第 12 章 （之 7）（总第 71 次）

教学内容：§12.5 第一型曲面积分的计算

1. 选择题：

**(1).设Σ为平面$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$在第一卦限的部分，则$\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\dfrac{4}{3}y)dS=$(　　)

(A). $4\int_0^2 dx\int_0^{3(1-\frac{x}{2})}dy$　　　(B). $\dfrac{\sqrt{61}}{3}4\int_0^2 dx\int_0^{3(1-\frac{x}{2})}dy$

(C). $\dfrac{\sqrt{61}}{3}4\int_0^{2(\frac{y}{3}-1)}dx\int_0^3 dy$　　　(D). $\dfrac{\sqrt{61}}{3}4\int_0^2 dx\int_0^3 dy$

答：(B).

**(2). 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$在$z\geqslant h$部分，$0<h<a$，则$\iint\limits_{\Sigma}zdS=$　　　(　　)

(A). $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a^2-h^2}\sqrt{a^2-\rho^2}\rho d\rho$;　　　(B). $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\sqrt{a^2-\rho^2}\rho d\rho$;

(C). $\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-\sqrt{a^2-h^2}}^{\sqrt{a^2-h^2}}a\,\rho d\rho$;　　　(D). $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}a\,\rho d\rho$.

答：(D).

2. 填空题:

**(1). 已知椭球面$\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{9}y^2+z^2=1$的面积为$A$，

则曲面积分 $\displaystyle\oiint\limits_{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1}(3x+2y-6z+1)^2\mathrm{d}S=$_______________.

答：$37A$．可根据积分区域的对称性和被积函数（关于某个变量的）奇偶性来解.

$$\oiint\limits_{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1}(3x+2y-6z+1)^2\mathrm{d}S$$

$$=\oiint\limits_{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1}(9x^2+4y^2+36z^2+1-24yz-36zx+12xy+6x+4y-12z)\mathrm{d}S$$

$$=36\oiint\limits_{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1}(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2)\mathrm{d}S+\oiint\limits_{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1}\mathrm{d}S=37\oiint\limits_{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1}\mathrm{d}S=37A.$$

(2). 设$\sum: x^2+y^2+z^2=R^2$,则$\iint\limits_{\Sigma}z^2dS=$__________.

答：$\dfrac{4}{3}\pi R^4$

3．计算下列曲面面积

**(1). 试求半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 被抛物面 $x^2+y^2=z$ 所截

而适合 $z\ge x^2+y^2$ 的一部分曲面 Σ 的面积 S.

解：$S=\iint\limits_{\Sigma}dS$，而 Σ 在 xoy 面上的投影域为 D：$x^2+y^2\leqslant 1$.

面积元素为 $dS=\sqrt{1+\left(\dfrac{-x}{2-x^2-y^2}\right)^2+\left(\dfrac{-y}{2-x^2-y^2}\right)^2}dxdy=\dfrac{\sqrt{2}dxdy}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$.

$$\therefore\quad S=\sqrt{2}\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^1\frac{\rho d\rho}{\sqrt{2-\rho^2}}=\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\pi\text{。}$$

**(2). 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上被柱面 $z^2=2y$ 截下的那一部分面积 S .

解：锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2y$ 在 xoy 面投影曲面为

$$\begin{cases}z=0\\x^2+y^2=2y\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}z=0\\x^2+(y-1)^2=1\end{cases}.$$

$$\therefore S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\sqrt{2}\pi\ .$$

**(3). Ω 由柱面 $x^2+y^2=9$,平面 $4y+3z=12$ 和 $4y-3z=12$ 围成,计算 Ω 的表面积 S .

解：平面 $4y+3z=12$ 和 $4y-3z=12$ 截下的柱面 $x^2+y^2=9$ 在 yoz 面的投影

$$D_1=\left\{(y,z)\middle|\, y\ge 1, z\le 4-\frac{4}{3}y, z\ge\frac{4}{3}y-4\right\},$$

