第 3 章 （之 1）
第 13 次作业

教学内容：§3.1 微分

*1. 设 $y=x^2e^{2x}$，求 dy.

解：$dy=d(x^2)e^{2x}+x^2d(e^{2x})=2xdx\cdot e^{2x}+x^2e^{2x}d(2x)$

$$=2xe^{2x}dx+2x^2e^{2x}dx=2xe^{2x}(1+x)dx.$$

**2. 设 $y(x)=(\cos x)^{\sin x}+\tan 2x$，$(0<x<\frac{\pi}{4})$，求$dy$.

解：$dy=y'(x)dx$

$$=\left\{(\cos x)^{\sin x}\left[\cos x\ln(\cos x)-\sin x\cdot\tan x\right]+2\sec^2 2x\right\}dx.$$

**3. 设 $y(x)=\ln(e^{-2x}+\sqrt{1+e^{-4x}})$求$dy$.

解：

$$dy=\frac{1}{e^{-2x}+\sqrt{1+e^{-4x}}}d(e^{-2x}+\sqrt{1+e^{-4x}})=\frac{1}{e^{-2x}+\sqrt{1+e^{-4x}}}[d(e^{-2x})+d(\sqrt{1+e^{-4x}})]$$

$$=\frac{1}{e^{-2x}+\sqrt{1+e^{-4x}}}[e^{-2x}d(-2x)+\frac{d(1+e^{-4x})}{2\sqrt{1+e^{-4x}}}]=\frac{1}{e^{-2x}+\sqrt{1+e^{-4x}}}(-2e^{-2x}dx+\frac{-4e^{-4x}dx}{2\sqrt{1+e^{-4x}}})$$

$$=-\frac{2e^{-2x}}{e^{-2x}+\sqrt{1+e^{-4x}}}(\frac{\sqrt{1+e^{-4x}}+e^{-2x}}{\sqrt{1+e^{-4x}}})dx=-\frac{2e^{-2x}}{\sqrt{1+e^{-4x}}}dx.$$

**4. 设 $y=\varphi[\frac{\ln\varphi(x)}{\varphi(x)}]$，$\varphi(x)>0$，且处处可微，求 dy.

解：记$u=\frac{\ln\varphi(x)}{\varphi(x)}$，则

$$d\varphi\left[\frac{\ln\varphi(x)}{\varphi(x)}\right]=\varphi'(u)du=\varphi'(u)\cdot\frac{\varphi'(x)-\varphi'(x)\cdot\ln\varphi(x)}{\varphi^2(x)}dx$$

$$=\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\left[1-\ln\varphi(x)\right]\cdot\varphi'\left[\frac{\ln\varphi(x)}{\varphi(x)}\right]dx.$$

**5. 求由方程 $x^3+y^3-3axy=0\ (a>0)$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的微分dy.

解：由 $x^3+y^3-3axy=0$，得 $3x^2\mathrm{d}x+3y^2\mathrm{d}y-3a(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0$

$$\therefore\quad \mathrm{d}y=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}\mathrm{d}x.$$

**6. 求由方程$y\sin x-\cos(x+y)=0$所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的微分dy.

解：由　$dy\cdot\sin x + y\cos x dx + \sin(x+y)\cdot(dx+dy)=0$

得　$dy = -\dfrac{y\cos x + \sin(x+y)}{\sin x + \sin(x+y)}dx$.

**7. 用局部线性近似公式计算　$\cos 151^\circ$　的近似值.

解：$f(x)=\cos x$．$x_0 = 150^0 = \dfrac{5}{6}\pi$，$\Delta x = 1^0 = \dfrac{\pi}{180}$,

$f(151^0) \approx \cos 150^0 - (\sin 150^0)\cdot\dfrac{\pi}{180} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{360} \approx -0.8747$.

**8. 在一个内半径为$5cm$外半径为$5.2cm$的空心铁球的表面上镀一层厚$0.005cm$的金,已知铁的密度为7.86g/cm^3，金的密度为18.9g/cm^3，试用微分法分别求这个球中含铁和金的质量.

解：$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，$r_1 = 5$．$\Delta r_1 = 0.2$．$\rho_1 = 7.86$，

$m_1 \approx 7.86\cdot 4\pi r_1^{\,2}\cdot\Delta r_1 = 7.86\times 20\pi \approx 493.6(g)$,

$r_2 = 5.2$，$\Delta r_2 = 0.005$，$\rho_2 = 18.9$，

$m_2 \approx 18.9\times 4\pi(5.2)^2\cdot 0.005 = 32.1(g)$.

