Examen blanc - physique moderne

Cet examen blanc est un peu plus long qu'un examen final.

Instructions - 说明

- Durée de l'examen : 2 heures.
  考试时间：2小时。

- L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Les autres outils électroniques (téléphone, tablette, montre connectée etc.) et tous les documents sur papier sont strictement interdits. Il est également interdit d'apporter son propre papier de brouillon.
  可以使用计算器，但不能使用任何其它电子设备（包括手机、平板电脑, 智能手表...）和参考资料，也不能带自己的草稿纸。

- Les exercices sont indépendants. Vous devez traiter tous les exercices, au moins partiellement.
  各个大题是不相关的。请尽量作答所有的大题，至少是其中一部分题目。

- 5 points sur 100 sont attribués en fonction de la qualité de la rédaction. Les copies illisibles, mal présentées ou avec des mots en anglais seront pénalisées. Les mots en chinois ne seront pas lus.
  总分100分，其中5分根据书写质量评分。字迹难以辨认、格式混乱或含有英文单词的试卷将被扣分，中文内容将不被阅读。

- Même si vous n'arrivez pas à obtenir la réponse finale, toute réflexion et calcul pertinent sera valorisé en points.
  即使您没有得出最终答案，任何相关的思考过程和计算都会获得分数。

- En fin de sujet se trouve un formulaire de mathématiques et de physique.
  考试题目末尾附有一份数学与物理公式表。

Qualité de la rédaction (5 points)

5 points sur 100 jugent la qualité de la rédaction.

- L'écriture sera lisible et la présentation sera soignée. 书写需清晰，版面需整洁。
- Les réponses seront rédigées en français. Les mots en anglais sont possibles, mais pénalisés. Les mots en chinois ne seront pas lus. 答案需用法语书写，允许使用英文单词，但会扣分；中文内容将不被阅读。
- Les résultats seront mis en valeur (encadrés, soulignés ou surlignés). 结果需突出显示（用框框标出、下划线或高亮标记）。

Exercice 1 - Questions de cours (40 points)

1. Dans l'ensemble microcanonique, quelle est la probabilité p_i d'un micro-état i?
2. Dans l'ensemble canonique, comment s'exprime la fonction de partition Z, pour des niveaux d'énergie discrets E_i, de dégénérescence $W(E_i)$?
3. Dans l'ensemble canonique, en notant $\beta = 1/k_B T$, calculer la quantité $\partial \ln Z/\partial\beta$ puis montrer qu'elle est reliée à la moyenne de l'énergie par
$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}. \tag{1}$$
4. Comment s'exprime, à une constante de proportionnalité près, la distribution des vitesses vectorielles de Maxwell $g(\vec{v})$, en fonction de la température T et de la masse des particules m?
5. Pour un gaz parfait diatomique, tracer l'allure de l'évolution de la capacité thermique molaire $C_{V,m}(T)$ en fonction de la température T, en justifiant.
6. Exprimer la différentielle du grand potentiel dJ en utilisant $J = E - TS - \mu N$ et la différentielle de l'énergie $\mathrm{d}E = T\ \mathrm{d}S - P\ \mathrm{d}V + \mu \mathrm{d}N$.
7. Donner deux exemples de particules qui sont des fermions.
8. Quelle est l'allure de la distribution de Fermi-Dirac à température nulle 0 K et à température finie $T > 0$ K?
9. Dans l'effet Doppler, quels sont les signes des décalages $\Delta f = f' - f$ et $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ dans le cas où l'émetteur s'éloigne du récepteur?
10. On mesure la longueur d'onde d'une raie d'absorption $\lambda'_K = 396,20$ nm dans le spectre d'une galaxie lointaine. En comparant avec la longueur d'onde au repos $\lambda_K = 393,37$ nm, dire si la galaxie s'éloigne ou si elle se rapproche et estimer sa vitesse v_E.

Exercice 2 - Système de fermions à deux niveaux (40 points)

On considère un système ouvert Σ composés d'électrons, à l'équilibre avec un thermostat à température T et un réservoir d'électrons de potentiel chimique μ.

On suppose que ce système Σ possède deux niveaux d'énergie non dégénérés $\epsilon_1 = \varepsilon$ et $\epsilon_2 = 2\varepsilon$, qui peuvent contenir des électrons. On note $\beta = 1/k_B T$.

1. Pour étudier le système Σ, dans quel ensemble statistique se place-t-on?
2. Le système Σ est-il un système de fermions ou un système de bosons?
3. Montrer que la fonction de partition du système Σ est
$$Z_G = \left(1 + e^{-\beta\varepsilon + \beta\mu}\right)\left(1 + e^{-2\beta\varepsilon + \beta\mu}\right) \tag{2}$$

Pour les questions suivantes, on pourra utiliser le formulaire en fin d'énoncé (题目末尾的公式表).

4. Donner l'expression du grand potentiel J du système Σ.
5. Déduire l'expression de l'entropie S.

6. Exprimer l'énergie moyenne $\langle E\rangle$ en fonction de ε, β et μ.

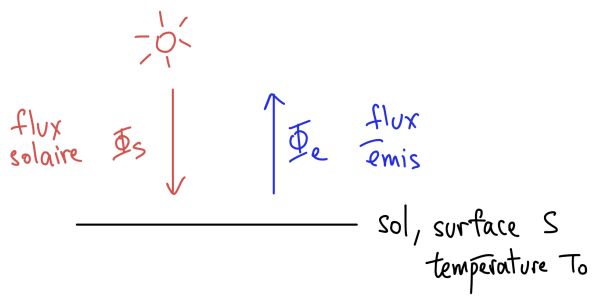
7. Exprimer le nombre moyen d'électrons $\langle N\rangle$ dans le système Σ en fonction de ε, β et μ.