平面 $4y+3z=12$ 和 $4y-3z=12$ 与 $x^2+y^2=9$ 相交部分在 xoy 面投影是

$$D_2: x^2+y^2\le 9\ .$$

$$S=\iint\limits_{D_1}\sqrt{1+{x_y}^2+{x_z}^2}dydz+\iint\limits_{D_2}\sqrt{1+{z_y}^2+{z_x}^2}dxdy\ ,$$

由对称性得

$$S=4\int_{-3}^{3}dy\int_0^{4-\frac{4}{3}y}\sqrt{1+\frac{y^2}{9-y^2}}dz+2\iint_{x^2+y^2\le 9}\sqrt{1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}dxdy$$

$$=48\pi+30\pi=78\pi\ .$$

**(4), $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+z^2\le R^2,y^2+z^2\le R^2\right\}$,计算$\Omega$的表面积$S$.

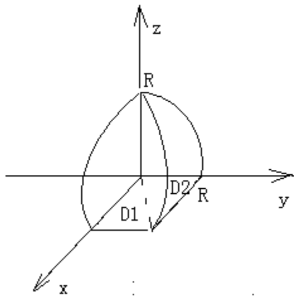
解：解法一　$z^2=R^2-x^2$，　　$\therefore z=\sqrt{R^2-x^2}$，

$$A_1=\iint_{D_1}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dxdy$$

$$=\int_0^R dx\int_0^x\sqrt{\frac{x^2}{R^2-x^2}}dy$$

$$=\int_0^R x\sqrt{\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx$$

$$\overset{x=R\sin\theta}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\sin\theta\frac{R}{R\cos\theta}R\cos\theta d\theta=R^2$$



$z=\sqrt{R^2-y^2}$，$A_2=\iint_{D_2}\sqrt{1+\frac{y^2}{R^2-y^2}}dxdy=\int_0^R dy\int_0^y\sqrt{\frac{R^2}{R^2-y^2}}dx=R^2$.

$\therefore\quad S=16R^2$

解法二

$y^2+z^2=R^2$，　　$\therefore y=\sqrt{R^2-z^2}$，

$$\frac{S}{16}=\iint_{D_{zx}}\frac{R}{\sqrt{R^2-z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=R\int_0^R\frac{1}{\sqrt{R^2-z^2}}\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\mathrm{d}x=R^2$$

$\therefore\quad S=16R^2$。

4．计算下列曲面积分:

**(1). $\iint_S xyz\,dS$，其中 S 为球面　$x^2+y^2+z^2=R^2$　在第一卦限的部分.

解　：$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

$$\therefore \iint_{s} xyzdS = \iint_{Dxy} xy\sqrt{R^2-x^2-y} \cdot \sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\, dxdy$$

$$= R\iint_{Dxy} xydxdy = R\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} xydxdy = \frac{1}{8}R^5 .$$

**(2). $\oiint_S (x^2+y^2)dS$，其中 S 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 及平面 $z=1$ 所围成区域的边界曲面.

解：$\oiint_S (x^2+y^2)dS = \iint_{S_1}(x^2+y^2)dS + \iint_{S_2}(x^2+y^2)dS$，

S_1 是 $\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2 \le 1 \end{cases}$ 围成的平面区域,

$$\iint_{S_1}(x^2+y^2)dS = \iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy = \frac{\pi}{2}$$

S_2 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 夹在平面 $z=1$ 与 $z=0$ 之间的部分，

$$\iint_{S_2}(x^2+y^2)\ ds = \iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2 dxdy}$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

原式 $= \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\pi$.

**(3). 计算 $\iint_{\Sigma} \dfrac{z}{\sqrt{9+4x^2+4y^2}}dS$ 其中Σ是曲面 $z=\dfrac{1}{3}(x^2+y^2)$ 中介于 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分曲面.

