# 第 8 章（之 4）

# 第 40 次作业

**教学内容：**§8.2.2 幂级数及其收敛域　§8.2.3 幂级数的性质

1．填空题：

*（1）如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=2$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在开区间__________内收敛。

答：$(-1,\ 3)$

*（2）设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径是 4，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^{2n+1}$ 的收敛半径是_________。

答：2

**（3）设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 上的和函数为 $s(x)$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n c_n x^{n+1}}{n+1}$ 的收敛区间是__________，它在收敛区间上的和函数是 ___________。

解：由条件 $$\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n=s(x)\qquad x\in(-R,R),$$

以 $-x$ 代 $x$，得 $$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(-1)^n x^n=s(-x),$$

两边从 0 到 $x$ 积分，得 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n(-1)^n x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x s(-t)dt$$

即 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n c_n x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x s(-t)dt\qquad x\in(-R,R)。$$

**2．设已知 $x=-1$ 属于幂级数 $a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots$ 的收敛域，问 $x=2$ 以及 $x=3$ 是否一定属于收敛域?试解释之。

解：由于 $x=-1$ 属于幂级数的收敛域，

由此知道收敛半径不小于 $|-1-1|=2$，

而收敛域至少包含有区间 $(-1,3)$，而 $2\in(-1,3)$，$3\notin(-1,3)$，

故可判定 $x=2$ 属于收敛域，而当 $x=3$ 时，却不一定。

2. 求下列幂级数的收敛域：

**（1） $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ ；

解：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，所以收敛半径为 1。

又当 $x=1$ 时幂级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$，发散；当 $x=-1$ 时幂级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$，也发散。所以收敛域为 $(-1,1)$。

**（2） $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$ ；

解：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=1$，所以收敛半径为 1。

又当 $x=1$ 时幂级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$，发散；当 $x=-1$ 时幂级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})(-1)^n$，也发散。所以收敛域为 $(-1,1)$。

**（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{4^n-1}x^{4n-1}$ ；

解：$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{4(n+1)-1}{4^{n+1}-1}x^{4(n+1)-1}}{\frac{4n-1}{4^n-1}x^{4n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n+3)(4^n-1)x^4}{(4n-1)(4\cdot 4^n-1)}=\frac{1}{4}x^4$$

由 $\frac{1}{4}x^4<1$，得 $|x|<\sqrt{2}$，当 $|x|=\sqrt{2}$ 时， 原级数为 $\pm\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{4^n-1}\cdot 2^{\frac{4n-1}{2}}$，

由于 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$，得其发散，

故原幂级数的收敛域为 $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

**（4）试求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3+(-1)^n}{n}\right]^n x^n$ 的收敛域。

解：由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+(-1)^n}{n}|x|=0$，所以 R=＋∞，收敛域是 $(-\infty,\ \infty)$.

**（5） $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^{2n+1}}{2n+1}$ .

解： $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}(x+1)^2=(x+1)^2$ ,

当 $(x+1)^2<1$ 即 $-2<x<0$ 时，级数收敛；当 $(x+1)^2>1$ 即 $x<-2$ 及 $x>0$ 时，

级数发散， 所以收敛半径为 1，即在 $(-2,0)$ 收敛。

当 $x=-2$ 时，原级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ 收敛，

当 $x=0$ 时，原级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛，

所以该幂级数的收敛域为 $[-2,0]$.

***4．求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(e^x-1)^n$ 的收敛域.

解： $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}(e^x-1)^{n+1}}{\frac{(-1)^n}{n}(e^x-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}(e^x-1)\right|=|e^x-1|$ ,

则由 $|e^x-1|<1$ ，得 $-\infty<x<\ln 2$ 。

当 $x=\ln 2$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛。

故收敛域为 $(-\infty,\ln 2]$.

****5．设数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 条件收敛，试证明幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $r=1$ 。

证明：以 $x=1$ 代入幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ，

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛，知收敛半径 $r \geq 1$。

若级数收敛半径 $r > 1$，则由阿贝尔定理知必有在 $(-r, r)$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛，

且 $1 \in (-r, r)$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = 1$ 处绝对收敛，即 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 必绝对收敛。

与条件矛盾。 $\therefore r = 1$.

