第 7 章 （之 1）
第 31 次作业

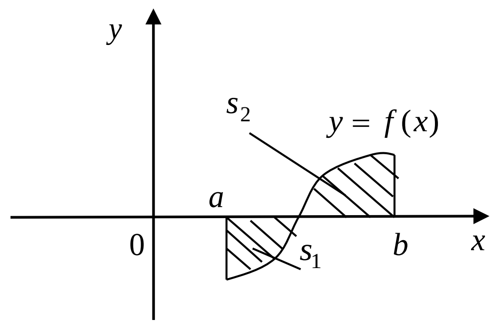
教学内容：§7.1 定积分的微元法　 7.2.1 平面图形的面积

1．选择题：

＊(1) s_1 和 s_2 表示的面积（如图）， 则 $\int_a^b f(x)dx =$ （　　）

(A) s_1+s_2　(B) s_2-s_1　(C) s_1-s_2　(D) $|s_1-s_2|$

答(　B　)



＊(2) 曲线 $y=\ln x,\ y=\ln a,\ y=\ln b\ (0<a<b)$ 及 y 轴所围成的平面图形的面积为 $A=$ （　　）

(A) $\int_{\ln a}^{\ln b} e^y dy$　$(B)\int_{\ln a}^{\ln b}\ln x dx$　$(C)\int_{e^a}^{e^b} e^x dx$　$(D)\int_{e^b}^{e^a}\ln x dx$

答(　A　)

＊＊＊(3) 曲线 $y=e^x$, 过原点的该曲线的切线 及 y 轴所围成的平面图形的 面积为 $A=$ （　　）

$(A)\int_1^e(\ln y-y\ln y)dy$　$(B)\int_1^e(e^x-xe^x)dx$

$(C)\int_0^1(e^x-ex)dx$　$(D)\int_0^1(\ln y-y\ln y)dy$

答(　C　)

＊＊＊(4) 曲线 $\rho=a\cos\theta(a>0)$ 所围成的平面图形的面积　$A=$ 　(　　)

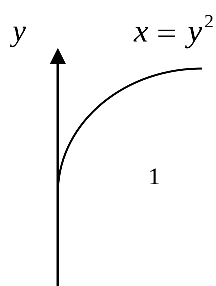
$(A)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}a^2\cos^2\theta d\theta$　$(B)2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}a^2\cos^2\theta d\theta$

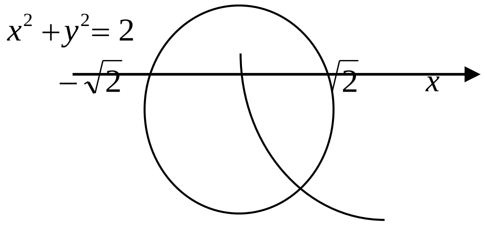
$(C)\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}a^2\cos^2\theta d\theta$　$(D)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}a^2\cos^2\theta d\theta$

答(　B　)

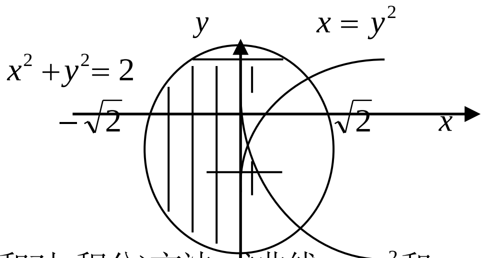
＊2. 在下面图中用阴影标出一块与所示定积分之值相等的面积。

$$\int_{-1}^{1}[y^2+\sqrt{2-y^2}]dy$$





答案：



** 3. 用两种(对x和对y积分)方法,求曲线$y=x^2$和$y=4$所围成的平面图形的面 积.

$$解: s=2\int_0^2(4-x^2)dx=2(4x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2=2(8-\frac{1}{3}\cdot 8)=\frac{32}{3}.$$

$$s=2\int_0^4\sqrt{y}dy=\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{4}{3}\cdot 8=\frac{32}{3}.$$

** 4. 用两种(对 x 和对 y 积分)方法,求曲线 $y=\frac{1}{x^2}, y=0, x=1$ 及 $x=3$ 所围成的平面图 形的面积.

解:交点$(1,1),(3,\frac{1}{9})$,

$$s=\int_1^3\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^3=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

