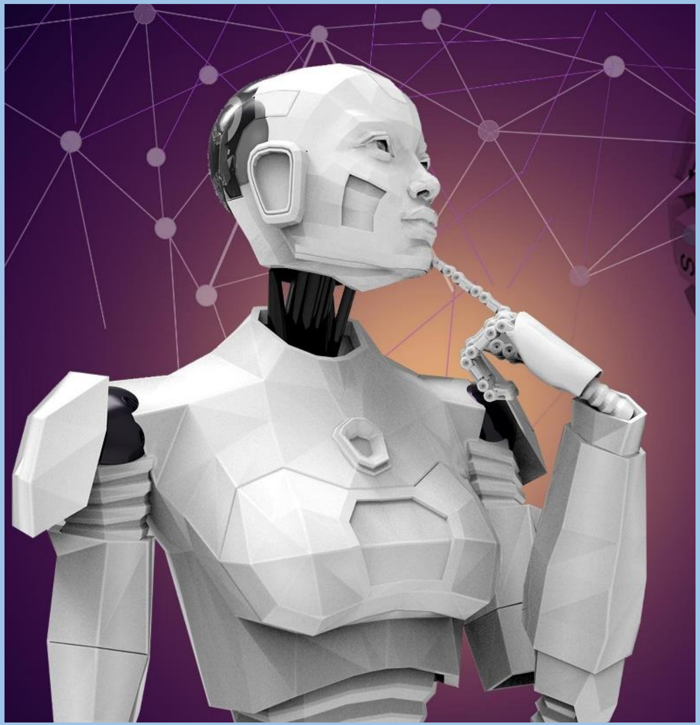
第5章：操作臂运动学



主讲：许璟、周家乐

单位：信息科学与工程学院

邮箱：jingxu@ecust.edu.cn

办公：徐汇校区 实验19楼1213室

工业机器人抓紧产
线上的零部件

波士顿动力公司
SpotMini机器人

本章内容

5.1 连杆参数和连杆坐标系

5.2 连杆变换和运动学方程

5.3 PUMA560机器人运动学反解

5.4 指数积(POE)公式

5.5 运动学方程的自动生成

5.6 运动学反解的子问题

5.7 运动学的封闭解和解的存在性、唯一性

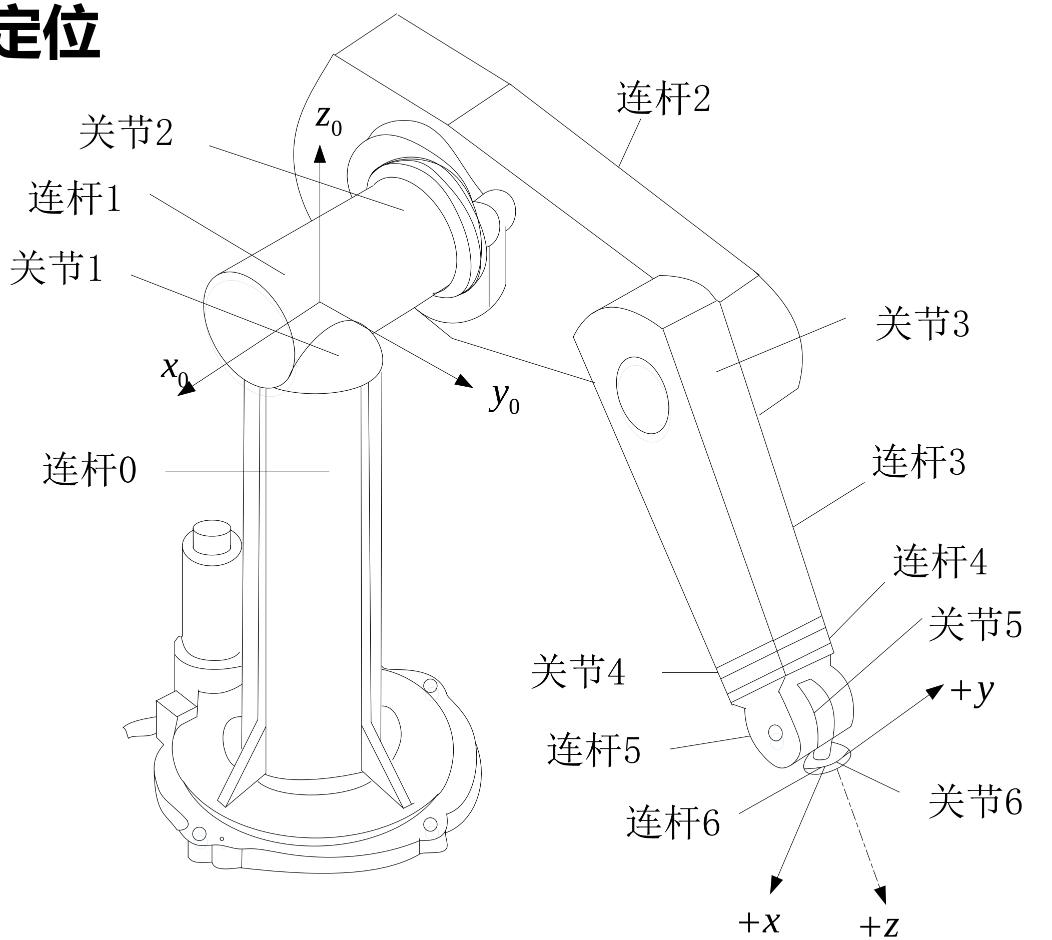
5.8 驱动空间、关节空间和操作空间

5.1 简介

- 机器人操作臂通常视为开式运动链，它是由一系列连杆通过**转动或移动关节串连**而成；
- 开链的一端固定在基座上，另一端是自由的，安装着工具（或称末端执行器），用以操作物体，完成各种作业；
- 操作臂运动学研究各连杆之间的**位移、速度和加速度关系**；
- D-H(Paul)方法：**设置坐标系和齐次变换**→运动学方程；
- 指数积(POE)方法：**运动旋量的矩阵指数**→运动学方程

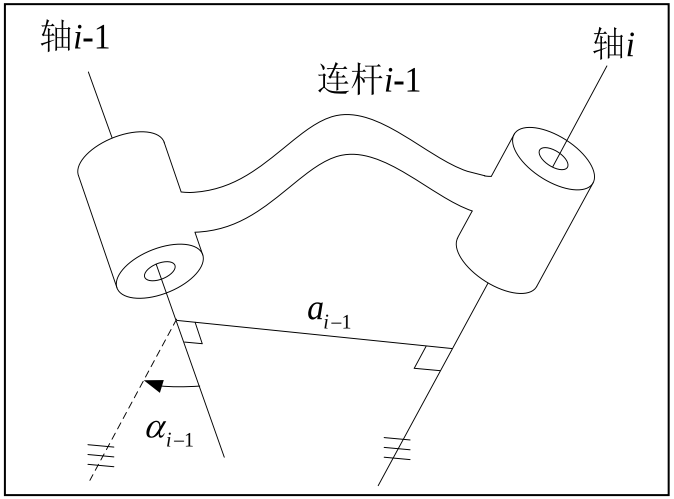
5.1 连杆参数和连杆坐标系

- PUMA560由6个连杆和6个关节组成，是6自由度单链开式机构
- 关节4~6：轴线交于一点，作为手腕的参考点，定姿
  关节1~3：定位



PUMA 560机器人的连杆和关节

- 连杆的功能在于保持其两端的关节轴线具有固定的几何关系，连杆的特征因此**由这两条轴线规定**。任意两条空间直线间的位置关系可由其**公法线长度和扭角**规定。