**6．设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$，试求 $g(x) = \int_0^x x^2 f'(x) dx$ 的麦克劳林级数，并指出收敛域。

解：幂级数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 的收敛域是 $[-1,\ 1]$

当 $x \in (-1,\ 1)$ 时，有 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$，

$$g(x) = \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+2)}.$$

又因为当 $|x| = 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+2)}$ 收敛，

所以 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+2)}$，$x \in [-1,\ 1]$ .

7．求下列幂级数在收敛域内的和函数，并求对应数项级数的和：

**（1）$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$，$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$ ；

解：考虑由 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ $(|x| < 1)$，

两边求导，得 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$，

令 $x = e^{-1}$，得 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n+1} = \frac{1}{(1-e^{-1})^2}$，

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n} = \frac{1}{e\left(1-e^{-1}\right)^2} = \frac{e}{(e-1)^2} .$$

***（2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} x^n$；

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big/\frac{1}{n(n+1)}\right| = 1$，收敛半径为 $r=1$；

当 $x=\pm 1$时，幂级数收敛，所以收敛域为$[-1,1]$.

当$x\neq 0$，$x\neq 1$时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)x^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\ln(1-x)\right) - \frac{1}{2x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x^2}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right).$$

当 $x=0,\ s(0)=0$；$x=1,\ s(1)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$，

$$\therefore s(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ \frac{3}{4}, & x=1 \\ -\frac{1}{2}\ln(1-x)+\frac{\ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2}}{2x^2}, & -1\le x<0,\ 0<x<1 \end{cases}$$

# 第 8 章（之 5）

## 第 41 次作业

**教学内容：**§8.3.1 泰勒级数　　§8.3.2 几个初等函数的麦克劳林级数展开式

***1.　如果 $f(x)$在 $x_0$ 点的某个邻域内任意阶可导，那么幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]$

的和函数为　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　）

(A) 必是 $f(x)$，　(B)不一定是 $f(x)$，　(C)不是 $f(x)$，　(D)可能处处不存在。

答：（B）

**2、　试求 $f(x)=a^{\sin x}\quad (a>0, a\neq 1)$ 的麦克劳林级数至含 $x^3$ 的项。

解：由于　$f'(x)=a^{\sin x}\cdot\cos x\cdot\ln a$

$$f''(x)=\ln^2 a\cdot a^{\sin x}\cdot\cos^2 x-\ln a\cdot\sin x\cdot a^{\sin x}$$

$$f'''(x)=\ln^3 a\cdot\cos^3 x\cdot a^{\sin x}-\ln^2 a\cdot\sin 2x\cdot a^{\sin x}-\ln a\cdot\cos x\cdot a^{\sin x}-\frac{1}{2}\ln^2 a\cdot\sin 2x\cdot a^{\sin x}$$

所以　$f(0)=1$　，　$f'(0)=\ln a$　，　$f''(0)=\ln^2 a$，

$$f'''(0)=\ln a\left(\ln^2 a-1\right).$$

故麦克劳林级数为：

$$1+\ln a\cdot x+\frac{\ln^2 a}{2}x^2+\frac{\ln a\left(\ln^2 a-1\right)}{6}x^3+\cdots\ .$$

****3.　设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 1，试将 $F(x)=\frac{f(x)}{1-x}$ 展开为 $x$ 的幂级数.

解：因为　$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots\cdots,\ x\in(-1,\ 1),$

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots,\ x\in(-1,1)\ .$$

所以　当 $x\in(-1,\ 1)$ 时，有

$$F(x)=(\ 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots\cdots\ )(\ a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots\ )$$

$$=a_0+(a_0+a_1)x+(a_0+a_1+a_2)x^2+(a_0+a_1+a_2+a_3)x^3+\cdots$$

$$+(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n)x^n+\cdots\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)x^n\ .$$

# 第 8 章（之 6）

# 第 42 次作业

**教学内容：**§8.3.3 函数展开为幂级数举例　间接展开法　§8.3.4 函数的幂级数展开式的应用

***1．若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$，试证: $f(x)$为偶函数时必有$c_{2k+1}=0(k=0,1,2,\cdots)$.

解：$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$，　　$f(-x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(-x)^n$，

$$\therefore 0=f(x)-f(-x)=\sum_{k=0}^{\infty}2c_{2k+1}x^{2k+1},$$

$\therefore c_{2k+1}=0$（函数 0 的任意阶导数都为零）.

