Programme du cours de physique moderne

Ce document récapitule le contenu et les compétences exigibles du cours.

Ensemble microcanonique

1. Énoncer les grandeurs physiques fixées dans l'ensemble microcanonique.
2. Exprimer la probabilité p_i de réaliser un micro-état i dans l'ensemble microcanonique, d'après le postulat microcanonique.
3. Exprimer l'entropie de Boltzmann, dans l'ensemble microcanonique.
4. Donner l'unité physique de l'entropie.
5. Définir la température microcanonique.

Ensemble canonique

6. Énoncer les grandeurs physiques fixées dans l'ensemble canonique.
7. Énoncer le(s) grandeur(s) physique(s) pouvant être échangée(s) dans l'ensemble canonique.
8. Exprimer la probabilité p_i d'un micro-état i en fonction de son énergie E_i, dans l'ensemble canonique.
9. Exprimer la fonction de partition Z dans l'ensemble canonique, pour des niveaux d'énergie discrets.
10. Exprimer la fonction de partition dans l'ensemble canonique, pour des niveaux d'énergie continus en utilisant la densité d'états $\rho(E)$.
11. Montrer que l'énergie moyenne dans l'ensemble canonique s'exprime, en notant $\beta = 1/k_BT$
$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}. \tag{1}$$
12. Exprimer la différentielle de l'énergie libre dF en utilisant $F = E - TS$ et la différentielle de l'énergie $\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \mu \mathrm{d}N$.
13. En utilisant la différentielle de l'énergie libre dF, exprimer la pression p et l'entropie S comme des dérivées partielles de F.
14. À partir de la fonction de partition Z d'un système, savoir appliquer les formules démontrées en cours pour trouver les quantités telles que : l'énergie libre F, l'entropie S, l'énergie moyenne $\langle E \rangle$, la pression p, la capacité thermique C_V, le moment quadratique $\langle E^2 \rangle$ etc.

Distribution des vitesses de Maxwell

15. Exprimer à une constante de proportionnalité près, la distribution des vitesses de Maxwell vectorielle $g(\vec{v})$ à une température T, pour un gaz de particules de masse m.
16. Tracer l'allure de la distribution des vitesses de Maxwell pour deux températures différentes $T_1 < T_2$.
17. Donner l'évolution en température (augmentation ou diminution?) des grandeurs $\langle |\vec{v}| \rangle$ et $\langle |\vec{v}^2| \rangle$ pour un gaz vérifiant la distribution des vitesses de Maxwell.

Indiscernabilité

18. Déterminer si les particules des systèmes suivants sont discernables ou indiscernables : atomes d'un cristal, particules d'un gaz.

19. Exprimer la fonction de partition Z_N d'un système de N particules identiques, indépendantes et discernables en fonction de Z_1 la fonction de partition pour une particule.

20. Exprimer la fonction de partition Z_N d'un système de N particules identiques, indépendantes et indiscernables en fonction de Z_1 la fonction de partition pour une particule.

Théorème d'équipartition de l'énergie

21. Énoncer le théorème d'équipartition de l'énergie.

22. Donner un exemple de degré de liberté continu, classique, quadratique en énergie.

23. Déterminer le nombre de degrés de liberté quadratiques dans l'énergie cinétique d'une particule, en fonction de la dimension.

24. Déterminer le nombre de degrés de liberté quadratiques d'un oscillateur harmonique à une dimension.

Capacité thermique

25. Définir la capacité thermique C_V d'un système.

26. Pour un gaz parfait composé de N particules monoatomiques, donner et justifier la capacité thermique C_V et la capacité thermique molaire $C_{V,m}$.

27. Pour une molécule diatomique, donner et compter les différents degrés de liberté quadratiques.

28. Pour un gaz parfait composé de molécules diatomiques, tracer et justifier l'évolution de la capacité thermique molaire $C_{V,m}$ en fonction de la température.

29. Pour un gaz parfait composé de molécules diatomiques, donner la capacité thermique molaire $C_{V,m}$ à température ambiante $T = 300\,\mathrm{K}$.

30. Pour un solide, tracer l'évolution de la capacité thermique molaire $C_{V,m}(T)$ en fonction de la température.

31. Démontrer la loi de Dulong et Petit.

32. Donner le domaine de validité de la loi de Dulong et Petit.

33. Donner la différence entre les hypothèses du modèle de Einstein et celles de la démonstration de la loi de Dulong et Petit, pour la capacité thermique C_V d'un solide.

