第六章 流体动力学的积分方程分析

流体动力学

雷诺输运定理，积分形式控制方程组

- 基础知识

守恒定律、牛顿第二定律、物质导数、描述流体运动的两种方法

第六章 流体动力学的积分方程分析

雷诺输运定理

系统、控制体、雷诺输运方程

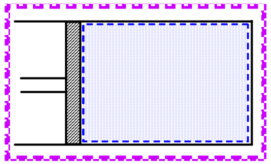
积分形式的控制方程

连续方程、能量方程、动量方程

6.1 物质积分的随体导数——雷诺输运定理

系统 *system* → 某一确定流体质点集合的总体

- 与外界无质量交换
- 随流体质点的运动而运动
- 边界形状、包围空间大小随流体质点的运动而变化
- 拉格朗日方法下的概念



系统2

物理定律通常应用于系统

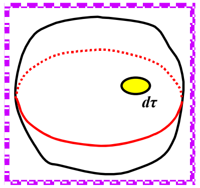
- 质量守恒方程 → $m_{sys} = \text{const}$ 或 $\dfrac{dm}{dt} = 0$
  conservation of mass
- 动量方程 → $F = m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d\left(m\vec{V}\right)}{dt}$
  linear momentum equation
- 动量矩方程 → $\vec{T} = \dfrac{d\vec{H}}{dt}$ $\quad \vec{H} = \sum\left(\vec{r}\times\vec{V}\right)\delta m$
  angular momentum equation
- 能量守恒方程 → $dE/dt = \dot{Q} + \dot{W}$
  energy equation or first law of thermodynamics

系统的物质导数

- 系统的物质导数

  substantial derivative of system

$$\frac{D\Phi_{sys}}{Dt}=\frac{D}{Dt}\int_{sys}\phi d\tau$$



Φ → 系统体积内包含的总物理量

ϕ → 单位体积流体的物理量分布函数

- 质量 → $\Phi=m$, $\phi=\rho$
- 动量 → $\Phi=\vec{k}=m\vec{V}$, $\phi=\rho\vec{V}$

控制体1

控制体 → 流场中某一确定的空间区域

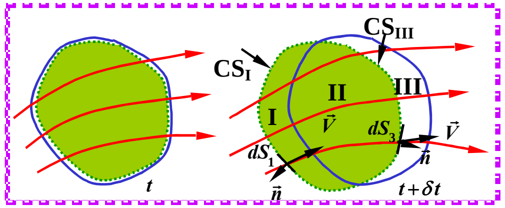
control volume

- 与外界有质量交换
- 空间位置相对于某参照系不变
- 边界形状、包围空间大小一般是确定的
- 欧拉方法下的概念

control surface
控制面

雷诺输运方程1 *Reynolds transport theorem*

欧拉方法描述系统物理量对时间的变化率，即采用与控制体相关的物理量描述系统的物质导数



物质导数定义 → $$\frac{D\Phi_{sys}}{Dt}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\Phi_{sys}(t+\delta t)-\Phi_{sys}(t)}{\delta t}$$

雷诺输运方程2

区域I：　可看作由左半控制面CS_I 流入控制体的

区域III：可看作由右半控制面CS_{III}流出控制体的

$$\Phi_{sys}(t+\delta t)=\Phi_{cv}(t+\delta t)+\Phi_{III}(t+\delta t)-\Phi_{I}(t+\delta t)$$

$$\Phi_{sys}(t)=\Phi_{cv}(t)$$

$$\frac{D\Phi_{sys}}{Dt}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\Phi_{cv}(t+\delta t)-\Phi_{cv}(t)}{\delta t}+\lim_{\delta t\to 0}\frac{\Phi_{III}(t+\delta t)}{\delta t}-\lim_{\delta t\to 0}\frac{\Phi_{I}(t+\delta t)}{\delta t}$$

右端第一项： $$\lim_{\delta t\to 0}\frac{\Phi_{cv}(t+\delta t)-\Phi_{cv}(t)}{\delta t}=\frac{\partial\Phi_{cv}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\phi d\tau$$

雷诺输运方程3

右端第二项：$\lim\limits_{\delta t\to 0}\dfrac{\Phi_{\mathrm{III}}(t+\delta t)}{\delta t}=\lim\limits_{\delta t\to 0}\dfrac{\int_{\mathrm{CSIII}}\phi\vec{V}\cdot d\vec{S}_3\delta t}{\delta t}=\int_{\mathrm{CSIII}}\phi\vec{V}\cdot d\vec{S}_3$

这是因为：根据流线、微元面得到 $\vec{V}$ $d\vec{S}_3$

经过 δt 得到体积流量 $\vec{V}\cdot d\vec{S}_3\delta t$

包含物理量 $\phi\vec{V}\cdot d\vec{S}_3\delta t$

再在积分面上做积分 ⇒

$$\Phi_{\mathrm{III}}(t+\delta t)=\int_{\mathrm{csIII}}\phi\vec{V}\cdot d\vec{S}_3\delta t$$

