图论

Graph Theory

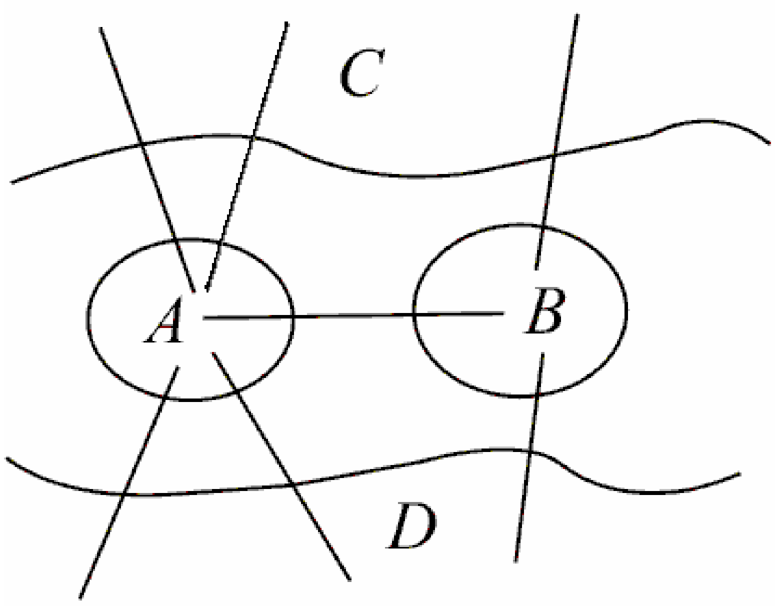
4、欧拉图与哈密顿图

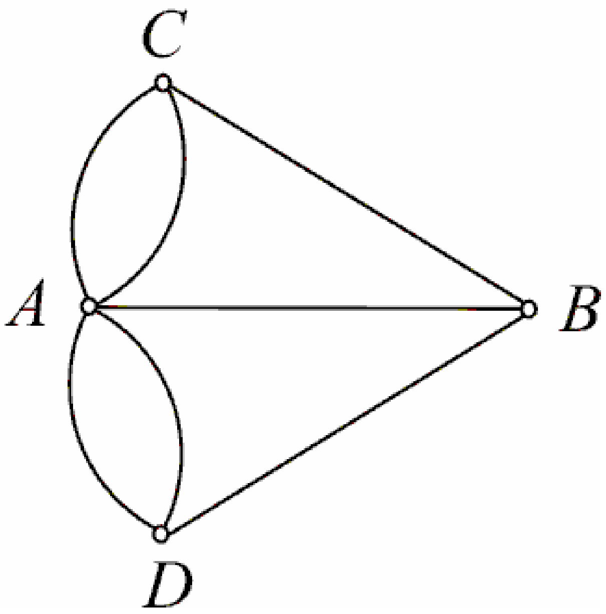
概念：

欧拉通路、欧拉回路、欧拉图、半欧拉图及其判别法

哈密顿通路、哈密顿回路、哈密顿图、半哈密顿图

历史背景：哥尼斯堡七桥问题与欧拉图





定义

(1) 欧拉通路——经过图（无向图或有向图）中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路.

(2) 欧拉回路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路.

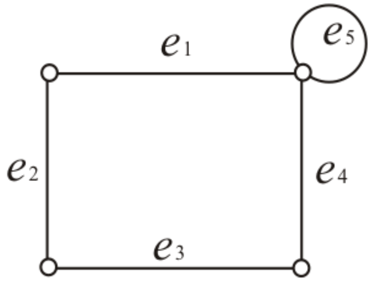
(3) 欧拉图——具有欧拉回路的图.

(4) 半欧拉图——具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

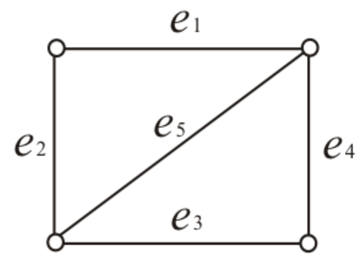
注：(1) 约定：平凡图是欧拉图.

(2) 欧拉通路是简单通路，欧拉回路是简单回路.

