'(0-) + 2 = 2$$

<u>结论：</u>当微分方程等号右端含有冲激函数（及其各阶导数）时，响应y(t)及其各阶导数中，有些在t=0处将发生跃变。但如果右端不含冲激函数（及其各阶导数）时，则不会跃变。

三、零输入响应和零状态响应

$y(t) = y_x(t) + y_f(t)$ ，也可以分别用经典法求解。

注意：对t=0时接入激励f(t)的系统，初始值

$y_x^{(j)}(0_+), y_f^{(j)}(0_+)$ （$j = 0，1，2，…，n-1$）的计算

$$y^{(j)}(0_-)= y_x^{(j)}(0_-)+ y_f^{(j)}(0_-)$$

$$y^{(j)}(0_+)= y_x^{(j)}(0_+)+ y_f^{(j)}(0_+)$$

对于零输入响应，由于激励为零，故有

$$y_x^{(j)}(0_+)= y_x^{(j)}(0_-) = y^{(j)}(0_-)$$

对于零状态响应，在t=0-时刻激励尚未接入，故应有

$$y_f^{(j)}(0_-)=0$$

$y_f^{(j)}(0_+)$的求法下面举例说明。

2.1 LTI连续系统的响应

例：描述某系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 6f(t)$$

已知$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=0$，$f(t)=\varepsilon(t)$。求该系统的零输入响应和零状态响应。

解：（1）零输入响应$y_x(t)$ 激励为0，故$y_x(t)$满足

$$y_x''(t) + 3y_x'(t) + 2y_x(t) = 0$$

$$y_x(0_+)= y_x(0_-)= y(0_-)=2$$

$$y_x'(0_+)= y_x'(0_-)= y'(0_-)=0$$

该齐次方程的特征根为–1，–2，故

$$y_x(t) = C_{x1}e^{-t} + C_{x2}e^{-2t}$$

代入初始值并解得系数为$C_{x1}=4$,$C_{x2}=-2$，代入得

$$y_x(t) = 4e^{-t} - 2e^{-2t} \quad ,t > 0$$

（2）零状态响应$y_f(t)$ 满足

$$y_f''(t) + 3y_f'(t) + 2y_f(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t)$$ 并有

$$y_f(0-) = y_f'(0-) = 0$$

由于上式等号右端含有$\delta(t)$，故$y_f''(t)$含有$\delta(t)$，从而$y_f'(t)$跃变，即$y_f'(0+)\neq y_f'(0-)$，而$y_f(t)$在$t = 0$连续，即$y_f(0+) = y_f(0-) = 0$，积分得

$$[y_f'(0+)- y_f'(0-)]+ 3[y_f(0+)- y_f(0-)]+2\int_{0-}^{0+} y_f(t)\,\mathrm{d}t = 2 + 6\int_{0-}^{0+} \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t$$

因此，$y_f'(0+)= 2 + y_f'(0-)=2$

对$t>0$时，有 $y_f''(t) + 3y_f'(t) + 2y_f(t) = 6$

不难求得其齐次解为$C_{f1}e^{-t} + C_{f2}e^{-2t}$，其特解为常数3，

于是有 $y_f(t)=C_{f1}e^{-t} + C_{f2}e^{-2t} + 3$

代入初始值求得 $y_f(t)= -4e^{-t} + e^{-2t} + 3$， $t\geq 0$

一、冲激响应

由单位冲激函数$\delta(t)$所引起的零状态响应称为单位冲激响应，简称冲激响应，记为h(t)。$h(t)=T[\{0\},\delta(t)]$

例1 描述某系统的微分方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$求其冲激响应h(t)。

解 根据h(t)的定义 有

$$h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = \delta(t)$$

$$h'(0-) = h(0-) = 0$$

先求$h'(0+)$和$h(0+)$

2.2 冲激/阶跃响应

因方程右端有δ(t)，故利用系数平衡法。h''(t)中含δ(t)，h'(t)含ε(t)，h'(0+)≠h'(0-)，h(t)在t=0连续，即h(0+)=h(0-)。积分得

$$[h'(0+) - h'(0-)] + 5[h(0+) - h(0-)] + 6\int_{0-}^{0+} h(t)dt = 1$$

考虑h(0+)= h(0-)，由上式可得

$$h(0+)=h(0-)=0\ ,\ h'(0+) =1 + h'(0-) = 1$$

对t>0时，有 $h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = 0$

故系统的冲激响应为一齐次解。

微分方程的特征根为-2，-3。故系统的冲激响应为

$$h(t)=(C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t})\varepsilon(t)$$