雷诺输运方程4

右端第三项：$-\lim\limits_{\delta t\to 0}\dfrac{\Phi_{\mathrm{I}}(t+\delta t)}{\delta t}=-\lim\limits_{\delta t\to 0}\dfrac{-\int_{\mathrm{CSI}}\phi\vec{V}\cdot d\vec{S}_1\delta t}{\delta t}=\int_{\mathrm{CSI}}\phi\vec{V}\cdot d\vec{S}_1$

二、三项相加，其中：

$$\int_{\mathrm{CS}}\phi\vec{V}\cdot d\vec{S}=\int_{\mathrm{CS}}\phi\vec{V}\cdot\vec{n}dS$$

$$CS_{\mathrm{I}}+CS_{\mathrm{III}}=CS$$

$$\Rightarrow\quad \frac{D\Phi_{\mathrm{sys}}}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{CV}}\phi d\tau+\int_{\mathrm{CS}}\phi\vec{V}\cdot\vec{n}dS$$

雷诺输运方程5

$$\boxed{\frac{D\Phi_{\mathrm{sys}}}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{CV}}\phi d\tau+\int_{\mathrm{CS}}\phi\vec{V}\cdot\vec{n}dS}$$

$\dfrac{D\Phi_{\mathrm{sys}}}{Dt}$ ⇒ 系统的物理量 Φ 对时间的变化率

$\dfrac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{CV}}\phi d\tau$ ⇒ 控制体物理量 Φ 对时间的变化率，反应流场的非定常性

$\int_{\mathrm{CS}}\phi\vec{V}\cdot\vec{n}dS$

⇒ 物理量 Φ 流出控制体的净流率，反应流场不均匀性，系统位置、体积随时间的改变

雷诺输运方程6

定常流动 ⇒ $\boxed{\dfrac{D\Phi_{\mathrm{sys}}}{Dt}=\int_{\mathrm{CS}}\phi\vec{V}\cdot\vec{n}dS}$

steady flow

- 系统物理量 Φ 的变化只取决于控制面上的流动，与控制体内的流动无关

运动控制体

⇒ $\boxed{\dfrac{D\Phi_{\mathrm{sys}}}{Dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{CV}}\phi d\tau+\int_{\mathrm{CS}}\phi\vec{V}_r\cdot\vec{n}dS}$ $\quad \vec{V}_r=\vec{V}-\vec{V}_{\mathrm{CV}}$

积分方法的优点

- 积分方法无需了解内部细节，甚至允许物理量在内部发生间断，只利用 CV 和 CS，花很少时间就能获得有价值的结果
- 方法简单，计算量小
- 适于研究大范围内的流体运动，特别是求解对有限区域固体边界的总体作用

质点导数与系统导数

质点导数 ⟹ $\frac{D\phi}{Dt}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\phi$

- 流体质点某物理量随时间的变化率同空间点上物理量之间的关系

系统导数 ⟹ $\frac{D\Phi_{sys}}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\phi d\tau+\int_{CS}\phi\vec{V}\cdot\vec{n}dS$

- 系统某物理量随时间的变化率和控制体上物理量变化之间的关系

6.2 连续方程

连续方程 ⟹ 系统的质量守恒

continuity equation

- 系统体积为 τ，质量为 m，质量守恒

⟹ $\frac{Dm}{Dt}=0$ ⟸ $\Phi=m$ ， $\phi=\rho$

初始时刻系统与控制体重合

⟹ $\frac{Dm}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\tau+\int_{CS}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}dS=0$

连续方程2

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\tau+\int_{CS}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}dS=0$ 一切流动都应满足连续方程

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\tau$ ⟹ CV中流体质量对时间的变化率

$\int_{CS}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}dS$ ⟹ 流出CV的流体质量的净流率

控制体的质量守恒：单位时间CV内流体质量的增加与净流出CV的流体质量流量之和为零

连续方程3

定常流动 $\Rightarrow$ $\int_{CS}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}dS=0$

均质不可压缩 $\xrightarrow{\rho=\text{const}}$ $\int_{CS}\vec{V}\cdot\vec{n}dS=0$ 无需定常假设

- 流体仅在控制面的有限个区域流入流出且 ρ，V 在进出口截面均布，定常流动

$\Rightarrow$ $\sum\dot{m}_{in}=\sum\dot{m}_{out}$ $\quad\sum Q_{in}=\sum Q_{out}$ $\quad\dot{m}=\rho VA$ $\quad Q=VA$

连续方程4

运动控制体 用相对速度替换绝对速度

$\Rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\tau+\int_{CS}\rho\vec{V}_r\cdot\vec{n}dS=0$

