模糊推理

陈志华

主要内容

- 模糊数学基础
  - 模糊集合
  - 模糊集合运算
  - 模糊关系及合成
- 模糊假言推理
  - 模糊知识表示
  - 简单模糊推理

前 言

- 在日常生活中，经常遇到一些模糊的词句来形容、描述
  - 比较年轻、高个、少量、胖、好、漂亮、热、远……
  - 典型实例：菜谱与厨师做菜
- 人脑具有处理模糊信息的能力，善于判断和处理模糊现象。但计算机对模糊现象识别能力较差

前言

- 为了提高计算机识别模糊现象的能力
  - 需要把人们常用的模糊语言设计成机器能接受的指令和程序
  - 需要寻找一种描述和加工模糊信息的数学工具，这就推动数学家深入研究模糊数学。
- 所以，模糊数学的产生是有其科学技术与数学发展的必然性

模糊数学基础

- 模糊数学之父-扎德

扎德/查德（Zadeh，1921-2017）

扎德2007年访问中山大学

模糊数学基础

- “模糊数学之父” Zadeh
  - 数学家和控制学家，加州大学电机工程与计算机科学系。美籍波兰裔
  - 1965发表论文“Fuzzy Set”
- 模糊数学的研究内容
  - 模糊数学的理论，以及它和精确数学、随机数学的关系
  - 模糊语言学和模糊逻辑
  - 模糊数学的应用

1. 模糊集合

- 经典集合：现代数学的基础
  - 一组具有某种共同性质的数学元素
  - 具有确定性、互异性和无序性
- 模糊集合
  - 集合界限模糊
  - 非此即彼→即此即彼

1. 模糊集合

□ 模糊集合的定义

设U是论域，称映射$A(x)$：$U \to [0,1]$

确定了一个U上的模糊子集A，映射$A(x)$称为A的隶属函数，它表示x对A的隶属程度

使$A(x) = 0.5$的点x称为A的过渡点，此点最具模糊性

当映射$A(x)$只取0或1时，模糊子集A就是经典子集，而$A(x)$就是它的特征函数. 可见经典子集就是模糊子集的特殊情形

1. 模糊集合

□ 模糊集合的表示

—形式1

$$A = \mu_1 / x_1 + \mu_2 / x_2 + \cdots + \mu_n / x_n$$

—形式2

$$A = \int_{u \in U} \mu_A(u) / u$$

1. 模糊集合

- **例** 设论域$U = \{x_1(140), x_2(150), x_3(160), x_4(170), x_5(180), x_6(190)\}$(单位：cm) 表示人的身高，那么$U$上的一个模糊集“高个子”($A$)的隶属函数$A(x)$可定义为

$$A(x) = \frac{x-140}{190-140}$$

1. 模糊集合

- 采用Zadeh表示法：

$$\mathbf{A}=\frac{0}{x_1}+\frac{0.2}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.6}{x_4}+\frac{0.8}{x_5}+\frac{1}{x_6}$$

问题：以上表示是否唯一？

1. 模糊集合

另外，还可以在U上建立一个“矮个子”、“中等个子”、“年轻人”、“中年人”等模糊子集.

从上例可看出：

(1) 一个有限论域上可以对应无限个模糊子集,而经典子集是有限的；

(2) 一个模糊子集的隶属函数的确定方法是主观的.

练习

- 设有 5 个同学分别为S1, S2, S3, S4, S5。若对这些同学的“学习好”程度打分：
  - S1:95; S2:85; S3:80; S4:70; S5:90

这样就确定了一个模糊集合F，它表示该小组同学对“学习好”这一模糊概念的隶属程度，试写出该模糊集合

2. 模糊集合关系及运算

- **相等：** 设有两个模糊集合A和B，A=B当且仅当它们的隶属函数在论域U上恒等，即

$$\forall x \in U, \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

- **包含：** A包含于B当且仅当对于论域U上

$$\forall x \in U, \mu_A(x) \le \mu_B(x)$$

2. 模糊集合关系及运算

- 并：

$$\forall x \in U, (A \bigcup B)(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

- 交：

$$\forall x \in U, (A \bigcap B)(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

