191 期终卷参考答案

一、求下列极限（每小题 5 分，共 10 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2dt}{\sin^{10}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2dt}{x^{10}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-2x\cos x^4}{10x^9}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^4}{5x^8}$　　3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^8}{5x^8}$

$=\dfrac{1}{10}$　　2 分

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(a+e^x)^{\frac{1}{x}}$， $a>0$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}(a+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\exp\{\dfrac{1}{x}\ln(a+e^x)\}$　　2 分

$=\exp\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(a+e^x)}{x}\}=\exp\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{e^x}{a+e^x}}{1}\}$　　2 分

$=e$　　1 分

二、计算题（每小题 6 分，共 18 分）

1. 函数 $y=y(x)$ 由方程 $\boldsymbol{x+\tan y=y,}$确定，求 $\boldsymbol{y'(x), y''(x)}$..

解：　对方程两边求导：　$1+y'(x)\sec^2 y=y'$,　　$y'(x)=-\dfrac{1}{\tan^2 y}=-\cot^2 y$　　3 分

$y''(x)=-2\cot y(-\csc^2 y)=-2\csc^2 y\cot^3 y$　　3 分

或者 $y''=-2\dfrac{\cos^3 y}{\sin^5 y}=\dfrac{-2}{\sin^2 y\tan^3 y}$

2. 求曲线 $\boldsymbol{\rho=a\sin 2\theta(a>0)}$ 在 $\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{4}}$ 处的切线方程和法线方程.

解：$\begin{cases}x=a\sin 2\theta\cos\theta\\ y=a\sin 2\theta\sin\theta\end{cases}$　　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{4}}$ 时，$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$　　2 分

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a[2\cos 2\theta\sin\theta+\sin 2\theta\cos\theta]}{a[2\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta]},\qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=-1$$ 2 分

切线方程：$x+y=\sqrt{2}a$，法线方程：$y=x$ 2 分

3. 求函数 $\boldsymbol{y=xe^{-x}}$ 的拐点

解：$y'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$，$y''(x)=-e^{-x}+(x-1)e^{-x}=e^{-x}(x-2)$

令 $y''(x)=0$, 得 $x_0=2$ 3 分

$x<2, y''(x)<0; x>2, y''(x)>0$，

拐点为 $(2,2e^{-2})$ 3 分

三、BCBBA

四、求下列不定积分（每小题 6 分，共 18 分）

1. $\int x^2e^{-x}dx$

解：$\int x^2e^{-x}dx=-\int x^2de^{-x}=-x^2e^{-x}+\int e^{-x}dx^2$ 2 分

$=-x^2e^{-x}-2\int xde^{-x}=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}+2\int e^{-x}dx$ 2 分

$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C$ 2 分

2. $\int\frac{1}{x^3-2x^2+x}dx$

解：$\int\frac{1}{x^3-2x^2+x}dx=\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2})dx$ 3 分

$=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$ 3 分

3. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln^2 x}$

解： 原式$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_{0^+}^{\frac{1}{2}}$ 4 分

$$=\frac{1}{\ln 2}$$ 2 分

五、 (6 分) 证明不等式 $e^{\pi}>\pi^{e}$

证明一：设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ 2 分

显然 $x\geq e$ 时， $f'(x)\leq 0$, $f(x)$ 严格单调递减. 2 分

当 $\pi>e$ 时， $f(\pi)<f(e)$, 即 $\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{\ln e}{e}$,

得 $\pi\ln e>e\ln\pi$, 所以 $e^{\pi}>\pi^{e}$ 2 分

证明二：设 $f(x)=x\ln e-e\ln x$, $f'(x)=1-\frac{e}{x}$, 2 分

显然 $x\geq e$ 时， $f'(x)\geq 0$, $f(x)$ 严格单调递增. 2 分

当 $\pi>e$ 时， $f(\pi)>f(e)=0$, 即 $\pi\ln e>e\ln\pi$,

所以 $e^{\pi}>\pi^{e}$ 2 分

六、（6 分）计算不定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx$

解：原式 $=\int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}x(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}xd(e^{x+\frac{1}{x}})$ 3 分

$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}dx+xe^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}dx=\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}$ 3 分

七、（8 分）求 $f(x)=xe^{1+x^2}$ 的带皮亚诺余项的 2n+1 阶的麦克劳林公式

解：因为 $e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$ 2 分

在上式中将 x^2 代入，得

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}+o(x^{2n})$$ 2 分

$$f(x)=ex.e^{x^2}=ex[1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}+o(x^{2n})]$$ 2 分

$$=ex+ex^3+\frac{e}{2!}x^5+\ldots+\frac{e}{n!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$$ 2 分

八、（8 分）设 A>0,D 是由曲线 $y=A\sin x, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 及直线 $y=0, x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域，V_1,V_2 分别表示 D 绕 x 轴与 y 轴旋转成的旋转体的体积，若 $V_1=V_2$,求 A 的值.

解：$V_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi A^2\sin^2 x dx=\frac{\pi^2}{4}A^2$ 3 分

$V_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi xA\sin x dx=2\pi A$ 3 分

$A=\frac{8}{\pi}$ 2 分

九、（6 分）设函数 $f(x)$ 在[0,1]连续，在(0,1)内二阶可导，且 $f''(x)\geq 0$,

证明：$\int_0^1 f(x^\alpha)\mathrm{d}x\geq f(\frac{1}{\alpha+1})\ (\alpha>0)$

证明：由 $f''(x)\geq 0$, 知 $f(x)$ 是[0,1]上的凸函数，对 $\forall x\in[0,1]$，

$$f(x)\geq f(\frac{1}{\alpha+1})+f'(\frac{1}{\alpha+1})(x-\frac{1}{\alpha+1})$$ 3 分

取 $x=x^\alpha$ 代入得

$$f(x^\alpha)\geq f(\frac{1}{\alpha+1})+f'(\frac{1}{\alpha+1})(x^\alpha-\frac{1}{\alpha+1})$$

上式两边同时从 0 到 1 积分，得

$$\int_0^1 f(x^\alpha)dx\geq f(\frac{1}{\alpha+1})$$ 3 分