数学分析（上）

数学学院

靳勇飞

2024 年 9 月

导数和微分

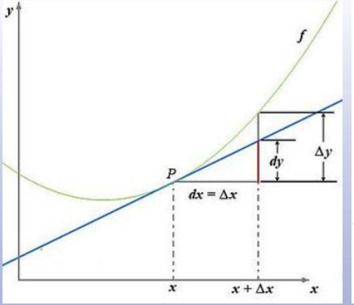
$x_0 \in \mathbb{R}$, 函数 f 在集合 I 上有定义。
若当 $x \to x_0$ 时，$f(x) \to f(x_0)$, 则当 $x - x_0 \to 0$ 时，$f(x) - f(x_0) \to 0$.
要比较这两个无穷小量，我们应该考虑

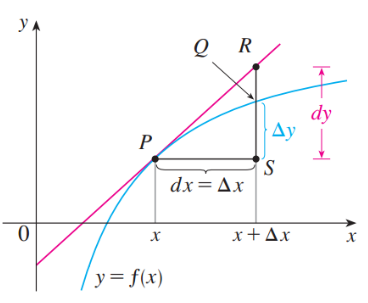
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

函数变化与变量变化的比较.

若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在，则当 $x \to x_0$ 时，$f(x) - f(x_0)$ 是无穷小量 $x - x_0$ 的高阶或同阶无穷小量。 $\square$

导数和微分

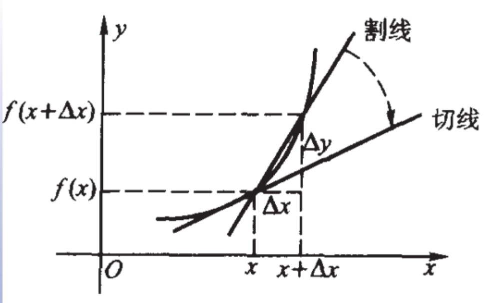




函数变化的线性估计.

$$f(x+\Delta x)-f(x)=A\Delta x+o(\Delta x)$$

导数和微分



割线的极限是切线.

连接 $(x, f(x))$ 与 $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ 的割线的斜率是 $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}$, 则切线的斜率是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. □

导数和微分

定义

f 在 x_0 有定义，若存在 $g_{x_0} \in \mathbb{R}$，使得当 x 趋于 x_0 时，

$$f(x) - f(x_0) = g_{x_0} \cdot (x - x_0) + o(x - x_0),$$

称 f 在 x_0 可微，或 f 在 x_0 微分存在。把 $g_{x_0} \cdot (x - x_0)$ 称为 f 在 x_0 的微分。

导数和微分

定义

f 在 x_0 有定义，若存在 $g_{x_0} \in \mathbb{R}$，使得当 x 趋于 x_0 时，

$$f(x) - f(x_0) = g_{x_0} \cdot (x - x_0) + o(x - x_0),$$

称 f 在 x_0 可微，或 f 在 x_0 微分存在。把 $g_{x_0} \cdot (x - x_0)$ 称为 f 在 x_0 的微分。

事实

若 f 在 x_0 可微，则

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g_{x_0} \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)}{x - x_0} = g_{x_0}$$

导数和微分

定义

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，称 f 在 x_0 可导，把这个极限记为 $f'(x_0)$，称为 f 在 x_0 的导数，即

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

导数和微分

定义

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，称 f 在 x_0 可导，把这个极限记为 $f'(x_0)$，称为 f 在 x_0 的导数，即

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

事实

若 f 在 x_0 可导，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)-f'(x_0)=0$$

所以当 x 趋于 x_0 时，$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$.

导数和微分

定理

(单变量函数)f 在 x_0 可导充分必要条件是 f 在 x_0 可微。

导数和微分

定理

(单变量函数)f 在 x_0 可导充分必要条件是 f 在 x_0 可微。

定理

f 在 x_0 可导 (可微) 的必要条件是 f 在 x_0 连续。

导数和微分

例

对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$, 任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $f(x) = x^n$ 在 x_0 可导, 且 $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.

证明.

对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$, 任意的 $n \in \mathbb{N}^+$,

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0) \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k x^{n-1-k}}{x - x_0} \\ &= nx_0^{n-1}. \end{aligned}$$

□

导数和微分

例

任意的 $\alpha \in \mathbb{R}$, 对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, 若 $f(x) = x^\alpha$ 在 x_0 有定义，则 $f(x) = x^\alpha$ 在 x_0 可导，且 $f'(x_0) = \alpha x_0^{\alpha-1}$.

证明.

任意的 $\alpha \in \mathbb{R}$, 对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, $f(x) = x^\alpha$ 在 x_0 有定义，则

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x_0^\alpha\left(\left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha - 1\right)}{x - x_0} \\
&= x_0^\alpha \lim_{x\to x_0} \frac{e^{\alpha \ln \frac{x}{x_0}} - 1}{x - x_0} = x_0^\alpha \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha \ln \frac{x}{x_0}}{x - x_0} = x_0^\alpha \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha \ln\left(1 + \frac{x}{x_0} - 1\right)}{x - x_0} \\
&= x_0^\alpha \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha\left(\frac{x}{x_0} - 1\right)}{x - x_0} = \alpha x_0^{\alpha-1}.
\end{aligned}
$$

导数和微分

例

任意的 $\alpha \geqslant 1$, $f(x) = x^\alpha$ 在 0 可导, 且 $f'(0) = 0$.

证明.

任意的 $\alpha \geqslant 1$,

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^\alpha - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^{\alpha - 1} = 0.$$

$\square$

导数和微分

例

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在 0 不可导。

导数和微分

例

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在 0 不可导。

证明.

当 $x \neq 0$ 时，

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = x^{-\frac{2}{3}}$$

因为 $\lim\limits_{x \to 0} x^{-\frac{2}{3}} = \infty$，所以 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在 0 不可导。 □

导数和微分

例

$f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 0 不可导。

证明.

当 $x\neq 0$ 时，

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=x^{-\frac{2}{3}}$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}x^{-\frac{2}{3}}=\infty$，所以 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 0 不可导。 □

事实

存在函数在一点连续但在这点不可导。

导数和微分

若 f 在 x_0 可微，则当 x 趋于 x_0 时，$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$.
引入新变量 $h=x-x_0$, 上面的事实变为：
若 f 在 x_0 可微，则当 h 趋于 0 时，$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+o(h)$.

