第七章 量纲分析与动力相似

流体力学的研究方法
- 理论分析
- 实验研究
- 数值模拟

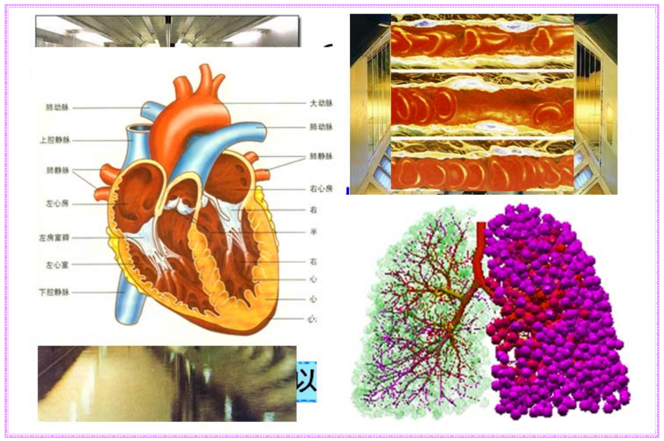
- 仅有少数简单问题可以求得理论分析解析解
- 数值模拟结果需要实验验证

实验研究是流体力学研究的重要手段

实验研究意义

- 研究难以建立物理数学模型的流动问题
- 研究虽已建立数学物理方程，但方程求解困难或根本无法求解的流动
- 验证新理论、新方法和理论分析和数值计算结果
- 发现流动中新现象，新规律

实验方法



进行模型实验需解决的问题

- 实验模型设计、实验环境和条件设计
- 实验测量量选取
- 实验数据的整理及各物理量间函数关系的建立
- 模型实验结果向实物流动推广、以及特定条件下的实验结论的推广
- 工程设计中的怎样进行相似设计

概述

力学相似（动力相似）与准则数

→ 几何相似、运动相似、动力相似

→ Re，Fr，Eu，Ma，We

部分相似与模型试验

模型试验举例

量纲分析 → 瑞利法、白金汉法

7.1 力学相似（动力相似）

力学相似

模型流动与原型（实物）流动在各对应空间点和对应时刻，对应物理量各自成一定的比例关系

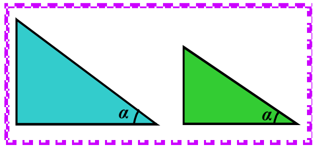
力学相似 → 几何相似 / 运动相似 / 动力相似

几何相似1

几何相似 → 针对描述物体或空间几何形状的量

- 模型流动与实物流动有相似的边界形状
- 所有对应的线性尺寸成同一比例　直径、弦长等

$$\frac{L_{1m}}{L_{1p}}=\frac{L_{2m}}{L_{2p}}=\cdots=C_L$$

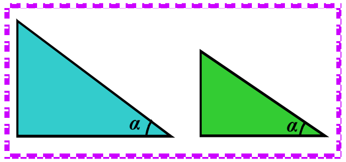


C_L（λ_L）– 线性比例系数

几何相似2

- 对应的面积和体积分别成一定的比例关系

$$\frac{A_m}{A_p}=\frac{L_m^2}{L_p^2}=C_L^2 \qquad \frac{V_m}{V_p}=\frac{L_m^3}{L_p^3}=C_L^3$$



- 线性尺寸成同一比例时，对应的夹角相等

运动相似1

运动相似 → 针对描述运动状态的量

- 满足几何相似
- 对应瞬时，对应空间点
- 流速方向相同，大小成同一比例

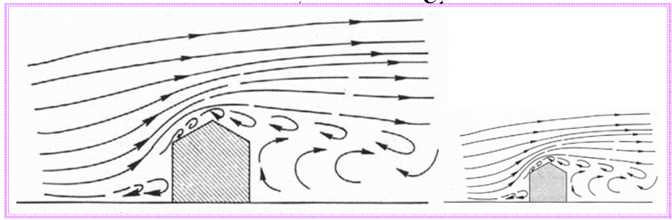
$$\frac{V_{1m}}{V_{1p}}=\frac{V_{2m}}{V_{2p}}=\cdots=C_V$$

