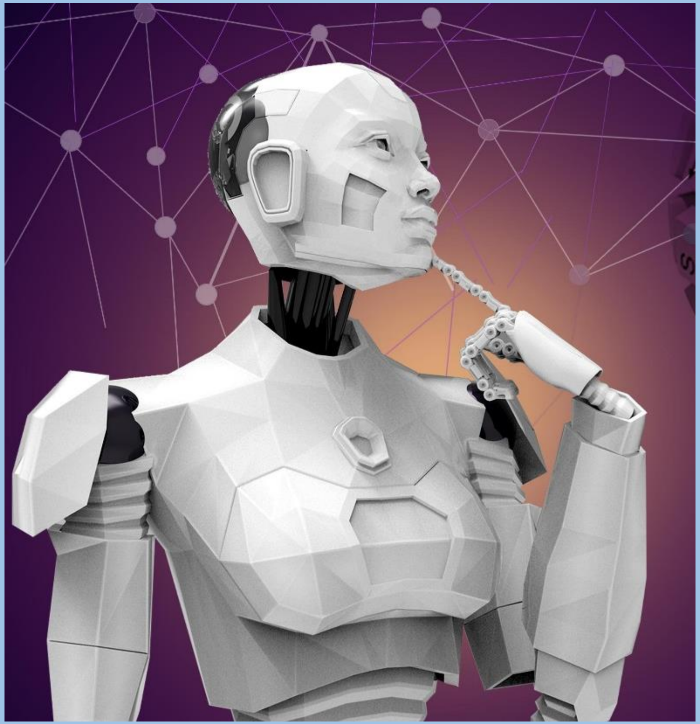
第4章：刚体速度和静力



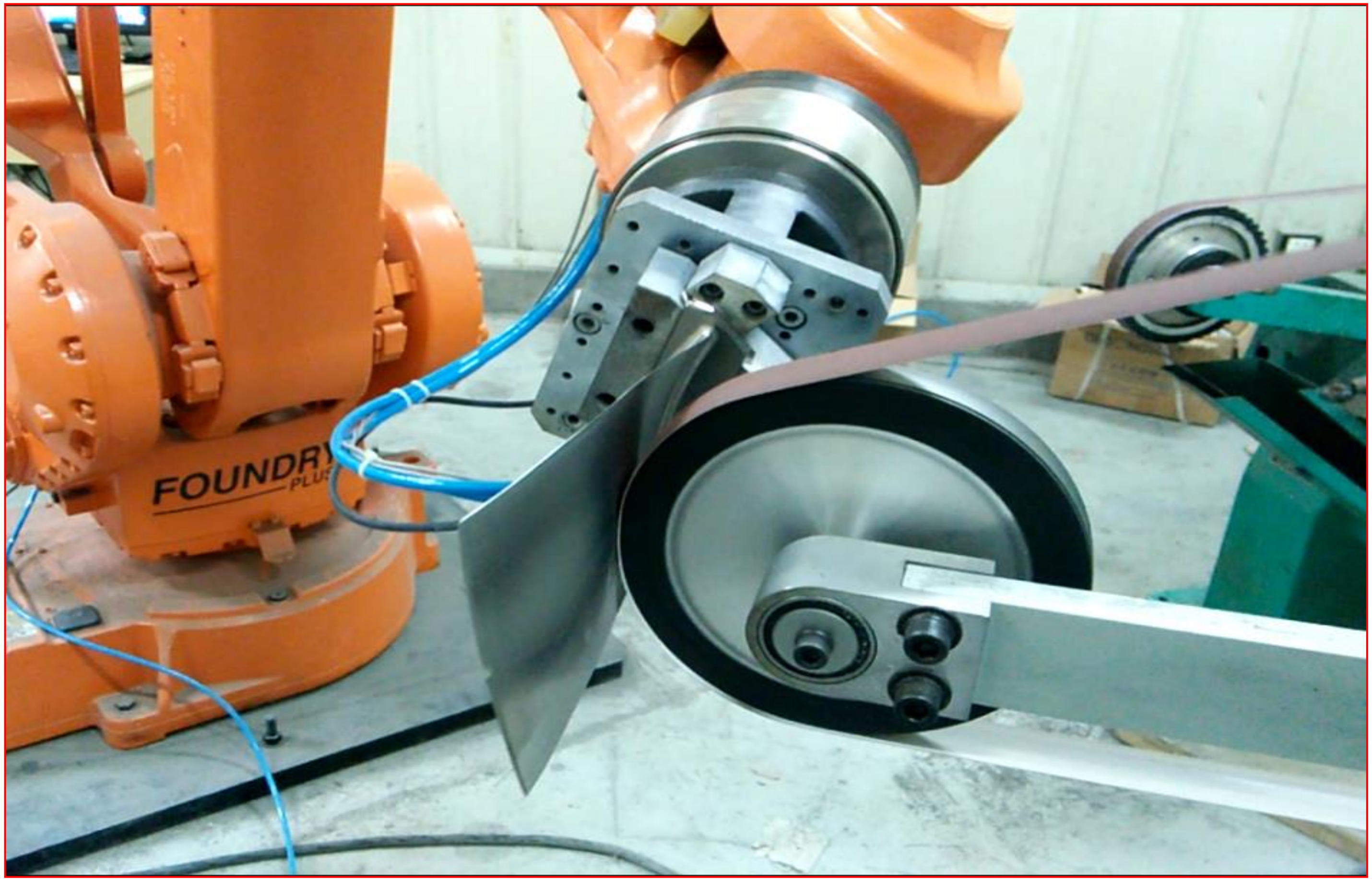
主讲：许璟、周家乐

单位：信息科学与工程学院

邮箱：jingxu@ecust.edu.cn

办公：徐汇校区 实验19楼1213室

刚体瞬时线/角速度与力/力矩的表征：刚体速度与静力



本章内容

4.1 线矢量

4.2 微分转动与转动速度

4.3 微分运动与运动旋量

4.4 刚体变换的线矢量表示

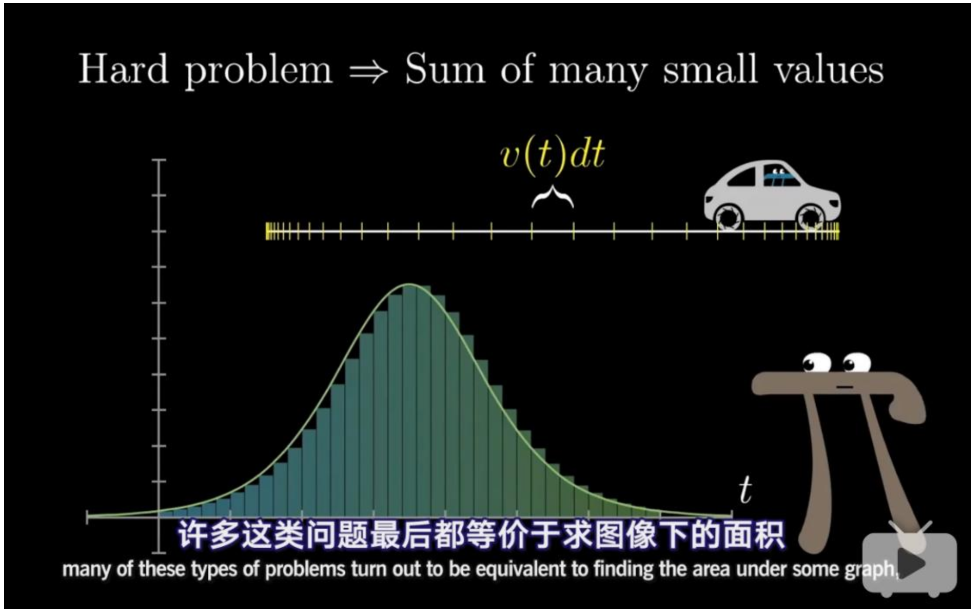
4.5 螺旋运动

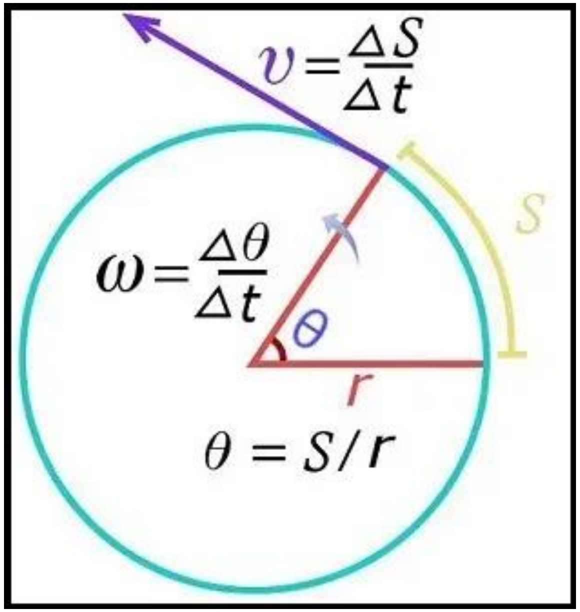
4.6 力矢量

4.7 线矢量、旋量与螺旋

4.1 引言

- 任何刚体位形都可以通过刚体从**初始位形**开始，对常值空间速度（包括3个线速度和3个角速度）**相对一定时间段做定积分**来实现。
- 该运动类似于**螺旋运动**，即沿着某一相同的固定轴旋转并平移。所有刚体位形都可以通过螺旋运动来实现。



