传热学

非稳态导热IV

授课老师：苗雨

目录

CONTENTS

01

课前回顾及导引

课前回顾及导引

1. 半无限大物体以Dirichlet边界条件求解的温度分布 $\frac{T-T_w}{T_i-T_w}=erf(\eta)$　$\eta=\frac{x}{\sqrt{4a\tau}}$
2. 误差函数与余误差函数的关系 $\mathrm{erfc}(\eta)=1-\mathrm{erf}(\eta)$
3. 吸热系数的表达式 $\sqrt{\rho c\lambda}$
4. 乘积解法方形截面的二维柱体无量纲温度场表达式 $\theta=\theta_{wall}(x,\tau)\cdot\theta_{wall}(y,\tau)$
5. 乘积解法短圆柱体无量纲温度场表达式 $\theta=\theta_{wall}(x,\tau)\cdot\theta_{cyl}(r,\tau)$
6. 乘积解法立方体无量纲温度场表达式 $\theta=\theta_{wall}(x,\tau)\cdot\theta_{wall}(y,\tau)\cdot\theta_{wall}(z,\tau)$
7. 乘积解法二维问题导热量百分数 $\frac{Q}{Q_0}=(\frac{Q}{Q_0})_1+(\frac{Q}{Q_0})_2[1-(\frac{Q}{Q_0})_1]$
8. 乘积解法三维问题导热量百分数 $\frac{Q}{Q_0}=(\frac{Q}{Q_0})_1+(\frac{Q}{Q_0})_2[1-(\frac{Q}{Q_0})_1]+(\frac{Q}{Q_0})_3[1-(\frac{Q}{Q_0})_1][1-(\frac{Q}{Q_0})_2]$

课前回顾及导引

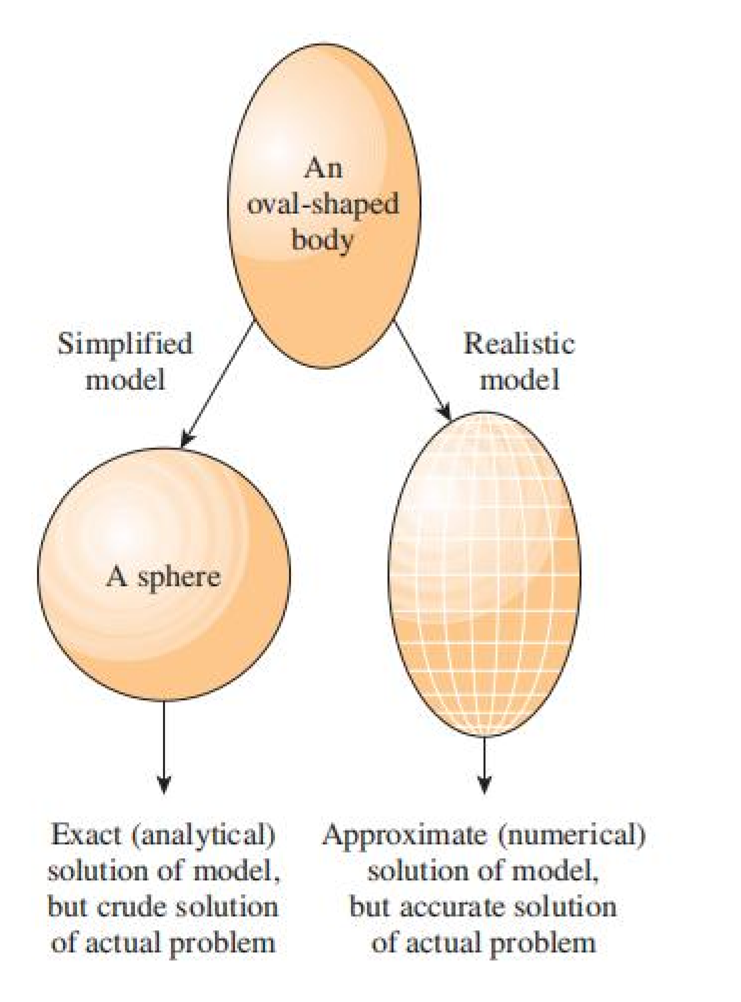

热传导
傅里叶定律（导热基本定律）
稳态导热问题
一维无内热源稳态导热
变截面、变导热系数的一维问题
通过多层壁的导热问题（组合墙问题）
热阻及其串并联性质
通过肋片（翅片）的导热问题
通过等截面直肋的导热
一维有内热源导热问题
多维稳态导热问题
非稳态导热问题
零维非稳态导热问题
集中参数法
一维非稳态导热的分析解
分析解简化
一维非稳态导热的工程计算方法
图线法
近似拟合公式法
半无限大物体的一维非稳态导热问题
简单几何形状物体多维非稳态导热的分析解
导热问题数值求解
内节点离散方程的建立
泰勒级数展开法
热平衡法（控制容积平衡法）
边界节点离散方程的建立及代数方程的求解

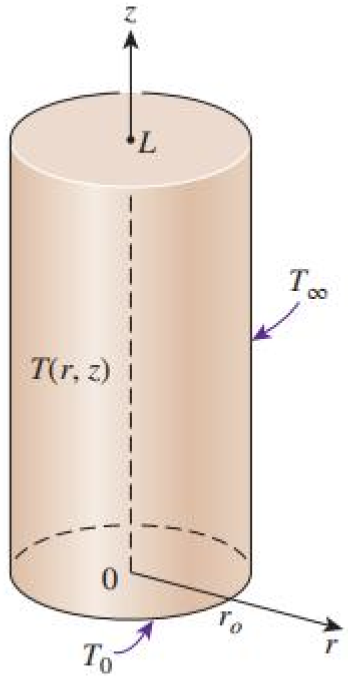
02

导热问题数值求解

- 为什么研究导热问题的数值求解
- 导热问题数值求解的基本思想
- 导热问题数值求解的基本步骤

为什么研究导热问题的数值求解





Analytical solution:

$$\frac{T(r,z)-T_\infty}{T_0-T_\infty}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n r_o)}\frac{\sinh \lambda_n(L-z)}{\sinh(\lambda_n L)}$$

where λ_n's are roots of $J_0(\lambda_n r_o)=0$

导热问题数值求解的基本思想

把原来的时间和空间连续的物理量的场，用**有限个离散点上的值的集合**来代替，通过求解按一定方法建立起来的关于这些值的代数方程，从而获得离散点上被求物理量的值，称之为**数值解**。

解析解

- 可以用数学表达式直接表达
- 解的表达式是存在的

数值解

- 很难数学表达或取决于自变量
- 不一定需要解的表达式

导热问题数值求解的基本步骤

建立控制方程及定解条件

确定节点（区域离散化）

建立节点物理量的代数方程（方程离散化）

设立温度场的迭代初值

求解代数方程组

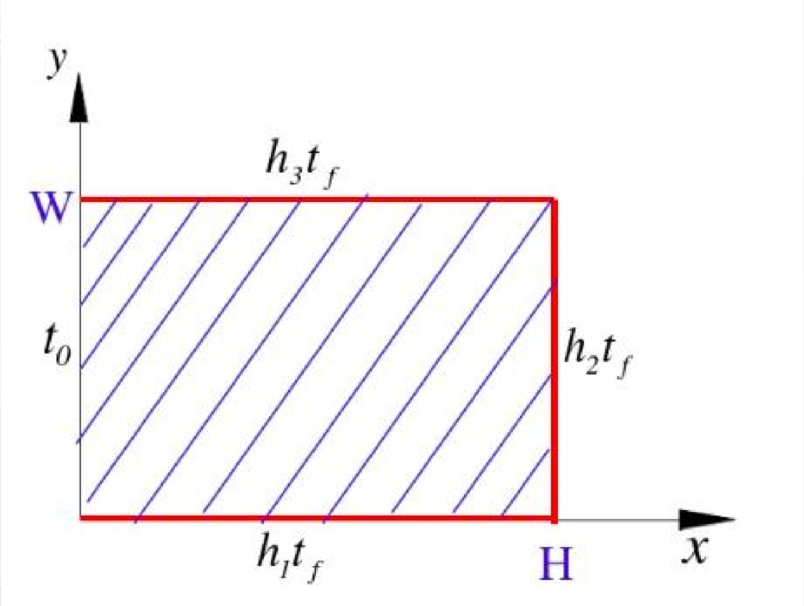
改进初场

是否收敛?

