第 5 章 （之 2）
第 25 次作业

教学内容： §5.3 微积分基本定理

1．选择题

**（1） $\dfrac{d}{dx}\int_a^b \arctan x\,dx =$ （ ）

$(A).\arctan x$； $(B).\dfrac{1}{1+x^2}$； $(C).\arctan b-\arctan a$； $(D).0$

答：D

**（2） 设$f(x)$为连续函数，且$F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{1nx} f(t)\,dt$，则$F'(x)$等于 （ ）

$(A).\dfrac{1}{x}f(\ln x)+\dfrac{1}{x^2}f(\dfrac{1}{x})$； $(B).\dfrac{1}{x}f(\ln x)+f(\dfrac{1}{x})$；

$(C).\dfrac{1}{x}f(\ln x)-\dfrac{1}{x^2}f(\dfrac{1}{x})$； $(D).\ f(\ln x)-f(\dfrac{1}{x})$.

答：A

**（3） 设 $y=\int_0^x (t-1)^3(t-2)\,dt$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ （ ）

$(A)2$； $(B)-2$； $(C)-5$； $(D)5$.

答：A

***（4）设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2dt$，$g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$，则当 $x\to 0$时，

$f(x)$ 是 $g(x)$ 的 （ ）

(A) 低阶无穷小； (B) 高阶无穷小；

(C) 等价无穷小； (D) 同阶但不等价无穷小．

答：B

***（5）设函数 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，则函数

$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \dfrac{1}{f(t)}dt$ 在 $(a，b)$ 内零点的个数必为 （ ）

$(A)0$； $(B)1$； $(C)2$； (D) 无穷多.

答：B

***（6） 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x (e^{t^2}-1)\,dt}{x^2}，& x\neq 0\\ 0\qquad，& x=0\end{cases}$ 则 $f'(0)=$ （ ）

$(A)1$； $(B)\dfrac{1}{3}$； $(C)\dfrac{2}{3}$； $(D)0$.

答：B

**2. 设已知 $f(x)$ 是个连续函数，而$\alpha(x)$ 及 $\beta(x)$ 均为可微函数，若记 $F(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x)dx$，试证 $F'(x)=f(\beta(x))\cdot\beta'(x)-f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$.

证明：$F(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x)\,dx \;=\int_{x_0}^{\beta(x)} f(x)dx-\int_{x_0}^{\alpha(x)} f(x)dx$，

$\therefore F'(x)=f(\beta(x))\cdot\beta'(x)-f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$.

**3. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，问 $F(2x+1)$ 是什么函数的原函数？

解：由条件 $F'(x)=f(x)$，

$\therefore (F(2x+1))'=F'(2x+1)\cdot 2=2f(2x+1)$，

$\therefore F(2x+1)$ 是 $2f(2x+1)$ 的一个原函数.

*4. 设 $x=\int_0^t \cos(u^2)\,du$， $y=\int_0^t e^{1-u^2}du$，试求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

解：$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\dfrac{\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}}{\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}}=\left.\left(\dfrac{e^{1-t^2}}{\cos t^2}\right)\right|_{t=0}=e$.

**5. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_x^y e^{\frac{1}{2}t^2}dt=1$ 所确定，试求 $y'(x)$ 及 $y''(x)$.

解：为方便，将方程

$\int_x^y e^{\frac{1}{2}t^2}dt=1$ 化为 $\int_0^y e^{\frac{1}{2}t^2}dt-\int_0^x e^{\frac{1}{2}t^2}dt=1$，

两边关于 x 求导数

$e^{\frac{1}{2}y^2}y'(x)-e^{\frac{1}{2}x^2}=0$， $\therefore y'(x)=e^{\frac{x^2-y^2}{2}}$，

$$y''(x)=e^{\frac{x^2-y^2}{2}}(x-y\cdot y'(x))=e^{\frac{x^2-y^2}{2}}(x-y\cdot e^{\frac{x^2-y^2}{2}})=xe^{\frac{x^2-y^2}{2}}-ye^{x^2-y^2}.$$

