图论

Graph Theory

子 图

$G=\langle V,E\rangle$， $G'=\langle V',E'\rangle$

（1） $V' \subseteq V$ 且 $E' \subseteq E$ ，则称G'为G的子图，记为$G' \subseteq G$ ，称G为G′的母图；

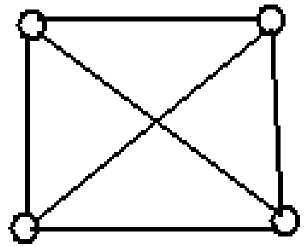
（2） 若$G' \subseteq G$且$V'=V$，则称G′为G的生成子图；

（3） 若$V' \subset V$或$E' \subset E$，称G′为G的真子图；

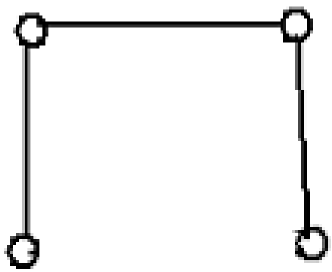
（4） V'（$V' \subset V$且$V' \neq \varnothing$）的导出子图，记作$G[V']$；

（5） E'（$E' \subset E$且$E' \neq \varnothing$）的导出子图，记作$G[E']$.

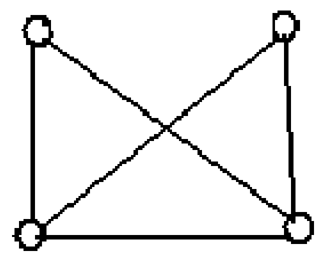
例：子图

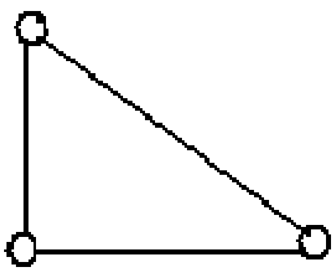


1



2

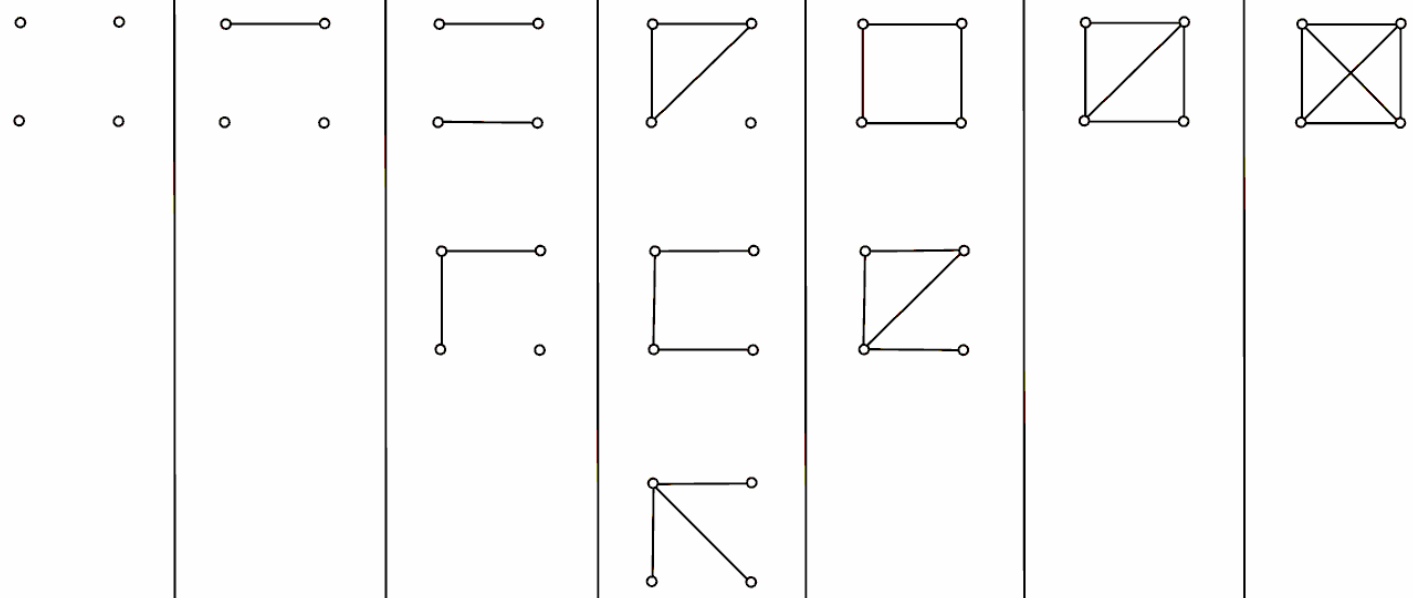




3

例： 画出K_4的所有非同构的生成子图

m	0	1	2	3	4	5	6

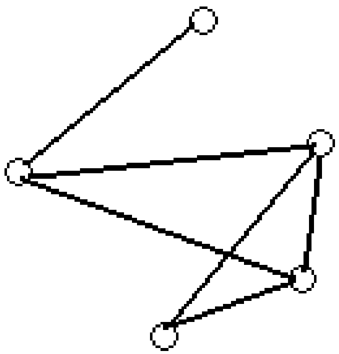


补图

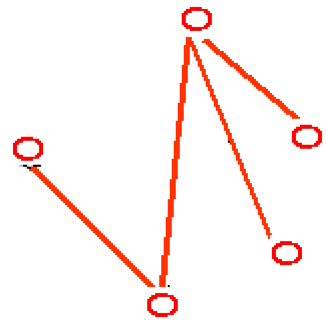
设$G=<V,E>$为n阶无向简单图，以V为顶点集，以所有使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为G的**补图**，记作 $\overline{G}$.

若$G\cong\overline{G}$, 则称G是**自补图**.

例



G



$\overline{G}$

2、图的连通性

概念：

通路，回路，简单通路，简单回路（迹）初级通路（路径），初级回路（圈）

点连通，连通图，点割集，割点，边割集，割边

点连通度，边连通度

弱连通图，单向连通图，强连通图

二部图（二分图）

通路与回路

给定图G=<V, E>（无向或有向的），G中顶点与边的交替序列$\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_l v_l$称为从$v_0$到$v_l$的通路，其中$v_{i-1}$，$v_i$ 是 e_i的端点.；若 $v_0=v_l$，Γ 为回路。 Γ 中的边数称为通路的长度.

- 简单通路与简单回路：所有边各异。