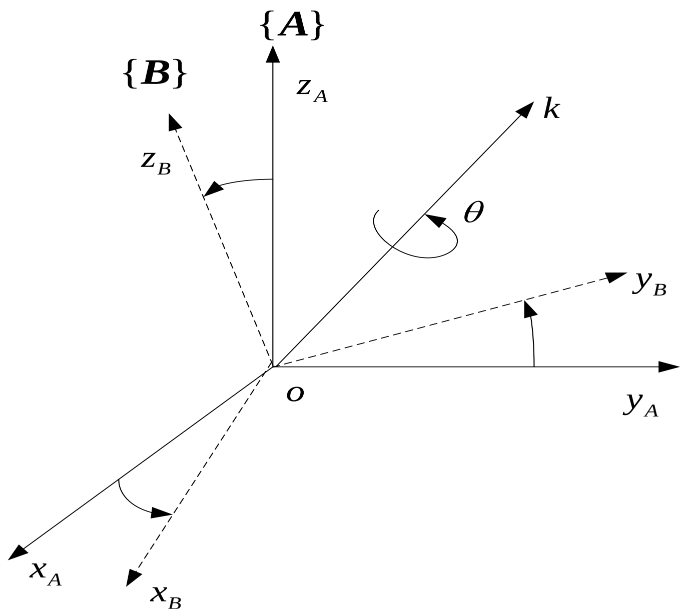


4.1 引言

- 第3章刚体位姿描述：旋转/平移矩阵性质—特殊变换群
- Chasles定理：任一刚体运动等价于螺旋运动（绕直线旋转和平移）
- 螺旋运动的无穷小量称为运动旋量（与力旋量对偶），运动旋量和力旋量具有明显的几何特征（用于机器人运动学方程建立与反解）
- 先介绍线矢量（line vector）、Plücker坐标和两线矢量的 *r*-积等概念：线矢量可以代表特殊的运动旋量，也可表示特殊的力旋量，还可以阐明刚体速度和静力的对偶关系，并引入伴随变换等概念

刚体姿态的描述：等效角度轴线表示法（背景知识）

- 令 $\boldsymbol{k} = k_x i + k_y j + k_z k$ 是过原点的单位矢量
- 求绕任意轴 k 旋转 θ 角的变换矩阵 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta)$
- 为求 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta)$，定义两个辅助坐标系 $\{A'$，$B'\}$
  - $\{A'\}$和$\{B'\}$分别与$\{A\}$和$\{B\}$固接；
  - $\{A'\}$和$\{B'\}$的z轴与k重合，x，y轴任意；
  - 旋转之前，$\{A'\}$和$\{B'\}$重合，$\{A\}$和$\{B\}$重合。

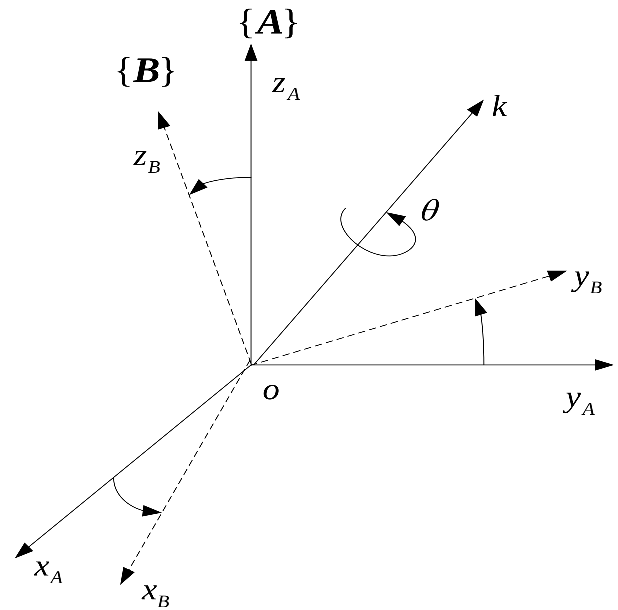


$$ {}^{A}_{A'}\boldsymbol{R} = {}^{B}_{B'}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & k_x \\ n_y & o_y & k_y \\ n_z & o_z & k_z \end{bmatrix} $$

刚体姿态的描述：等效角度轴线表示法（背景知识）

- 坐标系$\{B\}$绕k轴相对于$\{A\}$旋转θ角相当于：坐标系$\{B'\}$相对于$\{A'\}$的z轴旋转θ角，由下图得：

$$ {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta) = {}^{A}_{A'}\boldsymbol{R}\,{}^{A'}_{B'}\boldsymbol{R}\,{}^{B'}_{B}\boldsymbol{R} $$

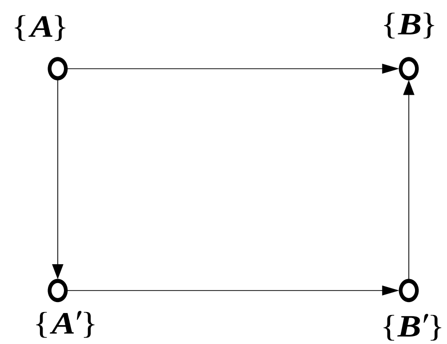


- 得到**相似变换**：

$$ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta) = {}^{A}_{A'}\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}(z,\theta)\,{}^{B}_{B'}\boldsymbol{R}^{-1}, $$

$$ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta) = {}^{A}_{A'}\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}(z,\theta)\,{}^{B}_{B'}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} $$

- 将上式展开并化简，得出 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta)$ 的表达式。它只与矢量k有关，即只与$\{A'\}$的z轴有关。



刚体姿态的描述：等效角度轴线表示法（背景知识）

□ 实际上：

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta)=\begin{bmatrix} n_x & o_x & k_x \\ n_y & o_y & k_y \\ n_z & o_z & k_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ o_x & o_y & o_z \\ k_x & k_y & k_z \end{bmatrix}$$

□ 运用旋转矩阵的正交性：

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{o}\cdot\boldsymbol{o}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=1$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{o}$$

包括了各种特殊情况：

- ◆**当k_x=1，k_y=k_z=0，则可得式3-5**
- ◆**当k_y=1，k_x=k_z=0，则可得式3-6**
- ◆**当k_z=1，k_y=k_x=0，则可得式3-7**

□ 得到旋转变换通式：

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta)=\begin{bmatrix} k_x k_x \mathrm{Vers}\theta + c\theta & k_y k_x \mathrm{Vers}\theta - k_z s\theta & k_z k_x \mathrm{Vers}\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y \mathrm{Vers}\theta + k_z s\theta & k_y k_y \mathrm{Vers}\theta + c\theta & k_z k_y \mathrm{Vers}\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z \mathrm{Vers}\theta - k_y s\theta & k_y k_z \mathrm{Vers}\theta + k_x s\theta & k_z k_z \mathrm{Vers}\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

刚体姿态的描述：等效角度轴线表示法（背景知识）

- **旋转变换通式**：根据转轴和转角建立相应旋转变换矩阵；**反向问题**：根据旋转矩阵求其等效转轴与等效转角(k,θ)。

- 给定旋转矩阵：$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$ 求出它的(k,θ)

- 令 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta)$，根据方程相等：

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_x k_x \mathrm{Vers}\theta + c\theta & k_y k_x \mathrm{Vers}\theta - k_z s\theta & k_z k_x \mathrm{Vers}\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y \mathrm{Vers}\theta + k_z s\theta & k_y k_y \mathrm{Vers}\theta + c\theta & k_z k_y \mathrm{Vers}\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z \mathrm{Vers}\theta - k_y s\theta & k_y k_z \mathrm{Vers}\theta + k_x s\theta & k_z k_z \mathrm{Vers}\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

- 所有对角线相加：$n_x+o_y+a_z=1+2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}\left(n_x+o_y+a_z-1\right)$

- 非对角线相减：

$$\begin{aligned} o_z-a_y &= 2k_x\sin\theta \\ a_x-n_z &= 2k_y\sin\theta \\ n_y-o_x &= 2k_z\sin\theta \end{aligned} \Rightarrow k_x=\frac{o_z-a_y}{2\sin\theta},k_y=\frac{a_x-n_z}{2\sin\theta},k_z=\frac{n_y-o_x}{2\sin\theta}$$

刚体姿态的描述：等效角度轴线表示法（背景知识）

□ 练习：求复合矩阵 ${}_B^A\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}\left(y,90^\circ\right)\boldsymbol{R}\left(z,90^\circ\right)$ **的等效转轴和转角(k,θ)。**

解答：1）计算旋转矩阵

$$ {}_B^A\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} $$

2）确定 $\theta = 120^\circ$

$$ \boxed{\begin{aligned} &\cos\theta = \frac{1}{2}\left(0+0+0-1\right) = -\frac{1}{2} \\ &\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1-0\right)^2+\left(1-0\right)^2+\left(1-0\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big/\left(-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}} $$

3）确定转轴：

$$ k_x = \frac{1-0}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad k_y = \frac{1-0}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad k_z = \frac{1-0}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} $$

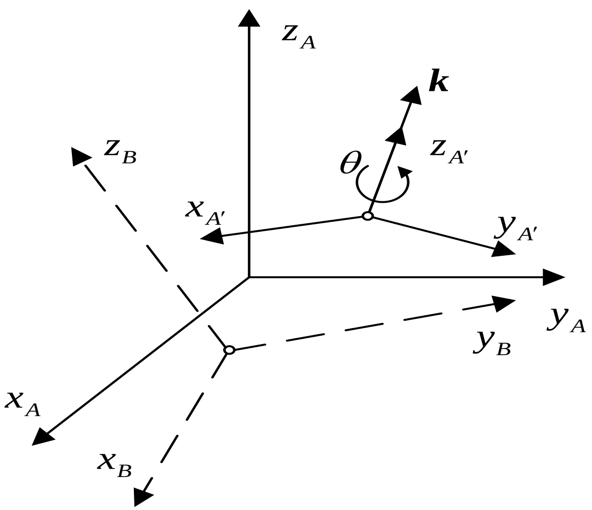
□ 可以证明（欧拉定理）：任何一组绕过原点的轴线的复合转动总是等价于绕某一过原点的轴线的转动。

