传热学

非稳态导热III

授课老师：苗雨

目录
CONTENTS

01

课前回顾及导引

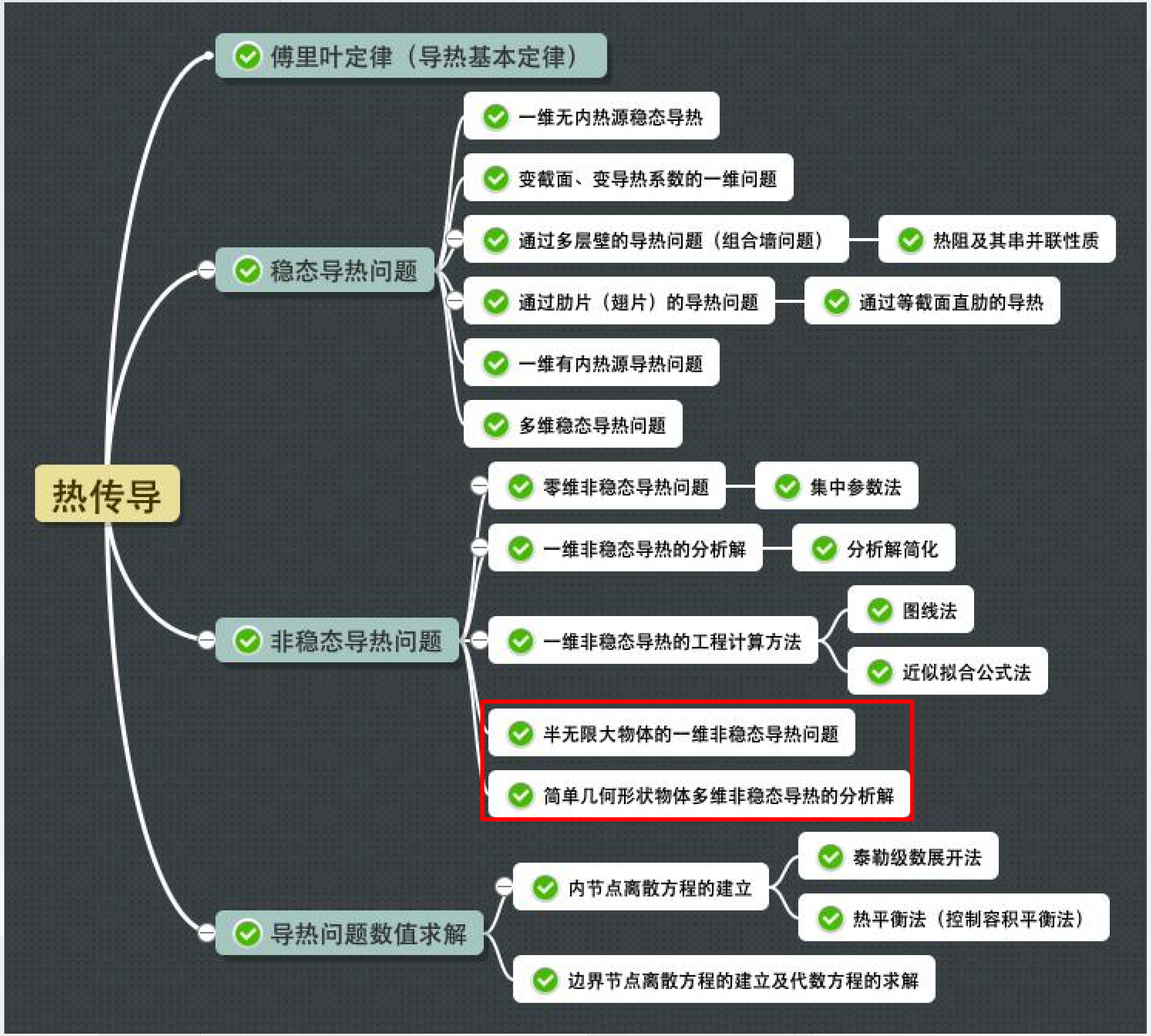
课前回顾及导引

1 非稳态导热正规状态阶段的工程计算方法有哪两种？图线法，近似拟合公式法

2 图线法的步骤：

- 首先计算__Bi__和Fo的数值
- 在“__中心温度的诺谟图__”上由Fo和__1/Bi__确定θ_m/θ_0，再确定__θ_m__。
- 在“__θ/θ_m曲线__”上由__1/Bi__和__x/δ__确定θ/θ_m，再确定$\theta=t-t_\infty$。
- 在“__Q/Q_0曲线__”上由__$FoBi^2$__和Bi确定__Q/Q_0__。