2．展开下列函数 $f(x)$在指定基点$x_0$处的幂级数：

**（1）　$y=(1+e^x)^3, x_0=0$；

解：因为　$y=e^{3x}+3e^{2x}+3e^x+1$，　而　$e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}, t\in(-\infty,+\infty)$ .

$$所以\quad y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot 2^n x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3x^n}{n!}+1$$

$$=8+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+3\cdot 2^n+3^n}{n!}x^n,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

**（2）$f(x)=\ln(1-x+x^2-x^3),\quad x_0=0$；

解：$f(x)=\ln(1-x+x^2-x^3)=\ln[(1+x^2)(1-x)]=\ln(1+x^2)+\ln(1-x)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{2n}+(-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\qquad(-1<x^2\le 1\ \text{且}\ -1<-x\le 1)$$

$$=-x+\left(1-\frac{1}{2}\right)x^2-\frac{1}{3}x^3-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)x^4-\frac{1}{5}x^5+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)x^6$$

$$-\frac{1}{7}x^7-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)x^8-\cdots,\qquad(-1\le x<1).$$

**（3）$f(x)=e^{4x-x^2-3}$，$x_0=2$；

解：$f(x)=e^{1-(x-2)^2}$，　　由于 $e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$，$t\in(-\infty,+\infty)$

$$\therefore e^{-(x-2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(x-2)^{2n} ,$$

$$\therefore\ f(x) = e^{1-(x-2)^2} = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(x-2)^{2n} \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

**（4） $f(x) = \ln x, \quad x_0 = e$；

解： $f(x) = \ln[e + (x-e)] = 1 + \ln\left[1 + \frac{x-e}{e}\right]$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{ne^n}(x-e)^n \qquad (0 < x \le 2e).$$

**（5） $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}), x_0 = \frac{\pi}{4}$；

解： $f(x) = \sin\left[\frac{\pi}{2} + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}, \quad (-\infty < x < +\infty).$

**（6） $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}, \quad x_0 = -4$；

解： $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x+4}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x+4}{2}}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right](x+4)^n \qquad (-6 < x < -2).$$

**（7） $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \quad x_0 = 0$；

解： $[\ln(x + \sqrt{1+x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{1}{2} - n + 1)}{n!}(x^2)^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\quad(-1<x<1),$$

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\int_0^x[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}]\mathrm{d}x$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}\quad(-1<x<1),$$

当 $x=\pm1$时，级数成为 $\pm1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}(\pm1)^{2n+1}$ 是莱布尼茨型收敛级数，

$$\therefore\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}\qquad(-1\le x\le1).$$

**（8） $f(x)=\int_0^x\frac{\arctan x}{x}dx$， $x_0=0$ .

解：因为 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x}{x} & x\ne0\\ 1 & x=0\end{cases}$,

而 $\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$， $x\in[-1,\ 1]$ .

所以当 $x\ne0$时， $\frac{\arctan x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}$, $x\in[-1,\ 0)\cup(0,\ 1]$.

而 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}\Big|_{x=0}=1=f'(0)$ .

故 $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}$, $x\in[-1,\ 1]$,

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2},\quad x\in[-1,\ 1].$$

***3．试将 $f(x)=x^2e^{x^2}$ 展开成麦克劳林级数，并计算 $f^{(n)}(0)$的值$(n=1,2,3,\ldots)$.

解：由于 $e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$， $t\in(-\infty,+\infty)$. 所以

$$f(x)=x^2e^{x^2}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

从而：$f^{(2n+1)}(0)=0,\quad f^{(2n+2)}(0)=\dfrac{(2n+2)!}{n!}$.

4．求下列数项级数的和：

**（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}$；

解：原式=$2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)!}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}+(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}-1)=2e+(e-1)=3e-1$.

***（2）$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}(2k)}{(2k-1)!}\pi^{2k}$.

解：考虑$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}(2k)}{(2k-1)!}x^{2k}=x\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}(2k)}{(2k-1)!}x^{2k-1}\right)=x\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k}\right)'$

$$=x\left(x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}\right)'$$

$$=x(x\sin x)'=x\sin x+x^2\cos x,$$

∴　原式=$(x\sin x+x^2\cos x)\Big|_{x=\pi}=-\pi^2$.