否

是

解的分析



以二维矩形区域内的稳态、无内热源、常物性导热问题为例

描写物理问题的微分方程称**控制方程**（governing equation）

这个例子的导热微分方程

$$\cancel{\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}\right) + \cancel{\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right)} + \cancel{\dot{\Phi}}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$$

导热问题数值求解的基本步骤

建立控制方程及定解条件

确定节点（区域离散化）

建立节点物理量的代数方程
（方程离散化）

设立温度场的迭代初值

求解代数方程组

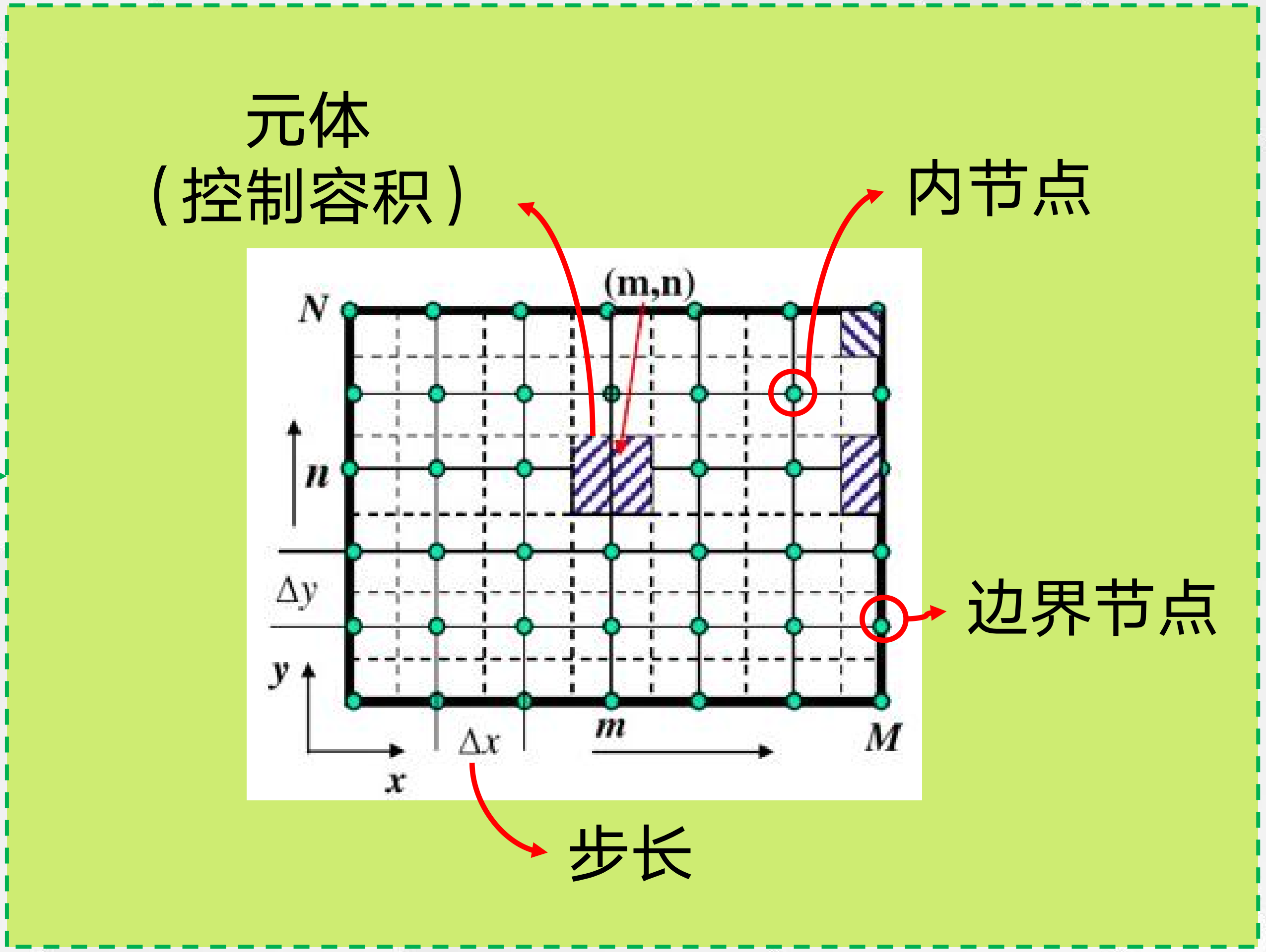
是否收敛?

否

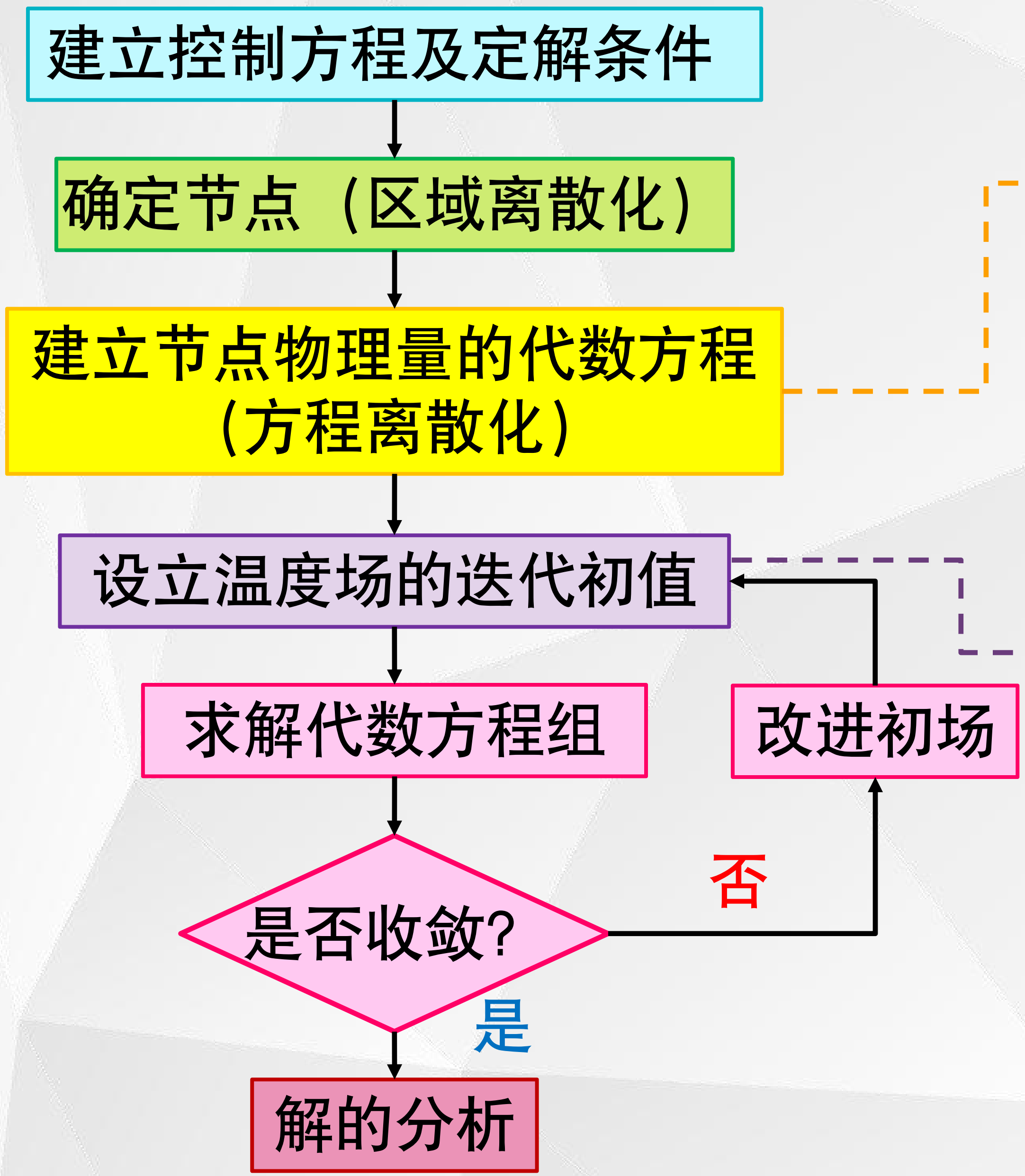
改进初场

是

解的分析



导热问题数值求解的基本步骤



节点上物理量的代数方程称为**离散方程**

迭代法(iterative method)：采用此法求解时需要对被求解的温度场预先假定一个解，称为**初场**(initial field)，求解过程中这温度场不断得到改进。

导热问题数值求解的基本步骤

建立控制方程及定解条件

确定节点（区域离散化）

建立节点物理量的代数方程（方程离散化）

设立温度场的迭代初值

求解代数方程组

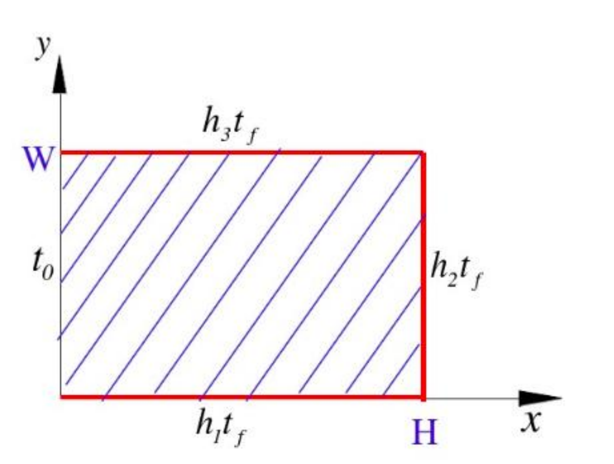
改进初场

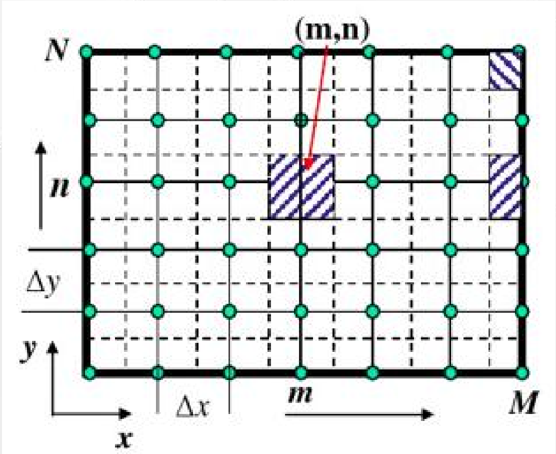
是否收敛?

