第 9 章（之 1）（总第 43 次）

教学内容: § 9.1 微分方程基本概念

*1． 微分方程 $2(y'')^3-9y'y'''=5xy^7$ 的阶数是 （ ）

（A）3； （B）4； （C）6； （D）7．

答案（A）

解 微分方程的阶数是未知函数导数的最高阶的阶数．

*2． 下列函数中的 C、α、λ 及 k 都是任意常数，这些函数中是微分方程 $y''+4y=0$ 的通解的函数是 （ ）

（A） $y=3C\cos 2x+(12-29C)\sin 2x$； （B） $y=C\cos 2x(1+\lambda\sin 2x)$；

（C） $y=kC\cos 2x+\sqrt{1+k^2C^2}\sin 2x$； （D） $y=C\cos(2x+\alpha)$．

答案 （D）

解 二阶微分方程的通解中应该有两个独立的任意常数．

（A）中的函数只有一个任意常数 C；

（B）中的函数虽然有两个独立的任意常数，但经验算它不是方程的解；

（C）中的函数从表面上看来也有两个任意常数 C 及 k，但当令 $\overline{C}=kC$ 时，函数就变成了 $y=\overline{C}\cos 2x+\sqrt{1+\overline{C}^2}\sin 2x$，实质上只有一个任意常数；

（D）中的函数确实有两个独立的任意常数，而且经验算它也确实是方程的解．

*3．在曲线族 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ 中，求出与直线 $y=x$ 相切于坐标原点的曲线．

解 根据题意条件可归结出条件 $y(0)=0, y'(0)=1$，

由 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$， $y'=c_1e^x-c_2e^{-x}$，可得 $c_1+c_2=0, c_1-c_2=1$，

故 $c_1=\dfrac{1}{2}, c_2=-\dfrac{1}{2}$，这样就得到所求曲线为 $y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，即 $y=\sinh x$．

*4．证明：函数 $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ 是初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0\\ y\big|_{x=0}=0,\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=1\end{cases}$ 的解．

证明 $y'=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+e^{-\frac{1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，

$$y''=-\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

代入方程得 $y''+y'+y=0$， 此外 $y(0)=0$，$y'(0)=1$，

故 $y=\frac{2}{3}\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 是初始值问题的解.

*5．验证 $y=e^x\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t+Ce^x$（其中 C 为任意常数）是方程 $y'-y=e^{x+x^2}$ 的通解.

证明 $y'=e^x\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t+e^x\cdot e^{x^2}+Ce^x=y+e^{x+x^2}$， 即 $y'-y=e^{x+x^2}$，说明函数确实给定方程的解.

另一方面函数 $y=e^x\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t+Ce^x$ 含有一任意常数 C，所以它是方程的通解.

**6．求以下列函数为通解的微分方程：

（1） $y=\sqrt[3]{Cx+1}$；

解 将等式 $y=\sqrt[3]{Cx+1}$ 改写为 $y^3=Cx+1$，再在其两边同时对 x 求导，得 $3y^2y'=C$，代入上式，即可得到所求之微分方程为 $3xy^2y'=y^3-1$.

（2） $y=C_1x+\frac{C_2}{x}$.

解 因为给定通解的函数式中有两个独立的任意常数，所以所求方程一定是二阶方程，在方程等式两边同时对 x 求两次导数，得

$$y'=C_1-\frac{C_2}{x^2},\quad y''=\frac{2C_2}{x^3}.$$

从以上三个式子中消去任意常数 C_1 和 C_2，即可得到所求之微分方程为

$$x^2y''+xy'-y=0.$$

**7．建立共焦抛物线族 $y^2=4C(x+C)$（其中 C 为任意常数）所满足的微分方程［这里的共焦抛物线族是以 x 轴为对称轴，坐标原点为焦点的抛物线］.

解 在方程 $y^2=4C(x+C)$ 两边对 x 求导有 $2yy'=4C$，从这两式中消去常数所求方程为 $y=y'(2x+yy')$.

**8．求微分方程，使它的积分曲线族中的每一条曲线 $y=y(x)$ 上任一点处的法线都经过坐标原点．

解　任取 $y=y(x)$ 上的点 $(x\,,\,y)$，曲线在该点处的切线斜率为 $y'=\dfrac{dy}{dx}$．

所以过点 (x,y) 的法线斜率为 $\dfrac{-1}{y'}$，　法线方程为 $Y-y=\dfrac{-1}{y'}(X-x)$，

因为法线过原点，所以 $0-y=\dfrac{-1}{y'}(0-x)$ 从而可得所求微分方程为 $x+yy'=0$．

第 9 章（之 2）（总第 44 次）

教学内容：§9.2 .1 可分离变量的方程；　§9.2 .2 一阶线性方程

**1．求下列微分方程的通解：

（1）$y'=\dfrac{x(1-y)}{1+x^2}$；

解：　分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{1-y}=\dfrac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$，两边积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{1-y}=\int\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$，

得 $-\ln(1-y)=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln C$，即 $y=1-\dfrac{C}{\sqrt{1+x^2}}$．

（2）$y'=\dfrac{x}{2y}e^{2x-y^2}$；

解：分离变量 $2ye^{y^2}\mathrm{d}y=xe^{2x}\mathrm{d}x$，两边积分就得到了通解

$$e^{y^2}=\frac{1}{2}(xe^{2x}-\int e^{2x}\mathrm{d}x)=\frac{1}{2}(xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x})+c\,.$$

（3）$(2x+1)e^y y'+2e^y-4=0$．

解：　$\dfrac{e^y\,\mathrm{d}\,y}{2e^y-4}=-\dfrac{\mathrm{d}\,x}{2x+1}$，　　$\dfrac{1}{2}\ln(e^y-2)=-\dfrac{1}{2}\ln(2x+1)+\dfrac{1}{2}\ln C$，

即　$(e^y-2)(2x+1)=C$．

**2．试用两种不同的解法求微分方程 $y'=1-x-y+xy$ 的通解．

解法一 （可分离变量方程的分离变量法）这是一个一阶可分离变量方程，同时也是一个一阶线性非齐次方程，这时一般作为可分离变量方程求解较为容易．

分离变量，$y'=(1-x)(1-y)$， $\frac{\mathrm{d}y}{1-y}=(1-x)\mathrm{d}x$，并积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{1-y}=\int(1-x)\mathrm{d}x$

得 $-\ln(1-y)=x-\frac{1}{2}x^2+c$，所求通解为 $y=1+ce^{\frac{1}{2}x^2-x}$．

解法二 （线性方程的常数变易法）将原方程改写为 $y'+(1-x)y=1-x$，这是一个一阶线性非齐次方程．

对应的齐次方程为 $y'+(1-x)y=0$，其通解为① $y=\overline{C}e^{\frac{1}{2}x^2-x}$．

代入原非齐次方程得 $\overline{C}'e^{\frac{1}{2}x^2-x}=1-x$，解得② $\overline{C}=e^{x-\frac{1}{2}x^2}+C$，②代入①即可得原方程的通解

$$y=1+Ce^{\frac{1}{2}x^2-x}.$$

*3．求解下列初值问题：

（1） $y'=\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$， $y(\frac{1}{2})=-e^{\frac{\pi}{6}}$．

解：$\because y'=\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$， $\therefore \frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(y\neq 0)$， $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$，

$\therefore \ln y=\arcsin x+C$， $\therefore$ $y=Ce^{\arcsin x}$，

$\boldsymbol{\because y(\frac{1}{2})=-e^{\frac{\pi}{6}}}$， $\boldsymbol{\therefore -e^{\frac{\pi}{6}}=Ce^{\arcsin\frac{1}{2}}}$， $\therefore C=-1$， $\therefore$ $y=-e^{\arcsin x}$．