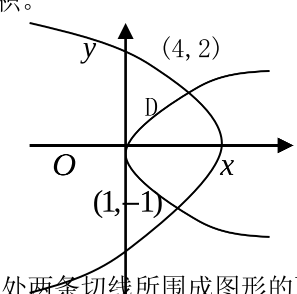
$$s=\int_{\frac{1}{9}}^1(\frac{1}{\sqrt{y}}-1)dy+2\cdot\frac{1}{9}$$

$$=(2\sqrt{y}-y)\Big|_{\frac{1}{9}}^1+\frac{2}{9}=1-(\frac{2}{3}-\frac{1}{9})+\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$$

**5. 试求由曲线 $x=y^2$ 和 $x=4+2y-y^2$ 围成图形的面积。

解：两曲线 $x=y^2$，$x=4+2y-y^2$ 交点为 $(1,-1),(4,2)$，

$$A=\int_{-1}^2\left(4+2y-y^2-y^2\right)dy=9。$$



***6. 求由抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点 $(0,-3)$ 和点 $(3,0)$ 处两条切线所围成图形的面积。

解：过点 $(0,-3)$ 的切线方程：$y=4x-3$；过点 $(3,0)$ 的切线方程：$y=-2x+6$；

解方程组 $\begin{cases} y=4x-3 \\ y=-2x+6 \end{cases}$，得交点 $(\frac{3}{2},3)$，则所求面积为

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}[(4x-3)-(-x^2+4x-3)]\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{3}[(-2x+6)-(-x^2+4x-3)]\mathrm{d}x=\frac{9}{4}\text{。}$$

****7. 求极坐标系中区域 $D=\{(\rho,\theta)|\rho\le 2(1+\cos\theta),\rho\le 2\sin\theta\}$ 的面积。

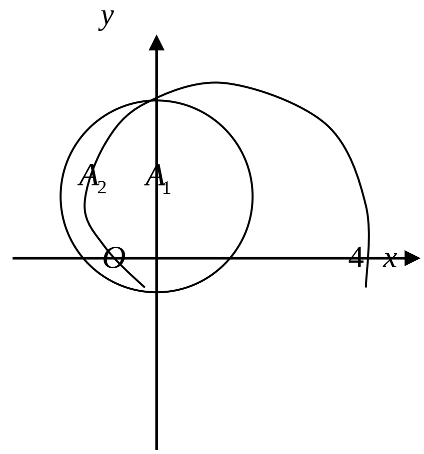
解：如图所示， $A=A_1+A_2$，

由 $\begin{cases}\rho=2(1+\cos\theta)\\ \rho=2\sin\theta\end{cases}$ 得 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$， $\theta=\pi$，

$\therefore\quad A_1=\dfrac{\pi}{2}$，

$$A_2=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}4(1+\cos\theta)^2d\theta=\frac{3}{2}\pi-4$$

$\therefore A=2\pi-4$。

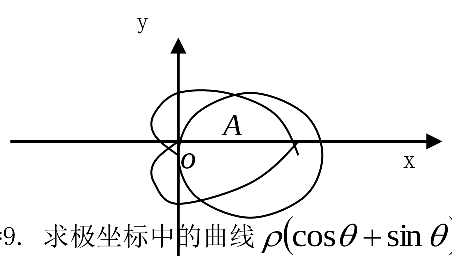


***8. 求极坐标系中区域 $\rho\le 3\cos\theta$， $\rho\le 1+\cos\theta$ 公共部分的面积。

解：两曲线 $\rho=3\cos\theta,\rho=1+\cos\theta$ 交点为 $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{\pi}{3}\right),\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\pi}{3}\right)$，

由对称性 $A=2A_{上}=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{2}(1+\cos\theta)^2d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}(3\cos\theta)^2d\theta\right)$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos\theta)^2d\theta+9\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{5}{4}\pi\text{。}$$



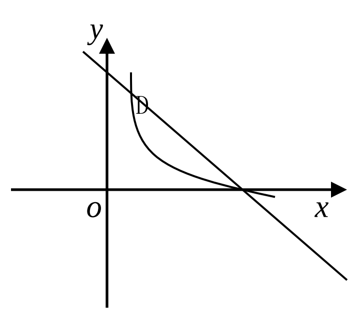
***9. 求极坐标中的曲线 $\rho(\cos\theta+\sin\theta)=3$ 和 $\rho^2\sin 2\theta=4$ 围成图形的面积。

