第1章　（之 1）
第 1 次作业

教学内容：§1.1 实数集 区间　§1. 2 函数的概念　§1.3 初等函数

*1、阅读并熟记以下材料，之后完成后面的练习。

中学里已经学过三个三角函数 $\sin x$、$\cos x$ 和 $\tan x$，以下介绍另外三个在本课程中常用三角函数。

（1）　余切函数 $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，这里 $x\neq k\pi, k$ 为整数。

（2）　正割函数 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，这里 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k$ 为整数。

（3）　余割函数 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，这里 $x\neq k\pi, k$ 为整数。

证明并**熟记如下等式**：$\sec^2 x=1+\tan^2 x$，$\csc^2 x=1+\cot^2 x$。

证明：由于 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，两边同时除以 $\cos^2 x$，

有 $\sec^2 x=1+\tan^2 x$

两边同时除以 $\sin^2 x$，

有 $\csc^2 x=1+\cot^2 x$。

**2、阅读并熟记以下材料，之后完成后面的练习。

我们知道 $y=\sin x$ 在其定义域内没有反函数，但对 $y=\sin x$（$-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$）是有反函数的。

其反函数记为 $y=\arcsin x$（$-1\le x\le 1$）。

同样地，对于函数 $y=\cos x$（$0\le x\le\pi$）也是有反函数的，其反函数记为 $y=\arccos x$（$-1\le x\le 1$）。

函数 $y=\tan x$（$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$）的反函数记为 $y=\arctan x$。

函数 $y=\cot x$（$0<x<\pi$）的反函数记为 $y=\operatorname{arc}\cot x$。

（1）　写出下列反三角函数的值：

$\arcsin 1, \arcsin\dfrac{1}{2}, \arccos(-\dfrac{1}{2}), \arcos(0), \arctan 1, \arctan(-1), \operatorname{arccot}(1), \operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$。

解：$\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$，$\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，

$\arccos(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{2\pi}{3}$，$\arccos(0)=\dfrac{\pi}{2}$，

$\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$，$\arctan(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$，

$\operatorname{arccot} 1=\dfrac{\pi}{4}$，$\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})=\dfrac{5\pi}{6}$。

（2）计算 $\tan(\arctan 1)$，$\arccos(\cos\dfrac{2\pi}{3})$.

解：$\tan(\arctan 1)=1$，

$\arccos(\cos\frac{2\pi}{3})=\frac{2\pi}{3}$。

(3) 设 $-1\le x\le 1$，证明：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$。

证明：设 $\arcsin x=\alpha, \arccos x=\beta$，则 $\sin\alpha=x, \cos\beta=x$，且 $\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], \beta\in[0,\pi]$.

以下证明 $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ 即可。

由于 $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha=x=\cos\beta$

又 $\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，故 $\frac{\pi}{2}-\alpha\in[0,\pi]$

而函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上单调，且 $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\beta$，因此，$\frac{\pi}{2}-\alpha=\beta$，即

$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

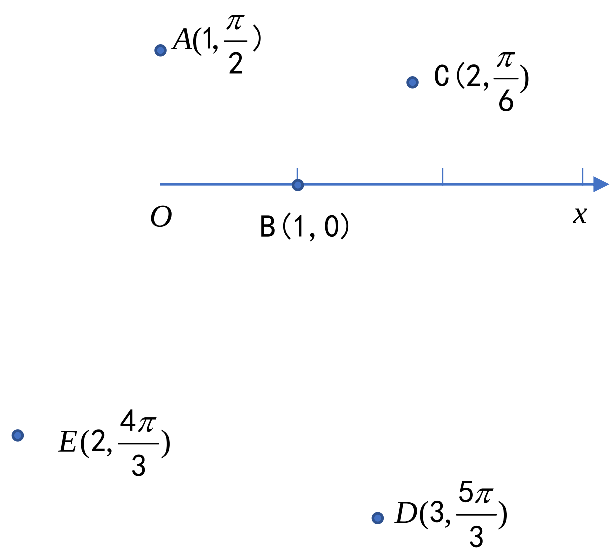
*3、阅读并熟记以下材料，并完成后面练习。

在平面上取定一点 O，称为极点，画一条射线 Ox，称为极轴。对于平面内任何一点 M，用 ρ 表示线段 OM 的长度（有时也用 r 表示），θ 表示从 Ox 到 OM 的角度，ρ 叫做点 M 的极径，θ 叫做点 M 的极角，有序数对 (ρ,θ)就叫点 M 的极坐标，这样建立的坐标系叫做极坐标系。