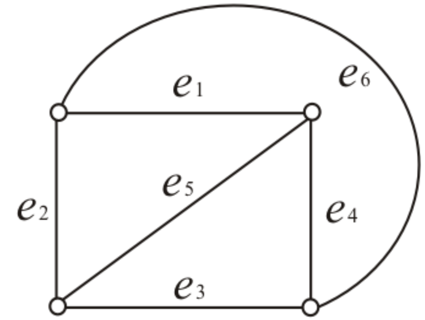
欧拉图判别实例



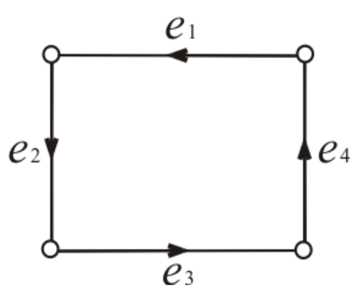
(1)



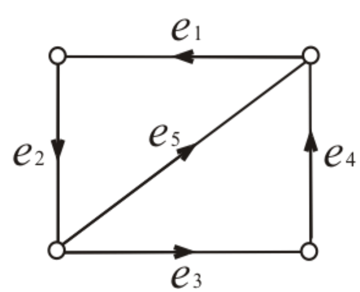
(2)



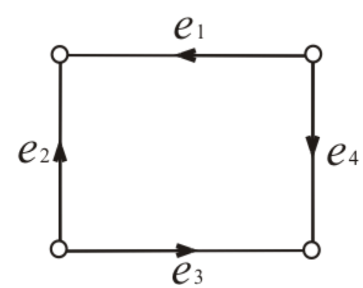
(3)



(4)



(5)



(6)

上图中，(1) ,(4) 为欧拉图，(2),(5)为半欧拉图，(3),(6)既不是欧拉图，也不是半欧拉图.

在(3),(6)中各至少加几条边才能成为欧拉图？

无向欧拉图的判别法

定理:

(1) 无向图*G*是欧拉图当且仅当*G*连通且无奇度数顶点.

(2) 无向图*G*是半欧拉图当且仅当*G* 连通且恰有两个奇度顶点.

有向欧拉图的判别法

定理：

(1) 有向图D是欧拉图当且仅当D是强连通的且每个顶点的入度都等于出度.

(2) 有向图D是半欧拉图当且仅当D是单向连通的，且D中恰有两个奇度顶点，其中一个的入度比出度大1，另一个的出度比入度大1，而其余顶点的入度都等于出度.

Fleury算法

算法:

(1) 任取$v_0 \in V(G)$，令$P_0 = v_0$.

(2) 设$P_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_i v_i$ 已经行遍，按下面方法从

$E(G) - \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$中选取$e_{i+1}$:

(a) e_{i+1}与v_i 相关联;

(b) 除非无别的边可供行遍，否则e_{i+1}不应该为

$G_i = G - \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$中的桥.

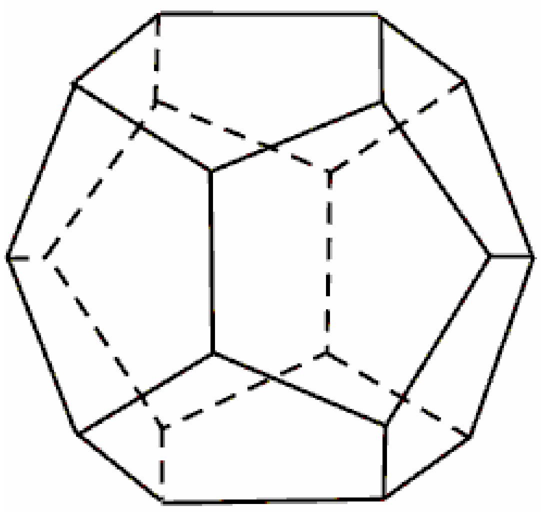
(3) 当 (2)不能再进行时，算法停止.

注：(1) Fleury算法的基本思路是能不走桥就不走桥;

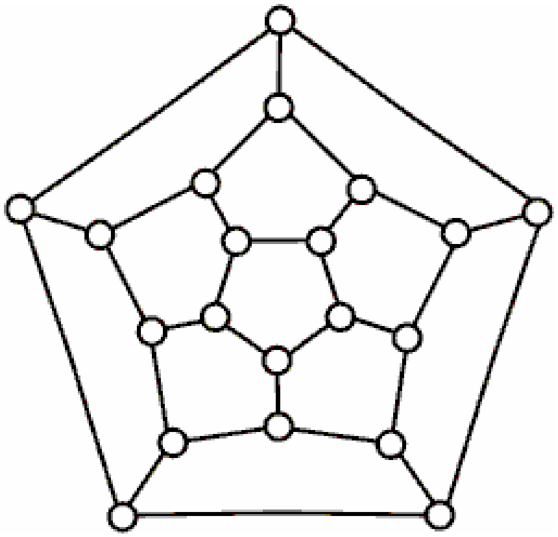
(2) 假如G是欧拉图，则算法停止时所得简单通路

$P_m = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_m v_m (v_m = v_0)$为$G$ 中一条欧拉回路.