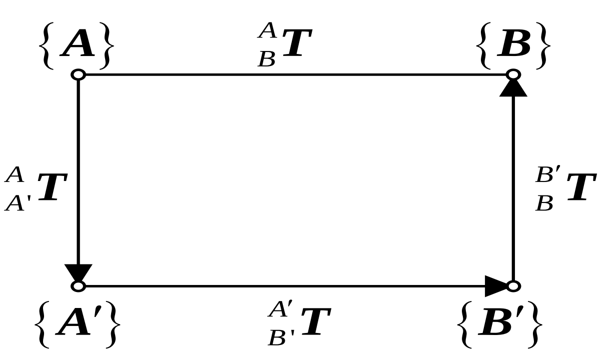
刚体姿态的描述：等效角度轴线表示法（背景知识）

- 推广：**旋转轴线k为不过原点的齐次变换通式**
- 假设单位矢量k通过点p，存在：

$$\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}k_x & k_y & k_z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}p_x & p_y & p_z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

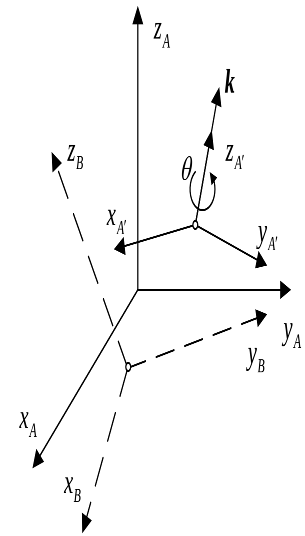
- 为求 ${}_{B}^{A}T$，定义两个辅助坐标系 $\{A',\ B'\}$
  - $\{A'\}$和$\{B'\}$分别与$\{A\}$和$\{B\}$固接；
  - $\{A', B'\}$ 和$\{A, B\}$平行，原点过p点；
  - 旋转之前，$\{A'\}$和$\{B'\}$重合，$\{A\}$和$\{B\}$重合。





刚体姿态的描述：等效角度轴线表示法（背景知识）

- 变换方程（相似变换）： ${}_{B}^{A}\boldsymbol{T} = {}_{A'}^{A}\boldsymbol{T}\,{}_{B'}^{A'}\boldsymbol{T}\,{}_{B}^{B'}\boldsymbol{T}$



- 其中:

$$ {}_{A'}^{A}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{3\times3} & \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} = Trans(\boldsymbol{p}) $$

$$ {}_{B}^{B'}\boldsymbol{T} = {}_{B'}^{B}\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{3\times3} & -\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} = Trans(-\boldsymbol{p}) $$

$$ {}_{B'}^{A'}\boldsymbol{T} = Rot(\boldsymbol{k},\theta) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta) & 0 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} $$

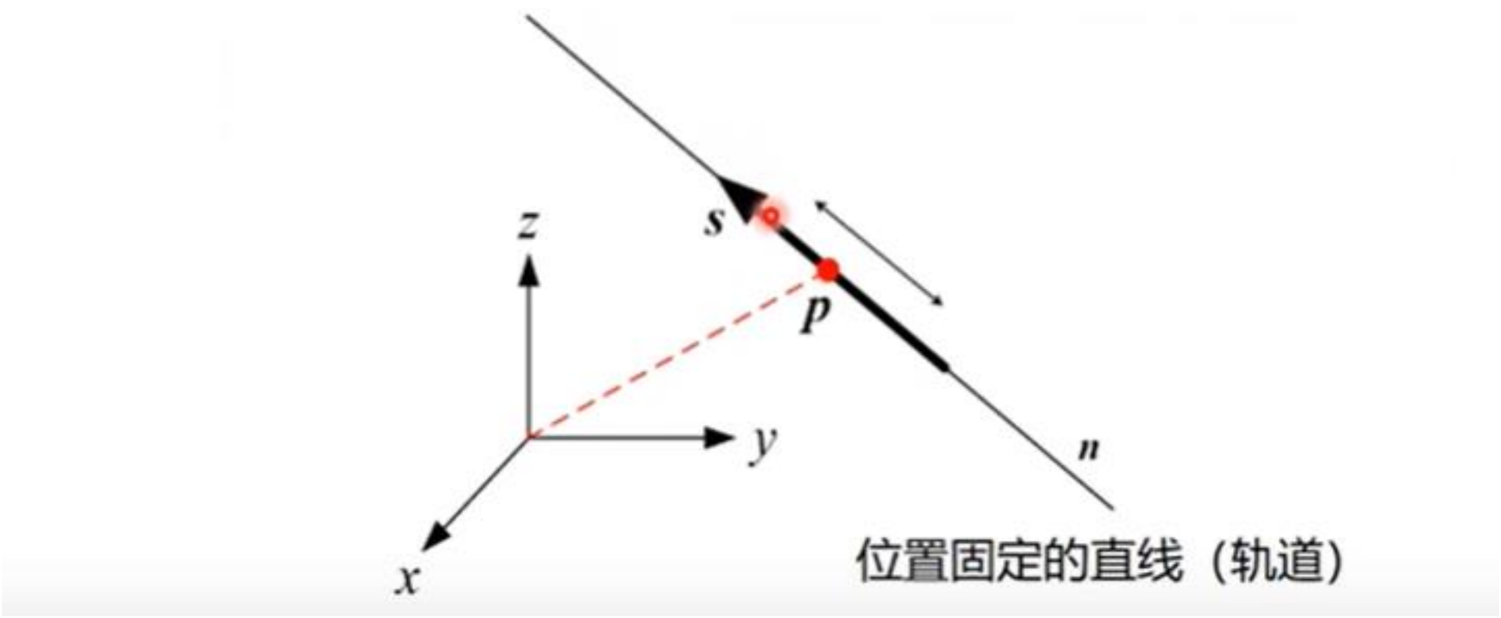
- 所以齐次变换通式:

$$ {}_{B}^{A}\boldsymbol{T} = Trans(\boldsymbol{p})\,Rot(\boldsymbol{k},\theta)\,Trans(-\boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta) & -\boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta)\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} $$

4.1 线矢量

线矢量：3维空间某条轨道上的矢量

如果空间中的一个矢量被约束在一条方向、位置固定的直线上，仅允许该矢量沿着直线前后移动，这个被直线约束的矢量被称为线矢量。其位置和方向由矢量*s*和其线矩决定。



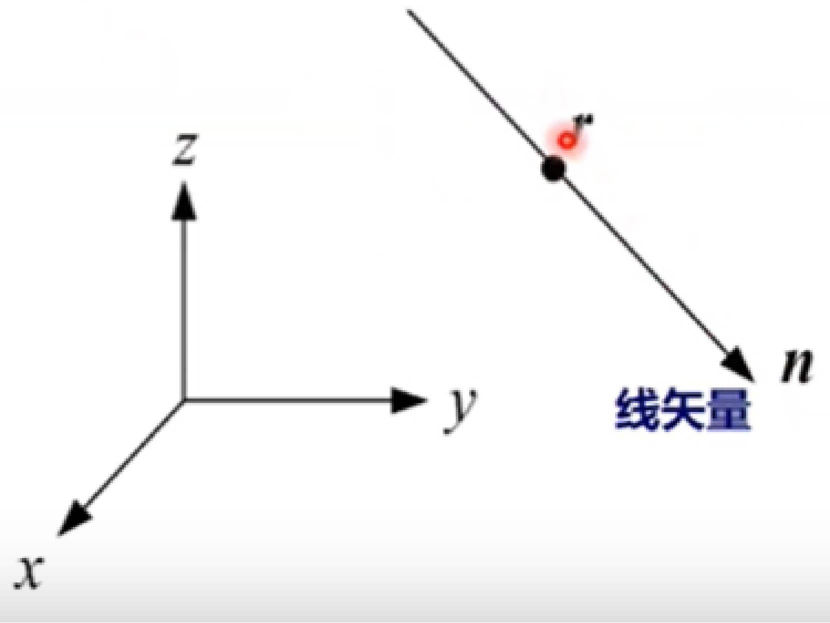
4.1 线矢量

- 线矢量：表示3维空间 $\Re^3$ 中的有向直线
- 线矢量L：定义为过点 $\boldsymbol{r}$ 、沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的有向矢量

$$L = \{\boldsymbol{r} + \lambda \boldsymbol{n} : \lambda \in \Re, \|\boldsymbol{n}\| = 1\}$$

符号的物理含义：

$\boldsymbol{r}$：线矢量经过的位置
$\boldsymbol{n}$：线矢量的方向
λ：线矢量的大小



4.1 线矢量

- 特例1：**作用力**

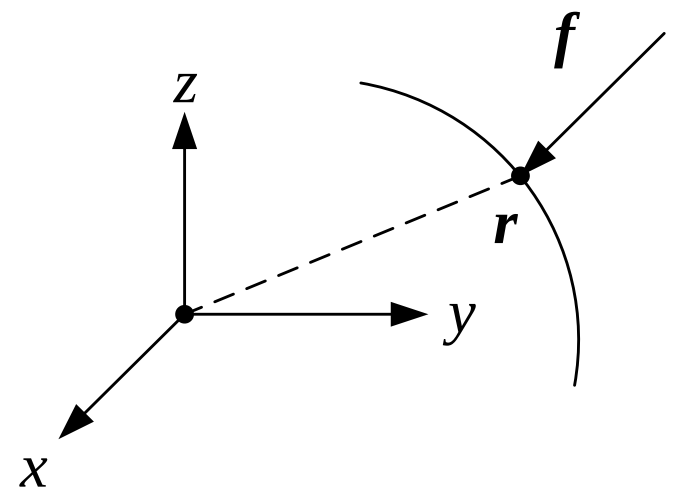
- 力 f 的作用点为 r，作用方向为物体内法线方向 n，力的幅值 $m=\|f\|$，则由力相对原点产生的：