6．求下列极限：

**（1） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x \sin\dfrac{2\pi}{u}du}{\ln(2x-x^2)}$；

解： 原式＝$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{x}}{\dfrac{2-2x}{2x-x^2}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{x}}{2-2x}$＝$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\dfrac{2\pi}{x}\cdot\dfrac{-2\pi}{x^2}}{-2}=\pi$

***（2） $\lim\limits_{x\to\infty} x\int_0^{\frac{1}{x}}(1+\sin 2t)^{\frac{2}{t}}dt$；

解：$\lim\limits_{x\to\infty} x\int_0^{\frac{1}{x}}(1+\sin 2t)^{\frac{2}{t}}dt=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^{\frac{1}{x}}(1+\sin 2t)^{\frac{2}{t}}dt}{\frac{1}{x}}$ $\quad(\frac{0}{0})$

$$\overset{u=\frac{1}{x}}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\int_0^{u}(1+\sin 2t)^{\frac{2}{t}}dt}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{[1+\sin(2\cdot u)]^{\frac{2}{u}}}{1}$$

$$=\lim_{u\to 0}[(1+\sin 2u)^{\frac{1}{\sin 2u}}]^{\frac{2\sin 2u}{u}}=e^4.$$

***(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\dfrac{\sqrt{4t^2+1}}{\ln(1+e^t)}dt$.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\dfrac{\sqrt{4t^2+1}}{\ln(1+e^t)}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4\xi^2+1}}{\ln(1+e^{\xi})}[(x+1)-x]$ $\quad(\frac{\infty}{\infty})$ ξ介于x和$x+1$之间

$$=\lim_{\xi\to+\infty}\frac{\xi\sqrt{4+\xi^{-2}}}{\ln e^{\xi}(1+e^{-\xi})}.=\lim_{\xi\to+\infty}\frac{\xi\sqrt{4+\xi^{-2}}}{\xi[1+\frac{1}{\xi}\ln(1+e^{-\xi})]}=2$$

7．计算下列定积分：

*（1）$\int_0^1[(\frac{2}{3})^x+(\frac{3}{2})^x]dx;$

解： 原式$=\int_0^1(\frac{2}{3})^x dx+\int_0^1(\frac{3}{2})^x dx=\dfrac{1}{\ln\frac{2}{3}}(\frac{2}{3})^x\Big|_0^1+\dfrac{1}{\ln\frac{3}{2}}(\frac{3}{2})^x\Big|_0^1=\dfrac{5}{6(\ln 3-\ln 2)}.$

**（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$；

解：原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+\sin x)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

**（3）$\int_0^2 f(x)dx,$其中$f(x)=\begin{cases}x^4,当0\le x<1时\\ x^5,当1\le x\le 2时\end{cases}$.

解： 原式$=\int_0^1 x^4dx+\int_1^2 x^5dx=\frac{1}{5}x^5\Big|_0^1+\frac{1}{6}x^6\Big|_1^2=10.7$

***7. 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调增加的连续函数，试证明函数 $F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$ 在 (a,b) 上单调增加.

解： $F'(x)=\dfrac{f(x)\cdot(x-a)-\int_a^x f(t)\,dt}{(x-a)^2}$，

由中值定理可知：$\exists\xi\in[a,x]$，使 $\int_a^x f(t)\,dt=f(\xi)(x-a)$，

$\therefore F'(x)=\dfrac{[f(x)-f(\xi)]}{(x-a)}>0$， $(x>a)$， 因此 $F(x)$ 单调上升.

****8. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，试证明 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证明：待证 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(x+\Delta x)=\varphi(x)$， 即证 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)]=0$，

$\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt$，

由于 $f(x)$ 可积，故 $f(x)$ 有界，可设 $|f(x)|\le M$， $x\in[a,b]$，

$\therefore|\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)|\le M|\Delta x|$， 当 $|\Delta x|\to 0$，

$\therefore\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x))=0$.

[注：当 $x=a$ 或 b，则考虑单侧极限，可类似证明].

***9. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，试证存在 $\xi\in[a,b]$ 使成立 $\int_a^\xi f(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,dt$.

