

华东理工大学 2019–2020 学年第一学期
《数学分析(上)》课程期末考试试卷 B 2020.1

开课学院 理学院 专业 考试形式 闭卷 考试时间 120分钟
姓名 学号 班级 任课教师 张启迪

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
评卷人									

注意: 本试卷共八大题, 满分100 分。

一、(本题 12 分) 讨论极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}} + \frac{x}{|x|} \right|$ 的存在性。

二、(本题 8 分) 利用 Cauchy 收敛原理证明闭区间套定理。

三、(本题 18 分) 求下列不定积分：

$$(1) \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}; \quad (2) \int (x-1)\sqrt{x^2 + 2x - 5}dx; \quad (3) \int \ln(1+x^2)dx。$$

四、(本题 14 分) 设 $y = (\arcsin x)^2$ 。

(1) 求证: $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$;

(2) 求 $y^{(n)}(0)$, 其中 $y^{(n)}(0)$ 表示函数 y 关于 x 求 n 阶导数后在 $x = 0$ 处的取值。

五、(本题 18 分) 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 - 3n + 1}{2n^3 - n + 3}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

六、(本题 10 分) 若函数 $f(x)$ 在有限开区间 (a, b) 上一致连续 (即对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $x', x'' \in (a, b)$ 满足 $|x' - x''| < \delta$, 就成立 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$), 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上有界。

七、(本题 10 分) 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ 存在而且有限的充分必要条件是:
对于任意正无穷大量 $\{x_n\}$, 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty。$$

八、(本题 10 分) 设函数 f 在区间 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且有

$$f(0) = f(1) = 0, \quad \min_{x \in [0, 1]} f(x) = -1。$$

证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) \geq 8$ 。