谓词逻辑

Predicative Logic

虞慧群
yhq@ecust.edu.cn

主讲老师：杨海
yanghai@ecust.edu.cn

几类等值式

（1） 命题公式的推广

$$\text{e.g. } P(x) \rightarrow Q(x) \Leftrightarrow \neg P(x) \vee Q(x)$$

（2）否定深入

$$\neg \forall x\, P(x) \Leftrightarrow \exists x(\neg P(x))$$

$$\neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x\, (\neg P(x))$$

（3）量词作用域的扩张与收缩

设B中不含x的自由出现，则

$$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$$

$$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$$

$$\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$$

$$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$$

（4）$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$

$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$

（5）多个量词的使用

$\forall x \forall y\, A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x\, A(x,y)$

$\exists x \exists y\, A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x\, A(x,y)$

置换规则

设$\Phi(A)$是含A的公式, 那么, 若$A \Leftrightarrow B$, 则$\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$.

换名规则

设A为一公式，将A中某量词辖域中个体变项的所有约束出现及相应的指导变元换成该量词辖域中未曾出现过的个体变项符号，其余部分不变，设所得公式为A'，则$A' \Leftrightarrow A$.

4、前束范式

概念：

前束范式

前束范式：如果谓词公式A有如下形状：

$$Q_1x_1\ldots Q_nx_nM$$

其中 Q_ix_i或者是$\forall x_i$，或者是$\exists x_i$，$i=1$，…，n，M是不含量词的公式，$Q_1x_1\ldots Q_nx_n$称为首标，M称为母式。

例、 $\forall x\forall y\exists z(P(x，y)\rightarrow Q(x，z))$；

$\exists x\exists y\exists zP(x，y，z)$

均为前束范式。

- 对于任意谓词公式，都存在与之等值的前束范式。

前束范式的算法：

步1. 对约束出现的变元进行必要的换名，使得约束出现的变元互不相同且不与任何自由变元同名。

步2. 将所有的否定号$\neg$深入到量词后面。

$\neg\forall x\, A = \exists x\, \neg A$　　　$\neg\exists x\, A = \forall x\, \neg A$

步3. 将量词符号移至公式最外层。　　x不在B中自由出现

$\forall x\, A \wedge B = \forall x(A \wedge B)$　　　$\exists x\, A \wedge B = \exists x(A \wedge B)$

$\forall x\, A \vee B = \forall x(A \vee B)$　　　$\exists x\, A \vee B = \exists x(A \vee B)$

$\forall x\, A \to B = \exists x(A \to B)$　　　$\exists x\, A \to B = \forall x(A \to B)$

$A \to \forall x B = \forall x(A \to B)$　　　$A \to \exists x\, B = \exists x(A \to B)$

x不在A中自由出现

例、 $(\neg\forall xP(x)\wedge\forall x\,\exists y\,Q(x,y))\to\exists x\,\exists yR(x,y)$

换名 $=(\neg\forall xP(x)\wedge\forall w\exists y\,Q(w,y))\to\exists u\,\exists vR(u,v)$

¬深入 $=(\exists x\,\neg P(x)\wedge\forall w\exists y\,Q(w,y))\to\exists u\,\exists vR(u,v)$

$=\exists x\,(\neg P(x)\wedge\forall w\exists y\,Q(w,y))\to\exists u\,\exists vR(u,v)$

量词符号前移

$=(\exists x\,\forall w\exists y\,(\neg P(x)\wedge Q(w,y)))\to\exists u\,\exists vR(u,v)$

$=\exists u\,\exists v\,(\exists x\,\forall w\exists y\,(\neg P(x)\wedge Q(w,y))\to R(u,v))$

$=\exists u\,\exists v\,\forall x\,\exists w\,\forall y\,((\neg P(x)\wedge Q(w,y))\to R(u,v))$

例、 $\forall x\forall y(\exists z(P(x,z)\wedge P(y,z))\rightarrow\exists uQ(x,y,u))$

