第 14 章 （之 1） （总第 79 次）

教学内容： § 14.1 引言， § 14.2 周期函数的傅立叶级数展开（周期为 2π）

**1．已知以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 的傅里叶系数为 a_n, b_n，并设 $g(x)=-f(-x)$，则函数 $g(x)$ 的傅里叶系数 α_n，β_n 必满足关系式 （ ）

(A) $\alpha_n=a_n$，$\beta_n=b_n$； (B) $\alpha_n=-a_n$，$\beta_n=-b_n$；

(C) $\alpha_n=a_n$，$\beta_n=-b_n$； (D) $\alpha_n=-a_n$，$\beta_n=b_n$.

答案 （D）.

解 因为 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，所以 $g(x)=-f(-x)$

$$=-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(-nx)+b_n\sin(-nx)]=-\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

可知正确的选项为（D）.

**2．设函数 $f(x)$ 的周期为 2π，在区间 $[-\pi,\pi]$ 上表达式为 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ \sin 2x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

则其傅立叶级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 中的系数 $b_n=$ ______________ .

答案 $b_2=\dfrac{1}{2}$，$b_n=0(n\ne 2)$.

解 $b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin 2x\sin nx\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n-2)x-\cos(n+2)x]\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-2)x}{n-2}-\frac{\sin(n+2)x}{n+2}\right]_0^{\pi}=0,\quad n\ne 2,$$

$$b_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 4x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

注 本来傅立叶系数有统一的公式，不用一个一个系数分别计算，但这里在使用统一公式计算 b_n 时，遇到了分母为 $n-2$ 的情况，所以 b_2 必须得另行计算.

**3. $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，根据它在一个周期 $(0,2\pi]$ 上的定义式

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le\pi,\\ 0, & \pi<x\le 2\pi,\end{cases}$$

将它展开成 Fourier 级数.

解 由 Fourier 级数系数的计算公式，可得

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}\,x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\,x=1$，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}\,x=0$，

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}\,x=-\frac{\cos nx}{n\pi}\bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots,\\ \dfrac{2}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots,\end{cases}$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}+\cdots\right),$$

$$x\in R,\text{且}x\ne k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

**4. $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，根据它在一个周期 $[-\pi,\pi]$ 上的定义式

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ \sin x, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$$

将它展开成 Fourier 级数.

解：由 Fourier 级数系数的计算公式，$a_1=0$ ，当 $n=0,2,3,4,5,\cdots$ 时，有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]\mathrm{d}\,x\overset{n\ne1}{=\!=}\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(n-1)x}{n-1}-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n-1}-1}{\pi(n^2-1)}\ ,$$

所以，$a_{2n-1}=0$，$a_{2n}=\dfrac{-2}{\pi(4n^2-1)}$.

又 $$b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin x\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin nx\,\mathrm{d}\,x=0,\quad n=2,3,\cdots$$

由 $f(x)$ 满足 Fourier 级数收敛于 $f(x)$ 的条件，故对 $x\in\mathrm{R}$，

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{\sin x}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$$

***5．已知以2π为周期的函数 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$的表达式是 $f(x)=\cos ax$，试将$f(x)$展开成傅里叶级数[必须分两种情况来进行讨论：（1）a是整数；（2）a不是整数].

解：（1）若a是整数，则其傅里叶级数就是$f(x)=\cos|a|x \qquad (-\pi\le x\le\pi)$.

（2）若a不是整数，则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos axdx=\frac{1}{a\pi}\sin ax\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\sin a\pi}{a\pi},$$

$n\neq 0$时， $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ax\cos nxdx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(a+n)x+\cos(a-n)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(a+n)x}{a+n}+\frac{\sin(a-n)x}{a-n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}2a\sin a\pi}{(n^2-a^2)\pi},$$

$$\boldsymbol{b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ax\sin nxdx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin(n+a)x+\sin(n-a)x\right]dx=0,}$$

$$\boldsymbol{\therefore f(x)=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2a\sin a\pi}{(n^2-a^2)\pi}\cos nx,}$$

$$\boldsymbol{\therefore f(x)=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2a\sin a\pi}{(n^2-a^2)\pi}\cos nx, x\in(-\infty,+\infty).}$$

