171 期终试卷参考答案

一、计算下列极限（每小题 5 分，共 10 分）：

1、$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\int_1^{x^2}\sin\frac{2\pi}{t}\,\mathrm{d}t}{\ln(2x-x^2)}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\int_1^{x^2}\sin\frac{2\pi}{t}\,\mathrm{d}t}{2x-x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x\sin\frac{2\pi}{x^2}}{2-2x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\frac{2\pi}{x^2}}{1-x}$ (3 分)

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-2\cdot2\pi x^{-3}\cos\frac{2\pi}{x^2}}{-1}=4\pi$. (2 分)

2、$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[2x-1-2x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

解：令 $x=\dfrac{1}{t}$，则

原式$=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{1}{t}\left[\dfrac{2}{t}-1-\dfrac{2}{t^2}\ln(1+t)\right]=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{2t-t^2-2\ln(1+t)}{t^3}$ (2 分)

$=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{2t-t^2-2[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(t^3)]}{t^3}$ (此处也可用洛必达法则) (2 分)

$=-\dfrac{2}{3}$. (1 分)

二、解下列各题（每小题 6 分，共 18 分）：

1、求三叶玫瑰线 $\rho=\sin(3\theta)$ 上对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线的直角坐标方程.

解：该曲线在直角坐标系中对应的参数方程为$\begin{cases}x=\sin(3\theta)\cos\theta\\ y=\sin(3\theta)\sin\theta\end{cases}$. (2 分)

当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'(\theta)}{x'(\theta)}=\dfrac{3\cos(3\theta)\sin\theta+\sin(3\theta)\cos\theta}{3\cos(3\theta)\cos\theta-\sin(3\theta)\sin\theta}$，　$k_{切}=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{2}$. (3 分)

所求切线方程为 $y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})$，即 $2x-4y+1=0$. (1 分)

2、设函数曲线 $y=y(x)$ 由方程 $x-\int_1^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ 所确定，求该曲线在点 $(0,1)$ 处的曲率.

解: 将所给方程两端关于 x 求导得

$$1-\mathrm{e}^{-(x+y)^2}(1+y')=0\,. \qquad (*)$$

将 $x=0,\ y=1$ 代入，解得 $y'\big|_{(0,1)}=\mathrm{e}-1$.　　　(3 分)

将(*)式两端关于 x 求导得 $-\mathrm{e}^{-(x+y)^2}[-2(x+y)(1+y')](1+y')-\mathrm{e}^{-(x+y)^2}y''=0$.

将 $x=0,\ y=1,\ y'=\mathrm{e}-1$ 代入，解得 $y''\big|_{(0,1)}=2\mathrm{e}^2$.　　　(2 分)

曲率 $K\big|_{(0,1)}=\dfrac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}\Bigg|_{(0,1)}=\dfrac{|2\mathrm{e}^2|}{[1+(\mathrm{e}-1)^2]^{3/2}}=\dfrac{2\mathrm{e}^2}{(\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}+2)^{3/2}}$.　　　(1 分)

3、设 $y=(\sin x)^{\cos x}$，求 $\mathrm{d}y$.

解: $\mathrm{d}\left[(\sin x)^{\cos x}\right]=\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\cos x\ln\sin x}\right)=\mathrm{e}^{\cos x\ln\sin x}\mathrm{d}(\cos x\ln\sin x)$　　　(3 分)

$=(\sin x)^{\cos x}(\cos x\cot x-\sin x\ln\sin x)\mathrm{d}x$　　　(3 分)

三、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、曲线 $y=x$ 与 $y^2=x$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为　（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{30}$　（B）$\dfrac{1}{6}$　（C）$\dfrac{\pi}{6}$　（D）$\dfrac{1}{30}$

解: (C)

2、星形线 $x=\cos^3 t$， $y=\sin^3 t$ 的全长是　（　　）

（A）6　（B）3　（C）$\dfrac{3}{2}$　（D）$\dfrac{3}{8}\pi$

解: (A)

3、若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\dfrac{0}{0}$ 型的未定型，则“ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ ”是“ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$ ”的（　　）

（A）充要条件　（B）充分条件，非必要条件

（C）必要条件，非充分条件　（D）既非充分条件，也非必要条件

解: (B)

4、下列广义积分收敛的是　（　　）

（A）$\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$　　　　（B）$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$

（C）$\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$　　　　（D）$\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$

解: (D)

5、曲线 $x=y^2$ 和 $x=2-y^2$ 所围平面图形的面积为　　　　（　　）

（A）$\frac{16}{3}\pi$　　　　（B）$\frac{64}{15}\pi$

（C）$\frac{8}{3}$　　　　（D）$\frac{4}{3}$

解: (C)

四、计算下列不定积分（每小题 6 分，共 18 分）:

1、$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$.