代入初始条件求得$C_1=1,C_2=-1$, 所以

$$h(t)=(e^{-2t} - e^{-3t})\varepsilon(t)$$

2.2 冲激/阶跃响应

例2 描述某系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)= f''(t) + 2f'(t) + 3f(t)$$

求其冲激响应h(t)。

解 根据h(t)的定义 有

$$h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = \delta''(t)+ 2\delta'(t)+3\delta(t) \qquad (1)$$

$$h'(0-) = h(0-) = 0$$

先求h'(0+)和h(0+)。

由方程可知， h(t) 中含δ(t)

故令 $h(t) = a\delta(t) + p_1(t)$ [$p_i(t)$ 为不含δ(t) 的某函数]

$$h'(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + p_2(t)$$

$$h''(t) = a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t)+ p_3(t)$$

代入式(1)，有

2.2 冲激/阶跃响应

$$a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t) + p_3(t) + 5[a\delta'(t) + b\delta(t) + p_2(t)]$$
$$+ 6[a\delta(t) + p_1(t)] = \delta''(t) + 2\delta'(t) + 3\delta(t)$$

整理得

$$a\delta''(t) + (b+5a)\delta'(t) + (c+5b+6a)\delta(t) + p_3(t) + 5p_2(t) + 6p_1(t) = \delta''(t) + 2\delta'(t) + 3\delta(t)$$

利用$\delta(t)$ 系数匹配，得 $a=1$， $b=-3$， $c=12$

所以 $h(t) = \delta(t) + p_1(t)$ （2）

$h'(t) = \delta'(t) - 3\delta(t) + p_2(t)$ （3）

$h''(t) = \delta''(t) - 3\delta'(t) + 12\delta(t) + p_3(t)$ （4）

对式(3)从0-到0+积分得 $h(0+) - h(0-) = -3$

对式(4)从0-到0+积分得 $h'(0+) - h'(0-) = 12$

故 $h(0+) = -3$， $h'(0+) = 12$

对t>0时，有 $h''(t) + 6h'(t) + 5h(t) = 0$

微分方程的特征根为-2， -3。故系统的冲激响应为

$$h(t)= C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t}\ ,\quad t>0$$

代入初始条件$h(0+) = -3$， $h'(0+) =12$

求得$C_1=3$，$C_2=-6$, 所以

$$h(t)= 3e^{-2t} - 6e^{-3t}\quad , t > 0$$

结合式(2)得

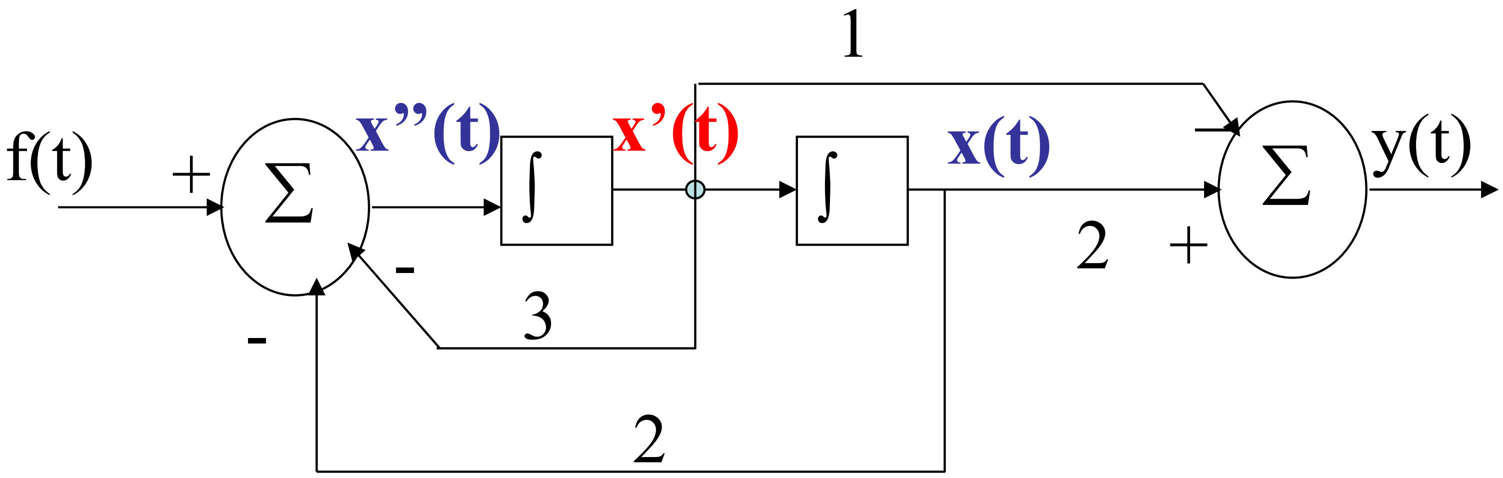
$$h(t)= \delta(t) + (3e^{-2t} - 6e^{-3t})\varepsilon(t)$$