- 初级通路(路径)与初级回路(圈)：Γ 中所有顶点各异（$v_0=v_l$ 除外），**所有边也各异**
- 复杂通路与复杂回路：有边重复出现。

几点说明

表示法

① 定义表示法

② 只用边表示法

③ 只用顶点表示法（在简单图中）

④ 混合表示法

环（长为1的圈）的长度为1

两条平行边构成的圈长度为2

无向简单图中，圈长≥3

有向简单图中圈的长度≥2

通路与回路的长度

定理 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于或等于$n-1$的通路.

推论 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于或等于$n-1$的初级通路（路径）.

定理 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的回路，则一定存在v_i到自身长度小于或等于n的回路.

推论 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的简单回路，则一定存在长度小于或等于n的初级回路.

顶点的连通性

$G=<V,E>$为无向图，若 v_i 与 v_j 之间有通路，则称v_i 与 v_j是 连通的，记为$v_i \sim v_j$。

注： ~是V上的等价关系 $R=\{<u,v>|\ u,v \in V$且$u \sim v\}$

图的连通性

① 若$\forall u,v\in V$，$u\sim v$，则称G是连通的；

② $V/R=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$，称$G[V_1], G[V_2], \ldots,G[V_k]$为连通分支，其个数称为连通分支数，记为 $p(G)$。

注：若 $p(G)=1$，G是连通的。

短程线与距离

① u与v之间的短程线：$u\sim v$，u与v之间长度最短的通路

② u与v之间的距离：$d(u,v)$——短程线的长度

$d(u,v)$的性质

$d(u,v)\geq 0$, $u \nsim v$时$d(u,v)=\infty$

$d(u,v)=d(v,u)$

$d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w)$

图的运算

删除顶点及删除边

$G-v$ ——从G中将v及关联的边去掉

$G-V'$——从G中删除V'中所有的顶点

$G-e$ ——将e从G中去掉

$G-E'$——删除E'中所有边

点割集与边割集

点割集与割点

$G=\langle V,E\rangle$, $V'\subset V$

V'为**点割集**——$p(G-V')>p(G)$，且对任意$V''\subset V'$均有$p(G-V'')=p(G)$.