解: 原式 $=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}\sqrt{x}$　　　　(2 分)

$=2\int\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}\arctan\sqrt{x}$　　　　(2 分)

$=\arctan^2\sqrt{x}+C$.　　　　(2 分)

2、$\int\frac{1}{\sqrt{4+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\sqrt{4+\mathrm{e}^x}$，则 $x=\ln(t^2-4)$，$\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-4}\mathrm{d}t$

原式 $=\int\frac{1}{t}\frac{2t}{t^2-4}\mathrm{d}t=2\int\frac{1}{t^2-4}\mathrm{d}t$　　　　(3 分)

$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C$　　　　(2 分)

$=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{4+\mathrm{e}^x}-2}{\sqrt{4+\mathrm{e}^x}+2}+C=\ln(\sqrt{4+\mathrm{e}^x}-2)-\frac{x}{2}+C$

$=\frac{x}{2}-\ln(\sqrt{4+\mathrm{e}^x}+2)+C$.　　　　(1 分)

3、$\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}} dx$.

解：令 $t=\sqrt[3]{x}$，则 $x=t^3$， $dx=3t^2dt$，

$$原式=\int \frac{e^t}{t} 3t^2\, dt = 3\int te^t dt \qquad (2 分)$$

$$=3\int t\, d(e^t) = 3te^t - 3\int e^t dt \qquad (2 分)$$

$$=3te^t - 3e^t + C = 3(\sqrt[3]{x}-1)e^{\sqrt[3]{x}} + C. \qquad (2 分)$$

五、（本题 6 分）求函数 $f(x)=\frac{1}{x+1}$ 在基点 $x_0=1$ 处的带皮亚诺型余项的 n 阶泰勒公式.

解： $f(x)=\frac{1}{x+1}=\frac{1/2}{1+\frac{x-1}{2}}$ (3 分)

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{x-1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^2+\cdots+\frac{1}{2}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n+o((x-1)^n)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{x-1}{2^2}+\frac{(x-1)^2}{2^3}+\cdots+\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^{n+1}}+o((x-1)^n) \qquad (3 分)$$

六、（本题 6 分）计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^7+|\sin 2x|}{1+\sin^4 x} dx$.

解：$原式=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^7}{1+\sin^4 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin 2x|}{1+\sin^4 x} dx$

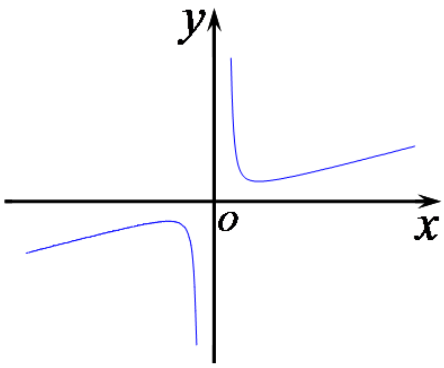
$$=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x} dx \quad (偶倍奇零) \qquad (3 分)$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin^2 x)}{1+(\sin^2 x)^2} = 2\arctan(\sin^2 x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \qquad (3 分)$$

七、（本题 8 分）设函数 $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$，填写下表并作出函数的草图.

解:　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(评分标准：每空 1 分，草图 1 分)

单调递增区间	$(-\infty,-\sqrt{2}),(\sqrt{2},+\infty)$
单调递减区间	$(-\sqrt{2},0)$，　$(0,\sqrt{2})$
凸($\cup$)区间	$(0,+\infty)$
凹($\cap$)区间	$(-\infty,0)$
极大值	$-\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}}$
极小值	$\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}}$
铅直或水平渐近线	$x=0$



八、（本题 8 分）设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明存在至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使　$2018f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证：令 $g(x)=x^{2018}f(x)$，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(3 分)

则 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导.

$g(0)=0^{2018}\cdot f(0)=0$，　　$g(1)=1^{2018}\cdot f(1)=0$.　　　　　　　　　　　　(3 分)

由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使 $g'(\xi)=0$，即 $2018\xi^{2017}f(\xi)+\xi^{2018}f'(\xi)=0$.

而 $\xi\neq0$，因此　$2018f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.　　　　　　　　　　　　　　　　(2 分)

九、（本题 6 分）设函数 $f(x)=x-[x]$，其中符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，求

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$.

解：由题设知，$f(x)$ 是周期为1的函数，且 $f(x)\geq0$.

当 $0\leq x<1$ 时，$f(x)=x$.

由 $[x]\leq x<[x]+1$ 和 $f(x)\geq0$ 得

$$\frac{1}{[x]+1}\int_0^{[x]} f(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{x}\int_0^{x} f(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{[x]}\int_0^{[x]+1} f(x)\mathrm{d}x$$ (3 分)

而 $$\frac{1}{[x]+1}\int_0^{[x]} f(x)\mathrm{d}x = \frac{[x]}{[x]+1}\int_0^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{[x]}{[x]+1}\int_0^{1} x\mathrm{d}x = \frac{[x]}{2([x]+1)}$$

$$\frac{1}{[x]}\int_0^{[x]+1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{[x]+1}{[x]}\int_0^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{[x]+1}{[x]}\int_0^{1} x\mathrm{d}x = \frac{[x]+1}{2[x]}$$ (2 分)

即 $\dfrac{[x]}{2([x]+1)} \le \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{x} f(x)\mathrm{d}x \le \dfrac{[x]+1}{2[x]}$.

令 $x \to +\infty$，则由夹逼准则得 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{x} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. (1 分)