解：由 $\rho(\cos\theta+\sin\theta)=3$， 得 $x+y=3$，

由 $\rho^2\sin 2\theta=4$， 得 $xy=2$。

由 $\begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases}$ 得交点 $(1,2),(2,1)$，如图所示，

$\therefore\quad A=\int_1^2\left(3-y-\dfrac{2}{y}\right)dy=\dfrac{3}{2}-2\ln 2$



第 7 章 （之 2）

第 32 次作业

教学内容： §7.2.2 平面曲线的弧长 7.2.3 立体体积

1.选择题：

**（1） 由曲线 $y=x^2$ 与 $y^2=x$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的 体积 $V=$ （　　）

$(A)\ \pi\quad (B)\ \dfrac{\pi}{2}\quad (C)\ \dfrac{\pi}{5}\quad (D)\ \dfrac{3}{10}\pi$

答（ D ）

**（2）摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ 的一拱与 x 轴所围的平面图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积 $V=$ （　　）

$(A)\int_0^{2\pi a}\pi a^2(1-\cos t)^2 d\left[a(t-\sin t)\right]$，$(B)\int_0^{2\pi}\pi a^2(1-\cos t)^2 d\left[a(t-\sin t)\right]$，

$(C)\int_0^{2\pi a}\pi a^2(1-\cos t)^2 dt$，　　$(D)\int_0^{2\pi}\pi a^2(1-\cos t)^2 dt$。

答（ B ）

***（3）设 s_1 是由抛物线 $y=4x^2$ 与直线 $x=a, x=1, y=0$ 所围成平面图形, s_2 是由 $y=4x^2$ 与直线 $x=a, y=0$ 所围成的平面图形$(0<a<1)$, 设 s_1, s_2 分别绕 x 轴, y 轴旋转而得到的旋转体的体积为V_1, V_2, 则 V_1+V_2 为最大时的a 值是 (　)

$(A)\ \dfrac{1}{2}\quad (B)\ \dfrac{1}{3}\quad (C)\ \dfrac{1}{4}\quad (D)\ 1$

答（ A ）

****（4）由曲线 $y=\sqrt{1-(x-1)^2}$ 与直线 $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ 所围平面图形绕y 轴旋转形成的立体 的体积 $V=$ （　　）

$(A)\quad \pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}3y^2dy-\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}(1-\sqrt{1-y^2})^2dy$

$(B)\quad \pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}3y^2dy-\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}(1+\sqrt{1-y^2})^2dy$

$(C)\quad \pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}(1+\sqrt{1-y^2})^2dy+\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}3y^2dy-\pi\int_0^{1}(1-\sqrt{1-y^2})^2dy$

$(D)\quad \pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}3y^2dy-\pi\int_0^{1}(1-\sqrt{1-y^2})^2dy$

答（ C ）

**（5）曲线 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x$ 自 $x=1$ 至 $x=e$ 之间的一段曲线弧的弧 长 $s=($　$)$

$(A)\ \dfrac{1}{4}(e^2+2)\qquad (B)\ \dfrac{1}{4}(1-e^2)\qquad (C)\ \dfrac{1}{4}(e^2-1)\qquad (D)\ \dfrac{1}{4}(e^2+1)$

答（ D ）

**（6）曲线 $\rho\theta=1$, 从 $\theta=\dfrac{3}{4}$ 到 $\theta=\dfrac{4}{3}$ 的一段弧的弧长 $s=$ （ ）

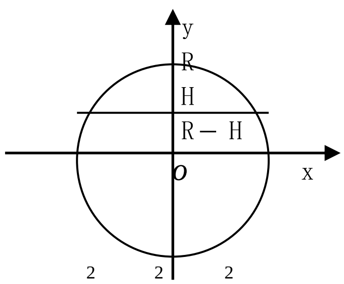
$(A)\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{\theta^2}\sqrt{1+\theta^2}d\theta$ $(B)\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{1+(-\frac{1}{\theta^2})^2}d\theta$ $(C)\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{1+\theta^2}d\frac{1}{\theta}$ $(D)\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{1+(\frac{1}{\theta})^2}d\theta$