- 流体仅在控制面的有限个区域流入流出且 ρ，V 在进出口截面均布，定常流动

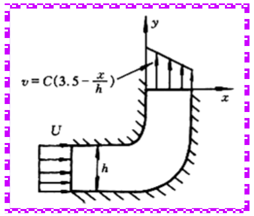
$\Rightarrow$ $\sum(\rho V_r A)_{in}=\sum(\rho V_r A)_{out}$ $\quad\vec{V}_r=\vec{V}-\vec{V}_{CV}$

relative velocity

连续方程5－例题1

水以均匀速度U流入一二维通道，由于通道弯曲了90°，在出口端速度分布变为 $c(3.5\text{-}x/h)$。设通道宽度为常数，求c。定常流动

解：定常流动



$\int_{CS}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}dS=0$

$\Rightarrow$ Uh

$=\int_0^h c(3.5-x/h)dx$ $\Rightarrow$ $c=U/3$

连续方程6－例题2

如图所示一水箱，水均匀垂直流入流出，求水的深度随时间的变化率dh/dt。

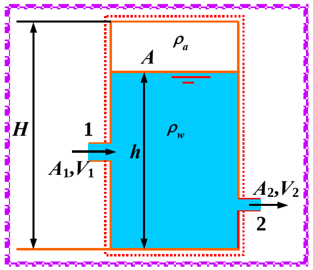
解：第一项

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\tau=\rho_w A\frac{dh}{dt}$

第二项：净流出率

$\int_{CS}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}dS$

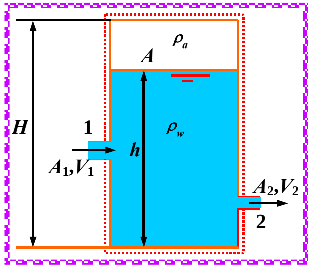
$=\rho_w A_2V_2-\rho_w A_1V_1$



连续方程7－例题2

$$\rho_w A\frac{dh}{dt}+\rho_w A_2V_2-\rho_w A_1V_1=0$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{A_1V_1-A_2V_2}{A}$$



6.3 能量方程

能量方程 → 系统的能量守恒

energy equation

- 能量为 E，热力学第一定律

$$\frac{DE}{Dt}=\dot{Q}+\dot{W}$$

初始时刻系统与控制体重合

$$\dot{Q}+\dot{W}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho e d\tau+\int_{CS}\rho e\vec{V}\cdot\vec{n}dS$$

e：单位质量流体具有的能量，*specific energy*

总流伯努利方程1

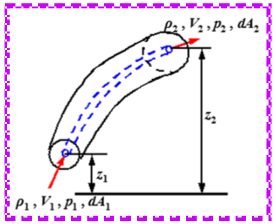
沿流线的伯努利方程应用到总流

单位时间通过微小流束断面的不可压流体重量

$$\rho g dQ=\rho g V_1 dA_1=\rho g V_2 dA_2$$

微小流束伯努利方程

$$\left(z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}\right)\rho g V_1 dA_1=\left(z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}\right)\rho g V_2 dA_2$$



总流伯努利方程2

动能修正系数 → $\int_A\frac{V^2}{2g}\rho g V dA$

- 取平均流速 $\bar{V}$ 计算动能，需加以修正

$$\int_A\frac{V^2}{2g}\rho g V dA=\alpha\int_A\frac{\bar{V}^2}{2g}\rho g\bar{V}dA=\frac{\alpha\bar{V}^2}{2g}\rho g A\bar{V}$$

$$\alpha=\frac{\int_A V^3 dA}{\bar{V}^3 A}$$

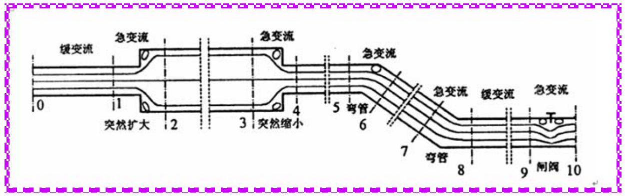
kinetic-energy correction factor

反映过流断面上速度分布的不均匀性，工程上 α 一般取 1

总流伯努利方程3

缓变流 $\Rightarrow$ $\int_A\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)\rho g V dA$

- 流线切线之间夹角很小，即流线近似于平行
- 流线曲率很小，即流线近似于直线



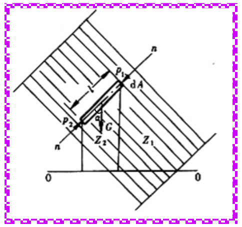
总流伯努利方程4

n-n向微圆柱受力平衡

$$\rho g l dA\cos\alpha + p_1 dA = p_2 dA$$

由 $l\cos\alpha = z_1 - z_2$

$\Rightarrow$ $z+\frac{p}{\rho g}=C$



$$\left(z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1\bar{V}_1^2}{2g}\right)\rho g\int_{A_1}V_1 dA_1=\left(z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2\bar{V}_2^2}{2g}\right)\rho g\int_{A_2}V_2 dA_2$$

总流伯努利方程5

总流伯努利方程 $\Rightarrow$ $z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1\bar{v}_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2\bar{v}_2^2}{2g}$

适用条件

- 理想不可压缩流体
- 定常流动
- 质量力有势且只有重力
- 两过流断面必须是缓变流过流断面
- 两过流断面间无能量输入输出

总流伯努利方程6

注意

- 断面压强要求采用同种压强表示方法
- z，$p/\rho g$ 可以是过流断面上任意一点处的值，但必须为同一点的值
- 两过流断面间可以不是缓变流动
- 取 $\alpha_1=\alpha_2=1$