第 3 章　（之 2）
第 14 次作业

教学内容： §3.2 微分中值定理

**1. 试求在$[-1,1]$内对函数$f(x)=\arcsin x$应用拉格朗日中值定理时ξ的值.

解：$f(x)=\arcsin x$在$[-1,1]$上连续,在$(-1,1)$内可导

即$f(x)$在$[-1,1]$满足拉格朗日中值定理的条件，又$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$令f'(\xi)=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{\pi}{2}$$

得到$(-1,1)$内的解$\xi=\pm\sqrt{1-\dfrac{4}{\pi^2}}$，即存在$\xi_1=\sqrt{1-\dfrac{4}{\pi^2}},\xi_2=-\sqrt{1-\dfrac{4}{\pi^2}}$, 使

$$f'(\xi_i)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)},(i=1,2).$$

**2. 设 $a<b,\ ab<0,\ f(x)=\dfrac{1}{x}$, 则在 $a<x<b$ 内使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 成立

的点ξ （ ）

(A) 只有一点 (B)有两点

(C) 不存在， (D)是否存在，与a,b的具体数值有关

答 (C)

***3. 设 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$（其中$a<b<c<d$），不用求$f'(x)$，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，指出它们所在的区间.

解：显然，$f(x)$在$[a,b],[b,c],[c,d]$三个闭区间上连续，且在$(a,b),(b,c),(c,d)$内可导，又因为有$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=0$，由罗尔中值定理，至少存在三点

$$\xi_1\in(a,b),\xi_2\in(b,c),\xi_3\in(c,d),$$

使得

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0.$$

又$f'(x)$是一个实系数一元三次多项式函数，所以方程$f'(x)=0$最多只有三个实根，因此方程$f'(x)=0$有三个实根ξ_1,ξ_2,ξ_3. 它们所在的区间：

$$\xi_1\in(a,b),\xi_2\in(b,c),\xi_3\in(c,d).$$

**4. 若已知方程$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x=0$有一个正根$x_0$，证明方程

$$na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1=0$$

至少有一个小于x_0的正根.

解：考虑闭区间$[0,x_0]$，显然函数$F(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x$在$[0,x_0]$上连续，在$(0,x_0)$内可导，且有$F(0)=F(x_0)$. 所以由罗尔中值定理知必存在一个$\xi\in(0,x_0)$，使得$F'(\xi)=0$.

***5. 设$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上连续，在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内可导，试证：存在$\xi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，使

$$f'(\xi)\cos\xi=f(\xi)\sin\xi.$$

解：由于 $f'(\xi)\cos\xi=f(\xi)\sin\xi\Leftrightarrow[f(x)\cos x]_{x=\xi}=0$，令$g(x)=f(x)\cos x$，

则$g(x)$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上连续，在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内可导，且 $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. 由罗尔中值定理知，存在$\xi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，使得$g'(\xi)=0$，即$f'(\xi)\cos\xi-f(\xi)\sin\xi=0$.

***6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，则存在 $\xi\in(0,1)$ 使

$$nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0\text{，（}n\text{为自然数）}$$

解：$nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0 \Leftrightarrow n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi)=0$，$\xi\in(0,1) \Leftrightarrow [x^n f(x)]'_{x=\xi}=0$，$\xi\in(0,1)$

令 $F(x)=x^n f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=F(1)=0$，

利用罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $F'(\xi)=n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi)=0$，即

$$nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

**7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b^3 & a^3 \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=\xi^2\left[3f(\xi)+\xi f'(\xi)\right],$$

其中 $\begin{vmatrix} b^3 & a^3 \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=b^3 f(b)-a^3 f(a)$.

证明：令 $F(x)=x^3 f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，利用拉格朗日 中值定理，

则至少存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$

即 $\quad b^3 f(b)-a^3 f(a)=[3\xi^2 f(\xi)+\xi^3 f'(\xi)](b-a)$，

即 $\quad \dfrac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b^3 & a^3 \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=\xi^2\left[3f(\xi)+\xi f'(\xi)\right].$

**8. 证明不等式： $\quad 1-\dfrac{a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b}{a}-1,\quad (0<a<b).$

解：原不等式 $\Leftrightarrow \dfrac{b-a}{b}<\ln b-\ln a<\dfrac{b-a}{a},\quad (0<a<b).$

令 $f(x)=\ln x$，显然 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导，由拉格朗日定理知，存在一

$\xi\in(a,b)$，使得 $\quad \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}=f'(\xi)=\dfrac{1}{\xi}.$

又 $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{a}$，从而有 $\quad \dfrac{1}{b}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}=\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{a}$

即 $\quad 1-\dfrac{a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b}{a}-1$，证毕.

***9. 证明不等式：当 $x\neq 0$ 时，$0<\dfrac{\arctan e^x-\dfrac{\pi}{4}}{x}<\dfrac{1}{2}$.

解：原不等式可写成 $0<\dfrac{\arctan(e^x)-\dfrac{\pi}{4}}{x}=\dfrac{\arctan(e^x)-\arctan(e^0)}{x}<\dfrac{1}{2}$.

