华东理工大学 2020–2021 学年第二学期

《高等数学(下)》(11 学分) 课程期末考试试卷答案 (A) 2021.7

开课学院：理学院， 专业：大面积， 考试形式：闭卷， 所需时间 120 分钟

一、解下列各题（每小题 6 分，共 12 分）：

1、假设二阶可导函数 $f(x)$ 满足如下条件，$x=\pi$ 为 $f(x)$ 的驻点，$f(\pi)=1$ 且

$f''(x)+f(x)=0$ ，求 $f(x)$。

解：方程 $f''(x)+f(x)=0$ 为二阶线性常系数齐次微分方程， (2 分)

其特征方程为 $\lambda^2+1=0$，

$\lambda=\pm i$

故其通解为 $f(x)=C_1\sin x+C_2\cos x$ (2 分)

又由条件 $f(\pi)=1$，$f'(\pi)=0$，得到 $f(x)=-\cos x$. (2 分)

2. 求微分方程 $y''+\dfrac{y'}{x}=0$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

解: 令 $p=y'$, 则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\dfrac{p}{x}=0$. (2 分)

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

两边积分得 $\ln p=-\ln x+\ln c_1$, 即 $p=\dfrac{c_1}{x}$. (2 分)

将 $x=1,\ p=1$ 代入得 $c_1=1$. 因此 $y'=\dfrac{1}{x}$.

两边积分得 $y=\ln x+c_2$.

将 $x=1,\ y=1$ 代入得 $c_2=1$. 因此 $y=1+\ln x$. (2 分)

二、解下列各题（每小题 6 分，共 18 分）：

1. 求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值

解 $f_x'(x,y)=2x\left(2+y^2\right)$，$f_y'(x,y)=2x^2y+\ln y+1$ (2 分)

令$\begin{cases} f_x'(x,y)=0 \\ f_y'(x,y)=0 \end{cases}$解得唯一驻点为$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ (2 分)

由于$A=f_{xx}''\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=2\left(2+y^2\right)\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=2\left(2+\dfrac{1}{e^2}\right)$，$B=f_{xy}''\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=4xy\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=0$

$C=f_{yy}''\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=\left(2x^2+\dfrac{1}{y}\right)\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=e$，所以$B^2-AC=-2e\left(2+\dfrac{1}{e^2}\right)<0$且$A>0$

从而$f\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$是$f(x,y)$的极小值，极小值为$f\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$ (2 分)

2. 求曲线$L: xy+yz+zx=11,\quad xyz=6$在点$M_0=(1,2,3)$处的切线方程.

解：设 $F(x,y,z)=xy+yz+zx-11$，$G(x,y,z)=xyz-6$，

则$\vec{n}=\nabla F\times\nabla G=\{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)},\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z},\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\}$ (2 分)

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y+z & x+z \\ yz & xz \end{vmatrix}=xz(y+z)-yz(x+z)=z^2(-y+x),$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix} x+z & y+x \\ zx & xy \end{vmatrix}=xy(x+z)-xz(x+y)=x^2(y-z),$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix} x+y & y+z \\ xy & zy \end{vmatrix}=zy(x+y)-xy(y+z)=y^2(z-x).$$

$\therefore \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big|_{M_0}=-9,\quad \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_{M_0}=-1,\quad \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\Big|_{M_0}=8$， (2 分)

$\therefore$切线方程为 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{8}=\dfrac{z-3}{-9}$. (2 分)

3. 将函数$f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$展开成x的幂级数.

解法一

因为$\dfrac{x}{2+x-x^2}=\dfrac{x}{3}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2-x}\right)$， (2 分)

分别将$\dfrac{1}{1+x},\dfrac{1}{2-x}$展开成$x$的幂级数

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,|x|<1,$$

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}},|x|<2, \qquad (2分)$$

所以

$$\frac{x}{2+x-x^2}=\frac{x}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^{n+1},|x|<1 \qquad (2分)$$

解法二

因为$\dfrac{x}{2+x-x^2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{2-x}-\dfrac{1}{1+x}\right)$, (2分)

分别将$\dfrac{1}{1+x},\dfrac{2}{2-x}$展开成$x$的幂级数

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,|x|<1,$$

$$\frac{2}{2-x}=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n},|x|<2, \qquad (2分)$$

所以$\dfrac{x}{2+x-x^2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{2-x}-\dfrac{1}{1+x}\right)=\dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{1}{2^n}-(-1)^n\right]x^n,|x|<1$ (2分)

三、 填空题（每小题 4 分，共 32 分）：

1 、 设 函 数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$ ， 单 位 向 量 $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$ ， 则

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{(1,2,3)}=$__________________.

答：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2、微分方程$y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$的通解是__________________.

答：$y = Cx \cdot e^{-x}$

3. 设$u(x,y,z) = xye^{2z}$，则$du(x,y,z) =$______________________________ .