总流伯努利方程7

注意

- 两过流断面间有其它能量输入输出

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}+h_{轴}$$

量纲：[L]
单位：m

能量输入 $h_{轴}$ 为负：泵、压缩机；能量输出 $h_{轴}$ 为正：涡轮机

- 功率 $\Rightarrow$ $N=\rho g Q h_{轴}$

6.4 动量方程

动量方程—惯性系 $\Rightarrow$ **系统的动量定理**

momentum equation — inertial reference frame

- 系统体积为 τ，动量为 k，动量定理

$$\Rightarrow \sum\vec{F}=\frac{D\vec{k}}{Dt} \Leftarrow \Phi=\vec{k}\ ,\ \phi=\rho\vec{V}$$

初始时刻系统与控制体重合

$$\Rightarrow \sum\vec{F}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\vec{V}d\tau+\int_{CS}\rho\vec{V}\vec{V}\cdot\vec{n}dS$$

动量方程2

$$\sum\vec{F}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\vec{V}d\tau+\int_{CS}\rho\vec{V}\vec{V}\cdot\vec{n}dS$$

$\sum\vec{F}$ $\Rightarrow$ 作用在控制体上的外力之和

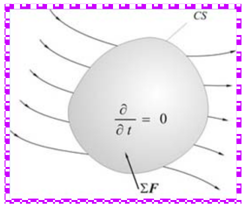
$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\vec{V}d\tau$ $\Rightarrow$ 控制体中流体的动量对时间的变化率，定常该项为零

$\int_{CS}\rho\vec{V}\vec{V}\cdot\vec{n}dS$ $\Rightarrow$ 流出 CV 的流体动量的净流率

动量方程3

定常流动 $\Rightarrow$ $\sum\vec{F}=\int_{CS}\rho\vec{V}\vec{V}\cdot\vec{n}dS$

$$\begin{cases}\sum F_x=\int_{CS}\rho u\vec{V}\cdot\vec{n}dS\\ \sum F_y=\int_{CS}\rho v\vec{V}\cdot\vec{n}dS\\ \sum F_z=\int_{CS}\rho w\vec{V}\cdot\vec{n}dS\end{cases}$$



- 控制体上所受的合外力只与流体动量的净流出率有关，与控制体内的细节无关

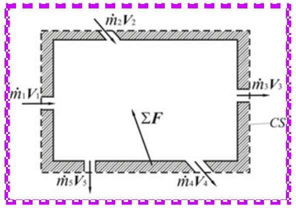
动量方程4

流体仅在控制面的有限个区域流入流出且 ρ， V 在进出口截面均布，定常流动

$$\sum \vec{F} = \sum\left(\dot{m}_i \vec{V}_i\right)_{\text{out}} - \sum\left(\dot{m}_i \vec{V}_i\right)_{\text{in}}$$

- 力与速度的正负号

与选定坐标方向一致者取正，反之取负

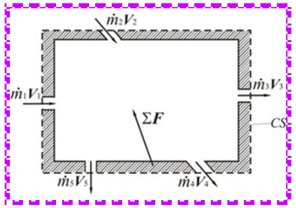


动量方程5

$$\sum \vec{F} = \sum\left(\dot{m}_i \vec{V}_i\right)_{\text{out}} - \sum\left(\dot{m}_i \vec{V}_i\right)_{\text{in}}$$

- 力与速度的正负号

与选定坐标方向一致者取正，反之取负



$$-\sum F_x = \left(m_3 v_3 + m_4 v_{4x} + 0\right) - \left(m_1 v_1 + m_2 v_{2x}\right)$$

动量方程6

动量方程适用条件

- 理想流体或粘性流体
- 定常流动或非定常流动
- 可压缩流体或不可压缩流体
- 控制体内有无流动参数不连续面均可
- 外界与控制体有无质量能量交换均可

动量方程7

求解步骤

- 建立坐标系
- 选取控制体 → 是否运动、是否包含所有进出口，所求力是否为外力
- 控制体受力分析 → 质量力、表面力
- 连续方程（速度）、伯努利方程（压强）、动量方程（矢量方程，分量方程求解各分力）

动量方程8－例题1

理想流体自由射流：已知Q_0，V_0，ρ= const，重力和摩擦力可以忽略，$V_1 = V_2 = V_0$，求：Q_1，Q_2以及液体对平板的作用力。

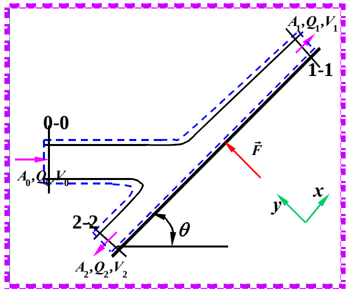
解：(1) 坐标系

(2) 控制体

(3) 受力分析

平板对控制体的力

F，y方向



动量方程9－例题1

(4) 连续方程

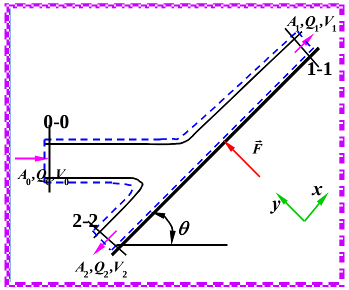
$$\boxed{\sum Q_{\text{in}} = \sum Q_{\text{out}}}$$

$$Q_0 = Q_1 + Q_2$$

(5) 动量方程－x方向

$$\boxed{F_x = 0}$$

$$= \sum\left(\dot{m}_i V_{xi}\right)_{\text{out}} - \sum\left(\dot{m}_i V_{xi}\right)_{\text{in}}$$