力矢量： $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{n}m$

力矩矢量： $\boldsymbol{\tau}=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})m$

- 合并为6维线矢量(力旋量坐标)

$$F=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{\tau}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}\end{bmatrix}m$$



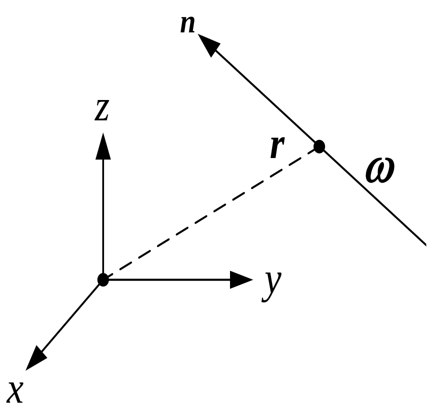
刚体上的纯力作用

4.1 线矢量

- **特例2：运动速度**
- **类似的，若 ω 为刚体旋转轴线，r 为轴线上任一点，角速度幅值 $\omega = n\dot{\theta}$ ，则由角速度产生相对原点的：**

线速度矢量： $\upsilon = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n})\dot{\theta}$

角速度矢量： $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{n}\dot{\theta}$



刚体纯转动

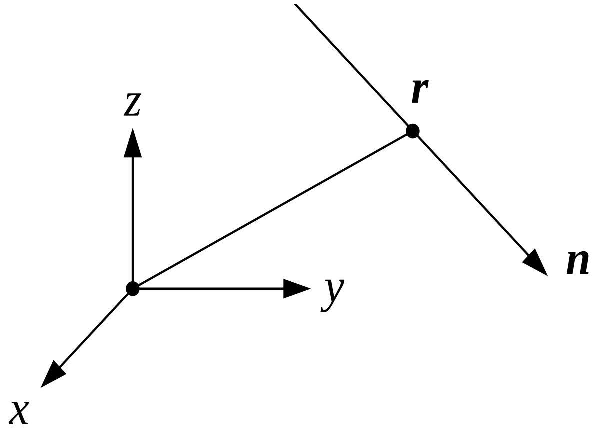
- **合并为6维线矢量(运动旋量坐标)**

$$\boxed{V = \begin{bmatrix} \upsilon \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{n} \end{bmatrix} \dot{\theta}}$$

4.1 线矢量

- **线矢量：表示3维空间 $\Re^3$ 中的有向直线**
- **线矢量L：定义为过点 r 沿方向 n 的点集**

$$L=\{\boldsymbol{r}+\lambda\boldsymbol{n}:\ \lambda\in\Re,\ \|\boldsymbol{n}\|=1\}$$



线矢量

- **线矢量L的Plücker坐标定义为六维列矢量**

$$L=\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}\end{bmatrix}$$

其中n为单位矢量（L 方向）；$r\times n$为线距

- **Plücker坐标满足：1）归一化条件— $\|\boldsymbol{n}\|=1$；**

  2） Plücker关系— $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})=0$

- **线矢量L可以表示为六维力的坐标 $F = Lm$**
- **线矢量L也可表示为六维运动速度坐标 $V = L^r m$ （倒置）**

4.1 线矢量的r-积

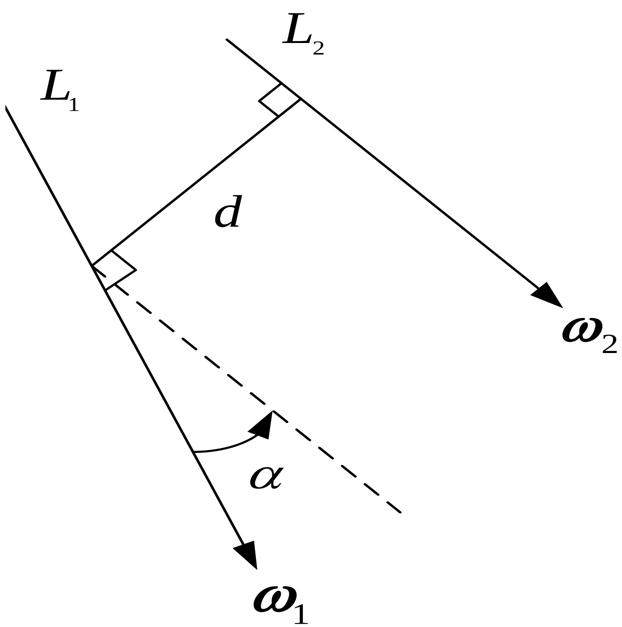
- **线矢量：** $L_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_1 & \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{n}_1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$
- **线矢量：** $L_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_2 & \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n}_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$
- **r-积(reciprocal product)定义为：**

$$L_1 \circ L_2 = \boldsymbol{n}_1 \cdot (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n}_2) + \boldsymbol{n}_2 \cdot (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{n}_1)$$

- **可以证明：两线矢量的r-积等于**

$$L_1 \circ L_2 = -d \sin \alpha$$

- **可见：r-积只与 d 和 α 有关，与坐标系的选取无关，具有不变性**
- **线矢量是没有内积的，只有r-积**



两线矢量的公垂线及夹角

4.1 矢量积与反对称矩阵

- 在欧式空间 $\Re^3$ 中，两矢量 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}\in\Re^3$ 的矢量积（叉积）为新矢量

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix} r_y n_z - r_z n_y \\ r_z n_x - r_x n_z \\ r_x n_y - r_y n_x \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{r}]=\begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix}$$

- 由矢量 $\boldsymbol{r}\in\Re^3$ 构成的 3×3 反对称矩阵 $[\boldsymbol{r}]\in\Re^{3\times3}$ 为

- 该矩阵的性质：

◆ 反对称性：$[\boldsymbol{r}]^{\mathrm{T}}=-[\boldsymbol{r}]$

◆ “叉积”运算是**线性算子**：$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}=[\boldsymbol{r}]\boldsymbol{n}$

◆ $\boldsymbol{R}[\boldsymbol{r}]\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}]$ ，式中R是旋转矩阵

◆ $(\boldsymbol{R}\boldsymbol{r})\times(\boldsymbol{R}\boldsymbol{n})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})$ $\quad [\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}](\boldsymbol{R}\boldsymbol{n})=\boldsymbol{R}([\boldsymbol{r}]\boldsymbol{n})$ 。

- 算子 $\wedge$ 作用将 $\boldsymbol{r}$ 转换为反对称矩阵 $\hat{\boldsymbol{r}}=[\boldsymbol{r}]\in\Re^{3\times3}$；逆算子 $[\boldsymbol{r}]^{\vee}=\boldsymbol{r}$

复习

思考与梳理

刚体的螺旋运动如何描述?

任何一组绕坐标轴的复合转动总是等价于?

什么是线矢量？其表达式为?

线矢量的Plücker坐标如何定义？力和速度坐标定义?

线矢量是否有内积?

由矢量 r 构成的反对称矩阵具有哪些性质?

除了Plücker坐标，线矢量还有哪种表达方式？他们有什么不同?

4.1 齐次坐标与伴随变换

- **线矢量L的齐次坐标定义为**

$$\bar{L}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{n} & \boldsymbol{r}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in\Re^{4\times 2}$$

- **从 $\{B\}$ 到 $\{A\}$ 的坐标变换用齐次变换矩阵表示**

$${}^{A}\bar{L}={}_{B}^{A}\boldsymbol{T}\,{}^{B}\bar{L}\;\Rightarrow\;\begin{bmatrix}{}^{A}\boldsymbol{n} & {}^{A}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{}_{B}^{A}\boldsymbol{R} & {}^{A}\boldsymbol{p}_{B_0}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^{B}\boldsymbol{n} & {}^{B}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{}_{B}^{A}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{n} & {}_{B}^{A}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{r}+{}^{A}\boldsymbol{p}_{B_0}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}$$

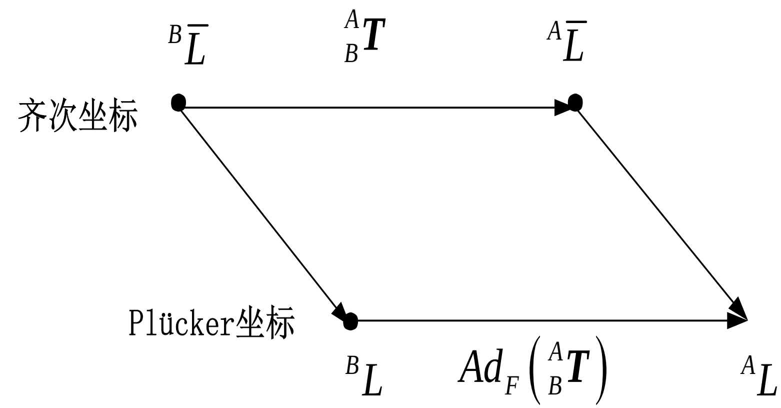
- **对应线矢量的Plücker坐标表示为**

$$\begin{bmatrix}{}^{A}\boldsymbol{n}\\ {}^{A}\boldsymbol{r}\times{}^{A}\boldsymbol{n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{}_{B}^{A}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{n}\\ \left({}_{B}^{A}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{p}\right)\times\left({}_{B}^{A}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{n}\right)\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}{}_{B}^{A}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0}\\ [\boldsymbol{p}]\,{}_{B}^{A}\boldsymbol{R} & {}_{B}^{A}\boldsymbol{R}\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}{}^{B}\boldsymbol{n}\\ {}^{B}\boldsymbol{r}\times{}^{B}\boldsymbol{n}\end{bmatrix}$$