连杆的描述

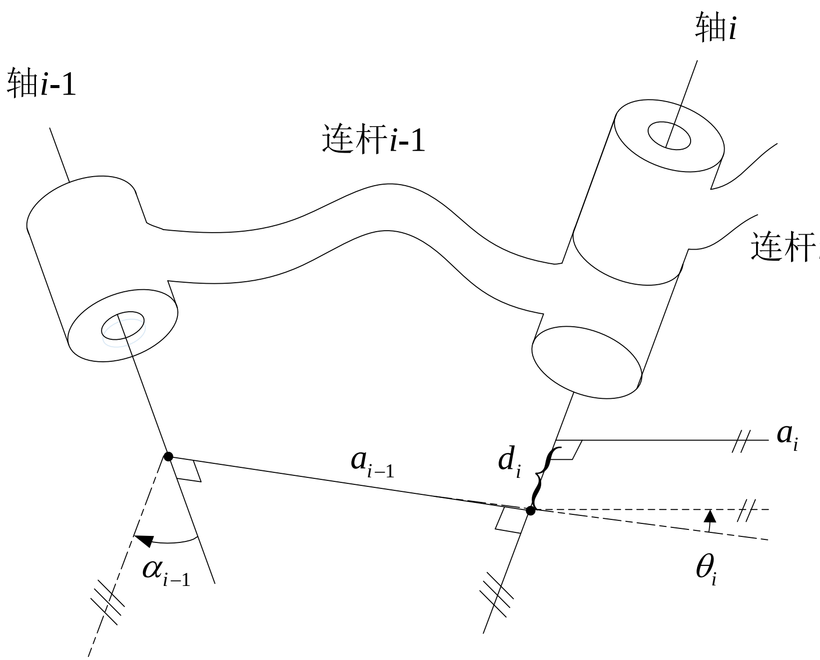
- 连杆i-1是由关节轴线i-1和i的公法线长度a_{i-1}和夹角α_{i-1}所规定的。
- 特殊情况：两轴线平行： $\alpha_{i-1}=0$。两轴线相交： $a_{i-1}=0$。

◆连杆长度a_{i-1}：关节轴线i-1指向关节轴i的公法线长度（恒为正）。

◆扭角α_{i-1}：从轴线i-1绕公垂线转至轴线i的夹角（可正可负）。

5.1 连杆连接的描述

- 两相邻连杆的公共关节轴线规定了两连杆之间的几何关系：
  - 偏置d_i：两条公法线的距离（带正负号）；
  - 关节角θ_i：两条公法线之间的夹角（带正负号）
- 首末连杆的规定：$a_0=a_6=0$；$\alpha_0 = \alpha_6 = 0^o$；若关节1是转动关节，$\theta_1$的零位可任意选（关节变量），约定$d_1=0$；若关节1是移动关节，$d_1$的零位可任意选（关节变量），约定$\theta_1 =0$



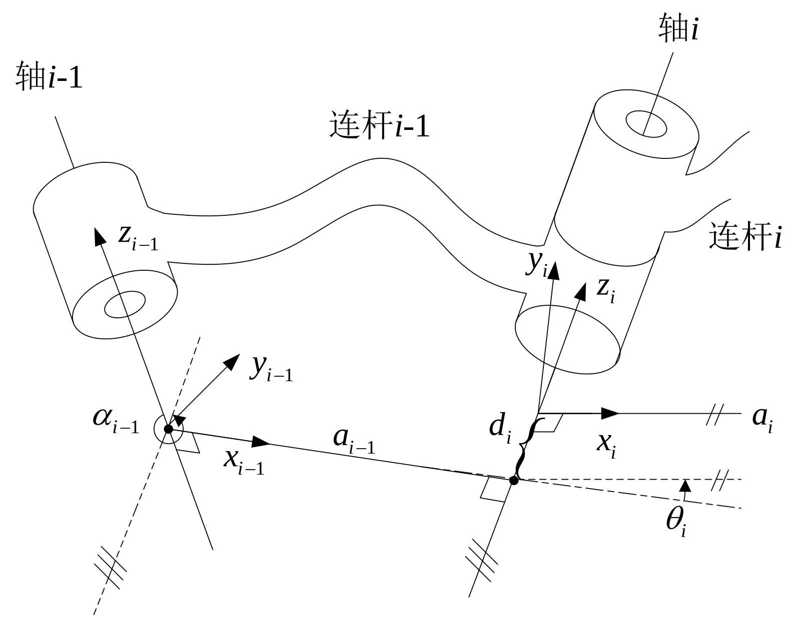
5.1 连杆参数和关节变量

- 连杆i-1的参数：a_{i-1}、α_{i-1}、d_i、θ_i
- 对于旋转关节i，关节变量θ_i连杆参数a_{i-1}、α_{i-1}、d_i不变
- 对于移动关节i，关节变量d_i 连杆参数a_{i-1}、α_{i-1}、θ_i不变
- 以上描述运动关系的规则称为Denavit-Hartenberg方法（D-H）
- 对于6关节机器人，用18个参数可以表示其运动学的固定部分（参数），而其它6个关节变量则是机器人运动学方程中的变量部分

5.1 连杆坐标系

中间连杆i的坐标系{i}-1：

- **Z轴：关节轴线i共线，指向任意。**
- **X轴：与连杆公法线a_i重合，指向由关节i到关节i +1;当a_i = 0时，取$x_i = \pm z_{i+1} \times z_i$**
- **Y轴：取$y_i = z_i \times x_i$（按右手法则）**
- **原点O:取在x_i和z_i的交点上；当z_i与z_{i+1}相交时，取两轴交点；当z_i与z_{i+1}平行时，取使d_i = 0处**
- **规定首末连杆坐标系（学习）**



连杆坐标系的设定

5.1 连杆坐标系规定的连杆参数

- a_{i-1} = 从z_{i-1}到z_i沿x_{i-1}测量的距离；
- α_{i-1} = 从z_{i-1}到z_i绕x_{i-1}旋转的角度；
- d_i = 从x_{i-1}到x_i沿z_i测量的距离；
- θ_i = 从x_{i-1}到x_i绕z_i旋转的角度。
- 通常：连杆共法线长度$a_{i-1} \geq 0$、 α_{i-1} 、d_i 、θ_i可正可负。