动量方程10－例题1

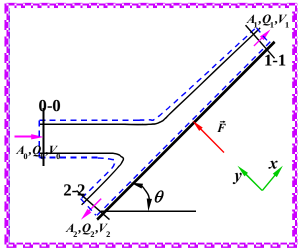
$$V_1 Q_1 - V_0 \cos\theta Q_0 - V_2 Q_2 = 0$$

$$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{Q_0}{2}(1+\cos\theta) \\ Q_2 = \dfrac{Q_0}{2}(1-\cos\theta) \end{cases}$$

动量方程－y方向

$$\boxed{F_y = F}$$

$$= \sum\left(\dot{m}_i V_{yi}\right)_{\text{out}} - \sum\left(\dot{m}_i V_{yi}\right)_{\text{in}} \quad \Rightarrow \quad F = \rho V_0 Q_0 \sin\theta$$



动量方程11－例题2

管道流动：已知A_1 = 0.01m^2，A_2 = 0.0025m^2，V_2 = 16m/s，ρ = 999kg/m^3，p_1 = 221kPa，p_a = 101kPa，忽略重力和摩擦力。求弯头所受支撑力

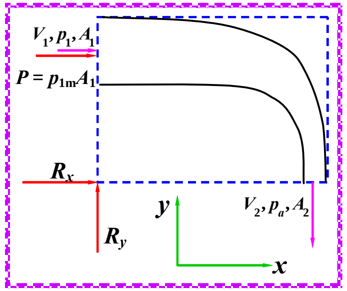
解：(1) 坐标系

(2) 控制体

(3) 受力分析

弯头支撑力R_x，R_y

表压力P



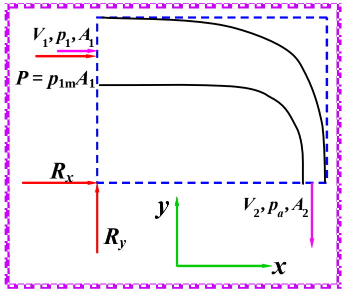
动量方程12－例题2

(4) 连续方程

$$\boxed{\sum Q_{in} = \sum Q_{out}}$$

$$\Rightarrow \quad V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$\Rightarrow \quad V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} = 4(\mathrm{m/s})$$



动量方程13－例题2

(5) 动量方程－x 方向

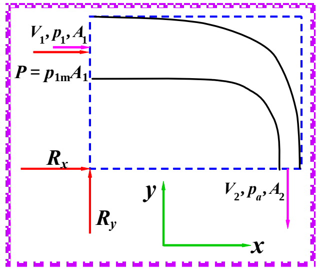
$$\boxed{F_x = R_x + P} = \sum(\dot{m}_i V_{xi})_{out} - \sum(\dot{m}_i V_{xi})_{in}$$

$$\Rightarrow \quad R_x = -p_{1m}A_1 - \rho V_1^2 A_1$$

$$= -1.36 \times 10^3 (\mathrm{N})$$

动量方程－y 方向

$$\boxed{F_y = R_y}$$



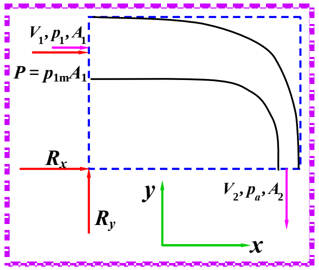
动量方程14－例题2

动量方程 - y方向

$$\boxed{F_y = R_y} = \sum(\dot{m}_i V_{yi})_{out} - \sum(\dot{m}_i V_{yi})_{in}$$

$$\Rightarrow \quad R_y = -\rho V_2^2 A_2$$

$$= -0.639 \times 10^3 (\mathrm{N})$$



动量方程15－解题注意事项

控制体的选择

- 控制体是否运动，包含所有进出口，使要求解的力为控制体所受的外力

定常流动、控制面有限个区域有流体流入流出，且各进出口参数均布

$$\sum \dot{m}_{in} = \sum \dot{m}_{out}$$

$$\sum \vec{F} = \sum(\dot{m}_i \vec{V}_i)_{out} - \sum(\dot{m}_i \vec{V}_i)_{in}$$

动量方程16－解题注意事项

正负号的确定

- 力与速度在各坐标轴上投影的方向同坐标方向一致时，取正号，反之取负号

大气压强的作用

- 大气压强作用于闭合控制体四周，所产生的静压力相互抵消，可采用表压计算压力

动量方程17－解题注意事项

管道问题和自由射流问题

- 管道问题需考虑表压力不为零的情况

运动控制体

- CV 做匀速运动，所有运动量均相对于 CV，若CV做加速运动或旋转，则需添加惯性力

动量方程18－运动控制体

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\vec{V}_r d\tau+\int_{CS}\rho\vec{V}_r\vec{V}_r\cdot\vec{n}dS=\Sigma\vec{F}$$

- 流体仅在控制面的有限个区域流入流出且 ρ，V 在进出口截面均布，定常流动

$$\sum\vec{F}=\sum\left(\dot{m}_{ri}\vec{V}_{ri}\right)_{out}-\sum\left(\dot{m}_{ri}\vec{V}_{ri}\right)_{in}$$

