Exercice 1

La fonction d'onde de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène a pour expression, en coordonnées sphériques :

$$\psi(r,\theta,\varphi) = N.e^{-\frac{r}{a_0}}$$

1) Normer cette fonction d'onde. On donne $\int_0^\infty r^n e^{-ar} dr = \frac{n!}{a^{n+1}}$ avec a>0

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \psi^* \psi \, dV$$

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} N e^{-\frac{r}{a_0}} . N e^{-\frac{r}{a_0}} \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= N^2 \left[\int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}} r^2 dr \right] \left[\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \right] \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \right]$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = N^2 \underbrace{\left[\int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}} r^2\,dr\right]}_{\frac{2!}{\left(\frac{2}{a_0}\right)^3} = \frac{2\cdot a_0^3}{8} = \frac{a_0^3}{4}} \underbrace{\left[\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\right]}_{[-\cos\theta]_0^\pi \,=\, [-(-1)-(-1)] \,=\, 2} \underbrace{\left[\int_0^{2\pi} d\varphi\right]}_{[\varphi]_0^{2\pi} \,=\, 2\pi}$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = N^2 \frac{a_0^3}{4} \cdot 2 \cdot 2\pi = N^2 a_0^3 \cdot \pi = 1$$

$$\Longleftrightarrow N = \pm \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}$$

Calculer la distance moyenne électron-proton $\langle r \rangle$, lorsque l'atome d'hydrogène est dans l'état fondamental

$$\langle r \rangle = \frac{\langle \psi | \hat{r} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \langle \psi | \hat{r} | \psi \rangle$$ car ψ est normée

$$\langle \psi | \hat{r} | \psi \rangle = \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}} \cdot r \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi a_0^3} \underbrace{\left[\int_0^{\infty} e^{-\frac{2r}{a_0}} \cdot r^3 \, dr \right]}_{\frac{3!}{\left(\frac{2}{a_0}\right)^4} = \frac{6 \cdot a_0^4}{16}} \underbrace{\left[\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \right] \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \right]}_{4\pi}$$

$$\Rightarrow \langle r \rangle = \frac{1}{\cancel{\pi} a_0^{\cancel{3}}} \cdot \frac{6 \, a_0^{\cancel{4}}}{16} \cdot 4\cancel{\pi} = \frac{3}{2} a_0$$

$$\simeq 0{,}79 \text{ Å}$$

Évaluer la dispersion Δr associée à la mesure de la distance moyenne électron-noyau.

On rappelle $\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}$

$$\Delta r = \sqrt{\langle r^2\rangle - \langle r\rangle^2}$$

$$\langle r^2\rangle = \langle \psi | r^2 | \psi\rangle$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} \cdot r^2 \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}} \cdot r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi a_0^3} \underbrace{\left[\int_0^{\infty} e^{-\frac{2r}{a_0}} \cdot r^4 \, dr\right]}_{\frac{4!}{\left(\frac{2}{a_0}\right)^5} = \frac{4!\ a_0^5}{2^5} = \frac{24 \cdot a_0^5}{32} = \frac{3 a_0^5}{4}} \cdot 4\pi$$

$$\Rightarrow \langle r^2\rangle = \frac{1}{\pi a_0^3} \cdot \frac{3 a_0^5}{4} \cdot 4\pi = 3 a_0^2$$

Évaluer la dispersion Δr associée à la mesure de la distance moyenne électron-noyau.

On rappelle $\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}$ $\qquad \Delta r = \sqrt{\langle r^2\rangle - \langle r\rangle^2}$

$$\Rightarrow \langle r^2\rangle = \frac{1}{\pi a_0^3} \cdot \frac{3 a_0^5}{4} \cdot 4\pi = 3 a_0^2$$

$$\Delta r = \sqrt{3a_0^2 - \left(\frac{3}{2} a_0\right)^2} = \sqrt{3 a_0^2 - \frac{9 a_0^2}{4}} = \sqrt{\frac{3 a_0^2}{4}}$$

$$= a_0 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \simeq 0,46 \text{ Å}$$

Pour une distance moyenne e^- - noyau de 0,79 Å, l'erreur est (l'incertitude) égale à 0,46 Å

Exercice 2

Une balle pleine de masse M = 250 g, de rayon r = 4 cm, tourne sur elle même avec une vitesse de rotation de 5 tours par seconde

1) Evaluer la valeur du nombre quantique *l* associé à cette balle, sachant que le moment d'inertie d'une boule est I = (2/5)Mr^2 et que L = Iω (avec ω, vitesse de rotation de la boule en rad.s^{-1}).