（2） $y'+2xy=e^{-x^2}$， $y(0)=1$；

解： $\because y'+2xy=e^{-x^2}$， $\therefore p(x)=2x$， $q(x)=e^{-x^2}$，

$$\therefore y(x)=e^{-\int 2x\mathrm{d}x}\left[\int e^{-x^2}e^{\int 2x\mathrm{d}x}dx+C\right]=e^{-x^2}\left[\int e^{-x^2}e^{\int 2x\mathrm{d}x}dx+C\right]=xe^{-x^2}+Ce^{-x^2},$$

$\because$ $y(0)=1$， $\therefore 1=0+c\Rightarrow c=1$， $\therefore y=(x+1)e^{-x^2}$．

（3） $y' + y\cot x = e^{\cos x}$， $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ ；

解： $\because$ $y' + y\cot x = e^{\cos x}$， $\therefore P(x) = \cot x$， $Q(x) = e^{\cos x}$.

$$\therefore \quad y = \mathrm{e}^{-\int \cot x \mathrm{d}x}\left[C + \int \mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{e}^{\int \cot x \mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right] = \mathrm{e}^{-\ln\sin x}(C + \int \mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{e}^{\ln\sin x}\mathrm{d}x)$$

$$= \csc x(C + \int \mathrm{e}^{\cos x}\sin x\mathrm{d}x) = (C - \mathrm{e}^{\cos x})\csc x\text{，}$$

由 $y(\frac{\pi}{2}) = 1$， 可确定 $C = 2$，所以 $y = (2 - \mathrm{e}^{\cos x})\csc x$.

（4） $x^2\,\mathrm{d}\,y + (2xy - x + 1)\,\mathrm{d}\,x = 0$， $y\big|_{x=1} = 0$.

解： 方程变形为 $y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$，是一阶线性非齐次方程，其通解为

$$y = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left[c + \int (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})e^{\int \frac{2}{x}dx}dx\right]$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[c + \int (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})x^2 dx\right] = \frac{1}{x^2}\left[c + \frac{1}{2}x^2 - x\right] = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$$

由 $y(1) = 0$， 得 $c = \frac{1}{2}$， 所以特解为： $y = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$.

**4．求微分方程 $y\ln y\,\mathrm{d}x + (x - \ln y)\mathrm{d}y = 0$ 的通解（提示将 x 看作是 y 的函数）.

解：将 x 看作是 y 的函数，原方程可化为 $\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y\ln y}x = \frac{1}{y}$，这是一阶线性方程，将其中

$P(y) = \frac{1}{y\ln y}$， $Q(y) = \frac{1}{y}$ 代入一阶线性方程求解公式，得通解

$$x = e^{-\int \frac{1}{y\ln y}dy}\left[c + \int \frac{1}{y}e^{\int \frac{1}{y\ln y}dy}dy\right] = \mathrm{e}^{-\ln(\ln y)}\left[c + \int \frac{1}{y}e^{\ln(\ln y)}dy\right]$$

$$= \frac{1}{\ln y}\left[c + \int \frac{\ln y}{y}dy\right] = \frac{c}{\ln y} + \frac{1}{2}\ln y\,.$$

**5．求满足关系式$\int_{\sqrt{2}}^{x} uy(u)\,\mathrm{d}u = x^2 + y(x)$的可导函数$y(x)$．

解：这是一个积分方程，在方程等式两边同对x求导，可得微分方程$xy(x) = 2x + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy = -2x$，分离变量得$\dfrac{\mathrm{d}y}{y-2} = x\,\mathrm{d}x$，积分得$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 2$，

在原方程两边以$x=\sqrt{2}$代入，可得初试条件$y\big|_{x=\sqrt{2}} = -2$．据此可得$C = -4e^{-1}$，所以原方程的解为 $y = -4e^{\frac{x^2}{2}-1} + 2$．

