第 2 章 （之 3）
第 4 次作业

教学内容:§2.2.2 函数极限的定义

**1. 试证：$\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

证明：$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$, $\forall x$ 满足条件$0<|x-x_0|<\varepsilon$，有

$$|\cos x-\cos x_0|=\left|2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le|x-x_0|<\varepsilon,$$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

**2. 试证：$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1+3x}{x-1}=2$.

证明： $\forall\varepsilon>0$，限定 $|x+3|<1$，则有 $-4<x<-2$，$-5<x-1<-3$,

$$\left|\frac{1+3x}{x-1}-2\right|=\left|\frac{x+3}{x-1}\right|<\frac{|x+3|}{3},$$

所以只要取$\delta=\min(3\varepsilon,1)$, 当$0<|x+3|<\delta$时, 就有$\left|\dfrac{1+3x}{x-1}-2\right|=\left|\dfrac{x+3}{x-1}\right|<\dfrac{|x+3|}{3}<\varepsilon$.

从而也就证明了$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1+3x}{x-1}=2$.

**3 写出 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义，并用定义证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$。

解：（1）$\forall\varepsilon>0,\quad\exists X>0,\quad x<-X,\quad\Rightarrow\quad|f(x)-A|<\varepsilon$， 则 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$。

（2）$\forall\varepsilon>0$，若限制 $\varepsilon<1$，则可令$X=-\log_2\varepsilon(>0)$。当 $x<-X$ 时，

必有 $|2^x-0|=2^x<2^{-X}=\varepsilon$， 即$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$.

**4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x+x^2, & x>0\\ 1+x^2, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的左、右极限.

解：$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+x^2)=0$， $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(1+x^2)=1$.

**5. 讨论下列函数在所示点处的左右极限：

(1) $f(x)=x-[x]$ 在 x 取整数值的点； (2) 符号函数 $\operatorname{sgn}x$ 在点 $x=0$ 处.

解：(1) x_0 为整数，

$$\lim_{x\to x_0+}f(x)=\lim_{x\to x_0+}(x-[x])=\lim_{x\to x_0+}x-\lim_{x\to x_0+}[x]=x_0-x_0=0,$$

$$\lim_{x\to x_0-}f(x)=\lim_{x\to x_0-}(x-[x])=\lim_{x\to x_0-}x-\lim_{x\to x_0-}[x]=x_0-(x_0-1)=1\text{。}$$

(2) $\lim\limits_{x\to0+}\operatorname{sgn}x=\lim\limits_{x\to0+}1=1$， $\lim\limits_{x\to0-}\operatorname{sgn}x=\lim\limits_{x\to0-}(-1)=-1$.

**6. 从极限的定义出发，证明： $\lim\limits_{x\to0}a^x=1\quad(a>1)$.

证明：只需证明 $\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad 0<|x-0|<\delta\Rightarrow|a^x-1|<\varepsilon$ 即可。

不妨设 $\varepsilon<1$，要使 $|a^x-1|<\varepsilon$ 成立，

即 $1-\varepsilon<a^x<\varepsilon+1$， $\dfrac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln a}<x<\dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln a}$，

则 $\forall\varepsilon>0,$ 取 $\delta=\min\left\{\left|\dfrac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln a}\right|,\dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln a}\right\}>0$，

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|a^x-1|<\varepsilon$ 成立，

即：$\lim\limits_{x\to0}a^x=1$.

***7. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$， 若存在 x_0 的某个去心邻域 $\hat{N}(x_0,\delta)$，使当 $x\in\hat{N}(x_0,\delta)$ 时，成立 $f(x)>0$，试问是否必有 $A>0$ 成立，为什么？(如果成立，请证明，否则请给出反例)

解： 不一定成立，A 可能为 0。 如 $f(x)=x^2$ 在 $x_0=0$ 点.

第 2 章 （之 4）

第 5 次作业

教学内容： §2.2.3 极限的性质　　§2.2.4 无穷小与无穷大

***1. 填充题：

用 M-X 语言写出极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ 的定义为：

$\forall M>0,\ \exists X>0,\ \forall x<-X\ \Rightarrow\ f(x)>M$ 。

用 M-δ 语言写出极限 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=-\infty$ 的定义为：

$\forall M>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in(x_0\,,\,x_0+\delta)\ \Rightarrow\ f(x)<-M$ 。

用 ε－X 语言写出极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的定义为：

$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0,\ \forall x>X\ \Rightarrow\ |f(x)-A|<\varepsilon$ 。

2. 选择题：

**（1）设 $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$，则 $x\to0$ 时， $f(x)$ （　　）

（A）是无界量，也是无穷大量；
（B）是无界量，不是无穷大量；
（C）不是无界量，是无穷大量；
（D）不是无界量，也不是无穷大量.

答（B）

***（2）当 $x\to1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限 （　　）

(A) 等于 2；　(B) 等于 0；

(C) 为 ∞；　(D) 不存在但不是无穷大 .