（1） 请画出极坐标系，并在图中标出以下诸点：

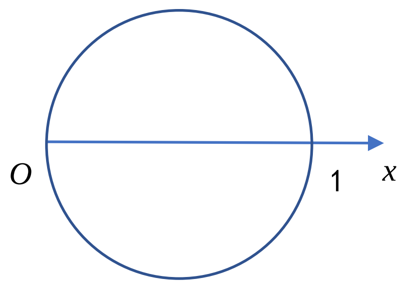
$A(1,\frac{\pi}{2})$, $B(1,0)$, $C(2,\frac{\pi}{6})$, $D(3,\frac{5\pi}{3})$, $E(2,\frac{4\pi}{3})$。

解：



（2）试在极坐标系下画出方程 $\rho=\cos\theta$ 的图像。

解：



如果直角坐标系的原点与极坐标系的极点重合，x 轴正向即为极轴，则这两个坐标系之间的转换关系式为 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$。

（3）试求直线 $x+y=1$ 和抛物线 $y=x^2$ 的极坐标方程。

解：将 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 代入 $x+y=1$，

得到 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=1$，直线 $x+y=1$ 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$。

类似地，抛物线 $y=x^2$ 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$。

4. 填空题：

**（1）函数 $y=\lg[\arccos(\sqrt{x-1}-1)]$ 的定义域为 $\underline{\quad [1,5) \quad}$，值域为 $\underline{\quad (-\infty,\lg\pi] \quad}$.

**（2）函数 $y=\sqrt{\arctan\dfrac{1}{x-1}}$ 的定义域为 $\underline{\quad (1,+\infty) \quad}$，值域为 $\underline{\quad (0,\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}) \quad}$.

**（3）函数 $y=\sin x \ (\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2})$ 的反函数为 $\underline{y=\pi-\arcsin x \quad (-1\le x\le 1)}$.

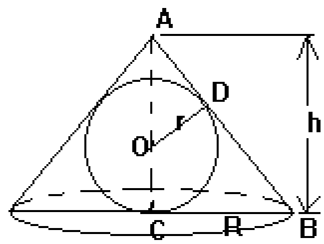
**（4）极坐标系下的的方程：$\rho=R,\ \rho=2R\cos\theta,\ \rho=2R\sin\theta$ 在直角坐标系下的方程分别为 $\underline{x^2+y^2=R^2,\ x^2+y^2=2Rx,\ x^2+y^2=2Ry}$.

**（5）直角坐标系下的直线方程 $x=a,\ y=b,\ ax+by+c=0 \quad (abc\ne 0)$ 在极坐标系下的方程分别为 $\underline{\rho=\dfrac{a}{\cos\theta},\ \rho=\dfrac{b}{\sin\theta},\ \rho=\dfrac{-c}{a\cos\theta+b\sin\theta}}$。

**（6）直角坐标系中 x 轴负半轴和 y 轴负半轴在极坐标系下的方程分别为 $\underline{\theta=\pi(\rho\in R^+),\quad \theta=\dfrac{3\pi}{2}(\rho\in R^+)}$.

**5. 设一球的半径为 r，作外切于球的圆锥，试将圆锥体积 V 表示为高 h 的函数，并指出其定义域。

解：如图，因ΔAOD～ΔABC $\quad \therefore \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{r}{R}$，



故$R=\dfrac{rh}{\sqrt{(h-r)^2-r^2}}$，

体积$V=\dfrac{\pi r^2h^3}{3[(h-r)^2-r^2]}$，

$(2r<h<+\infty)$.

**6. 设对一切不等于 0 及 -1 的实数 x 恒有

$$2f(x)+x^2f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+2x}{x+1},$$

（1）证明 $f(x)+2x^2f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{2x^2+x}{x+1}$；（2）求$f(x)$.

解：（1）以$\dfrac{1}{x}$代入式$2f(x)+x^2f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$ 中的 x，可得

$$2f(\frac{1}{x})+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{2x+1}{x(x+1)},\ \Rightarrow\ 2x^2f(\frac{1}{x})+f(x)=\frac{2x^2+x}{x+1},$$

（2）在上式与所给之式中消去$f(\dfrac{1}{x})$得：

$$3f(x)=\frac{2x^2+4x-2x^2-x}{x+1}=\frac{3x}{x+1}$$

就可以得到 $\quad f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

**7. 求函数$y=\sqrt{x^2-1}(x\le -1)$的反函数，并指出反函数的定义域。

解：当 $x\le -1$时，$0\le y<+\infty$，由 $\quad y=\sqrt{x^2-1}\quad$ 得 $\quad x=-\sqrt{y^2+1}$，

故所求的反函数为 $\quad \varphi(x)=-\sqrt{x^2+1}(0\le x<+\infty)$.

*8. 求实数 a,b,c，使等式$\dfrac{x+3}{x(x-1)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$ 对一切 $x\ne 0,1$ 都成立.

解:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}=\frac{a(x-1)^2+bx(x-1)+cx}{x(x-1)^2}=\frac{(a+b)x^2+(c-2a-b)x+a}{x(x-1)^2}$$

比较系数可知有 $\quad a+b=0,\ c-2a-b=1,\ a=3$.

解得 $\quad a=3,\ b=-3,\ c=4$.

***9. 若 $f(x), g(x), h(x)$ 都是单调增加函数，且对一切 x 都有 $f(x)\le g(x)\le h(x)$，试证明 $f[f(x)]\le g[g(x)]\le h[h(x)]$。

证明：$\because f(x)\le g(x)$， $\therefore g[f(x)]\le g[g(x)]$，

由于对一切 x 都有 $f(x)\le g(x)$ 可知： $f[f(x)]\le g[f(x)]$，

$\therefore$ $f[f(x)]\le g[g(x)]$。

同理，$g[g(x)]\le h[h(x)]$，

$\therefore f[f(x)]\le g[g(x)]\le h[h(x)]$.

***10. 设函数 $f(x)$ 对任意实数x、y 满足关系式： $f(x+y)=f(x)+f(y)$

(1)求$f(0)$;

(2)判定函数$f(x)$的奇偶性。

解： (1)取$x=y=0$时，有 $f(0)=f(0)+f(0)$，故$f(0)=0$.

(2)取$y=-x$，有 $f(0)=f(x)+f(-x)$，于是 $f(x)+f(-x)=0$，

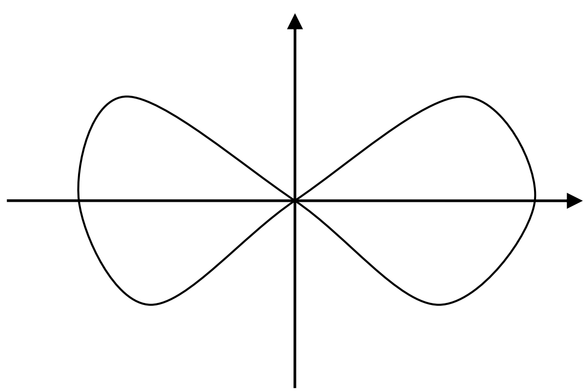
即 $f(-x)=-f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，

因此 $f(x)$ 是奇函数.

***11. 利用对称性、极坐标等方法画出方程$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 的草图。

解：由于$-x$ 代 x 方程不变，知图像关于 y 对称。同样，图像也关于 x 轴对称。于是只要画出第一象限的图像即可画出整个方程对应的图像。

将方程$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 化为极坐标为$\rho^2=\cos 2\theta$，通过列表描点即可画出其在第一象限的图像。再利用对称性，画出整个图像。



第 2 章 （之 1）

第 2 次作业

教学内容： §2.1 导数概念

**1. 设 $f(x)=x^3+2x$，试用导数定义求 $f'(x)$.

解: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^3+2(x+\Delta x)-x^3-2x}{\Delta x}$

$=3x^2+2$.

**2. 试用导数定义计算下列函数的导数：

（1） $f(x)=\dfrac{1}{x}$， 求 $f'(1)$； （2） $g(t)=8-t^3$，求 $g'(2)$；

（3） $\varphi(t)=3t^2-t$，求 $\varphi'(-1)$.

解：（1） $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=-1$,

（2） $g'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\left[8-(t+\Delta t)^3\right]-\left[8-t^3\right]}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{t^3-(t+\Delta t)^3}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{t^3-\left(t^3+3t^2\Delta t+3t\Delta t^2+\Delta t^3\right)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(-3t^2-3t\Delta t-\Delta t^2\right)=-3t^2$,

即 $g'(t)=-3t^2$, $\therefore$ $g'(2)=-12$.

（3） $\varphi'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\left[3(t+\Delta t)^2-(t+\Delta t)\right]-\left[3t^2-t\right]}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{6t\Delta t+3\Delta t^2-\Delta t}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(6t+3\Delta t-1)=6t-1$,

$\therefore$ $\varphi'(t)=6t-1$, $\varphi'(-1)=-7$.

**3. 求曲线 $y=2x^2$ 在点 $P=(1,2)$ 处的切线方程.

解：曲线在点 P 处切线的斜率为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-2}{x-1}=4$,

所以切线方程为 $y=4(x-1)+2$.

**4. 化学反应速率通常是以单位时间内反应物浓度的减少或生成物浓度的增加来表征。设有一化学反应，反应物浓度 C 与反应开始后的时间 t 之间有如下关系：$C=f(t)$.

(1) 试表出时刻 t_0 到时刻 $t\ (t\neq t_0)$ 这段时间内的平均反应速率；

(2) 表出在时刻 t_0 的瞬间化学反应速率。

解：(1) $\bar{v}=\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$；

(2) $v_0=\lim\limits_{t\to t_0}\bar{v}=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$.