连杆坐标系建立的步骤：

– （1）找出各个关节轴线；
– （2）画出相邻关节轴线的公垂线；
– （3）规定 z_i 轴与关节轴 i 重合；
– （4）规定 x_i 轴与公垂线 a_i 重合；
– （5）定义 $y_i = z_i \times x_i$ ；
– （6）按规则确定｛0｝、｛n｝。

5.2 连杆变换和运动学方程

- 运动学方程：表示末端连杆相对于基座的位姿关系，由连杆变换依次相乘得到，是各关节变量(a, α, d, θ)的函数；
- 坐标系{i}相对{i-1}的变换矩阵 ${}^{i-1}_{i}T$ ：
- ◆ (1)绕x $_{i-1}$轴转α$_{i-1}$角；(2) 沿x $_{i-1}$轴移动a $_{i-1}$ ；
- ◆ (3)绕z $_{i}$轴转θ$_{i}$角；(4) 沿z $_{i}$轴移动d$_{i}$
- 相对动坐标系，按“从左向右”原则：

$$\boxed{{}^{i-1}_{i}T = Rot(x,\alpha_{i-1})Trans(x,a_{i-1})Rot(z,\theta_i)Trans(z,d_i),}$$

$${}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 末端{n}相对基坐标系{0}的变换矩阵

$${}^{0}_{n}T(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n) = {}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{2}T\cdots{}^{n-1}_{n}T$$

表示末端连杆位姿 $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{o},\boldsymbol{a},\boldsymbol{p})$ 与关节变量 $\theta_1,\ldots,\theta_n$ 的关系

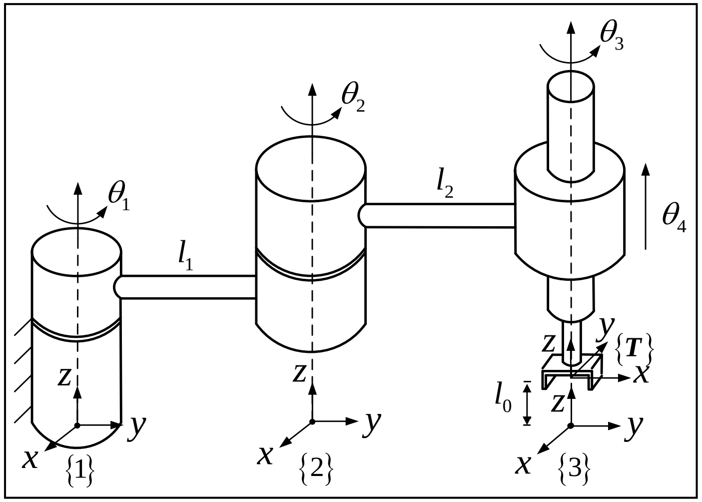
5.2 SCARA机器人运动学方程

- **有3个旋转关节，其轴线相互平行，用于平面定位和定向；有1个移动关节，用于垂直于平面运动；结构紧凑、动作灵活、顺应性**
- **SCARA各连杆变换矩阵：**

$$
{}^0_1\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0\\ s_1 & c_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad
{}^1_2\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0\\ s_2 & c_2 & 0 & l_1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad
{}^2_3\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0\\ s_3 & c_3 & 0 & l_2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad
{}^3_4\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & l_0+\theta_4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

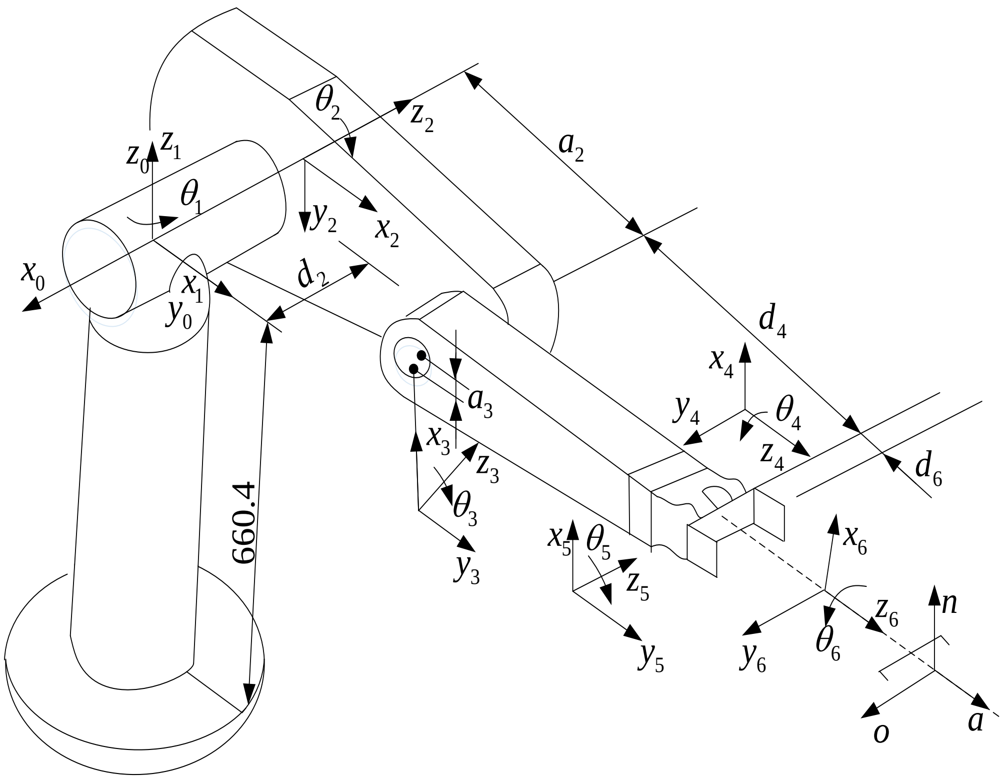
- **所以运动学方程：**

$$
{}^0_4\boldsymbol{T}={}^0_1\boldsymbol{T}\,{}^1_2\boldsymbol{T}\,{}^2_3\boldsymbol{T}\,{}^3_4\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} \mathrm{c}\theta_{123} & -\mathrm{s}\theta_{123} & 0 & -l_1\,\mathrm{s}\theta_1-l_2\,\mathrm{s}\theta_{12}\\ \mathrm{s}\theta_{123} & \mathrm{c}\theta_{123} & 0 & l_1\,\mathrm{c}\theta_1+l_2\,\mathrm{c}\theta_{12}\\ 0 & 0 & 1 & l_0+\theta_4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$