课前回顾及导引



热传导
傅里叶定律（导热基本定律）
稳态导热问题
一维无内热源稳态导热
变截面、变导热系数的一维问题
通过多层壁的导热问题（组合墙问题）
热阻及其串并联性质
通过肋片（翅片）的导热问题
通过等截面直肋的导热
一维有内热源导热问题
多维稳态导热问题
非稳态导热问题
零维非稳态导热问题
集中参数法
一维非稳态导热的分析解
分析解简化
一维非稳态导热的工程计算方法
图线法
近似拟合公式法
半无限大物体的一维非稳态导热问题
简单几何形状物体多维非稳态导热的分析解
导热问题数值求解
内节点离散方程的建立
泰勒级数展开法
热平衡法（控制容积平衡法）
边界节点离散方程的建立及代数方程的求解

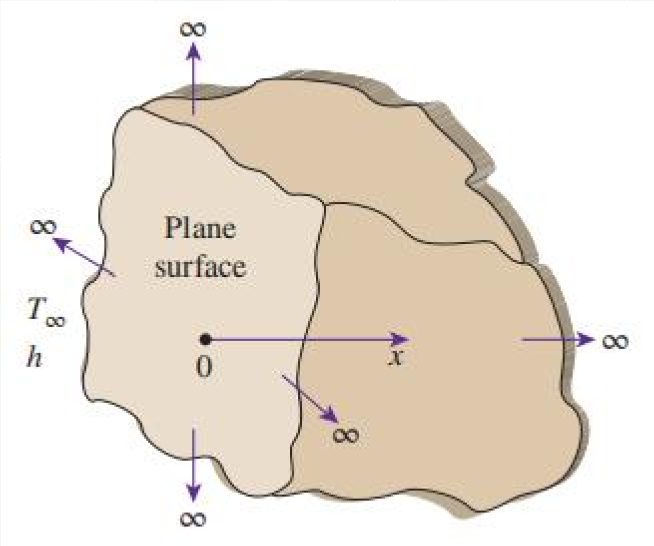
02

半无限大物体的一维非稳态导热问题

- 半无限大物体的定义与特点
- 三种边界条件下半无限大物体温度场的分析解

半无限大物体的定义与特点

- 半无限大平板是一维平板的特殊情况
- 特点：
  - ✓ 从x=0的界面开始可以向正向以及上、下方向上无限延伸
  - ✓ 在每一个**与x坐标垂直**的截面上物体的**温度都相等**
- 现实世界不存在，但工程导热问题中有不少情形可以按“半无限大物体”处理：**热扰动的影响尚未深入到平板内部**



地球表面（道路施工）

浇铸

三种边界条件下半无限大物体温度场的分析解

有一半无限大物体，初始温度均匀为 T_i，在 $\tau=0$ 时刻，$x=0$ 的侧面突然受到热扰动，如下三种不同边界条件作用。假定物体的热物性为常数，没有内热源。

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\cancel{\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)}+\cancel{\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)}+\cancel{\dot{\Phi}} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \tau}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\ (0<x<\infty)$$

一维导热　　无内热源

初始条件：$\tau=0,\ T(x,\ 0)=T_i$

边界条件：$\boldsymbol{x\to\infty,\ T(x,\ \tau)=T_i}$

由于其中一个边界是无限的，使用分离变量法没法求解，需要引入**相似变量**

$$x=0,\ \begin{cases} T(0,\tau)=T_w & \text{Dirichlet条件} \\ -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}=q_0 & \text{Neumann条件} \\ -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}=h[T_\infty-T(0,\tau)] & \text{Robin条件} \end{cases}$$

三种边界条件下半无限大物体温度场的分析解

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

边界条件： $@x = 0，\ T = T_w$

$@x \to \infty，\ T = T_i$

初始条件： $@\tau = 0,\ T = T_i$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{dT}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{dT}{d\eta}\left(-\frac{x}{2\tau\sqrt{4\alpha\tau}}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta}\frac{1}{\sqrt{4\alpha\tau}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{4\alpha\tau}\frac{d^2 T}{d\eta^2}$$

$$\frac{dT}{d\eta}\left(-\frac{x}{2\tau\sqrt{4\alpha\tau}}\right) = \cancel{\alpha}\frac{1}{4\cancel{\alpha}\tau}\frac{d^2 T}{d\eta^2}$$

以**Dirichlet边界条件**为例

相似变量 $\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha\tau}}$ $\quad T(x,\tau) \to T(\eta)$

$$\frac{dT}{d\eta}\left(-\frac{x}{\sqrt{4\alpha\tau}}\frac{4\tau}{2\tau}\right) = \frac{d^2 T}{d\eta^2} \Rightarrow \boxed{-2\eta\frac{dT}{d\eta} = \frac{d^2 T}{d\eta^2}}$$