Ensemble grand canonique

34. Énoncer les grandeurs physiques fixées dans l'ensemble grand canonique.

35. Énoncer le(s) grandeur(s) physique(s) pouvant être échangée(s) dans l'ensemble grand canonique.

36. Dans l'ensemble grand canonique, exprimer la probabilité p_i d'un micro-état i en fonction de son énergie E_i et de son nombre de particules N_i.

37. Dans l'ensemble grand canonique, pour des niveaux d'énergie discrets, exprimer la fonction de partition Z_G.

38. Dans l'ensemble grand canonique, pour des niveaux d'énergie continus, exprimer la fonction de partition Z_G, en utilisant la densité d'états $\rho(E, N)$.

39. Montrer que dans l'ensemble grand canonique, la valeur moyenne du nombre de particules s'exprime en fonction de la fonction de partition grand canonique Z_G
$$\langle N \rangle = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z_G}{\partial \mu}. \tag{2}$$

40. Exprimer la différentielle du grand potentiel dJ en utilisant $J = E - TS - \mu N$ et la différentielle de l'énergie $\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \mu \mathrm{d}N$.

41. En utilisant la différentielle du grand potentiel dJ, exprimer la pression p, le nombre de particules N et l'entropie S comme des dérivées partielles de F.

42. À partir de la fonction de partition Z_G d'un système, savoir appliquer les formules démontrées en cours pour trouver les quantités telles que : le grand potentiel J, l'entropie S, l'énergie moyenne $\langle E \rangle$, le nombre de particules moyen $\langle N \rangle$, la pression p, les moments quadratiques $\langle E^2 \rangle$, $\langle N^2 \rangle$ etc.

Limite thermodynamique

43. Définir la limite thermodynamique.

44. Donner la valeur des fluctuations relatives $\Delta N/N$ et $\Delta E/E$ à la limite thermodynamique.

Rayonnement d'équilibre thermique, rayonnement du corps noir

45. Donner deux exemples d'objets émettant un rayonnement qui est proche de celui d'un corps noir idéal.

46. Donner l'interprétation physique et l'unité physique de la densité spectrale d'énergie $u(\lambda, T)$ de la loi de Planck
$$u(\lambda, T) = \left(\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\right)\frac{1}{e^{hc/\lambda k_\mathrm{B}T} - 1} \tag{3}$$

47. Donner et justifier la valeur du potentiel chimique μ d'un gaz de photons.

48. Exprimer les valeurs possibles du vecteur d'onde $\vec{k}$ d'un photon confiné dans une boîte de taille $L \times L \times L$, en sachant que sa fonction d'onde est celle d'une particule libre
$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{4}$$
et qu'on impose des conditions périodiques, c'est-à-dire,
$$\forall x, y, z, \quad \psi(x, y, z) = \psi(x + L, y, z) = \psi(x, y + L, z) = \psi(x, y, z + L). \tag{5}$$

49. Calculer la densité d'états $g(k)$ d'un gaz de photons, tel que le nombre d'états dN avec une norme de vecteur d'onde $|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ dans l'intervalle $[k, k + \mathrm{d}k]$ soit égal à $\mathrm{d}N = g(k)\mathrm{d}k$, sachant que les conditions périodiques imposent $k_i = n_i 2\pi/L$ avec $n_i \in \mathbb{Z}$ et $i \in \{x, y, z\}$.

50. Calculer le spectre de Planck en fréquence $u_\omega(\omega, T)$, défini par

$$\langle E \rangle = V \int_0^\infty u_\omega(\omega, T) d\omega \tag{6}$$

à partir de la fonction de partition d'un gaz de photons

$$Z_G = -\frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right) \tag{7}$$

avec $\beta = 1/k_B T$ et la relation (valable à $\mu = 0$)

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_G. \tag{8}$$

51. Déterminer le spectre de Planck en longueur d'onde $u_\lambda(\lambda, T)$ à partir du spectre de Planck en pulsation ω

$$u_\omega(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}. \tag{9}$$

52. Déterminer la formule de Rayleigh-Jeans classique $u_\omega^{RJ}(\omega, T)$, définie comme la limite à basse fréquence de la loi de Planck

$$u_\omega(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \xrightarrow[\hbar\omega \ll k_B T]{} u_\omega^{RJ}(\omega, T). \tag{10}$$

53. Donner le nom de la loi qui relie la couleur et la température d'un corps noir.

54. Énoncer la loi (du déplacement) de Wien.