5.2 PUMA560机器人运动学方程

- 6自由度关节机器人，6个关节都是旋转副；前3个关节用于确定手腕参考点的位置，后3个关节用于确定手腕的方位 (a, α, d, θ)



i	a	α	d	θ
1	0	0°	0	θ_1
2	0	-90°	d_2	θ_2
3	a_2	0°	0	θ_3
4	a_3	-90°	d_4	θ_4
5	0	90°	0	θ_5
6	0	-90°	0	θ_6

5.2 PUMA560机器人运动学方程

□ 计算各连杆变换矩阵

$$ {}^0_1\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ {}^1_2\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ {}^2_3\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, $$

$$ {}^3_4\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ {}^4_5\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ {}^5_6\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

□ 计算PUMA560“手臂变换矩阵”

$$ {}^0_6\boldsymbol{T}(\theta)={}^0_1\boldsymbol{T}(\theta_1)\,{}^1_2\boldsymbol{T}(\theta_2)\,{}^2_3\boldsymbol{T}(\theta_3)\,{}^3_4\boldsymbol{T}(\theta_4)\,{}^4_5\boldsymbol{T}(\theta_5)\,{}^5_6\boldsymbol{T}(\theta_6) $$

□ 运动学方程的求解顺序

$$ {}^0_6\boldsymbol{T}(\theta)={}^0_1\boldsymbol{T}(\theta_1)\left({}^1_2\boldsymbol{T}(\theta_2)\left({}^2_3\boldsymbol{T}(\theta_3)\left({}^3_4\boldsymbol{T}(\theta_4)\left({}^4_5\boldsymbol{T}(\theta_5)\,{}^5_6\boldsymbol{T}(\theta_6)\right)\right)\right)\right) $$

□ 为了核对矩阵正确性，代入 $\theta_1=90^\circ,\ \theta_2=0^\circ,\ \theta_3=-90^\circ,\ \theta_4=\theta_5=\theta_6=0^\circ$ 验证

5.3 PUMA560机器人运动学反解

- **运动学正解：根据关节变量q_i的值，计算机器人末端工具相对于基坐标系的位姿。对于每一组关节变量值，有唯一确定解。**
- **运动学反解：为了使机器人末端工具相对于基站的位姿满足给定要求，计算相应的关节变量；可能存在多重解，也可能无解。**

几何方法

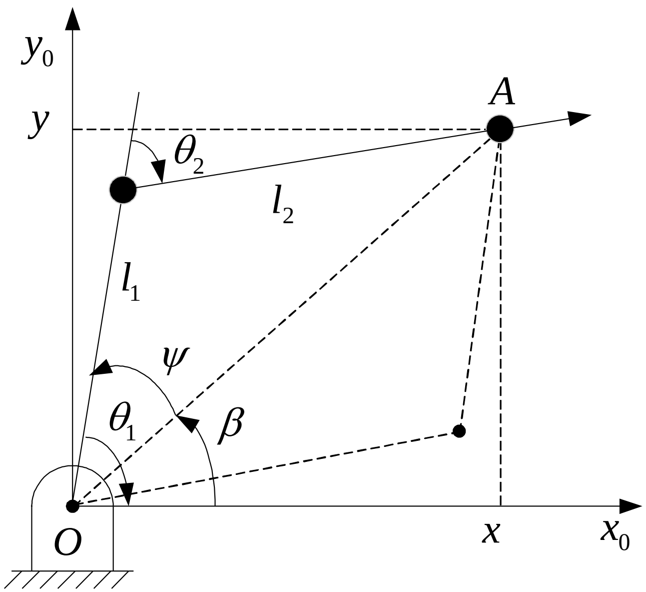
- **已知(x,y)、(l_1, l_2)，反解关节变量(θ_1, θ_2)**
- **求解：在l_1 l_2OA组成的三角形中余弦定理**

◆ **由** $x^2+y^2=l_1^2+l_2^2-2l_1l_2\cos\left(180^\circ-\theta_2\right)$ **计算θ_2**

◆ **根据下式，可得** $\theta_1=\beta+\psi$**：**

$$\beta=\mathrm{A}\tan 2\left(y,x\right),$$

$$\cos\psi=\frac{l_1^2+\left(x^2+y^2\right)-l_2^2}{2l_1\sqrt{x^2+y^2}}\quad\left(0^\circ\le\psi\le 180^\circ\right)$$



3R平面机械手

5.3 PUMA560机器人运动学反解

代数方法（Paul反变换法）

- PUMA560运动学方程为：

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}_1^0\boldsymbol{T}(\theta_1)\,{}_2^1\boldsymbol{T}(\theta_2)\,{}_3^2\boldsymbol{T}(\theta_3)\,{}_4^3\boldsymbol{T}(\theta_4)\,{}_5^4\boldsymbol{T}(\theta_5)\,{}_6^5\boldsymbol{T}(\theta_6)$$

- 用逆变换左乘 ${}_1^0\boldsymbol{T}^{-1}(\theta_1)$ 上述方程得：

$${}_1^0\boldsymbol{T}^{-1}(\theta_1)\,{}_6^0\boldsymbol{T} = {}_2^1\boldsymbol{T}(\theta_2)\,{}_3^2\boldsymbol{T}(\theta_3)\,{}_4^3\boldsymbol{T}(\theta_4)\,{}_5^4\boldsymbol{T}(\theta_5)\,{}_6^5\boldsymbol{T}(\theta_6) = {}_6^1\boldsymbol{T}$$

- 令方程两端元素(2,4)对应相等得：$-s_1 p_x + c_1 p_y = d_2$

- 上式是有关关节变量θ $_1$的方程，利用三角代换可得

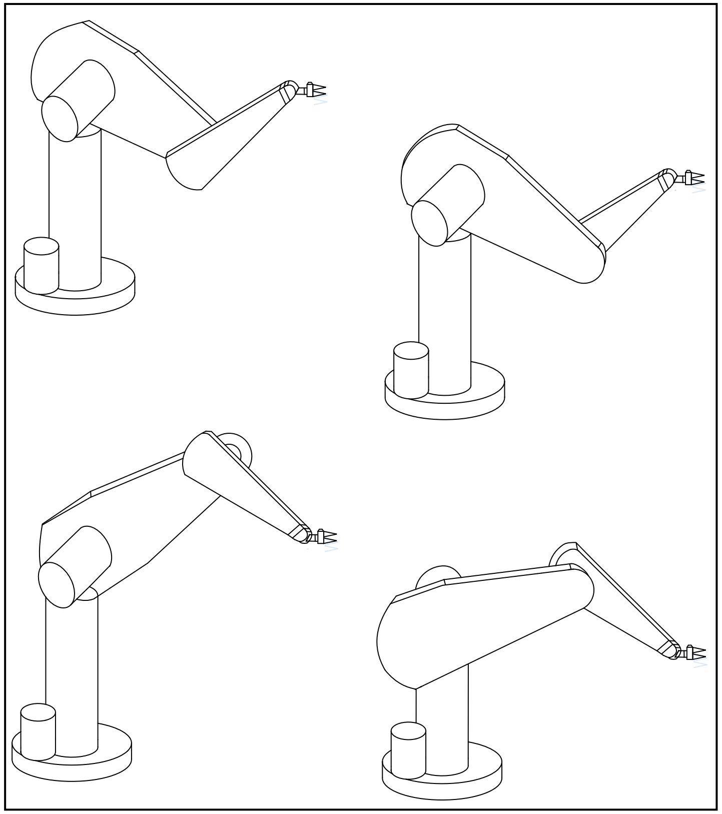
$$\theta_1 = \mathrm{A}\tan 2\left(p_y, p_x\right) - \mathrm{A}\tan 2\left(d_2, \pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}\right)$$