三种边界条件下半无限大物体温度场的分析解

$$-2\eta\frac{dT}{d\eta}=\frac{d^2T}{d\eta^2}$$

边界条件： $@\eta=0$，$T=T_w$

$@\eta\to\infty$，$T=T_i$

初始条件： $@\tau=0$, $T=T_i$

以**Dirichlet边界条件**为例

引入变量 $w=\dfrac{dT}{d\eta}$

$$-2\eta w=\frac{dw}{d\eta}$$

$$\frac{dw}{w}=-2\eta d\eta \Rightarrow \ln w=-\eta^2+C_0$$

$$w=\ln C_0\cdot\exp\left(-\eta^2\right)=C_1\exp\left(-\eta^2\right)$$

$$\frac{dT}{d\eta}=C_1\exp\left(-\eta^2\right) \Rightarrow dT=C_1\exp\left(-\eta^2\right)d\eta$$

$$\boxed{T=\int_0^T dT=C_1\int_0^\eta \exp\left(-\eta^2\right)d\eta+C_2}$$

三种边界条件下半无限大物体温度场的分析解

$$T=\int_0^T dT = C_1\int_0^\eta \exp\left(-\eta^2\right)d\eta + C_2$$

$@\eta = 0$， $T = T_w$ $\Rightarrow$ $C_2 = T_w$

$@\eta \to \infty$， $T = T_i$ $\Rightarrow$ $T_i = C_1\int_0^\infty \exp\left(-\eta^2\right)d\eta + T_w = C_1\frac{\sqrt{\pi}}{2} + T_w$

$$C_1 = \frac{2\left(T_i - T_w\right)}{\sqrt{\pi}}$$

以**Dirichlet边界条件**求解的温度分布

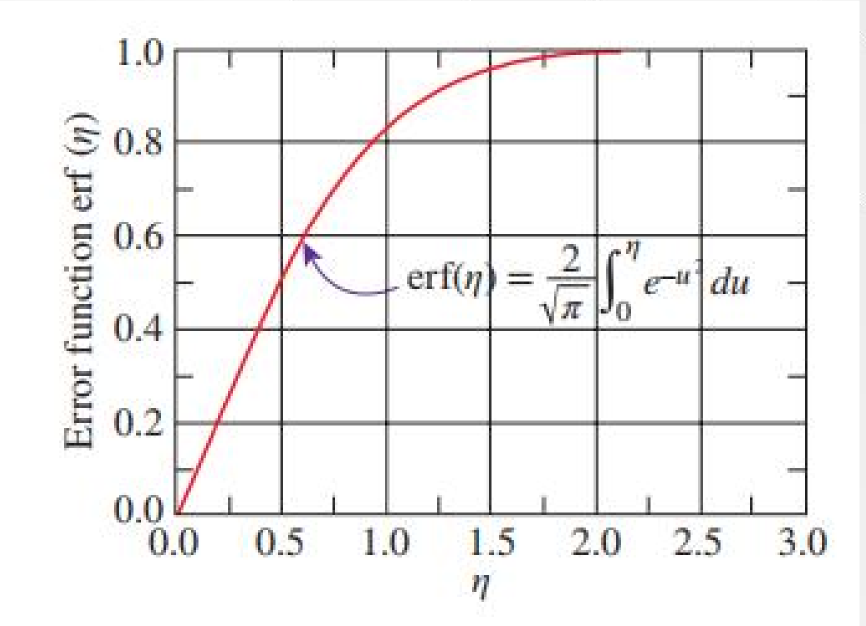
$$\boxed{\frac{T-T_w}{T_i-T_w} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta \exp\left(-\eta^2\right)d\eta = erf\left(\eta\right)}$$

误差函数(高斯误差函数)，书后P552附录15

三种边界条件下半无限大物体温度场的分析解

误差函数(高斯误差函数)

$$\mathrm{erf}(\eta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} e^{-\eta^2}d\eta \quad \begin{cases} \eta \longrightarrow \infty,\ \mathrm{erf}(\eta) \longrightarrow 1 \\ \eta\text{有限大小时},\ \mathrm{erf}(\eta)<1 \end{cases}$$



