华东理工大学 2020–2021 学年第二学期

《高等数学(下)》(11 学分) 课程期末考试试卷答案 (B) 2021.7

开课学院：理学院， 专业：大面积， 考试形式：闭卷， 所需时间 120 分钟

一、解下列各题（每小题 6 分，共 12 分）：

1、假设二阶可导函数 $f(x)$ 满足如下条件，$x=0$ 为 $f(x)$ 的驻点，$f(0)=1$ 且

$f''(x)+4f(x)=0$ ，求 $f(x)$。

解：方程 $f''(x)+4f(x)=0$ 为二阶线性常系数齐次微分方程， (2 分)

其特征方程为 $\lambda^2+4=0$，

$\lambda=\pm 2i$

故其通解为 $f(x)=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$ (2 分)

又由条件 $f(0)=1$，$f'(0)=0$，得到 $f(x)=\cos 2x$. (2 分)

2. 求方程 $yy''+(y')^2=0$ 的通解.

解： 令 $p=y'$， (2 分)

则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程有

$$y\cdot p\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0, \quad \Rightarrow \quad p\left(y\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p\right)=0, \qquad (2\text{ 分})$$

因为求通解，所以 p 满足 $y\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p=0$.

由 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{-\mathrm{d}y}{y} \Rightarrow \displaystyle\int\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\int\frac{\mathrm{d}y}{y}, \quad \Rightarrow \ln p=-\ln y+\ln C_1' \Rightarrow p=\frac{C_1}{y}$,

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{C_1}{y} \Rightarrow y\mathrm{d}y=C_1\mathrm{d}x \Rightarrow \int y\mathrm{d}y=\int C_1\mathrm{d}x \Rightarrow y^2=C_1x+C_2.$$

∴ 通解：$y^2=C_1x+C_2$. (2 分)

二、解下列各题（每小题 6 分，共 18 分）：

1. 求函数 $z=2x^2-3xy+2y^2+4x-3y+1$ 的极值.

答：由 $\begin{cases} z_x=4x-3y+4=0 \\ z_y=-3x+4y-3=0 \end{cases}$，得驻点 $(-1\,,0)$.　　　　(2 分)

$$D=\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=7>0,$$

$z_{xx}(-1,0)=4>0$.　　　　(2 分)

所以函数在点 $(-1\,,0)$ 处取极小值 $z(-1,0)=-1$.　　　　(2 分)

2. 求曲面 $4x^2+y^2+4z^2=16$ 在点 $P=(1,2\sqrt{2},-1)$ 处的法线在 yOz 平面上投影方程.

解：曲面在点 $P=(1,2\sqrt{2},-1$ 处的法线方向向量

$\vec{n}=\{8,4\sqrt{2},-8\}=4\{2,\sqrt{2},-2\}$，　　　　(2 分)

法线方程为：　$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{z+1}{-2}$.　　　　(2 分)

法线在 yOz 平面上投影方程为 $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{z+1}{-2}$.　　　　(2 分)

3. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域及和函数。

解：　首先，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\,2n+1\,|}=1$，故收敛半径为 1，显然当 $x=\pm 1$ 时，原级数都发散，故收敛域为：$(-1,1)$。　　　　(3 分)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})'-\frac{1}{1-x}=2(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1})'-\frac{1}{1-x}$$

$$=2(\frac{x}{1-x})'-\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2}$$ 。　　　　(3 分)

三、填空题（每小题 4 分，共 32 分）：

1、微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$_________

答：$\frac{1}{x}$

2、设函数$u(x,y,z)=xyz$，单位向量$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$，则$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{(1,1,1)}=$____.

答：$\sqrt{3}$

3、由方程$x+\ln(xy-2z)=\frac{1}{y^2}-z$所确定的隐函数$z=z(x,y)$在$(x,y,z)=(1,1,0)$点的全微分$dz=$______________________________ .

答：$2dx+3dy$

4、平面通过 z 轴,且过点$(2,1,-1)$，则其方程为______________________________.

答：$x-2y=0$

5、级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的敛散性是______________________________.（填收敛或者发散）

答：发散

6、已知曲线$L: y=x^2\left(0\le x\le\sqrt{2}\right)$，则$\int_L x\mathrm{d}s=$________

答：$\frac{13}{6}$

7、设$\Sigma=\{(x,y,z)\,|\,x+y+z=1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$，则$\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}S=$________.

答：$\frac{\sqrt{3}}{12}$

8、设$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$. 令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，则$S(-\frac{9}{4})=$________.

答：$-\frac{1}{4}$

四、解下列各题（每小题 6 分，共 12 分）：

1、计算 $\iint\limits_{D}|xy|dxdy$，其中 D 为 $|x|+|y|\le 1$.

解：利用对称性 $\iint\limits_{D}|xy|dxdy=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}xydy$ (3 分)

$=\dfrac{1}{6}$ (3 分)

2、 $\iint\limits_{D}\dfrac{e^{\arctan\frac{y}{x}}}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\big|\ 1\le x^2+y^2\le 4, x\le y\le\sqrt{3}x\}$.