- 根据上述思路，可依次类推计算：θ $_2$， θ $_3$等

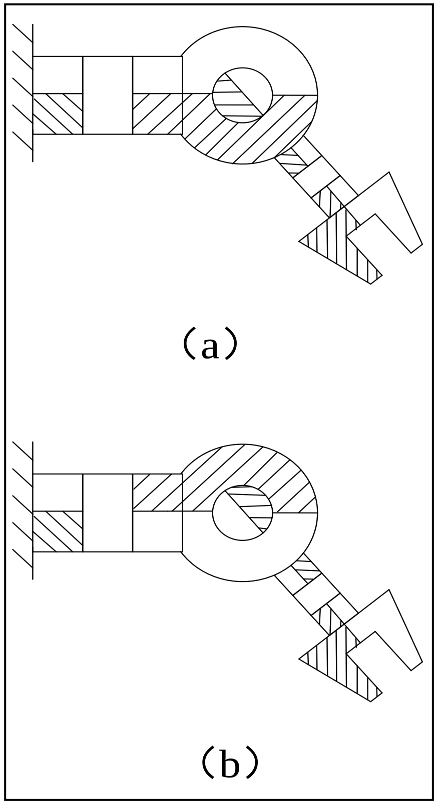
5.3 PUMA560机器人运动学反解

PUMA560运动反解可能存在8种解（θ_1和θ_3正负号、腕部翻转）

- 多解时，应根据使用要求选取：行程最短、功率最省、受力最好等



关节1和3的四种反解



手腕翻转

5.4 指数积(POE)公式

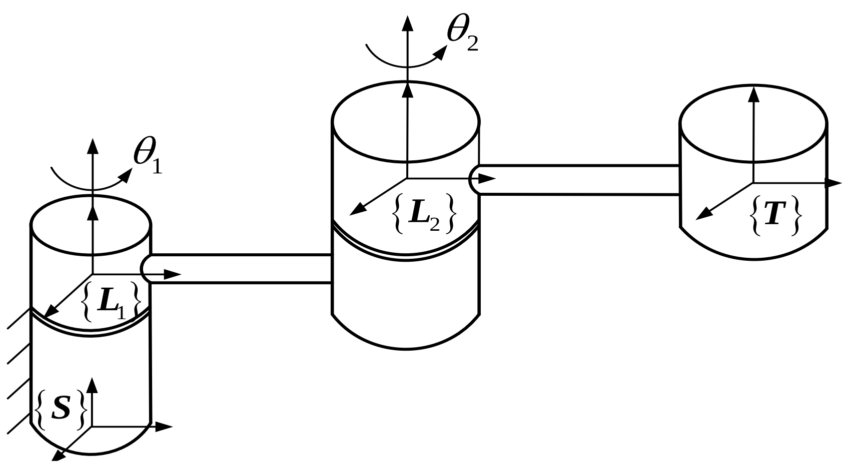
- D-H方法：规定坐标系、确定连杆参数、连杆变换矩阵、矩阵相乘
- 指数积方法：不需要规定坐标系，只需要规定关节变量—简单直观
- 例子：关节轴线L_1、L_2，运动旋量坐标V_1、V_2, 求 ${}_T^S\boldsymbol{T}(\theta_1,\theta_2)$

解答：可以推导 ${}_T^S\boldsymbol{T}(\theta_1,\theta_2)=e^{[V_1]\theta_1}e^{[V_2]\theta_2}\,{}_T^S\boldsymbol{T}(0)$

同理，n个关节机器人的指数积方程：$\boxed{{}_T^S\boldsymbol{T}(\theta)=e^{[V_1]\theta_1}\ e^{[V_2]\theta_2}\ldots e^{[V_n]\theta_n}\,{}_T^S\boldsymbol{T}(0)}$

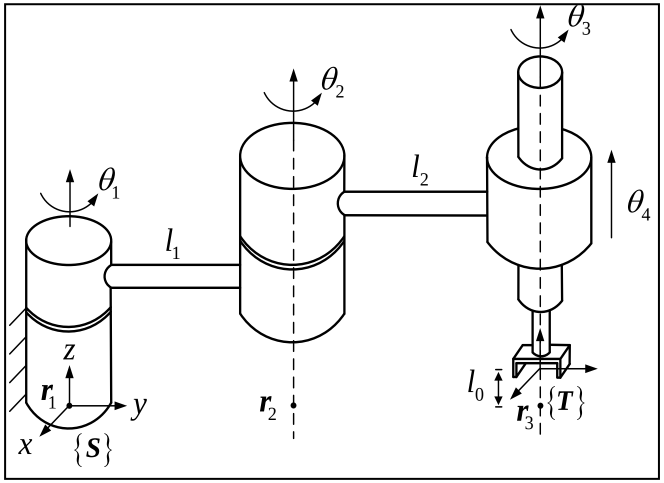
注意：1）指数积与旋转次序无关，是n个矩阵指数 $e^{[V_i]\theta_i}$ 的乘积

2）指数积与连杆变换之积是一致的（证明练习）



SCARA机器人运动学方程的指数积公式

- SCARA机器人由3个转动关节和1个移动关节组成
- 指数积—仅需规定各个关节轴线的线矢量方向



解答：

$$\boldsymbol{\omega}_1=\boldsymbol{\omega}_2=\boldsymbol{\omega}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ [\boldsymbol{\omega}_1]=[\boldsymbol{\omega}_2]=[\boldsymbol{\omega}_3]=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

取关节轴线上一点： $\boldsymbol{r}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{r}_2=\begin{bmatrix}0\\l_1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{r}_3=\begin{bmatrix}0\\l_1+l_2\\0\end{bmatrix}$

三个转动关节的运动旋量：

$$[V_1]=\begin{bmatrix}[\boldsymbol{\omega}_1]&\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{\omega}_1\\\mathbf{0}&0\end{bmatrix},\ [V_2]=\begin{bmatrix}[\boldsymbol{\omega}_2]&\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{\omega}_2\\\mathbf{0}&0\end{bmatrix},\ [V_3]=\begin{bmatrix}[\boldsymbol{\omega}_3]&\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{\omega}_3\\\mathbf{0}&0\end{bmatrix}$$