导数和微分

若 f 在 x_0 可微，则当 x 趋于 x_0 时，$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$.
引入新变量 $h=x-x_0$, 上面的事实变为：
若 f 在 x_0 可微，则当 h 趋于 0 时，$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+o(h)$.

定义

f 在 x 可微，则当 h 趋于 0 时，$f(x+h)-f(x)=A(x)h+o(h)$.
把这里关于 h 的线性函数 $h\to A(x)h$ 叫做函数 f 在 x 的微分，记为 $\mathrm{d}f$, 即

$$\mathrm{d}f=A(x)h$$

事实

对函数 $f(x)=x$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}f=1\cdot h=h$.
因此

$$\mathrm{d}f=A(x)\,\mathrm{d}x$$

导数和微分

定义

对任意的 x, 如果 f 在 x 可微，则 $f'(x)$ 确定，这定义了一个函数，称为 f 的导函数，记为 f'，或者 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

导数和微分

定义

对任意的 x, 如果 f 在 x 可微，则 $f'(x)$ 确定，这定义了一个函数，称为 f 的导函数，记为 f'，或者 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

事实

1. f 的导函数 f' 只在 f 可导的地方有定义，一般 f' 的定义域小于 f 的定义域。
2. f 在 x_0 的导数 $f'(x_0)$, 现在可以理解为 f 的导函数 f' 在 x_0 的函数值，故又可记为 $f'\big|_{x=x_0}$, $f'\big|_{x_0}$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big|_{x=x_0}$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big|_{x_0}$.
3. 对一个函数 f 求导，可以表示为: $(f)'$, f', 或者 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$, 例如: $(e^x)'$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x$, $\dfrac{\mathrm{d}\,(e^x)}{\mathrm{d}x}$

导数和微分

事实

函数 f 的微分为

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

一个求导式子，对应一个微分的式子！

例

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \mathrm{d}\,(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x$

导数和微分

定义

若在某区间上，函数 F 和 f 成立关系：$F' = f$ 或者等价的 $\mathrm{d}F = f(x)\,\mathrm{d}x$, 则称 F 是 f 在区间上的一个原函数。

函数 f 在一个区间上的所有原函数的组成的集合 $\{函数F : F' = f\}$, 称为 f 的不定积分，记作 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

若 $F' = f$, 不定积分也简写为 $F(x) + C$. 即

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) : F'(x) = f(x)\}$$

例

因为 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, 所以 $\int \alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = x^\alpha + C$.

导数和微分

事实

一个求导式子，对应一个微分的式子，对应一个不定积分的式子。

例

求导式子	微分式子	不定积分式子
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\mathrm{d}\,(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x$	$\int \alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}\,(x^\alpha) = x^\alpha + C$

导数和微分

例

再次考察 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，因此

$$(\sin x)'\,|_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

导数和微分

例

再次考察 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，因此

$$(\sin x)'\,|_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

例

再次考察 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$，因此

$$(e^x)'\,|_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

导数和微分

例

对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$, 因此

$$(e^x)'\Big|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x_0}(e^{x-x_0} - 1)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x_0}(x - x_0)}{x - x_0} = e^{x_0}.$$

定理

$$(e^x)' = e^x.$$

$$\mathrm{d}\,(e^x) = e^x\,\mathrm{d}x$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}\,(e^x) = e^x + C$$

导数和微分

例

对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$, 因此

$$(\sin x)'\Big|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \cos\frac{x+x_0}{2} = \cos x_0.$$

定理

$$(\sin x)' = \cos x.$$

$$\mathrm{d}\,(\sin x)) = \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}\,(\sin x) = \sin x + C$$

导数和微分

例

对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$, 因此

$$(\cos x)'\Big|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{-2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} -\sin\frac{x+x_0}{2} = -\sin x_0.$$

定理

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

$$\mathrm{d}\,(\cos x) = -\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\int -\sin x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}\,(\cos x) = \cos x + C$$

导数和微分

例

对任意的 $x_0 > 0$, 因此

$$(\ln x)'\Big|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\ln\frac{x}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\ln\left(1 + \frac{x}{x_0} - 1\right)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{x}{x_0} - 1}{x - x_0} = \frac{1}{x_0}.$$

定理

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$\mathrm{d}\,(\ln x) = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}\,(\ln x) = \ln x + C$$

导数和微分

事实

求导式子	微分式子	不定积分式子
$(C)' = 0$	$\mathrm{d}C = 0\,\mathrm{d}x$	$\int 0\,\mathrm{d}x = C$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\mathrm{d}\,(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x$	$\int \alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = x^\alpha + C$
$(e^x)' = e^x$	$\mathrm{d}\,(e^x) = e^x\,\mathrm{d}x$	$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$
$(\sin x)' = \cos x$	$\mathrm{d}\,(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x$	$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}\,(\sin x) = \sin x + C$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\mathrm{d}\,(\cos x) = -\sin x\,\mathrm{d}x$	$\int -\sin x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}\,(\cos x) = \cos x + C$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$\mathrm{d}\,(\ln x) = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$	$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}\,(\ln x) = \ln x + C$

导数和微分

定义

方程 $y = f(x)$ 表示的图像指的是平面上的点集:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$

导数和微分

定义

方程 $y = f(x)$ 表示的图像指的是平面上的点集:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$

定义

方程 $F(x, y) = 0$ 表示的图像指的是平面上的点集:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}.$$

导数和微分

定义

如果 f 在 x_0 可微 (导)，则方程

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

表示的直线称为函数 f 的图像在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线。
过 $(x_0, f(x_0))$ 与切线垂直的线，称为函数 f 的图像在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的法线。

导数和微分

例

求抛物线 $y^2=2px(p\neq 0)$ 上任一点 (x_0,y_0) 处的切线和法线。

解

抛物线 $y^2=2px$ 的方程为 $x(y)=\frac{y^2}{2p}$, 对抛物线上任一点 (x_0,y_0)，抛物线在这点的 "斜率"（以 y 为自变量，x 为应变量）为

$$x'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{x(y)-x(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{\frac{y^2}{2p}-\frac{y_0^2}{2p}}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{y+y_0}{2p}=\frac{y_0}{p}$$

所以在 (x_0,y_0) 的切线方程为：$x-x_0=x'(y_0)(y-y_0)=\frac{y_0}{p}(y-y_0)$. (注意这个方程包含了过 $(0,0)$ 的切线 $x=0$.)