解：Σ在 xoy 面上的投影域为 D：$x^2+y^2 \leqslant 6$，

面积元素：$dS = \dfrac{1}{3}\sqrt{9+4x^2+4y^2}dxdy$.

$$\therefore \iint_{\Sigma} = \frac{1}{9}\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \frac{1}{9}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{6}} \rho^3 d\rho = \frac{1}{9}\cdot 2\pi \cdot \frac{(\sqrt{6})^4}{4} = 2\pi .$$

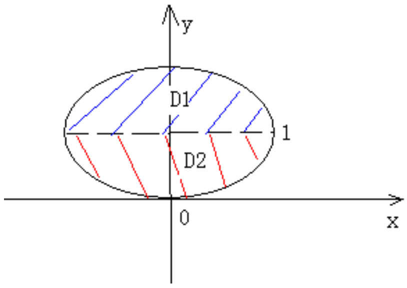
第 12 章 （之 8）（总第 72 次）

教学内容 ： §12．6 多元函数积分的应用

**1．求平面薄板 D 的质量：其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+(y-1)^2 \le 1\right\}$,

而密度函数 $\mu = y + |y-1|$.

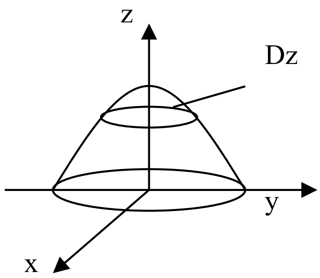
解：



$$
\begin{aligned}
m &= \iint_D \mu d\sigma = \iint_{D_1} \mu d\sigma + \iint_{D_2} \mu d\sigma \\
&= \iint_{D_1} (2y-1) d\sigma + \iint_{D_2} 1 d\sigma \\
&= \int_{-1}^{1} dx \int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2}} (2y-1) dy + \frac{1}{2}\pi \\
&= \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{4}{3} + \pi
\end{aligned}
$$

**2．计算立体 $\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \le z \le 1-(x^2+y^2)\}$ 的形心坐标.

解：由对称性可知 $\bar{x} = \bar{y} = 0$。



$$
\bar{z} = \frac{\iiint_\Omega z dv}{\iiint_\Omega dv} = \frac{\int_0^1 dz \iint_{D_z} z dx dy}{\int_0^1 dz \iint_{D_z} dx dy} = \frac{\int_0^1 \pi z(1-z) dz}{\int_0^1 \pi(1-z) dz} = \frac{1}{3}
$$

这里 $D_z = \{(x,y) \mid 0 \le x^2 + y^2 \le 1-z\}$.

***3．质量为 M 的匀质圆锥体 Ω，由锥面 $Rz = H\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z = H$ 围成，试求：

（1）质心坐标；　　（2）关于中心轴的转动惯量；

解：设 Ω 的密度为 μ，则 $\mu = \frac{M}{V}$．由于 $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$，知 $\mu = \frac{3M}{\pi R^2 H}$，

（1）由对称性可知 $\bar{x} = \bar{y} = 0$，

$$
\bar{z} = \frac{\iiint_\Omega z dv}{M} = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \int_{\frac{H}{R}\rho}^{H} z\rho dz}{M} = \frac{\frac{1}{4}\pi R^2 H^2}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} = \frac{3}{4}H .
$$

（2）$I_z = \mu \iiint_\Omega (x^2+y^2) dv = \mu \iiint_\Omega \rho^3 d\rho d\varphi dz = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \int_{\frac{H}{R}\rho}^{H} \rho^3 dz$

$$
= \frac{\mu}{10}\pi H R^4 = \frac{3}{10} R^2 M .
$$

**4．若已知双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta \ (-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4})$，其上任一点处的密度，

等于该点到原点的距离，求该双纽线关于极轴的转动惯量.

解：双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta(-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4})$，其上任一点密度为 $\mu(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

该双纽线关于极轴的转动惯量为：

$$I_x = \int_L y^2\sqrt{x^2+y^2}ds = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta \sin^2\theta \sqrt{a^2\cos 2\theta}\sqrt{\frac{a^2}{\cos 2\theta}}d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^4\cos 2\theta\sin^2\theta d\theta = 2a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 4\theta)d\theta = \frac{a^4}{8}(4-\pi)$$ 。

***5．已知摆线 $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)(0 \le t \le 2\pi)$ 上任一点 (x,y) 处密度

等于该点的纵坐标，试求：

（1）该摆线弧的质量；　　　（2）该摆线弧的质心坐标；

（3）该摆线弧关于 x 轴的转动惯量.

解：摆线 $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)(0 \le t \le 2\pi)$ 其上任一点 (x,y) 处密度 $u(x,y) = y$.

（1）质量：$m = \int_L u(x,y)ds = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot\sqrt{[x'(t)^2]+[y'(t)]^2}dt$

$$= \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot\sqrt{2}a\cdot\sqrt{1-\cos t}dt = \sqrt{2}a^2\int_0^{2\pi}2\sqrt{2}\sin^3\frac{t}{2}dt$$

$$= 8a^2\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta = 16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta = 16a^2\cdot\frac{2!!}{3!!} = \frac{32}{3}a^2$$

（2）由对称性可知 $\bar{x} = \pi a$，

$$m_x = \int_L yu(x,y)ds = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot\sqrt{2}a^2(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{2}a^3(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}dt = \frac{256}{15}a^3$$

$$\bar{y} = \frac{m_x}{m} = \frac{8}{5}a\ ,$$

∴　质心坐标为 $(\pi a, \frac{8}{5}a)$.

（3）该摆线弧关于 x 轴的转动惯量

$$I_x=\int_L y^2u(x,y)ds=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot\sqrt{2}a^2(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt$$

$$=\sqrt{2}a^4\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{7}{2}}d\theta=\frac{1024}{35}a^4$$

** 6. 求单叶双曲面壳 $x^2+y^2-z^2=1(|z|\le 1)$关于 z 轴的转动惯量.

已知其密度为 $\mu=\frac{|z|}{x^2+y^2}$.

解：$I_z=\iint\limits_S(x^2+y^2)\mu ds=\iint\limits_S(x^2+y^2)\frac{|z|}{x^2+y^2}ds=2\iint\limits_{S上}(x^2+y^2)\frac{z}{x^2+y^2}ds$

$$=2\iint\limits_D(x^2+y^2)\frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{x^2+y^2}\sqrt{\frac{2x^2+2y^2-1}{x^2+y^2-1}}dxdy$$

$$=2\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 2}\sqrt{2x^2+2y^2-1}dxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2\rho^2-1}\rho d\rho=\frac{2}{3}\pi(3\sqrt{3}-1)$$

**7. 设锥面壳 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le 1)$上点$(x,y,z)$处的密度为 $\mu=z$，

求：（1） 锥面壳的质量； （2） 锥面壳的质心坐标；

（3）锥面壳关于 z 轴的转动惯量.

解：（1） $m=\iint\limits_S zdS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{2}r^2dr=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$.

（2） $Dxy: x^2+y^2\le 1$，

由对称性,得 $\bar{x}=0$, $\bar{y}=0$，

$$\bar{z}=\frac{\iint\limits_S z\mu ds}{\iint\limits_S \mu ds}=\frac{\iint\limits_S z^2ds}{\iint\limits_S zds}=\frac{\sqrt{2}\iint\limits_{Dxy}x^2+y^2dxdy}{\iint\limits_{Dxy}\sqrt{x^2+y^2}dxdy}$$

$$=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2dr}=\frac{3}{4}\text{。}$$

所以质心坐标（ $0,0,\frac{3}{4}$ ）.

（3） $I_z=\iint\limits_S(x^2+y^2)zds=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{2}r^4dr=\frac{2\sqrt{2}}{5}\pi$.

第 13 章 （之 1）（总第 73 次）

教学内容：§13.1 第二型曲线积分

**1．设 $L:\begin{cases} x=\sqrt{\cos \mathrm{t}}, \\ y=\sqrt{\sin t}, \end{cases}$ $0\le t\le \dfrac{\pi}{2}$，则 $\int_L x^2 y\mathrm{d}y-y^2 x\mathrm{d}x=$ （　　）

（A）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos t\sqrt{\sin t}-\sin t\sqrt{\cos t}\right]\mathrm{d}t$；　　（B）$\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos^2 t+\sin^2 t\right]\mathrm{d}t$；

（C）$\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos t-\sin t\right]\mathrm{d}t$；　　（D）$\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos^2 t-\sin^2 t\right]\mathrm{d}t$.

答：(B).