**5. 已知沿直线运动物体的运动方程为：$s=\dfrac{1}{t}$，求物体在时刻 $t_0=2$ 的（瞬时）速度。

解： $\Delta s=\dfrac{1}{t+\Delta t}-\dfrac{1}{t}$， $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{\dfrac{-\Delta t}{t(t+\Delta t)}}{\Delta t}=-\dfrac{1}{t(t+\Delta t)}$，

$\therefore v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}-\dfrac{1}{t(t+\Delta t)}=-\dfrac{1}{t^2}$，

$\therefore$ 物体在时刻 $t_0=2$ 的（瞬时）速度 $v_0=-\dfrac{1}{t_0^2}=-\dfrac{1}{4}$.

**6. 在作等速旋转时，角速度是旋转角度与所花时间之比，已知非匀速旋转时，旋转角θ与时间 t 有如下关系：$\theta=\theta(t)$。试导出非匀速旋转时的（瞬时）角速度$\omega(t)$表达式.

解： $\Delta\theta=\theta(t+\Delta t)-\theta(t)$， $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\dfrac{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)}{\Delta t}$，

$\therefore \omega(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)}{\Delta t}=\theta'(t)$.

**7. 在时间段Δt流经导线某个截面的电量为Δq，则称$\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$为时间段$\Delta t$上的平均电流强度，记为$\bar{I}$，现已知时间段$[0,t]$内流经导线这个截面的电量为$q(t)$，试求在时刻$t$导线于该截面上的电流强度$I(t)$.

解：$\Delta q=q(t+\Delta t)-q(t)$， $\bar{I}=\dfrac{\Delta q}{\Delta t}=\dfrac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}$，

$I=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\bar{I}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta q}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}=q'(t)$.

第 2 章 （之 2）

第 3 次作业

教学内容： §2.2.1 数列极限的定义

1．选择题：

***（1）若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\forall\varepsilon>0$，在$a$的$\varepsilon$邻域之外，数列$\{a_n\}$中的点 （ ）

（A）必不存在；

（B）至多只有有限多个；

（C）必定有无穷多个；

（D）可以有有限个，也可以有无穷多个.

解答：（B）.

***(2) 设ε为某一取定的正数，若数列$\{a_n\}$有无穷多个点在$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内，则 （ ）

（A）数列$\{a_n\}$的极限存在，但不一定等于a；

（B）数列$\{a_n\}$的极限存在，且一定等于a；

（C）数列$\{a_n\}$的极限不一定存在；

（D）数列$\{a_n\}$的极限一定不存在.

解答：（C）.

***（3）设$a_n=(-1)^{n+1}$，数列$\{a_n\}$的前n项值之和记为S_n，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(S_1+S_2+\cdots+S_n)=$（ ）

（A） 0； （B）1； （C）1/2； （D）1/3.

解答：（C）.

提示: $S_1=1, S_2=0,\cdots,S_{2k-1}=1, S_{2k}=0,\cdots,S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{2k}=k,$

$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{2k+1}=k+1$.

**（4）下面哪个数列是有界数列 （ ）

（A）$\{n\}$;(B) $\{n\sin\frac{n\pi}{2}\}$; (C) $\{\frac{2n-3}{n+3}\}$; (D) $\{2^n\}$.

解答：（C）.

***2．用极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$。

证明：$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\frac{n}{n+2}-1\right|<\varepsilon$，只要$\frac{2}{n+2}<\varepsilon$，即$n>\frac{2}{\varepsilon}-2$。

所以，$\forall\varepsilon>0$，取$N=[\frac{2}{\varepsilon}]>\frac{2}{\varepsilon}-2$，当$n>N$时有$\left|\frac{n}{n+2}-1\right|<\varepsilon$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$。

***3．用极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$。

证明：$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|<\varepsilon$，由于$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$只要

$\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$，即$n>\frac{1}{4\varepsilon^2}$。所以，$\forall\varepsilon>0$，取$N=[\frac{1}{4\varepsilon^2}]$，当$n>N$时有$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|<\varepsilon$，

因此$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$。

***4．若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，试证明$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$，反之如何？

证明：$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\forall\varepsilon>0$， $\exists N\in N^+$，当$n>N$，有：$\left|a_n-a\right|<\varepsilon$，

而 $\left||a_n|-|a|\right|\le|a_n-a|<\varepsilon$， $\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right|=\left|a\right|$。

若$a\neq0$，不能由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right|=\left|a\right|\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，

反例为$a_n=(-1)^n$， $\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right|=1$, 但$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在.

若$a=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right|=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$这由极限定义可得.