四、阶跃响应

由于$\delta(t)$ 与$\varepsilon(t)$ 为微积分关系，故

$$g(t)= T\ [\varepsilon(t)\ ,\ \{0\}]\qquad g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\qquad h(t)=\frac{\mathrm{d}\,g(t)}{\mathrm{d}t}$$

例3 如图所示的LTI系统，求其阶跃响应及冲激响应。



解：(1) 列写系统的微分方程

设图中右端积分器的输出为x(t)，则其输入为 x'(t)，左端积分器的输入为 x''(t)。左端加法器的输出

$$x''(t) = -3x'(t) - 2x(t) + f(t)$$

即：
$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = f(t) \qquad (1)$$

2.2 冲激/阶跃响应

右端加法器的输出： $y(t)=-x'(t)+2x(t)$

可求得系统的微分方程为

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=-f'(t)+2f(t) \qquad \textbf{(2)}$$

(2)求阶跃响应

若设 $g_x(t)$ 为方程(1)的阶跃响应，则式 (2)所述系统的阶跃响应为：

$$g(t)=-g_x'(t)+2g_x(t) \qquad \textbf{(3)}$$

$g_x(t)$ 满足方程

$$\begin{aligned} &g_x''(t)+3g_x'(t)+2g_x(t)=\varepsilon(t) \\ &g_x(0_-)=g_x'(0_-)=0 \end{aligned} \qquad \textbf{(4)}$$

其特征根 $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2$，其特解为0.5，于是得

于是 $$g_x(t)=\left(C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+0.5\right)\varepsilon(t)$$

$$g_x'(t)=\left(-C_1e^{-t}-2C_2e^{-2t}\right)\varepsilon(t)$$

由式(4)，等式右边只含有$\varepsilon(t)$, 故除 $g_x''(t)$ 外，$g_x'(t), g_x(t)$ 均连续。即有 $g_x(0_+)=g_x'(0_+)=0$

将它们代人到上式，有

$$g_x(0_+)=C_1+C_2+0.5=0$$

$$g_x'(0_+)=-C_1-2C_2=0$$

可解得 $C_1=-1, C_2=0.5$

于是

$$g_x(t)=\left(-e^{-t}+0.5e^{-2t}+0.5\right)\varepsilon(t)$$

$$g_x'(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)\varepsilon(t)$$

将它们代人到式(3)，最后得系统的阶跃响应为

$$g(t) = -g_x^{'}(t) + 2g_x(t) = \left(-3e^{-t} + 2e^{-2t} + 1\right)\varepsilon(t)$$

(2) 求冲激响应

实际上，系统的冲激响应为

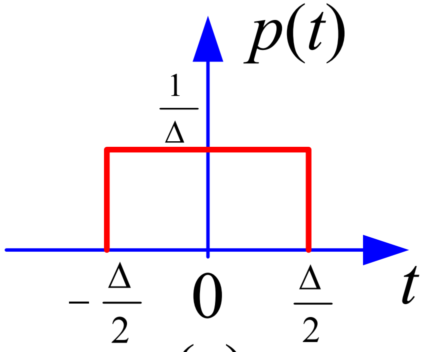
$$h(t) = g'(t) = \left(3e^{-t} - 4e^{-2t}\right)\varepsilon(t)$$