所以运动学方程： ${}^S_T\boldsymbol{T}(\theta)=e^{[V_1]\theta_1}e^{[V_2]\theta_2}e^{[V_3]\theta_3}e^{[V_4]\theta_4}\,{}^S_T\boldsymbol{T}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}(\theta)&\boldsymbol{p}(\theta)\\\mathbf{0}&1\end{bmatrix}$

所得结果与连杆变换之积所得结果是一致的。

运动旋量及矩阵指数

□ 运动旋量[V]的矩阵指数表达式

$$\mathbf{e}^{[V]\theta}=\begin{bmatrix}\mathbf{e}^{[\omega]\theta} & \left(\boldsymbol{I}-\mathbf{e}^{[\omega]\theta}\right)(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\upsilon})+\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}\theta \\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}(\theta) & \boldsymbol{p}(\theta) \\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix}$$

◆ **旋转矩阵：** $\boldsymbol{R}(\theta)=\mathbf{e}^{[\omega]\theta}=\boldsymbol{I}+[\boldsymbol{\omega}]\sin\theta+[\boldsymbol{\omega}]^2(1-\cos\theta)$

◆ **平移矢量：** $\boldsymbol{p}(\theta)=\left(\boldsymbol{I}-\mathbf{e}^{[\omega]\theta}\right)(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\upsilon})+\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}\theta$

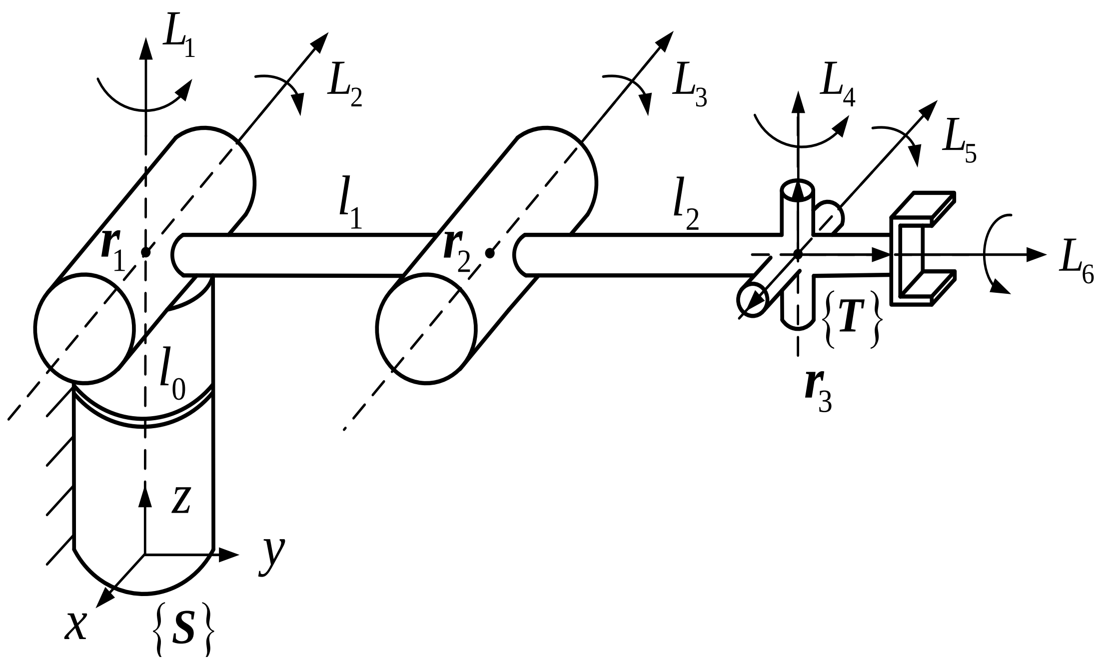
◆ **纯移动（$\omega=0$）：** $\mathbf{e}^{[V]\theta}=\boldsymbol{I}+[V]\theta=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{\upsilon}\theta \\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix}$

注意：机器人的关节大部分是移动关节或转动关节，利用矩阵指数建立刚体变换矩阵时，只要规定表示移动关节或转动关节轴线的线矢量（方向、一点、角度），可避免坐标系的选取，大大减少计算量。

ELBOW机器人运动学方程的指数积公式

- ELBOW为由6个转动关节组成的6自由度机器人
- 腕部三轴相交、肩部两关节相交、肘部与一个肩部关节平行

解答：具体过程（练习）



5.5 基于线矢量的运动学方程自动生成

□ 主要优点：

- ◆ 用指数积公式，只需规定基坐标系，无需建立连杆坐标系和连杆参数。
- ◆ 利用线矢量，可使运动学方程简化，$\boldsymbol{p}(\theta)$ 的第二项为零（轴线为坐标轴）

$$\boldsymbol{p}(\theta)=\left(\boldsymbol{I}-e^{[\omega]\theta}\right)(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\upsilon})+\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}\theta=\left(\boldsymbol{I}-e^{[\omega]\theta}\right)(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\upsilon})$$

- ◆ 选取基坐标系和机器人初始位姿，旋转轴线绕x/y/z轴，方程可简化
- ◆ 例如绕x/y/z轴旋转时，则有：

$$e^{[\omega]\theta}=\boldsymbol{R}(x,\theta),\quad e^{[\omega]\theta}=\boldsymbol{R}(y,\theta),\quad e^{[\omega]\theta}=\boldsymbol{R}(z,\theta),$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\upsilon}=\begin{bmatrix}0\\ r_y\\ r_z\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\upsilon}=\begin{bmatrix}r_x\\ 0\\ r_z\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\upsilon}=\begin{bmatrix}r_x\\ r_y\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0\\ r_y(1-\cos\theta)+r_z\sin\theta\\ -r_y\sin\theta+r_z(1-\cos\theta)\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}r_x(1-\cos\theta)-r_z\sin\theta\\ 0\\ r_x\sin\theta+r_z(1-\cos\theta)\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}r_x(1-\cos\theta)+r_y\sin\theta\\ -r_x\sin\theta+r_y(1-\cos\theta)\\ 0\end{bmatrix}$$

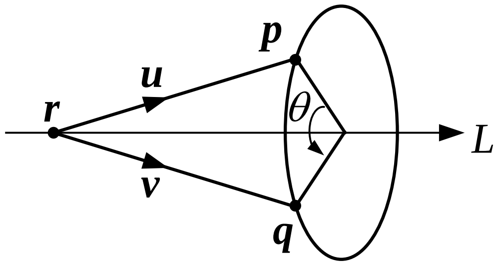
5.6 运动学反解的子问题

- **先讨论三种子问题：转轴线矢量L已知，求等效转角**
- **子问题1：旋转综合问题（已知 $p, q \in \Re^3$，求方程 $e^{[L]\theta}p = q$ 的转角 θ）**