否

是

解的分析





除左边界上各节点的温度为已知外，其余(m-1)×n个节点都需建立离散方程，这些方程构成了一个**封闭的代数方程组**

- 各项的系数**不再变化**--> **线性问题**
- 各项系数在迭代过程中**不断更新**-->**非线性问题**

是否收敛的判断是指**本次迭代计算所得之解与上一次迭代计算所得之解的偏差是否小于允许值**。

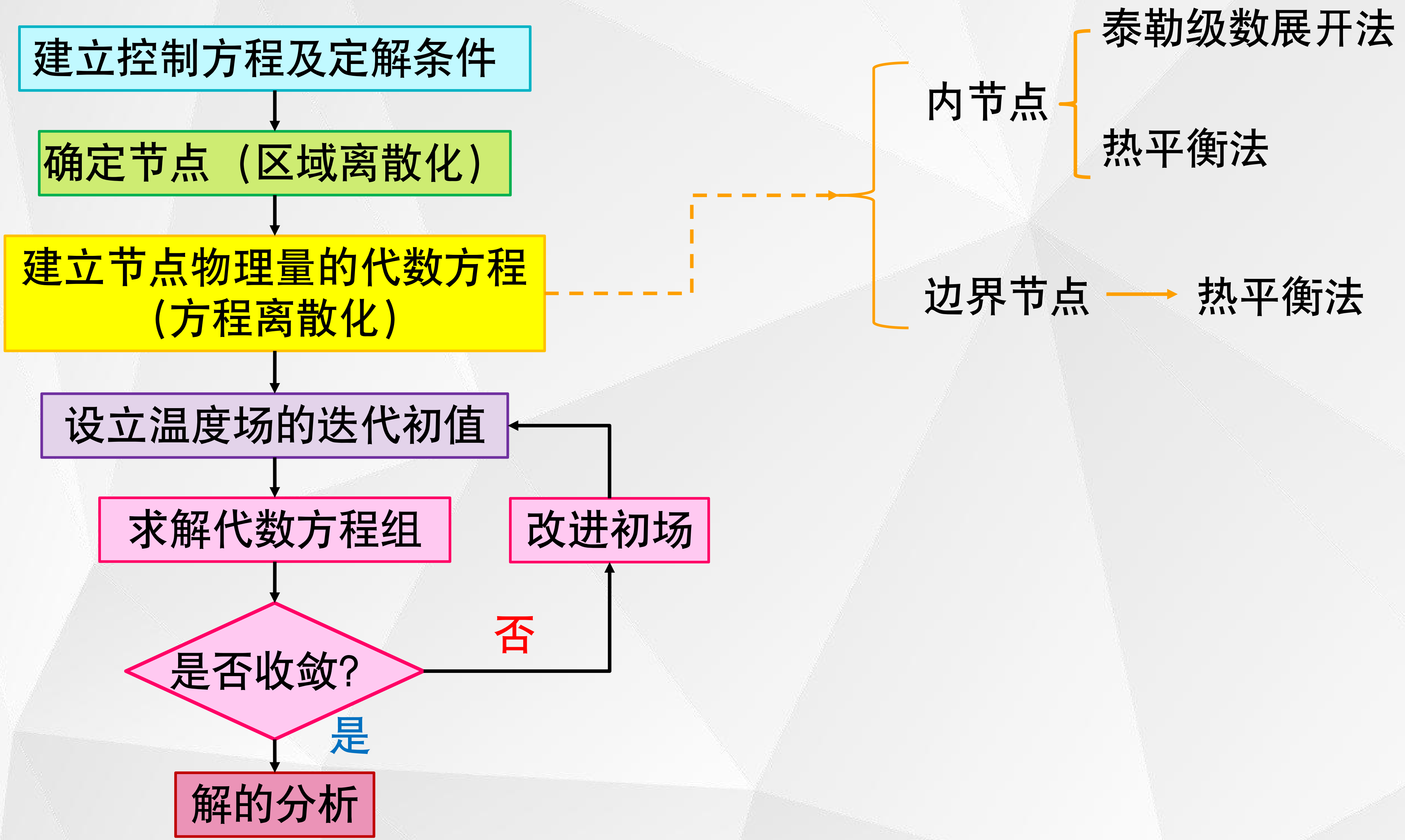
所得结果可用于进一步计算

03

离散方程的建立

- 内节点离散方程的建立
- 边界节点离散方程的建立

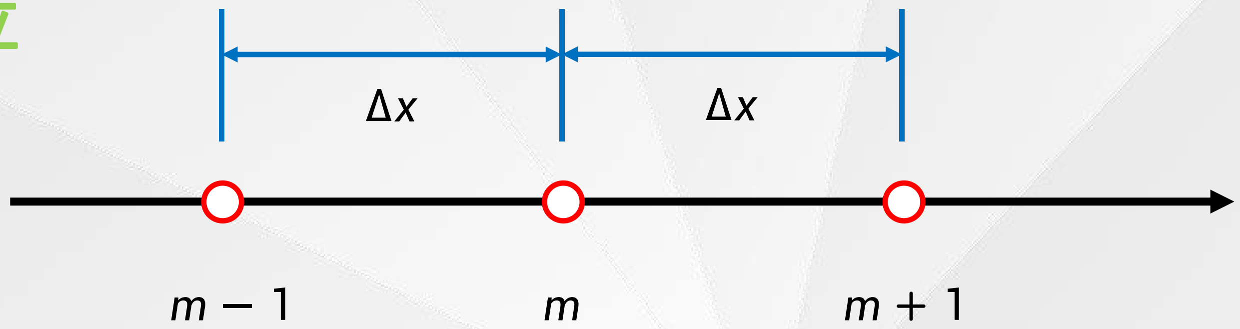
内节点离散方程的建立


建立控制方程及定解条件
确定节点（区域离散化）
建立节点物理量的代数方程
（方程离散化）
设立温度场的迭代初值
求解代数方程组
改进初场
是否收敛?
否
是
解的分析
内节点
泰勒级数展开法
热平衡法
边界节点
热平衡法

内节点离散方程的建立

泰勒级数展开法

一维情况：



$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\cancel{\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}}=0$$

泰勒公式： $f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+O\left((x-x_0)^k\right)$

$$\left.\begin{aligned}
t_{m+1}&=t_m+\left.\frac{dt}{dx}\right|_m\Delta x+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2t}{dx^2}\right|_m\Delta x^2+\ldots+\frac{1}{k!}\left.\frac{d^kt}{dx^k}\right|_m\Delta x^k+\ldots\\
t_{m-1}&=t_m-\left.\frac{dt}{dx}\right|_m\Delta x+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2t}{dx^2}\right|_m\Delta x^2+\ldots+\frac{1}{k!}\left.\frac{d^kt}{dx^k}\right|_m(-\Delta x)^k+\ldots
\end{aligned}\right\}\text{相加}$$

$$t_{m+1}+t_{m-1}=2t_m+\left.\frac{d^2t}{dx^2}\right|_m\Delta x^2+\ldots$$

截断误差 **中心差分格式**

$$\left.\frac{d^2t}{dx^2}\right|_m=\frac{t_{m+1}+t_{m-1}-2t_m}{\Delta x^2}+\boxed{O\left(\Delta x^2\right)}\approx\frac{t_{m+1}+t_{m-1}-2t_m}{\Delta x^2}$$

内节点离散方程的建立

泰勒级数展开法

中心差分格式 $$\left.\frac{d^2t}{dx^2}\right|_m \approx \frac{t_{m+1}+t_{m-1}-2t_m}{\Delta x^2}$$

$$t_{m+1}=t_m+\left.\frac{dt}{dx}\right|_m \Delta x+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2t}{dx^2}\right|_m \Delta x^2+\ldots+\frac{1}{k!}\left.\frac{d^kt}{dx^k}\right|_m \Delta x^k+\ldots$$

向前差分格式

$$\frac{dt}{dx}|_m=\frac{t_{m+1}-t_m}{\Delta x}+O(\Delta x)\approx\frac{t_{m+1}-t_m}{\Delta x}$$

$$t_{m-1}=t_m-\left.\frac{dt}{dx}\right|_m \Delta x+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2t}{dx^2}\right|_m \Delta x^2+\ldots+\frac{1}{k!}\left.\frac{d^kt}{dx^k}\right|_m (-\Delta x)^k+\ldots$$

向后差分格式

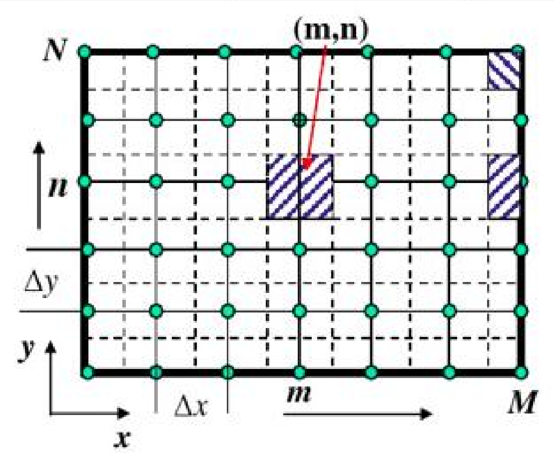
$$\frac{dt}{dx}|_m=\frac{t_m-t_{m-1}}{\Delta x}+O(\Delta x)\approx\frac{t_m-t_{m-1}}{\Delta x}$$