55. Appliquer la loi du déplacement de Wien pour déterminer lequel des corps 1 et 2 est le plus chaud, en connaissant leur longueur d'onde maximale d'émission de rayonnement thermique $\lambda_{max,1}$ et $\lambda_{max,2}$.

56. Justifier par un calcul pourquoi les caméras thermiques (pour voir les humains dans le noir) sont sensibles dans le domaine infrarouge. On donne la constante de Wien : $2,898 \cdot 10^{-3}$ K · m.

57. Énoncer la loi de Stefan-Boltzmann.

58. Appliquer la loi de Stefan-Boltzmann pour calculer la puissance thermique P émise par un corps noir en fonction de sa température T et sa surface S.

59. Appliquer la loi de Stefan-Boltzmann pour déterminer la dépendance en température T de la puissance thermique émise P.

60. Effectuer un bilan thermique sur un corps noir à l'équilibre thermique pour utiliser que la puissance absorbée P_a est égale à la puissance émise P_e.

Statistiques quantiques

61. Définir ce qu'est un fermion.

62. Définir ce qu'est un boson.

63. Donner deux exemples de fermions.

64. Donner un exemple de boson.

65. Pour un état quantique i, donner les valeurs possibles du nombre d'occupation N_i pour un système de fermions, et pour un système de bosons.

66. Montrer que la fonction de partition grand canonique d'un système de fermions, à 1 seul état i d'énergie ϵ_i, est
$$Z_{G,i} = 1 + e^{\beta(\mu - \epsilon_i)} \tag{11}$$

67. Trouver la distribution de Fermi-Dirac $n_{FD}(\epsilon_i) = \langle N_i \rangle$, en utilisant (11) et (2)
$$n_{FD}(\epsilon_i) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{k_B T}} + 1} \tag{12}$$

68. Tracer l'allure de la distribution de Fermi-Dirac à température nulle $T_1 = 0\,\mathrm{K}$ et à température finie $T_2 > 0\,\mathrm{K}$.

69. Montrer que la fonction de partition grand canonique d'un système de bosons, à 1 seul état i d'énergie ϵ_i, est
$$Z_{G,i} = \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}} \tag{13}$$

70. Trouver la distribution de Bose-Einstein $n_{BE}(\epsilon_i) = \langle N_i \rangle$ en utilisant (13) et (2)
$$n_{BE}(\epsilon_i) = \langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{k_B T}} - 1} \tag{14}$$

71. Tracer l'allure de la distribution de Bose-Einstein à deux températures différentes $T_1 < T_2$.

72. Exprimer le nombre moyen de particules $\langle N \rangle$ et l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ d'un système de bosons (ou de fermions) avec des niveaux d'énergie continus et une densité d'états $\rho(\epsilon)$, en utilisant la distribution de Bose-Einstein $n_{BE}(\epsilon)$ (ou de Fermi-Dirac $n_{FD}(\epsilon)$).

73. Sachant que la vitesse de Fermi des électrons libres dans un métal vaut $v_F \approx 2 \times 10^6 \mathrm{m\,s^{-1}}$, justifier pourquoi ils ont un comportement quantique, même à température ambiante 300 K.

Effet Doppler

74. Donner les signes des décalages $\Delta f = f' - f$ et $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ dans le cas où l'émetteur se rapproche du récepteur.

75. Donner les signes des décalages $\Delta f = f' - f$ et $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ dans le cas où l'émetteur s'éloigne du récepteur.

76. Énoncer la formule de l'effet Doppler classique (on précisera la convention prise pour le signe des vitesses v_E, v_R).

77. Démontrer la formule de l'effet Doppler classique, dans le cas simple où le récepteur est immobile.

78. Expliquer pourquoi la largeur d'une raie spectrale augmente avec la température.

79. Donner deux applications de l'effet Doppler.

80. Appliquer la formule de l'effet Doppler pour déterminer la vitesse de récession d'une galaxie.