红框中 6×6 的变换矩阵称为力伴随矩阵，记作

$$Ad_F\left({}_{B}^{A}\boldsymbol{T}\right)=\begin{bmatrix}{}_{B}^{A}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0}\\ [\boldsymbol{p}]\,{}_{B}^{A}\boldsymbol{R} & {}_{B}^{A}\boldsymbol{R}\end{bmatrix}_{6\times 6}$$

4.1 齐次坐标与伴随变换



齐次坐标与Plücker坐标的变换关系

- **力伴随变换满足**

$$ {}^{A}L = Ad_F\left({}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\right){}^{B}L, \qquad {}^{B}L = Ad_F^{-1}\left({}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\right){}^{A}L $$

- **力伴随变换的逆**

$$ Ad_F^{-1}\left({}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\right) = Ad_F\left({}^{B}_{A}\boldsymbol{T}\right) = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ -{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{p}] & {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} $$

- **可以推导倒置线矢量 L^r 的速度伴随矩阵**

$$ Ad_V\left({}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\right) = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} & [\boldsymbol{p}]{}^{A}_{B}\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} & {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{逆变换}} Ad_V^{-1}\left({}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\right) = Ad_V\left({}^{B}_{A}\boldsymbol{T}\right) = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & -{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{p}] \\ \boldsymbol{0} & {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}_{6\times 6} $$

- **力伴随矩阵与速度伴随矩阵可相互转置：刚体静力/速度分析**

$$ Ad_F\left({}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\right) = Ad_V^{\mathrm{T}}\left({}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\right), \quad Ad_F^{-1}\left({}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\right) = Ad_V^{-\mathrm{T}}\left({}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\right) $$

4.1 齐次坐标与伴随变换

□ 定义 $_B^A\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} _B^A\boldsymbol{R} & ^A\boldsymbol{p}_{Bo} \\ \boldsymbol{0}_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}$，则伴随变换表达式：

$\mathrm{Ad}_{\mathrm{V}}(_B^A\boldsymbol{T})$	$\mathrm{Ad}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{T}}(_B^A\boldsymbol{T})$	$\mathrm{Ad}_{\mathrm{V}}^{-1}(_B^A\boldsymbol{T})$
$\begin{bmatrix} _B^A\boldsymbol{R} & [^A\boldsymbol{p}_{Bo}]\,_B^A\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & _B^A\boldsymbol{R} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} _B^A\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ -_B^A\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}[^A\boldsymbol{p}_{Bo}] & _B^A\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} _B^A\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & -_B^A\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}[^A\boldsymbol{p}_{Bo}] \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & _B^A\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$
$\mathrm{Ad}_{\mathrm{F}}(_B^A\boldsymbol{T})$	$\mathrm{Ad}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{T}}(_B^A\boldsymbol{T})$	$\mathrm{Ad}_{\mathrm{F}}^{-1}(_B^A\boldsymbol{T})$
$\begin{bmatrix} _B^A\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ [^A\boldsymbol{p}_{Bo}]\,_B^A\boldsymbol{R} & _B^A\boldsymbol{R} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} _B^A\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & -_B^A\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}[^A\boldsymbol{p}_{Bo}] \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & _B^A\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} _B^A\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ -_B^A\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}[^A\boldsymbol{p}_{Bo}] & _B^A\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$

4.2 微分转动与转动速度

- **刚体速度可以看成是单位时间内的微分运动**
- **计算旋转矩阵的微分和导数**

$$ {}^{B}V_{Q}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{}^{B}Q=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{{}^{B}Q(t+\Delta t)-{}^{B}Q(t)}{\Delta t} $$

$$ \dot{\boldsymbol{R}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{R}(t+\Delta t)-\boldsymbol{R}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{R}(t)}{\Delta t} $$

$$ \because\ \boldsymbol{R}(t+\Delta t)=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\delta\theta)\boldsymbol{R}(t) \qquad \therefore\ \Delta\boldsymbol{R}(t)=\boldsymbol{R}(t+\Delta t)-\boldsymbol{R}(t) $$

相对于固定坐标系（空间参考系）

$$ =\left(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\delta\theta)-\boldsymbol{I}_3\right)\boldsymbol{R}(t)=[\boldsymbol{\delta}]\boldsymbol{R}(t) $$

$$ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta)=\begin{bmatrix} k_x k_x \mathrm{Vers}\theta+c\theta & k_y k_x \mathrm{Vers}\theta-k_z s\theta & k_z k_x \mathrm{Vers}\theta+k_y s\theta \\ k_x k_y \mathrm{Vers}\theta+k_z s\theta & k_y k_y \mathrm{Vers}\theta+c\theta & k_z k_y \mathrm{Vers}\theta-k_x s\theta \\ k_x k_z \mathrm{Vers}\theta-k_y s\theta & k_y k_z \mathrm{Vers}\theta+k_x s\theta & k_z k_z \mathrm{Vers}\theta+c\theta \end{bmatrix} $$

$$ \because\ \sin\delta\theta=\delta\theta \qquad \cos\delta\theta=1 $$

微分旋转算子

$$ \therefore\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\delta\theta)=\begin{bmatrix} 1 & -k_z\delta\theta & k_y\delta\theta \\ k_z\delta\theta & 1 & -k_x\delta\theta \\ -k_y\delta\theta & k_x\delta\theta & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y \\ \delta_z & 0 & -\delta_x \\ -\delta_y & \delta_x & 0 \end{bmatrix}=[\boldsymbol{\delta}] $$

4.2 微分转动与转动速度

- 刚体速度可以看成是单位时间内的微分运动
- 计算旋转矩阵的微分和导数

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{R}(t+\Delta t) - \boldsymbol{R}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{R}(t)}{\Delta t}$$

$$\Delta \boldsymbol{R}(t) = [\boldsymbol{\delta}]\boldsymbol{R}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -k_z\delta\theta & k_y\delta\theta \\ k_z\delta\theta & 0 & -k_x\delta\theta \\ -k_y\delta\theta & k_x\delta\theta & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{R}(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z\dot{\theta} & k_y\dot{\theta} \\ k_z\dot{\theta} & 0 & -k_x\dot{\theta} \\ -k_y\dot{\theta} & k_x\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{R}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{R}(t) = [\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{R}(t)$$

$$[\boldsymbol{\omega}] = \dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t) = \dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)$$

4.2 微分转动与转动速度

□ 相对空间参考系的空间角速度矩阵

$$[\omega^s(t)] = \dot{R}(t)R^{-1}(t) = \dot{R}(t)R^{\mathrm{T}}(t)$$

回忆：

$$R = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t+\Delta t) - R(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta R(t)}{\Delta t}$$

$$R(t+\Delta t) = R(k,\delta\theta)R(t)$$

□ 相对物体参考系的物体角速度矩阵

$$[\omega^b] = \boldsymbol{R}^{-1}(t)\dot{\boldsymbol{R}}(t) = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)\dot{\boldsymbol{R}}(t)$$

$$\dot{R} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{R}(t+\Delta t) - \boldsymbol{R}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{R}(t)}{\Delta t}$$

$$\boldsymbol{R}(t+\Delta t) = \boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\delta\theta)$$

4.2 纯转动的质点速度

- {A，B} 原点重合，{B} 绕 {A} 旋转，则 {B} 中质点轨迹

$$ {}^{A}\boldsymbol{q}(t) = {}_{B}^{A}\boldsymbol{R}(t)\,{}^{B}\boldsymbol{q} $$

- 可推导在 {A} 中质点速度的两种表达式：

$$ \upsilon\left({}^{A}\boldsymbol{q}(t)\right) = \left[{}_{B}^{A}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]{}_{B}^{A}\boldsymbol{R}(t)\,{}^{B}\boldsymbol{q}, $$

$$ \upsilon\left({}^{A}\boldsymbol{q}(t)\right) = {}_{B}^{A}\boldsymbol{R}(t)\left[{}_{B}^{A}\boldsymbol{\omega}^{b}\right]{}^{B}\boldsymbol{q} $$

物体角速度与空间角速度

$$ \left[{}_{B}^{A}\boldsymbol{\omega}^{b}\right] = {}_{B}^{A}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)\left[{}_{B}^{A}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]{}_{B}^{A}\boldsymbol{R}(t), $$

$$ {}_{B}^{A}\boldsymbol{\omega}^{b} = {}_{B}^{A}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)\,{}_{B}^{A}\boldsymbol{\omega}^{s} $$

- 推导出由转动产生的质点速度的两种表达式：

$$ \boxed{\begin{aligned} \upsilon\left({}^{A}\boldsymbol{q}(t)\right) &= \left[{}_{B}^{A}\boldsymbol{\omega}^{s}\right]{}_{B}^{A}\boldsymbol{R}(t)\,{}^{B}\boldsymbol{q} = {}_{B}^{A}\boldsymbol{\omega}^{s}\times{}^{A}\boldsymbol{q}, \\ \upsilon\left({}^{B}\boldsymbol{q}(t)\right) &= {}_{B}^{A}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)\,\upsilon\left({}^{A}\boldsymbol{q}(t)\right) = {}_{B}^{A}\boldsymbol{\omega}^{b}\times{}^{B}\boldsymbol{q} \end{aligned}} $$

4.2 旋转矩阵的矩阵指数

- **可以证明：旋转矩阵*R*可以表示为反对称矩阵的矩阵指数**
- **定义*A*为*n*×*n*的矩阵，其矩阵指数定义为*A*的泰勒级数：**

$$\mathbf{e}^{A} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \frac{\boldsymbol{A}^{2}}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^{3}}{3!} + \ldots$$