历史背景：哈密顿周游世界问题与哈密顿图



(1)



(2)

定义:

(1) 哈密顿通路——经过图（无向图或有向图）中所有顶点一次仅一次的通路.

(2) 哈密顿回路——经过图中所有顶点一次仅一次的回路.

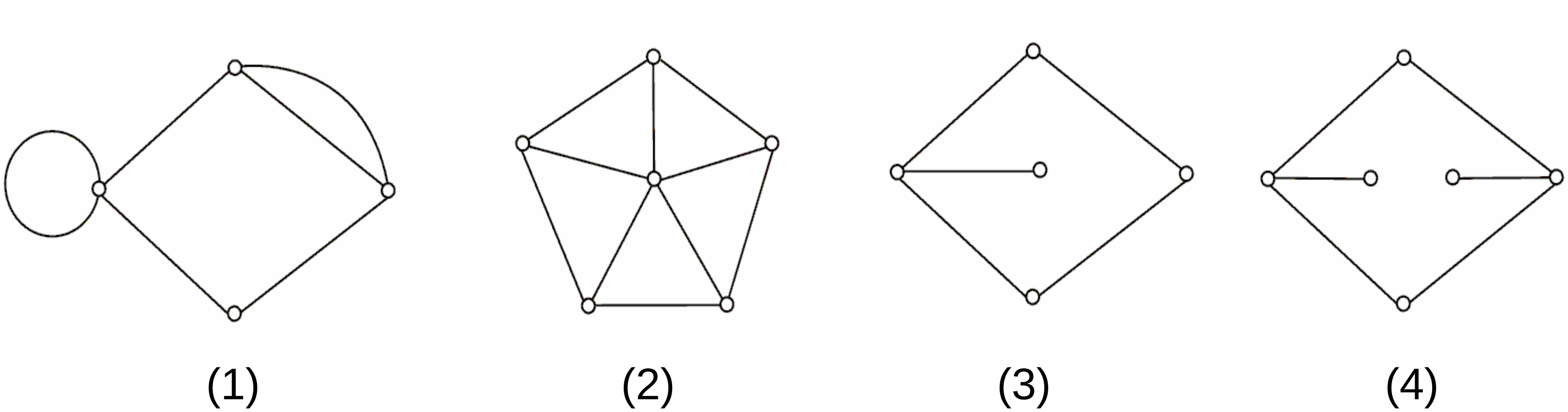
(3) 哈密顿图——具有哈密顿回路的图.

(4) 半哈密顿图——具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图.

注：(1) 约定：平凡图是哈密顿图.

(2) 哈密顿通路是初级通路，哈密顿回路是初级回路.

实例



在上图中，

(1),(2) 是哈密顿图;

(3)是半哈密顿图;

(4)既不是哈密顿图，也不是半哈密顿图，为什么？

哈密顿图的必要条件

定理 设无向图$G=<V,E>$是哈密顿图，对于任意$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$，均有 $p(G-V_1) \leq |V_1|$

推论 设无向图$G=<V,E>$是半哈密顿图，对于任意的$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$均有

$$p(G-V_1) \leq |V_1|+1$$

哈密顿图的充分条件

定理 设G是n阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n-1 \qquad (*)$$

则G 中存在哈密顿通路.

推论 设G为n ($n\geq 3$) 阶无向简单图，若对于G中任意两个不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n \qquad （**）$$

则G中存在哈密顿回路，从而G为哈密顿图.