2．计算下列曲线积分：

**（1）计算 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 的逆时针方向.

解：令 $x=a\cos t, y=a\sin t$, 则：$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi} dt=2\pi$.

**（2） 计算 $\int_L (2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$ ，其中 L 是曲线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 的一段弧.

解： 原式 $=\int_0^{2\pi}[(a+a\cos t)a(1-\cos t)+a(t-\sin t)a\sin t]\mathrm{d}t$

$$= a^2\int_0^{2\pi} t\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= -2\pi a^2.$$

**（3）计算 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 是从 $O(0，0)$沿曲线 $x=\begin{cases}\sqrt{y}, 0\leqslant y\leqslant 1, \\ 2-y, 1<y\leqslant 2\end{cases}$ 到 $B(0，2)$.

解： L_1： $x=\sqrt{y}$， $0\leqslant y\leqslant 1$；

L_2： $x=2-y$， $1\leqslant y\leqslant 2$；

$$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}y = \int_{L1}+\int_{L2}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 (y+y^2)\mathrm{d}y+\int_1^2[(2-y)^2+y^2]\mathrm{d}y$$

$$= \frac{5}{6}+\frac{8}{3}$$

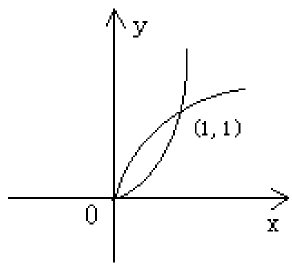
$$= \frac{7}{2}.$$

**（4）$\oint_L \frac{x}{x+1}dx+2xydy$，其中 L 是由 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x^2$ 构成的简单闭曲线.

解：$\oint_L \frac{x}{x+1}dx+2xydy$

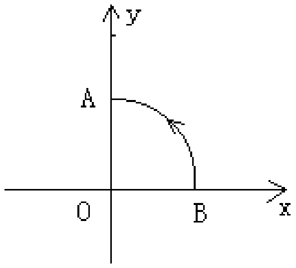
$$=\int_0^1(\frac{x}{x+1}+4x^4)dx+\int_1^0(\frac{x}{x+1}+x)dx$$

$$=\int_0^1(4x^4-x)dx=(\frac{4}{5}x^5-\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1=\frac{3}{10}$$



**（5）$\int_L \frac{x^2y^{\frac{3}{2}}dy-xy^{\frac{5}{2}}dx}{(x^2+y^2)^3}$，其中 L 是圆 $x^2+y^2=R^2$ 在第一象限中自点 $B=(R,0)$到点 $A=(0,R)$的弧段$(R>0)$.

解：$\displaystyle\int_L \frac{x^2 y^{\frac{3}{2}} dy - x y^{\frac{5}{2}} dx}{(x^2+y^2)^3} \underset{0\le t\le\frac{\pi}{2}}{\overset{x=R\cos\theta}{\underset{y=R\sin\theta}{=}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^{\frac{9}{2}} \sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos\theta}{R^6} d\theta$



$$= \frac{1}{R^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}}\theta \, d\sin\theta = \frac{2}{5R\sqrt{R}} .$$

**3. 分别计算质点在力 $\vec{f} = y^2\,\vec{i} + 2xy\,\vec{j}$ 作用下，沿下列各种路径自点 $A=(0,0)$移动到 $B=(1,1)$时，f 所作的功：

（1） $y = x^{\alpha}(\alpha > 0)$； （2） $x = \dfrac{e^y - 1}{e-1}$； (3) $y = \tan\dfrac{\pi x}{4}$.

解：力 $\vec{f} = y^2\cdot\vec{i} + 2xy\vec{j}$. $A=(0,0)$, $B=(1,1)$，

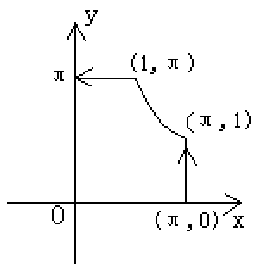
（1） $W_1 = \int_{L_1} y^2dx + 2xydy = \int_0^1 \left[x^{2\alpha} + 2x\cdot x^{\alpha}\cdot\alpha\cdot x^{\alpha-1}\right]dx = \int_0^1 (1+2\alpha)x^{2\alpha}dx = 1$.