答（ A ）

**2. 证明半径为 R，高为 H 的球缺体积为 $\pi H^2\left(R-\dfrac{H}{3}\right)$.

解：曲线 $x^2+y^2=R^2$ 与 y 轴，$y=R-H$ 围成区域绕 y 轴旋转一周得旋转体即为球缺

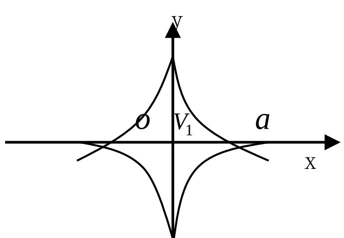
$$V=\int_{R-H}^{R}\pi x^2dy=\pi\int_{R-H}^{R}\left(R^2-y^2\right)dy=\pi\left(R^2y-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{R-H}^{R}=\pi H^2\left(R-\frac{1}{3}H\right).$$



***3. 求由星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 所围成的区域绕 x 轴旋转所得旋转体体积.

解：由对称性 $V=2V_1$，星形线的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos^3\theta\\ y=a\sin^3\theta\end{cases}$

$$\therefore V=2\int_0^a\pi y^2dx=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\pi a^2\sin^6\theta\cdot 3a\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta)d\theta=\frac{32}{105}\pi a^3.$$



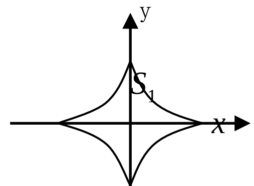
**4. 求曲线 $y=\ln\left(1-x^2\right)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上的一段弧长.

解：$S=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx=\ln 3-\frac{1}{2}$.

**5. 计算星形线 $x=a\cos^3t, y=a\sin^3t$ 的全长.

解：由对称性 $S=4S_1$，$\dfrac{dy}{dt}=3a\sin^2t\cos t$，$\dfrac{dx}{dt}=3a\cos^2t(-\sin t)$，

$$S=4S_1=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\sin^2t\cos^2t}dt=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos tdt=6a$$



***6. 求曲线 $x=\int_1^t \frac{\cos u}{u}du, y=\int_1^t \frac{\sin u}{u}du$ 在 $1 \le t \le e$ 之间的一段弧长.

解：$x'=\frac{\cos t}{t}, y'=\frac{\sin t}{t}$，

$$s=\int_1^e \sqrt{(x')^2+(y')^2}dt=\int_1^e \sqrt{\frac{\cos^2 t}{t^2}+\frac{\sin^2 t}{t^2}}dt=1.$$

**7. 求极坐标中的指数螺线 $\rho=ae^{-\theta}(a>0)$ 在 $\frac{a}{e}<\rho<ae$ 之间的一段弧长.

解：$\frac{d\rho}{d\theta}=-ae^{-\theta}$， $-1 \le \theta \le 1$，

$$s=\int_{-1}^1 \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta=\sqrt{2}a\int_{-1}^1 e^{-\theta}d\theta=\sqrt{2}a\left(e-e^{-1}\right).$$

**8. 求圆 $x^2+(y-b)^2 \le a^2 (0<a<b)$ 绕 x 轴旋转所生成旋转体的体积.

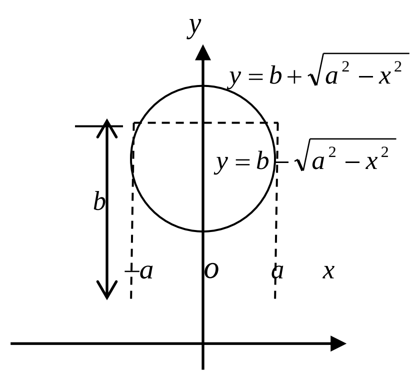
解：$V=V_1-V_2$

$$=\int_{-a}^a \pi\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx-\int_{-a}^a \pi\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx$$

$$=4\int_{-a}^a \pi b\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$=8\pi b\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx \qquad (\text{作代换} x=a\cos\theta)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\pi a^2 b\sin^2\theta d\theta=2\pi^2 a^2 b.$$



