第 9 章 （之 4）（总第 46 次）

教学内容：§9.3 可降阶的高阶微分方程

**1．求下列微分方程的通解.

（1） $xy''+y'=0$；

解： $\because\ xy''+y'=0$ 是一不显含因变量 y 的二阶方程，

$$\text{令}\ p=y' \Rightarrow y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \qquad \therefore xp'+p=0, \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

$$\Rightarrow \int\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \ln p=-\ln x+\ln C_1 \quad \Rightarrow p=\frac{C_1}{x},$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{C_1}{x}, \quad \mathrm{d}y=\frac{C_1}{x}\mathrm{d}x, \quad \int\mathrm{d}y=\int\frac{C_1}{x}\mathrm{d}x, \quad y=C_1\ln x+C_2 .$$

（2） $(1+x^2)y''+2xy'=1$；

解： $y''+\dfrac{2x}{1+x^2}y'=\dfrac{1}{1+x^2}$， $\qquad y'=\dfrac{1}{1+x^2}(x+C_1)$，

$$y=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1\arctan x+C_2 .$$

（3） $yy''+(y')^2=0$；

解： $\because yy''+(y')^2=0$， 令 $p=y'$， 则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程有

$$y\cdot p\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0, \quad \Rightarrow \quad p(y\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p)=0,$$

因为求通解，所以 p 满足 $\qquad y\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p=0$.

$$\text{由}\ \frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{-\mathrm{d}y}{y} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\int\frac{\mathrm{d}y}{y}, \qquad \Rightarrow \ln p=-\ln y+\ln C_1' \Rightarrow p=\frac{C_1}{y},$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{C_1}{y} \quad \Rightarrow \quad y\mathrm{d}y=C_1\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int y\mathrm{d}y=\int C_1\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow y^2=C_1x+C_2 .$$

$\therefore$ 通解：$y^2=C_1x+C_2$.

（4）$(1+y^2)y''=2yy'^2$

解：令：$y'=p(y),\ \ y''=pp'$，得 $(1+y^2)p\cdot p'=2p^2y$，

即 $\dfrac{\mathrm{d}\,p}{p}=\dfrac{2y}{1+y^2}\mathrm{d}\,y$， 得 $p=C_1(1+y^2)$，

所以 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{1+y^2}=C_1\,\mathrm{d}\,x$，通解为：$\arctan y=C_1x+C_2$.

**2．解下列初值问题：

（1）．$\begin{cases}y'+y''=xy''\\ y'(2)=1,y(2)=1\end{cases}$

解：令 $p=y'\ \Rightarrow\ y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ $\quad\therefore\ p+p'=xp'\ \Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x-1}$

$$\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}p}{p}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}\quad\Rightarrow\ \ln p=\ln(x-1)+\ln C_1\quad\Rightarrow\ p=C_1(x-1)\overset{p(2)=1}{\Rightarrow}C_1=1$$

$\therefore\quad\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-1$，$\quad\mathrm{d}y=(x-1)\mathrm{d}x$，$\quad y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+C_2\overset{y(2)=1}{\Longrightarrow}C_2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\quad y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{1}{2}$

（2）．$\begin{cases}y''-2yy'^3=0\\ y'(0)=-1,y(0)=1\end{cases}$

解：令：$y'=p(y),\ \ y''=pp'$，得 $p\cdot p'=2p^3y$，

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{p^2}=2y\,\mathrm{d}\,y\quad\Rightarrow\quad-\frac{1}{p}=y^2+C_1\ \overset{p(1)=-1}{\Longrightarrow}\ C_1=0$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{y^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{3}y^3=-x+C_2\ \overset{y(0)=1}{\Longrightarrow}\ C_2=\frac{1}{3}$$

特解为：$\dfrac{y^3}{3}=-x+\dfrac{1}{3}$.

**3．一个质量为 $m=1\,\mathrm{kg}$ 的爆竹，以初速度 $v_0=21\,\mathrm{m/s}$ 铅直向上飞向高空，已知在上升过程中空气对它的阻力与速度 v 的平方成正比，比例系数为 $k=0.025\,\mathrm{kg/m}$，求该爆竹能够

到达的最高高度.

解：设在时刻 t，物体的高度为 x，根据牛顿运动第二定理有 $m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}=-mg-k\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$.

即 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}=-g-k\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$

令 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，则原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-g-kv^2$，分离变量并积分得

$$v=\sqrt{\frac{g}{k}}\tan(C-\sqrt{kg}\ t)=14\sqrt{2}\tan\left(C-\frac{7}{20}\sqrt{2}\ t\right)$$

由初始条件 $v(0)=21$，　　得 $C=\arctan\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，

当 $v=0$ 时得 $T=\dfrac{10\sqrt{2}}{7}\arctan\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，

$$\therefore x=\int_0^T 14\sqrt{2}\tan(C-\frac{7}{20}\sqrt{2}\ t)dt=40\ln\cos(C-\frac{7}{20}\sqrt{2}\ t)\Big|_0^T$$

$$=-40\ln\cos\left(\arctan\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)=20\ln\frac{17}{8}\approx 15.1(\mathrm{m})$$

第 9 章　（之 5）（总第 47 次）

教学内容：§9 .4 .1 二阶线性方程和解的存在性；§9 .4 .2 二阶线性方程解的结构

**1．若 y_1,y_2 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$ 的两个解，试证 y_2-y_1 必是其对应齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解.

证明：因为 y_1,y_2 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$ 的解.

所以成立下式：

$$y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1=R(x) \qquad (1)$$
$$y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2=R(x) \qquad (2)$$

将 (1)、(2) 两式相减，得

$$(y_1''-y_2'')+P(x)(y_1'-y_2')+Q(x)(y_1-y_2)=0 \qquad (3)$$

(2) 式可写为

$$(y_1-y_2)''+P(x)(y_1-y_2)'+Q(x)(y_1-y_2)=0,$$

所以 y_1-y_2 是齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解.

*2. 验证：e^{t^2},e^{-t^2} 是微分方程 $x''-\frac{1}{t}x'-4t^2x=0$ 的两个线性无关特解，并求此方程的通解.

证明：因为

$$\left(e^{t^2}\right)''-\frac{1}{t}\left(e^{t^2}\right)'-4t^2e^{t^2}=2e^{t^2}+4t^2e^{t^2}-\frac{1}{t}\times 2te^{t^2}-4t^2e^{t^2}=0,$$

$$\left(e^{-t^2}\right)''-\frac{1}{t}\left(e^{-t^2}\right)'-4t^2e^{-t^2}=-2e^{-t^2}+4t^2e^{t^2}-\frac{1}{t}\times(-2te^{-t^2})-4t^2e^{t^2}=0,$$

故 e^{t^2},e^{-t^2} 是方程的解，且 $\frac{e^{t^2}}{e^{-t^2}}=e^{2t^2}\neq$ 常数.

于是 e^{t^2},e^{-t^2} 是方程线性无关的解（构成基本解组），故方程的通解为

$$x=C_1e^{t^2}+C_2e^{-t^2},$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

*3. 已知函数 $y_1=e^x,y_2=x$ 是方程 $(1-x)y''+xy'-y=0$ 的两解，试求该方程满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 的特解.

解：方程的通解为 $y=c_1e^x+c_2x$，将初始条件代入，有：

$$y(0)=c_1=1,$$
$$y'(0)=c_1e^x+c_2=c_1+c_2=0,$$

解得 c_1,c_2 为： $c_1=1,c_2=-1$，

所以特解为： $y=e^x-x$.

***4. 已知 $y_1=1,y_2=1+x,y_3=1+x^2$ 是方程 $y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=\frac{2}{x^2}$ 的三个特解，问能否求出该方程的通解？若能则求出通解来.

解：按（1）证明可知 $y_2-y_1=x$, $y_3-y_1=x^2$ 分别是其对应齐次方程 $y''-\dfrac{2}{x}y'+\dfrac{2}{x^2}y=0$ 的解，并且线性无关，所以 $C_1x+C_2x^2$ 为齐次方程的通解.

所以原方程的通解可以表示为：$y=C_1x+C_2x^2+1$.

**5．设 $x_1(t)$ 是非齐次线性方程

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_2(t)x(t)=f_1(t) \qquad (1)$$

的解．$x_2(t)$ 是方程

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_2(t)x(t)=f_2(t) \qquad (2)$$

的解．试证明 $x=x_1(t)+x_2(t)$

是方程

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_2(t)x(t)=f_1(t)+f_2(t) \qquad (3)$$

的解.

解：因为 $x_1(t),x_2(t)$ 分别为方程（1）和方程（2）的解，所以

$$x_1''(t)+a_1(t)x_1'(t)+a_2(t)x_1(t)\equiv f_1(t) \qquad (1)'$$

$$x_2''(t)+a_1(t)x_2'(t)+a_2(t)x_2(t)\equiv f_2(t) \qquad (2)'$$

$(1)'+(2)'$ 得：

$$\left(x_1(t)+x_2(t)\right)''+a_1(t)\left(x_1(t)+x_2(t)\right)'+a_2(t)\left(x_1(t)+x_2(t)\right)'=f_1(t)+f_2(t)$$

即 $x=x_1(t)+x_2(t)$ 是方程（3）的解.

第 9 章 （之 6）（总第 48 次）

教学内容：§9.4.3 二阶线性常系数方程的解法

**1．填空：

（1）方程 $y''+8y=0$ 的通解为 $y=$______________.

解：$y=c_1\cos 2\sqrt{2}x+c_2\sin 2\sqrt{2}x$.

（2）方程 $y''+6y'+25y=0$ 的通解为 $y=$______________.

解：$y=e^{-3x}(c_1\cos 4x+c_2\sin 4x)$.

（3）方程 $y''-8y'+15y=0$ 的通解为 $y=$______________.

解：$y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{5x}$.

（4）方程 $5y''+2\sqrt{15}y'+3y=0$ 的通解为 $y=$______________.

解：$y=e^{-\frac{\sqrt{15}}{5}x}(C_1x+C_2)$.

（5）方程 $y''+6\ y'+py=0$ 的通解为 $y=\mathrm{e}^{kx}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$，则 $p=$___，$k=$_____.

解：11，-3 .

（6）设 $y=\mathrm{e}^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$ $(C_1, C_2$ 为任意常数)为某二阶线性常系数齐次方程的通解，则该方程为_____________________.

解：$y''-2\ y'+2y=0$.

**2．求解下列初值问题：

（1）$y''-8y'+16y=0,\quad y(1)=e^4,\quad y'(1)=0$；

解：$\because \lambda^2-8\lambda+16=(\lambda-4)^2=0$，　　$\therefore \lambda_{1,2}=4$，

通解为：$y=(c_1+c_2x)e^{4x}$.

将初始条件代入，有　$y(1)=(c_1+c_2)e^4=e^4$，

$y'(1)=c_2e^{4x}+4(c_1+c_2x)e^{4x}=c_2e^4+4(c_1+c_2)e^4=c_2e^4+4e^4=0$

得到：$c_1=5\quad c_2=-4$，　　所以特解为：$y=(5-4x)e^{4x}$.

（2）$y''+4y'+29y=0,\qquad y(\frac{\pi}{2})=1,\ \ y'(\frac{\pi}{2})=3$；

解：$\lambda^2+4\lambda+29=0$，　$\lambda=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-116}}{2}=\dfrac{-4\pm 10i}{2}=-2\pm 5i$，

通解为： $y=e^{-2x}(c_1\cos 5x+c_2\sin 5x)$.

代入初始条件有： $y(\frac{\pi}{2})=e^{-\pi}(0+c_2)=1 \quad\Rightarrow\quad c_2=e^{\pi}$ ，

$$y'(\frac{\pi}{2})=-2e^{-2x}(c_1\cos 5x+c_2\sin 5x)+e^{-2x}(-5c_1\sin 5x+5c_2\cos 5x),$$

得： $c_1=-e^{\pi}$.　　特解为： $y=e^{\pi-2x}(-\cos 5x+\sin 5x)$.