解答：因为线矢量L上任一点r旋转后不变，存在 $e^{[L]\theta}r = r$ ，所以

$$e^{[L]\theta}(p - r) = q - r,$$

$$e^{[L]\theta}u = v$$



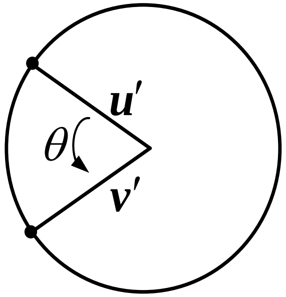
点p绕L旋转至q点

显然，u, v 在方向 ω 上的分量为： $\omega^T u, \omega^T v$

u, v 在与 ω 相垂直平面上的投影为

$$u' = u - \omega\omega^T u,$$

$$v' = v - \omega\omega^T v$$



uv绕在垂直于螺旋轴平面上的投影

根据相容性条件：

$$\begin{cases} \omega^T u = \omega^T v, \\ \|u'\| = \|v'\| \end{cases}$$

可得等效转角： $\theta = \mathrm{Atan2}\left(\omega^T(u' \times v'), u' \cdot v'\right)$

5.6 运动学反解的子问题

- **先讨论三种子问题：转轴线矢量L已知，求等效转角**
  - **子问题2：绕两种旋转反解问题（令两线矢量L_1、L_2表示相交的旋转轴线，已知 $p,\ q \in \Re^3$，求方程 $e^{[L_1]\theta_1} e^{[L_2]\theta_2} p = q$ 的等效转角）**

解答：该问题为 p 绕L_2旋转 θ_2 再绕L_1旋转 θ_1 到达 q，即满足：

$$e^{[L_1]\theta_1} e^{[L_2]\theta_2} (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{r})$$

令 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{r},\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{r}$ **，三者在线矢量方向的分量：**

$$\boldsymbol{\omega}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{\omega}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{\omega}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{\omega}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{\omega}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{\omega}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}$$

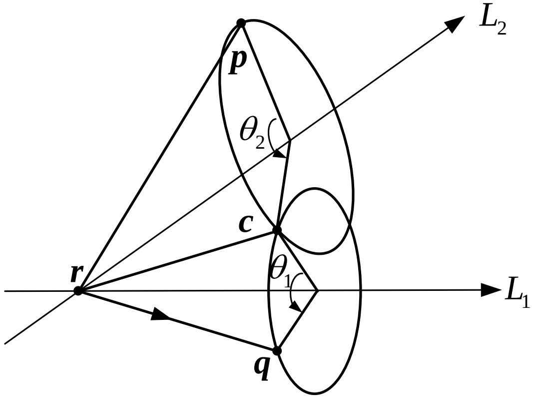
在与 ω 相垂直平面的投影：

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{z}' = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}$$

根据相容性条件和子问题1，可以求解

θ**(细节参考教材)**

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\ ,\ \boldsymbol{\omega}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\ , \\ \|\boldsymbol{u}'\| = \|\boldsymbol{v}'\| = \|\boldsymbol{z}'\| \end{cases}$$

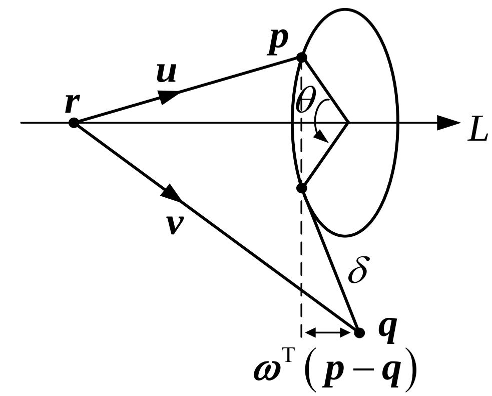


点p先绕L_2再旋L_1旋转至q点

5.6 运动学反解的子问题

□ 先讨论三种子问题：转轴线矢量L已知，求等效转角

◆ **子问题3：规定距离的旋转综合（已知 $\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q}\in\Re^3,\ \delta>0$，求满足矩阵指数方程 $\left\|e^{[L]\theta}\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\right\|^2=\delta^2$ 的转角 θ）**



点p绕L再旋转至距点q距离为 处

解答：令 $\boldsymbol{r}$ 为轴线上一点，定义 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}$，则：

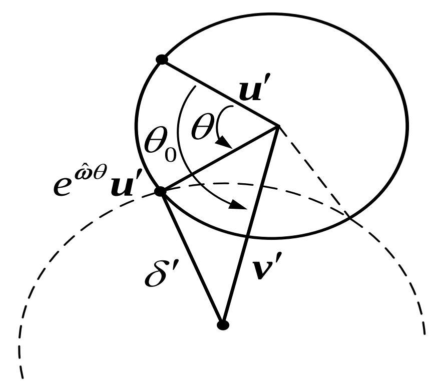
$$\left\|e^{[V]\theta}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\right\|^2=\delta^2$$

显然，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{\omega}$ 上的分量 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$

在与 相垂直平面上的投影为

$$\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u},$$
$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$$

故存在如下约束关系： $\left\|\mathrm{e}^{[\omega]\theta}\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{v}'\right\|^2=\delta'^2$



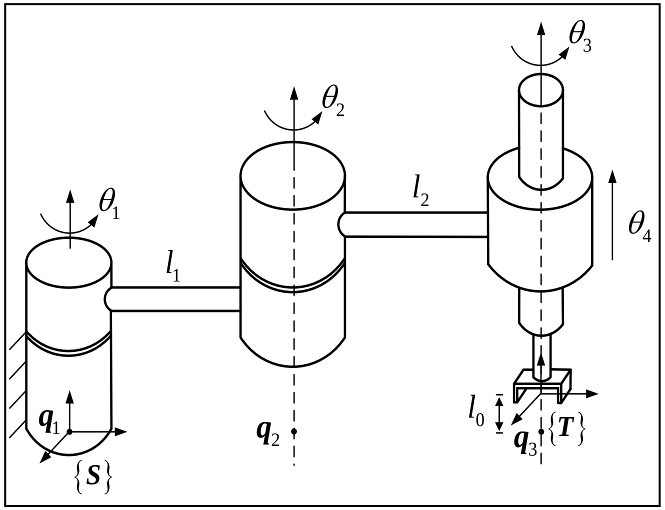
经推导得（细节参考教材）：

$$\theta=\theta_0\pm\arccos\left(\frac{\|\boldsymbol{u}'\|^2+\|\boldsymbol{v}'\|^2-\delta^2}{2\|\boldsymbol{u}'\|\|\boldsymbol{v}'\|}\right),\quad \theta_0=a\tan2\left(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{v}'),\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}'\right)$$