解：在极坐标变换 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 下，

$x\le y\le\sqrt{3}x$，有 $1\le\tan\theta\le\sqrt{3}$，即 $\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}$，

又 $\because$ $1\le x^2+y^2\le 4$， 则 $1\le\rho^2\le 4$，即 $1\le\rho\le 2$，所以

$\iint\limits_{D}\dfrac{e^{\arctan\frac{y}{x}}}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^2\dfrac{e^{\arctan(\tan\theta)}}{\rho}\cdot\rho d\rho$ (3 分)

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}e^{\theta}d\theta=e^{\theta}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=e^{\frac{\pi}{3}}-e^{\frac{\pi}{4}}$. (3 分)

五、(本题 6 分)

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\sum$ 为曲面

$z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}\left(0\le z\le 1\right)$ 的上侧

解 取 $\sum_1$ 为 xOy 平面上被椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 所围部分的下侧，记 Ω 为由 $\sum$ 和 $\sum_1$ 围成的空间闭区域. (2 分)

根据高斯公式，得 $I_1=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iiint\limits_{\Omega}\left(z+2z+0\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$=\int_0^1 3z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+\frac{y^2}{4}\le 1-z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1 6\pi z\left(1-z\right)\mathrm{d}z=\pi \qquad \text{(2 分)}$$

又 $I_2=\iint\limits_{\Sigma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\iint\limits_{x^2+\frac{y^2}{4}\le 1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

所以 $I=I_1-I_2=\pi$ (2 分)

六、(本题 8 分) 半径为 R 的实心球体，质量为 M ，其边界面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

（1）若球体的密度为常数，计算其绕 z 轴的转动惯量；

（2）若球体的密度 $\mu(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ （其中 k 为未知常数），计算其绕 z 轴的转动惯量。

解：（1）显然面密度 $\mu(x,y,z)=\dfrac{3M}{4\pi R^3}$,

故其转动惯量为 $I=\iiint\limits_V \dfrac{3M}{4\pi R^3}(x^2+y^2)dV$ (2 分)

$$=\frac{3M}{4\pi R^3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R r^2\sin^2\varphi r^2\sin\varphi dr=\frac{2MR^2}{5} \qquad \text{(2 分)}$$

（2）球体的质量 $M=\iiint\limits_V k\sqrt{x^2+y^2+z^2}=k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R rr^2\sin\varphi dr=k\pi R^4$

，所以 $k=\dfrac{M}{\pi R^4}$ (2 分)

故其转动惯量为 $I=\iiint\limits_V \dfrac{M}{\pi R^4}\sqrt{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2)dV$

$$=\frac{4}{9}MR^2 \qquad \text{(2 分)}$$

七、(本题 6 分)

判断下列命题是否正确，如果正确，请给出证明；否则给出反例，并说明反例的正确性（即说明给出的反例满足命题条件，但不满足结论）。

命题 若二元函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(0,0)$， $f_y(0,0)$ 都存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿着任何方向的方向导数都存在。

解：本命题是假命题。（2 分）

反例： $f(x,y)=\begin{cases}0, xy=0\\ 1, xy\neq 0\end{cases}$

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

故 $f(x,y)=\begin{cases}0, xy=0\\ 1, xy\neq 0\end{cases}$ 的 2 个偏导数 $f_x(0,0)$， $f_y(0,0)$ 都存在。（2 分）

设 $\vec{l}=\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ 为平面上的一个单位向量，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\frac{\rho}{\sqrt{2}},\frac{\rho}{\sqrt{2}})-f(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{1-0}{\rho}\text{不存在}$$

所以 $f(x,y)=\begin{cases}0, xy=0\\ 1, xy\neq 0\end{cases}$ 在（0，0）处沿 $\vec{l}=\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ 方向的方向导数不存在。

故命题不正确。（2 分）

八、(本题 6 分) 设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有 $\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$

证　由于对任意的 $(x,y)\in D$ 及 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$，两边对 t 求导，得

$$xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y)$$

令 $t=1$ 得

$$2f(x,y)+xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)=0,$$ （3 分）

由格林公式知，对 D 内的任意有向简单闭曲线 L，

$$\oint_L yf\left(x,y\right)\mathrm{d}x - xf\left(x,y\right)\mathrm{d}y = \iint_{D'}[\frac{\partial(-xf\left(x,y\right))}{\partial x} - \frac{\partial(yf\left(x,y\right))}{\partial x}]dxdy$$

$= -\iint_{D'}[2f(x,y) + xf'_1(x,y) + yf'_2(x,y)]dxdy = 0$，其中 L 所围的区域为 D'.

所以$\oint_L yf\left(x,y\right)\mathrm{d}x - xf\left(x,y\right)\mathrm{d}y = 0$.　　　　　　　　　　　　（3 分）