（m+1）的向后差分格式与（m）的向前差分格式相同

内节点离散方程的建立

泰勒级数展开法

二维情况：



$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=0$$

x方向：

$$\left.\frac{d^2 t}{dx^2}\right|_{m,n}=\frac{t_{m+1,n}+t_{m-1,n}-2t_{m,n}}{\Delta x^2}+O\left(\Delta x^2\right)\approx\frac{t_{m+1,n}+t_{m-1,n}-2t_{m,n}}{\Delta x^2}$$

y方向：

$$\left.\frac{d^2 t}{dy^2}\right|_{m,n}=\frac{t_{m,n+1}+t_{m,n-1}-2t_{m,n}}{\Delta y^2}+O\left(\Delta y^2\right)\approx\frac{t_{m,n+1}+t_{m,n-1}-2t_{m,n}}{\Delta y^2}$$

如果 $\Delta x=\Delta y$ $\quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=\frac{t_{m+1,n}+t_{m-1,n}+t_{m,n+1}+t_{m,n-1}-4t_{m,n}}{\Delta x^2}=0$

内节点离散方程的建立

热平衡法（控制容积平衡法）

所有方向流入控制体的总流量 + 控制体内热源生成热 = 控制体内能的增量

$$\boldsymbol{\Phi}_{right} + \boldsymbol{\Phi}_{left} + \boldsymbol{\Phi}_{top} + \boldsymbol{\Phi}_{bottom} + \boldsymbol{\Phi}_{V} = 0$$

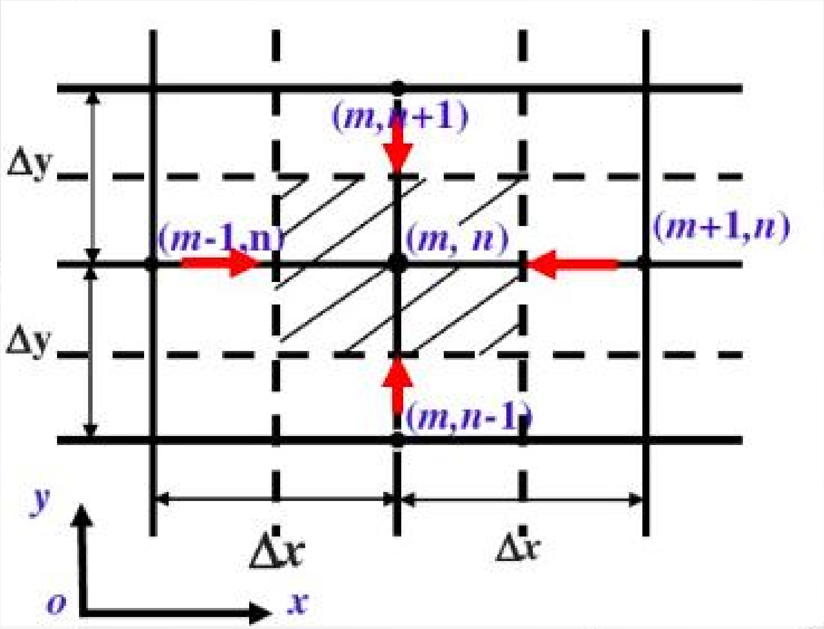
$$\Phi_{right} = -\lambda\Delta y\frac{\partial t}{\partial x} = \lambda\Delta y\frac{t_{m+1,n} - t_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\Phi_{left} = -\lambda\Delta y\frac{\partial t}{\partial x} = \lambda\Delta y\frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\Phi_{top} = -\lambda\Delta x\frac{\partial t}{\partial x} = \lambda\Delta x\frac{t_{m,n+1} - t_{m,n}}{\Delta y}$$

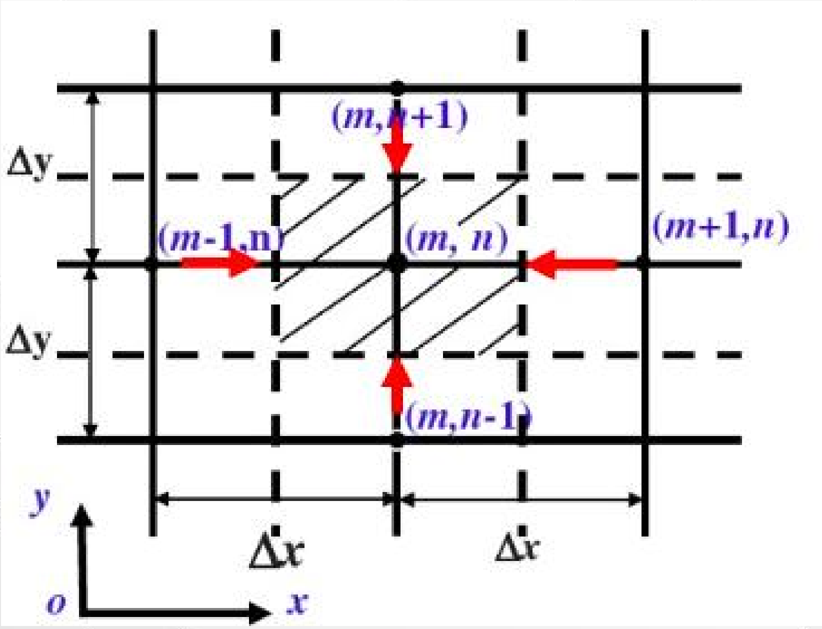
$$\Phi_{bottom} = -\lambda\Delta x\frac{\partial t}{\partial x} = \lambda\Delta x\frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y}$$

内热源：$\Phi_V = \dot{\Phi}\cdot V = \dot{\Phi}\cdot\Delta x\Delta y$



内节点离散方程的建立

热平衡法（控制容积平衡法）



所有方向流入控制体的总流量 + 控制体内热源生成热 = 控制体内能的增量

$$\Phi_{right} + \Phi_{left} + \Phi_{top} + \Phi_{bottom} + \Phi_V = 0$$

$$\lambda\Delta y\frac{t_{m+1,n}-t_{m,n}}{\Delta x} + \lambda\Delta y\frac{t_{m-1,n}-t_{m,n}}{\Delta x} + \lambda\Delta x\frac{t_{m,n+1}-t_{m,n}}{\Delta y} + \lambda\Delta x\frac{t_{m,n-1}-t_{m,n}}{\Delta y} + \dot{\Phi}\cdot\Delta x\Delta y = 0$$

如果 $\Delta x = \Delta y$

$$t_{m+1,n} + t_{m-1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1} - 4t_{m,n} + \frac{\Delta x^2}{\lambda}\dot{\Phi} = 0$$

$$\Rightarrow t_{m,n} = \frac{1}{4}(t_{m+1,n} + t_{m-1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1}) + \frac{1}{4}\frac{\Delta x^2\dot{\Phi}}{\lambda}$$

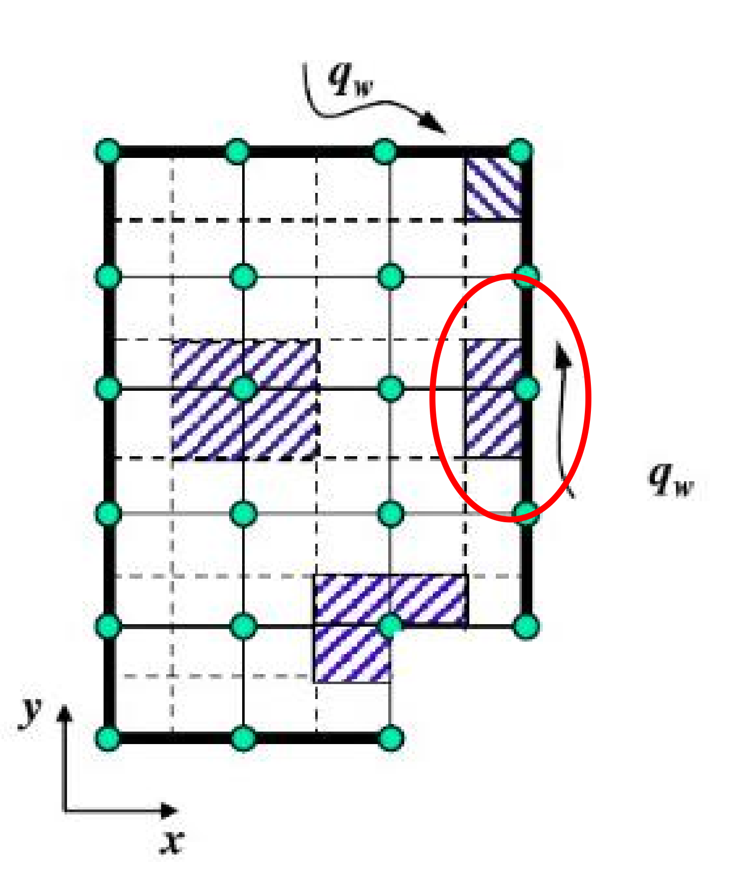
无内热源：

$$t_{m,n} = \frac{1}{4}(t_{m+1,n} + t_{m-1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1})$$

