161 期终试卷参考答案

一．求下列各题（每小题 5 分，共 10 分）：

1、计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

2、计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-n}{2n^2+1}\right)^n$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-n}{2n^2+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-n-1}{2n^2+1}\right)^{\frac{2n^2+1}{-n-1}\cdot\frac{(-n-1)n}{2n^2+1}}$

$$=e^{-\frac{1}{2}}$$

二、解下列各题（每小题 6 分，共 18 分）：

1、记曲线 $3x+2y^3-2x^2\sin y=2$ 与 y 轴交点为 P，求曲线在 P 点处的法线方程.

解：首先，容易求得 $P=(0,1)$，对 $3x+2y^3-2x^2\sin y=2$ 关于 x 求导，有

$3+6y^2y'-4x\sin y-2x^2\cos y\cdot y'=0$， $y'=\dfrac{3-4x\sin y}{2x^2\cos y-6y^2}$， 故 $y'(0)=-\dfrac{1}{2}$

所求的法线方程为 $y=2x+1$.

2、设 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)+t\\ y=\arctan t\end{cases}$ ，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+1}=\dfrac{1}{(1+t)^2}$

所以，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=\dfrac{1}{4}$

3、函数 $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^{-x}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的最大值.

解： $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}-(x-1)\mathrm{e}^{-x}\ =(2-x)\mathrm{e}^{-x}$

由 $f'(x)=0$ 得到唯一驻点 $x=2$。

当 $0\le x<2$ 时，$f'(x)>0$，函数单调递增，

当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，函数单调递减，

因此，当 $x=2$ 时函数取到最大值，最大值为 $f(2)=\mathrm{e}^{-2}$。

三、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、若 $f(x)=\dfrac{x+1}{1-\dfrac{1}{x^2}}$ 间断点的个数为 n，可去间断点的个数为 k，则　　（ D ）

（A）$n=2,k=1$　　（B）$n=2,k=2$

（C）$n=3,k=1$　　（D）$n=3,k=2$

2、若 $f'(a)=0$，则　　（ A ）

（A）$f(x)-f(a)=o(x-a)$　　（B）$f(x)-f(a)\sim x-a$

（C）$x-a=o[f(x)-f(a)]$　　（D）以上都不对

3、设 $f(x)=|\sin\pi x|$，则　　（ B ）

（A）$f'_-(1)=\pi, f'_+(1)=-\pi$　　（B）$f'_-(1)=-\pi, f'_+(1)=\pi$

（C）$f'_-(1)=f'_+(1)=\pi$　　（D）$f'_-(1)=f'_+(1)=-\pi$

4、若 $\int f(x)\mathrm{d}x=\cos(x^2)+C$，则 $f'(\sqrt{\pi})=$　　（ D ）

（A）-1　　（B）0

（C）$-2\sqrt{\pi}$　　（D）4π

5、“$\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=L$” 是“$\lim\limits_{n\to+\infty} f(2n)=L$”的　　（ C ）

（A）充要条件　　（B）必要条件，非充分条件

（C）充分条件，非必要条件　　（D）既不是必要条件，也不是充分条件

四、解下列各题（每小题 6 分，共 18 分）：

1、计算不定积分 $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$.

解：$\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x)\mathrm{d}\sin x$

$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

2、计算广义积分 $\int_0^{+\infty} x^3 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解：$\int_0^{+\infty} x^3 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2} = -\frac{1}{2}[x^2\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x^2]$

$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x^2 = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$。

3、设 $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{t}}}\,\mathrm{dt}$,计算 $f'(3)$.

解：，$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+|x|}}$

故 $f'(3) = 3$.

五、（本题 6 分）计算定积分 $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$.

解：$\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_e^{e^2} \ln x \,\mathrm{d}\frac{1}{1-x} = \frac{\ln x}{1-x}\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2}\frac{1}{x(1-x)}\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{1+e} - \ln\frac{e}{1+e} = \ln(1+e) - \frac{e}{1+e}$.

六、（本题 6 分）计算不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x)}\,\mathrm{d}x$.

解：$\int \frac{1}{x^2(1+x)}\,\mathrm{d}x = \int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x})\,\mathrm{d}x$　　3 分

$= -\frac{1}{x} + \ln\left|\frac{1+x}{x}\right| + C$　　3 分

七、（本题 8 分）往半径为 1 米，深为 2 米的圆锥形容器内注水，注水的速度为 $\dfrac{1}{200}$ $\mathrm{m^3/s}$. 当液面高度达到容器一半深度时，求液面升高的速度.

解：设注水过程中，水深 h 米，水面的半径为 r 米，水的体积为 V 立方米，则

由条件有 $r=\dfrac{h}{2}$，且 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h=\dfrac{1}{12}\pi h^3$， 3 分

故有 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{dt}}=\dfrac{\pi}{4}h^2\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{dt}}$ 3 分

又 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{dt}}=\dfrac{1}{200}$，当 $h=1$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{dt}}=\dfrac{1}{50\pi}$ m/s 2 分

八、（本题 8 分）设 $x>0$，试证明：$0<x-\arctan x<\dfrac{x^3}{3}$.

解：（1）设 $g(x)=x-\arctan x$，

则 $g(0)=0$，$g'(x)=1-\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{x^2}{1+x^2}>0, \quad (x>0)$ 2 分

所以，$g(x)$ 单调增加，故 $g(x)>g(0)=0$，即 $x-\arctan x>0$。 2 分

（2）$f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x+\arctan x$，则 $f(0)=0$，

$f'(x)=x^2-1+\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{x^4}{1+x^2}>0$，$\quad (x>0)$ 2 分

所以，$f(x)$ 单调增加，故 $f(x)>f(0)=0$，即 $x-\arctan x<\dfrac{x^3}{3}$ 2 分

综上所述，结论成立。

九、（本题 6 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内有二阶导数，且函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值点和最小值点都在开区间 (a,b) 内. 试证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=2f'(\xi)$.

证明：设 α,β 分别是函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值点和最小值点，据题意知它们都在在开区间 (a,b) 内，且必有 $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ 2 分

若 $\alpha=\beta$，函数 $f(x)$ 为常数函数，结论容易证明，以下假设 $\alpha\neq\beta$，不妨设 $\alpha<\beta$

作辅助函数$g(x)=e^{-2x}f'(x)$ 2 分

则$g(x)$在$[\alpha,\beta]$上连续，在(α,β)内可导，且$g(\alpha)=g(\beta)=0$.

根据罗尔定理可知，存在$\xi\in(\alpha,\beta)$，使$g'(\xi)=0$，即$e^{-2\xi}f''(\xi)-2e^{-2\xi}f'(\xi)=0$，

由于$(\alpha,\beta)\subset(a,b)$，所以存在$\xi\in(a,b)$，使$f''(\xi)=2f'(\xi)$. 2 分