**6．试将周期为2π的函数$f(x)$展开成傅里叶级数，$f(x)$在$\boldsymbol{[0,2\pi)}$上的表达式是$f(x)=x-\pi$.

解：$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)dx\xlongequal{x-\pi=u}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}udu=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nxdx-\int_0^{2\pi}\cos nxdx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nxdx-\int_0^{2\pi}\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nxdx=-\frac{1}{n\pi}\left[x\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos nxdx\right]=-\frac{2}{n}$$

$$\boldsymbol{\therefore f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}\sin nx,\quad x\neq 2k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots)}$$

**7．试将周期为2π的函数$f(x)$展开成傅里叶级数，$f(x)$在$(0,2\pi]$上的表达式是：

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{3\pi}{2}, \\ 2\pi-x, & \dfrac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi. \end{cases}$$

解：$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\pi}{2}dx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}(2\pi-x)dx\right]=\frac{3}{4}\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\pi}{2}\cos nxdx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}(2\pi-x)\cos nxdx\right]$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}(\cos\frac{n}{2}\pi+\cos\frac{3n}{2}\pi-2)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\pi}{2}\sin nxdx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}(2\pi-x)\sin nxdx\right]=0$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{3}{8}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi}\left(\cos\frac{n}{2}\pi+\cos\frac{3}{2}n\pi-2\right)\cos nx,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

第 14 章 （之 2） （总第 80 次）

教学内容：14.2.3 周期 2L 的函数；14.3 有限区间上函数的傅立叶级数展开

**1． 下列各选项中的函数$f(x)$都是定义在区间$(0,2\pi)$上函数，则以下说法正确的是：（ ）

（A）函数$f(x)=2\pi x$的2π为周期的傅立叶级数一定是一个正弦级数；

（B）函数$f(x)=x^2$的2π为周期的傅立叶级数一定是一个余弦级数；

（C）函数$f(x)=2\pi x-x^2$的2π为周期的傅立叶级数，既不是正弦级数，也不是余弦级数；

（D）函数 $f(x)=\pi-x$ 的 2π 为周期的傅立叶级数一定是一个正弦级数.

答案 （D）

解 只要分别作出各给定函数 $f(x)$ 的周期延拓，研究所得到新函数 $f^*(x)$，容易看出：

（A）中的 $f^*(x)$ 不是奇函数；（B）中的 $f^*(x)$ 不是偶函数；

（C）中的 $f^*(x)$ 是偶函数；（D）中的 $f^*(x)$ 是奇函数.

**2．利用函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\,(-\pi<x<\pi)$ 的傅立叶级数

$$\frac{\sinh\pi}{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx-n\sin nx)\right],$$

可得常数项级数的求和公式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=$ _________.（注函数记号 $\sinh x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$）

答案 $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\tanh\pi}-1\right)$.

解 记
$$S(x)=\frac{\sinh\pi}{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx-n\sin nx)\right],$$

在上式中取 $x=\pi$，得 $S(\pi)=\frac{\sinh\pi}{\pi}\left[1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}\right]$，另一方面，根据狄利克莱定理有

$$S(\pi)=\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\pi}+\mathrm{e}^{\pi})=\cosh\pi,$$

所以
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\tanh\pi}-1\right).$$

***3．设 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le-\frac{\pi}{2}\\ x-\frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2}<x<0\end{cases}$，已知 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 2π 为周期的正弦级数展开式的和函数，则 $S\left(\frac{9\pi}{4}\right)=$______ .

答：$\frac{3\pi}{4}$． $\left[S\left(\frac{9\pi}{4}\right)=S\left(\frac{9\pi}{4}-2\pi\right)=S\left(\frac{\pi}{4}\right)=-S\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

**4．设 $f\left(x\right)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ x-1, & 1\le x<2\end{cases}$ 又设 $S\left(x\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的以 4 为周期的正弦级数展开式的和函数，则 $S\left(7\right)=$______________.

答： $S\left(7\right)=-\dfrac{1}{2}$，$\left(S\left(7\right)=S(7-8)=S\left(-1\right)=-S\left(1\right)=-\dfrac{1}{2}\left[f\left(1-0\right)+f\left(1+0\right)\right]\right)$.