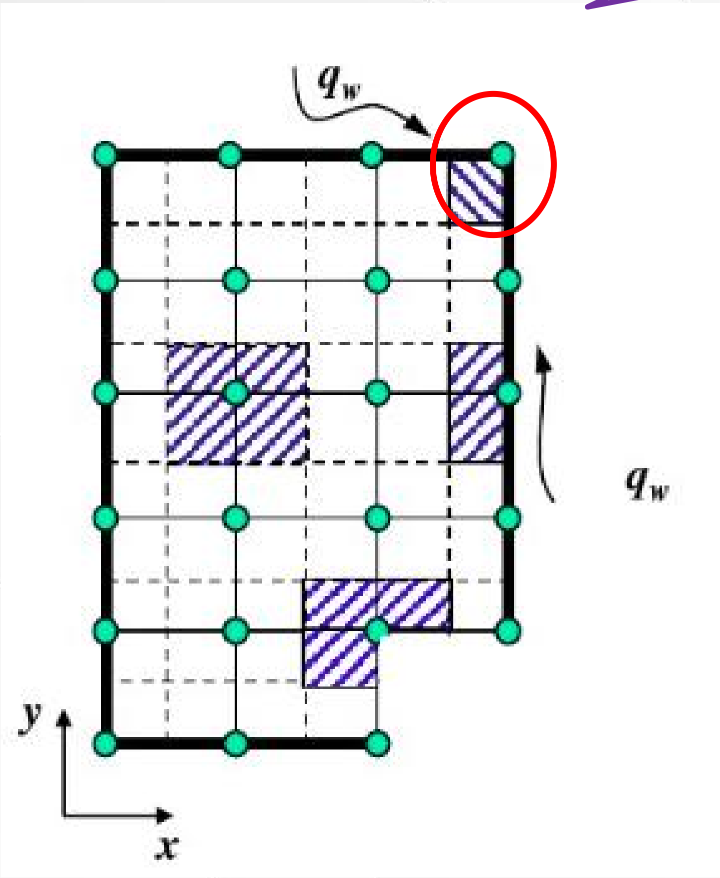
边界节点离散方程的建立

热平衡法（控制容积平衡法）

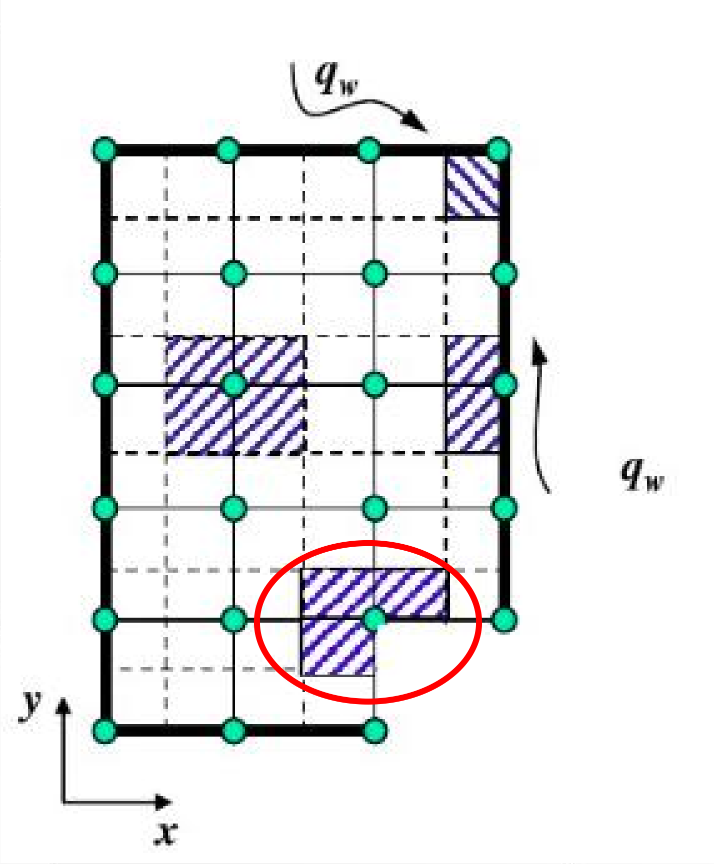
用q_w表示边界上的热流密度，
用 $\dot{\Phi}_{m,n}$ 表示内热源强度



平直边界上的节点



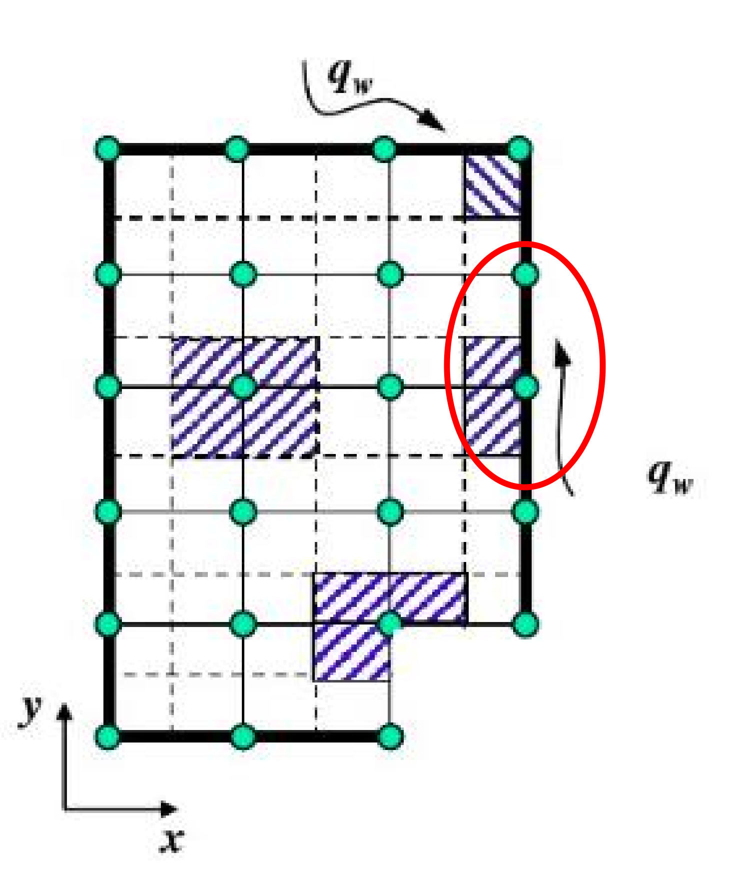
外部角点



内部角点

边界节点离散方程的建立

热平衡法（控制容积平衡法）



平直边界上的节点

$$\Phi_{left} + \Phi_{right} + \Phi_{top} + \Phi_{bottom} + \Phi_V = 0$$

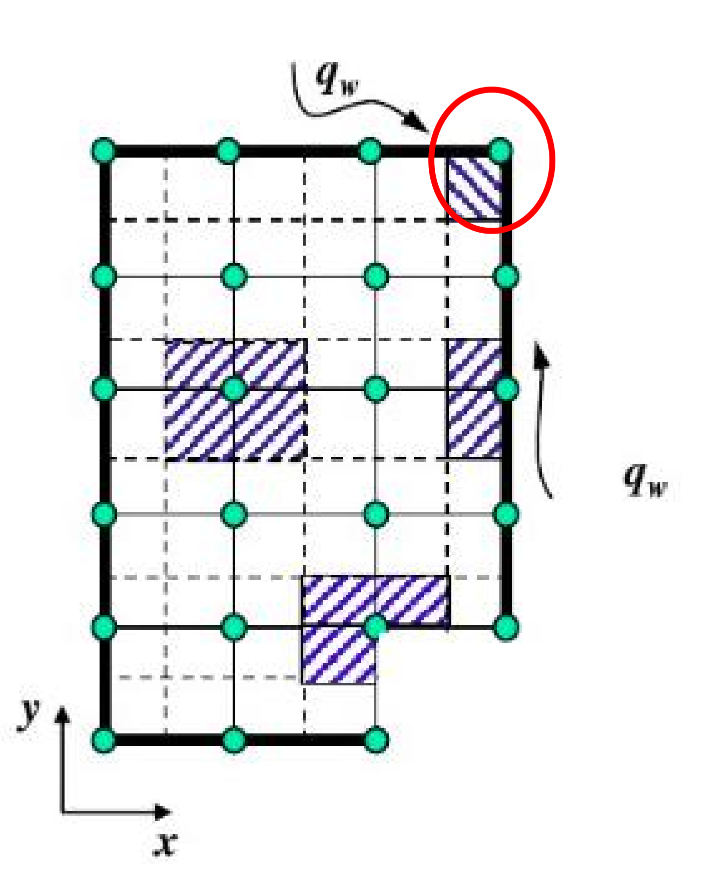
$$\lambda\Delta y \frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} + \Delta y q_w + \lambda \frac{\Delta x}{2} \frac{t_{m,n+1} - t_{m,n}}{\Delta y}$$
$$+\lambda \frac{\Delta x}{2} \frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y} + \dot{\Phi}_{m,n} \frac{\Delta x}{2} \Delta y = 0$$

