第 13 章 （之 5）（总第 77 次）

教学内容：§13.4 奥-高公式

1．解下列各题：

*（1）．向量场 $\boldsymbol{f}=\sin(x+y)\,\boldsymbol{i}+e^{yz}\,\boldsymbol{j}+zx\,\boldsymbol{k}$ 的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{f}$ =______________.

解：$\dfrac{\partial[\sin(x+y)]}{\partial x}=\cos(x+y)$，$\dfrac{\partial(e^{yz})}{\partial y}=ze^{yz}$，$\dfrac{\partial(zx)}{\partial z}=x$

$$\therefore div\,\vec{f}=\cos(x+y)+ze^{yz}+x\,.$$

**（2）．设 $A=\{4xy,3yz,2zx\}$，$B=\{x,y,z\}$，则 div（$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$）=______________.

解：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\4xy&3yz&2zx\\x&y&z\end{vmatrix}$$

$$=\{3yz^2-2xyz,\,2x^2z-4xyz,\,4xy^2-3xyz\}.$$

$$\text{div}(A\times B)=-2yz-4xz-3xy.$$

**（3）．设函数 $f(u,v,w)$ 对各变元具有二阶连续偏导数，则 div[grad$f(x,xy,z)$]=_________.

答：$f_{11}+2yf_{12}+(x^2+y^2)f_{22}+f_{33}$

**2. 计算曲面积分，$\displaystyle\oiint_{\partial\Omega}x(y^2+z^2)\text{dydz}+y(z^2+x^2)\text{dzd}x$，其中 Ω 由圆柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=\pm1$ 围成，而 $\partial\Omega$ 为立体 Ω 的边界曲面，积分沿 $\partial\Omega$ 的外侧.

解：由奥高公式，原式 $=\displaystyle\iiint_{\Omega}(y^2+z^2+z^2+x^2)dV$

$$=\int_{-1}^{1}dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(2z^2+\rho^2)\rho d\rho=\frac{7}{3}\pi\,.$$

**3. 计算 $\displaystyle\oiint_{\Sigma}(x^3z-xz^3)dydz+y^3zdxdz+z^4dxdy$，其中 Σ 是球体 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le2z$ 的表面的外侧.

解：由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma} = \iiint_{\Omega} [(3x^2z - z^3) + 3y^2z + 4z^3]\mathrm{d}v = 3\iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}v$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^5 \cos\varphi \mathrm{d}\varphi$$

$$= \pi \cdot 2^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi$$

$$= 8\pi.$$

**4．计算 $\oiint_{\Sigma}(y+z)dxdy+(x-z)dydz$，其中 Σ 是平面 $x+z=1$，曲面 $y=\sqrt{x}$ 及坐标面 $y=0, z=0$ 所围成立体 Ω 的外表面.

解：由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma} = \iiint_{\Omega} (1+0+1)\mathrm{d}v = 2\iiint_{\Omega} \mathrm{d}v$$

$$= 2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y \int_0^{1-x} \mathrm{d}z$$

$$= 2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x}} (1-x)\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{8}{15}.$$

**5．计算 $\oiint_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\sqrt{x^2+z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是由 $x^2+y^2+z^2 \geq a^2$，$x^2+y^2+z^2 \leq 4a^2$ 及 $y \geq \sqrt{x^2+z^2}$ 所确定的立体 Ω 的表面的外侧，a 为正数.

解：

$$\oiint_{\Sigma} = \iiint_{\Omega} (2y + \sqrt{x^2+z^2})\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_a^{2a} (2\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\rho^2 \mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi)\mathrm{d}\varphi \cdot \int_a^{2a} \rho^3 \mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi \cdot \frac{\pi+2}{8} \cdot \frac{15}{4} a^4 = \frac{15}{16}(\pi+2)a^4.$$

***6．计算曲面积分：$\iint_S (x^3+e^y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - z(x^2y+\sin z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - x^2(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为曲面 $z=1-x^2-y^2$ 在 $z \geq 0$ 的部分，积分沿 S 的上侧.