**3．求解初值问题

$$\begin{cases} y'+2y+\int_0^x y\,\mathrm{d}\,x=1 \\ y(0)=1 \end{cases} \qquad x\geq 0$$

解：将原方程对 x 求导得 $\qquad y''+2y'+y=0 \qquad (1)$

且有 $\qquad y'(0)=1-2y(0)=-1$

微分方程（1）的通解为： $\qquad y=e^{-x}(C_1x+C_2)$ ，

代入初始条件 $y(0)=1, y'(0)=-1$，得 $C_1=0, C_2=1$，

故所求问题的解为： $y=e^{-x}$.

***4. 设函数 $\varphi(x)$ 二阶连续可微，且满足方程 $\varphi(x)=1+\int_0^x(x-u)\varphi(u)\,\mathrm{d}\,u$，求函数 $\varphi(x)$.

解：原方程关于 x 求导得

$$\varphi'(x)=\int_0^x\varphi(u)\,\mathrm{d}\,u+x\varphi(x)-x\varphi(x)=\int_0^x\varphi(u)\,\mathrm{d}\,u\,,\varphi'(0)=0\,,$$

再求导得： $\varphi''(x)=\varphi(x)$ ，　　　　　且由原方程还有：$\varphi(0)=1$，

微分方程的通解为： $\varphi(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$ ，

代入条件 $\varphi(0)=1, \varphi'(0)=0$ ，得 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$ ，

故所求函数为： $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\mathrm{ch}\,x$.

***5．长为 100cm 的链条从桌面上由静止状态开始无摩擦地沿桌子边缘下滑．设运动开始时，链条已有 20cm 垂于桌面下，试求链条全部从桌子边缘滑下需多少时间．

解：设链条单位长度的质量为 ρ ，则链条的质量为 100ρ ．再设当时刻 t 时，链条的下端距桌面的距离为 $x(t)$ ，则根据牛顿第二定律有：

$$100\rho \frac{d^2x}{dt^2} = \rho g x，\qquad 即 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{100}x = 0 .$$

又据题意知：$x(0)=20$， $x'(0)=0$，所以 $x(t)$ 满足下列初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{g}{100}x = 0 \\ x(0)=20, \quad x'(0)=0 \end{cases}$$

解得方程的通解为：$x = c_1 e^{\frac{\sqrt{g}}{10}t} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{g}}{10}t}$.

又因为有初始条件：$\begin{cases} x(0)=20 \\ x'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 10 \\ c_2 = 10 \end{cases}$

所以 $\qquad x = 10e^{\frac{\sqrt{g}}{10}t} + 10e^{-\frac{\sqrt{g}}{10}t}$.

又当链条全部从桌子边缘滑下时，$x=100$，求解t，得：$100 = 10e^{\frac{\sqrt{g}}{10}t} + 10e^{-\frac{\sqrt{g}}{10}t}$，

即：$\qquad ch\dfrac{\sqrt{g}}{10}t = 5$， $\qquad t = \dfrac{10}{\sqrt{g}} arch 5$.

***6．设弹簧的上端固定，下端挂一个质量为 2 千克的物体，使弹簧伸长 2 厘米达到平衡，现将物体稍下拉，然后放手使弹簧由静止开始运动，试求由此所产生的振动的周期.

解：取物体的平衡位置为坐标原点，x 轴竖直向下， 设 t 时刻物体 m 位于 $x(t)$ 处，由牛顿

第二定律： $\quad 2\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 2g - g(x+2) = -gx$ ，

其中 $g = 980$ 厘米/秒 ^{2} 其解为： $\quad x = C_1 \cos\sqrt{\dfrac{g}{2}}t + C_2 \sin\sqrt{\dfrac{g}{2}}t$ ，

振动周期为 $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{g}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{490}} \approx 0.28$.