答：$ye^{2z}dx + xe^{2z}dy + 2xye^{2z}dz$

4、平面通过 y 轴,且过点$(1,0,-1)$，则其方程为______________________________.

答：$x + z = 0$

5、级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的敛散性是______________________________.（填收敛或者发散）

答：收敛

6 、 设 L 为 $x^2 + y^2 = 1$ 的 第 一 象 限 部 分 ， 曲 线 积 分 $\int_L (x+y)ds =$____________________.

答：2

7、 设$x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx(-\pi \le x \le \pi)$，则$a_2 =$________.

答：1

8、设L为圆周$x^2 + y^2 = 2$, 方向为逆时针方向，则曲线积分$\int_L x\mathrm{d}y - 2y\mathrm{d}x =$____.

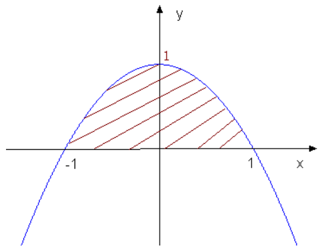
答：6π

四、解下列各题（每小题 6 分，共 12 分）:

1. 计算二重积分$\iint_D x^2\sqrt{1-y}d\sigma$，其中$D = \{(x,y)|\ 0 \le y \le 1 - x^2\}$.

解：$D = \{(x,y)|0 \le y \le 1 - x^2\} \Rightarrow D: 0 \le y \le 1$，

原式$= \int_0^1 \sqrt{1-y}dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} x^2 dx$ （3 分）



$$= \int_0^1 \sqrt{1-y}dy \frac{1}{3}x^3\Big|_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{1-y}\left[(1-y)\sqrt{1-y} + (1-y)\sqrt{1-y}\right]dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (1-y)^2 dy$$

$$=\mathbf{\frac{2}{9}}$$ (3 分)

2、计算 $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy+\int_0^2 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$

解：原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{2cos\theta}^{2} \rho^2 d\rho$ (3 分)

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-cos^3\theta)d\theta$$

$$=\frac{8\pi}{3}-\frac{32}{9}$$ (3 分)

五、(本题 6 分)设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$，计算 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解：$\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z^2} z^2dxdy$ (2 分)

$$=\int\limits_{-1}^{1}\pi(1\text{-}z^2)z^2\mathrm{d}z$$ (2 分)

$$=\frac{4}{15}\pi$$ (2 分)

六、(本题 8 分) 半径为 R 的球壳，质量为 M ，其方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

（1）若球壳的面密度为常数，计算其绕 z 轴的转动惯量;

（2）若球壳的面密度 $\mu(x,y,z)=k\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ （其中 k 为未知常数)，计算其绕 z 轴的转动惯量。

解：（1）显然面密度 $\mu(x,y,z)=\frac{M}{4\pi R^2}$ ，

故其转动惯量为 $I=\iint\limits_{S}\frac{M}{4\pi R^2}(x^2+y^2)dS$ （2 分）

$$=2\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{M}{4\pi R^2}(x^2+y^2)\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$=\dfrac{2}{3}MR^2$ （2 分）

（2）球壳的质量 $M=\iint\limits_S k\sqrt{R^2-x^2-y^2}dS$ ，所以 $k=\dfrac{M}{2\pi R^3}$ （2 分）

故其转动惯量为 $I=\iint\limits_S \dfrac{M}{2\pi R^3}\sqrt{R^2-x^2-y^2}(x^2+y^2)dS$

$$=2\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{M}{2\pi R^3}\sqrt{R^2-x^2-y^2}(x^2+y^2)\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=2\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{M}{2\pi R^2}(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}MR^2$$ （2 分）

七、(本题 6 分)

判断下列命题是否正确，如果正确，请给出证明；否则给出反例，并说明反例的正确性（即说明给出的反例满足命题条件，但不满足结论）。

命题 若二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的沿着任何方向的方向导数都存在，则 $f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(0,0)$， $f_y(0,0)$ 也都存在。

解：本命题是假命题。 （2 分）

反例： $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

设 $\vec{l}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$ 为平面上任意一个单位向量，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\rho\cos\alpha,\rho\cos\beta)-f(0,0)}{\rho}=1,$$

所以 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在（0，0）处沿任意方向的方向导数都存在。 （2 分）

而 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在!

故命题不正确。 （2 分）

八、(本题 6 分) 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

解 取$\sum_1 : x^2+y^2+z^2=1$的外侧，Ω为$\sum$与$\sum_1$之间的部分

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\oiint_{\Sigma-\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\oiint_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

根据高斯公式，可得

$$\oiint_{\Sigma-\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\iiint_{\Omega}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

$$\oiint_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\oiint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\pi$$

所以$I=4\pi$.