C_V （λ_V） – 速度比例系数

运动相似2

- 流体质点通过对应距离的时间相似

$$\frac{t_m}{\ }=\frac{L_m/V_m}{\ }=\frac{C_L}{\ }=C$$



- 流线几何相似

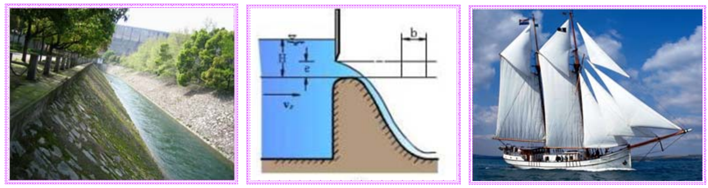
特征长度 L 和特征速度 V

特征长度 → 反映物体或空间几何特点的尺寸

特征速度 → 反映流场特点的速度

流动	V	L
圆管流动	过流断面平均速度	管道直径
钝体绕流	来流速度	迎风截面的宽度
平板边界层	来流速度	到前缘的距离

特征长度 L 和特征速度 V



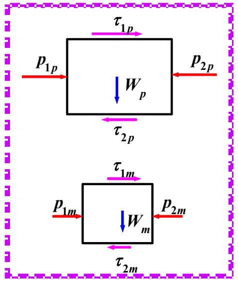
特征长度与特征速度

流动	V	L
水面船舶	船舶速度	吃水线长度
明渠流	平均流速	水深

动力相似1

动力相似 ⟹ 针对描述动力特征的量

- 满足几何相似
- 对应瞬时，对应空间点
- 同类型力方向相同，大小成同一比例



$$\frac{F_{1m}}{F_{1p}}=\frac{F_{2m}}{F_{2p}}=\cdots=C_F$$

C_F （λ_F）－作用力比例系数

动力相似2

- 各力与惯性力构成的力多边形相似

$$F_{1m}+F_{2m}+\cdots-m_m a_m=0$$

$$F_{1p}+F_{2p}+\cdots-m_p a_p=0$$

- 模型流动和实物流动的惯性力与各力之比对应相等

$$\left(\frac{ma}{F_1}\right)_m=\left(\frac{ma}{F_1}\right)_p,\left(\frac{ma}{F_2}\right)_m=\left(\frac{ma}{F_2}\right)_p,\left(\frac{ma}{F_3}\right)_m=\left(\frac{ma}{F_3}\right)_p,\ldots\ldots$$

- 作用在流体微团上的常见力可能有：重力 、压力 、 摩擦力、弹性力、表面张力

相似准则1

准则数 ⟹ 惯性力与某种力的比

- 惯性力 ⟹ $-Ma \quad \propto \rho L^2 V^2$
- 粘性力 ⟹ $\tau A=\mu\dfrac{du}{dy}A \quad \propto \mu VL$
- 重力 ⟹ $Mg \quad \propto \rho L^3 g$
- 压力 ⟹ $\Delta pA \quad \propto \Delta p L^2$
- 弹性力 ⟹ $E_v A \quad \propto E_V L^2 \propto \rho a^2 L^2$
- 表面张力 ⟹ $\sigma l \quad \propto \sigma L$

相似准则2

雷诺准则 (雷诺数) ⟹ 惯性力与粘性力的比

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho VL}{\mu} \qquad \mathrm{Re}=\frac{VL}{\nu}$$