（2） $W_2 = \int_{L_2} y^2dx + 2xydy = \int_0^1 \left[y^2\cdot\dfrac{e}{e-1} + 2\cdot\dfrac{e^y-1}{e-1}\cdot y\right]dy = \dfrac{1}{e-1}y^2(e^y-1)\Big|_0^1 = 1$.

(3) $W_3 = \int_{L_3} y^2dx + 2xydy = \int_0^1 \left(\tan^2\dfrac{\pi}{4}x + 2x\tan\dfrac{\pi}{4}x\cdot\sec^2\dfrac{\pi}{4}x\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)dx$

$$= \left[\frac{4}{\pi}\tan\frac{\pi}{4}x - x + x\tan^2\frac{\pi x}{4} - \frac{4}{\pi}\tan\frac{\pi}{4}x + x\right]_0^1 = 1 .$$

**4. 计算曲线积分 $\int_L y\cos(xy)dx + x\sin(xy)dy$，其中 L 自点 $A=(\pi,0)$沿直线到点 $B=(\pi,1)$，在沿双曲线 $xy=\pi$ 到点 $C=(1,\pi)$，又沿直线到点 $D=(0,\pi)$.



解：$\int_L y\cos(xy)dx + x\sin(xy)dy$

$$= \int_0^1 \pi\sin\pi y dy + \int_{\pi}^1 \left[\frac{\pi}{x}\cos\pi + x\sin\pi\cdot(-\frac{\pi}{x^2})\right]dx + \int_1^0 \pi\cos\pi x dx$$

$$= (-\cos\pi y)\Big|_0^1 + (-\pi\ln x)\Big|_{\pi}^1 + \sin\pi x\Big|_1^0 = 2 + \pi\ln\pi .$$

***5. 质点在力场 f 的作用下，从点 $A=(a,0)$沿椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$在第一象限内运动到点

$B=(0,b)$，试求力场 f 所作的功．假定在任一点 $P=(x,y)$ 处 f 的大小等于 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

而方向指向原点．

解：$\vec{f}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i}+\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}\right)=\dfrac{-x\vec{i}-y\vec{j}}{x^2+y^2}$

$$w=\int_L \vec{f}d\vec{s}=\int_L \frac{-x}{x^2+y^2}dx+\frac{-y}{x^2+y^2}dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-a\cos t(-a\sin t)-b\sin t(b\cos t)}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(a^2-b^2)\sin t\cos t}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}dt=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(b^2-a^2)d\sin^2 t}{a^2+(b^2-a^2)\sin^2 t}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left[a^2+(b^2-a^2)\sin^2 t\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}(\ln b^2-\ln a^2)=\ln\frac{a}{b}.$$

**6．计算曲线积分 $\boldsymbol{I}=\int_C \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$，其中 C 是曲线 $\boldsymbol{r}(t)=t\,\boldsymbol{i}+t^2\,\boldsymbol{j}+t^3\,\boldsymbol{k}$ 自点 $(0,0,0)$ 到点

$(1,1,1)$，而向量场 f 为：$\boldsymbol{f}(x,y,z)=2xz\,\boldsymbol{i}-xy\,\boldsymbol{j}+yz^2\,\boldsymbol{k}$．

解：
$$\begin{cases}x=t\\ y=t^2 & t:0\to 1\\ z=t^3\end{cases}$$

$$I=\int_0^1\left(2t\cdot t^3-t\cdot t^2\cdot 2t+t^2\cdot t^6\cdot 3t^2\right)dt$$

$$=\int_0^1\left(2t^4-2t^4+3t^{10}\right)dt=\frac{3}{11}.$$

**7．计算曲线积分：$\int_C \dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 C 为曲线 $x=t\cos t$，$y=t\sin t$，$z=t$

（$\pi\le t\le 2\pi$）．

解：原式$=\displaystyle\int_\pi^{2\pi}\frac{t\cos t(\cos t-t\sin t)+t\sin t(\sin t+\cos t)}{\sqrt{t^2+t^2}}dt=\int_\pi^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}dt=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$．