华 东 理 工 大 学

复 变 函 数 与 积 分 变 换 作 业 （第 1 册）

第一次作业

教学内容：1.1 复数及其运算　　　1.2 平面点集的一般概念

1．填空题：

（1）$\frac{3}{2},\quad -\frac{5}{2},\quad \frac{3}{2}+\frac{5}{2}i,\quad \frac{\sqrt{34}}{2},\quad 2k\pi-\arctan\frac{5}{3}$

(2) $1,\quad -3,\quad 1+3i,\quad \sqrt{10},\quad 2k\pi-\arctan 3$

（3）$-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$

(4) $x=-1, y=13$ 。

2．将下列复数化成三角表示式和指数表示式。

(1) $1+i\sqrt{3}$；

解：$1+i\sqrt{3}=2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=2e^{\frac{i\pi}{3}}$

(2) $1-\cos\varphi+i\sin\varphi\quad(0\le\varphi\le\pi)$

解：$1-\cos\varphi+i\sin\varphi\quad=2\sin\frac{\varphi}{2}[\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2})]=2\sin\frac{\varphi}{2}e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2})}$

(3) $\frac{(\cos 5\phi+i\sin 5\phi)^2}{(\cos 3\phi-i\sin 3\phi)^3}$.

解：$\dfrac{(\cos 5\phi + i\sin 5\phi)^2}{(\cos 3\phi - i\sin 3\phi)^3} = (e^{i5\phi})^2/(e^{-i3\phi})^3 = \dfrac{e^{i10\phi}}{e^{-i9\phi}} = e^{i19\phi}$

$\cos 19\phi + i\sin 19\phi$

3．求复数 $\dfrac{z-1}{z+1}$ 的实部与虚部

解：$w = \dfrac{z-1}{z+1} = \dfrac{(z-1)(\overline{z+1})}{(z+1)(\overline{z+1})} = \dfrac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2}$

$= \dfrac{(z\bar{z} + z - \bar{z} - 1)}{|z+1|^2} = \dfrac{z\bar{z}-1}{|z+1|^2} + i\dfrac{2\operatorname{Im} z}{|z+1|^2}$

所以，$\operatorname{Re} w = \dfrac{z\bar{z}-1}{|z+1|^2}$，$\operatorname{Im} w = \dfrac{2\operatorname{Im} z}{|z+1|^2}$

4. 求方程 $z^3 + 8 = 0$ 的所有的根.

解：$z = (-8)^{\frac{1}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}(1+2k)}, k = 0,1,2.$

即原方程有如下三个解：

$$1 + i\sqrt{3}, -2, 1 - i\sqrt{3}$$

5. 若 $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ 且 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$，证明：以 z_1, z_2, z_3 为顶点的三角形是正三角形.

证明：记 $|z_1| = a$，则

$$|z_1|^2 = |z_2 + z_3|^2 = 2(|z_2|^2 + |z_3|^2) - |z_2 - z_3|^2$$

得 $|z_2 - z_3|^2 = 3a^2$，同样，

$|z_2 - z_1|^2 = |z_1 - z_2|^2 = 3a^2$

所以 $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_2| = |z_2 - z_1|$.

6. 设 z_1, z_2 是两个复数，试证明.

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

并说明此等式的几何意义.

证明： 左式=$(z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2})$+$(z_1 + z_2)(\overline{z_1 - z_2})$

$$=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_1+z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$$

$$=z_1\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}+z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2+z_1\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}-z_1\cdot\overline{z_2}-\overline{z_1}\cdot z_2$$

$$=2(z_1\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2})=2(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2)$$

几何意义：平行四边形两对角线的平方和等于四条边的平方和。

7．求下列各式的值:

(1) $(\sqrt{3}-i)^5$；

解：$(\sqrt{3}-i)^5=\left[2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})\right]^5=(2e^{\frac{-i\pi}{6}})^5=32e^{-i5\pi/6}$

$$=32\left[\cos(-\frac{5\pi}{6})+i\sin(-\frac{5\pi}{6})\right]=-16\sqrt{3}-16i$$

(2) $(1-i)^{\frac{1}{3}}$；

解：$(1-i)^{\frac{1}{3}}=\left[\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}})\right]^{\frac{1}{3}}=(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{2}e^{i(\frac{-\pi}{4}+2k\pi)/3},k=0,1,2.$