- 小模型 ⇒ 高流速
- 原型与模型中的流体无需一致

- V 为特征速度，L 为特征长度

粘性流动最重要的准则数：完全充满的管道流动、飞行器或潜艇（不产生水面波）的阻力等

相似准则3

弗劳德准则（弗劳德数） → 惯性力与重力的比

$$\mathrm{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

重力加速度一样时，小模型对应小流速

- 是具有自由液面流体流动时重要的准则数

船舶形成的波运动、明渠流、水对桥墩的作用、溢洪道流动、孔口出流及其它重力起主要作用的流动

相似准则4

欧拉准则（欧拉数） → 压力与惯性力的比

$$\mathrm{Eu} = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$$

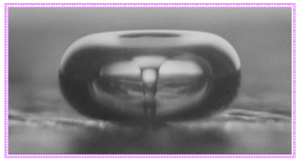
如果有其它参数导致流态改变，Eu 也会变化

- 压力或压差对流速分布影响较大的流动中重要的准则数

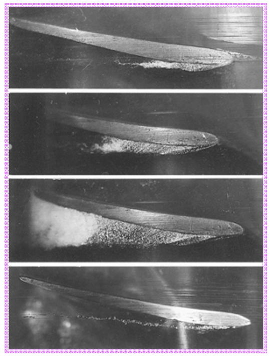
空化效应或空蚀现象等

汽穴、汽蚀、空化1

- 气泡直径：0.15-6 mm
- 射流速度：110 m/s
- 撞击壁面压强: 50700 kPa
- 液体温度不到1/1000秒内升高2100°C



爆聚气泡的显微照片



轴流式泵叶片的绕流

汽穴、汽蚀、空化2

相似准则6

马赫准则（马赫数） → 惯性力与弹性力的比

$$\mathrm{Ma}=\frac{v}{a}$$

→ Ma < 1：亚音速流动
Ma = 1：音速流动
Ma > 1：超音速流动

- 可压缩流动中重要的准则数

高速流动问题

相似准则7

韦伯准则（韦伯数） → 惯性力与表面张力的比

$$\mathrm{We}=\frac{\rho V^2 L}{\sigma}$$

- 表面张力起主要作用的流动中重要准则数

小液滴、小气泡、毛细现象等

相似准则8

斯特劳哈尔数 → 局部惯性力与对流惯性力的比

- 当地惯性力 → $M\frac{\partial u}{\partial t} \propto \frac{\rho V L^3}{t}$

$$Sr=\frac{L}{tV}$$ 或 $$Sr=\frac{\omega L}{V}$$

- V 为特征速度，L 为特征 长度，t 为特征时间

非定常流动准则数

模型流动与实物流动动力相似时，必须保证在对应点上各个准则数分别相等

相似性质1

两种相似流动属于同一类流动现象，应为相同的微分方程组描述

- 连续方程
- 动量方程－Navier-Stokes方程
- 能量方程
- 状态方程

相似性质2

两个流动现象相似，单值条件必须相似

- 几何条件 ⇒ 流动空间几何形状和尺寸
- 物性条件 ⇒ 流体密度、粘性等
- 边界条件 ⇒ 流场边界上物理量分布
- 初始条件 ⇒ 非定常问题初始时刻流场中各点物理量分布

两种相似的物理现象，对应的准则数相等

相似条件

判断两个流动现象是否相似的充要条件

第一相似条件：属于同一类流动现象，描述流动现象的微分方程组相同

- 连续、运动、能量、状态方程相同

第二相似条件：单值条件必须相似

- 几何、物性、边界、初始条件相似

第三相似条件：单值条件中的物理量组成的准则数对应相等

解决了的问题

相似的充要条件解决了下列问题

- 根据单值条件相似和单值条件中物理量组成的准则数相似相等原则设计准模型，选取模型流动中流动介质，确定模型流动的边界和初始条件
- 实验过程中应测量各相似准则数中包含的一切物理量，并整理成相应的准则数
- 用与实验数据拟合的方法找出准则数之间的关系，即准则方程，该方程可以推广应用到原型和其他相似流动
- 依此可以进行工程设计中的相似设计

不同物理现象相似比拟

水气比拟

水气比拟实验台是根据浅水的表面波与气体的扰动波微分方程相同原理，通过能直接观察的表面波模拟扰动波的产生、相交、反射等气体动力学问题

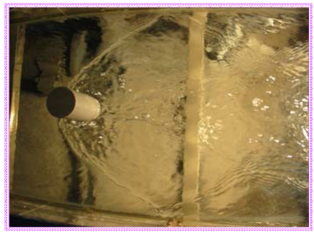
水气比拟2

超音速气流绕叶片等

斜激波

超音速气流绕钝体等

曲面激波



7.2 模型实验

完全相似

模型流动与实物流动的全部准则数相等

- 几何完全相似很难做到　如：壁面粗糙度、间隙等对应成比例
- 难以做到多个准则数同时相等　如：同时满足雷诺数和弗劳德数对应相等

弗劳德数相等　$\mathrm{Fr}_p = \mathrm{Fr}_m \Rightarrow \dfrac{V_p}{\sqrt{g_p L_p}} = \dfrac{V_m}{\sqrt{g_m L_m}} \Rightarrow \dfrac{V_p}{\sqrt{L_p}} = \dfrac{V_m}{\sqrt{L_m}}$

$$\Rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}}$$

模型实验

雷诺数相等　$\mathrm{Re}_p = \mathrm{Re}_m \Rightarrow \dfrac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p} = \dfrac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m}$ 或 $\dfrac{V_p L_p}{\nu_p} = \dfrac{V_m L_m}{\nu_m}$

若　$\nu_p = \nu_m \Rightarrow \dfrac{V_m}{V_p} = \dfrac{L_p}{L_m}$

- 只有比例系数为1，才满足，否则不可同时满足

否则需　$\dfrac{\nu_m}{\nu_p} = (\dfrac{L_m}{L_p})^{3/2}$

- 难以选择到满足条件模拟流体

⇒ 完全相似只有在模型与实物尺寸相同的情况下才有可能实现

部分相似 ⇒ 只保证起主要作用的准则数相等

近似模型法

保证模型流动与实物流动部分相似的方法

- **Re** ⇒ 粘性流动最重要的准则：管道流动、绕流阻力等
- **Fr** ⇒ 存在自由表面的流动：兴波阻力，明渠流
- **Eu** ⇒ 压力、压差起主要作用：空蚀
- **Ma** ⇒ 流体可压缩性不能忽略：气体高速流动
- **We** ⇒ 表面张力起主要作用：液珠、气泡、毛细现象等