法线方程为：$y-y_0=-\frac{y_0}{p}(x-x_0)$.

导数和微分

定理

一条平行于抛物线 $y^2 = 2px(p \neq 0)$ 对称轴 x 轴的光线经抛物线反射后必通过焦点。

解

抛物线 $y^2 = 2px$ 的方程为 $x(y) = \frac{y^2}{2p}$，对抛物线上任一点 (x_0, y_0)，过这点的法线方程为：$y - y_0 = -\dfrac{y_0}{p}(x - x_0)$. 抛物线的焦点关于法线的对称点是 $(2x_0 + \frac{p}{2}, y_0)$，这点和 (x_0, y_0) 的连线是 $y = y_0$.
所以任何从焦点射出的光线，射到抛物线上后，经抛物线（的切线）反射后，将平行于 x 轴。或者说，一条平行于抛物线 $y^2 = 2px(p \neq 0)$ 对称轴 x 轴的光线经抛物线线反射后必通过焦点。

导数和微分

作业

1. 课本第 110 页习题 2, 4, 5, 7(2)(4), 9,11

思考讨论

1. 课本第 110 页习题 1,10

导数作为函数极限

定义

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，称 f 在 x_0 左可导，把这个极限记为 $f'_-(x_0)$，称为 f 在 x_0 的左导数，即

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

导数作为函数极限

定义

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，称 f 在 x_0 左可导，把这个极限记为 $f'_-(x_0)$，称为 f 在 x_0 的左导数，即

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

定义

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，称 f 在 x_0 右可导，把这个极限记为 $f'_+(x_0)$，称为 f 在 x_0 的右导数，即

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

导数作为函数极限

定义

f 在 x_0 可导的充分必要条件是 f 在 x_0 左可导且 f 在 x_0 右可导，且 f 在 x_0 的左导数等于 f 在 x_0 的右导数。

导数作为函数极限

定义

f 在 x_0 可导的充分必要条件是 f 在 x_0 左可导且 f 在 x_0 右可导，且 f 在 x_0 的左导数等于 f 在 x_0 的右导数。

例

函数 $f(x)=|x|$ 在 0 左可导且右可导，但 f 在 0 的左导数不等于 f 在 0 的右导数，所以 f 在 0 不可导。

导数作为函数极限

导数是用函数极限定义的，因此也是一个局部性质。

例

函数 $f(x) = x^2 D(x)$ 在 0 可导，但在任何其它的点不连续，当然也不可导。

导数作为函数极限

导数是用函数极限定义的，因此也是一个局部性质。

例

函数 $f(x) = x^2 D(x)$ 在 0 可导，但在任何其它的点不连续，当然也不可导。

事实

存在一个在所有点连续的函数，它在所有的点均不可导。

导数的四则运算

定理

f, g 在某集合 I 上可导，则对任意的实数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$\alpha f + \beta g$ 在该集合 I 上也可导，且在该集合 I 上

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$

导数的四则运算

定理

f, g 在某集合 I 上可导，则对任意的实数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$\alpha f + \beta g$ 在该集合 I 上也可导，且在该集合 I 上

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$

对应的微分式子.

$$\mathrm{d}(\alpha f + \beta g) = \alpha\,\mathrm{d}f + \beta\,\mathrm{d}g = (\alpha f' + \beta g')\,\mathrm{d}x.$$

□

对应的积分式子.

$$\int \alpha f'(x) + \beta g'(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f'(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g'(x)\,\mathrm{d}x = \alpha f(x) + \beta g(x) + C.$$

□

导数的四则运算

例

求 $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ 的导函数。

导数的四则运算

例

求 $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ 的导函数。

例

求 $a\sin x + b\cos x$ 的导函数。

导数的四则运算

例

求 $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ 的导函数。

例

求 $a\sin x + b\cos x$ 的导函数。

例

求 $2\log_a x - 3e^x$ 的导函数。

导数的四则运算

定理

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\right)' = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i'(x)$$

导数的四则运算

定理

f, g 在某集合 I 上可导，则他们的积 $f \cdot g$ 在该集合 I 上也可导，且在该集合 I 上

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

$$\mathrm{d}(f \cdot g) = g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g = (f' \cdot g + f \cdot g')\,\mathrm{d}x.$$

导数的四则运算

定理

f, g 在某集合 I 上可导，则他们的积 $f \cdot g$ 在该集合 I 上也可导，且在该集合 I 上

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

$$\mathrm{d}(f \cdot g) = g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g = (f' \cdot g + f \cdot g')\,\mathrm{d}x.$$

对应的积分式子.

$$\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}(f(x)g(x)) = f(x) \cdot g(x) + C.$$

$$= \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int g(x)\,\mathrm{d}f(x) + \int f(x)\,\mathrm{d}g(x)$$

导数的四则运算

定理

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right)' = \sum_{j=1}^{n} \left\{ f_j'(x) \prod_{i=1, i\neq j}^{n} f_i(x) \right\}$$

导数的四则运算

例

求 $x^{m+n} = x^m x^n$ 的导函数。

导数的四则运算

例

求 $x^{m+n} = x^m x^n$ 的导函数。

例

求 $\sin x \cos x$ 的导函数。

导数的四则运算

例

求 $x^{m+n} = x^m x^n$ 的导函数。

例

求 $\sin x \cos x$ 的导函数。

例

求 $e^x \sin x \ln x$ 的导函数。

导数的四则运算

例

求 $x^{m+n} = x^m x^n$ 的导函数。

例

求 $\sin x \cos x$ 的导函数。

例

求 $e^x \sin x \ln x$ 的导函数。

例

求 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的导函数。

导数的四则运算

求导公式.

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

$$\mathrm{d}\,(f \cdot g) = g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g = (f' \cdot g + f \cdot g')\,\mathrm{d}x.$$

□

导数的四则运算

求导公式.

$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'.$

$\mathrm{d}(f\cdot g) = g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g = (f'\cdot g + f\cdot g')\,\mathrm{d}x.$ □

分部积分公式.

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int g(x)\,\mathrm{d}f(x) + \int f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(x)\cdot g(x) + C.$$

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\,\mathrm{d}f(x) = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

□

导数的四则运算

分部积分公式.