证明：记 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$，则由上题知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

设 $G(x)=F(x)-\frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,dt$，则 $G(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续。

$G(a)=-\frac{1}{2}\int_a^b f(t)dt$， $G(b)=\frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,dt$，

若 $\int_a^b f(t)\,dt=0$，则取 $\xi=a$（或 b）可使结论成立.

若 $\int_a^b f(t)\,dt\ne 0$，则 $G(a)G(b)=-\frac{1}{4}\left[\int_a^b f(t)dt\right]^2<0$，

则由连续函数零值定理知 $\exists\xi\in[a,b]$， 使 $G(\xi)=0$，

即 $F(\xi)=\frac{1}{2}\int_a^b f(t)dt$， $\therefore\int_a^\xi f(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,dt$.

第 6 章 （之 1）

第 26 次作业

教学内容： §6. 1. 1 不定积分的性质　　6. 1. 2 不定积分的换元法 A

求下列不定积分：

**1. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

解：原式$=2\int \sin\sqrt{x}d\sqrt{x}=-2\cos\sqrt{x}+C$.

**2. $\int \frac{(3^x-2^x)^2}{6^x}dx$.

解：原式$=\int \frac{(3^{2x}-2\cdot 3^x\cdot 2^x+2^{2x})}{6^x}dx=\int[(\frac{3}{2})^x-2+(\frac{2}{3})^x]dx=\frac{(\frac{3}{2})^x-(\frac{2}{3})^x}{\ln 3-\ln 2}-2x+C$.

**3. $\int\left(\frac{x}{1+x^8}\right)^7dx$.

解：$\int\left(\frac{x}{1+x^8}\right)^7dx=\int\frac{x^7}{(1+x^8)^7}dx\ =\frac{1}{8}\int\frac{d(x^8+1)}{(1+x^8)^7}$

$=\frac{1}{8}\frac{1}{(-6)}(1+x^8)^{-6}+c=-\frac{(1+x^8)^{-6}}{48}+C$.

**4. $\int\frac{xdx}{10+2x^2+x^4}$.

解：$\int\frac{xdx}{10+2x^2+x^4}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{9+(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{9+(1+x^2)^2}=\frac{1}{6}\int\frac{d(\frac{x^2+1}{3})}{1+(\frac{1+x^2}{3})^2}$

$=\frac{1}{6}\arctan\frac{x^2+1}{3}+C$

**5. $\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx$.

解：　原式$=\int\frac{x+1}{x^2+2x+5}dx+\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5}+\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+\frac{1}{2}\int\frac{d(\frac{x+1}{2})}{1+(\frac{x+1}{2})^2}$

$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C$.

**6. $\int \sec^4 x \, \mathrm{d}\, x$.

解： $\int \sec^4 x dx = \int (\tan^2 x + 1)\sec^2 x dx = \int (\tan^2 x + 1) d \tan x$

$$= \int \tan^2 x d \tan x + \int d \tan x = \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C.$$

**7. $\int \tan^4 x dx$.

解： $\int \tan^4 x dx = \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)\cdot dx = \int \tan^2 x d \tan x - \int (\sec^2 x - 1) dx$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C.$$

**8. $\int (\sec x \tan x)^4 dx$.

解： $\int (\sec x \tan x)^4 dx = \int \sec^4 x \tan^4 x dx = \int \sec^2 x \tan^4 x d \tan x$

$$= \int (\tan^6 x + \tan^4 x) d \tan x = \frac{1}{7}\tan^7 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C.$$

**9. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$.

解： $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int (\csc^2 x - \sec^2 x) dx$

$$= \int \csc^2 x dx - \int \sec^2 x dx = -(\cot x + \tan x) + C.$$

**10. $\int \sin 2x \cos 3x \, \mathrm{d}\, x$.

解：

$$\int \sin 2x \cos 3x \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin x) \, \mathrm{d}\, x = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C.$$