哈密顿图的充分条件

定理： 设图G = (V,E) 是具有n个结点的简单无向图，

1）若$\forall u,v \in V, u \neq v$，有

$$d(u) + d(v) \geq n - 1$$

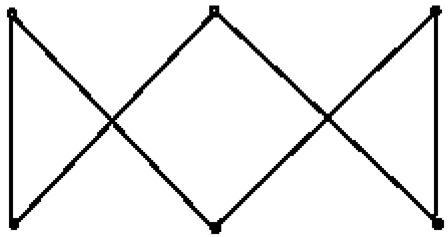
则G中存在哈密顿通路。

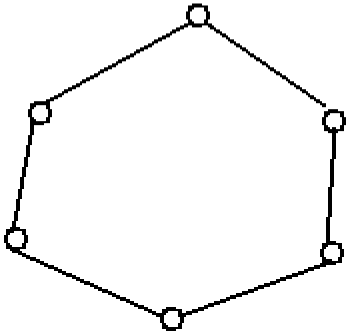
2）若$\forall u,v \in V, u \neq v$，有

$$d(u) + d(v) \geq n$$

则G中存在哈密顿回路。

例





➢ 充分条件非必要条件

例

考虑7天安排7门课程，使得同一位老师所任的课程考试不安排在连续的两天中。证明：若没有教师担任的课程多于4门，则可以给出合理的安排。

证明：构造无向图$G=(V,E)$

结点：课程 $|V|=7$

边：2门课程由不同老师担任，则连接

寻找一条哈密顿路

$\forall v \in V, deg(v) \geq 3$

$\forall u,v \in V \ \ deg(v)+deg(v) \geq 6=7-1$

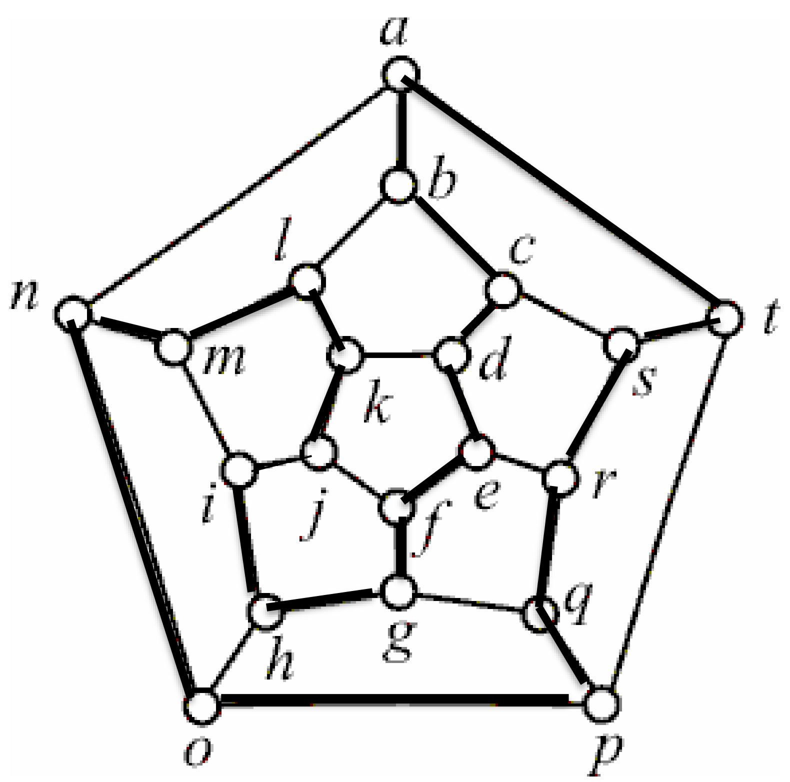
判断某图是否为哈密顿图方法

(1) 判断某图是否为哈密顿图至今还是一个难题.

(2) 判断某图是否哈密顿图的方法:

- **观察法**
- **充分条件**
- **必要条件**

1. 观察出哈密顿回路.
(周游世界问题)



a b c d e f g h i j k l m n p q r s t a

2、充分条件

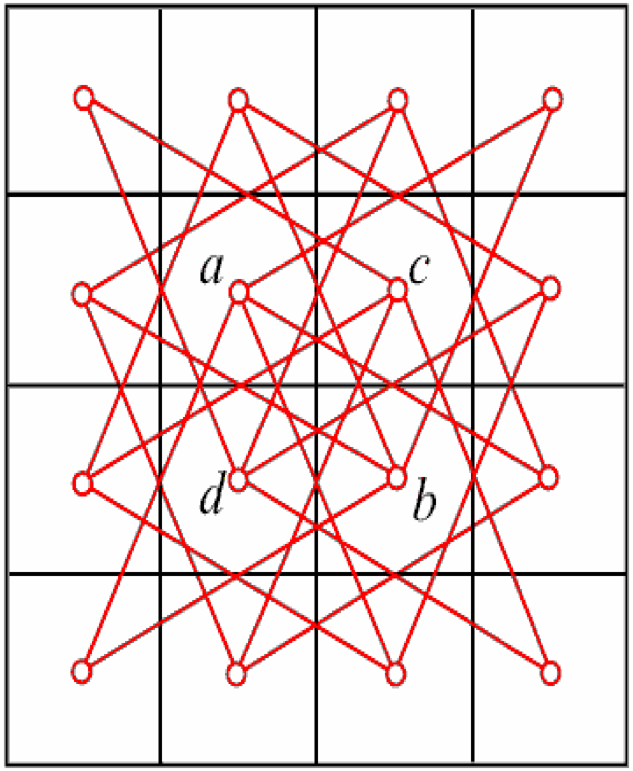
例 完全图$K_n(n\geq 3)$为哈密顿图

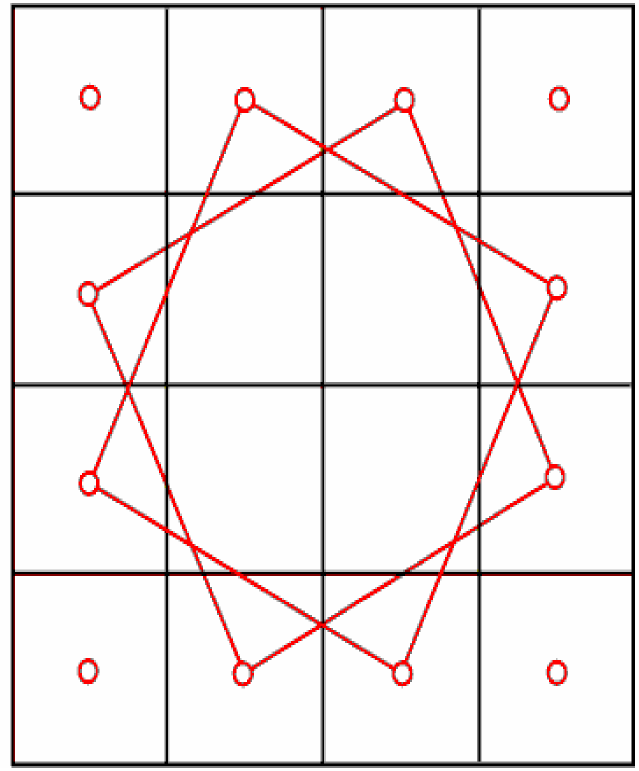
任何两个顶点u,v，均有

$$d(u)+d(v) = 2(n-1) \geq n \quad (n\geq 3)$$

3、必要条件　不是哈密顿图.

例





令 $V_1=\{a, b, c, d\}$, 则 $p(G-V_1) = 6 > 4$，无哈密顿回路.

带权图

设 $G=(V,E)$ 是图

1）若G的边e被赋予一个非负实数w(e)，则称w(e)是边e的权。

2）若G的每条边都带有权，则称G为带权图。

➢ 边的权也可以是各种各样：距离、流量、成本费、运输能力，…。

路权：

设P是带权图G的一条路，则称P中各边的权值之和为P的路权。

最短路径：

两个结点间路权最小的一条路。

- 许多最优化问题相当于要在带权图中找出某类具有最小(最大)权的图。

给定一个公路交通网图G，顶点代表城市，边代表公路，边e上的w(e)表示公路的长度。u是G的一个顶点(城市)，v是另一个城市，则对一个想从u市到v市的汽车司机来说，对下面的问题最感兴趣：

1) 从u到v有一条通路吗?

2)如果从u到v有路，那么哪条路最短?最短路的长是多少?怎么走法?

Dijkstra算法

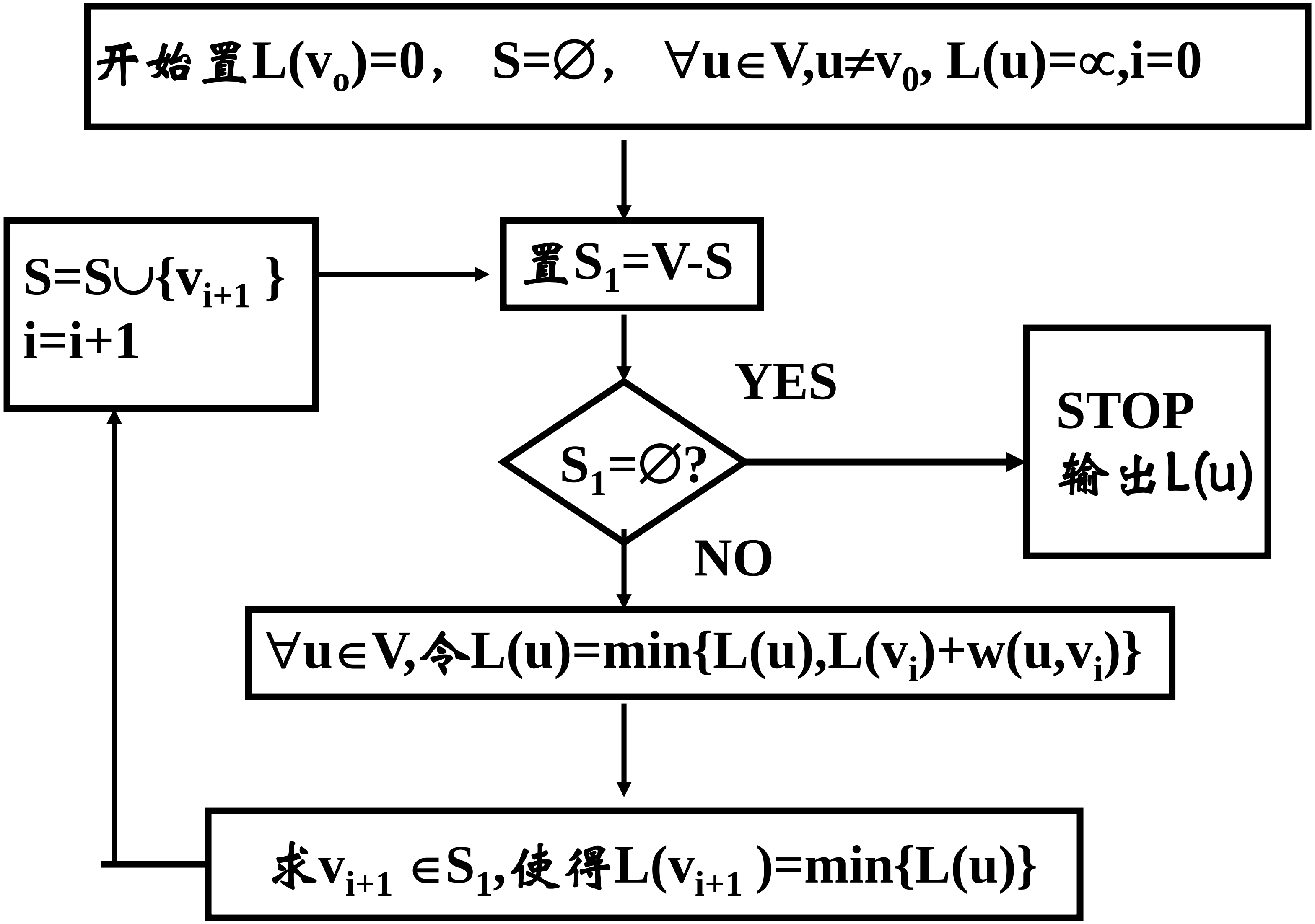
1959年，Dijkstra标号法

这个算法能求出从给定结点到图中其它每个结点的最短路。

设 $G=(V,E)$， $V=\{v_0,\ldots,v_n\}$，$w(v_i, v_i)$是边 $e=(v_i, v_i)$的权

令$L(v_i)$:表示v_0到结点v_i的最短路径的距离

S:已求得最短路径的结点集合


开始置$L(v_o)=0$， $S=\varnothing$， $\forall u\in V, u\neq v_0$, $L(u)=\infty, i=0$
置$S_1=V-S$
$S=S\cup\{v_{i+1}\}$
$i=i+1$
YES
$S_1=\varnothing$?
STOP
输出L(u)
NO
$\forall u\in V$,令$L(u)=\min\{L(u), L(v_i)+w(u,v_i)\}$
求$v_{i+1}\in S_1$,使得$L(v_{i+1})=\min\{L(u)\}$