一、信号的时域分解与卷积积分

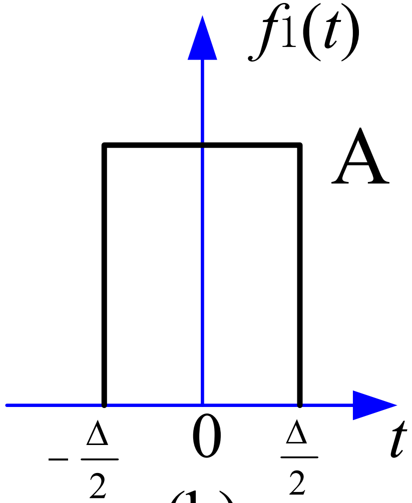
1 . 信号的时域分解

（1）预备知识

问 $f_1(t) = ?\ p(t)$



(a)

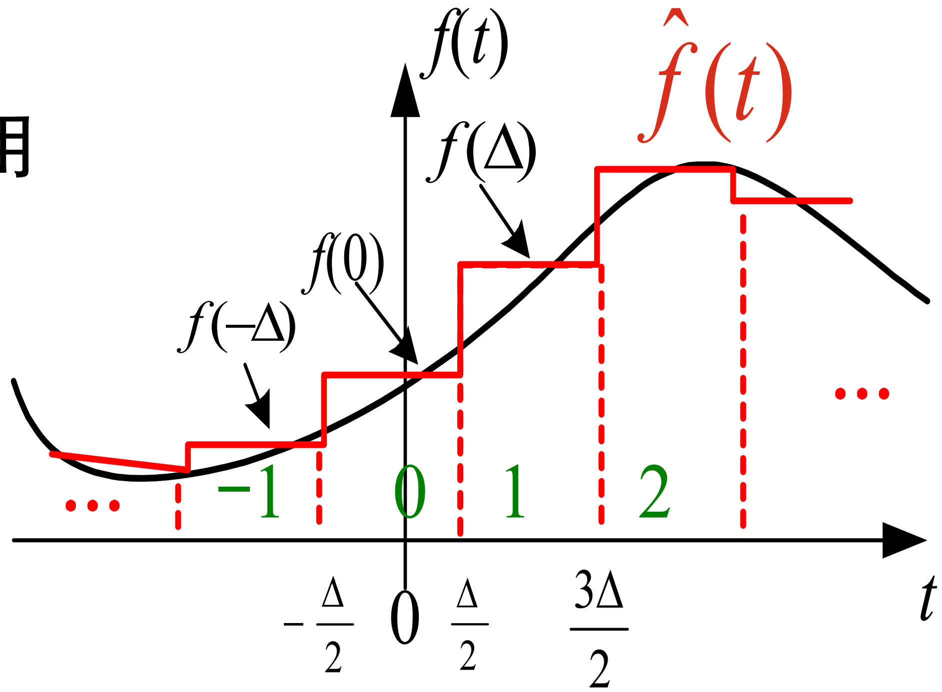


(b)

直观看出

$$\boxed{f_1(t) = A\Delta\ p(t)}$$

（2）任意信号分解



"0"号脉冲高度f(0) ,宽度为△，用p(t)表示为：$f(0)\,\triangle\,p(t)$

"1"号脉冲高度f(△) ,宽度为△，用p(t－△)表示为：

$f(\triangle)\,\triangle\,p(t-\triangle)$

"−1"号脉冲高度f(−△) 、宽度为△，用p(t +△)表示为：

$f(-\triangle)\,\triangle\,p(t+\triangle)$

$$\hat{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)\Delta p(t-n\Delta)$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\hat{f}(t)=f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

2.3 卷积及其性质

2 . 任意信号作用下的零状态响应

根据h(t)的定义： $\delta(t) \Longrightarrow h(t)$

由时不变性： $\delta(t-\tau) \Longrightarrow h(t-\tau)$

由齐次性： $f(\tau)\delta(t-\tau) \Longrightarrow f(\tau)\,h(t-\tau)$

由叠加性： $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$\|$ $\qquad\qquad$ $\|$