其中 $\vec{V}_r=\vec{V}-\vec{V}_{CV}$ 相对速度替换绝对速度

动量方程19－运动控制体－例题

已知 V = 30m/s，U = 10m/s，忽略重力和摩擦力，出口截面 A_1= 0.003m^2，求对小车支撑力 R_x 和 R_y

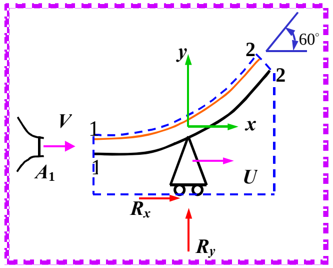
解：(1) 坐标系

(2) 控制体

$$\vec{V}_r=\vec{V}-\vec{U}$$

(3) 受力分析

维持叶片做匀速直线运动的力 R_x，R_y



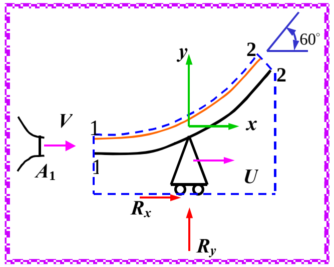
动量方程20－运动控制体－例题

(4) 连续方程

$\boxed{Q_{r1}=Q_{r2}}$

(5) 动量方程－x 方向

$\boxed{F_x=R_x}$



$$=\sum\left(\dot{m}_{ri}\vec{V}_{ri}\right)_{\text{out}}-\sum\left(\dot{m}_{ri}\vec{V}_{ri}\right)_{\text{in}}$$

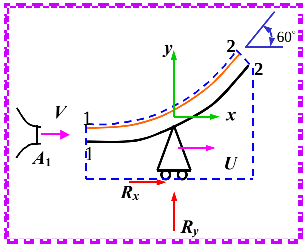
$$\Rightarrow\quad R_x=\rho A_2V_{r2}^2\cos 60^\circ-\rho A_1V_{r1}^2$$

动量方程21－运动控制体－例题

$$\Rightarrow\quad R_x=\rho(V-U)^2A_1(\cos\theta-1)=-599(\text{N})$$

动量方程－y 方向

$\boxed{F_y=R_y}$



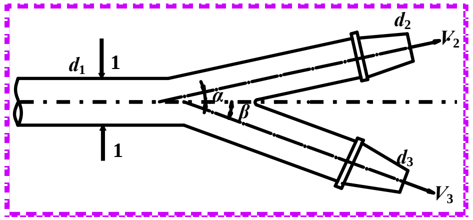
$$\Rightarrow\quad R_y=\rho V_{r2}^2A_2\sin 60^\circ$$

$$R_y=\rho(V-U)^2A_1\sin\theta$$

$$=1.04\times 10^3(\text{N})$$

动量方程、伯努利方程综合应用1

输水管出口处通过设置的两个分叉的喷嘴将水流射入大气中(两分叉管在同一水平面内)，已知：d_1=150mm，d_2=100mm，d_3=75mm，$V_2=V_3$=12m/s，不计重力和阻力损失，α=15°，β=30°，求为固定分叉喷嘴所需外力。

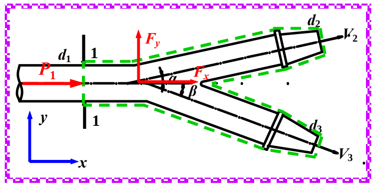


动量方程、伯努利方程综合应用2

解：(1) 坐标系

(2) 控制体

(3) 受力分析



F_x，F_y　　1截面表压力P_1

(4) 连续方程 $\Rightarrow$ $Q_1=Q_2+Q_3$

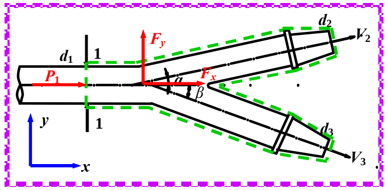
$$\Rightarrow\quad V_1=8.318(\text{m/s})\qquad Q_1=0.147(\text{m}^3/\text{s})$$

动量方程、伯努利方程综合应用3

(5) 伯努利方程

$$p_{1m} = \frac{1}{2}\rho\left(V_2^2 - V_1^2\right)$$

$$= 37450\,(\text{Pa})$$



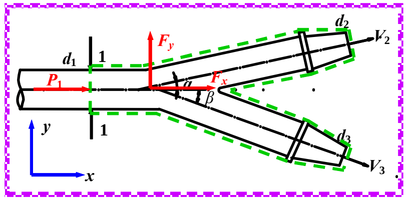
(6) 动量方程 — x方向

$$F_x + p_{1m}A_1 = -\rho V_1^2 A_1 + \rho V_2^2 A_2 \cos\alpha + \rho V_3^2 A_3 \cos\beta$$

