Révisions modern physics – partie 2

Rayonnement d'équilibre thermique

- Exemples d'objets émettant un rayonnement de corps noir :

  étoile, métal en fusion, être humain, ampoule à incandescence, fond diffus cosmologique ...

- Le spectre de Planck $u(\lambda, T)$ est en $J/m^3/m$:
  $u_\omega(\omega, T)$ ... $J/m^3/Hz$

  l'énergie volumique (J/m^3) dU entre λ et $\lambda + d\lambda$ est $dU = u(\lambda, T)\, d\lambda$
  ω ... $\omega + d\omega$ ... $dU = u_\omega(\omega, T)\, d\omega$

- pour un gaz de photons dans une boîte, le nombre de photons N peut varier sans changement d'énergie (par absorption de photons $h\nu_1$, $h\nu_2$ et émission d'1 seul photon $h(\nu_1 + \nu_2)$)
  donc le potentiel chimique est nul

  énergie interne

$$\mu = \frac{\partial U}{\partial N} = 0$$

- les conditions aux limites périodiques imposent

$$k_i = \frac{2\pi}{L} \cdot n_i \, , \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad i \in \{x, y, z\}$$

  (voir TD4 et cours)

- on compte le nombre d'états (voir TD4 et notes de cours)

$$dN = \underbrace{2}_{\text{spin}} \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3}}_{\text{densité de modes}} \underbrace{4\pi k^2 \, dk}_{\text{volume de la coquille entre } k \text{ et } k+dk} = \underbrace{\frac{L^3}{\pi^2} k^2}_{g(k)} dk$$

- à partir de la fonction de partition d'un gaz de photons on calcule

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \mu=0 \\ \text{donc } \frac{\mu}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_G = 0}}{\langle E \rangle =} -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_G = V\int_0^\infty d\omega \, \frac{1}{\pi^2 c^3}\,\omega^2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)}_{}$$

$$\frac{\hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} \times \frac{e^{\beta\hbar\omega}}{e^{\beta\hbar\omega}} = \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} \qquad (\ln f)' = \frac{f'}{f}$$

$$= V\int_0^\infty d\omega \underbrace{\frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\,\omega^3 \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}}_{u_\omega(\omega) \text{ énergie/fréquence}}$$

densité d'énergie en fréquence (en $J/m^3/Hz$)

- on veut convertir $u_\omega(\omega,T)$ en $u(\lambda,T)$: $\omega = ck = c\frac{2\pi}{\lambda}$

$$d\omega = c\,2\pi\frac{(-d\lambda)}{\lambda^2}$$

$$u_\omega(\omega,T)\,d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2c^3}\,\omega^3\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\,d\omega = \frac{\overset{h}{\cancel{\hbar}}}{\pi^2 \cancel{c^3}}\,\frac{\cancel{c^3}(2\pi)^3}{\lambda^3}\,\frac{1}{e^{\beta\frac{hc}{\lambda}}-1}\,\frac{c\,\cancel{2\pi}(-d\lambda)}{\lambda^2}$$

$$= \underbrace{\frac{hc}{\lambda^5}\,8\pi\cdot\frac{1}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda}}-1}}_{u_\lambda(\lambda,T) \text{ spectre de Planck}}(-d\lambda)$$

- la limite basse fréquence $\hbar\omega \ll k_BT$ donne

$$u_\omega(\omega,T) = \frac{\hbar}{\pi^2c^3}\,\omega^3\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1} \xrightarrow[\beta\hbar\omega \ll 1]{} \frac{\hbar}{\pi^2c^3}\,\frac{\omega^3}{\beta\hbar\omega} = \underbrace{\frac{k_BT\,\omega^2}{\pi^2c^3}}_{u_\omega^{RJ}}$$

$$e^x - 1 \underset{x\ll 1}{=} x + O(x^2)$$

Rayleigh-Jeans

- La loi de déplacement de Wien relie couleur et température

$$\lambda_{max} \cdot T = 2{,}898 \times 10^{-3} \text{ K.m} = \text{cte}$$

donc si $\lambda_{max,1} > \lambda_{max,2}$, $T_1 < T_2$

ex : pour un être humain $T \approx 300$ K $\rightarrow \lambda_{max} \approx 10\ \mu m$ dans l'infrarouge

d'où les caméras infrarouges

- Avec la loi de Stefan-Boltzmann, la puissance émise par un corps noir de température T et surface S est