解：记$S':\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2\le 1\end{cases}$方向取下侧，则

$$\oiint_{S+S'}=\iiint_V\left(3x^2-zx^2-2zx^2\right)dV$$

$$=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{1-z}}\left(3\rho^2\cos^2\varphi-3z\rho^2\cos^2\varphi\right)\rho d\rho=\frac{3}{16}\pi\ .$$

$$\iint_{S_1}=-\iint_{D_{xy}}\left(-x^2y^2\right)dxdy=\frac{\pi}{24}\ .$$

$$\therefore \iint_S `=\frac{3\pi}{16}-\frac{\pi}{24}=\frac{7\pi}{48}.$$

***7．计算$\iint_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中$\sum$是球面$x^2+y^2+z^2=2z$满足$z\ge\sqrt{x^2+y^2}$的那部分曲面的上侧.

解：补平面块Σ_1：$z=1$, $x^2+y^2\leqslant 1$，下侧.

$$\iint_{\Sigma_1}=\iint_{\Sigma_1}z^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\pi,$$

Σ和Σ_1围成半球体Ω，由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}v=2\iiint_{\Omega}z\,\mathrm{d}v$$

$$=2\int_1^2 z\,\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le 2z-z^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ =2\int_1^2 z\cdot\pi(2z-z^2)\,\mathrm{d}z=\frac{11}{6}\pi$$

$$\therefore\ \iint_{\Sigma}=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=\frac{11}{6}\pi-(-\pi)=\frac{17}{6}\pi$$

**8．计算通量：$\Phi=\oiint_{\boldsymbol{S}}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，其中$\boldsymbol{S}$为半径等于 4 的球面，$\boldsymbol{r}$为曲面$S$上点$(x,y,z)$的径向量.

解：$\Phi=\oiint_S\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$=\oiint_S\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{4}=\frac{1}{4}\oiiint_V 3dV=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 4^3=64\pi\ .$$

***9．求流速为$\boldsymbol{v}=x^2\ \boldsymbol{i}+y^2\ \boldsymbol{j}+z^2\ \boldsymbol{k}$的不可压缩流体（流体密度$\mu(x,y,z)\equiv$常数）在单

位时间内，流经上半单位球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 上侧的流量.

解：$\Phi=\iint\limits_S \mu\vec{f}\cdot d\vec{S}$．记 $S_1:\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2\le 1\end{cases}$ 方向取下侧，则

$$\oiint\limits_{S+S_1}\mu\vec{f}\cdot d\vec{S}=\mu\iiint\limits_V(2x+2y+2z)dV=2\mu\iiint\limits_V zdV$$

$$=2\mu\int_0^1 zdz\iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z^2}d\sigma=2\mu\int_0^1\pi(1-z^2)zdz=\frac{\pi}{2}\mu\ .$$

$$\iint\limits_{S_1}\mu\vec{f}\cdot d\vec{S}=-\mu\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}0dxdy=0\ .$$

$$\therefore\quad \iint\limits_S\mu\vec{f}\cdot d\vec{S}=\frac{\pi\mu}{2}\ .$$

第 13 章 （之 6）（总第 78 次）

教学内容： §13.5 斯托克斯公式

1．解下列各题：

*（1）设 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$，$r=|\boldsymbol{r}|$, 则下列表达式中有意义的是 （ ）

（A） $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, r)$； （B）$\mathrm{grad}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{r})$；

（C）$\mathrm{div}(\mathrm{div}\ \boldsymbol{r})$； （D）$\mathrm{rot}(\mathrm{div}\ \boldsymbol{r})$.

答：(A).

*（2）向量场 $\boldsymbol{f}=(x+y+z)(x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}+z\,\boldsymbol{k})$ 的旋度为________________.