- 补集：

$$\forall x \in U, \neg A(x) = 1 - A(x)$$

2. 模糊集合关系及运算

- 积：

$$A \times B = \int_{U \times V} (\mu_A(u_i) \wedge \mu_B(v_j)) / (u_i, v_j)$$

—其中A和B分别是论域U和V上的模糊集合

—特别地，当B就是论域V时，公式可简化成

$$A \times V = \int_{U \times V} \mu_A(u_i) / (u_i, v_j)$$

例 题

- 假设论域U={1,2,3,4,5}, 且U上定义的模糊集合：

  A=0.1/1+0.2/2+0.3/3+0.4/4+0.5/5,

  B=0.1/1+0.2/2+0.3/3+0.4/4+0.5/5,

  C=0.1/2+0.2/3+0.4/4+0.5/5,

  D=0.3/1+0.1/2+1.0/5,

试确定A和B,A和C的关系(包含、相等)，计算A和D的并集、交集和D的补集。

如果论域 V={11,22,33},V上定义的模糊集合 F=0.5/11+0.2/22, 试求D和F的乘积。

例 题

- 解答:
  - A=B, A包含C
  - A和D的交集、并集:
    - 交0.1/1+0.1/2+0.5/5
    - 并0.3/1+0.2/2+0.3/3+0.4/4+1.0/5
  - D的补集: 0.7/1+0.9/2+1.0/3+1.0/4
  - D×F= 0.3/(1,11)+0.1/(2,11)+0.5/(5,11)+

    0.2/(1,22)+0.1/(2,22)+0.2/(5,22)

3. 模糊关系

- 普通关系:两个集合中的元素之间是否有关联
- 模糊关系:两个模糊集合中的元素之间关联程度的多少

- 某地区人的身高论域X={140,150,160,170,180}（单位：cm），体重论域 Y={40,50,60,70,80}。

身高与体重的模糊关系表

X \ R \ Y	40	50	60	70	80
140	1	0.8	0.2	0.1	0
150	0.8	1	0.8	0.2	0.1
160	0.2	0.8	1	0.8	0.2
170	0.1	0.2	0.8	1	0.8
180	0	0.1	0.2	0.8	1

- 从X到Y的一个模糊关系R，用模糊矩阵表示：

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 模糊关系

- 设U、V是论域，从U到V上的模糊关系R是指U×V上的一个模糊集合，由隶属函数 $\mu_R(x,y)$表示(x,y)之间的关系

- 当论域U、V是有限集时，模糊关系R常常采用矩阵来表示，此时它又称为模糊关系矩阵

3. 模糊关系

模糊关系矩阵的乘法（合成）

- 设R是U×V上的模糊关系矩阵，S是V×W上的模糊关系矩阵
- 则U×W上的模糊关系矩阵T：

$$T = R \circ S$$

3. 模糊关系

- 若R为m×n阶矩阵，S为n×k阶矩阵，则 $T=R\circ S$ 是m×k阶矩阵，且运算公式为：

$$T_{ij}=\bigcup_{k=1}(r_{ik}\wedge s_{kj})$$

在模糊数学中，$\vee$ $\wedge$分别代表取极大和极小值运算；$\bigcup\limits_{k=1}$ 表示连续取极大值

例 题

- 例：设有如下两个模糊关系矩阵**R1,R2**, 计算它们的积：

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$$

令$\mathbf{T} = \mathbf{R}_1 \circ \mathbf{R}_2 = [T_{ij}]$

$$T(1,1) = (0.3 \wedge 0.2) \vee (0.7 \wedge 0.6) \vee (0.2 \wedge 0.9)$$

$$= \max\{\min\{0.3,0.2\}, \min\{0.7,0.6\}, \min\{0.2,0.9\}\}$$

$$= \max\{0.2,0.6,0.2\}$$

$$= 0.6$$

例 题

答案：

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \\ 0.9 & 0.4 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$$

练习

- 设有如下两个模糊关系R1和R2，计算

$$T = R_1 \circ R_2$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0.2 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

模糊假言推理

- 1） 模糊知识表示
- 2）前提的模糊匹配
- 3）简单模糊推理

1. 模糊知识的表示

- 一般表示形式

$$IF \quad E \quad THEN \quad R(CF, \lambda)$$

- E表示模糊条件（证据）
- CF是知识的可信度因子
- λ表示阈值，指出该条规则可以被应用的条件

1. 模糊知识的表示

- 规则的各种形式：

$$IF \quad x \quad is \quad A \quad THEN \quad y \quad is \quad B(\lambda)$$

$$IF \quad x \quad is \quad A \quad THEN \quad y \quad is \quad B(CF, \lambda)$$

$$IF \quad x_1 \quad is \quad A_1 \quad AND \quad x_2 \quad is \quad A_2 \, THEN \quad y \quad is \, B(\lambda)$$

- 证据的一般形式：

$$x \quad is \quad A' \text{或} x \quad is \quad A'(CF)$$

2. 前提的模糊匹配

- 在模糊推理中，知识的前提条件中的A与证据中的A’不一定完全相同
- 因此在推理时，考虑决定选用哪条知识时，需要找到与证据A’能够匹配的知识前提A
- 匹配的方法是计算A’和A的贴近度是否大于预先设定的阈值