7.3 模型实验举例 – 雷诺相似1

雷诺相似 ⟹ 管道流动，物体绕流

无自由面，重力对流态无影响，可忽略 Fr，We

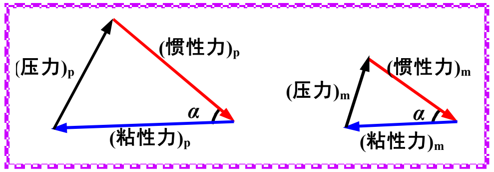
流速不高，不可压缩流体，可忽略 Ma

⟹ 只考虑粘性力、压力、惯性力

⟹ $(\mathrm{Re})_m = (\mathrm{Re})_p$ $(\mathrm{Eu})_m = (\mathrm{Eu})_p$

雷诺相似2

Re数和Eu数，只有一个是决定性（独立，定性）准则



- 控制方程组相同，单值条件相似
- 仅保证两种流动对应的雷诺数相等 $\mathrm{Eu} = f(\mathrm{Re})$

西安交通大学流体力学课程组

雷诺相似3 – 例题1

已知某物体在海平面标准大气压情况下作等速直线运动，速度为20m/s。用1/6的缩尺模型在风洞中进行试验，测得阻力为50N。假设风洞实验段气流的压强、密度与海平面标准大气情况相同，求模型试验的风速和物体受到的阻力。

解：(1) 模型试验的风速

$(\mathrm{Re})_m = (\mathrm{Re})_p$ ⟹ $\left(\dfrac{\rho l V}{\mu}\right)_m = \left(\dfrac{\rho l V}{\mu}\right)_p$

由题意 $\rho_m = \rho_p$ $l_p = 6 l_m$ $\mu_p = \mu_m$

西安交通大学流体力学课程组

雷诺相似4 – 例题1

⟹ $V_m = 6 V_p = 120(\mathrm{m/s})$

(2) 计算阻力

流动相似 ⟹ $\left(\dfrac{F}{\rho l^2 V^2}\right)_m = \left(\dfrac{F}{\rho l^2 V^2}\right)_p$

⟹ $F_p = \dfrac{\rho_p}{\rho_m}\left(\dfrac{l_p}{l_m}\right)^2\left(\dfrac{V_p}{V_m}\right)^2 F_m = 50(\mathrm{N})$

$\dfrac{V_p}{a} = \dfrac{20}{340} \approx 0.06$，$\dfrac{V_m}{a} = \dfrac{120}{340} \approx 0.353$ 压缩性影响改变

西安交通大学流体力学课程组

雷诺相似5

$(\mathrm{Re})_m = (\mathrm{Re})_p \Rightarrow \left(\frac{\rho l V}{\mu}\right)_m = \left(\frac{\rho l V}{\mu}\right)_p$

若选取密度相同的同种流体，有

$\rho_m = \rho_p$，$\mu_m = \mu_p \Rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \frac{L_p}{L_m} = \frac{1}{C_L}$

C_L L_m ↓ V_m ↑

- 模型流动的特征速度太大会导致压缩性影响发生变化。实物流动压缩性可忽略，模型实验不能

降低模型速度方法

- 建造大尺寸风洞，即增大比尺系数

  美国NASA实验风洞（24.4m×12.2m）；

  亚洲最大低速风洞：我国空气动力研究与发展中心实验风洞(8m×6m, 16m×12m).

- 采用压力型风洞，增大实验压力，进而增大实验介质密度

- 低温风洞，降低气体温度，减小动力粘性系数

  90K的氮气作为工作介质

雷诺相似5，例2

飞机实际飞行速度80m/s，大气压强101.3kPa，C_L=1:10。在风洞中进行模型实验，取$V_m = V_p$，$T_m = T_p$。求：(1) 风洞空气工作压强；(2) 如果测得模型阻力4.448N，求实际飞行阻力。

解：(1) 风洞空气工作压强

$(\mathrm{Re})_m = (\mathrm{Re})_p \Rightarrow \left(\frac{\rho l V}{\mu}\right)_m = \left(\frac{\rho l V}{\mu}\right)_p$

由题意 $V_m = V_p$ $l_p = 10 l_m$ $\mu_p = \mu_m$

雷诺相似6

$\Rightarrow \frac{\rho_m}{\rho_p} = \frac{l_p}{l_m} = 10$

状态方程 $\Rightarrow p_m = 10 \times p_p = 1.013 \times 10^6 (\mathrm{Pa})$

(2) 计算阻力

流动相似 $\Rightarrow \left(\frac{F}{\rho l^2 V^2}\right)_m = \left(\frac{F}{\rho l^2 V^2}\right)_p$