$f(t)$ $\qquad\qquad$ $y_f(t)$

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

卷积积分

2.3 卷积及其性质

3．卷积积分的定义

已知定义在区间（$-\infty$，∞）上的两个函数$f_1(t)$和$f_2(t)$，则定义积分

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

为$f_1(t)$与$f_2(t)$的卷积积分，简称卷积；记为

$$f(t)= f_1(t)*f_2(t)$$

注意：积分是在虚设的变量τ下进行的，τ为积分变量，t为参变量。结果仍为t 的函数。

$$\boxed{y_f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)*h(t)}$$

例：$f(t) = e^{t}$，（$-\infty<t<\infty$），$h(t) = (6e^{-2t} - 1)\varepsilon(t)$，求$y_f(t)$。

解：$y_f(t) = f(t) * h(t)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}[6e^{-2(t-\tau)} - 1]\varepsilon(t-\tau)\,d\tau$$

当$t<\tau$，即$\tau>t$时，$\varepsilon(t-\tau) = 0$

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau}[6e^{-2(t-\tau)} - 1]\,d\tau = \int_{-\infty}^{t}(6e^{-2t}e^{3\tau} - e^{\tau})\,d\tau$$

$$= e^{-2t}\int_{-\infty}^{t}(6e^{3\tau})\,d\tau - \int_{-\infty}^{t} e^{\tau}\,d\tau$$

$$= e^{-2t}\cdot 2e^{3\tau}\Big|_{-\infty}^{t} - e^{\tau}\Big|_{-\infty}^{t} = 2e^{-2t}\cdot e^{3t} - e^{t} = e^{t}$$