2. 前提的模糊匹配

规则：*IF* x *is* 小 *THEN* y *is* 大(0.6)

证据：x *is* 较小

是否能够推理得到结论 y *is* 大，则要看

“x *is* 较小”与“x *is* 小”的贴近度，是否大于0.6

2. 前提的模糊匹配——贴近度的计算

令A,B分别是论域$U=\{u_1,u_2,\cdots u_n\}$上的模糊集合，

它们的贴近度定义为：

$$(A,B)=\frac{1}{2}[A\bullet B+(1-A*B)]$$

其中：$A\bullet B=\underset{U}{\vee}(\mu_A(u_i)\wedge\mu_B(u_i)),\ A*B=\underset{U}{\wedge}(\mu_A(u_i)\vee\mu_B(u_i))$

$\wedge$表示取极小，$\vee$表示取极大

注意：$A\bullet B$和$A\circ B$的区别

例题

设论域$U=\{a,b,c,d,e\}$,U上定义的模糊集

$A=0.6/a+0.8/b+1/c+0.8/d+0.6/e$,

$B=0.4/a+0.6/b+0.8/c+1/d+0.8/e$,

求贴近度(A,B)?

解答

$$A \bullet B = (0.6 \wedge 0.4) \vee (0.8 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 0.8) \vee (0.8 \wedge 1) \vee (0.6 \wedge 0.8)$$
$$= 0.4 \vee 0.6 \vee 0.8 \vee 0.8 \vee 0.6 = 0.8$$

$$A * B = (0.6 \vee 0.4) \wedge (0.8 \vee 0.6) \wedge (1 \vee 0.8) \wedge (0.8 \vee 1) \wedge (0.6 \vee 0.8)$$
$$= 0.6 \wedge 0.8 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.8 = 0.6$$

$$\text{则}(A, B) = \frac{1}{2}[0.8 + (1 - 0.6)] = 0.6$$

3. 简单模糊推理

- 简单模糊推理
  - 规则的前提E是单一条件
  - 结论R不含CF
- 知识表示形式：
  - IF x is A THEN y is B(λ)

3. 简单模糊推理——推理方法及步骤

- 首先计算A和B之间的**模糊关系R**
- 通过R与前提的合成求出结论

—如果已知证据是 $x \quad is \quad A'$

—且 $(A, A') \geq \lambda$

—则有结论： $y \quad is \quad B'$

—其中： $B' = A' \circ R$

计算R?

- Zadeh提出两种方法

  —极大极小原则计算R_m

  —算数原则计算R_a

计算R

设$A = \int_U \mu_A(u) / u, B = \int_V \mu_B(v) / v$

则：$R_m = (A \times B) \bigcup (\neg A \times V)$

$$= \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)) / (u, v)$$

即：$R_m(i, j) = (\mu_A(u_i) \wedge \mu_B(v_j)) \vee (1 - \mu_A(u_i))$

$R_a = (\neg A \times V) \oplus (U \times B)$

$$= \int_{U \times V} 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)) / (u, v)$$

即：$R_a(i, j) = 1 \wedge (1 - \mu_A(u_i) + \mu_B(v_j))$

其中，$\oplus$ 表示有界和，定义为

$A \oplus B = \min\{1, \mu_A(u) + \mu_B(v)\}$

3. 简单模糊推理

对于模糊假言推理，已知证据为$x \quad is \quad A'$

且$(A, A') > \lambda$,则可由R_m和R_a计算得到B'_m和B'_a

$$B'_m = A' \circ R_m = A' \circ [(A \times B) \bigcup (\neg A \times V)]$$

$$B'_a = A' \circ R_a = A' \circ [(\neg A \times V) \oplus (U \times B)]$$

3. 简单模糊推理

它们的隶属函数分别为：

$$\mu_m(v)=\bigvee_{u\in U}\{\mu_{A'}(u)\wedge[\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)\vee(1-\mu_A(u))]\}$$

$$\mu_a(v)=\bigvee_{u\in U}\{\mu_{A'}(u)\wedge[1\wedge(1-\mu_A(u)+\mu_B(v))]\}$$

解题思路：先求$R_m(R_a)$;后求B'_m和B'_a.