$\Rightarrow F_p = \frac{\rho_p}{\rho_m}\left(\frac{l_m}{l_p}\right)^2\left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2 F_m = 44.48(\mathrm{N})$

自模化状态

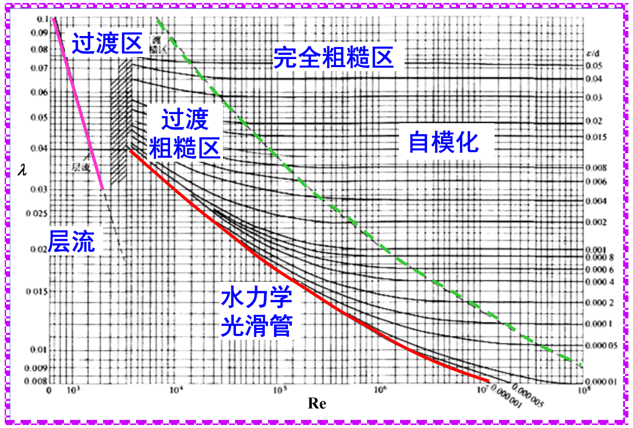
自模化状态

- 流动相似本来决定于某准则数，但当该准则数大于或小于一定程度时，即便该准则数不等，也相似。

- 粘性流动要求雷诺数相等，但当雷诺数大于一定程度时，其不影响流动特性， 阻力仍然相似。

（如P175穆迪图）

自模化



模型实验举例——弗劳德相似

弗劳德相似 ⇒ 明渠流、船舶运动

尺度不十分小，忽略表面张力，不考虑We，不可压缩流体，忽略 Ma

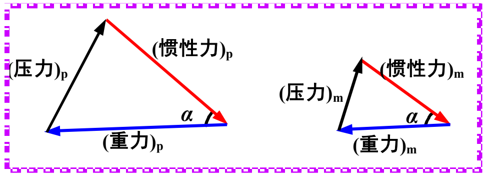
粘性影响可忽略或处在自模化状态，忽略 Re

⇒ 只考虑重力、压力、惯性力

⇒ $(\mathrm{Fr})_m=(\mathrm{Fr})_p$　　$(\mathrm{Eu})_m=(\mathrm{Eu})_p$

弗劳德相似2

Fr数和Eu数，只有一个是决定性准则



- 控制方程组相同，单值条件相似

- 仅保证两种流动对应的弗劳德数相等 $\mathrm{Eu}=f(\mathrm{Fr})$

弗劳德相似3——水面船只阻力

$$F_D = F_{DW} + F_{Df}$$

兴波阻力 ← 弗劳德准则相等的模型实验

摩擦阻力 ← 理论计算获得

弗劳德相似4

$$(\mathrm{Fr})_m = (\mathrm{Fr})_p \Rightarrow \left(\frac{V}{\sqrt{gL}}\right)_m = \left(\frac{V}{\sqrt{gL}}\right)_p$$

一般情况下 $g_p = g_m$

$$\Rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}}$$

- 模型流动特征长度不能太小，否则雷诺数过小，粘性作用发生变化

弗劳德相似5 – 例题

已知某船体长122m， 航行速度15m/s，现用船模在水池中实验船模长3.05m。求船模应以多大速度运动才能保证与原型相似。若测得船模兴波阻力为20N，实物船所受兴波阻力等于多少？

解： (1) 船模速度

$$(\mathrm{Fr})_m = (\mathrm{Fr})_p \Rightarrow \left(\frac{V}{\sqrt{gL}}\right)_m = \left(\frac{V}{\sqrt{gL}}\right)_p$$

由题意 $V_p = 15\mathrm{m/s}$ $l_p = 122\mathrm{m}$ $l_m = 3.05\mathrm{m}$

弗劳德相似5 – 例题

由 $g_p = g_m \Rightarrow V_m = V_p\sqrt{L_m/L_p} = 2.37(\mathrm{m/s})$

(2) 实物船所受兴波阻力

流动相似 $\Rightarrow \left(\frac{F}{\rho l^2 V^2}\right)_m = \left(\frac{F}{\rho l^2 V^2}\right)_p$

由 $\rho_p = \rho_m \Rightarrow F_p = F_m \frac{(VL)_p^2}{(VL)_m^2} = 1.28\times10^6(\mathrm{N})$

其它相似

马赫相似 ⇒ 高速流动

$(\mathrm{Ma})_m = (\mathrm{Ma})_p$ ⇒ $\left(\frac{V}{a}\right)_m = \left(\frac{V}{a}\right)_p$