$$P = \sigma T^4 . S \quad \propto T^4$$

σ constante de Stefan

- Un corps noir à l'équilibre thermique vérifie $P_a = P_e = \sigma T^4 S$

P_e : puissance émise

P_a : puissance absorbée

Statistiques quantiques

Fermions	Bosons
ils respectent le principe d'exclusion de Pauli ↳ le nombre d'occupation N_i d'un état quantique est $N_i = 0$ ou 1	leur nombre d'occupation N_i peut être quelconque $0, 1, 2, \ldots \in \mathbb{N}$ $N_i \in \mathbb{N}$
ils ont un spin demi-entier $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \ldots$	ils ont un spin entier $0, 1, 2, \ldots$
exemples : proton, électron, neutron	exemple : photon

pour 1 état d'énergie ε_i,
on a $N_i = 0$ ou 1

donc $$Z_{G,i} = \sum_{N_i=0}^{1} e^{-\beta(N_i\varepsilon_i - N_i\mu)}$$

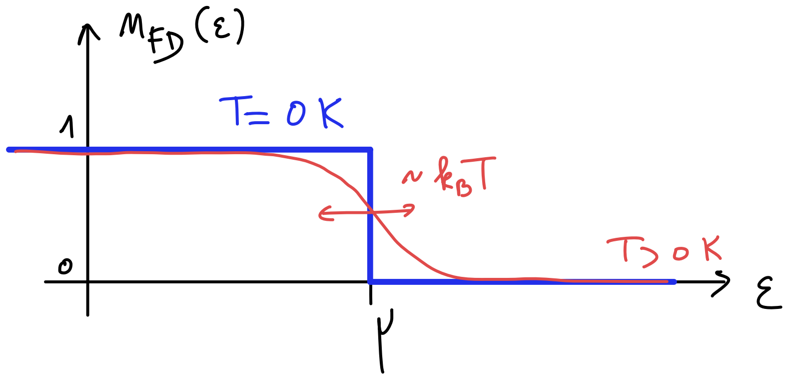
$$\boxed{Z_{G,i} = 1 + e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}}$$

on déduit la moyenne

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_{G,i} = \frac{1}{\beta}\frac{\beta e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}}{e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}+1}$$

$$\langle N_i \rangle = \boxed{\frac{1}{1+e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}} \equiv n_{FD}(\varepsilon_i)}$$

distribution de Fermi-Dirac



pour des niveaux d'énergie continus,

$$\langle N \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \, \rho(\varepsilon) \, n_{FD}(\varepsilon)$$

occupation moyenne

densité d'états

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \, \rho(\varepsilon) \, . \, \varepsilon \, . \, n_{FD}(\varepsilon)$$

pour 1 état d'énergie ε_i,
on a $N_i \in \mathbb{N}$

donc $$Z_{G,i} = \sum_{N_i=0}^{\infty} e^{-\beta(N_i\varepsilon_i - N_i\mu)}$$

$$= \sum_{N_i=0}^{\infty}\left(e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}\right)^{N_i}$$

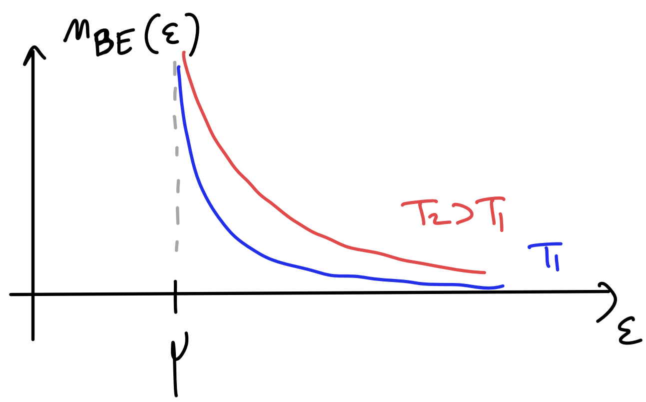
$$\boxed{Z_{G,i} = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}}}$$

on déduit la moyenne

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_{G,i} = -\frac{1}{\beta}\frac{(-\beta)e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}}{1-e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}}$$

$$\langle N_i \rangle = \boxed{\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}-1} \equiv n_{BE}(\varepsilon_i)}$$

distribution de Bose-Einstein



pour des niveaux d'énergie continus,

$$\langle N \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \, \rho(\varepsilon) \, n_{BE}(\varepsilon)$$