可知 $(1-i)^{\frac{1}{3}}$ 的 3 个值分别是

$$\sqrt[6]{2}e^{\frac{-i\pi}{12}}=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12})；$$

$$\sqrt[6]{2}e^{\frac{i7\pi}{12}}=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})$$

$$\sqrt[6]{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$$

（3）求 $\sqrt[6]{-1}$

解：$\sqrt[6]{-1}=(e^{i(\pi+2k\pi)})^{\frac{1}{6}}=e^{i\pi(1+2k)/6},k-0,1,2,3,4,5.$ 可知 $\sqrt[6]{-1}$ 的 6 个值分别是

$$e^{i\pi/6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2},\quad e^{i\pi/2}=i,\quad ei^{\frac{i5\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$$

$$e^{\frac{i7\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2},\quad e^{\frac{i3\pi}{2}}=-i,\quad e^{\frac{i11\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

(4)

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^{100}+(1\text{-}\mathrm{i})^{100}&=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{100}+\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{100}\\&=2^{50}\left(\cos 25\pi+\mathrm{i}\sin 25\pi\right)+2^{50}\left(\cos 25\pi-\mathrm{i}\sin 25\pi\right)\\&=-2^{51}\end{aligned}$$

8．化简$\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$

解：原式$=(1-i)^2\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n=-2ie^{\frac{n\pi}{2}i}=-2i^{n+1}$

9. 设$\dfrac{\mathrm{x}+\mathrm{iy}}{x-iy}=a+bi$，其中$a,b,x,y$均为实数，证明：

$a^2+b^2=1$

解：先求出a,b的x,y表达式，因为

$$\frac{\mathrm{x}+\mathrm{iy}}{x-iy}=\frac{(\mathrm{x}+\mathrm{iy})^2}{(x-iy)(\mathrm{x}+\mathrm{iy})}=\frac{x^2-y^2+2ixy}{x^2+y^2}=a+bi$$

比较系数得

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=a,\frac{2xy}{x^2+y^2}=b$$

于是$a^2+b^2=(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2})^2+(\dfrac{2xy}{x^2+y^2})^2=1$

10. 设ω是 1 的 n 次根，且$\omega\neq 1$，证明：ω满足方程：

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$$

解：因$\omega^n=1$，即$\omega^n-1=0$故

$$(\omega-1)(1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1})=0$$

由于$\omega\neq 1$，故$(1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1})=0$，即$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$

第二次作业

教学内容：1.2　平面点集的一般概念　　1.3 复变函数

1. 填空题

(1)连接点$1+i$与$-1-4i$的直线断的参数方程为$\underline{z=1+i+(-2-5i)t \quad 0\le t\le 1}$

(2)以原点为中心，焦点在实轴上，长轴为$2a$，短轴为$2b$的椭圆的参数方程为

$\underline{z=a\cos t+ib\sin t \quad 0\le t\le 2\pi}$

2．指出下列各题中点 z 的轨迹，并作图.

(1)$|z-2i|\ge 1$;

中心在$2i$半径为 1 的圆周及其外部。

(2) $\mathrm{Re}(z+2)=-1$.

直线$x=-3$

(3)$|z+3|+|z+1|=4$

以-3 与-1 为焦点，长轴为 4 的椭圆

(4)$\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{4}$

以i为起点的射线$y=x+1$

(5) $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right|\ge 1$

直线$x=\dfrac{5}{2}$及其左半平面

3．指出下列不等式所确定的区域或闭区域，并指出是有界区域还是无界区域，多连通还是单连通的。

(1)$\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|<1$;