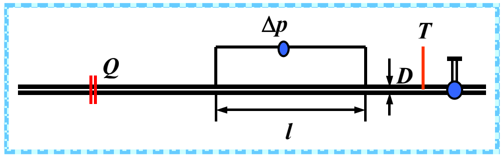
欧拉相似 ⇒ 压差起主要作用

$(\mathrm{Eu})_m = (\mathrm{Eu})_p$ ⇒ $\left(\frac{p}{\rho V^2}\right)_m = \left(\frac{p}{\rho V^2}\right)_p$

7.4 量纲分析法

流体力学研究目的是揭示对关心问题的影响因素（物理量）和之间的关系

不可压流体在水平光滑管内的流动实验

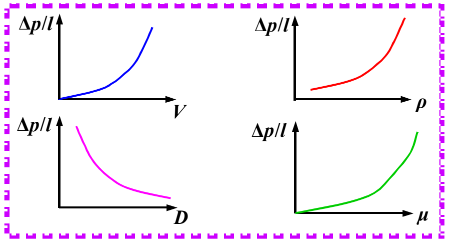


- 影响因素 $\frac{\Delta p}{l} = f(D, \rho, \mu, V)$

量纲分析法2

试验方法：改变一个自变量，保持其余三个不变测量压差；每个变量值需改变多次，重复实验

数据整理



- 这样实验方案工作量大
- 无法给出各自变量与因变量之间直观关系式

量纲分析法2

量纲分析法

根据量纲和谐原理通过合理地组合物理量使其成为量纲为一的组合量，从而减少与一个物理现象有关的变量数目的分析方法

- 可以给出各量纲为一的组合量之间定性关系式
- 减少方程中变量个数
- 减少实验工作量，便于实验结果的推广

量纲与单位

量纲 → 物理量可测量的性质（性质或类型）

- 数值＋单位可以定量地描述量纲

单位 → 测量的标准基元

单位制 国际标准单位制，SI单位制

物理量分类 基本量和导出量

MLtT量纲体系

量纲表示方法 [物理量或符号] dim 物理量或符号

基本量 按一定规范建立测量尺度的量
国际标准（SI）单位制七个基本量

基本量	量纲	单位(SI)
质量	[M]	千克，kg
长度	[L]	米，m
时间	[t]	秒，s
温度	[T]	开尔文，K

MLtT量纲体系2

导出量 → 量纲可以用基本量量纲的组合形式来表示的量。应用定义、定理、关系式获得

$[B]=[M^a L^b t^c T^d]$ a, b, c, d 均为零 ⇒ 无量纲量或无因次量、量纲为一量

导出量	量纲	单位(SI)
V	$[Lt^{-1}]$	m/s
μ	$[ML^{-1}t^{-1}]$	Pa·s
ρ	$[ML^{-3}]$	kg/m^3
p	$[ML^{-1}t^{-2}]$	N/m^2

23页

量纲和谐原理

一个正确而完整地描述物理现象的方程式，其等式两边各项的量纲必须一致

$$a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} c_1^{\gamma_1} + a_2^{\alpha_2} b_2^{\beta_2} c_2^{\gamma_2} + \cdots = X$$

$$\Rightarrow \left[a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} c_1^{\gamma_1}\right] = \left[a_2^{\alpha_2} b_2^{\beta_2} c_2^{\gamma_2}\right] = \cdots = [X]$$

- 量纲分析的基础是量纲和谐原理，是一种定性分析方法

量纲分析法 — 瑞利法1

已知圆管的阻力损失同管径d，流速V，运动粘性系数ν，流体密度ρ有关，求圆管单位长度上压力损失$\Delta p/l$的表达式

解：

- 确定与流动现象有关的参数，并表达成一般函数形式

$$\Delta p/l = f(d, V, \nu, \rho)$$

- 将所求的物理量表达成与之有关的各参量的幂乘积形式

$$\Delta p/l = K d^{\alpha} V^{\beta} \nu^{\gamma} \rho^{\delta}$$

量纲分析法 — 瑞利法2

- 写成各物理量量纲

$$\left[\frac{\Delta p}{l}\right] = \left[ML^{-2}t^{-2}\right] \quad [d] = [L] \quad [V] = \left[Lt^{-1}\right]$$

$$[\nu] = \left[L^2 t^{-1}\right] \quad [\rho] = \left[ML^{-3}\right]$$

- 将各物理量量纲代入关系式得量纲关系关系式

$$\left[ML^{-2}t^{-2}\right] = [L]^{\alpha}\left[Lt^{-1}\right]^{\beta}\left[L^2t^{-1}\right]^{\gamma}\left[ML^{-3}\right]^{\delta}$$