二、卷积的图解法

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

卷积过程可分解为四步：

（1）换元： t换为τ→得 $f_1(\tau)$， $f_2(\tau)$

（2）反转平移：由$f_2(\tau)$反转→ $f_2(-\tau)$右移t → $f_2(t-\tau)$

（3）乘积： $f_1(\tau)\ f_2(t-\tau)$

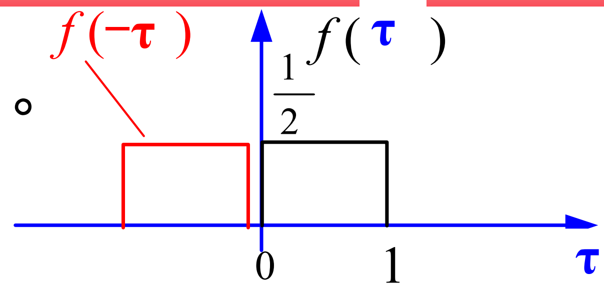
（4）积分： τ从 –∞到∞对乘积项积分

注意：t为参变量

下面举例说明

2.3 卷积及其性质

例$f(t)$,$h(t)$ 如图所示，求$y_f(t)= h(t) * f(t)$ 。

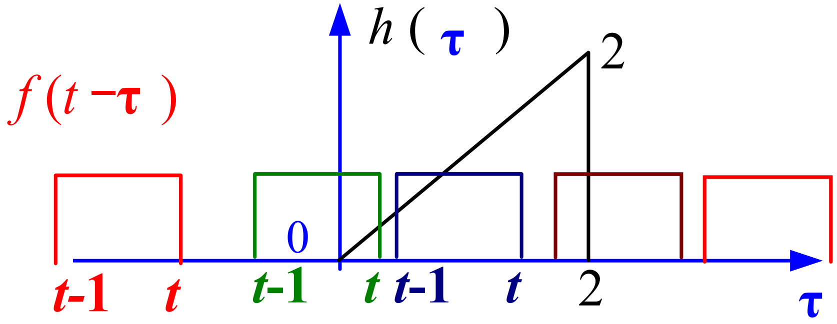


[解]　　采用图形卷积

$h(t)$函数形式复杂 → 换元为$h(\tau)$。

$f(t)$换元 → $f(\tau)$

$f(\tau)$反折 → $f(-\tau)$平移t → $f(t-\tau)$



① $t<0$时，$f(t-\tau)$向左移

$f(t-\tau)\,h(\tau)=0$，故　$y_f(t)=0$

② $0\le t\le 1$ 时，$f(t-\tau)$向右移

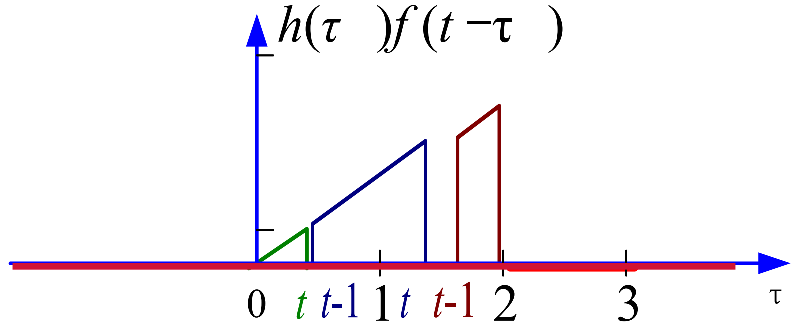
$$y_f(t)=\int_0^t \tau\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{4}t^2$$

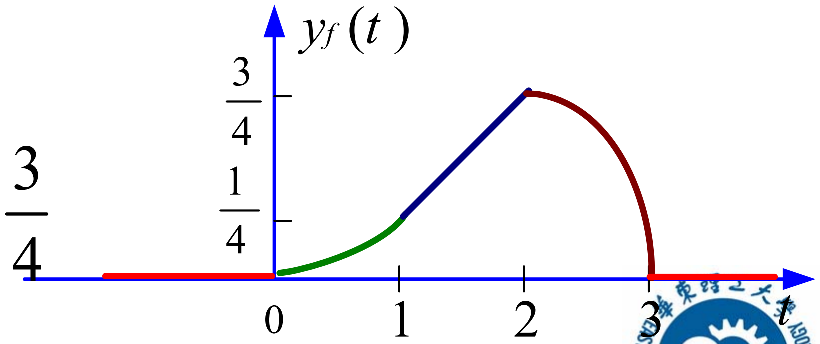
③ $1\le t\le 2$时

$$y_f(t)=\int_{t-1}^{t} \tau\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}$$

④ $2\le t\le 3$ 时

$$y_f(t)=\int_{t-1}^{2} \tau\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{3}{4}$$

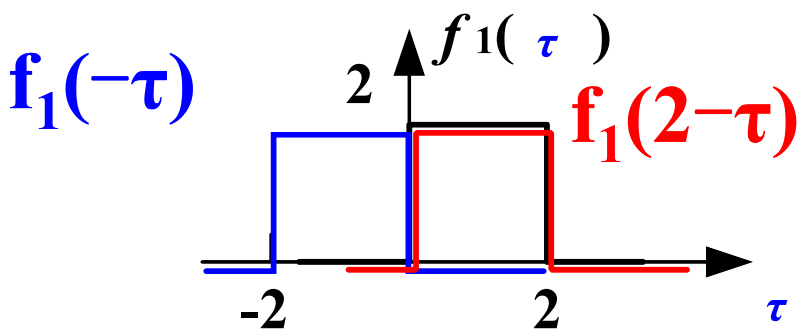




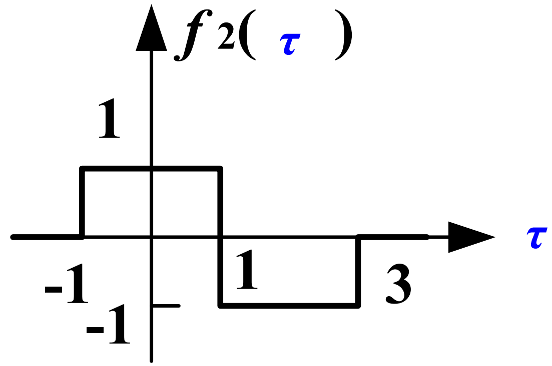
⑤ $3\le t$ 时

$f(t-\tau)\,h(\tau)=0$，故　$y_f(t)=0$

图解法一般比较繁琐，但若只求某一时刻卷积值时还是比较方便的。确定积分的上下限是关键。



例：$f_1(t)$、$f_2(t)$如图所示，已知$f(t) = f_2(t) * f_1(t)$，求$f(2) = ?$



解：$f(2)=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) f_1(2-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