**6．设降落伞自塔顶自由下落，已知阻力与速度成正比（比例系数为k），求降落伞的下落速度与时间的函数关系．

解：根据牛顿运动第二定理有$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv$．这是一个可分离变量方程，分离变量并积分得

$$-\frac{1}{k}\ln(mg - kv) = \frac{t}{m} + C.$$

由初始条件$v(0)=0$，得$C = -\dfrac{1}{k}\ln(mg)$，即得 $v = \dfrac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$．

**7．求一曲线，已知曲线过点$(0,1)$，且其上任一点(x,y)的法线在x轴上的截距为kx．

解：曲线在点(x,y)处的法线斜率为$-\dfrac{1}{y'}$，所以法线方程为$Y - y = -\dfrac{1}{y'}(X - x)$．

只要令$Y=0$，就可以得到法线在x轴上的截距为 $X = x + yy'$．

据题意可得微分方程$x + yy' = kx$，即$yy' = (k-1)x$．这是一个可分离变量方程，分离变量并积分得所求曲线$y^2 + (1-k)x^2 = C$，由于曲线过点$(0,1)$，所以$C=1$，所以所求曲线方程为 $y^2 + (1-k)x^2 = 1$．

第 9 章 （之 3） （总第 45 次）

教学内容：§9.2 .3 齐次型方程；9.2.4 伯努利方程．

**1．求下列微分方程的通解：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$；

解： $\because$ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$， $\therefore$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}(1+\ln\dfrac{y}{x})$，这是一个一阶齐次型方程．

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=ux$，即 $y'=u+xu'$，于是原方程可化为 $xu'=u\ln u$．这是一个可分离变量方程．

分离变量 $\dfrac{du}{u\ln u}=\dfrac{dx}{x}$ ，并积分 $\int\dfrac{du}{u\ln u}=\int\dfrac{dx}{x}$，得 $\ln\ln u=\ln x+\ln c$，即 $u=e^{cx}$．

以 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入，得所求的通解为 $y=xe^{cx}$．

（2）$(xy'-y)\arctan\dfrac{y}{x}=x$．

解：方程可化为 $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{\arctan\dfrac{y}{x}}$，这是一个一阶齐次型方程．

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=ux$，即 $y'=u+xu'$，于是原方程可化为 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\arctan u}$，这是一个可分离变量方程．

分离变量后积分得 $$x\sqrt{1+u^2}=Ce^{u\arctan u}.$$

以 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解：$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\frac{y}{x}\arctan\frac{y}{x}}$．

**2．求解下列初值问题：

（1） $xy\mathrm{d}x-(2x^2+y^2)\mathrm{d}y=0$ 满足初始条件 $y(2)=1$ 的特解．

解: $\because$ $xy\mathrm{d}x-(2x^2+y^2)\mathrm{d}y=0$， $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2x}{y}+\dfrac{y}{x}$， 令 $u=\dfrac{x}{y}$ ，

则 $u+y\dfrac{du}{dy}=2u+\dfrac{1}{u}$， $\dfrac{du}{u+\dfrac{1}{u}}=\dfrac{dy}{y}$， $\therefore\int\dfrac{du}{u+\dfrac{1}{u}}=\int\dfrac{dy}{y}$，

$\therefore\dfrac{1}{2}\ln(u^2+1)=\ln y+\ln c$， $\therefore\sqrt{u^2+1}=cy$， 即 $u^2+1=c^2y^2$ ，

代回即得 $\dfrac{x^2}{y^2}+1=c^2y^2$， $\because y(2)=1$， $\therefore c^2=5$， 因此 $x^2+y^2=5y^4$．

（2） $\begin{cases}(x+y)\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}y=0,\\ y|_{x=0}=0.\end{cases}$

解：原方程可表为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y}{y-x}=\dfrac{1+\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}-1}$，令 $u=\dfrac{y}{x}$，$y'=u+xu'$，

代入方程，有 $u+xu'=\dfrac{1+u}{u-1}$，即 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1+2u-u^2}{u-1}$，

分离变量 $\dfrac{u-1}{1+2u-u^2}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$，积分得 $-\dfrac{1}{2}\ln(1+2u-u^2)=\ln x-\ln\sqrt{C}$

$\Rightarrow$通解 $x^2+2xy-y^2=C$，令 $x=0, y=0$，得 $C=0$.