**9. 一物体的底面是由曲线 $y=x^3, x=2$ 和 x 轴所围成的平面图形, 用垂直 x 轴的平面截该物体, 所截得的是正方形截面. 试求该物体的体积.

解： 正方形的边长为 x^3，则

$$V=\int_0^2 s(x)dx=\int_0^2 x^3 \cdot x^3 dx=\frac{128}{7}.$$

***10 求以长半轴 $a=10$，短半轴 $b=5$ 的椭圆为底的而垂直于长轴的截面是等边三角形的立体的体积。

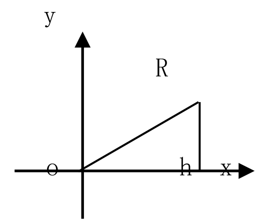
解：设立体底椭圆方程为 $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$，则过点 x 做立体的垂直截面面积为

$$A(x)=25\sqrt{3}(1-\frac{x^2}{100}),$$

故所求立体体积为

$$V=\int_{-10}^{10}A(x)\mathrm{d}x=25\sqrt{3}\int_{-10}^{10}(1-\frac{x^2}{100})\,\mathrm{d}x=\frac{1000}{3}\sqrt{3}\text{。}$$

**11*. 试求高为 h，底半径为 R 的正圆锥体的侧面积.



解：$y=\frac{R}{h}x\quad S=\int_0^h 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$$=\int_0^h 2\pi\frac{R}{h}x\sqrt{1+\frac{R^2}{h^2}}\,dx=\pi R\sqrt{R^2+h^2}\,.$$

***12*. 求圆 $x^2+(y-b)^2\le a^2(0<a<b)$ 绕 x 轴旋转所生成旋转体的表面积.

解：$S=S_1+S_2=\int_{-a}^{a}2\pi\left(b+\sqrt{a^2+x^2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\,dx$

$$+\int_{-a}^{a}2\pi\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\,dx$$

$$=8\pi ab\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx\ \underline{\underline{\text{作代换 } x=a\cos\theta}}\ 8\pi b\int_0^{\frac{\pi}{2}}ad\theta=4\pi^2ab$$ （图同 8 题）.

第 7 章 （之 3）

第 33 次作业

教学内容： §7.3 物理应用

1. 选择题：

***（1）一三角形水闸底边与水平面平行, 顶点在上方. 另一矩形水闸的宽度与

三角形底边相同,高度也与三角形高相同,则放满水时,三角形水闸所受压力与矩形水闸所受压力的比 $\lambda=$ ( )

$(A)\ \frac{5}{6}$ $(B)\ \frac{2}{3}$ $(C)\ \frac{1}{2}$ $(D)\ \frac{1}{3}$

答案(B). 因$F_{矩}=\int_0^h \rho a y dy=\frac{1}{2}a\rho h^2$, $F_{三}=\int_0^h \rho y\frac{ay}{h}dy=\frac{1}{3}a\rho h^2$, $\lambda=\frac{F_{三}}{F_{矩}}=\frac{2}{3}$.

***(2) 一个长 l_0 米的弹簧被 F 牛顿的力拉长 Δl 米,设所需功为 W_0, 现把此弹簧再拉长 Δl 米,再需作功W_1, 则 $\frac{W_1}{W_0}=$ ( )

$(A)1$ $(B)\ 2$ $(C)\ 3$ $(D)\ 4$

答案(C)

$$因F=k\Delta l,\quad k=\frac{F}{\Delta l}.W_0=\int_0^{\Delta l}kxdx=\frac{F}{\Delta l}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\Delta l}=\frac{F}{2}\Delta l,$$

$$W_1=\int_{\Delta l}^{2\Delta l}kxdx=\frac{F}{\Delta l}\frac{x^2}{2}\Big|_{\Delta l}^{2\Delta l}=\frac{F}{2}\cdot 3\Delta l,\quad \therefore\frac{W_1}{W_0}=3$$

***(3) 横截面为S, 深为h的水池装满水。把水全部抽到高为H 的水塔上, 所作的功 $W=$ ( )

$(A)\int_0^{h+H}Sg(H+h-y)dy$ $(B)\int_0^{H}Sg(H+h-y)dy$

$(C)\int_0^{h}Sg(H-y)dy$ $(D)\int_0^{h}Sg(H+h-y)dy$

其中g为重力加速度

答案(D) 因微元 $dW=Sg(H+h-y)dh$, y 的变化范围从0 到 h.

**(4)*一均匀直棒, 长为l, 质量为M, 在它中垂线上距棒的中点 a 单位处有一质量 为m的质点P, 则棒对此质点的引力可以用下式计算: $F=$ ( )

$(A)\ \frac{kMm}{a^2}$ $(B)\ \frac{kMml}{a^2}$ $(C)\ \frac{2kMm}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{dx}{a^2+x^2}$

$(D)\ \frac{2akMm}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

答案(D)

**(5)*在 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 中, 用 x 代替 $\sin x$ 时,其绝对误差的平均值是 ( )

$(A)\ \frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}$ $(B)\ \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$ $(C)\ \frac{\pi^2}{8}-1$ $(D)\ \frac{\pi^2}{4}-1$。

答案（A）

**（6）* 一横梁长30米,它所承受垂直载荷为 $p(x)=-x^2+40x+400\,(\mathrm{KN/m})$
则它的平均载荷为 ( )

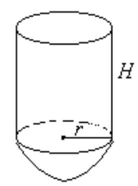
$(A)\,400\,(\mathrm{KN/m})$ $(B)\,500\,(\mathrm{KN/m})$ $(C)\,600\,(\mathrm{KN/m})$ $(D)\,700\,(\mathrm{KN/m})$

答案(D)

***2、一容器由圆柱形和半球形组成(如图)。$r=2m,\quad H=4m.$将该容器埋于地下，容器口离地面3 m . 若在容器中灌满水，试求抽出全部水所需的功。

解：如图

$$W=\int_{-4}^{0}\rho g\pi\cdot 2^2(x+7)dx+\int_{0}^{2}\rho g\pi(\sqrt{4-x^2})^2\,(x+7)dx$$



$$=80\rho g\pi+\frac{124}{3}\rho g\pi$$

$$=\frac{364}{3}\rho g\pi$$

$$\approx 3733.67(KJ)$$

**3*. 两质点之间的吸引力为 $f=k\dfrac{m_1m_2}{r^2}$，其中 k 为常数，m_1、m_2 为两质点的质量，r 为两质点之间的距离。设两质点初始距离为 l_0，将一质点沿连线延长线方向移动 Δl，求克服引力所作的功.

解：$W=\displaystyle\int_0^{\Delta l}k\frac{m_1m_2}{(l_0+x)^2}dx$

$$=-km_1m_2\left.\frac{1}{l_0+x}\right|_0^{\Delta l}=-km_1m_2\left(\frac{1}{l_0+\Delta l}-\frac{1}{l_0}\right)=km_1m_2\left(\frac{1}{l_0}-\frac{1}{l_0+\Delta l}\right).$$

***4. 在直径为 $0.2m$，高为 $0.8m$ 的圆柱形气缸内，充满了压强为 8×10^5 Pa 的气体. 若要将气体的体积压缩到原来的一半，问需作功多少？

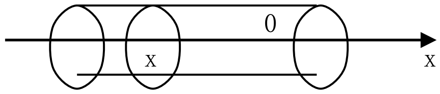
解：$pv=k=8\times10^5\times\pi\times0.1^2\times0.8=6400\pi$，

压缩至 x 处气体压强 $p(x)=\dfrac{k}{v}=\dfrac{6400\pi}{\pi\times0.1^2\times(0.8-x)}=\dfrac{640000}{0.8-x}$，

断面受气体压力 $F(x)=p(x)\cdot S=-\dfrac{640000}{0.8-x}\times\pi\times0.1^2=-\dfrac{6400\pi}{0.8-x}$，

$\therefore F_{外}=\dfrac{6400\pi}{0.8-x}$，

将气体体积压缩至原来的一半需作功 $W=\displaystyle\int_0^{0.4}\frac{6400\pi}{0.8-x}dx=6400\pi\ln 2$.

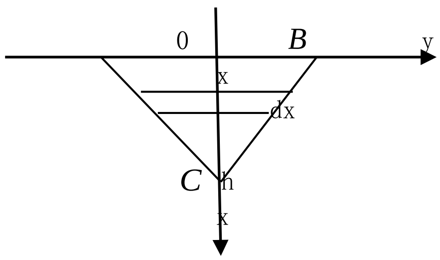


**5. 底长为 a，高为 h 的等腰三角形木板铅直置于水中，底与水面相齐，两腰中点连线将此三角形分成上下两部分，试证明，在一个侧面上下两部分上所受水压力相等.

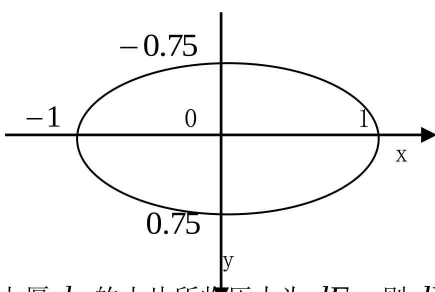
解：如图建立直角坐标系。 直线 BC 方程 $\frac{x}{h}+\frac{y}{\frac{a}{2}}=1$，$\therefore y=\frac{h-x}{2h}a$，