$=\forall x\forall y(\neg(\exists z(P(x,z)\wedge P(y,z)))\vee\exists uQ(x,y,u))$

$=\forall x\forall y(\forall z(\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z))\vee\exists uQ(x,y,u))$

$=\forall x\forall y\forall z(\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z)\vee\exists uQ(x,y,u))$

$=\forall x\forall y\forall z\exists u(\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z)\vee Q(x,y,u))$

5、谓词逻辑推理理论

概念：

逻辑蕴含式，有效结论，∀-规则（US），∀+规则（UG），∃-规则(ES)，∃+规则(EG)，推理

逻辑蕴含式 $A \Rightarrow C$：当且仅当$A \to C$是有效的。

有效结论

设A、C是两个谓词公式，若$A \Rightarrow C$，称C是A的有效结论。

推广:若$H_1 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C$, 称C是一组前题$H_1,\ldots,H_n$的有效结论。

几类逻辑蕴涵式

第一组 命题逻辑推理定理的代换实例

如, $\forall xF(x)\wedge\exists yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)$

第二组 基本等值式生成的推理定理

如, $\forall xF(x) \Rightarrow\neg\neg\forall xF(x)$, $\neg\neg\forall xF(x) \Rightarrow\forall xF(x)$

$\neg\forall xF(x)\Rightarrow\exists x\neg F(x)$, $\exists x\neg F(x) \Rightarrow \neg\forall xF(x)$

第三组 其它常用推理定律

(1) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$

(2) $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

(3) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$

(4) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

推理规则

∀- 规则(US)：

$$\frac{\forall x A}{A[t/x]}$$

∀+规则(UG)：

$$\frac{A}{\forall x A}$$

∃- 规则(ES)：

$$\frac{\exists x\, A(x)}{A(c)}$$

∃+ 规则(EG)：

$$\frac{A[t/x]}{\exists x A}$$

自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$

自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$定义如下:

1. 字母表. 同一阶语言$\mathscr{L}$的字母表

2. 合式公式. 同$\mathscr{L}$的合式公式

3. 推理规则:

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

(4) 假言推理规则

(5) 附加规则

(6) 化简规则

(7) 拒取式

(8) 假言三段论规则

(9) 析取三段论规则

(10) 构造性二难推理规则

(11) 合取引入规则

(12) $\forall$-规则

(13) $\forall$+规则

(14) $\exists$-规则

(15) $\exists$+规则

推理（证明）

从前提$A_1, A_2,\ldots, A_k$到结论B的推理是一个公式序列$C_1, C_2,\ldots, C_l$. 其中$C_i(1\le i\le l)$是某个A_j, 或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到, 并且$C_l = B$。

例：用推理理论证明

(1) $\{\forall x\,(H(x) \to M(x)), H(s)\} \vdash M(s)$

(2) $\{\forall x\,(C(x) \to W(x) \wedge R(x)), \exists x(C(x) \wedge Q(x)\} \vdash \exists x\,(Q(x) \wedge R(x))$

注：先用ES，再用US。

(3) $\{\forall x\,(P(x) \vee Q(x)\} \vdash \forall x\,P(x) \vee \exists x\,Q(x)$

注：a.用归谬法。

b.用CP规则: 将$\forall x\,P(x) \vee \exists x\,Q(x)$看成$\neg \forall x\,P(x) \to \exists x\,Q(x)$

谓词逻辑总结

1. 谓词与量词:谓词，个体词，论域，全称量词，存在量词
2. 项与公式:项，原子公式，合式公式，自由变元，约束变元，辖域，换名，代入
3. 公式语义:解释，赋值，有效的，可满足的，不可满足的
4. 前束范式:前束范式
5. 推理理论:逻辑蕴含式，有效结论，∀-规则（US），∀+规则（UG）， ∃-规则(ES)，∃+规则(EG)，推理