第 11 章 （之 6）（总第 62 次）

教学内容：§11.6 泰勒展开

1．填空：

*（1）设$u = xy + \dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$=________ ．

答： $\dfrac{2y}{x^3}$．

*（2）设$u = x\ln xy$，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$= ________.

答： $\dfrac{1}{y}$．

**（3）设$z = e^x \sin y + e^{-x}\cos y$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$= ________.

答：0.

**（4）设$u = \arctan(1+yz) + yx$，则$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} =$________________。

答：0.

**2．设$z = f(x,u)$具有连续的二阶偏导数，而$u = xy$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$．

解:$z_x = f_x + yf_u$，　　　　$z_{xx} = f_{xx} + 2yf_{xu} + y^2 f_{uu}$．

**3．设$z = y^2 f(xy^2) + xf(x^3y^4)$,　求 $z_{xy}(\dfrac{1}{2},2)$．

解：$z_x = y^4 f'(xy^2) + f(x^3y^4) + 3x^3y^4 f(x^3y^4)$，

$$z_{xy} = 4y^3 f'(xy^2) + y^4 f''(xy^2)\cdot 2yx + f'(x^3y^4)\cdot 4y^3x^3$$
$$+12x^3y^3 f'(x^3y^4) + 3x^3y^4 f''(x^3y^4)\cdot 4x^3y^3 \quad ,$$

$$\therefore z_{xy}(\frac{1}{2},2) = 32f'(2) + 32f''(2) + 4f'(2) + 12f'(2) + 24f''(2)$$

$$= 48f'(2) + 56f''(2)\,.$$

**4．函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+2xy-y^2=1$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{2x+2y}{2x-2y}=\dfrac{x+y}{y-x}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(1+y')(y-x)-(y'-1)(x+y)}{(y-x)^2}$$

$$=\frac{-2(x^2+2xy-y^2)}{(y-x)^3}=\frac{2}{(x-y)^3}.$$

***5．求由方程 $x+z=e^{y+z}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的所有二阶偏导数.

解：$1+\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{y+z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\therefore\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{e^{y+z}-1}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-e^{y+z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(e^{y+z}-1)^2}=-\frac{e^{y+z}}{(e^{y+z}-1)^3},$$

因为 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{y+z}(1+\dfrac{\partial z}{\partial y})$, $\therefore\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{e^{y+z}}{1-e^{y+z}}=-1+\dfrac{1}{1-e^{y+z}}$.

则 $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{e^{y+z}(\dfrac{\partial z}{\partial y}+1)}{(1-e^{y+z})^2}=\frac{e^{y+z}}{(1-e^{y+z})^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-e^{y+z}(\dfrac{\partial z}{\partial y}+1)}{(1-e^{y+z})^2}=\frac{-e^{y+z}}{(1-e^{y+z})^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{e^{y+z}\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(1-e^{y+z})^2}=\frac{e^{y+z}}{(e^{y+z}-1)^3}.$$

***6．设 $z=xf(\dfrac{y}{x})+g(\dfrac{y}{x})$，试证明 $x^2z_{xx}+2xyz_{xy}+y^2z_{yy}=0$.

证明：$z_x=f(\dfrac{y}{x})+xf'(\dfrac{y}{x})(\dfrac{-y}{x^2})+g'(\dfrac{y}{x})(\dfrac{-y}{x^2})=f(\dfrac{y}{x})-f'(\dfrac{y}{x})\dfrac{y}{x}-g'(\dfrac{y}{x})\dfrac{y}{x^2}$,