对 $x\in[0,h]$ 处厚 dx 的小片所收水压力 $dF=2\cdot\frac{h-x}{2h}adx\cdot\rho gx=\frac{h-x}{h}\rho gaxdx$，

$\therefore F_{上}=\int_0^{\frac{h}{2}}\rho ga\frac{h-x}{h}xdx=\frac{\rho ga}{12}h^2, F_{下}=\int_{\frac{h}{2}}^{h}\rho ga\frac{h-x}{h}xdx=\frac{\rho ga}{12}h^2$. $\therefore F_{上}=F_{下}$.

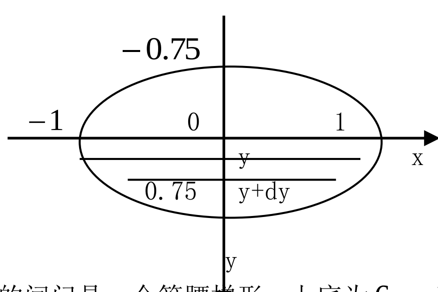


**6. 洒水车上的水桶是一个横放的椭圆柱体，尺寸如图所示，当水箱装满水时，求水箱一个端面处所受的侧压力.



解：记 y 轴上厚 dy 的小片所收压力为 dF，则 $dF=2x\cdot dy\cdot\rho g(0.75+y)$，

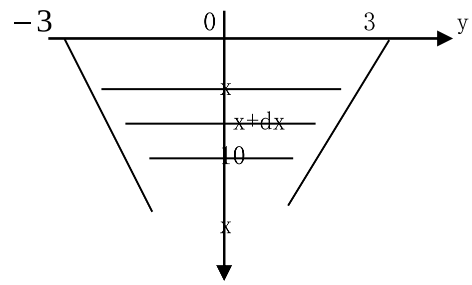
$$F=\int_{-0.75}^{0.75}\mathrm{d}F=\int_{-0.75}^{0.75}2\rho g(0.75+y)\frac{1}{0.75}\sqrt{0.75^2-y^2}dy=0.75^2\pi\rho g$$
$$=0.5625\pi\rho g\approx 17.31(KN)$$



**7. 某水库的闸门是一个等腰梯形，上底为 6 m，下底为 2 m，高为 10 m，当水面与闸门顶部相齐时，求闸门所受的压力.

解：直线 L 过 $(0,3),(10,1)$，其方程为 $y=-\frac{1}{5}x+3$，$dF=2y\cdot dx\cdot \rho gx$，

$$\therefore F=\int_0^{10}2\rho g\cdot\left(-\frac{1}{5}x+3\right)\cdot xdx=\frac{500}{3}\rho g$$



**8*. 求函数 $f(x)=xe^{-x}$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值.

解：$\bar{f}(x)=\frac{1}{1-0}\int_0^1 xe^{-x}dx=\int_0^1 xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=1-\frac{2}{e}$

**9*、求周期为 T 的矩形脉冲电流 $i(t)=\begin{cases} I,0\le t<\frac{T}{2} \\ 0,\frac{T}{2}\le t\le T\end{cases}$ 的有效值.

解：由公式 $(6-22)$ 知脉冲电流的有效值 I_0 为

$$I_0=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}}I^2dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T}0dt\right)}=\sqrt{\frac{I^2}{2}}=\frac{I}{\sqrt{2}}.$$

**10*. 求函数 $f(x)=x\cos x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的平均值.

解：$\bar{f}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\cos xdx$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}xd\sin x=\frac{1}{2\pi}x\sin x\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin xdx=0.$$

**11*. 已知某一日任意时刻 t 的气温为

$$T(t)=15+3\sin\frac{t-8}{12}\pi,(0\le t\le 24)$$

求在区间 $[0,24]$ 上的平均气温.

解：$\overline{T}=\frac{1}{24}\int_0^{24}\left(15+3\sin\frac{t-8}{12}\pi\right)dt=15+\frac{3}{2\pi}\left(-\cos\frac{t-8}{12}\pi\right)\Big|_0^{24}=15$.