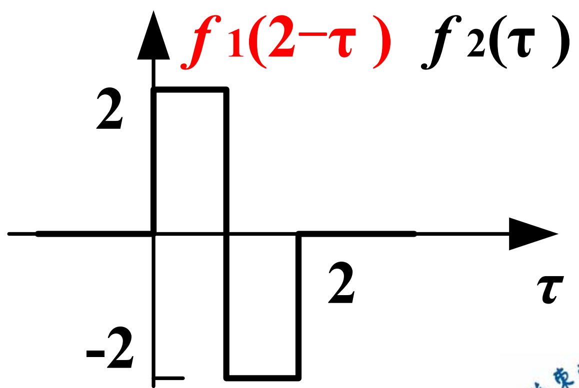
（1）换元

（2）$f_1(\tau)$得$f_1(-\tau)$

（3）$f_1(-\tau)$右移2得$f_1(2-\tau)$

（4）$f_1(2-\tau)$乘$f_2(\tau)$

（5）积分，得$f(2) = 0$（面积为0）



三、卷积的性质

卷积积分是一种数学运算，它有许多重要的性质（或运算规则），灵活地运用它们能简化卷积运算。下面讨论均设卷积积分是收敛的（或存在的）。

1. 卷积代数

满足乘法的三律：

- 交换律： $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$
- 分配律： $f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$
- 结合律： $[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)]=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$

2. 奇异函数的卷积特性

（1） $f(t)*\delta(t)=\delta(t)*f(t) = f(t)$

证： $$\delta(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=f(t)$$

$$f(t)*\delta(t-t_0) = f(t-t_0)$$

（2） $f(t)*\delta'(t) = f'(t)$

证： $$\delta'(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=f'(t)$$

$$f(t)*\delta^{(n)}(t) = f^{(n)}(t)$$

（3） $f(t)*\varepsilon(t) =\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\varepsilon(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$$\varepsilon(t)*\varepsilon(t) = t\varepsilon(t)$$

3. 卷积的微积分性质

（1） $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[f_1(t)*f_2(t)]=\frac{\mathrm{d}^n f_1(t)}{\mathrm{d}t^n}*f_2(t)=f_1(t)*\frac{\mathrm{d}^n f_2(t)}{\mathrm{d}t^n}$$

证：上式$=\delta^{(n)}(t)*[f_1(t)*f_2(t)]$

$=[\delta^{(n)}(t)*f_1(t)]*f_2(t)=f_1^{(n)}(t)*f_2(t)$

（2） $$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\tau)*f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau=[\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau]*f_2(t)=f_1(t)*[\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)\mathrm{d}\tau]$$

证：上式$=\varepsilon(t)*[f_1(t)*f_2(t)]$

$=[\varepsilon(t)*f_1(t)]*f_2(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)$

（3） 在$f_1(-\infty)=0$或$f_2^{(-1)}(\infty)=0$的前提下，

$$f_1(t)*f_2(t)=f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)$$

2.3 卷积及其性质

例1： $f_1(t) = 1$， $f_2(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$，求$f_1(t) * f_2(t)$

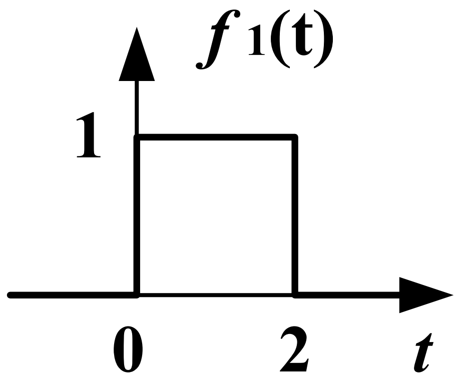
解：通常复杂函数放前面，代入定义式得

$$f_2(t) * f_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}\varepsilon(\tau)\,d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\tau}\,d\tau = -e^{-\tau}\Big|_0^{\infty} = 1$$

注意：套用 $f_1(t) * f_2(t) = f_1'(t) * f_2^{(-1)}(t)$

$= 0 * f_2^{(-1)}(t) = 0$ 显然是错误的

例2：$f_1(t)$ 如图, $f_2(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$，求$f_1(t) * f_2(t)$



解法一： $f_1(t) * f_2(t) = f_1'(t) * f_2^{(-1)}(t)$

$f_1'(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$

$$f_2^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau}\varepsilon(\tau)\,d\tau = \left[\int_0^{t} e^{-\tau}\,d\tau\right]\varepsilon(t) = -e^{-\tau}\Big|_0^{t} \cdot \varepsilon(t) = (1-e^{-t})\varepsilon(t)$$