$z_y=f'(\dfrac{y}{x})+\dfrac{1}{x}g'(\dfrac{y}{x})$,

$$z_{xx}=f''(\frac{y}{x})\frac{y^2}{x^3}+g''(\frac{y}{x})\frac{y^2}{x^4}+2g'(\frac{y}{x})\frac{y}{x^3}$$

$$z_{xy}=\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})-f'(\frac{y}{x})\frac{1}{x}-f''(\frac{y}{x})\frac{y}{x^2}-g'(\frac{y}{x})\frac{1}{x^2}-g''(\frac{y}{x})\frac{y}{x^3}$$

$$=-f''(\frac{y}{x})\frac{y}{x^2}-g'(\frac{y}{x})\frac{1}{x^2}-g''(\frac{y}{x})\frac{y}{x^3}$$

$$z_{yy}=f''(\frac{y}{x})\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}g''(\frac{y}{x})$$

$$x^2z_{xx}+2xyz_{xy}+y^2z_{yy}=f''(\frac{y}{x})\frac{y^2}{x}+g''(\frac{y}{x})\frac{y^2}{x^2}+2g'(\frac{y}{x})\frac{y}{x}$$

$$-(2f''(\frac{y}{x})\frac{y^2}{x}+2g'(\frac{y}{x})\frac{y}{x}+2g''(\frac{y}{x})\frac{y^2}{x^2})+f''(\frac{y}{x})\frac{y^2}{x}+\frac{y^2}{x^2}g''(\frac{y}{x})$$

$$=0$$

***7．对于由方程$F(x,y,z)=0$确定的隐函数$z=(x,y)$，试求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解：由公式$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$两边对$x$求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{(F_{xx}+F_{xz}\frac{\partial z}{\partial x})F_z-F_x(F_{zx}+F_{zz}\frac{\partial z}{\partial x})}{F_z{}^2}$$

$$=\frac{F_x(F_{zx}+F_{zz}\frac{-F_x}{F_z})-(F_{xx}+F_{xz}\frac{-F_x}{F_z})F_z}{F_z{}^2}$$

$$=\frac{F_xF_zF_{zx}-F_{zz}(F_x)^2-(F_z)^2F_{xx}+F_{xz}F_xF_z}{F_z{}^3}$$

$$=\frac{2F_xF_zF_{xz}-(F_x)^2F_{zz}-(F_z)^2F_{xx}}{F_z{}^3}$$(一般约定$F_{xz}=F_{zx}$)。

第 11 章 （之 7）（总第 63 次）

教学内容：§11.7.1 多元函数的极值

1．选择题：

*(1) 设函数$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$，则点$(0,0)$是函数z的 (　　)

（A）极大值点但非最大值点；　　（B）极大值点且是最大值点；

（C）极小值点但非最小值点；　　（D）极小值点且是最小值点.

答：(B)

**(2) 设函数$z = f(x,y)$具有二阶连续偏导数，在点$P_0 = (x_0, y_0)$处，有

$$f_x(P_0) = 0, f_y(P_0) = 0, f_{xx}(P_0) = f_{yy}(P_0) = 0, f_{xy}(P_0) = f_{yx}(P_0) = 2$$，则(　　)

（A）点P_0是函数z的极大值点；　　（B）点P_0是函数z的极小值点；

（C）点P_0非函数z的极值点；　　（D）条件不够，无法判定.

答：(C)

**（3）“$f(x_0, y_0)$同时是一元函数$f(x, y_0)$与$f(x_0, y)$的极大值”是“$f(x_0, y_0)$是二元函数$f(x,y)$的极大值”的 (　　)

（A）充分条件，非必要条件；　　（B）必要条件，非充分条件；

（C）充分必要条件；　　（D）既非必要条件，又非充分条件.

解：（B）

**2. 设函数$z = z(x,y)$由方程$\frac{1}{2}x^2 + 3xy - y^2 - 5x + 5y + e^z + 2z = 4$确定，则函数$z$的驻点为 ________ .

答：（$-\frac{5}{11}$，$\frac{20}{11}$）

**3. 求函数$z = 2x^2 - 3xy + 2y^2 + 4x - 3y + 1$的极值.

答：由$\begin{cases} z_x = 4x - 3y + 4 = 0 \\ z_y = -3x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$，得驻点 $(-1, 0)$.

$$D = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 7 > 0,$$

$$z_{xx}(-1,0) = 4 > 0.$$

所以函数在点$(-1, 0)$处取极小值$z(-1,0) = -1$.