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \, \rho(\varepsilon) \, . \, \varepsilon \, . \, n_{BE}(\varepsilon)$$

électrons libres dans un métal :

vitesse de Fermi $v_F \approx 2 \times 10^6$ m/s

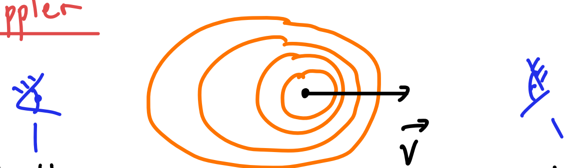
donc $v_F \gg v_{cl} \approx \sqrt{\frac{3 k_B T}{m_e}} = 9{,}5 \times 10^4$ m/s   300 K

théorème d'équipartition (classique)

$\frac{1}{2} m_e \langle v_{cl}^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$

donc les effets quantiques sont importants même à $T = 300$ K pour les électrons libres d'un métal

Effet Doppler



si l'émetteur s'éloigne du récepteur, $\Delta\lambda > 0$, $\Delta f < 0$

si l'émetteur se rapproche du récepteur, $\Delta\lambda < 0$ et $\Delta f > 0$

la formule de l'effet Doppler classique ($v \ll c_{\text{lumière}} = 3 \times 10^8$ m/s)

est
$$f' = f \cdot \frac{1 - \frac{\vec{v}_R \cdot \vec{u}_{ER}}{c}}{1 - \frac{\vec{v}_E \cdot \vec{u}_{ER}}{c}}, \quad \text{avec} \quad \vec{u}_{ER} = \frac{\vec{ER}}{ER}$$

On démontre la formule ci-dessus, lorsque $\vec{v}_R \parallel \vec{u}_{ER}$ et $\vec{v}_E \parallel \vec{u}_{ER}$

et orientés de E vers R $v_E > 0$ (E →) $v_R > 0$ (R →)

vitesse de l'onde dans le référentiel R_R du récepteur R

avec $(c - v_E) T = \lambda_m = (c - v_R) \cdot T'$

vitesse de l'onde dans le référentiel R_E de E

longueur d'onde dans le référentiel au repos R_0

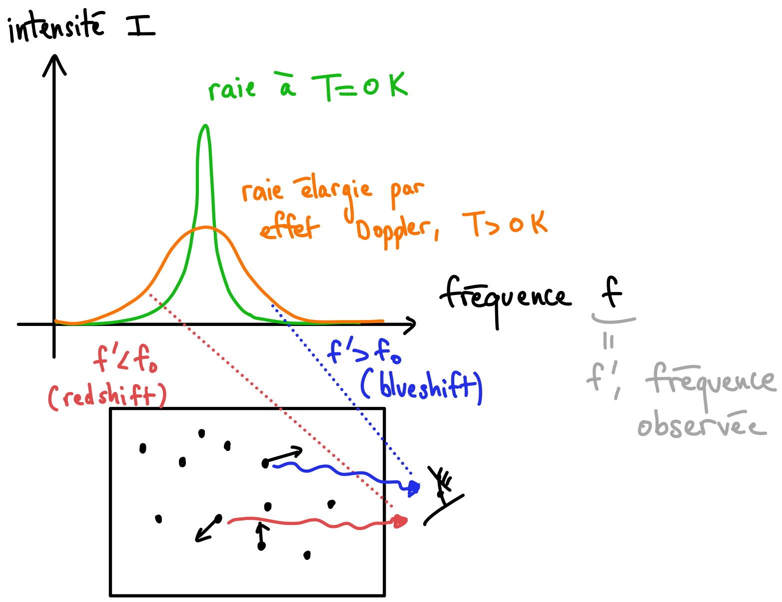
↳ d'où $f' = f \dfrac{c - v_R}{c - v_E} = f \dfrac{1 - \frac{v_R}{c}}{1 - \frac{v_E}{c}}$

$T = \dfrac{1}{f}$

$T' = \dfrac{1}{f'}$

Applications :

- mesurer la vitesse d'une galaxie / exoplanète (voir TD4)
- radar
- échographie
- élargissement des raies spectrales



la dispersion des vitesses $\langle \vec{v}^2 \rangle$ fait que les fréquences mesurées ont aussi une dispersion $\Delta\lambda$

et $\langle \vec{v}^2 \rangle = \dfrac{3 k_B T}{m}$ pour un gaz classique

donc si T augmente, la largeur de raie augmente aussi