例题

设$U=V=\{1,2,3,4,5\}$

$A=1/1+0.5/2$

$B=0.4/3+0.6/4+1/5$

模糊规则为：

$IF \quad x \quad is \quad A \quad THEN \quad y \quad is \quad B(\lambda)$

证据为： $x \quad is \quad A'$

$A'=1/1+0.4/2+0.2/3$

且有$(A,A')>\lambda$,求B_m' ,B_a'

解答

- 先求R_m,R_a

$$R_m(i,j)=(\mu_A(u_i)\wedge\mu_B(v_j))\vee(1-\mu_A(u_i))$$

代入$\mu_A(1)=1,\quad \mu_A(2)=0.5,\quad \mu_A(3)=\mu_A(4)=\mu_A(5)=0$

$\mu_B(1)=\mu_B(2)=0, \mu_B(3)=0.4, \mu_B(4)=0.6, \mu_B(5)=1$

$$\text{可以得到}R_m=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

解答

$$R_a(i,j)=1\wedge(1-\mu_A(u_i)+\mu_B(v_j))$$

$$\text{则}R_a=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1\\ 0.5 & 0.5 & 0.9 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

解答

再求B_m'和B_a'

$$B_m' = A' \circ R_m = \{1, 0.4, 0.2, 0, 0\} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \{0.4, 0.4, 0.4, 0.6, 1\}$$

解答

$$B_a' = A' \circ R_a = \{1,0.4,0.2,0,0\} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \{0.4,0.4,0.4,0.6,1\}$$

说明：一般来说$B_m' \neq B_a'$，此处属于巧合

4. 模糊决策

□ “模糊决策”(“模糊判决”、“解模糊”或“清晰化”)：由模糊推理得到的结论或者操作是一个模糊向量，转化为确定值的过程。

（1）最大隶属度法

- 例如，得到模糊向量：

$$U' = 0.5/-3 + 0.5/-2 + 0.5/-1 + 0.0/0 + 0.0/1 + 0.0/2 + 0.0/3$$

取结论：

$$U = \frac{-3-2-1}{3} = -2$$

4. 模糊决策

（2）加权平均判决法

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu(u_i) u_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu(u_i)}$$

- 例如 $U' = 0.1/2 + 0.6/3 + 0.5/4 + 0.4/5 + 0.2/6$

则

$$U' = \frac{0.1 \times 2 + 0.6 \times 3 + 0.5 \times 4 + 0.4 \times 5 + 0.2 \times 6}{0.1 + 0.6 + 0.5 + 0.4 + 0.2} = 4$$

4. 模糊决策

（3） 中位数法

- 例如

$$U' = 0.1/-4 + 0.5/-3 + 0.1/-2 + 0.0/-1 + 0.1/0 + 0.2/1 + 0.4/2$$
$$+0.5/3 + 0.1/4$$

$u^* = u_6$时， $\sum_{u_1}^{u_6} \mu(u_i) = \sum_{u_7}^{u_9} \mu(u_i) = 1$

所以中位数$u^* = u_6$， 则$U = 1$

5．模糊推理的应用

例： 设有模糊控制规则（规则可用）：

“如果温度低，则将风门开大”。设温度和风门开度的论域为{1，2，3，4，5}。

“温度低”和“风门大”的模糊量：

“温度低”=1/1+0.6/2+0.3/3+0.0/4+0/5

“风门大”=0/1+0.0/2+0.3/3+0.6/4+1/5

已知事实“温度较低”，可以表示为

“温度较低”=0.8/1+1/2+0.6/3+0.3/4+0/5

试用模糊推理确定风门开度。

解法1：（1）确定模糊关系 ***Rm***

$$R_m(i,j)=(\mu_A(u_i)\wedge\mu_B(v_j))\vee(1-\mu_A(u_i))$$

$$R_m=\begin{bmatrix}0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0\\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.6\\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7\\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0\\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0\end{bmatrix}$$

解:

（2）模糊推理

$$B' = A' \circ R = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.0 \\ 0.6 \\ 0.3 \\ 0.0 \end{bmatrix}^{T} \circ \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.6 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

=(0.6，0.6，0.6，0.6，0.8)

（3）模糊决策

用最大隶属度法进行决策得风门开度为**5**。
用加权平均判决法和中位数法进行决策得风门开度为**3**。

解法2. 使用Ra进行求解

解：（1）确定模糊关系 ***Ra***

$$R_a(i, j) = 1 \wedge (1 - \mu_A(u_i) + \mu_B(v_j))$$

$$R_a = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.7 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

解：

（2）模糊推理

$$B' = A' \circ R = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.0 \\ 0.6 \\ 0.3 \\ 0.0 \end{bmatrix}^T \circ \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.7 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

=(0.6，0.6，0.7，1.0，1.0)

（3）模糊决策

用最大隶属度法进行决策得风门开度为4.5。
用加权平均判决法进行决策得风门开度为3
用中位数法进行决策得风门开度为4。

小结

- 模糊集合建立在论域之上，模糊集合的元素都来自论域。论域必须是经典集合。
- 模糊假言推理建立在传统的假言推理之上，涉及两个方面：前提是否匹配；结论的模糊性如何计算。
- 简单模糊推理的步骤
  - 首先计算模糊集合之间的模糊关系**R**
  - 通过**R**与前提的合成求出结论