如果 $\Delta x = \Delta y$

$$4t_{m,n} = 2t_{m-1,n} + \frac{2\Delta x}{\lambda} q_w + t_{m,n+1} + t_{m,n-1} + \dot{\Phi}_{m,n} \frac{\Delta x^2}{\lambda}$$

边界节点离散方程的建立

热平衡法（控制容积平衡法）



外部角点

$$\Phi_{left} + \Phi_{right} + \Phi_{top} + \Phi_{bottom} + \Phi_V = 0$$

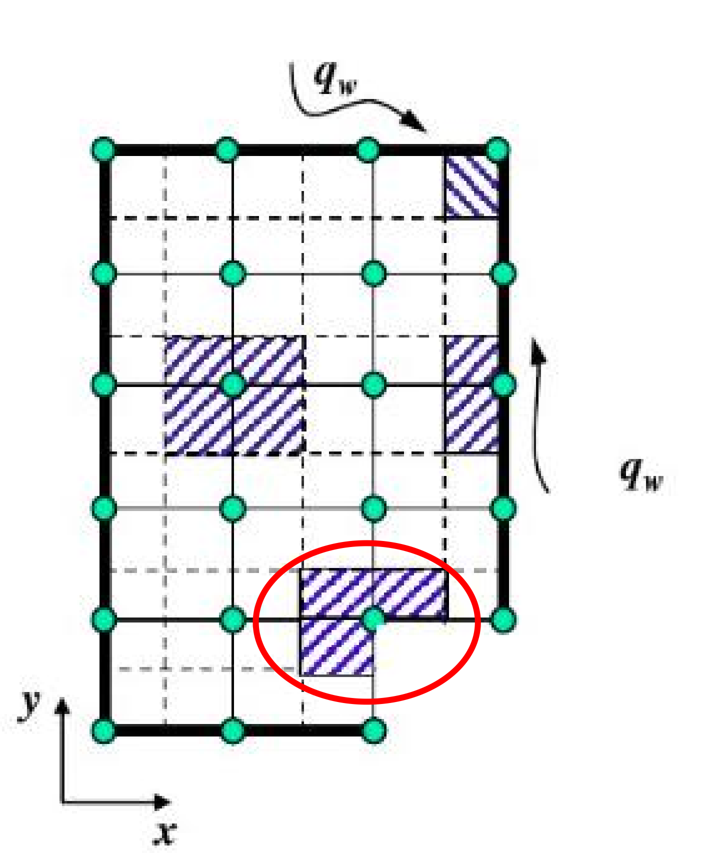
$$\lambda \frac{\Delta y}{2} \frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{2} q_w + \frac{\Delta x}{2} q_w + \lambda \frac{\Delta x}{2} \frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y} + \dot{\Phi}_{m,n} \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} = 0$$

如果 $\Delta x = \Delta y$

$$2t_{m,n} = t_{m-1,n} + \frac{2\Delta x}{\lambda} q_w + t_{m,n-1} + \dot{\Phi}_{m,n} \frac{\Delta x^2}{2\lambda}$$

边界节点离散方程的建立

热平衡法（控制容积平衡法）



内部角点

$$\Phi_{\text{left}} + \Phi_{\text{right}} + \Phi_{\text{top}} + \Phi_{\text{bottom}} + \Phi_V = 0$$

$$\lambda\Delta y\frac{t_{m-1,n}-t_{m,n}}{\Delta x} + (\lambda\frac{\Delta y}{2}\frac{t_{m+1,n}-t_{m,n}}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{2}q_w)$$
$$+\lambda\Delta x\frac{t_{m,n+1}-t_{m,n}}{\Delta y} + (\lambda\frac{\Delta x}{2}\frac{t_{m,n-1}-t_{m,n}}{\Delta y} + \frac{\Delta x}{2}q_w)$$
$$+\dot{\Phi}_{m,n}\frac{3\Delta x\Delta y}{4} = 0$$

如果 $\Delta x = \Delta y$

$$t_{m,n} = \frac{1}{6}(2t_{m-1,n} + \frac{2\Delta x^2}{\lambda}q_w + 2t_{m,n+1} + t_{m+1,n} + t_{m,n-1} + \dot{\Phi}_{m,n}\frac{3\Delta x^2}{2\lambda})$$

边界节点离散方程的建立

边界热流密度的三种情况

绝热边界

$q_w = 0$

$q_w \neq 0$

给定的q_w值代入方程

对流边界

$q_w = h(t_f - t_{m,n})$

需注意传入计算区域的热量为正

04

代数方程的求解

- 代数方程组的求解方法
- 高斯-赛德尔迭代解法

代数方程组的求解方法

直接解法

优点：通过有限次运算可以获得代数方程精确解

缺点：计算所需的计算机内存较大，当代数方程的数目较多时使用不便

高斯-赛德尔迭代解法

优点：占用较少计算机内存

缺点：事先不能知道计算工作量的大小，也不能保证求解过程收敛

高斯–赛德尔迭代解法

1.假设一个初场

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + a_{13}t_3 = b_1 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + a_{23}t_3 = b_2 \\ a_{31}t_1 + a_{32}t_2 + a_{33}t_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}t_2 - a_{13}t_3) \\ t_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}t_1 - a_{23}t_3) \\ t_3 = \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}t_1 - a_{32}t_2) \end{cases}$$

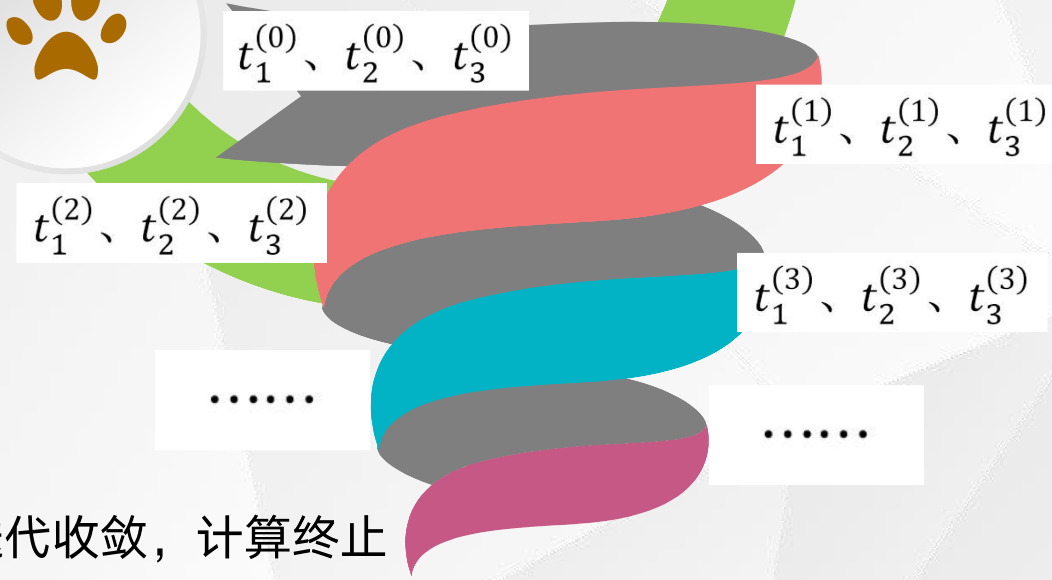
2.计算离散方程的系数

3.求解一组离散方程获得改进值

$t_1^{(0)}$、$t_2^{(0)}$、$t_3^{(0)}$

上角标括号里面表示迭代次数

4.返回到第二步骤直到获得收敛的解



迭代收敛，计算终止

高斯–赛德尔迭代解法

$$\max|t_i^{(k+1)}-t_i^{(k)}|\le\varepsilon$$

$$\boxed{\max\left|\frac{t_i^{(k+1)}-t_i^{(k)}}{t_i^{(k)}}\right|\le\varepsilon}$$