**11. $\int \frac{2\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - 2\cos x + 4}} dx$.

解： $\int \frac{2\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - 2\cos x + 4}} dx = \int \frac{d(\sin x - 2\cos x + 4)}{\sqrt[3]{\sin x - 2\cos x + 4}} = \frac{3}{2}(\sin x - 2\cos x + 4)^{\frac{2}{3}} + C.$

**12. $\int \frac{\cot x}{\ln \sin x} \mathrm{d}\, x$.

解： $\int \frac{\cot x}{\ln \sin x} \mathrm{d}\, x = \int \frac{\mathrm{d}(\ln \sin x)}{\ln \sin x} = \ln|\ln \sin x| + C.$

**13. $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^{3/2}}\mathrm{d}\,x$.

解：$\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^{3/2}}\mathrm{d}\,x = \int \frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{(x\ln x)^{3/2}} = -2(x\ln x)^{-\frac{1}{2}} + C$.

**14. $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\cdot\sin x}dx$.

解：$\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\cdot\sin x}dx = \int \frac{\ln\tan x}{\tan x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}$

$= \int \frac{\ln\tan x}{\tan x}d\tan x = \int \ln\tan x d(\ln\tan x) = \frac{1}{2}(\ln\tan x)^2 + C$.

**15 $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

解：$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{d\left(e^x\right)}{e^{2x}+1} = \arctan\left(e^x\right) + C$.

***16. $\int \sqrt{\frac{e^x \arcsin e^{\frac{x}{2}}}{1-e^x}}dx$.

解：$\int \sqrt{\frac{e^x \arcsin e^{\frac{x}{2}}}{1-e^x}}dx = 2\int \frac{\sqrt{\arcsin e^{\frac{x}{2}}}}{\sqrt{1-e^x}}de^{\frac{x}{2}} = 2\int \sqrt{\arcsin e^{\frac{x}{2}}}\cdot d(\arcsin e^{\frac{x}{2}})$

$= \frac{4}{3}(\arcsin e^{\frac{x}{2}})^{\frac{3}{2}} + C$.

***17. $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$.

解：$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x}$

$= 2\int \arctan\sqrt{x}d\left(\arctan\sqrt{x}\right) = \left(\arctan\sqrt{x}\right)^2 + C\cdot$

***18. $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$.

解：$\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{2}{3}x\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2}} + \frac{1}{8}\int \frac{d\left(9-4x^2\right)}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{\arcsin\frac{2}{3}x}{2} + \frac{\sqrt{9-4x^2}}{4} + C$.

***19. $\int f'(x)\{f'[f(x)+1]+1\}dx$.

解：原式$=\int [f'[f(x)+1]+1]df(x)=\int f'[f(x)+1]df(x)+\int df(x)$

$=\int f'[f(x)+1]d[f(x)+1]+f(x)=f[f(x)+1]+f(x)+C$.

****20. $\int \frac{f(x)f'(x)g(x)-f^2(x)g'(x)}{g^3(x)}dx$.

解：原式=$\frac{1}{2}\int \frac{2f(x)f'(x)g^2(x)-2f^2(x)g(x)g'(x)}{g^4(x)}dx$

$=\frac{1}{2}\int d[\frac{f(x)}{g(x)}]^2=\frac{1}{2}[\frac{f(x)}{g(x)}]^2+C$.

第 6 章 （之 2）

第 27 次作业

教学内容：§6. 1. 2 不定积分的换元法 B

**1. $\int \frac{(\arcsin x)^2-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解：$\int \frac{(\arcsin x)^2-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int (\arcsin x)^2\,\mathrm{d}(\arcsin x)+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\frac{1}{3}(\arcsin x)^3+\sqrt{1-x^2}+C$.

**2. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^2-x^3}}dx$.

解：$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^2-x^3}}dx=\frac{2}{3}\int \frac{d(x^{\frac{3}{2}})}{\sqrt{a^2-(x^{3/2})^2}}=\frac{2}{3}\arcsin\frac{x^{3/2}}{a}+C$.

***3. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$.

解：$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$.