所以初值问题的解为 $x^2+2xy-y^2=0$.

**3．求解下列微分方程

（1）$xy'-y+y^2\ln x=0$；

解： $\because xy'-y+y^2\ln x=0$　　　$\therefore y^{-2}y'-\dfrac{1}{x}y^{-1}=-\dfrac{\ln x}{x}$

令 $t=y^{-1}\Rightarrow\dfrac{dt}{dx}+\dfrac{1}{x}t=\dfrac{\ln x}{x}$，　　$\therefore P(x)=\dfrac{1}{x}, \mathrm{Q}(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,

$$\therefore t(x)=e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[C+\int\frac{\ln x}{x}e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{x}\left[C+\int\frac{\ln x}{x}\cdot xdx\right]$$

$$=\mathrm{C}x^{-1}+x^{-x}(x\ln x-x)=\mathrm{C}x^{-1}+\ln x-1,$$

$y^{-1}=\ln x-1+Cx^{-1}$.

（2）$(y-2\sqrt{xy})\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$.

解： $\because$ $(y-2\sqrt{xy})\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$，　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}y^{\frac{1}{2}}$，　$y^{-\frac{1}{2}}y'+\dfrac{1}{x}y^{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$，

$u=y^{\frac{1}{2}}$，　$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{2x}u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，　$\therefore P(x)=\dfrac{1}{2x}$，$Q(x)\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\therefore u(x)=e^{-\int\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}\left[C+\int\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\int\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]=x^{-\frac{1}{2}}\left[C+\int\frac{1}{\sqrt{x}}x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right]=x^{-\frac{1}{2}}[C+x],$$

$\therefore$ $y^{\frac{1}{2}}=x^{-\frac{1}{2}}[C+x]$，　　$\therefore\sqrt{y}=\sqrt{x}+\dfrac{C}{\sqrt{x}}$.

（3） $y' = \dfrac{y^3}{2(xy^2 - x^2)}$

解一：令 $u = y^2$，原方程化为： $\dfrac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{\left(\dfrac{u}{x}\right)^2}{\left(\dfrac{u}{x}\right) - 1}$，解此方程得 $u = Ce^{\frac{u}{x}}$，

以 $u = y^2$ 代入上式，原方程通解为 $y^2 = Ce^{\frac{y^2}{x}}$.

解二：原方程写成 $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} - \dfrac{2}{y}x = -\dfrac{2}{y^3}x^2$，

令 $x^{-1} = z$，则方程化为：$\dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y} + \dfrac{2}{y}z = \dfrac{2}{y^3}$，

则通解 $z = e^{-\int \frac{2}{y}\mathrm{d}\,y}\left[C + \int \dfrac{2}{y^3}e^{\int \frac{2}{y}\mathrm{d}\,y}\,\mathrm{d}\,y\right] = \dfrac{1}{y^2}[C + 2\ln y]$，

故原方程通解：$\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y^2}[C + 2\ln y]$.

（4） $y' = y - \dfrac{2x}{y}$， $y(0) = 1$.

解：$\because y' = y - 2xy^{-1}$， $\therefore yy' - y^2 = -2x$，

令 $t = y^2 \Rightarrow \dfrac{dt}{dx} - 2t = -4x$， $\therefore P(x) = -2,\quad Q(x) = -4x$，

$$\therefore t(x) = e^{\int 2\mathrm{d}x}\left[C + \int(-4x)e^{-\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right] = e^{2x}\left[C - 4\int xe^{-2x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= e^{2x}[C + 2xe^{-2x} + e^{-2x})] = Ce^{2x} + 2x + 1$$

$\therefore y^2 = 2x + 1 + Ce^{2x}$

$\because y(0) = 1$， $\therefore 1 = 2\times 0 + 1 + Ce^0 \quad \Rightarrow C = 0$