***4．求函数 $f(x,y)=4xy-2x^2y+2xy^2-x^2y^2$ 的极值．

解：$\frac{\partial f}{\partial x}=4y-4xy+2y^2-2xy^2$， $\frac{\partial f}{\partial y}=4x-2x^2+4xy-2x^2y$，

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-4y-2y^2$， $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4-4x+4y-4xy$，

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4x-2x^2$．

令$\begin{cases}4y-4xy+2y^2-2xy^2=0\\4x-2x^2+4xy-2x^2y=0\end{cases}$，解得驻点：$(1,-1),(0,0),(2,0),(0,-2),(2,-2)$．

$H\big|_{(1,-1)}=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=4>0, A=2>0$，$\therefore (1,-1)$为极小值点， $f(1,-1)=-1$．

类似可求其他各点处的 H 值：

$H\big|_{(0,0)}=-16<0,\ H\big|_{(2,0)}=-16<0,\ H\big|_{(0,-2)}=-16<0,\ H\big|_{(2,-2)}=-16<0$。

$\therefore$ $(0,0),(2,0),(0,-2),(2,-2)$ 为鞍点．

**5．求由方程 $x^2+y^2+z^2+2x-6z-6=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ $(z>3)$ 的极值。

解：两边对 x、y 求偏导：$2x+2zz_x+2-6z_x=0$ (1)

$2y+2zz_y-6z_y=0$ (2)

$$\begin{cases}z_x=\frac{x+1}{3-z}=0\\z_y=\frac{y}{3-z}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$$

代入原式得 $z=7, z=-1$（舍去）.

将（1）对 x 求偏导： $2+2z_x^2+2zz_{xx}-6z_{xx}=0$，

将（2）对 y 求偏导： $2+2z_y^2+2zz_{yy}-6z_{yy}=0$，

将（2）对 x 求偏导： $2z_xz_y+2zz_{xy}-6z_{xy}=0$，

$\therefore\ z_{xx}=\dfrac{1+z_x^2}{3-z}$, $\quad z_{yy}=\dfrac{1+z_y^2}{3-z}$, $\quad z_{xy}=\dfrac{z_x z_y}{3-z}$.

当 $x=-1, y=0$ 时，$z_{xx}=\dfrac{1}{3-z}<0, z_{yy}=\dfrac{1}{3-z}, z_{xy}=0$

$$H=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{3-z} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{3-z}\end{vmatrix}>0,$$

故 $z=7$ 时，$z_{xx}=\dfrac{1}{3-7}<0$，函数有极大值 7，

***6. 试证函数 $z=\left(1+e^y\right)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大点而没有极小点.

解：
$$z_x=-(1+e^y)\sin x=0 \quad \Rightarrow x=k\pi,$$

$$z_y=e^y\cos x-e^y-ye^y=0 \quad \Rightarrow y=\begin{cases}0, & x=2k\pi\\ -2, & x=(2k+1)\pi\end{cases}.$$

$z_{xx}=-(1+e^y)\cos x$， $z_{xy}=-e^y\sin x=0$， $z_{yy}=e^y(\cos x-1)-e^y-ye^y$，

$x=2k\pi$ 时

$$H=\begin{vmatrix}-(1+e^y) & 0\\ 0 & -e^y(1+y)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}>0,\quad z_{xx}=-2<0,$$

$x=(2k+1)\pi$ 时

$$H=\begin{vmatrix}1+e^y & 0\\ 0 & -e^y(3+y)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+e^{-2} & 0\\ 0 & -e^{-2}\end{vmatrix}<0,$$

所以函数有无穷多个极大值点 $\left(2k\pi,0\right)$， 无极小值点.

第 11 章（之 8）（总第 64 次）

教学内容：§11.7 [§11.7.2-§11.7.3] 最值，条件极值，拉格朗日乘子法

**1. 函数 $f(x,y,z)=z-2$ 在 $4x^2+2y^2+z^2=1$ 条件下的极大值是 （　　）

(A) 1 　　(B) 0 　　(C) -1 　　(D) -2

答：(C).

