

# 华东理工大学 2023-2024 学年第一学期

## 《数学分析（上）》课程期末考试试卷 A 2024.1

开课学院： 数学学院    专业： 数、信计    考试形式： 闭卷    所需时间： 120 分钟  
姓 名：                         学号：                         班级：                         任课教师： 靳勇飞

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
评卷人										

注意事项：

1. 考试过程中不可以使用计算器，也不可以使用任何其他机械或电子辅助计算工具。
2. 在试卷中， $\mathbb{N}$  表示非负整数集合； $\mathbb{N}^+$  表示正整数集合； $\mathbb{R}$  表示实数集合。作为区间端点的符号  $a, b$  满足  $a < b$ 。
3. 使用任何没有在课本或者课堂上证明过的结论前，都必须先证明该结论。
4. 所有题目的解答都需写出主要步骤。

————— 以下为试卷内容 —————

一、 (每小题 5 分，共 10 分) 叙述下列定理并解释其几何意义。

1. 连续函数的零点存在定理

2. 罗尔 (Rolle) (中值) 定理

二、 (每小题 5 分，共 15 分) 计算。

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{[\sqrt{n+1}]}$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln(1+x)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x} \cos x}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x} \sin x}$$

三、 (每小题 5 分, 共 10 分) 计算。

$$1. \int \frac{(x - \frac{1}{x})^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$2. \int \frac{1}{1 - x^4} dx$$

四、 (本题 10 分) 求  $x \cos x - \sin 2x$  的带皮亚诺 (Peano) 余项的  $n$  次 Maclaurin 公式。

五、 (本题 10 分) 已知  $\begin{cases} x = \sqrt{u} \\ y = u \ln u \end{cases}$ , 求  $y$  关于  $x$  的二阶微分。

六、 (本题 10 分) 对自然数  $n \in \mathbb{N}^+$ , 若函数  $y = f(x), y = g(x)$  使得对任意的  $k \in \mathbb{N}$ , 当  $0 \leq k \leq n$  时,  $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$ , 就称函数  $f, g$  在  $x_0$  处至少  $n$  阶相切。求实数  $a, b$  以及实数  $r > 0$ , 使得  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  与  $y = x^2$  在  $x = 0$  处至少 2 阶相切。

七、(本题 15 分)  $\alpha$  是整数,  $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x}, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时} \end{cases}$ . 则

1. 当且仅当  $\alpha$  取何值时  $f$  在  $x = 0$  连续?
2. 当且仅当  $\alpha$  取何值时  $f$  在  $x = 0$  可微?
3. 当且仅当  $\alpha$  取何值时导函数  $f'$  在  $x = 0$  连续?

证明你的结论。

八、(本题 10 分)

1. 证明:  $\sin \sqrt{x}$  在区间  $[0, +\infty)$  上一致连续。
2. 证明: 如果  $f$  在区间  $[0, +\infty)$  上一致连续, 则  $\sin \circ f$  在区间  $[0, +\infty)$  上一致连续。

九、 (本题 10 分)  $x_1 = \sqrt{2}$ , 对任意的  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $x_{n+1} = (\sqrt{2})^{x_n}$ . 证明: 数列  $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$  收敛, 并求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .

(本题 8 分, 选做) 函数  $f$  在区间  $I$  上连续, 在区间  $I$  内可导, 证明:  $f$  在  $I$  上是上凸的当且仅当对  $I$  内任意的  $x_0$ , 对任意的  $x \in I$ ,  $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .