华东理工大学 2022-2023 学年第一学期

《数学分析（上）》课程期末考试试卷 A 2023.1

开课学院：数学学院　专业：数、信计　考试形式：闭卷　所需时间：120 分钟

姓　名：＿＿＿＿＿　学号：＿＿＿＿＿　班级：＿＿＿＿＿　任课教师：靳勇飞

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
评卷人									

注意事项：

1. 考试过程中不可以使用计算器，也不可以使用任何其他机械或电子辅助计算工具。
2. 在试卷中，$\mathbb{N}$ 表示非负整数集合；$\mathbb{N}^+$ 表示正整数集合；$\mathbb{R}$ 表示实数集合。作为区间端点的符号 a, b 满足 $a < b$.
3. 使用任何没有在课本或者课堂上证明过的结论前，都必须先证明该结论。
4. 所有题目的解答都需写出主要步骤。

——————以下为试卷内容——————

一、 (每小题 2 分，共 4 分) 定义定理叙述。

1. 数列收敛的 Cauchy 收敛原理
2. 函数 f 在 x_0 可微

二、 (每小题 2 分，共 6 分) 判断。

1. $f(a)f(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi) = 0$.
2. 区间 I 上的连续函数在区间 I 上有界。
3. f 在 x_0 附近有定义，如果 $f'(x_0) > 0$, 则对任意的 $\delta > 0$，存在 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}$, 使得 $f(x) > f(x_0)$.

三、 (每小题 5 分，共 15 分) 计算。

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \lg\dfrac{100+n^2}{1+100n^2}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sin\dfrac{1}{n} + \cos\dfrac{1}{n}\right)^n$

四、 (每小题 5 分，共 15 分) 计算。

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)$

3. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$

五、 (每小题 5 分，共 20 分) 计算。

1. $\displaystyle\int \frac{(2^x+2^{2x})^2}{3^x}\,\mathrm{d}x$;

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x$;

3. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3\sin x+4\cos x}\,\mathrm{d}x$;

4. $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

六、 (本题 10 分) 写出 $\sin x$，$\tan x$ 的带皮亚诺 (Peano) 余项的 5 次 Maclaurin 公式，并以此求实数 α,β，使得当 $x\to0$ 时 $\alpha\sin x+\beta\tan x-x=O(x^5)$.

七、 (本题 10 分) $x_1>0$, 对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$, $x_{n+1}=\arctan x_n$. 证明：数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛。并求出 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

八、 (本题 10 分) 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$, 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\geqslant 4\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}.$$

九、 (本题 10 分) 设 f' 在 $(0,2023]$ 上连续, 且极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}f'(x)$ 存在，证明：f 在 $(0,2023]$ 上一致连续。