**2. 求函数$u = x - 2y + 2z$在指定约束条件$x^2 + y^2 + z^2 = 9$下的极值.

解：$L(x, y, z, \lambda) = x - 2y + 2z + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 9\right)$,

令$\dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0$，　　$\dfrac{\partial L}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0$，

$\dfrac{\partial L}{\partial z} = 2 + 2\lambda y = 0$，　　$\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$，

$\therefore x = -\dfrac{1}{2\lambda}, y = \dfrac{1}{\lambda}, z = \dfrac{-1}{\lambda}$.

代入$x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$，　　得$\lambda = \pm\dfrac{1}{2}$，$(x, y, z) = \pm(-1,2,-2)$.

$\therefore u(-1,2,-2) = -9$为极小值，　$u(1,-2,2) = 9$为极大值.

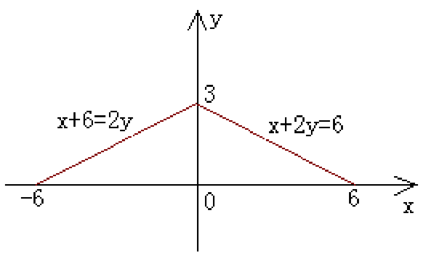
***3. 求函数$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$在区域

$D = \{(x, y) | 2y - 6 \le x \le 6 - 2y, 0 \le y \le 3\}$

上的最小值，最大值.

解：$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2$　，　$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4$，

$\therefore$　临界点为（1，2），　$f(1,2) = 0$.



以下求边界上的最值

（1）$x + 6 = 2y$，$0 \le y \le 3$：

$$f(x, y) = (2y-6)^2 + y^2 - 2(2y-6) - 4y + 5$$
$$= 5y^2 - 32y + 53$$

由$\dfrac{d}{dy}(5y^2 - 32y + 53) = 10y - 32 < 0$　可知：

当$y = 0$，取最大值　$f(-6,0) = 53$，当$y = 3$，取最小值　$f(0,3) = 2$.

（2）$x = 6 - 2y$，　$0 \le y \le 3$：

$$f(x, y) = (-2y+6)^2 + y^2 - 2(-2y+6) - 4y + 5$$
$$= 5y^2 - 24y + 29$$

当$y = 0$，取最大值　$f(6,0) = 41$，

当 $y=\frac{24}{10}$，取最小值 $f(\frac{6}{5},\frac{12}{5})=\frac{1}{5}$.

（3）当 $y=0$，$-6\le x\le 6$： $f(x,y)=x^2-2x+5=(x-1)^2+4$.

当 $x=-6$，取最大值 $f(-6,0)=53$， 当 $x=1$，取最小值 $f(1,0)=4$.

综合得：当 $x=1, y=2$ 时取最小值 $f(1,2)=0$，

当 $x=-6, y=0$ 时取最大值 $f\left(-6,0\right)=53$.

**4. 求函数 $z=x^2-2y^2+2x+2$ 在闭域 $D: x^2+4y^2\le 4$ 上的最大值和最小值.

答：由 $\begin{cases} z_x=2x+2=0 \\ z_y=-4y=0 \end{cases}$ 得 D 内驻点 $(-1,0)$，且 $z(-1,0)=1$.

在边界 $x^2+4y^2=4$ 上， $z_1=\frac{3}{2}x^2+2x \quad (-2\le x\le 2)$，

$z_1'=3x+2=0$，得驻点 $x=-\frac{2}{3}$，

$z_1(-2)=2 \qquad z_1(2)=10 \qquad z_1(-\frac{2}{3})=-\frac{2}{3}$，

$x=\pm 2$ 时 $y=0, x=-\frac{2}{3}$ 时 $y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}$,

比较后可知, 函数 z 在点 $(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\sqrt{2}), (-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\sqrt{2})$ 取最小值

$$z(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\sqrt{2})=(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\sqrt{2})=-\frac{2}{3},$$

在点 $(2,0)$ 取最大值 $z(2,0)=10$.