根据矩阵范数（模）可以验证上述泰勒级数的收敛性。性质：

$$1)\ \frac{d}{dt}\mathbf{e}^{\boldsymbol{A}\theta} = \left(\boldsymbol{A}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}^{\boldsymbol{A}\theta} = \mathbf{e}^{\boldsymbol{A}\theta}\left(\boldsymbol{A}\dot{\theta}\right),$$

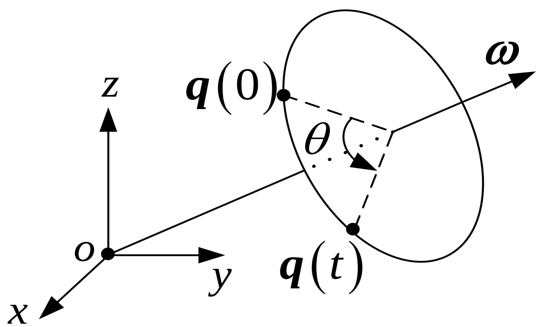
$$2)\ \det\left(\mathbf{e}^{\boldsymbol{A}}\right) = \mathbf{e}^{Tr(\boldsymbol{A})}$$

$$3)\ \boldsymbol{B}\mathbf{e}^{A}\boldsymbol{B}^{-1} = \mathbf{e}^{\boldsymbol{BAB}^{-1}}$$

其中 $\boldsymbol{B} \in \Re^{n\times n}$ **是可逆的，**$\det(\cdot)$**为矩阵行列式，**$Tr(\cdot)$**为矩阵的迹**

4.2 旋转矩阵的矩阵指数

- 由欧拉定理，旋转矩阵R等价于绕过原点固定轴 $\omega \in \Re^3$旋转一定角度



$$\dot{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q}(t) = [\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{q}(t)$$

匀速旋转时q点速度

- 对应上式以时间t为变量的线性常微分方程： $\boldsymbol{q}(t) = \mathbf{e}^{[\omega]t}\boldsymbol{q}(0)$

- 求解上式得Rodrigues公式： $$\boxed{\mathbf{e}^{[\omega]t} = \boldsymbol{I} + [\omega]t + \frac{([\omega]t)^2}{2!} + \frac{([\omega]t)^3}{3!} + \cdots}$$

- 令 $\omega = [1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$，即绕$x$轴旋转时，得矩阵指数

$$\mathbf{e}^{[\omega]\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}(x,\ \theta)$$

4.2 旋转矩阵的矩阵指数

- **单位矢量 ω 组成的反对称矩阵的矩阵指数具有如下性质：**
- **具有正交性，其行列式为1，因此是旋转矩阵；**
- **反对称矩阵集合定义为*SO*(3)的李代数*so*(3)：** $\boldsymbol{so}(3)=\left\{\mathbf{S}\in\Re^{3\times3}:\mathbf{S}^{\mathrm{T}}=-\mathbf{S}\right\}$

  李代数*so*(3)是实线性矢量空间，维数3，矩阵 $[\boldsymbol{\omega}]\in\Re^{3\times3}$ **与** $\boldsymbol{\omega}\in\Re^{3}$ **等同**
- **矩阵指数是*SO*(3)上的满射变换，即** $\exp:\boldsymbol{so}(3)\rightarrow\boldsymbol{SO}(3)$ **是满射；**
- $\exp:\boldsymbol{so}(3)\rightarrow\boldsymbol{SO}(3)$ **是多对一的映射。**

4.3 微分运动矢量与微分算子

- 机器人“手-眼标定/误差补偿/运动控制”时，需要计算末端执行器位姿的微分变化，需要求出齐次变换矩阵的微分和导数：

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{T}(t+\Delta t) - \boldsymbol{T}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{T}(t)}{\Delta t}$$

其中：$\boldsymbol{T}(t+\Delta t) = Trans\left(d_x,\ d_y,\ d_z\right) Rot\left(\boldsymbol{k},\ \delta\theta\right) \boldsymbol{T}(t)$ 参考系

或：$\boldsymbol{T}(t+\Delta t) = \boldsymbol{T}(t) Trans\left({}^{T}d_x, {}^{T}d_y, {}^{T}d_z\right) Rot\left({}^{T}\boldsymbol{k}, {}^{T}\delta\theta\right)$ 运动系

- 坐标系 $\boldsymbol{T}(t)$ 的微分 $d\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(t+\Delta t) - \boldsymbol{T}(t)$ 也有两种形式：微分算子 Δ

$$d\boldsymbol{T} = \left(Trans\left(d_x, d_y, d_z\right) Rot\left(\boldsymbol{k}, \delta\theta\right) - \boldsymbol{I}_4\right) \boldsymbol{T}(t) = \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{T}(t)$$

$$d\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(t)\left(Trans\left({}^{T}d_x, {}^{T}d_y, {}^{T}d_z\right) Rot\left({}^{T}\boldsymbol{k}, {}^{T}\delta\theta\right) - \boldsymbol{I}_4\right) = \boldsymbol{T}(t)\ {}^{T}\boldsymbol{\Delta}$$

可用于误差传递等

4.3 微分运动矢量与微分算子

- 微分算子 $\varDelta$ 可以由微分转动和微分移动的合成得到：

$$\varDelta = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y & d_x \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & d_y \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 刚体微分运动矢量 $\boldsymbol{D}$ 包含微分平移 $\boldsymbol{d}$ 和微分旋转 $\boldsymbol{\delta}$，存在：

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varDelta} = \boldsymbol{D} = [\boldsymbol{D}] = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\delta}] & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{bmatrix}$$

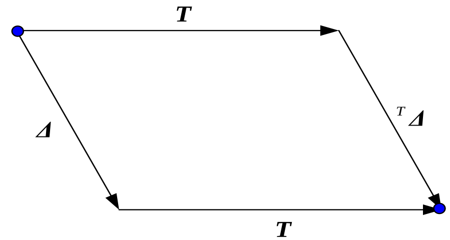
- **练习**：已知手爪的姿态矩阵和微分运动，求 $dT, {}^{T}dT$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.3 微分运动矢量与微分算子

- 微分运动矢量D在不同坐标系中的表示是不同的
- 相对运动系的微分算子 ${}^{T}\varDelta$ 与相对参考系的微分算子 $\varDelta$ 满足

$$\boxed{\varDelta \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\,{}^{T}\varDelta}$$



尺寸链

- 定义微分算子：

$$\varDelta = \begin{bmatrix} [\delta] & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{T}\varDelta = \begin{bmatrix} [{}^{T}\delta] & {}^{T}\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{bmatrix}$$

- 可得到微分运动矢量的**伴随变换矩阵**：

$$\boxed{\boldsymbol{D} = Ad_V(\boldsymbol{T})\,{}^{T}\boldsymbol{D}, \quad Ad_V(\boldsymbol{T}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & [\boldsymbol{p}]\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R} \end{bmatrix}}$$

- 可以证明，｛A，B｝的微分变换就是之前的速度变换矩阵：

$$Ad_V\left({}_{B}^{A}\boldsymbol{T}\right) = \begin{bmatrix} {}_{B}^{A}\boldsymbol{R} & \left[{}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo}\right]{}_{B}^{A}\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} & {}_{B}^{A}\boldsymbol{R} \end{bmatrix}, \quad Ad_V^{-1}\left({}_{B}^{A}\boldsymbol{T}\right) = Ad_V\left({}_{A}^{B}\boldsymbol{T}\right) = \begin{bmatrix} {}_{B}^{A}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & -{}_{B}^{A}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\left[{}^{A}\boldsymbol{p}_{Bo}\right] \\ \boldsymbol{0} & {}_{B}^{A}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

4.3 刚体的空间速度和物体速度

- 刚体运动旋量坐标 V 由线速度 υ 和角速度 ω组成，它与微分运动同为6维列矢量，只相差一个时间系数

$$V=\begin{bmatrix}\upsilon\\ \omega\end{bmatrix}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{\delta}\end{bmatrix}$$

- 对于任意两个坐标系 $\{A，B\}$，可推导空间速度和物体速度

$$\boxed{\left[V^{s}\right]=\dot{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{T}^{-1},\ V^{s}=\begin{bmatrix}\upsilon^{s}\\ \omega^{s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}+\dot{\boldsymbol{p}}\\ \left(\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\right)^{\vee}\end{bmatrix}}\qquad \boxed{\left[V^{b}\right]=\boldsymbol{T}^{-1}\dot{\boldsymbol{T}},\ V^{b}=\begin{bmatrix}\upsilon^{b}\\ \omega^{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{p}}\\ \left(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{R}}\right)^{\vee}\end{bmatrix}}$$

- 伴随变换：

$$\left[V^{s}\right]=\boldsymbol{T}\left[V^{b}\right]\boldsymbol{T}^{-1},\quad V^{s}=Ad_{V}\left(\boldsymbol{T}\right)V^{b},\quad \boldsymbol{T}\left[V^{b}\right]\boldsymbol{T}^{-1}=\left[Ad_{V}\left(\boldsymbol{T}\right)V^{b}\right]$$

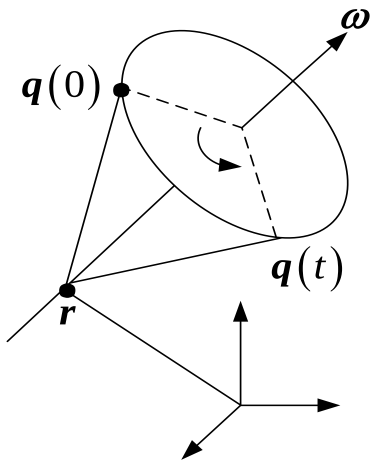
- 注意：微分运动的物理量纲是长度和角度单位，运动旋量物理量纲是线速度和角速度单位，两者不同。运动旋量坐标和微分运动矢量都是6维列矢量，构成6维线性矢量空间，具有相同的速度伴随变换。