$\Rightarrow$ $F_x = -240.3\,(\text{N})$

动量方程、伯努利方程综合应用4

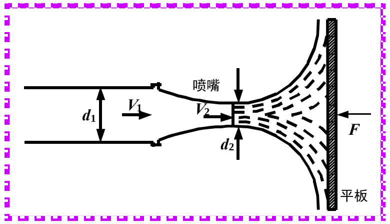
(6) 动量方程 — y方向



$$F_y = \rho V_2^2 A_2 \sin\alpha - \rho V_3^2 A_3 \sin\beta = 25.37\,(\text{N})$$

动量方程、伯努利方程综合应用5

水从水平放置的带有喷嘴管道流出后，喷到一垂直平板上。已知：d_1= 80 mm，d_2= 40mm。若平衡平板所需的水平力为502.4N，求：(1) 喷嘴进口处的表压强、水流体积流量；(2) 固定喷嘴所需的水平方向的力。（不计重力和摩擦力）



动量方程、伯努利方程综合应用6

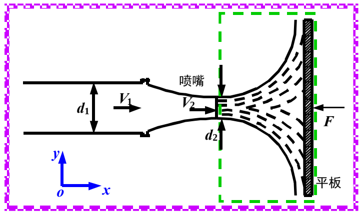
1 求流量 Q

(1) 坐标系

(2) 控制体

(3) 受力分析 F

(4) 动量方程

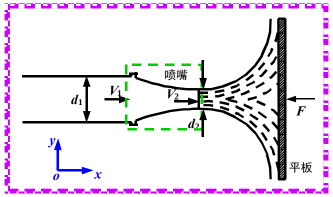


$F = \rho V_2^2 A_2$ $\Rightarrow$ $V_2 = 20\,(\text{m/s})$

$\Rightarrow$ $Q = \dfrac{\pi}{4} d_2^2 V_2 = 0.025\,(\text{m}^3/\text{s})$

动量方程、伯努利方程综合应用7

2 求喷嘴进口表压



(1) 连续方程

$$V_1A_1 = V_2A_2 = Q$$

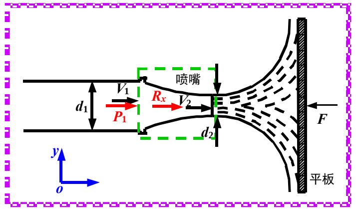
$$\Rightarrow V_1 = 4.97\ \text{(m/s)}$$

(2) 伯努利方程

$$\Rightarrow p_{1m} = \frac{1}{2}\rho\left(V_2^2 - V_1^2\right) = 187649.55\ \text{(Pa)}$$

动量方程、伯努利方程综合应用8

3 固定喷嘴的力R_x



(1) 控制体

(2) 受力分析

R_x，P_1

(3) 动量方程 — x方向

$$R_x + p_{1m}A_1 = \rho Q(V_2 - V_1)$$

$$\Rightarrow R_x = -567.5\ \text{(N)}$$

积分形式控制方程小结

雷诺输运定理 ⇒ $\frac{D\Phi_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\phi d\tau + \int_{CS}\phi\vec{V}\cdot\vec{n}dS$

质量守恒 ⇒ 连续方程 ⇒ $\Phi = M$ ， $\varphi = \rho$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\tau + \int_{CS}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}dS = 0$$

控制体内物理量随时间的变化率

动量定理 ⇒ 动量方程 ⇒ $\Phi = \vec{k}$ ， $\phi = \rho\vec{V}$

$$\sum\vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\vec{V}d\tau + \int_{CS}\rho\vec{V}\vec{V}\cdot\vec{n}dS$$

物理量流出控制体的净流率

能量守恒 ⇒ 能量方程 ⇒ $\Phi = E$ ， $\phi = \rho e$

作业

作业：P.242～246

- 6 – 7
- 6 – 17
- 6 – 18
- 6 – 28

小结1

系统和控制体

雷诺输运定理各项的物理意义

积分形式控制方程中各项的物理意义

连续方程、动量方程、能量方程

小结2

积分形式控制方程的简化

定常流动、不可压缩流体、有限个进出口且参数均布

连续方程、动量方程的求解

坐标系、控制体、受力分析、速度和力的正负号判断

小结3

公式

雷诺输运方程

$$\frac{DN_{sys}}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\phi d\tau+\int_{CS}\phi\vec{V}\cdot\vec{n}dS$$

连续方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\tau+\int_{CS}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}dS=0$$

小结4

定常流动 $\int_{CS}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}dS=0$

均质不可压缩 $\int_{CS}\vec{V}\cdot\vec{n}dS=0$

流体仅在控制面的有限个区域流入流出且 ρ，V 在进出口截面均布

$\sum\dot{m}_{in}=\sum\dot{m}_{out}$ $\sum Q_{in}=\sum Q_{out}$

小结5

- 动量方程

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\vec{V}d\tau + \int_{CS}\rho\vec{V}\vec{V}\cdot\vec{n}dS$$

定常流动 $\sum \vec{F} = \int_{CS}\rho\vec{V}\vec{V}\cdot\vec{n}dS$

流体仅在控制面的有限个区域流入流出且 ρ，V 在进出口截面均布

$$\sum \vec{F} = \sum\left(\dot{m}_i\vec{V}_i\right)_{out} - \sum\left(\dot{m}_i\vec{V}_i\right)_{in}$$

小结6

- 运动控制体

雷诺输运方程 $\frac{DN_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\phi d\tau + \int_{CS}\phi\vec{V}_r\cdot\vec{n}dS$