**5. 求表面积为 S，而体积为最大的圆柱体的体积.

解：设圆柱体的底圆半径为 r，高为 h. 则圆柱体的体积和表面积分别为

$$V=\pi r^2 h, \qquad S=2\pi r^2+2\pi rh.$$

令 $L=\pi r^2 h+\lambda\left(2\pi r^2+2\pi rh-S\right)$，

由 $\begin{cases} L_r=2\pi rh+4\lambda\pi r+2\lambda\pi h=0 \\ L_h=\pi r^2+2\lambda\pi r=0 \\ L_\lambda=2\pi r^2+2\pi rh-S=0 \end{cases}$，

得 $r=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ $,h=2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

$$V\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}},2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right)=2\pi\left(\frac{S}{6\pi}\right)^{3/2}$$

由于$(\sqrt{\frac{S}{6\pi}},\sqrt{\frac{S}{6\pi}})$为惟一可能的最值点，且该实际问题存在最大值，因此当圆柱体的底圆半径与高分别取$\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$，$2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$时，有最大体积$V_{\max}=2\pi\left(\frac{S}{6\pi}\right)^{3/2}$.

**6. 周长为 6p 的长方形，绕其一边旋转得一旋转体，试证明其体积不超过$4\pi p^3$.

证：设长方形的长为 a，宽为 b，

$$\begin{aligned}&\max.V=\pi a^2 b\\&s.t.\quad 2(a+b)=6p\end{aligned}$$

令$L=\pi a^2 b+\lambda$（$a+b-3p$），

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial a}&=2\pi ab+\lambda=0\\\frac{\partial L}{\partial b}&=\pi a^2+\lambda=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow a=2b=2p,$$

$$\therefore\quad V\max=\pi(2p)^2p=4\pi p^3.$$

**7. 在椭球体$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$位于第一卦限的部分内，作各侧面平行于坐标面的内接长方体，问长方体的尺寸如何，方能使其体积为最大？（$a>0,b>0,c>0$）

解：设长方体与椭球的交点为 (x,y,z) 则长方体的长、宽、高分别为x,y,z，

所以长方体的体积 $V=xyz$， 且$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

令 $L=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$

由$\begin{cases} L_x = yz + \dfrac{2\lambda}{a^2} x = 0 \\ L_y = xz + \dfrac{2\lambda}{b^2} y = 0 \\ L_z = xy + \dfrac{2\lambda}{c^2} z = 0 \\ L_\lambda = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$

得 $\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$，于是 $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$，

由于实际问题的最大值必定存在，因此当内接长方体的长、宽、高分别取

$\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \dfrac{c}{\sqrt{3}}$时，其体积最大.

**8. 在抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y + z = 4$ 的交线上，求出到原点距离最大和最小的点.

解：目标函数：$u = x^2 + y^2 + z^2$，

$$s.t.\ \begin{aligned} x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{aligned}.$$

令$L(x, y.z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - z) + \lambda_2(x + y + z - 4)$，

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x^2 + y^2 - z = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x + y + z - 4 = 0 \qquad (5)$$

由（1）（2）可得 $\lambda_1 = -1$ 或 $x = y$，

当$\lambda_1 = -1$时，由（1）（3）可得 $\lambda_2 = 0$或$z = \dfrac{-1}{2}$代入（4）可见无解.

当 $\lambda_1 \neq -1$ 时，由 $x = y$ 可得　$(x, y, z) = (1,1,2)$或$(-2,-2,8)$，

容易验证　$u_{\max} = u(-2,-2,8) = 72$,　$u_{\min} = u(1,1,2) = 6$，

∴距离最大的点为（－2，－2，8），距离为 $6\sqrt{2}$，

距离最小的点为（1，1，2），距离为$\sqrt{6}$.

***9. 试证明 n 个正数 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 的算术平均值不小于它们的几何平均值，即

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

证：$\forall a > 0$，我们求在满足条件 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = na$　$(x_i > 0)$时，$u = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$ 的极大值.

令 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = x_1 x_2 \cdots x_n + \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - na)$，

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 \cdots x_n + \lambda x_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 x_3 \cdots x_n + \lambda x_2 = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = x_1 \cdots x_{n-1} + \lambda x_n = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - na = 0$$

解得：$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = a$.　容易验证此时，$x_1, x_2, \cdots x_n$ 取极大值，

即　$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq a^n = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n,$$

∴　$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$