4.3 运动旋量的矩阵指数

- 旋转群$SO(3)$与李代数$so(3)$ 的矩阵指数映射关系可推广到刚体变换群$SE(3)$

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{q}(t)-\boldsymbol{r})=[\boldsymbol{\omega}](\boldsymbol{q}(t)-\boldsymbol{r})$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{q}}(t)\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[\boldsymbol{\omega}] & \boldsymbol{\upsilon}\\ \mathbf{0} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}(t)\\1\end{bmatrix}=[\boldsymbol{V}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}(t)\\1\end{bmatrix}$$



- 定义4×4的矩阵$[V]$为纯转动产生的运动旋量，记作：

$$[V]=\begin{bmatrix}[\boldsymbol{\omega}] & \boldsymbol{\upsilon}\\ \mathbf{0} & 0\end{bmatrix}$$

其中反对称矩阵 $[\boldsymbol{\omega}]\in \boldsymbol{so}(3)$，$\boldsymbol{\upsilon}=-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$

- 求解上式的线性常微分方程，可得： $\boldsymbol{q}(t)=\mathrm{e}^{[V]t}\boldsymbol{q}(0)$

其中指数矩阵 $\mathrm{e}^{[V]t}$ 表示点从 $\boldsymbol{q}(0)$ 到 $\boldsymbol{q}(t)$ 的刚体变换。

$$e^{[V]t}=\boldsymbol{I}+[V]t+\frac{([V]t)^2}{2!}+\frac{([V]t)^3}{3!}+\cdots$$

4.3 运动旋量的矩阵指数

- **4×4的矩阵[*V*]称为运动旋量，它由两部分组成：** $[\omega] \in \boldsymbol{so}(3)$, $\upsilon \in \Re^3$
- **运动旋量的集合[*V*]定义为刚体变换群*SE*(3)的李代数*se*(3)：**

$$\boldsymbol{se}(3) = \left\{ \left([\omega],\ \upsilon \right) : [\omega] \in \boldsymbol{so}(3),\ \upsilon \in \Re^3 \right\}$$

- **算子符** $\wedge, \vee$ **可将运动旋量** $[V] \in \boldsymbol{se}(3)$ **与运动旋量坐标** $V \in \Re^6$ **相互转换**

$$V = \begin{bmatrix} \upsilon \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\omega] & \upsilon \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}^{\vee} \qquad [V] = \begin{bmatrix} \upsilon \\ \omega \end{bmatrix}^{\wedge} = \begin{bmatrix} [\omega] & \upsilon \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$

- ***SE*(3)与*se*(3)存在矩阵指数映射关系：** $\exp : \boldsymbol{se}(3) \to \boldsymbol{SE}(3)$ **，具有如下关系**

◆ **满足：** $\exp\left([V]\theta \right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}(\theta) & \boldsymbol{p}(\theta) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{SE}(3)$

◆ **映射：** $\exp : \boldsymbol{se}(3) \to \boldsymbol{SE}(3)$ **是*SE*(3)上的满射**

◆ **映射：** $\exp : \boldsymbol{se}(3) \to \boldsymbol{SE}(3)$ **是多对一的**

4.3 运动旋量的矩阵指数

□ 运动旋量[V]的矩阵指数表达式

$$\mathbf{e}^{[V]\theta}=\begin{bmatrix}\mathbf{e}^{[\omega]\theta} & \left(\boldsymbol{I}-\mathbf{e}^{[\omega]\theta}\right)(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\upsilon})+\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}\theta \\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}(\theta) & \boldsymbol{p}(\theta) \\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix}$$

◆ **旋转矩阵：** $\boldsymbol{R}(\theta)=\mathbf{e}^{[\omega]\theta}=\boldsymbol{I}+[\boldsymbol{\omega}]\sin\theta+[\boldsymbol{\omega}]^2(1-\cos\theta)$

◆ **平移矢量：** $\boldsymbol{p}(\theta)=\left(\boldsymbol{I}-\mathbf{e}^{[\omega]\theta}\right)(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\upsilon})+\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}\theta$

◆ **纯移动（$\omega=0$）：** $\mathbf{e}^{[V]\theta}=\boldsymbol{I}+[V]\theta=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{\upsilon}\theta \\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix}$

注意：机器人的关节大部分是移动关节或转动关节，利用矩阵指数建立刚体变换矩阵时，只要规定表示移动关节或转动关节轴线的线矢量（方向、一点、角度），可避免坐标系的选取，大大减少计算量。

4.4 刚体变换的线矢量表示

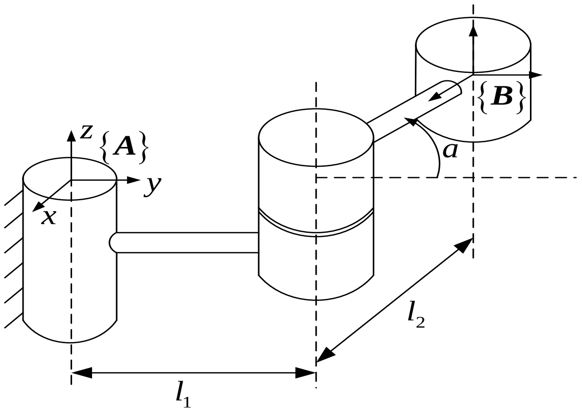
计算步骤：确定关节轴线的线矢量→运动旋量→矩阵指数：

		$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{\omega}$	$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega}$	$[\boldsymbol{\omega}]$	$[V]$	$\boldsymbol{R}(\theta)$	$\boldsymbol{p}(\theta)$
移动关节		0	0	0	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}[0]&\boldsymbol{\upsilon}\\\mathbf{0}&0\end{bmatrix}$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{\upsilon}\theta$
转动关节	绕 x 轴	$\begin{bmatrix}\otimes\\r_y\\r_z\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\r_z\\-r_y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&r_z\\0&1&0&-r_y\\0&0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&c\theta&-s\theta\\0&s\theta&c\theta\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\r_y(1-c\theta)+r_z s\theta\\-r_y s\theta+r_z(1-c\theta)\end{bmatrix}$
	绕 y 轴	$\begin{bmatrix}r_x\\\otimes\\r_z\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-r_z\\0\\r_x\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&1&-r_z\\0&0&0&0\\-1&0&0&r_x\\0&0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}c\theta&0&s\theta\\0&1&0\\-s\theta&0&c\theta\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}r_x(1-c\theta)-r_z s\theta\\0\\r_x s\theta+r_z(1-c\theta)\end{bmatrix}$
	绕 z 轴	$\begin{bmatrix}r_x\\r_y\\\otimes\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}r_y\\-r_x\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&-1&0&r_y\\1&0&0&-r_x\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}c\theta&-s\theta&0\\s\theta&c\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}r_x(1-c\theta)+r_y s\theta\\-r_x s\theta+r_y(1-c\theta)\\0\end{bmatrix}$
	绕任意轴	$\begin{bmatrix}r_x\\r_y\\r_z\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}$	$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega}$	$\begin{bmatrix}0&-\omega_z&\omega_y\\\omega_z&0&-\omega_x\\-\omega_y&\omega_x&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}[\boldsymbol{\omega}]&\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega}\\\mathbf{0}&0\end{bmatrix}$	$\boldsymbol{R}(\omega,\theta)$	$\left(\boldsymbol{I}-e^{[\boldsymbol{\omega}]\theta}\right)\cdot\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\omega}\left(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}\right)\right)$

4.4 刚体变换的线矢量表示

练习：绕线矢量L转动角度 α，L上一点 $\boldsymbol{r}=[0\quad l_1\quad 0]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\omega}=[0\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}$

求刚体变换 ${}_B^A\boldsymbol{T}(\alpha)$



解答：运动旋量

$$[V]=\begin{bmatrix}[\boldsymbol{\omega}] & \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{0} & 0\end{bmatrix}$$

矩阵指数

绕固定轴旋转产生的刚体移动

$$\boldsymbol{e}^{[V]\alpha}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}^{[\omega]\alpha} & \left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}^{[\omega]\alpha}\right)(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\upsilon}) \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & l_1\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & l_1(1-\cos\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

该齐次变换矩阵表示｛B｝相对｛A｝的变换： ${}_B^A\boldsymbol{T}(\alpha)=\boldsymbol{e}^{[V]\alpha}\,{}_B^A\boldsymbol{T}(0)$

其中： ${}_B^A\boldsymbol{T}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & [0\quad l_1+l_2\quad 0]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}$