连续方程 $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\tau + \int_{CS}\rho\vec{V}_r\cdot\vec{n}dS = 0$

动量方程 $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\vec{V}_r d\tau + \int_{CS}\rho\vec{V}_r\vec{V}_r\cdot\vec{n}dS = 0$

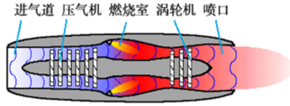
达·芬奇

- 意大利，艺术大师，科学巨匠，人类智慧的象征

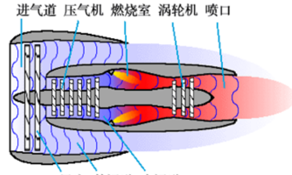
Leonardo da Vinci
1452-1519

- 理论脱离实践是最大的不幸”，实践应以好的理论为基础，真理只有一个，不在宗教中而在科学中
- 太阳中心说，月球不发光，幻想利用太阳能
- 连通器原理，惯性原理，杠杆原理、原子能
- 近代生理解剖学的始祖，血液的功能，心脏腔室，瓣膜，提出老年人的死因之一是动脉硬化
- 发明了飞行机械、直升飞机、降落伞、机关枪、手榴弹、坦克车、潜水艇、双层船壳战舰、起重机等等
- 还在数学领域和水利工程等方面作出了重大的贡献

动量方程21



涡轮喷气发动机
排气速度：550 ~ 600 m/s
总增压比：8 ~ 12

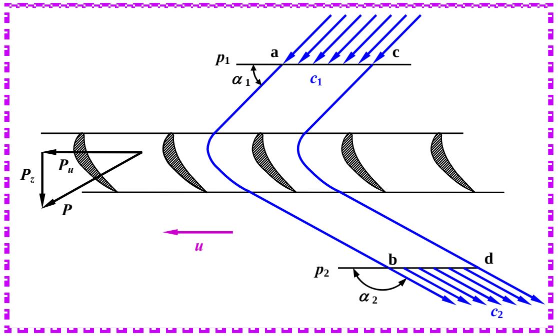


涡轮风扇发动机
高涵道比涡扇发动机总增压比：35 ~ 45

$$F = \dot{m}\left(V - V_0\right)$$

动量方程22

动量方程23



$$P_u = -R_u = \dot{m}\left[c_2\cos(\pi-\alpha_2)+c_1\cos\alpha_1\right]$$

动量矩定理1

动量矩方程 ⟹ 系统的动量矩定理

moment-of-momentum equation

- 动量矩为H，动量矩定理

⟹ $\sum \vec{T} = \frac{D\vec{H}}{Dt}$　　其中　$\vec{H}_{sys} = \int_{sys} \rho\vec{r}\times\vec{V}d\tau$

Φ　　ϕ

初始时刻系统与控制体重合

⟹ $$\sum \vec{T} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{r}\times\vec{V}\rho d\tau + \int_{CS} \vec{r}\times\vec{V}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}dS$$

动量矩定理2

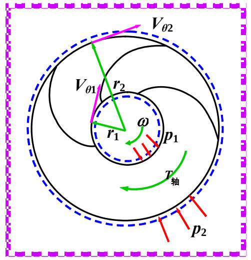
系统的合力矩　$\vec{T} = \vec{r}\times\vec{F}_s + \int_\tau \vec{r}\times\vec{g}\rho d\tau + \vec{T}_{\text{轴}}$

定常流动，忽略表面力和对称质量力力矩

⟹ $\vec{T}_{\text{轴}} = \int_{CS} \vec{r}\times\vec{V}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}dS$

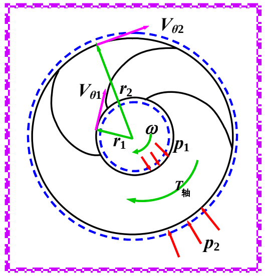
- 控制体只有一个进口、一个出口，流动参数在进出口区域均布

⟹ $\vec{T}_{\text{轴}} = \dot{m}\left(\vec{r}_2\times\vec{V}_2 - \vec{r}_1\times\vec{V}_1\right)$



动量矩定理3

取 z 轴与转轴重合，只使用沿转轴方向的方程

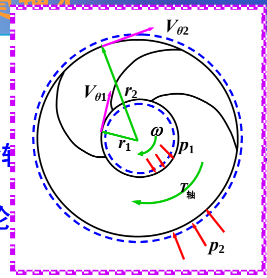


$$T_{轴} = \dot{m}\left(r_2 V_{\theta 2} - r_1 V_{\theta 1}\right)$$

$V_{\theta 1}, V_{\theta 2}$ ⇨ 进出口截面绝对速度沿叶轮切向的分量

r_1, r_2 ⇨ $V_{\theta 1}$、$V_{\theta 2}$ 距转轴的距离

动量矩定理4



- V_θ 与叶轮 相反为负
- $T_{轴}$ 与叶轮 相反为负

$T_{轴} > 0$ ⇨ 向流体输入能量的原动机，如风扇、泵、压缩机、风机等

$T_{轴} < 0$ ⇨ 从流体中吸收能量的机械，如涡轮机等