**4. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx$.

解：$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx=\int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{\frac{3}{2}-\sin^2 x}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x)+C.$$

***5. $\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}dx$.

解： 设 $x=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $x^2+1=\sec^2 t$, $dx=\sec^2 tdt$ ，于是

$$\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}dx=\int \frac{\tan^3 t+1}{\sec^2 t}dt=\int\left(\frac{\sin^3 t}{\cos t}+\cos^2 t\right)dt$$

$$=\int \frac{\cos^2 t-1}{\cos t}d(\cos t)+\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\cos^2 t-\ln\cos t+\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin t\cos t+C$$

$$=\frac{1+x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

**6. $\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx \qquad (a>0)$.

解：令 $x=a\sin t \quad \therefore dx=a\cos tdt$,

$$\therefore \text{原式}=\int \frac{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t}{a^3\cos^3 t}dt=\int \tan^2 tdt=\int(\sec^2 t-1)dt$$

$$=\tan t-t+c \quad =\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

***7. $\int\sqrt{(a^2-x^2)^3}dx$.

解：令 $x=a\sin t$

$$\text{原式}=\int a^3\cdot\cos^3 t\cdot a\cos tdt=a^4\int(\frac{1+\cos 2t}{2})^2dt$$

$$=\frac{a^4}{4}\int(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)dt=\frac{a^4}{4}t+\frac{a^4}{4}\sin 2t+\frac{a^4}{4}\int\frac{1+\cos 4t}{2}dt$$

$$=\frac{a^4}{4}t+\frac{a^4}{4}\sin 2t+\frac{a^4}{8}t+\frac{a^4}{32}\sin 4t+C$$

$$=\frac{a^4}{4}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^4}{2}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^4}{8}\cdot\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}(\frac{a^2-x^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2})+C$$

$$=\frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{8}(a^2-2x^2)+C.$$

***8. $\int \frac{\sqrt{x^2+6x+5}}{x+3}dx$.

解：原式$=\int\frac{\sqrt{(x+3)^2-4}}{x+3}dx$(令$x+3=2\sec t$)

$$=\int\frac{2\tan t}{2\sec t}\cdot 2\sec t\cdot\tan t\cdot dt=2\int(\sec^2 t-1)dt=2\tan t-2t+C$$

$$=\sqrt{x^2+6x+5}-2\arccos\frac{2}{x+3}+C.$$

***9. $\int\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{15+2x-x^2}}$.

解：$\int\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{15+2x-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{\sqrt{16-(x-1)^2}}=\arcsin\frac{x-1}{4}+C$.

**10. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}$.

解：令 $x+2=\sec t$，

$$\int\frac{d\sec t}{\sqrt{\sec^2 t-1}}=\int\sec t dt=\ln|\sec t+\tan t|+C_1$$

$$=\ln\left|(x+2)+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C_1=2\ln(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1})+C.$$

***11. $\int\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1+e^x}}$.

解：设$\sqrt{1+e^x}=t.$　　则$e^x=t^2-1$　　$e^x dx=2tdt$

$$\therefore\text{原式}=\int\frac{2t}{t(t^2-1)}dt=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{t^2-1}{(t+1)^2}\right|+c=x-2\ln\left(1+\sqrt{1+e^x}\right)+C.$$

***12. $\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解：当$x>1$时，

$$\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x^2-1}}\underline{\underline{\;x=\frac{1}{t}\;}}-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\arcsin t+C=-\arcsin\frac{1}{x}+C$$

当$x<-1$时，

$$\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x^2-1}}\underline{\underline{\;x=\frac{1}{t}\;}}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C=\arcsin\frac{1}{x}+C$$

故在$(-\infty,-1)$或$(1,+\infty)$内，有　$\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x^2-1}}=-\arcsin\frac{1}{|x|}+C$.

***13. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} \mathrm{d}\, x$.

解： 设 $x=3\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\sqrt{x^2-9}=3\tan t$, $dx=3\sec t\tan t dt$ ，于是

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} \mathrm{d}\, x = 3\int \tan^2 t dt = 3\left(\int \sec^2 t - 1\right) dt = 3\tan t - 3t + C$$

$$= \sqrt{x^2-9} - 3\arccos\frac{3}{x} + C .$$