解：$|z-a|^2<|1-\bar{a}z|^2$

$$(z-a)(\bar{z}-\bar{a})<(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})$$

$$(|z|^2-1)(1-|a|^2)<0$$

$|a|<1$时，表示单位圆的内部，有界单连通域。

$|a|>1$时，表示单位圆的外部，无界单连通域，$|a|=1$不表示任何区域。

(2) $z\bar{z}-(2+i)z-(2-i)\bar{z}\le 4$

圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ 及其内部区域，有界，单连通区域。

(3) $|z-1|<4|z+1|$

中心在 $z=-\dfrac{17}{15}$，半径为 $\dfrac{8}{15}$ 的圆外部区域，无界，多连通

(4) $\dfrac{\pi}{6}<\arg(z+2i)<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $|z|>2.$

解：$z+2i=x+(y+2)i \Rightarrow \tan\theta=\dfrac{y+2}{x} \Rightarrow \arg(z+2i)=\arctan\dfrac{y+2}{x}$

$$\Rightarrow\begin{cases} x>0, & \dfrac{\pi}{6}<\arctan\dfrac{y+2}{x}<\dfrac{\pi}{2} \\ x<0,y>0, & \dfrac{\pi}{6}<\arctan\dfrac{y+2}{x}+\pi<\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{y+2}{x}>\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x<0,y<0, & \dfrac{\pi}{6}<\arctan\dfrac{y+2}{x}-\pi<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

且有$|z|=\sqrt{x^2+y^2}>2 \Rightarrow x^2+y^2>4$ 以$-2i$为顶点，两边分别与正实轴成角度$\dfrac{\pi}{6}$与$\dfrac{\pi}{2}$的角形域内部，且以原点为圆心，半径为2的圆外部分，无界单连通区域。

4．设 t 是实参数，指出下列曲线表示什么图形

(1) $z=t+\dfrac{i}{t}$;

$$z=x+iy=t+\frac{i}{t} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{1}{t}, \text{即为双曲线} xy=1; \end{cases}$$

(2) $z=ae^{it}+be^{-it}$。

$\dfrac{x^2}{(a+b)^2}+\dfrac{y^2}{(a-b)^2}=1$，为椭圆。

5．已知函 数 $w=\dfrac{1}{z}$ ，求以下曲线的像曲线.

(1) $x^2+y^2=4$;

解：$w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+iy}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{y}{x^2+y^2}, u=\dfrac{x}{x^2+y^2}, v=\dfrac{-y}{x^2+y^2},$

$$u^2+v^2=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{1}{4}$$，是 w 平面上一圆周。

(2) $x=1$；

解：由 $x=1$, 知 $u=\frac{1}{1+y^2}, v=\frac{-y}{1+y^2}$, 从而 $u^2+v^2=\frac{1}{1+y^2}=u$

此为 $(u-\frac{1}{2})^2+v^2=(\frac{1}{2})^2$，是平面上一圆周。

（3） $y=x$；

$w=\frac{1}{x(1+i)}=\frac{1-i}{2x}$，则，$u=\frac{1}{2x}, v=-\frac{1}{2x}$，像曲线为 $u=-v$。

6. 讨论下列函数的连续性：

（1） $w=|z|$

解：设 z_0 为复平面上任一点，因为 $\lim\limits_{z\to z_0}|z|=|z_0|$

函数 $w=|z|$ 在平面上处处连续。

（2） $f(z)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, z\neq 0\\ 0, \quad z=0\end{cases}$

解：当 z 沿实轴趋向于零时，$z=x$，有

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{x\to 0}x=0$$

当 z 沿某一直线趋向于零时

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\neq 0$$

故 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不连续。

7. 下列函数在何处可导？求出其导数。

（1） $(z-1)^n$

解：对任意的 z，有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{z^n-z_0{}^n}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}(z^{n-1}+z_0z^{n-2}+\cdots+z_0{}^{n-1})=nz_0{}^{n-1}$$

即由复合函数求导法则，得

$$\left[\ (z-1)^n\ \right]' = n(z-1)^{n-1}$$

（2）$\bar{z}z^2$

解；由于 z^2 在全平面处处可导，$\bar{z}$ 在全平面处处不可导，故 $\bar{z}z^2$ 在 $z \neq 0$ 处处不可导。

在 $z=0$，由定义可得

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}z^2 - 0}{z} = \lim_{z\to 0} z\bar{z} = 0$$

知 $\bar{z}z^2$ 除在 $z=0$ 可导外，在复平面上不可导。