8. Calculer la limite à haute température $\lim\limits_{T\to+\infty} \langle N\rangle$ et commenter le résultat.

9. Calculer la limite à basse température $\lim\limits_{T\to 0} \langle N\rangle$, en distinguant les cas selon les valeurs de ϵ et μ. Commenter le résultat.

Exercice 3 - Effet de serre d'une vitre idéale (15 points)

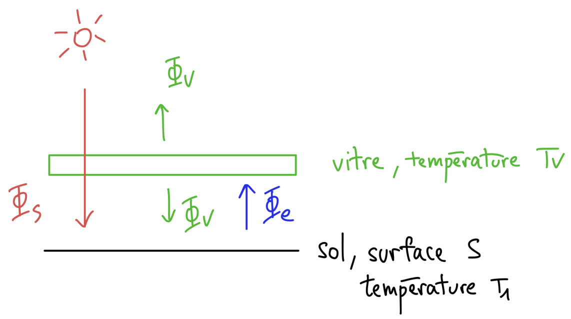
Le sol est assimilable à un corps noir émettant un rayonnement thermique de flux surfacique $\Phi_e = \sigma T_0^4$, avec la constante de Stefan $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m/^2K^4}$. Il reçoit le rayonnement solaire, de flux surfacique Φ_S (voir figure ci-dessous).



1. À l'équilibre thermique, exprimer la température d'équilibre du sol T_0 en fonction de Φ_S et de σ.

2. Calculer la valeur numérique de T_0 avec $\Phi_S = 1$ kW.m^{-2} et la commenter.

On place maintenant une vitre (玻璃) au-dessus de la surface du sol, qu'on modélise comme un corps noir de température T_V. La vitre est supposée totalement transparente (透明) au rayonnement solaire (situé principalement dans le domaine visible et dans le proche infrarouge) et totalement absorbante (吸收的) au rayonnement émis par le sol (situé dans l'infrarouge lointain). Les différents flux sont représentés dans la figure ci-dessous.



3. En présence de la vitre, en effectuant deux bilans énergétiques, écrire deux équations qui permettent de trouver T_V et la température du sol T_1.

4. Résoudre ces deux équations pour calculer la température T_1 du sol et commenter le résultat en comparant T_1 à T_0.

Formulaire mathématique

- Formule de Stirling : $\ln N! \sim N \ln N - N$, $N \gg 1$.

Ensemble canonique, ensemble grand canonique

Ensemble statistique	Ensemble canonique	Ensemble grand canonique
Potentiel thermodynamique	$F = -k_B T \ln Z$	$J = -k_B T \ln Z_G$
Transformée de Legendre	$F = \langle E \rangle - TS$	$J = \langle E \rangle - TS - \mu \langle N \rangle$ $J = -pV$
Valeurs moyennes	$\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$	$\langle N \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z_G}{\partial \mu}$ $\langle E \rangle = \left(-\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \ln Z_G$
Moments quadratiques	$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}$	$\langle N^2 \rangle = \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{Z_G} \frac{\partial^2 Z_G}{\partial \mu^2}$ $\langle E^2 \rangle = \frac{1}{Z_G} \left[-\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \right]^2 Z_G$
Entropie	$S = \frac{\langle E \rangle - F}{T}$	$S = \frac{\langle E \rangle}{T} - \frac{\mu \langle N \rangle}{T} - \frac{J}{T}$
Pression	$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N}$	$p = -\frac{J}{V} = -\left(\frac{\partial J}{\partial V} \right)_{T,\mu}$

Rayonnement d'équilibre thermique, rayonnement du corps noir

La fonction de partition d'un gaz de photons à une température T et dans un volume V s'exprime

$$Z_G = -\frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \ln \left(1 - e^{-\beta \hbar \omega} \right) \tag{3}$$

avec $\beta = 1/k_B T$.

L'irradiance spectrale de Planck est, en longueur d'onde λ,

$$u_\lambda(\lambda, T) = \left(\frac{8\pi hc}{\lambda^5} \right) \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}. \tag{4}$$

En pulsation ω, le spectre de Planck s'écrit

$$u_\omega(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1} \tag{5}$$

Statistiques quantiques

Pour des fermions, la distribution de Fermi-Dirac s'exprime

$$n_{FD}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}} + 1}. \tag{6}$$

Pour des bosons, la distribution de Bose-Einstein s'exprime

$$n_{BE}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}} - 1}. \tag{7}$$

Effet Doppler classique

Pour l'effet Doppler classique ($v_R, v_E \ll 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$), la fréquence reçue f' en fonction de la fréquence émise f s'exprime

$$f' = f\frac{1 - \dfrac{\vec{v}_R \cdot \vec{u}_{ER}}{c}}{1 - \dfrac{\vec{v}_E \cdot \vec{u}_{ER}}{c}} \tag{8}$$

où $\vec{v}_E$, $\vec{v}_R$ sont respectivement la vitesse de l'émetteur E et du récepteur R et $\vec{u}_{ER} = \overrightarrow{ER}/ER$ est le vecteur unitaire dirigé de E vers R.