令 $f(x)=\arctan(e^x)$，对于 $x\neq 0$，则 $F(x)$ 在 $[0,x]$（或 $[x,0]$）上连续，在 $(0,x)$ （或 $(x,0)$）内可导，利用拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,x)$（或 $\xi\in(x,0)$），使

$$\frac{\arctan(e^x)-\arctan(e^0)}{x}=\frac{e^\xi}{1+e^{2\xi}}.$$

又因 $$0<\frac{e^\xi}{1+e^{2\xi}}=\frac{1}{e^{-\xi}+e^{\xi}}<\frac{1}{2e^{\frac{\xi}{2}}e^{-\frac{\xi}{2}}}=\frac{1}{2},$$

所以有 $$0<\frac{\arctan(e^x)-\dfrac{\pi}{4}}{x}=\frac{\arctan(e^x)-\arctan(e^0)}{x}<\frac{1}{2}.$$

***10. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可微，且 $f(0)=0,|f'(x)|<M$. 试证明：在 $[-1,1]$ 上恒成立

$$|f(x)|<M \qquad （其中 M>0 是常数）.$$

解： 对任意的 $x\in[-1,1]\ (x\neq 0)$，显然 $f(x)$ 在由 0 与 x 构成的闭区间 $[x,0]$ 或 $[0,x]$ 上满足拉格朗日条件, 所以，在 0 与 x 之间必存在一个 ξ，使得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)\ , \qquad (*)$$

由已知，$|f'(x)|<M$ 及 $|x|\le 1$，代入 $(*)$ 式，即得 $|f(x)-f(0)|=|x|\cdot|f'(\xi)|<M$；

而当 $x=0$ 时，$|f(0)|=0<M$，所以对任意的 $x\in[-1,1]$，都有 $|f(x)|<M$.

***11. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=a$，计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+100)-f(x)]$.

解：依题意，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x,x+100]$ 上连续，$(x,x+100)$ 内可导，从而满足拉格朗日中值定理的条件。所以，存在 $\xi\in(x,x+100)$，使

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+100)-f(x)]=\lim_{x\to+\infty}f'(\xi)[(x+100)-x]=\lim_{x\to+\infty}100f'(\xi),$$

其中 $x<\xi<x+100$。又当 $x\to+\infty$ 时，有 $\xi\to+\infty$，

所以 $$\lim_{x\to+\infty}[f(x+100)-f(x)]=\lim_{\xi\to+\infty}100f'(\xi)=\lim_{x\to+\infty}100f'(x)=100a.$$

**12. 若 $b>a>0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $b\ln a-a\ln b=(b-a)(\ln\xi-1)$.

解：所证等式可表示为 $\dfrac{b\ln a-a\ln b}{b-a}=\ln\xi-1$，即 $\dfrac{\frac{\ln b}{b}-\frac{\ln a}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\ln\xi-1$.

设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\neq 0$ ，利用柯西中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使

$$\frac{\frac{\ln b}{b}-\frac{\ln a}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{1-\ln\xi}{\xi^2}\cdot\frac{-\xi^2}{1}=\ln\xi-1,$$

即 $$b\ln a-a\ln b=(b-a)(\ln\xi-1).$$

****13. 证明方程 $2^x-x^2=1$ 有且仅有三个实根.

解：方程 $2^x-x^2=1\Leftrightarrow f(x)=2^x-x^2-1$，且 $x_1=0$, $x_2=1$ 是方程的根。又 $f(2)=-1<0$，

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2^x-x^2-1)=\lim_{x\to+\infty}2^x(1-\frac{x^2-1}{2^x})=+\infty,$$

根据极限性质，存在一点 $a>2$ ，使 $f(a)>0$.在 $[2,a]$ 上利用零值定理知 $f(x)$ 在 $(2,a)$ 内至少有一个零点 x_3. 所以方程 $2^x-x^2=1$ 至少有三个实根.

假设方程有四个实根 x_4 ，不妨设 $x_4>x_3$ ，则在 $[x_1,x_2],[x_2,x_3],[x_3,x_4]$ 上利用罗尔定理，知

$f'(x)$ 至少有三个实根：$b_1<b_2<b_3$.

在 $[b_1,b_2],[b_2,b_3]$ 上再利用罗尔定理，知 $f''(x)$ 至少有两个实根：$c_1<c_2$.

在 $[c_1,c_2]$ 上再利用罗尔定理知 $f'''(x)$ 至少有一个实根 ξ ，然而 $f'''(x)=2^x\ln^3 2\neq 0$，矛盾.

所以假设不成立，即方程 $2^x-x^2=1$ 有且仅有三个实根.

