华东理工大学 2020–2021 学年第二学期

《高等数学(下)》(11 学分) 课程期末考试试卷 (B) 2021.7

开课学院：理学院，　　专业：大面积，　　考试形式：闭卷，　　所需时间 120 分钟

考生姓名：__________学号：_____________ 班级 ______________ 任课教师 _________

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									
评卷人									

一、解下列各题（每小题 6 分，共 12 分）：

1、假设二阶可导函数 $f(x)$ 满足如下条件，$x=0$ 为 $f(x)$ 的驻点，$f(0)=1$ 且

$f''(x)+4f(x)=0$，求 $f(x)$.

2. 求方程 $yy''+\left(y'\right)^2=0$ 的通解.

二、解下列各题（每小题 6 分，共 18 分）：

1. 求函数 $z = 2x^2 - 3xy + 2y^2 + 4x - 3y + 1$ 的极值.

2. 求曲面 $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ 在点 $P = (1, 2\sqrt{2}, -1)$ 处的法线在 yOz 平面上投影方程.

3. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域及和函数。

三、填空题（每小题 4 分，共 32 分）：

1、微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解是 $y =$ ________

2、 设函数 $u(x,y,z) = xyz$，单位向量 $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$，则 $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{(1,1,1)} =$ ____.

3、由方程 $x + \ln(xy - 2z) = \frac{1}{y^2} - z$ 所确定的隐函数 $z = z(x,y)$ 在 $(x,y,z) = (1,1,0)$ 点的全微分 $dz =$ ________________ .

4、平面通过 z 轴,且过点 $(2,1,-1)$，则其方程为________________.

5、级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的敛散性是________________.（填收敛或者发散）

6、已知曲线 $L: y = x^2\left(0 \le x \le \sqrt{2}\right)$，则 $\int_L x\mathrm{d}s =$________

7、设 $\Sigma = \{(x,y,z) \mid x + y + z = 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 \mathrm{d}S =$________.

8、设 $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$，$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x \mathrm{d}x\ (n = 1,2,\cdots)$. 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$，则 $S(-\frac{9}{4}) =$________.

四、解下列各题（每小题 6 分，共 12 分）：

1、计算$\iint\limits_{D}|xy|\,dxdy$，其中$D$为$|x|+|y|\le 1$.

2、 $\iint\limits_{D}\frac{e^{\arctan\frac{y}{x}}}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$，其中$D=\{(x,y)\big|\ 1\le x^2+y^2\le 4, x\le y\le\sqrt{3}x\}$.

五、(本题 6 分)

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\sum$ 为曲面

$z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}\left(0\le z\le 1\right)$ 的上侧.

六、(本题 8 分) 半径为 R 的实心球体，质量为 M，其边界面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

（1）若球体的密度为常数，计算其绕 z 轴的转动惯量；

（2）若球体的密度 $\mu(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$（其中 k 为未知常数），计算其绕 z 轴的转动惯量。

七、(本题 6 分)

判断下列命题是否正确，如果正确，请给出证明；否则给出反例，并说明反例的正确性（即说明给出的反例满足命题条件，但不满足结论）。

命题 若二元函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(0,0)$， $f_y(0,0)$ 都存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿着任何方向的方向导数都存在。

八、(本题 6 分) 设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有 $\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$.