Semaine 12

Slide 7

Pour un système à 3 états $\{1, 2, 3\}$ d'énergie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ pouvant être occupés par des bosons, les micro-états α sont caractérisés par

$$\{\underbrace{(n_1, n_2, n_3)}_{\alpha} \mid n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}\}.$$

Exemple de micro-état : $\alpha = (4, 3, 0)$ $\rightarrow \begin{cases} N_\alpha = 4+3+0 = 7 \\ E_\alpha = 4\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 \end{cases}$

état 3 ——— $n_3 = 0$

état 2 —●●●— $n_2 = 3$

état 1 —●●●●— $n_1 = 4$

Dans le cas général, pour I états $(i = 1, 2, \dots, I)$

$$Z_G = \underbrace{\sum_{\{\alpha\}}}_{\text{tous les nombres d'occupation possibles}} e^{-\beta(E_\alpha - \mu N_\alpha)} = \sum_{\{(n_1, n_2, \dots, n_I),\, n_i \in \mathbb{N}\}} e^{-\beta\left(\sum_{\{i\}} n_i \varepsilon_i - \mu \sum_{\{i\}} n_i\right)}$$

indépendant de $n_3, \dots, n_I$

$$Z_G = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_I=0}^{\infty} e^{-\beta(n_1\varepsilon_1 - \mu n_1)}\, e^{-\beta(n_2\varepsilon_2 - \mu n_2)} \dots e^{-\beta(n_I\varepsilon_I - \mu n_I)}$$

indépendant de $n_2, \dots, n_I$

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$$

$$\exp\left(\sum_k a_k\right) = \prod_k \exp(a_k)$$

$$Z_G = \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\beta(n_1\varepsilon_1 - \mu n_1)} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-\beta(n_2\varepsilon_2 - \mu n_2)} \cdots \sum_{n_I=0}^{\infty} e^{-\beta(n_I\varepsilon_I - \mu n_I)}$$

$$Z_G = \prod_{i=1}^{I} \underbrace{\left(\sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\beta(n_i\varepsilon_i - \mu n_i)} \right)}_{Z_{G,i} \text{ fonction de partition à 1 état } i} = \prod_{i=1}^{I} Z_{G,i}$$

Slide 8

si $|x|<1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Slide 9

on calcule la moyenne de n_i

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z_{G,i}}{\partial \mu} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\ln\left(\frac{1}{1-e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\ln\left(1-e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}\right)\right) = \cancel{+}\frac{1}{\cancel{\beta}} \frac{\cancel{+\beta}\, e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)} \times e^{-\beta(\mu-\varepsilon_i)}}{1-e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)} \times e^{-\beta(\mu-\varepsilon_i)}}$$

$$= \frac{1}{e^{-\beta(\mu-\varepsilon_i)}-1} = \boxed{\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}-1} = \langle n_i \rangle}$$

distribution de Bose - Einstein

on calcule de même la moyenne de l'énergie

$$\langle E_i \rangle = \left(-\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\mu}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\ln Z_{G,i} = \left(+\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{\mu}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\ln\left(1-e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}\right)$$

$$= \frac{-(\cancel{\mu}-\varepsilon_i)e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}}{1-e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}} + \frac{\cancel{-}\frac{\cancel{\mu}}{\cancel{\beta}}\cdot\cancel{\beta}\left(\cancel{+}e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}\right)}{1-e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}}$$

$$= \frac{\varepsilon_i\, e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}}{1 - e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}} \; \frac{\times e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}}{\times e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}} = \frac{\varepsilon_i}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}-1} = \varepsilon_i \langle n_i \rangle$$

<u>slide 16</u>

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln z_{G,i}}{\partial \mu} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu}\left(1 + e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\beta}} \frac{\cancel{\beta}\, e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}}{1 + e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}} \; \frac{\times e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}}{\times e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}}$$

$$\boxed{\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}+1}}$$

distribution de Fermi-Dirac

de même, $\langle \varepsilon_i \rangle = \varepsilon_i \langle n_i \rangle = \dfrac{\varepsilon_i}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}+1}$

<u>slide 18</u>

$$E_F \equiv \frac{1}{2} m v_F^2 \quad \rightarrow \quad v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}}$$

Le théorème d'équipartition de l'énergie donnerait

$$\frac{1}{2} m v_{cl}^2 = \frac{3}{2} k_B T \quad \rightarrow \quad v_{cl} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}}$$

3 degrés de liberté quadratiques $\begin{cases} \frac{1}{2} m v_x^2 \\ \frac{1}{2} m v_y^2 \\ \frac{1}{2} m v_z^2 \end{cases}$