注意：可能有1个、2个或无解

在垂直于 $\boldsymbol{\omega}$ 平面上的投影

5.6 以SCARA为例介绍运动学反解



□ **前面已推导运动学方程为：**

$$ {}_T^S\boldsymbol{T}(\theta) = e^{[L_1]\theta_1} e^{[L_2]\theta_2} e^{[L_3]\theta_3} e^{[L_4]\theta_4}\, {}_T^S\boldsymbol{T}(0) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & x \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: \boldsymbol{T}_d $$

式中 $\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$**。因为位置分量：**

$$ \boldsymbol{p}(\theta) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_0 + \theta_4 \end{bmatrix} $$

由第三行可得 $\theta_4 = z - l_0$ **，且** $e^{[L_1]\theta_1} e^{[L_2]\theta_2} e^{[L_3]\theta_3} = \boldsymbol{T}_d\, {}_T^S\boldsymbol{T}^{-1}(0) e^{-[L_4]\theta_4} =: \boldsymbol{T}_1$

令 $\boldsymbol{p} \in L_3,\ \boldsymbol{q} \in L_1$ **，** $\left\| e^{[L_1]\theta_1} e^{[L_2]\theta_2} \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} \right\| = \left\| \boldsymbol{T}_1 \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} \right\| =: \delta$

故由子问题3可以求解 θ_2 **。再取L$_3$上的一点** $\boldsymbol{p}' \in L_3$**，得：**

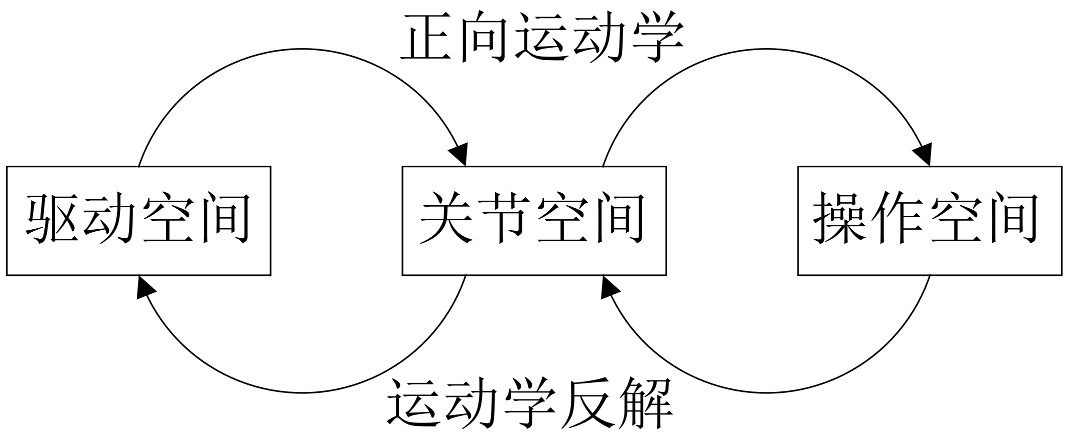
$$ e^{[L_1]\theta_1} e^{[L_2]\theta_2} e^{[L_3]\theta_3} \boldsymbol{p}' = e^{[L_1]\theta_1} \left(e^{[L_2]\theta_2} \boldsymbol{p}' \right) = T_1 \boldsymbol{p}' $$

利用子问题1可以求解 θ_1 **。根据下式由子问题1求** θ_3

$$ e^{[L_3]\theta_3} = e^{-[L_1]\theta_1} e^{-[L_2]\theta_2} \boldsymbol{T}_d\, {}_T^S\boldsymbol{T}^{-1}(0) e^{-[L_4]\theta_4} $$

5.8 驱动空间、关节空间和操作空间

- **关节空间：n个自由度的操作臂的末端位姿由n个关节变量所决定，这n个关节变量统称为n维关节矢量，记为 θ，所有关节矢量 θ 构成的空间。**
- **操作空间：末端执行器（手爪）位姿在直角坐标中的描述；**
- **驱动空间：驱动矢量s所构成的空间；**
- **运动学方程 $x = x(\theta)$：可以看成是关节空间向操作空间的映射**
- **运动学反解：由其映象求其在关节空间中的原象**



5.9 并联机构运动学

- **单支链机器人运动学方程：**

◆ **D-H法** $^{A}_{B}\boldsymbol{T}(\theta)={}^{0}_{1}\boldsymbol{T}(\theta_1)\,{}^{1}_{2}\boldsymbol{T}(\theta_2)\ldots{}^{n-1}_{n}\boldsymbol{T}(\theta_n)\,{}^{A}_{B}\boldsymbol{T}(0),$

◆ **指数积：** $^{A}_{B}\boldsymbol{T}(\theta)=e^{[L_1]\theta_1}e^{[L_2]\theta_2}\ldots e^{[L_n]\theta_n}\;{}^{A}_{B}\boldsymbol{T}(0)$

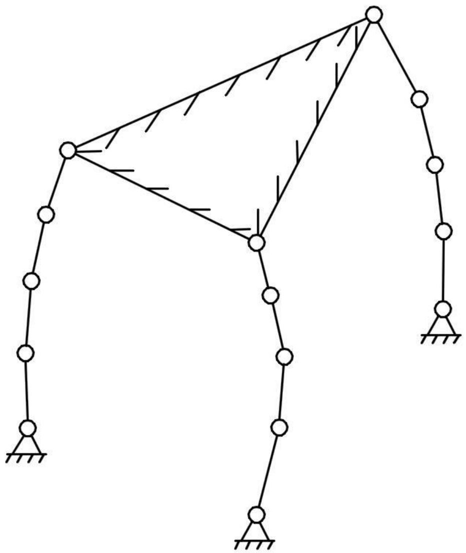
- **并联机器人运动学方程：只控制部分关节确定末端位姿、其它关节被约束**

$$
\begin{aligned}
{}^{A}_{B}\boldsymbol{T}(\theta)&=e^{[L_{11}]\theta_{11}}e^{[L_{12}]\theta_{12}}\ldots e^{[L_{1r}]\theta_{1r}}\;{}^{A}_{B}\boldsymbol{T}(0)\\
&=e^{[L_{21}]\theta_{21}}e^{[L_{22}]\theta_{22}}\ldots e^{[L_{2s}]\theta_{2s}}\;{}^{A}_{B}\boldsymbol{T}(0)\\
&=e^{[L_{31}]\theta_{31}}e^{[L_{32}]\theta_{32}}\ldots e^{[L_{3t}]\theta_{3t}}\;{}^{A}_{B}\boldsymbol{T}(0)
\end{aligned}
$$

式中 r,s,t **表示三个支链的基本副数（关节数）。**

- **并联机构运动学正解十分复杂，反解简单，**

  请参考6-SPS Stewart机构正反解（学习）。



5-5-5型并联机构