On donne $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1-\frac{x}{2}$ $\cos(\theta) \approx 1-\frac{\theta^2}{2}$

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$L = I\omega = \frac{2}{5} M r^2 \omega = \hbar\sqrt{l(l+1)} \Leftrightarrow \frac{I\omega}{\hbar} = \sqrt{l(l+1)} \simeq l$$

$$l = \frac{2}{5}\frac{M r^2 \omega}{\hbar} = \frac{2 M r^2 \cdot 2\pi\nu}{5\hbar} = \frac{8\pi^2}{5} \cdot \frac{m r^2 \nu}{h}$$

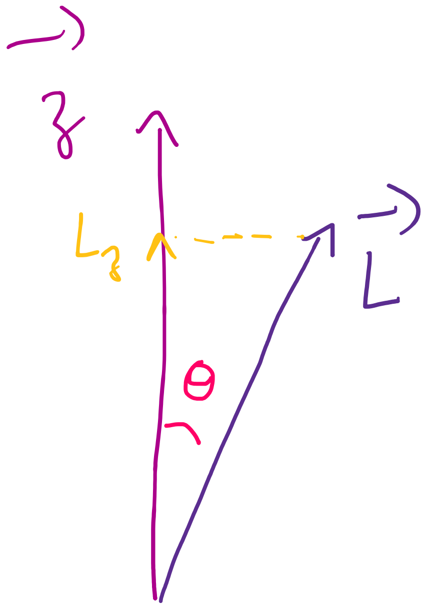
$$l = \frac{8\pi^2}{5} \cdot \frac{250.10^{-3} \cdot (4.10^{-2})^2 \cdot 5}{6{,}62.10^{-34}} = 4{,}77.10^{31}$$

Exercice 2

Une balle pleine de masse M = 250 g, de rayon r = 4 cm, tourne sur elle même avec une vitesse de rotation de 5 tours par seconde

2) A cette vitesse, quel angle minimum peut faire le moment cinétique de cette balle par rapport à un axe de référence (Oz par exemple).

On donne $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}$ $\qquad \cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$



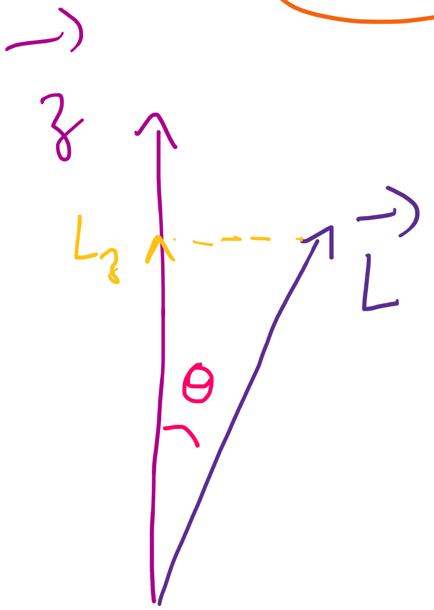
L'angle θ minimum est obtenu lorsque la composante L_z est maximum.

Elle est max lorsque $m_\ell = \ell$

$\Rightarrow$ $L_{z\,max} = \ell . \hbar$ $\qquad \cos\theta = \frac{\ell \hbar}{\sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar}$

2) A cette vitesse, quel angle minimum peut faire le moment cinétique de cette balle par rapport à un axe de référence (Oz par exemple).

On donne $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1-\dfrac{x}{2}$ $\quad \cos(\theta) \approx 1-\dfrac{\theta^2}{2}$



$$\cos\theta = \frac{\ell \hbar}{\sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar} = \frac{\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+\ell}} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{1+\frac{1}{\ell}}}$$

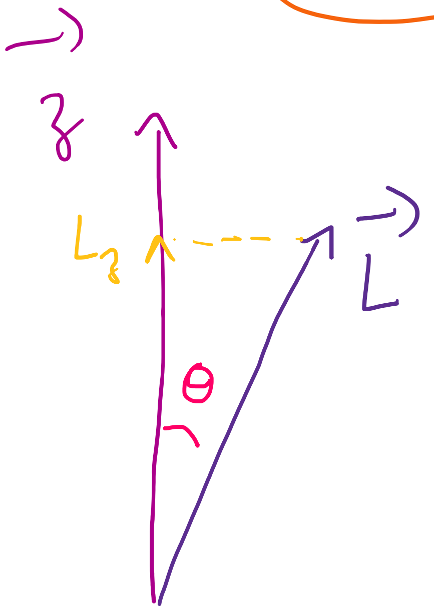
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\ell}}} \simeq 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{\ell} = \cos\theta$$

$$\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{\ell}$$

$$\Leftrightarrow \theta^2 = \frac{1}{\ell} \Leftrightarrow \theta \simeq \frac{1}{\sqrt{\ell}} = 1{,}45 \cdot 10^{-16} \text{ rad} \simeq 8{,}3 \cdot 10^{-15} \text{ degrés}$$

2) A cette vitesse, quel angle minimum peut faire le moment cinétique de cette balle par rapport à un axe de référence (Oz par exemple).

On donne $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1-\frac{x}{2}$ $\cos(\theta) \approx 1-\frac{\theta^2}{2}$



Le nombre d'orientations possibles est égal à $(2\ell+1)$ $\simeq 10^{31}$

Cela est tellement grand qu'à l'échelle macroscopique, l'effet de la quantification n'apparait pas. Il apparait possible de "choisir" librement l'orientation de l'axe de rotation de la balle. La déviation de l'ordre de θ ($\sim 10^{-15}$ degrés) par rapport à l'axe choisi est négligeable.