答：（D）

**（3） $\lim\limits_{x\to 0}\tan x\cdot\arctan\dfrac{1}{x}=$ （　　）

$(A)0$;　(B)不存在;　$(C)\dfrac{\pi}{2}$;　$(D)-\dfrac{\pi}{2}$.

答：A

***3. 用无穷大定义证明：$\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=+\infty$.

解：任给$M>0$，令$\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}>M$，　解得：$0<x-1<\dfrac{1}{M^2}$

取$\delta=\dfrac{1}{M^2}$，则当 $0<x-1<\dfrac{1}{M^2}$ 时，恒有：$\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}>M$，

因此：$\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=+\infty$.

第 2 章 （之 5）
第 6 次作业

教学内容： §2.2.5 极限的运算法则 A-D

1．选择题

*（1） 下列叙述不正确的是　　（　　）

A．无穷大量的倒数是无 穷小量；

B．无穷小量的倒数是无 穷大量；

C．无穷小量与有界量的 乘积是无穷小量；

D．无穷大量与无穷大量 的乘积是无穷大量。

答(B)

**（2） 下列叙述不正确的是　　（　　）

A．无穷小量与无穷大量 的商为无穷小量；

B．无穷小量与有界量的 积是无穷小量；

C．无穷大量与有界量的 积是无穷大量；

D．无穷大量与无穷大量 的积是无穷大量。

答（　C　）

**（3）"当$x\to x_0$时，$f(x)-A$是无穷小"是"$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$"的：（　）

(A)充分但非必要条件

(B)必要但非充分条件

(C)充分必要条件

(D)既非充分条件，亦非必 要条件　答（ C ）

**（4）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+bx}-1}{x} & \text{当} x\neq 0\\ a & \text{当} x=0\end{cases}$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3$，则　　（　　）

$(A)b=3，a=3$;　　　　$(B)b=6，a=3$;

$(C)b=3，a$可取任意实数；　　$(D)b=6，a$可取任意实数。

答：D

2．填空题：

*（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})=$_____.

解答：$\underline{1/2}$.

*（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})\sqrt{n-1}=$_____.

解答：$\underline{3/2}$.

*（3）设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn+5}{3n-2}=2$，则 a _____，b _____.

解答：$a=0$，$b=6$.

3．计算下列极限：

*（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\cdots\sqrt[2^n]{2})$；

解：$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\cdots\sqrt[2^n]{2})=\lim_{n\to\infty}(2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}\cdots\cdots 2^{\frac{1}{2^n}})=\lim_{n\to\infty}2^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}}=\lim_{n\to\infty}2^{1-\frac{1}{2^n}}=2.$$

**(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$

解：$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3^2})(1+\frac{1}{3^4})\cdots(1+\frac{1}{3^{2^n}})$.

解：$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3^2})(1+\frac{1}{3^4})\cdots(1+\frac{1}{3^{2^n}})=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3^2})(1+\frac{1}{3^4})\cdots(1+\frac{1}{3^{2^n}})}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{1}{3^{2^n}})^2}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

4． 求下列极限：

$*(1)$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+1}{3x-1}$；　　$*(2)$ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$；　　$**(3)$ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1)\cos\dfrac{1}{2x-1}$；

**（4） $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$；　　　　**$(5)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$；

***(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^{2n}+2)^2-(x^{2n}-2)^2}{(x^n+1)^2+(x^n-1)^2}$.（$n$是正整数）

解：(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+1}{3x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)}=\dfrac{4}{2}=2$.

(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6$.

(3) $\because \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1)=0$，$\cos\dfrac{1}{2x-1}$ 有界，　$\therefore \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1)\cos\dfrac{1}{2x-1}=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+5}+3)}{x+5-9}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x}+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}-\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-1})$

$=1-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x^2}+1}=1$.

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^{2n}}{2(x^{2n}+1)}$　$=4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=4$.

**5. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，且在 x_0 的某去心邻域内 $g(x)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$必等于0，为什么？

解：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\cdot\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)=A\cdot 0=0$.

**6. 设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+ax^2+x+b}{x^2-1}=3$，试确定$a$，$b$之值.

解：因 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+ax^2+x+b}{x^2-1}=3$，

故 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\dfrac{x^3+ax^2+x+b}{x^2-1}=\dfrac{a+b+2}{2}=0$。 即 $b=-a-2$，

则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+ax^2+x+b}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{x^3-1}{x^2-1}+a+\dfrac{x-1}{x^2-1})=\dfrac{3}{2}+a+\dfrac{1}{2}=2+a=3$

$\therefore a=1$，$b=-3$.

***7. 设 $f(x)$在$x=x_0$处可导，求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$.

解： 原式$=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{xf(x_0)-xf(x)}{x-x_0}+\dfrac{xf(x)-x_0f(x)}{x-x_0}\right]$

$$=-\lim_{x\to x_0}x\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)-x_0f'(x_0).$$

***8．利用夹逼准则计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}$， $(a>0,b>0)$.

解：记 $A=\max\{a,b\}$， $x_n=(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}$

则 $A\le x_n\le(2A^n)^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{1}{n}}A$ ，用夹逼定理，并注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$ 知：

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=A=\max\{a,b\}$.