判断迭代

是否收敛的准则

$$\max\left|\frac{t_i^{(k+1)}-t_i^{(k)}}{t_{max}^{(k)}}\right|\le\varepsilon$$

允许的相对偏差，ε一般取10^{-3}~10^{-6}

当有接近于零的t时，第三个准则更好

迭代过程能否收敛的判据：主对角占优

$$|a_{12}|+|a_{13}|\le|a_{11}|$$

$$|a_{21}|+|a_{23}|\le|a_{22}|$$

$$|a_{31}|+|a_{32}|\le|a_{33}|$$

高斯-赛德尔迭代解法

例题1：用高斯-赛德尔迭代法求解下列方程组：

$$\begin{cases} 8t_1 + 2t_2 + t_3 = 29 \\ t_1 + 5t_2 + 2t_3 = 32 \\ 2t_1 + t_2 + 4t_3 = 28 \end{cases}$$

$$|a_{12}| + |a_{13}| = 2 + 1 \leq |a_{11}| = 8$$

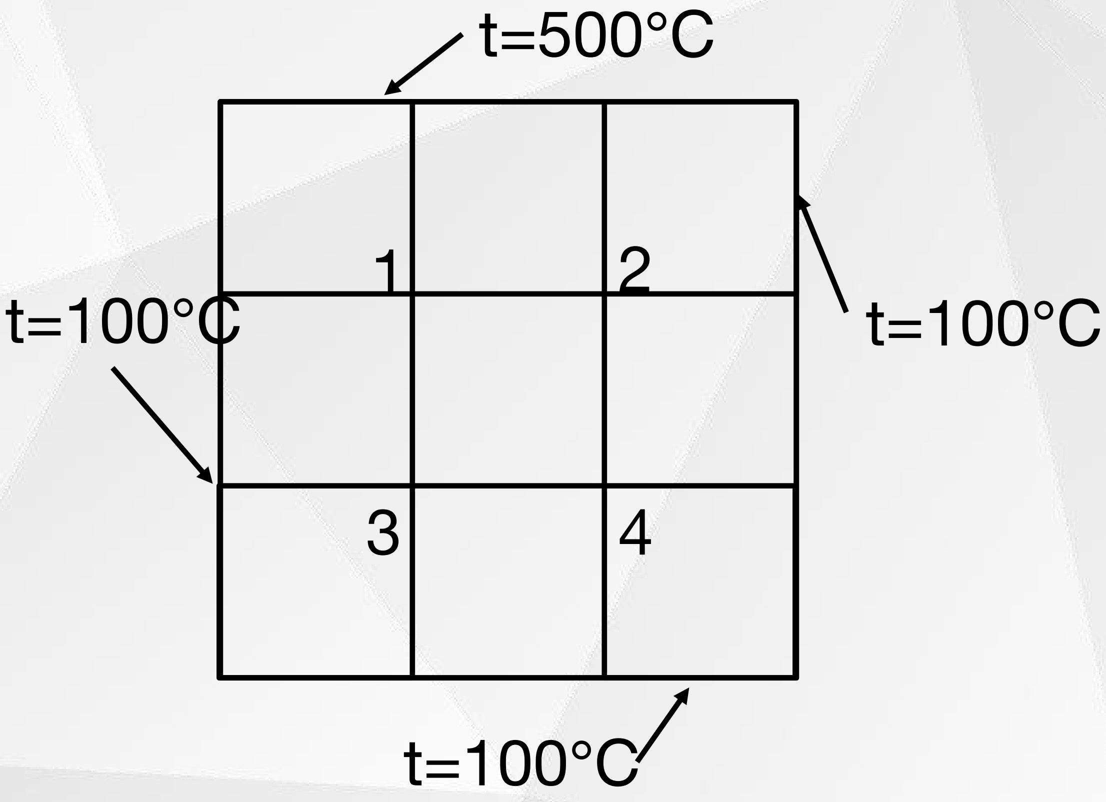
$$|a_{21}| + |a_{23}| = 1 + 2 \leq |a_{22}| = 5$$

$$|a_{31}| + |a_{32}| = 2 + 1 \leq |a_{33}| = 4$$

迭代方程一定收敛

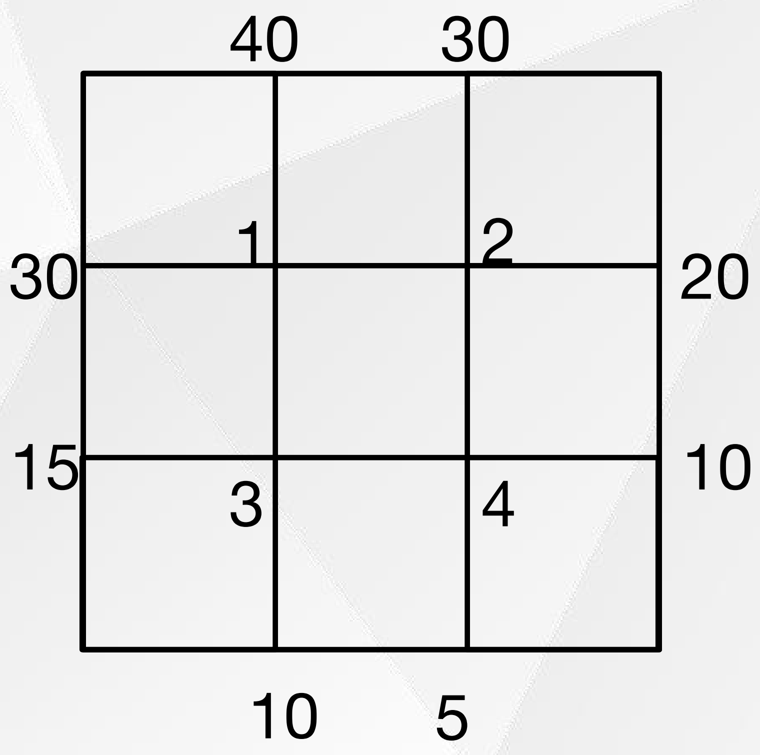
高斯-赛德尔迭代解法

例题2：有一各向同性材料的方形物体，其导热系数为常量。已知各边界的温度如图所示，试用高斯-赛德尔迭代求其内部网格节点1、2、3和4的温度。



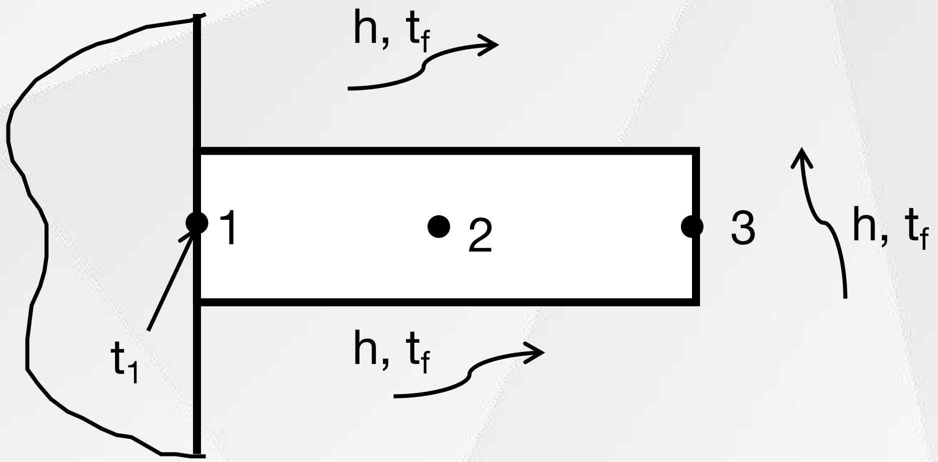
高斯-赛德尔迭代解法

例题3：试对附图所示的常物性、无内热源的二维稳态导热问题用高斯-赛德尔迭代法计算t_1、t_2、t_3、t_4之值。



高斯-赛德尔迭代解法

例题4：如图所示，有一等截面直肋，处于稳态导热状态。图中t_1=85℃，t_f=25℃，h=30W/(m^2·K)。肋高H=4cm，纵剖面面积 A_L=4cm^2，导热系数λ=20W/(m·K)。请用数值方法求解节点2、3的温度。



05

非稳态导热问题的数值解法

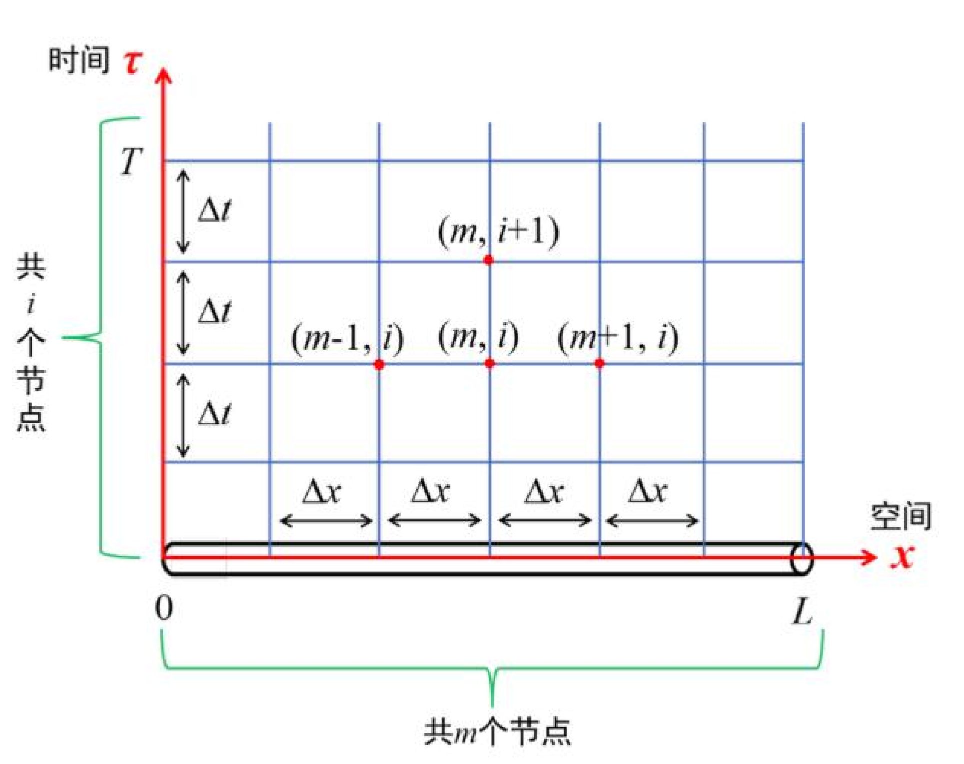
- 时间–空间区域的离散化
- 一维平板非稳态导热的显式和隐式格式
- 边界节点的离散方程