量纲分析法 — 瑞利法3

- 采用量纲和谐原理，即：左右两边基本量纲幂指数一致，求出各待定幂指数，

$$\left[ML^{-2}t^{-2}\right] = [L]^{\alpha}\left[Lt^{-1}\right]^{\beta}\left[L^2t^{-1}\right]^{\gamma}\left[ML^{-3}\right]^{\delta}$$

基本量（质量、长度、时间）量纲两端分别一致

$[M] \Rightarrow \delta = 1$

$[L] \Rightarrow \alpha + \beta + 2\gamma - 3\delta = -2$

$[t] \Rightarrow -\beta - \gamma = -2$

量纲分析法 — 瑞利法3

取 γ 作为参变量 $\Rightarrow$ $\alpha = -1-\gamma$，$\beta = 2-\gamma$，$\delta = 1$

- 求得的幂指数代回幂乘积形式关系式

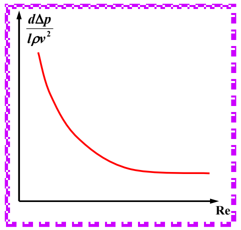
$$\frac{\Delta p}{l} = K d^{-1-\gamma} V^{2-\gamma} \nu^{\gamma} \rho = K\frac{\rho v^2}{d}\left(\frac{\nu}{dV}\right)^{\gamma}$$

- 整理成简单明了的关系式

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{\rho v^2}{d} f(\mathrm{Re})$$

量纲为一量尽量整理成常见的准则数形式

实验得到大大简化，一根实验管，一种流体，只需改变速度以改变 Re 即可得相应的曲线



量纲分析法 — 瑞利法3

瑞利法只适用于参数较少的流动问题

基本量纲 M，L，t，T ⟹ 四个方程

$$\frac{\Delta p}{l}=K\frac{\rho v^{2}}{d}\left(\frac{\nu}{dV}\right)^{\gamma}$$

- 量纲分析法只能做定性分析

量纲分析法 — 白金汉法1

Π 定理

设影响流动的变量为 n 个，其基本量纲 m 个

$$F(A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n)=0$$

可将这些变量组成 $n-m$ 个无量刚（量纲为一）量

$$\Rightarrow f(\Pi_1,\Pi_2,\Pi_3,\cdots,\Pi_{n-m})=0$$

其中，Π_i 为无量纲（量纲为一）量

量纲分析法 — 白金汉法2

- Π为独立（重复）变量与某个非独立变量的组合

设A_1，A_2，A_3为独立（重复）变量

$$\Rightarrow \Pi_i=A_1^{\alpha_i}A_2^{\beta_i}A_3^{\gamma_i}A_i$$

独立（重复）变量：
- 彼此之间不能组成无量纲量
- 数量一般等于基本量纲数 m
- m 个独立变量必须包含所有的 m 个基本量纲
- 通常选取特征变量

量纲分析法 — 白金汉法3

- Π的数目与独立变量数有关，是唯一的，一般等于 n-m 个
- Π的形式不是唯一的，任意Π的乘积、商、n 次幂都可以组成新的Π

$$\Pi_4=\frac{2\Pi_1}{\Pi_2\Pi_3},\Pi_5=\frac{\Pi_1^{2}}{\Pi_3^{3/4}}$$

量纲分析法－白金汉法4

试用白金汉方法确定不可压流体在均直粗糙圆管内定常流动时沿管道的压降Δp与l，v，ρ，d，Δ，μ的关系式。

- 列出影响流动的各变量，写成一般函数关系式

$$F(\Delta p, V, l, d, \rho, \mu, \Delta) = 0$$

- 列出各变量的量纲

$\dim \Delta p = ML^{-1}t^{-2}$　$\dim V = Lt^{-1}$　$\dim l = L$　$\dim d = L$

$\dim \rho = ML^{-3}$　$\dim \mu = ML^{-1}t^{-1}$　$\dim \Delta = L$

量纲分析法－白金汉法5

- 根据含有的基本量纲确定独立变量个数，选择独立变量

三个基本量纲，则独立变量可选

$\Rightarrow$ ρ ，d ，V

- 将非独立变量和独立变量组合，列出 Π_i的表达式：n-m个

$$\Pi_1 = \rho^{\alpha_1} d^{\beta_1} V^{\gamma_1} \mu \qquad \Pi_2 = \rho^{\alpha_2} d^{\beta_2} V^{\gamma_2} \Delta$$

$$\Pi_3 = \rho^{\alpha_3} d^{\beta_3} V^{\gamma_3} l \qquad \Pi_4 = \rho^{\alpha_4} d^{\beta_4} V^{\gamma_4} \Delta p$$