**5． 将函数 $f(x)=a+bx$（$0<x<P$）（为周期函数在一周期长区间上的表达式）展开成傅里叶级数．

解：（1） $x\in(0,p),\quad T=p,\quad l=\dfrac{p}{2}$，

$$a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx=2a+bp$$

$n=1,2,\cdots$

$$a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{2n\pi}{p}xdx=\frac{2}{p}\int_0^p(a+bx)\cos\frac{2n\pi}{p}xdx=0$$

$$b_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{2n\pi}{p}xdx=\frac{2}{p}\int_0^p(a+bx)\sin\frac{2n\pi}{p}xdx=-\frac{bp}{n\pi}$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{2a+bp}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{bp}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{p}x,\quad (-\infty<x<\infty,\quad x\neq 0,\pm p,\pm 2p,\cdots).$$

**6． 将函数 $f(x)=\sin x$，（$0\le x\le\pi$）（周期函数在一周期长区间上的表达式）展开成傅里叶级数．

解 ：$a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin xdx=\dfrac{4}{\pi}$，

$n=1,2,\cdots,$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos\frac{2n\pi}{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos 2nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x\right]dx=\frac{-4}{\pi(4n^2-1)},$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin 2nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos(2n-1)x-\cos(2n+1)x\right]dx=0.$$

$\therefore \quad f(x)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(4n^2-1)}\cos 2nx$, $\qquad (-\infty<x<\infty)$.

**7. 将函数 $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le h,\\ 0 & h<x\le \pi,\end{cases}$ $\qquad (h>0)$；分别展开成（1）余弦级数；（2）正弦级数.

解：（1） $\qquad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^h dx+\int_h^{\pi}0dx\right]=\frac{2h}{\pi}$,

$n=1,2,\cdots$时， $\qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^h\cos nxdx=\frac{2}{n\pi}\sin nh,$

所以余弦级数为 $\quad f(x)=\frac{h}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin nh\cdot\cos nx, x\in[0,h)\cup(h,\pi].$

（2） $\qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^h\sin nxdx=\frac{2}{n\pi}(1-\cos nh),$

所以正弦函数为 $\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(1-\cos nh)\sin nx,\quad x\in(0,h)\cup(h,\pi]$.

**8．将函数 $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le \frac{\pi}{2},\\ \pi-x & \frac{\pi}{2}\le x<\pi.\end{cases}$ 分别展开成（1）余弦级数；（2）正弦级数.

解：（1）$n=0$ 时，$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)dx\right]=\frac{\pi}{2}$,

$n\ne 0$时，$a_n=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\cos nxdx\right]\quad=\frac{2}{n^2\pi}(2\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi-1)$,

所以余弦级数为 $f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}(2\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi-1)\cos nx, x\in[0,\pi],$

（2）$b_n=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin nxdx\right]=\frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$,

所以正弦级数为 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\sin nx,\quad x\in[0,\pi].$

***9．将函数展开为正弦级数： $f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)$， $x\in[0,\pi]$．

解：构造奇函数 $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\pi-x), x\in(0,\pi]\\ \frac{1}{2}(-\pi-x), x\in[-\pi,0)\end{cases}$ ，间断点 $x=0$，

$a_n=0,\qquad (n=0,1,2,\cdots)$，

$n=1,2,\cdots$，

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)\sin nx dx=\frac{1}{n},$$

$$\therefore\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\quad x\in(0,\pi].$$

***10．将下列函数展开为余弦级数：$f(x)=x-1$， $x\in[0,2]$，并求出常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和．

解：构造偶函数 $g(x)=\begin{cases}x-1, x\in[0,2]\\ -x-1, x\in(-2,0)\end{cases}$，

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}g(x)dx=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)dx=0,$$

$n=1,2,\cdots$，

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}g(x)\cos\frac{n\pi}{2}xdx=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi}{2}xdx=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1],$$

$$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)}{2}\pi x,\quad x\in[0,2],$$

当$x=2,\quad f(2)=2-1=1,$

$$f(2)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}(-1)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\qquad\therefore\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad\therefore\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2},$$

即 $(1-\frac{1}{4})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$，$\quad\therefore\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{4}{3}=\frac{\pi^2}{6}$.