$\therefore y^2 = 2x + 1$

***4．作适当变换，求下列微分方程的通解．

（1） $y' = 4e^{-y} - \dfrac{2}{2x+1}$

解 原方程可化为 $e^y y' + \dfrac{2}{2x+1}e^y = 4$，在换元 $z = e^y$ 下方程可化为 $z' + \dfrac{2z}{2x+1} = 4$，这

是一个一阶线性方程，其通解为

$$z=e^{-\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{2x+1}}\left\{C+\int 4e^{\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{2x+1}}\,\mathrm{d}x\right\}=\frac{1}{2x+1}\{C+4x+4x^2\}.$$

（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2x}+\dfrac{1}{2y}\tan\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$

解：令 $y^2=ux$，代入方程整理得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\tan u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得 $\sin u=Cx$，以 $u=\dfrac{y^2}{x}$ 代入上式，即得原方程的通解： $\sin\dfrac{y^2}{x}=Cx$.

（3）$\sqrt{1+x^2}\sin 2y\cdot y'=2x\sin^2 y+e^{2\sqrt{1+x^2}}$

解：原方程化为： $\sqrt{1+x^2}\dfrac{\mathrm{d}\sin^2 y}{\mathrm{d}x}=2x\sin^2 y+e^{2\sqrt{1+x^2}}$，

令 $z=\sin^2 y$，得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}z=e^{2\sqrt{1+x^2}}\Big/\sqrt{1+x^2}$，

故 $$z=e^{\int\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x}\left\{C+\int\frac{e^{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}e^{-\int\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right\}$$

$$=Ce^{2\sqrt{1+x^2}}+e^{2\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

原方程的通解为 $\sin^2 y=Ce^{2\sqrt{1+x^2}}+e^{2\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

***5．已知 $2\int_0^x y(\xi)\sqrt{1+y'^2(\xi)}\,\mathrm{d}\xi=2x+y^2(x)$，求 $y(x)$.

解：两边关于 x 求导得 $2yy'-y^2=-1$，

解得 $y^2=Ce^x+1$，

由 $y\big|_{x=0}=0$，求得 $C=-1$，

故原方程的解为：$y^2=1-e^x$.

***6．曲线过点 $(1,1)$，其上任一点与原点的距离平方等于该点横坐标与该点的曲线的法线在 x 轴上的截距乘积的两倍，求曲线方程.

解： $x^2+y^2=2x(x+yy'), y(1)=1$， $2yy'-\frac{1}{x}y^2=-x$

令 $y^2=z$，解得 $z=y^2=x(C-x)$

由 $y(1)=1$， 得 $C=2$，

曲线方程为： $x^2+y^2=2x$.

***7．容器内有 $100\,\mathrm{m}^3$ 的盐水，含 10kg 的盐，现在以每分钟 $3\,\mathrm{m}^3$ 的均匀速度从 A 管放进净水冲淡盐水，又以每分钟 $2\,\mathrm{m}^3$ 的均匀速度将混合均匀后的盐水从 B 管抽出，问 100 分钟后容器内还剩多少盐？

解：设 t 分钟容器内含盐量为 $x=x(t)$，此时容器内盐的浓度为 $\frac{x}{100+t}$，

从时刻 t 到 $t+\mathrm{d}t$，对应盐量由 x 变到 $x+\mathrm{d}x$，在时间段 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内，流出的盐量为 $\frac{x}{100+t}2\,\mathrm{d}t$，从而有 $\mathrm{d}x=-\frac{2x}{100+t}\,\mathrm{d}t$，

解得 $x=\frac{C}{(100+t)^2}$，

代入初始条件 $x(0)=10$，得 $C=10^5$，

所以 $x=\frac{10^5}{(100+t)^2}$ kg

令 $t=100$，得 $x=\frac{10^5}{(100+100)^2}=2.5\,\mathrm{kg}$ 。