****14.（选作题）

设函数 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上可导, 且 $0<f(x)<1$, 在 $(1,e)$ 内 $xf'(x)<1$，证明

在$(1,e)$内有且仅有一个x, 使 $f(x)=\ln x$.

证明: 令$F(x)=f(x)-\ln x$

(1)则$F(x)$在$[1,e]$上连续, 可导, 由$0<f(x)<1$, 则$F(1)\cdot F(e)<0$

利用闭区间上连续函数的零值定理得

至少存在$\xi\in(1,e)$, 使$F(\xi)=0$

即$f(\xi)=\ln\xi$

(2)再证在$(1,e)$内最多存在一个ξ, 使$f(\xi)=\ln\xi$

反证, 设存在$1<x_1<x_2<e$, 使$F(x_1)=F(x_2)=0$

则$F(x)$在$[x_1,x_2]$上满足罗尔定理的条件

则至少存在$c\in(x_1,x_2)$使$F'(c)=0$

即$f'(c)=\dfrac{1}{c}$, 即$cf'(c)=1$, 这与在$(1,e)$内$xf'(x)<1$矛盾!

故在$(1,e)$内最多只有一个ξ使$f(\xi)=\ln\xi$.

结合(1)得, 在$(1,e)$内有且仅有一个x, 使$f(x)=\ln x$.

第 3 章 （之 3）

第 15 次作业

教学内容： §3.3.1 $\dfrac{0}{0}$ 型　　3.3.2 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

1．填空题

*（1）若 $p\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}=$ ________

解：$\dfrac{1}{p}$.

**（2） $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(1-\mathrm{e}^{x+1})}{\ln(1+\mathrm{e}^{x-1})}=$ ________

解：$-\mathrm{e}^2$.

2．选择题

**（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\dfrac{0}{0}$ 待定型，则“ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ ”是“ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$ ”的（ B ）

（A）充要条件；　　　　　　　　　　(B)充分条件，非必要条件；

（C）必要条件，非充分条件；　　　　(D) 既非充分条件，也非必要条件.

**（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 的未定型，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln f(x)}{\ln g(x)}=$　　　（ B ）

（A） $\ln A$；　　（B）1；　　(C) A^2 ；　　(D) $\dfrac{1}{A^2}$.

***3 求极限　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+2e^{-x}-3x^2-3}{x-\arctan x}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}-2e^{-x}-6x}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}-2e^{-x}-6x}{\dfrac{x^2}{1+x^2}}=2\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)\dfrac{e^{2x}-e^{-x}-3x}{x^2}$

$$=2\lim_{x\to 0}(1+x^2)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-x}-3x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-x}-3x}{x^2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+e^{-x}-3}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-e^{-x}}{1}=3\cdot$$

4 求下列极限:

**（1） $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}\ (b>a>0)$；　　**（2） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^6+5x^3+7)}{\ln(x^2-3x+4)}$.

解：（1）原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a\cot ax}{b\cot bx}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a\tan bx}{b\tan ax}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a\cdot bx}{b\cdot ax}=1$.

（2）法一原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{6x^5+15x^2}{x^6+5x^3+7}}{\dfrac{2x-3}{x^2-3x+4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(6x^5+15x^2)(x^2-3x+4)}{(2x-3)(x^6+5x^3+7)}=3$

法二：$\text{原式}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x^6+\ln(1+\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{7}{x^6})}{\ln x^2+\ln(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2})}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{\ln(1+\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{7}{x^6})}{\ln x^2}}{1+\dfrac{\ln(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2})}{\ln x^2}}=3$.

****5.　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

解：　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e(e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e(\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1)}{x}$

$$=e\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=e\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=e\lim_{x\to0}\frac{\frac{-x}{1+x}}{2x}=-\frac{e}{2}.$$

***6. 若已知 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续，且有 $f(0)=0$， $f'(0)=2$，求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)\cdot f[f(x)]}{x^2}.$$

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)\cdot f[f(x)]}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{f[f(x)]}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f[f(x)]}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{1}\cdot\lim_{x\to0}\frac{f'[f(x)]}{1}\cdot f'(x)=f'(0)\cdot[f'(0)]^2=[f'(0)]^3=2^3=8.$$

***7. 设 $f(x)$ 具有 2 阶连续导数，且 $f(0)=0$，试证 $g(x)$ 有 1 阶连续导数，其中

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq0,\\ f'(0), & x=0.\end{cases}$$

解：当 $x\neq0$ 时，$g'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}$，由条件知连续.

以下证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处也连续.

先求 $g'(0)$。由导数定义，有

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f'(0)x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)$$

再考虑 $\lim\limits_{x\to0}g'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)x+f'(x)-f'(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}f''(0)=g'(0)$.

故命题得证.