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int g(x)\,\mathrm{d}f(x) + \int f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(x)\cdot g(x) + C.$$

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\,\mathrm{d}f(x) = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

□

事实 (要点)

把求导后形式变简单的留在 d 前面，原函数没有更复杂的放在 d 后面!

导数的四则运算

例

求 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

导数的四则运算

例

求 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

例

求 $\int xe^x\,\mathrm{d}x$.

导数的四则运算

例

求 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

例

求 $\int xe^x\,\mathrm{d}x$.

例

求 $\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

导数的四则运算

例

求 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

例

求 $\int xe^x\,\mathrm{d}x$.

例

求 $\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

例

求 $\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$.

导数的四则运算

定理

f, g 在某集合 I 上可导，且对任意的 $x \in I$, $g(x) \neq 0$, 则他们的商 $\frac{f}{g}$ 在该集合 I 上也可导，且在该集合 I 上

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,\mathrm{d}f - f\,\mathrm{d}g}{g^2} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}\,\mathrm{d}x.$$

导数的四则运算

定理

f, g 在某集合 I 上可导，且对任意的 $x \in I$, $g(x) \neq 0$, 则他们的商 $\frac{f}{g}$ 在该集合 I 上也可导，且在该集合 I 上

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,\mathrm{d}f - f\,\mathrm{d}g}{g^2} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}\,\mathrm{d}x.$$

对应的积分式子.

$$\int \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{f(x)}{g(x)} + C.$$

□

导数的四则运算

例

求 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的导函数。

导数的四则运算

例

求 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的导函数。

例

求 $\sec x$ 的导函数。

导数的四则运算

例

求 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的导函数。

例

求 $\sec x$ 的导函数。

例

求 $\tan x$ 的导函数。

反函数的导数

定理

$y=f(x)$ 在 x_0 的某领域内连续且严格单调，f 在 x_0 可导，且 $f'(x_0)\neq 0$，则其反函数 $x=\varphi(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处可导，且

$$\varphi_y'(y_0)=\frac{1}{f_x'(x_0)}.$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}=\frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}}$$

反函数的导数

定理

$y=f(x)$ 在 x_0 的某领域内连续且严格单调，f 在 x_0 可导，且 $f'(x_0)\neq 0$，则其反函数 $x=\varphi(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处可导，且

$$\varphi'_y(y_0)=\frac{1}{f'_x(x_0)}.$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}=\frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}}$$

一般的微分式子.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

反函数的导数

例

求 $\ln x$ 的导函数。

反函数的导数

例

求 $\ln x$ 的导函数。

例

求 $\arcsin x$ 的导函数。

反函数的导数

例

求 $\ln x$ 的导函数。

例

求 $\arcsin x$ 的导函数。

例

求 $\arccos x$ 的导函数。

反函数的导数

例

求 $\ln x$ 的导函数。

例

求 $\arcsin x$ 的导函数。

例

求 $\arccos x$ 的导函数。

例

求 $\arctan x$ 的导函数。

反函数的导数

例

求双曲正弦函数 $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$，双曲余弦函数 $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ 的导函数。

反函数的导数

例

求双曲正弦函数 $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$，双曲余弦函数 $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ 的导函数。

例

求反双曲正弦函数 $\operatorname{sh}^{-1} x$，反双曲余弦函数 $\operatorname{ch}^{-1} x$ 的导函数。

复合函数的导数

定理 (复合函数求导的链式法则)

若 g 在 x_0 可导，f 在 $u_0 = g(x_0)$ 可导，则复合函数 $f \circ g$ 在 x_0 可导，且

$$[f(g(x))]'\Big|_{x=x_0} = f'(g(x))\Big|_{x=x_0} g'(x)\Big|_{x_0}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\right|_{g=u_0} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

复合函数的导数

定理 (复合函数求导的链式法则)

若 g 在 x_0 可导，f 在 $u_0 = g(x_0)$ 可导，则复合函数 $f \circ g$ 在 x_0 可导，且

$$[f(g(x))]'\Big|_{x=x_0} = f'(g(x))\Big|_{x=x_0} g'(x)\Big|_{x_0}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\right|_{g=u_0} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

一般的微分式子.

$$\mathrm{d}f(g(x)) = f'(g)\,\mathrm{d}g = f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$$

□

复合函数的导数

例

求 $\sin 2x$ 的导函数。

复合函数的导数

例

求 $\sin 2x$ 的导函数。

例

求 $(x^2+1)^{2022}$ 的导函数。

复合函数的导数

例

求 $\sin 2x$ 的导函数。

例

求 $(x^2+1)^{2022}$ 的导函数。

例

求 $\ln\cos(x^3+1)$ 的导函数。

复合函数的导数

例

求 $\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$ 的导函数。

复合函数的导数

例

求 $\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$ 的导函数。

例

求 $\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$ 的导函数。

复合函数的导数

例

求 $\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$ 的导函数。

例

求 $\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$ 的导函数。

例

求 $\arcsin\frac{x}{a}$ 的导函数。

复合函数的导数

例

求 $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ 的导函数。

复合函数的导数

例

求 $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ 的导函数。

例

求 x^x 的导函数。

复合函数的导数

例

求 $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ 的导函数。

例

求 x^x 的导函数。

例

求 $f(x)^{g(x)}$ 的导函数。

复合函数的导数

例

求 $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ 的导函数。

例

求 x^x 的导函数。

例

求 $f(x)^{g(x)}$ 的导函数。

例

求 $\arctan x$ 的导函数。

复合函数的导数

链式法则.

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$\mathrm{d}f(g(x)) = f'(g)\,\mathrm{d}g = f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x \qquad \square$$

复合函数的导数

链式法则.

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$\mathrm{d}f(g(x)) = f'(g)\,\mathrm{d}g = f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$ □

对应的积分式子——换元积分法.

$$\int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f'(g)\,\mathrm{d}g = f(g) + C = f(g(x)) + C$$

$$\int f'(g)\,\mathrm{d}g = \int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + C = f(g) + C$$

□

复合函数的导数

对应的积分式子——换元积分法.

$$\int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f'(g)\,\mathrm{d}g = f(g) + C = f(g(x)) + C$$

$$\int f'(g)\,\mathrm{d}g = \int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + C = f(g) + C$$

□

事实 (要点)

哪里复杂哪里不喜欢就换哪里！

复合函数的导数

例

求 $\int \frac{1}{x+a}\,\mathrm{d}x.$

复合函数的导数

例

求 $\int \frac{1}{x+a}\,\mathrm{d}x$.