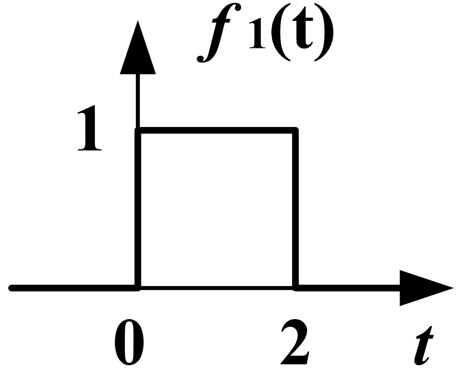
$f_1(t) * f_2(t) = (1 - e^{-t})\varepsilon(t) - [1 - e^{-(t-2)}]\varepsilon(t-2)$

4. 卷积的时移特性

若 $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$,

则 $f_1(t - t_1) * f_2(t - t_2) = f_1(t - t_1 - t_2) * f_2(t)$

$= f_1(t) * f_2(t - t_1 - t_2) = f(t - t_1 - t_2)$



前例：$f_1(t)$ 如图, $f_2(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$， 求$f_1(t) * f_2(t)$

解： $f_1(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)$

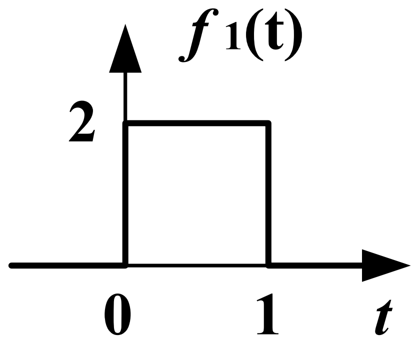
$f_1(t) * f_2(t) = \varepsilon(t) * f_2(t) - \varepsilon(t-2) * f_2(t)$

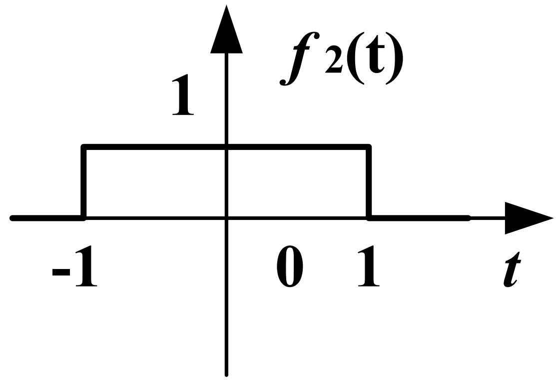
$\varepsilon(t) * f_2(t) = f_2^{(-1)}(t)$

利用时移特性，有$\varepsilon(t-2) * f_2(t) = f_2^{(-1)}(t-2)$

$f_1(t) * f_2(t) = (1 - e^{-t})\varepsilon(t) - [1 - e^{-(t-2)}]\varepsilon(t-2)$

例：$f_1(t), f_2(t)$如图，求$f_1(t)* f_2(t)$





解：$f_1(t) = 2\varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1)$

$f_2(t) = \varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)$

$$f_1(t)* f_2(t)$$
$$= 2\varepsilon(t)*\varepsilon(t+1) - 2\varepsilon(t)*\varepsilon(t-1)$$
$$-2\varepsilon(t-1)*\varepsilon(t+1) + 2\varepsilon(t-1)*\varepsilon(t-1)$$

由于$\varepsilon(t)*\varepsilon(t) = t\varepsilon(t)$

据时移特性，有

$$f_1(t)* f_2(t) = 2(t+1)\varepsilon(t+1) - 2(t-1)\varepsilon(t-1)$$
$$-2t\varepsilon(t) + 2(t-2)\varepsilon(t-2)$$

2.3 卷积及其性质

求卷积是本章的重点与难点。

求解卷积的方法可归纳为：

（1）利用定义式，直接进行积分。对于容易求积分的函数比较有效。如指数函数，多项式函数等。

（2）图解法。特别适用于求某时刻点上的卷积值。

（3）利用性质。比较灵活。

三者常常结合起来使用。