内容提要

1. 集合
2. 关系
3. 关系性质与闭包
4. 等价关系
5. 偏序关系
6. 函数
7. 集合基数

1、集合

概念：

集合，外延性原理，$\in$，$\subseteq$ ，$\subset$，空集，全集，幂集

文氏图，交，并，差，补，对称差

集合 一些可以明确区分的对象的整体, 对象的次序无关紧要. 对象称为**元素**.

- 约定: 用大写字母表示集合. 例:A ; 用小写字母表示元素. 例:a

  属于: $a \in A$ 不属于: $a \notin A$

- 集合表示:

  列举法 eg. A= { a,b,c }

  叙述法 eg. A={ x|x=a或x=b或x=c }

- **集合相等 (外延性原理)**: 两个集合相等,当且仅当它们有相同的元素. 例:

  $\{ 1,2 \} = \{ 2,1 \}$

  $\{ 1,2,2 \} = \{ 1,2 \}$

集合与集合之间的关系：$\subseteq$, $=$, $\nsubseteq$, $\neq$, $\subset$, $\not\subset$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$$

空集 $\varnothing$　不含有任何元素的集合

实例：$\{ x \mid x \in R \wedge x^2+1=0 \}$

定理：空集是任何集合的子集。

推论：$\varnothing$是惟一的。

全集 E　包含了所有元素的集合

注：全集具有相对性：与问题有关，不存在绝对的全集

幂集 $P(A)=\{ x \mid x \subseteq A \}$

例: (1) 令 A= {1,2 }, 则 P(A)={∅,{1},{2},{1,2}}

(2) 计算 P(∅), P(P(∅)), P(P(P(∅))).

定理：如果 $|A|=n$，则 $|P(A)|=2^n$.

集合的基本运算

并 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

交 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

差（相对补） $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

对称差 $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

补（绝对补） $\sim A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$

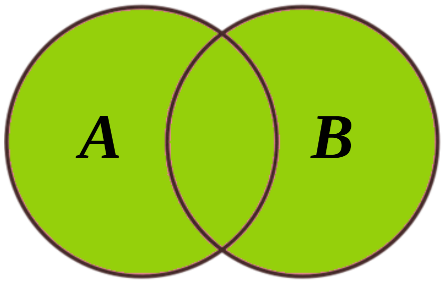
注：并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{ x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n \}$$

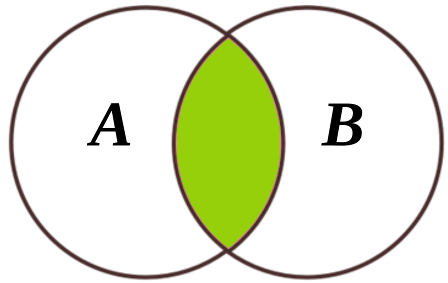
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{ x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n \}$$

文氏图 (Venn Diagram):将全集E看成二维的全平面上所有的点构成的集合.而E的子集表示成平面上由封闭曲线围成的点集.

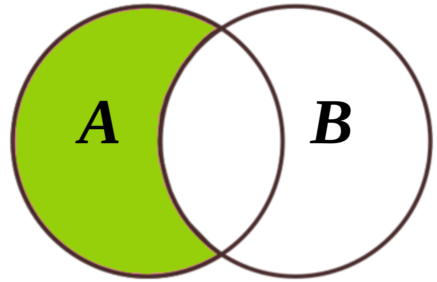
集合运算的表示



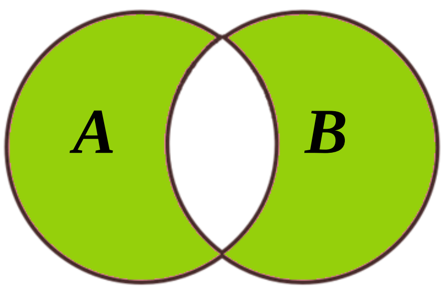
$A \cup B$



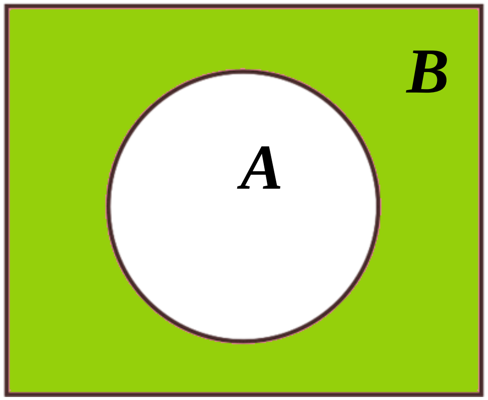
$A \cap B$



$A - B$



$A \oplus B$



$\sim A$

广义运算

广义并 $\cup A = \{ x \mid \exists z\,(z\in A \wedge x\in z)\}$

广义交 $\cap A= \{ x \mid \forall z\,(z\in A \rightarrow x\in z)\}$

例: $\cup\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1,2,3\}$

$\cap\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1\}$

$\cup\{\{a\}\}=\{a\}$, $\cap\{\{a\}\}=\{a\}$

$\cup\{a\}=a$, $\cap\{a\}=a$

集合恒等式

集合算律

1. 只涉及一个运算的算律：

交换律、结合律、幂等律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C$ $=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C$ $=A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

集合算律

2．涉及两个不同运算的算律：

分配律、吸收律

	∪与∩	∩与⊕
分配	$A\cup(B\cap C)=$ $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=$ $(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)$ $=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

集合算律

3．涉及补运算的算律：

DM律，双重否定律

	$-$	$\sim$
***D.M*律**	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

集合算律

4. 涉及全集和空集的算律：

补元律、零律、同一律、否定律

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$