例 (课本第 212 页)

求 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$.

复合函数的导数

例

求 $\int \frac{1}{x+a}\,\mathrm{d}x$.

例 (课本第 212 页)

求 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$.

例

求 $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

复合函数的导数

例

求 $\int \frac{1}{x+a}\,\mathrm{d}x$.

例（课本第 212 页）

求 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$.

例

求 $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

例

求 $\int \frac{1}{x(x^{10}+2)}\,\mathrm{d}x$.

复合函数的导数

例

$a > 0$, 求 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, \mathrm{d}x$.

复合函数的导数

例

$a > 0$，求 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

例

求 $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$.

复合函数的导数

例

$a > 0$, 求 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

例

求 $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$.

例 (课本第 217 页)

求 $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$.

复合函数的导数

例

$a > 0$, 求 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

例

求 $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$.

例 (课本第 217 页)

求 $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$.

例

$p, q \in \mathbb{R}$, 且 $p^2 - 4q < 0$, 求 $\int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$.

求函数的导函数

作业

1. 课本第 127 页习题 3(1)(4)(6)(7), 4(2)(5)(6), 13(5)
2. 课本第 221 页习题 1 奇数题, 2 偶数题, 3 偶数题

思考讨论

1. 课本第 128 页习题 12

隐函数的导数

例 (课本第 124 页)

求由方程 $e^{x+y} - xy - e = 0$ 确定的 (可导的) $y = y(x)$ 的导函数。并求在 $(0, 1)$ 处的切线方程。

隐函数的导数

例 (课本第 124 页)

求由方程 $e^{x+y} - xy - e = 0$ 确定的 (可导的) $y = y(x)$ 的导函数。并求在 $(0, 1)$ 处的切线方程。

例 (课本第 123 页)

求由方程 $\sin y^2 = \cos\sqrt{x}$ 确定的 (可导的) $y = y(x)$ 的导函数。

用参数表示的函数的导数

参数方程定义 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta].$

用参数表示的函数的导数

参数方程定义 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta].$

问题 已知 $\phi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 可导, $\phi'(t) \neq 0$. 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=t_0}$.

用参数表示的函数的导数

参数方程定义 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta].$

问题 已知 $\phi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 可导，$\phi'(t) \neq 0$. 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=t_0}$.

求导公式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$

用参数表示的函数的导数

参数方程定义 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta].$

问题 已知 $\phi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 可导, $\phi'(t) \neq 0$. 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=t_0}$.

求导公式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$

上式可看成微分形式 $\begin{cases} \mathrm{d}y = \psi'(t)\ \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x = \phi'(t)\ \mathrm{d}t \end{cases}$ 两边相除的结果。

用参数表示的函数的导数

参数方程定义 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta].$

问题 已知 $\phi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 可导，$\phi'(t) \neq 0$. 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=t_0}$.

求导公式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$

上式可看成微分形式 $\begin{cases} \mathrm{d}y = \psi'(t)\ \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x = \phi'(t)\ \mathrm{d}t \end{cases}$ 两边相除的结果。

注：参数方程所表示的函数求导法是复合函数与反函数求导公式的结合。

用参数表示的函数的导数

例 (课本第 125 页)

求由参数方程

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

确定的 (可导的) $y = y(x)$ 的导函数。

用参数表示的函数的导数

例 (课本第 125 页)

求由参数方程

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

确定的 (可导的) $y = y(x)$ 的导函数。

例

求由参数方程

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

确定的 (可导的) $y = y(x)$ 的导函数。

求函数的导函数

作业

1. 课本第 128 页习题 5(3)(7), 8(2)(5)(6),10

特殊函数的导数与积分

例

$m, n \in \mathbb{N}$, 求 $\int \sin mx \cos nx \,\mathrm{d}x$.

特殊函数的导数与积分

例

$m, n \in \mathbb{N}$, 求 $\int \sin mx \cos nx \, \mathrm{d}x$.

例

$a > 0$, 求 $\int \sqrt{x^2 + a^2} \, \mathrm{d}x$.

特殊函数的导数与积分

例

$m, n \in \mathbb{N}$, 求 $\int \sin mx \cos nx \,\mathrm{d}x$.

例

$a > 0$, 求 $\int \sqrt{x^2 + a^2} \,\mathrm{d}x$.

例

$a > 0$, 求 $\int \sqrt{x^2 - a^2} \,\mathrm{d}x$.

特殊函数的导数与积分

例

$m, n \in \mathbb{N}$, 求 $\int \sin mx \cos nx \, \mathrm{d}x$.

例

$a > 0$, 求 $\int \sqrt{x^2 + a^2} \, \mathrm{d}x$.

例

$a > 0$, 求 $\int \sqrt{x^2 - a^2} \, \mathrm{d}x$.

例

$a > 0$, 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, \mathrm{d}x$.

特殊函数的导数与积分

例 (课本第 225 页)

$n \in \mathbb{N}$, 求 $\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x$.

特殊函数的导数与积分

例 (课本第 225 页)

$n \in \mathbb{N}$, 求 $\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x$.

例

$n \in \mathbb{N}$, 求 $\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$ 的导函数.

特殊函数的导数与积分

例 (课本第 225 页)

$n \in \mathbb{N}$, 求 $\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x$.

例

$n \in \mathbb{N}$, 求 $\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$ 的导函数.

例 (课本第 218 页)

$n \in \mathbb{N}$, 求 $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x$.

特殊函数的导数与积分

例 (课本第 225 页)

$n \in \mathbb{N}$, 求 $\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x$.

例

$n \in \mathbb{N}$, 求 $\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$ 的导函数.

例 (课本第 218 页)

$n \in \mathbb{N}$, 求 $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x$.

例 (课本第 225 页)

$p, q \in \mathbb{R}$, 且 $p^2 - 4q < 0$, $n \in \mathbb{N}$, 求 $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$.

特殊函数的导数与积分

例

求 $e^{\alpha x}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)$ 的导函数。

特殊函数的导数与积分

例

求 $e^{\alpha x}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)$ 的导函数。

例

求 $\int (x^2+1)e^{2x}\,\mathrm{d}x.$

特殊函数的导数与积分

例

求 $e^{\alpha x}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)$ 的导函数。

例

求 $\int (x^2+1)e^{2x}\,\mathrm{d}x.$

例

$m>n$, 求 $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\sin\beta x+\left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right)\cos\beta x$ 的导函数。

特殊函数的导数与积分

例

求 $e^{\alpha x}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)$ 的导函数。

例

求 $\int (x^2+1)e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

例

$m>n$, 求 $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\sin\beta x+\left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right)\cos\beta x$ 的导函数。

例

求 $\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$.

特殊函数的导数与积分

例

求 $e^{\alpha x}(a\sin\beta x+b\cos\beta x)$ 的导函数。

特殊函数的导数与积分

例

求 $e^{\alpha x}(a\sin\beta x + b\cos\beta x)$ 的导函数。

例

求 $\int e^{3x}\sin 4x\,\mathrm{d}x.$

特殊函数的导数与积分

例

求 $e^{\alpha x}(a\sin\beta x+b\cos\beta x)$ 的导函数。

例

求 $\int e^{3x}\sin 4x\,\mathrm{d}x$.

例

求 $e^{\alpha x}\left[\left(\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\right)\sin\beta x+\left(\sum_{k=0}^{n}b_kx^k\right)\cos\beta x\right]$ 的导函数。

求函数的导函数

作业

1. 课本第 222 页习题 8 (1)(4), 10(1)(3)

思考讨论

1. 求 $e^{\alpha x}\left[\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\sin\beta x+\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right)\cos\beta x\right]$ 的导函数。
2. 利用前面的结果，计算 $\int xe^{3x}\sin 4x\,\mathrm{d}x$.

有理函数的积分

定理 (课本第 225 页)

若 $P(x)$, $Q(x)$ 是实系数多项式，且

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{l} (x - x_j)^{k_j} \cdot \prod_{j=1}^{n} (x^2 + p_j x + q_j)^{m_j},$$

则对真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 存在唯一的下述形式表示式：

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{k=1}^{k_j} \frac{a_{jk}}{(x - x_j)^k} \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m_j} \frac{b_{jk} x + c_{jk}}{(x^2 + p_j x + q_j)^k} \right).$$

其中 a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} 都是实数。

有理函数的积分

例 (课本第 226 页)

存在唯一的实数 A, B, C, D 使得对任意的 (使式子有意义的)x,

$$\frac{4x^3 - 13x^2 + 3x + 8}{(x+1)(x-2)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

求法.

两边通分后，两边的分子应该相等，

$$\begin{aligned} 4x^3 - 13x^2 + 3x + 8 =& A(x-2)(x-1)^2 + B(x+1)(x-1)^2 \\ & + C(x+1)(x-2)(x-1) + D(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

因为对任意的 x 都应成立，取 $x = -1$，可得 $A = 1$; 取 $x = 2$，可得 $B = -2$; 取 $x = 1$，可得 $D = -1$; 取 $x = 0$，可得 $8 = -2A + B + 2C - 2D$, 得 $C = 5$. □

有理函数的积分

例 (课本第 226 页)

存在唯一的实数 A, B, C, D, E 使得对任意的 (使式子有意义的)x,

$$\frac{x^4+x^3+3x^2-1}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

求法.

两边通分后，两边的分子应该相等，

$$\begin{aligned} x^4+x^3+3x^2-1 =& A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-1)(x^2+1) \\ &+(Dx+E)(x-1) \end{aligned}$$

因为对任意的 x 都应成立，取 $x=1$，可得 $A=1$; 比较 x^4 的系数可得 $A+B=1$，得 $B=0$; 比较 x^3 的系数可得 $C=1$; 取 $x^2=-1$，可得 $-3-i=(Di+E)(i-1)=(-D+E)i+(-D-E)$，得 $D=2$，$E=1$. □

有理函数的积分

定理 (课本第 225 页)

若 $P(x)$, $Q(x)$ 是实系数多项式，且

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{l} (x - x_j)^{k_j} \cdot \prod_{j=1}^{n} (x^2 + p_j x + q_j)^{m_j},$$

则对真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 存在唯一的下述形式表示式：

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{k=1}^{k_j} \frac{a_{jk}}{(x - x_j)^k} \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m_j} \frac{b_{jk} x + c_{jk}}{(x^2 + p_j x + q_j)^k} \right).$$

其中 a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} 都是实数。

有理函数的积分

每部分的积分.

$n \geqslant 1$,

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln|x-a| + C, & \text{若} n = 1 \\ -\dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} + C, & \text{若} n \geqslant 2 \end{cases}$$

$\square$

有理函数的积分

每部分的积分.

$p, q \in \mathbb{R}$, 且 $p^2 - 4q < 0$,

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + \frac{4q-p^2}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

$\square$

有理函数的积分

每部分的积分.

$p, q \in \mathbb{R}$, 且 $p^2 - 4q < 0$,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

□

有理函数的积分

每部分的积分.

$p, q \in \mathbb{R}$, 且 $p^2 - 4q < 0$, $n > 1$, 注意

$$\left(\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{n-1}}\right)' = \frac{6-4n}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{(4q-p^2)(n-1)}{(x^2+px+q)^n}$$

所以

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(4q-p^2)(n-1)}\left(\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{n-1}} - (6-4n)\int \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}\,\mathrm{d}x\right)$$

□

有理函数的积分

例

求 $\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)' = \frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-2}{x^2+x+1} + \frac{3}{(x^2+x+1)^2}$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

有理函数的积分

每部分的积分.

$p, q \in \mathbb{R}$, 且 $p^2 - 4q < 0$,

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$$

□

有理函数的积分

例

求 $\int \frac{x}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

有理函数的积分

事实.

只要把被积函数化为了多项式除以多项式的形式，就一定能够求出来！ □

有理函数的积分

事实.

如果是 $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ 的形式，可通过三角函数的万能公式来计算！

$$x = 2\arctan t \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

□

有理函数的积分

事实.

如果是 $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ 的形式，可通过三角函数的万能公式来计算！

$$x = 2\arctan t \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

□

例

求 $\displaystyle\int \frac{1}{3+\sin x}\,\mathrm{d}x.$

有理函数的积分

事实.

如果是 $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x$ 的形式，可通过变换 $t = \tan x$ 来计算。

$$t = \tan x \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$\square$

有理函数的积分

事实.