解：$$\mathrm{rot}\,\vec{f}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2+xy+xz & xy+y^2+yz & xz+yz+z^2\end{vmatrix}=\{z-y,x-z,y-x\}.$$

*（3）设向量场 $\boldsymbol{F}=[x^2+ln(1+y^2)]\boldsymbol{i}-z\sin x\boldsymbol{j}+(e^{xy}-2xz)\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{G}=(z^2+x\cos x^2)\boldsymbol{i}+y^2e^y\boldsymbol{j}++(2xz+\mathrm{arctg}z)\boldsymbol{k}$, 则 （ ）

(A) $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ 都是无旋场．　　(B) $\boldsymbol{F}$ 是无旋场，$\boldsymbol{G}$ 是无源场．

(C) $\boldsymbol{F}$ 是无源场，$\boldsymbol{G}$ 是无旋场．　　(D) $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$ 都是无源场．

答：(C)

**（4）设函数 $f(u,v,w)$ 具有二阶连续偏导数，则 $\mathrm{rot}[\mathrm{grad}f(x,xy,xyz)]=$________.

答： $\vec{0}$.

**2．验证曲线积分 $I=\int_{(2,1,2)}^{(-1,0,4)}(yz+2)\mathrm{d}x+(xz-3)\mathrm{d}y+(xy+5)\mathrm{d}z$ 满足与路径无关的条件，求出其值．

解： $P=yz+2$ ， $Q=xz-3$ ， $R=xy+5$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=z=\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x}=y=\frac{\partial P}{\partial z}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=x=\frac{\partial R}{\partial y},$$

且 P,Q,R 都是 C^1 类函数．$\therefore$ 曲线积分与积分路径无关．

$$\therefore \qquad I=\int_2^{-1}(2+2)dx+\int_1^0(-2-3)dy+\int_2^4 5dz=3.$$

**3．向量场 $\boldsymbol{f}=e^x[\cos(y-z)\ \boldsymbol{i}-\sin(y-z)\ \boldsymbol{j}+\sin(y-z)\ \boldsymbol{k}]$ 是否为无旋场？为什么？

解：因为 $\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial Q}{\partial x}$、$\frac{\partial R}{\partial x}$、$\frac{\partial P}{\partial z}$、$\frac{\partial Q}{\partial z}$、$\frac{\partial R}{\partial y}$ 连续且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-e^x\sin(y-z)=\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}=e^x\sin(y-z)=\frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=-e^x\cos(y-z)=\frac{\partial R}{\partial y}.$$

所以给定向量场是无旋场．

**4．验证向量场 $\boldsymbol{A}=\{4x^3+2xyz+y^2z, x^2z+2xyz, x^2y+xy^2+4z^3\}$ 为无旋场．并求 $u(x,y,z)$，使（1）$u(0,0,0)=1$，（2）$\mathrm{d}u=\boldsymbol{A}\cdot\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$.

解法一：因为 $\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial Q}{\partial x}$、$\frac{\partial R}{\partial x}$、$\frac{\partial P}{\partial z}$、$\frac{\partial Q}{\partial z}$、$\frac{\partial R}{\partial y}$ 连续且

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 4x^3+2xyz+y^2z & x^2z+2xyz & x^2y+xy^2+4z^3\end{vmatrix}=\vec{0},$$

所以 A 为无旋场.

$u(x,y,z)$

$=u(0,0,0)+\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}\left\{4x^3+2xyz+y^2z,x^2z+2xyz,x^2y+xy^2+4z^3\right\}\cdot\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$

$=1+\int_0^x 4x^3\mathrm{d}x+\int_0^y 0\mathrm{d}y+\int_0^x(x^2y+xy^2+4z^3)\mathrm{d}z=1+x^4+x^2yz+xy^2z+z^4$.

解法二：先证明 A 为无旋场（同解法一）。以下求 $u(x,y,z)$ 。

由 $(4x^3+2xyz+y^2z)dx+(x^2z+2xyz)dy+(x^2y+xy^2+4z^3)dz$

$=d(x^4)+yzd(x^2)+y^2zdx+x^2zdy+xzd(y^2)+x^2ydz+xy^2dz+d(z^4)$

$=d(x^4+x^2yz+xy^2z+z^4)$ 。

所以 $u(x,y,z)=x^4+x^2yz+xy^2z+z^4+C$ ，而 $u(0,0,0)=1$ ，所以 $C=1$ 。故

$u(x,y,z)=x^4+x^2yz+xy^2z+z^4+1$.

**5．计算 $\int_\Gamma yz(2x+y+z)dx+zx(x+2y+z)dy+xy(x+y+2z)dz$ ，其中 Γ 为从原点出发的在圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 上的任意一条到点 $A=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1)$ 的有向光滑曲线.

解法一：$P=yz(2x+y+z)$ ，$Q=zx(x+2y+z)$ ，$R=xy(x+y+2z)$ ，

$$\because\quad \frac{\partial R}{\partial y}=x^2+2xy+2xz=\frac{\partial Q}{\partial z},$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=2xy+y^2+2yz=\frac{\partial R}{\partial x},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=2zx+2yz+z^2=\frac{\partial P}{\partial y}$$

$\therefore$ 曲线积分与路径无关.

$$\therefore\quad \int_\Gamma=\int_{(0,0,0)}^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}0\cdot 0\cdot(2x+0+0)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2}+2y+0)\,\mathrm{d}y$$

$$+\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+2z)\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1\left(\sqrt{2}+2z\right)\mathrm{d}\,z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

解法二：$yz(2x+y+z)dx+zx(x+2y+z)dy+xy(x+y+2z)dz$

$=yzd(x^2)+y^2zdx+yz^2dx+zx^2dy+zxd(y^2)+z^2xdy+x^2ydz+xy^2dz+xyd(z^2)$

$=d(yzx^2+y^2zx+z^2xy)$

所以，$\int_\Gamma yz(2x+y+z)dx+zx(x+2y+z)dy+xy(x+y+2z)dz$

$=(yzx^2+y^2zx+z^2xy)\Big|_{(0,0,0)}^{(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1)}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$。

***6．计算 $\oint_\Gamma (y^2-z^2)\,dx+(z^2-x^2)\,dy+(x^2-y^2)\,dz$，其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧的位于 $x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0$ 部分Σ的边界，方向从原点向曲面Σ看为顺时针方向，$a>0$.

解：$P=y^2-z^2$, $Q=z^2-x^2$, $R=x^2-y^2$, 取Σ为：$x^2+y^2+z^2=a^2$, $x\geqslant0$, $y\geqslant0$, $z\geqslant0$. 上侧．由斯托克斯公式

$$\oint_\Gamma=-2\iint_\Sigma(y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由对称性， $\iint_\Sigma y\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_\Sigma z\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_\Sigma z\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_\Sigma x\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_\Sigma x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Sigma y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\therefore\quad\oint_\Gamma=-12\iint_\Sigma x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因Σ在 xoy 面上的投影域为 D：$x^2+y^2\leqslant a^2$, $x\geqslant0$, $y\geqslant0$.

$$\therefore\quad\oint_\Gamma=-12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{d}r$$

$$=-12\cdot1\cdot\frac{a^3}{3}=-4a^3.$$

***7．试证：$\oint_C(z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z)=\pi\sqrt{3}$．其中 C 是平面曲线 $x+y+z=0$，$x^2+y^2+z^2=1$，其正向使确定出所在平面的正法向指向上.

解：$\oint_C zdx+xdy+ydz=\iint_S\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & x & y\end{vmatrix}$

$$=\iint_S dydz+dzdx+dxdy=\iint_S \{1,1,1\}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}ds=\sqrt{3}\iint_S ds=\pi\sqrt{3}\ .$$

***8．计算 $\oint_{\Gamma} x^2yz\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y+(x+y+1)\mathrm{d}z$， 其中 Γ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=5, z=x^2+y^2+1$ 的交线，在原点沿 z 轴正向向上看 Γ 的方向为逆时针方向.

解：Γ 所围的平面块 Σ 为 $z=2,\ x^2+y^2\leqslant 1$, 方向向下． ∵ $P=x^2yz,\ Q=x^2+y^2,\ R=x+y+1$.

$$\therefore\ \oint_{\Gamma}=-\iint_{\Sigma}(1-0)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(x^2y-1)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(2x-x^2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

由于 Σ 在 yoz 面及 zox 面上均无投影域，故

$$\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,\ \iint_{\Sigma}(x^2y-1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0.$$

而 Σ 在 xoy 面上的投影域为 D：$x^2+y^2\leqslant 1$.

$$\therefore\ \oint_{\Gamma}=-\iint_{\Sigma}(2x-x^2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_{D}(2x-x^2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\ .$$