时间–空间区域的离散化

一维非稳态导热问题

所有方向流入控制体的总流量 + 控制体内热源生成热 = 控制体内能的增量

扩散项　　源项　　非稳态项



$$\lambda\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\dot{\Phi}=\rho c\frac{\partial T}{\partial \tau}$$

非稳态导热与稳态导热的主要差别在于**控制方程中多了一个非稳态项**，而其中扩散项的离散方法与稳态导热是一样的

时间–空间区域的离散化

一维、无内热源，常物性,非稳态

$$\lambda\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\cancel{\dot{\Phi}}=\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$\boxed{\left.\frac{d^2t}{dx^2}\right|_{m,i}=\frac{t_{m+1,i}+t_{m-1,i}-2t_{m,i}}{\Delta x^2}}$$

$$t_{m,i+1}=t_{m,i}+\left.\frac{dt}{d\tau}\right|_{m,i}\Delta\tau+\cancel{\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2t}{d\tau^2}\right|_{m,i}\Delta\tau^2+\ldots}$$

向前差分 $\left.\dfrac{\partial t}{\partial \tau}\right|_{m,i}=\dfrac{t_{m,i+1}-t_{m,i}}{\Delta\tau}$

代入，得到

$$\lambda\frac{t_{m+1,i}-2t_{m,i}+t_{m-1,i}}{\Delta x^2}+0=\rho c\frac{t_{m,i+1}-t_{m,i}}{\Delta\tau}$$

一维平板非稳态导热的显式和隐式格式

$$\lambda \frac{t_{m+1,i} - 2t_{m,i} + t_{m-1,i}}{\Delta x^2} = \rho c \frac{t_{m,i+1} - t_{m,i}}{\Delta \tau}$$

$$t_{m,i+1} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2} (t_{m+1,i} - 2t_{m,i} + t_{m-1,i}) + t_{m,i}$$

$$= a \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2} (t_{m+1,i} - 2t_{m,i} + t_{m-1,i}) + t_{m,i}$$

$$= Fo_\Delta (t_{m+1,i} - 2t_{m,i} + t_{m-1,i}) + t_{m,i}$$

显式格式

$$= Fo_\Delta (t_{m+1,i} + t_{m-1,i}) + (1 - 2Fo_\Delta) t_{m,i}$$

由第（i）时层的温度计算出第（i+1）时层的温度

优点：求解过程无需迭代，计算量小

缺点：对时间步长和空间步长有限制，否则会出现不合理的振荡的解

一维平板非稳态导热的显式和隐式格式

$$\lambda\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\cancel{\dot{\Phi}}=\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$\boxed{\left.\frac{d^2t}{dx^2}\right|_{m,i+1}=\frac{t_{m+1,i+1}+t_{m-1,i+1}-2t_{m,i+1}}{\Delta x^2}}$$

$$t_{m,i+1}=t_{m,i}+\left.\frac{dt}{d\tau}\right|_{m,i}\Delta\tau+\cancel{\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2t}{d\tau^2}\right|_{m,i}\Delta\tau^2}+\ldots$$

向后差分 $\left.\frac{\partial t}{\partial \tau}\right|_{m,i+1}=\frac{t_{m,i+1}-t_{m,i}}{\Delta\tau}$

$$\lambda\frac{t_{m+1,i+1}-2t_{m,i+1}+t_{m-1,i+1}}{\Delta x^2}=\rho c\frac{t_{m,i+1}-t_{m,i}}{\Delta\tau}$$

隐式格式 $(1+2Fo_{\Delta})t_{m,i+1}=Fo_{\Delta}[t_{m+1,i+1}+t_{m-1,i+1}]+t_{m,i}$

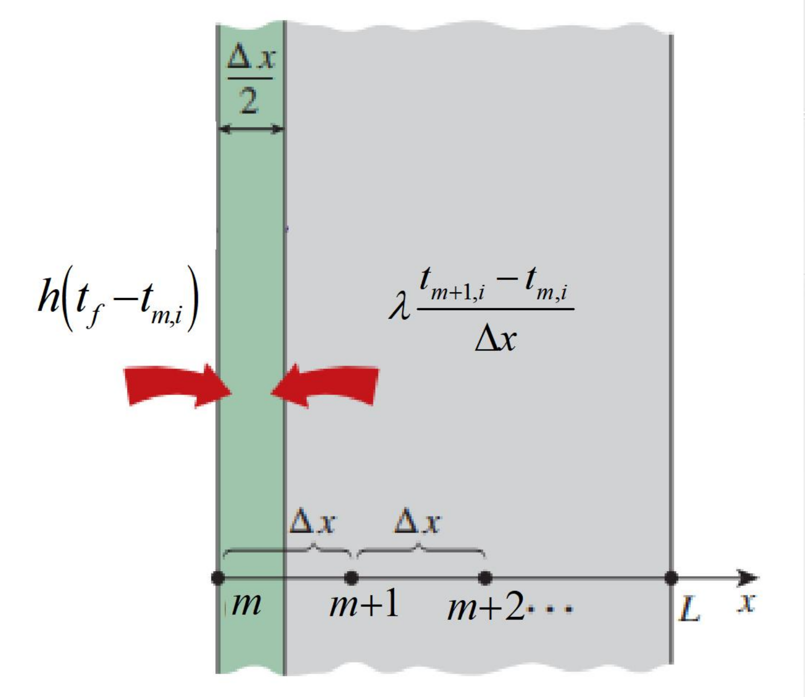
计算第（i+1）时层的温度时，必须求解第（i+1）时层的联立方程组

优点：对步长没有限制，不会出现振荡现象

缺点：求解过程必须迭代，计算工作量大

边界节点的离散方程

对于无限大平板，左侧表面受到周围流体冷却，表面传热系数为h，流体温度为t_f，边界节点是宽度为 $\frac{\Delta x}{2}$ 的元体



所有方向流入控制体的总流量 = 控制体内能的增量

$$\lambda \frac{t_{m+1,i} - t_{m,i}}{\Delta x} + h(t_f - t_{m,i}) = \rho c \frac{\Delta x}{2} \frac{t_{m,i+1} - t_{m,i}}{\Delta \tau}$$

$$t_{m,i+1} = \frac{2\lambda \Delta \tau}{\rho c} \frac{t_{m+1,i} - t_{m,i}}{\Delta x^2} + \frac{2h\Delta \tau}{\rho c} \frac{t_f - t_{m,i}}{\Delta x} + t_{m,i} = \frac{2a\Delta \tau}{\Delta x^2}(t_{m+1,i} - t_{m,i}) + \frac{2h\Delta \tau}{\rho c \Delta x}(t_f - t_{m,i}) + t_{m,i}$$

$$t_{m,i+1} = \left(1 - \frac{2a\Delta \tau}{\Delta x^2} - \frac{2h\Delta \tau}{\rho c \Delta x}\right) t_{m,i} + \frac{2a\Delta \tau}{\Delta x^2} t_{m+1,i} + \frac{2h\Delta \tau}{\rho c \Delta x} t_f$$

分子分母同时乘以λΔx

$$t_{m,i+1} = \left(1 - 2\frac{a\Delta \tau}{\Delta x^2} - 2\frac{\lambda}{\rho c}\frac{\Delta \tau}{\Delta x^2}\frac{h\Delta x}{\lambda}\right) t_{m,i} + 2\frac{a\Delta \tau}{\Delta x^2} t_{m+1,i} + 2\frac{\lambda}{\rho c}\frac{\Delta \tau}{\Delta x^2}\frac{h\Delta x}{\lambda} t_f$$

$$t_{m,i+1} = (1 - 2Fo_\Delta - 2Fo_\Delta Bi_\Delta) t_{m,i} + 2Fo_\Delta t_{m+1,i} + 2Fo_\Delta Bi_\Delta t_f$$

预习小测验答案

1.(多选题，1分)

关于导热问题的解析解和数值解，下列描述正确的是?

A. 解析解可以用数学表达式直接表达

B. 数值解可以用数学表达

C. 解析解的表达式是存在的

D. 数值解可能取决于自变量

答案： ACD

2.(多选题，1分)

对于导热问题数值求解过程，正确的是

A. 对于离散方程的建立，泰勒级数展开法可以用于边界节点

B. 采用热平衡法时，对每个节点所代表的元体用傅里叶导热定律直接写出其能量守恒的表达式

C. 建立内节点离散方程的方法有泰勒级数展开法和热平衡法两种

D. 对于离散方程的建立，热平衡法可以用于内节点和边界节点

答案： BCD

3.(多选题，1分)

关于代数方程组的求解方法，下列描述错误的是?

A. 使用高斯-赛德尔迭代解法计算所需的计算机内存较大

B. 高斯-赛德尔迭代解法允许的相对偏差一般取 $10^{-3} \sim 10^{-6}$

C. 高斯-赛德尔迭代过程能否收敛的判据：主对角占优

D. 使用高斯-赛德尔迭代解法不需要假设初场

答案： AD

- bonus homework：
选择课上讲的任意一道例题，使用Matlab或者Mworks编程，得到结果
交作业时把编好的程序写上名字私信发给我
允许团队合作