如果是 $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x$ 的形式，可通过变换 $t = \tan x$ 来计算。

$$t = \tan x \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

□

例

求 $\displaystyle\int \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}\,\mathrm{d}x.$

有理函数的积分

事实.

如果是 $\int R\left(\sin x, \cos^2 x\right)\cos x\,\mathrm{d}x$ 或 $\int R\left(\sin^2 x, \cos x\right)\sin x\,\mathrm{d}x$ 的形式，可通过变换 $t = \cos x$ 或 $t = \sin x$ 来计算。 $\square$

有理函数的积分

事实.

如果是 $\int R\left(\sin x, \cos^2 x\right) \cos x \, \mathrm{d}x$ 或 $\int R\left(\sin^2 x, \cos x\right) \sin x \, \mathrm{d}x$ 的形式，可通过变换 $t = \cos x$ 或 $t = \sin x$ 来计算。 $\square$

例

求 $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x} \mathrm{d}x.$

有理函数的积分

事实.

如果是 $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ 的形式，可通过变换 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 来计算。 $\square$

有理函数的积分

事实.

如果是 $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ 的形式，可通过变换 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 来计算。 □

例

求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}\,\mathrm{d}x.$

有理函数的积分

事实.

如果是 $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$ 的形式，可分下面几种情况来计算。

1. 【$a>0$】令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$;
2. 【$c>0$】令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$;
3. 【$ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu)$】令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda)$;

□

有理函数的积分

事实.

如果是 $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$ 的形式，可分下面几种情况来计算。

1. 【$a>0$】令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$;
2. 【$c>0$】令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$;
3. 【$ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu)$】令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda)$;

$\square$

例

求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x.$

求 $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-x-1}}\mathrm{d}x.$

二项式的积分

事实.

如果是二项式 $\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x$ 的形式，m,n,p 都是有理数。

1. 【p 是整数】设 λ 是 m,n 分母的最小公倍数，令 $t=\sqrt[\lambda]{x}=x^{\frac{1}{\lambda}}$；

$\square$

例

求 $\int x^{\frac{1}{3}}\left(2+7x^{\frac{1}{5}}\right)^4\mathrm{d}x$. 用替换 $t=^{\frac{1}{15}}$.

二项式的积分

事实.

如果是二项式 $\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x$ 的形式，m,n,p 都是有理数。

1. 【$\frac{m+1}{n}$ 是整数】设 λ 是 p 分母的最小公倍数，令 $t=\sqrt[\lambda]{a+bx^n}=(a+bx^n)^{\frac{1}{\lambda}}$；

□

解法.

可先做变换 $z=x^n$，得 $\displaystyle\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x \xlongequal{z=x^n} \frac{1}{n}\int(a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}\,\mathrm{d}z$，再用替换 $t=\sqrt[\lambda]{a+bz}$.

□

二项式的积分

事实.

如果是二项式 $\int x^m (a+bx^n)^p \,\mathrm{d}x$ 的形式，m, n, p 都是有理数。

1. 【$p + \frac{m+1}{n}$ 是整数】

□

解法.

$$\int x^m (a+bx^n)^p \,\mathrm{d}x \xlongequal{z=x^n} \frac{1}{n}\int (a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{n}\int \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+\frac{m+1}{n}-1}\,\mathrm{d}z,$$ 再用替换 $t = \sqrt[\lambda]{\frac{a+bz}{z}}$.

□

带二次根式的积分

事实.

如果是 $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$ 的形式，$P(x)$ 是多项式。 □

解法.

用待定系数法找比 $P(x)$ 低一阶的多项式 $Q(x)$ 使得

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = \lambda \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x + Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}.$$

□

带二次根式的积分

事实.

如果是 $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$ 的形式，k 是整数。 □

解法.

用替换 $x-\alpha=\frac{1}{t}$. □

带二次根式的积分

事实.

如果是 $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{m+\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x$ 的形式，m 是整数。 □

解法.

用替换 $t = \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. □

带二次根式的积分

事实.

如果是 $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$ 的形式，k 是整数。 □

解法.

先 (找合适的 u, v) 用替换 $x = \dfrac{ut+v}{t+1}$ 同时把两个一次项系数变为 0，在用之前讲过的变换。 □

关于三角函数的特殊形状的积分举例

分子分母都是 $\sin x$, $\cos x$ 的线性组合.

求 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{a\sin x + b\cos x}\,\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int \frac{\cos x}{a\sin x + b\cos x}\,\mathrm{d}x$ □

关于三角函数的特殊形状的积分举例

分子分母都是 $\sin x$, $\cos x$ 的线性组合.

求 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{a\sin x + b\cos x}\,\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int \frac{\cos x}{a\sin x + b\cos x}\,\mathrm{d}x$ □

方法.

把分子表示成分母和分母的导数的线性组合！ □

关于三角函数的特殊形状的积分举例

分子分母都是 $\sin x$, $\cos x$ 的线性组合.

求 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{a\sin x + b\cos x}\,\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int \frac{\cos x}{a\sin x + b\cos x}\,\mathrm{d}x$ □

方法.

把分子表示成分母和分母的导数的线性组合！ □

例

求 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3\sin x + 2\cos x}\,\mathrm{d}x$

无法用初等函数表示的积分

部分无法用初等函数表示的积分.

名称	式子	名称	式子
积分指数	$\mathrm{Ei}(x)=\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$	积分对数	$\mathrm{li}(x)=\int \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$
积分正弦	$\mathrm{Si}(x)=\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$	积分余弦	$\mathrm{Ci}(x)=\int \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$
积分双曲正弦	$\mathrm{Shi}(x)=\int \frac{\operatorname{sh} x}{x}\,\mathrm{d}x$	积分双曲余弦	$\mathrm{Chi}(x)=\int \frac{\operatorname{ch} x}{x}\,\mathrm{d}x$
菲涅尔积分	$S(x)=\int \sin x^2\,\mathrm{d}x$	菲涅尔积分	$C(x)=\int \cos x^2\,\mathrm{d}x$
欧拉-普哇松积分	$\Phi(x)=\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$		

□

无法用初等函数表示的积分

椭圆积分.

表中 $0 < k < 1$.