量纲分析法－白金汉法6

- 将各量量纲代入和Π_i的表达式，分别建立量纲关系式，利用量纲和谐原理，确定幂指数

$$\Pi_1 = \rho^{\alpha_1} d^{\beta_1} V^{\gamma_1} \mu$$

$$M^0 L^0 t^0 = (ML^{-3})^{\alpha_1} (L)^{\beta_1} (Lt^{-1})^{\gamma_1} (ML^{-1}t^{-1})$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} [M]&: \alpha_1 + 1 = 0 \\ [L]&: -3\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - 1 = 0 \\ [t]&: -\gamma_1 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= -1 \\ \beta_1 &= -1 \\ \gamma_1 &= -1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Pi_1 = \rho^{\alpha_1} d^{\beta_1} V^{\gamma_1} \mu = \rho^{-1} d^{-1} V^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho V d} = \frac{1}{\mathrm{Re}}$$

量纲分析法－白金汉法7

$$\Pi_2 = \rho^{\alpha_2} d^{\beta_2} v^{\gamma_2} \Delta$$

$$M^0 L^0 t^0 = (ML^{-3})^{\alpha_2} (L)^{\beta_2} (Lt^{-1})^{\gamma_2} (L)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} [M]&: \alpha_2 = 0 \\ [L]&: -3\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + 1 = 0 \\ [t]&: -\gamma_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_2 &= 0 \\ \beta_1 &= -1 \\ \gamma_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Pi_2 = \rho^{\alpha_2} d^{\beta_2} V^{\gamma_2} \Delta = \rho^0 d^{-1} V^0 \Delta = \frac{\Delta}{d}$$

量纲分析法－白金汉法8

$$\Pi_3=\rho^{\alpha_3}d^{\beta_3}v^{\gamma_3}l$$

$$M^0L^0t^0=(ML^{-3})^{\alpha_3}(L)^{\beta_3}(Lt^{-1})^{\gamma_3}(L)$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}[M]:\ -\gamma_3=0\\ [L]:\ -3\alpha_3+\beta_3+\gamma_3+1=0\\ [t]:\ \alpha_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}\alpha_3=0\\ \beta_3=-1\\ \gamma_3=0\end{array}$$

$$\Rightarrow\ \Pi_3=\rho^{\alpha_3}d^{\beta_3}V^{\gamma_3}l\ =\rho^0d^{-1}V^0l\ =\frac{l}{d}$$

量纲分析法－白金汉法9

$$\Pi_4=\rho^{\alpha_4}d^{\beta_4}v^{\gamma_4}\Delta p$$

$$M^0L^0t^0=(ML^{-3})^{\alpha_4}(L)^{\beta_4}(Lt^{-1})^{\gamma_4}(ML^{-1}t^{-2})$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}[M]:\ \alpha_4+1=0\\ [L]:\ -3\alpha_4+\beta_4+\gamma_4-1=0\\ [t]:\ -\gamma_4-2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}\alpha_4=-1\\ \beta_4=0\\ \gamma_4=-2\end{array}$$

$$\Rightarrow\ \Pi_4=\rho^{\alpha_4}d^{\beta_4}V^{\gamma_4}\Delta p=\rho^{-1}d^0V^{-2}\Delta p\ =\frac{\Delta p}{\rho V_2}=Eu$$

量纲分析法－白金汉法6

- 建立函数关系式 $f\left(\Pi_1,\Pi_2,\cdots\Pi_{n-m}\right)=0$

$$f\left(\mathrm{Re},\frac{\Delta}{d},\frac{l}{d},\frac{\Delta p}{\rho V^2}\right)=0$$

量纲为一量尽量整理成常见的准则数形式

- 或显函数形式 $\Pi_1=g\left(\Pi_2,\cdots\Pi_{n-m}\right)$

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2}=G\left(\mathrm{Re},\frac{\Delta}{d},\frac{l}{d}\right)$$

量纲分析法的意义

- 减少变量数目，从而简化流动问题实验研究
- 定性的分析方法，为实验研究提供要信息

作业

作业：P.279～282

- 7－6
- 7－8
- 7－9
- 7－14
- 7－16
- 7－21

小结1

力学相似的基本概念

几何相似、运动相似、动力相似

准则数－惯性力与某种力的比

Re，Ma，Fr，Eu，We

相似性质

小结2

完全相似与部分相似

雷诺相似、弗劳德相似

量纲分析法－量纲和谐原理

瑞利法、白金汉法

小结3

公式

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho VL}{\mu}\qquad \mathrm{Re}=\frac{VL}{\nu}\qquad \mathrm{Ma}=\frac{v}{a}$$

$$\mathrm{Eu}=\frac{\Delta p}{\rho V^2}\qquad \mathrm{Fr}=\frac{V}{\sqrt{gL}}\qquad \mathrm{We}=\frac{\rho V^2 L}{\sigma}$$