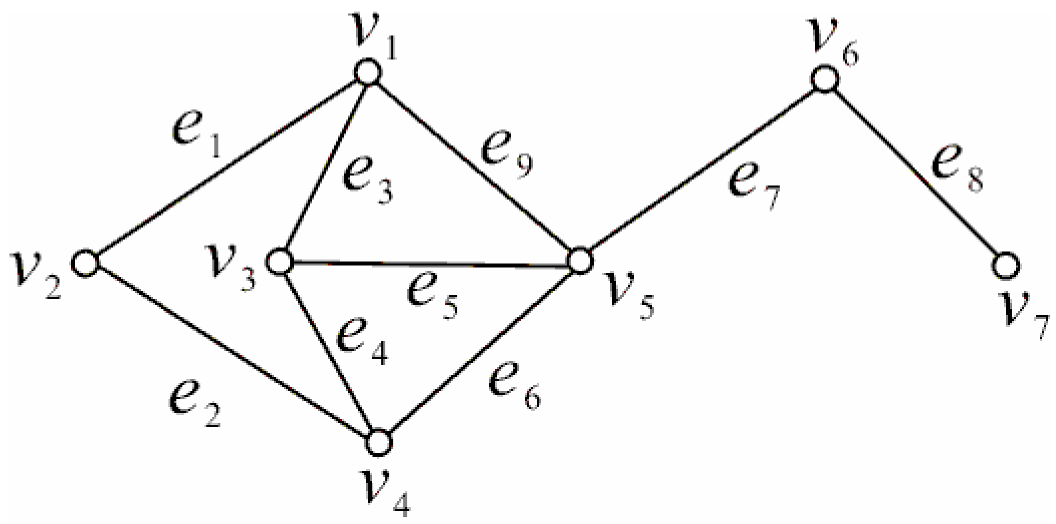
v为**割点**——$\{v\}$为点割集

边割集与割边

$G=\langle V,E\rangle$, $E'\subseteq E$

E'是**边割集**——$p(G-E')>p(G)$且有极小性

e是**割边（桥）**——$\{e\}$为边割集



例:

（1） $\{v_1,v_4\}$，$\{v_6\}$是点割集，v_6是割点.

$\{v_2,v_5\}$是点割集吗？

（2）$\{e_1,e_2\}$，$\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$，$\{e_8\}$等是边割集，e_8是桥。

$\{e_7,e_9,e_5,e_6\}$ 是边割集吗？

点连通度

***G*为连通非完全图**

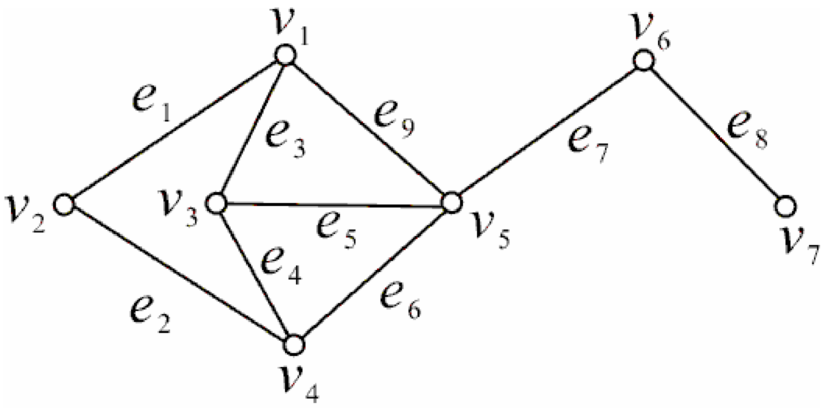
（1） 点连通度— $\kappa(G) = \min\{\, |V'| \mid V' \text{为点割集} \,\}$

规定

- $\kappa(K_n) = n-1$
- 若*G*非连通，$\kappa(G) = 0$

（2） 若 $\kappa(G) \geq k$，则称*G*为 ***k*-连通图**

例：



图中，$\kappa=1$，它是 1-连通图。

边连通度

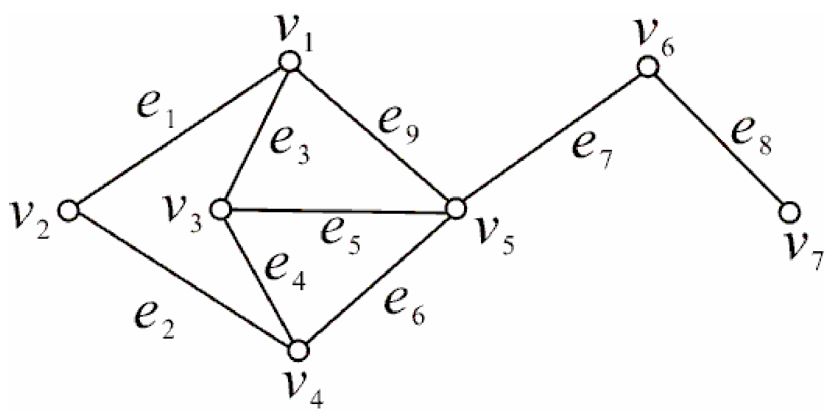
设G为连通图

边连通度——$\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E'$为边割集$\}$

– 规定：若G非连通，则$\lambda(G) = 0$

若$\lambda(G)\geq r$，则称G是 r 边-连通图

例：



图中，$\lambda=1$，它是 1边-连通图。

κ, λ, δ之间的关系

定理　$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$

证明思路:

（1） $\lambda(G) \le \delta(G)$

（2） $\kappa(G) \le \lambda(G)$

有向图的连通性

$D=<V,E>$为有向图

$v_i \to v_j$（v_i 可达 v_j）：存在从v_i到v_j有通路

$v_i \leftrightarrow v_j$（v_i与v_j相互可达）：$v_i \to v_j$ 且$v_j \to v_i$

性质

$\to$ 具有自反性($v_i \to v_i$)、传递性

$\leftrightarrow$ 具有自反性、对称性、传递性

v_i到v_j的短程线与距离

类似于无向图中，只需注意距离表示法的不同

(无向图中$d(v_i,v_j)$，有向图中$d<v_i,v_j>$) 及 $d<v_i,v_j>$无对称性

有向图的连通性

$D=\langle V,E\rangle$为有向图

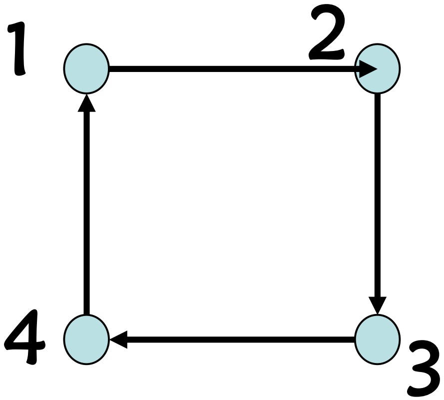
D弱连通(连通)——基图为无向连通图

D单向连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\to v_j$ 或 $v_j\to v_i$

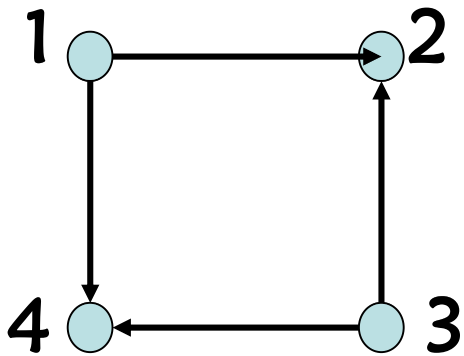
D强连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\leftrightarrow v_j$

注：强连通⇒单向连通⇒弱连通

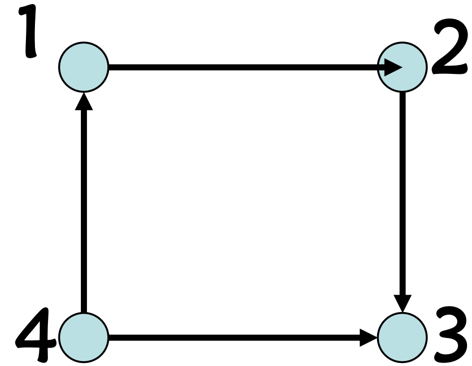
例



强连通



弱连通



单连通

有向图的连通性判别法

(1) D强连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路；

(2) D单向连通当且仅当*D*中存在经过每个顶点至少一次的通路。

二部图

设 $G=\langle V,E\rangle$为一个无向图，若能将 V分成 V_1和V_2 ($V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\varnothing$)，使得 G 中的每条边的两个端点都是一个属于V_1，另一个属于V_2，则称 G 为二部图 (或称二分图、偶图等)，称V_1和V_2为互补顶点子集，常将二部图G记为$\langle V_1,V_2,E\rangle$.