名称	雅克比形式	勒让德形式
第一类椭圆积分	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\,\mathrm{d}z$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\,\mathrm{d}\phi$
第二类椭圆积分	$\displaystyle\int \frac{z^2}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\,\mathrm{d}z$	$\displaystyle\int \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$
第三类椭圆积分	$\displaystyle\int \frac{1}{(1+nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\,\mathrm{d}z$	$\displaystyle\int \frac{1}{(1+n\sin^2\phi)\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\,\mathrm{d}\phi$

□

求函数的导函数

作业

1. 课本第 229 页习题 1 (2)(6)(7)(12)(16), 3, 4 (3)(7)(10), 6(5)(6)(11), 7(6)(11)(17)

高阶导数和高阶微分

定义

若 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ 存在，称 f 在 x_0 二阶可导，把这个极限记为 $f''(x_0)$, 或者 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}$, 称为 f 在 x_0 的二阶导数, 即

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}.$$

定义

如果 f 在集合 I 上每一点都二阶可导，则称 $f(x)$ 在 I 上二阶可导。f' 的导函数被称为 f 的二阶导数，记为 f'', 或者 $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$.

高阶导数和高阶微分

定义

若 f 的 $n-1$ 阶导函数在 x_0 可导，称 f 在 x_0 点 n 阶可导，把这个导数记为 $f^{(n)}(x_0)$，或者 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0}$，称为 f 在 x_0 的 n 阶导数，即

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

定义

如果 f 在集合 I 上每一点都 n 阶可导，则称 $f(x)$ 在 I 上 n 阶可导。$f^{(n-1)}$ 的导函数被称为 f 的 n 阶导数，记为 $f^{(n)}$，或者 $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

高阶导数和高阶微分

注意.

1. 零阶导数 $f^{(0)}$ 就是不求导的意思，$f^{(0)}=f$，二阶及以上的导数统称高阶导数。
2. 导数记号 $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(n)}(x)(n\geqslant 4)$.
3. 在 x_0 处的 n 阶导数记为 $f^{(n)}(x_0)$, $y^{(n)}\big|_{x=x_0}$, $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\bigg|_{x=x_0}$, $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\bigg|_{x=x_0}$ 等。

□

高阶导数和高阶微分

例

求 $y = x^{\alpha}$ 的 n 阶导数。

高阶导数和高阶微分

例

求 $y = x^{\alpha}$ 的 n 阶导数。

例

求 $y = e^{\alpha x}$ 的 n 阶导数。

高阶导数和高阶微分

例

求 $y = x^{\alpha}$ 的 n 阶导数。

例

求 $y = e^{\alpha x}$ 的 n 阶导数。

例

求 $y = \ln x$ 的 n 阶导数。

高阶导数和高阶微分

例

求 $y = x^\alpha$ 的 n 阶导数。

例

求 $y = e^{\alpha x}$ 的 n 阶导数。

例

求 $y = \ln x$ 的 n 阶导数。

例

求 $y = \sin x$ 的 n 阶导数。

高阶导数和高阶微分

定理（高阶导数是线性的）

$$[c_1 f(x) + c_2 g(x)]^{(n)} = c_1 f^{(n)}(x) + c_2 g^{(n)}(x).$$

高阶导数和高阶微分

例

$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ 是 n 阶多项式，则

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

$$P''(x) = \sum_{k=2}^{n} a_k k(k-1) x^{k-2} = 2! a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2 + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$P'''(x) = \sum_{k=3}^{n} a_k k(k-1) x^{k-3} = 3! a_3 + 24 a_4 x + \cdots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3}$$

$$\cdots$$

$$P^{(n)}(x) = n! a_n$$

对任意的 $m > n$，有 $P^{(m)}(x) = 0$.

高阶导数和高阶微分

例

求 $y=\frac{1}{x(x-1)}$ 的 n 阶导数。

高阶导数和高阶微分

例

求 $y=\frac{1}{x(x-1)}$ 的 n 阶导数。

解

因为

$$y=\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$$

所以

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n n!(x-1)^{-n-1}-(-1)^n n!x^{-n-1}$$

高阶导数和高阶微分

定理 (Leibniz 公式)

$$[f(x)\cdot g(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).$$

高阶导数和高阶微分

定理 (Leibniz 公式)

$$[f(x)\cdot g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

例

求 $y = x^2 \sin x$ 的 2024 阶导数。

高阶导数和高阶微分

定理 (Leibniz 公式)

$$[f(x)\cdot g(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).$$

例

求 $y=x^2\sin x$ 的 2024 阶导数。

例

求 $y=\arctan x$ 在 0 处的 n 阶导数

高阶导数和高阶微分

例

求由方程 $e^{xy}+x^2y-1=0$ 确定的二阶可导隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 y''。

高阶导数和高阶微分

求隐函数的高阶导数.

对参数形式 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$. □

高阶导数和高阶微分

求隐函数的高阶导数.

对参数形式 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$. □

例

求摆线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 在 $t = \pi$ 处二阶导函数 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ 的值。

高阶导数和高阶微分

高阶微分.

1. 一阶微分 $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$
2. 二阶微分 $\mathrm{d}\,(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}\,(f'(x)\,\mathrm{d}x) = \mathrm{d}f'(x)\,\mathrm{d}x + f'(x)\,\mathrm{d}\,(\mathrm{d}x) = f''(x)\,\mathrm{d}x^2$
3. y 的 n 阶微分的表达式：$\mathrm{d}^n y = f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x^n$

□

注意区分.

1. $\mathrm{d}\left(x^2\right) = 2x\,\mathrm{d}x$，表示 x^2 的一阶微分
2. $\mathrm{d}x^2 = (\mathrm{d}x)^2$，表示 x 的一阶微分的平方
3. $\mathrm{d}^2 x = \mathrm{d}\,(\mathrm{d}x)$，表示 x 的二阶微分

□

高阶导数和高阶微分

注意.

高阶微分没有形式不变性！ □

事实.

对复合函数 $\begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases}$，则二阶微分

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}\,(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}\,(f'(u)\,\mathrm{d}u) = \mathrm{d}f'(u)\,\mathrm{d}u + f'(u)\,\mathrm{d}\,(\mathrm{d}u) &= f''(u)\,\mathrm{d}u^2 + f'(u)\,\mathrm{d}^2 u \\ &\neq f''(u)\,\mathrm{d}u^2 \end{aligned}$$

□

高阶导数与高阶微分

作业

1. 课本第 138 页习题 1(5)(9), 2(4)(6), 4(1), 6(3), 7(4), 9(2)