4.5 螺旋运动

螺旋运动：刚体绕轴线L旋转 θ 并沿直线移动 d 的复合

当 $\theta \neq 0$ 时，比值 $h = d/\theta$ 定义为螺距

- **当 $h = 0$，纯移动；当 $h = \infty$，纯转动**
- **旋转轴线可用线矢量描述：**

$$L = \{\boldsymbol{r} + \lambda \boldsymbol{\omega} : \lambda \in \Re\}$$

θ

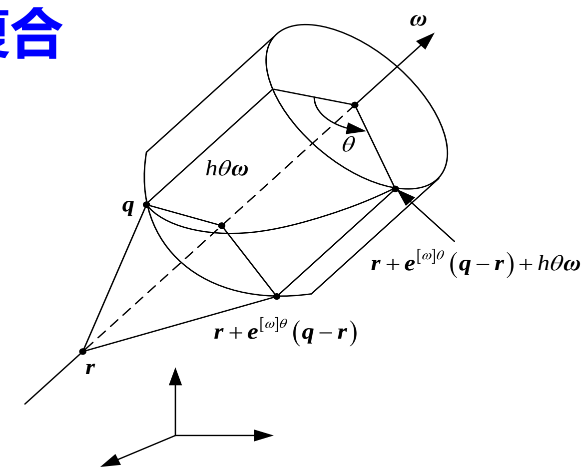
- **纯移动时，把过原点沿方向 υ 的有向直线作线矢量**

$$L = \{\boldsymbol{0} + \lambda \boldsymbol{\upsilon} : \lambda \in \Re\}$$

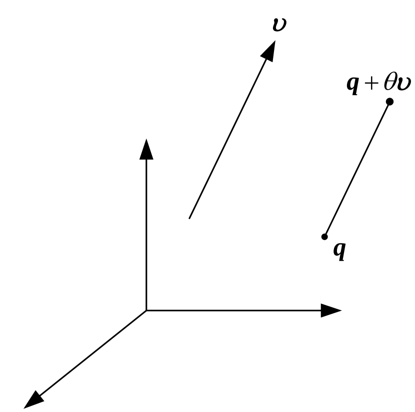
- **推导得，螺旋运动的刚体变换**

$$\boxed{\boldsymbol{T}(\theta) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}^{[\omega]\theta} & \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{e}^{[\omega]\theta}\right)\boldsymbol{r} + \omega h \theta \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}}$$

在参考系将刚体上某点q从$q(0)$映射到$q(\quad)$



(a) $\omega \neq 0$ 时



(b) $h = \infty$ 时

4.5 运动旋量的螺旋坐标

□ 螺旋运动三要素：轴线 L、节距 h 和幅值 m。下面讨论运动旋量 $[V]=(\upsilon,\ \omega)$ 与其螺旋坐标 $(L,\ h,\ m)$ 的关系

1）节距：运动旋量 $[V]\in se(3)$ 的节距定义为移动量与转动量的比值

$$h=\frac{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\upsilon}}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2}$$

2）轴线：转轴 L 为有线矢量，有：

$$L=\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\upsilon}}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2}+\lambda\boldsymbol{\omega}:\lambda\in\Re,\ \boldsymbol{\omega}\neq\mathbf{0}\\ \mathbf{0}+\lambda\boldsymbol{\upsilon}:\lambda\in\Re, \qquad \boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}\end{cases}$$

3）幅值：螺旋的幅值表示为 $m=\begin{cases}\|\boldsymbol{\omega}\|,\ \boldsymbol{\omega}\neq\mathbf{0}\\ \|\boldsymbol{\upsilon}\|,\ \boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}\end{cases}$

注意：1）对任意运动旋量 $[V]\in se(3)$（即对任意运动旋量坐标 $V=(\upsilon,\omega)\in\Re^6$）可以找到其对应的螺旋 $S=(L,\ h,\ m)$；反之亦然。

4.5 运动旋量的坐标变换

□ 令 ${}_B^A T$，${}_C^B T$ 分别表示 $\{B\}$ 相对于 $\{A\}$ 和 $\{C\}$ 相对 $\{B\}$ 的刚体变换，则乘积

${}_C^A T = {}_B^A T\,{}_C^B T$ 表示 $\{C\}$ 相对 $\{A\}$ 的刚体变换。下面求运动旋量的复合变换

结论：给定旋量坐标 ${}_B^A V, {}_C^B V$，则空间速度 ${}_C^A V^S, {}_C^A V^B$ 分别为：

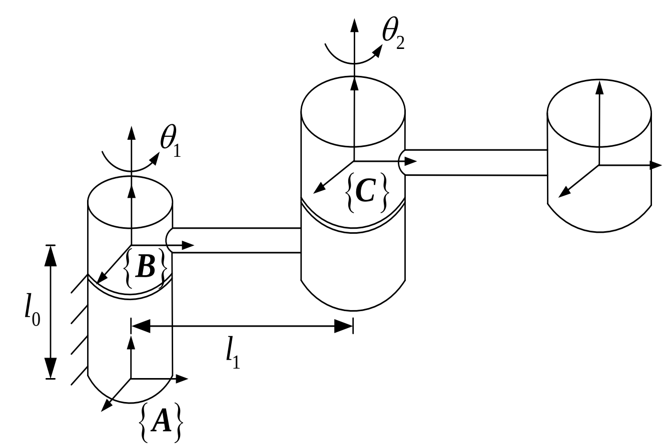
$$
{}_C^A V^s = {}_B^A V^s + Ad_V\left({}_B^A \boldsymbol{T}\right){}_C^B V^s,
$$

$$
{}_C^A V^b = Ad_V\left({}_C^B \boldsymbol{T}^{-1}\right){}_B^A V^b + {}_C^B V^b
$$

练习：两连杆机器人关节速度 $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 \in \Re$，求 ${}_C^A V^s$

解答：两旋转运动均为节距为0的旋量运动

$$
{}_B^A V^s = \begin{bmatrix} {}_B^A \boldsymbol{\upsilon} \\ {}_B^A \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}\dot{\theta}_1 = \begin{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}} \\ [0 \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\dot{\theta}_1,\quad {}_C^B V^s = \begin{bmatrix} {}_C^B \boldsymbol{\upsilon} \\ {}_C^B \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}\dot{\theta}_2 = \begin{bmatrix} [l_1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}} \\ [0 \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\dot{\theta}_2
$$



两连杆机器人

所以：${}_C^A V^s = {}_B^A V^s + Ad_V\left({}_B^A \boldsymbol{T}\right){}_C^B V^s$

$$
= [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]^{\mathrm{T}}\dot{\theta}_1 + [l_1\cos\theta_1 \;\; l_1\sin\theta_1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]^{\mathrm{T}}\dot{\theta}_2
$$

可见：速度由两个关节速度的线性叠加而成。

4.6 力旋量的伴随变换

- **作用在刚体上的力和力矩构成的六维矢量称为力旋量坐标：**

$$F=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{\tau}\end{bmatrix}$$

力旋量坐标 F 也称为力旋量，与运动旋量存在对偶(速度分析可用于力分析)

- **根据瞬时功率和所作之功不随坐标系改变，物体力旋量从{B}到{C}的变换：**

$$\boxed{{}^{C}F^{b}=Ad_{V}^{\mathrm{T}}\left({}_{C}^{B}\boldsymbol{T}\right){}^{B}F^{b}},\quad \begin{bmatrix}{}^{C}\boldsymbol{f}^{b}\\ {}^{C}\boldsymbol{\tau}^{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{}_{C}^{B}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & 0\\ -{}_{C}^{B}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\left[{}_{C}^{B}\boldsymbol{p}\right] & {}_{C}^{B}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^{B}\boldsymbol{f}^{b}\\ {}^{B}\boldsymbol{\tau}^{b}\end{bmatrix}$$

- **物体力旋量 F^{b} 与空间力旋量 F^{s} 之间的关系可由伴随矩阵的转置表示：**

$$\boxed{F^{b}=Ad_{V}^{\mathrm{T}}\left({}_{B}^{A}\boldsymbol{T}\right)F^{s}}$$

- **瞬时功率可表示为：**

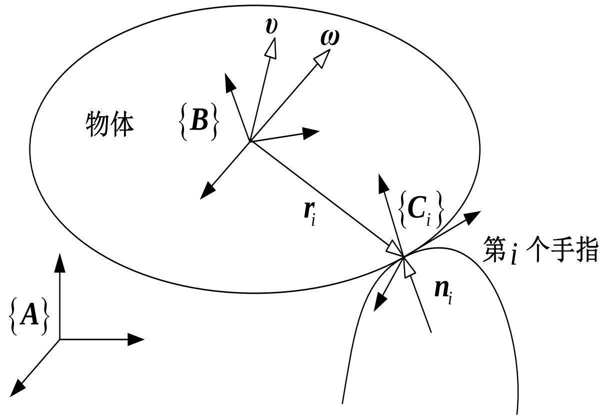
$$\delta W=F^{b}\circ{}_{B}^{A}V^{b}=F^{s}\circ{}_{B}^{A}V^{s}=\left(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\upsilon}+\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)$$

4.6 多指抓取模型

- 令 F^{ci} 为第i个手指作用力旋量在接触坐标系 $\{C_i\}$ 中的表示，

  则合成力旋量在物体坐标系 $\{B\}$ 中的表示为：

$$^{B}F^{b} = \sum Ad_{F}^{\mathrm{T}}\left({}^{Ci}_{B}\boldsymbol{T}^{-1} \right) {}^{Ci}F^{ci}$$



多指抓取模型

- 若每个手指与物体是无摩擦点接触，用 $\boldsymbol{n}_i$ 表示

  表示内法线单位矢量，$\boldsymbol{r}_i$ 表示该点矢径，则

$$F_i = f_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_i \\ \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{n}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_i \\ \boldsymbol{\tau}_i \end{bmatrix}$$

- 力旋量 $F_i = \left(f_i, \tau_i \right)$ 满足Plücker关系：$\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_i = 0$

- 合成力旋量在物体坐标系{B} 中的表示：$^{B}F^{b} = \sum F_i = \sum f_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_i \\ \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{n}_i \end{bmatrix}$

4.7 线矢量、旋量与螺旋

□ 建立了李群与其李代数的指数映射关系，讨论刚体运动的三种表示：

◆刚体变换矩阵： $T=(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{p})\in SE(3)$

◆运动旋量： $[V]\in se(3),\ \theta\in\Re$

◆螺旋运动坐标： $S=(L,\ h,\ m)$

□ 刚体变换与运动旋量之间是矩阵指数映射关系；运动旋量与螺旋运动之间，当 $\omega\neq\mathbf{0}$ ，运动旋量的螺旋坐标由节距h、线矢量L和幅值m三者表示；刚体变换与螺旋运动之间可以通过Chasles定理建立（后续内容阅读学习）。