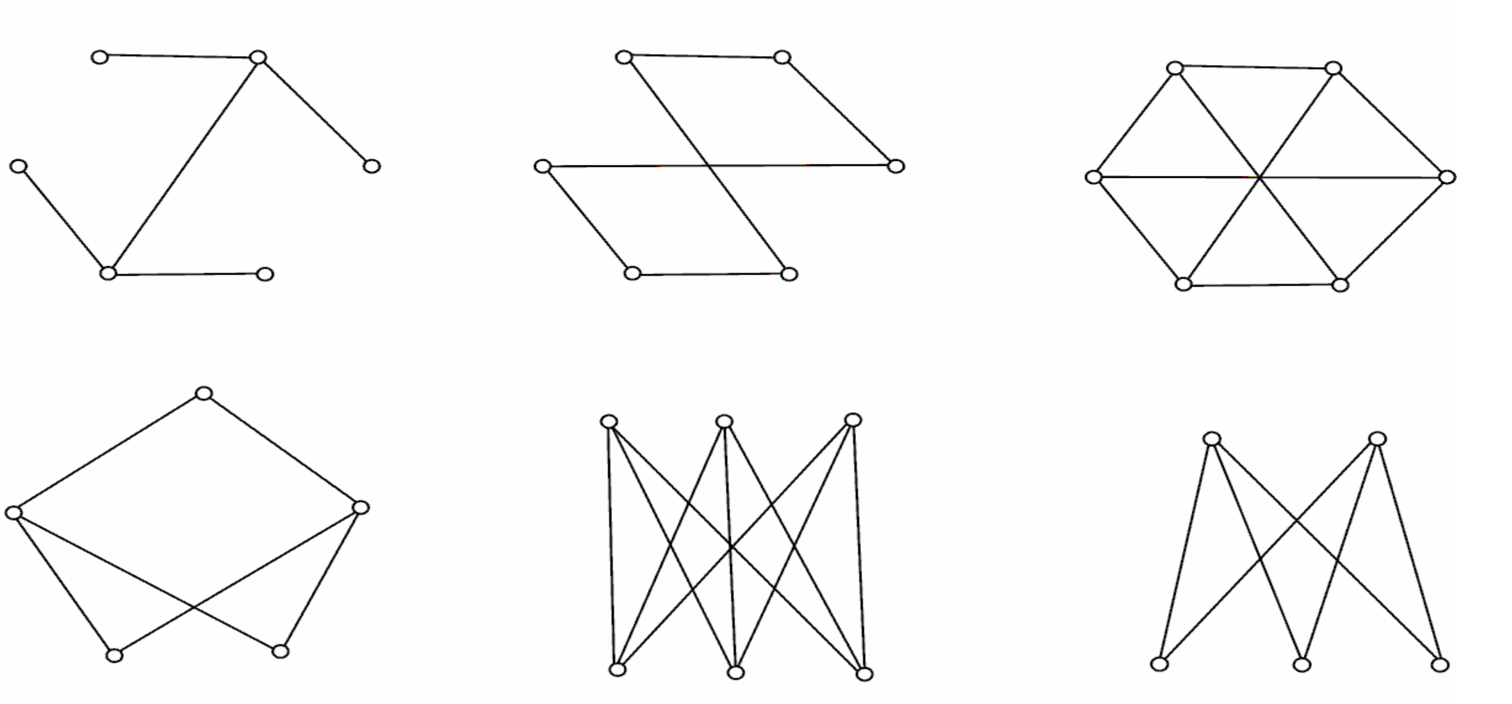
特殊地，若G是简单二部图，V_1中每个顶点均与V_2中所有的顶点相邻，则称G为完全二部图，记为 $K_{r,s}$，其中$r=|V_1|$，$s=|V_2|$.

注意，n 阶零图为二部图.

二部图的判别法

定理 无向图$G=<V,E>$是二部图当且仅当G中无奇圈 。

例： 由定理可知下列各图都是二部图，哪些是完全二部图？



3、图的矩阵表示

概念：

关联矩阵，邻接矩阵，可达矩阵

无向图的关联矩阵（对图无限制）

无向图G=<V,E>，|V|=n，|E|=m，令 m_{ij}为 v_i 与 e_j 的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为G 的关联矩阵，记为$M(G)$.

性质

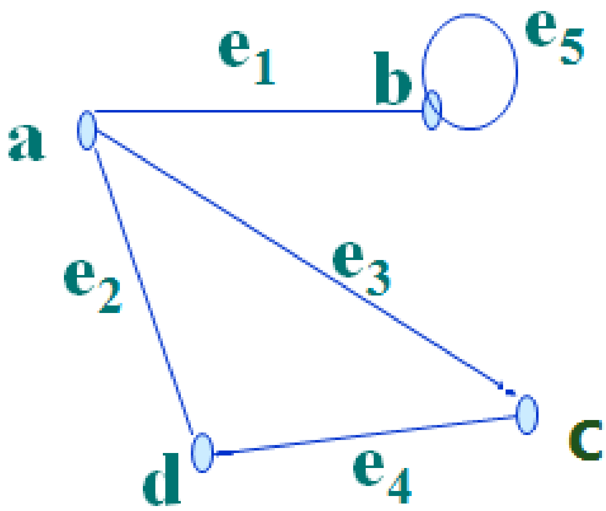
(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2 \quad (j = 1,2,\dots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1,2,\dots,n)$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$

(4) 平行边的列相同

例



G

$$M(G)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$