余误差函数 $\mathrm{erfc}(\eta)=1-\mathrm{erf}(\eta)$

$$\eta=\frac{x}{\sqrt{4a\tau}}$$

当$\eta \geq 2$时，$x \geq 4\sqrt{a\tau}$ 在 τ 时刻 x 处的温度可以认为尚未发生变化

当$\eta \geq 2$时，$\tau \leq \dfrac{x^2}{16a}$ 热量传递到x处所需要的时间是 τ，这个时间称为**惰性时间**

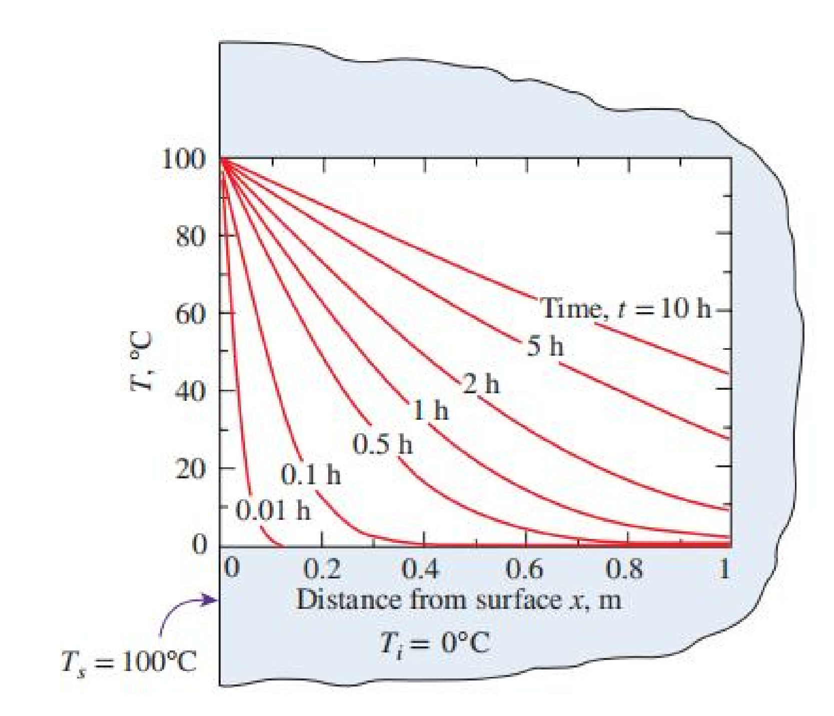
三种边界条件下半无限大物体温度场的分析解

Neumann边界条件

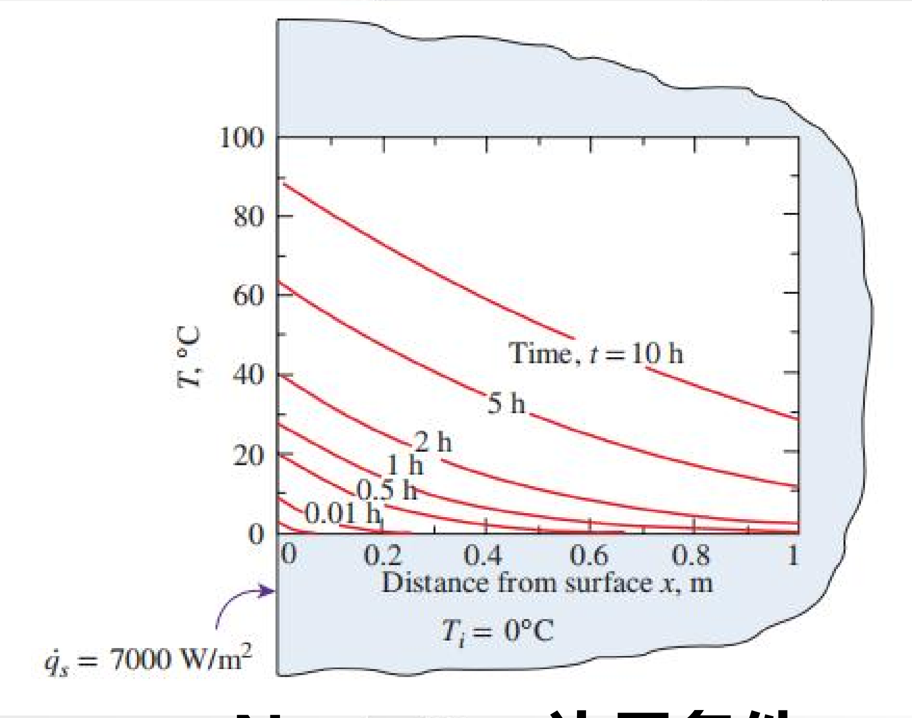
$$t - t_0 = \frac{2q_0\sqrt{\frac{\alpha\tau}{\pi}}}{\lambda}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha\tau}\right) - \frac{q_0 x}{\lambda}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right)$$

Robin边界条件

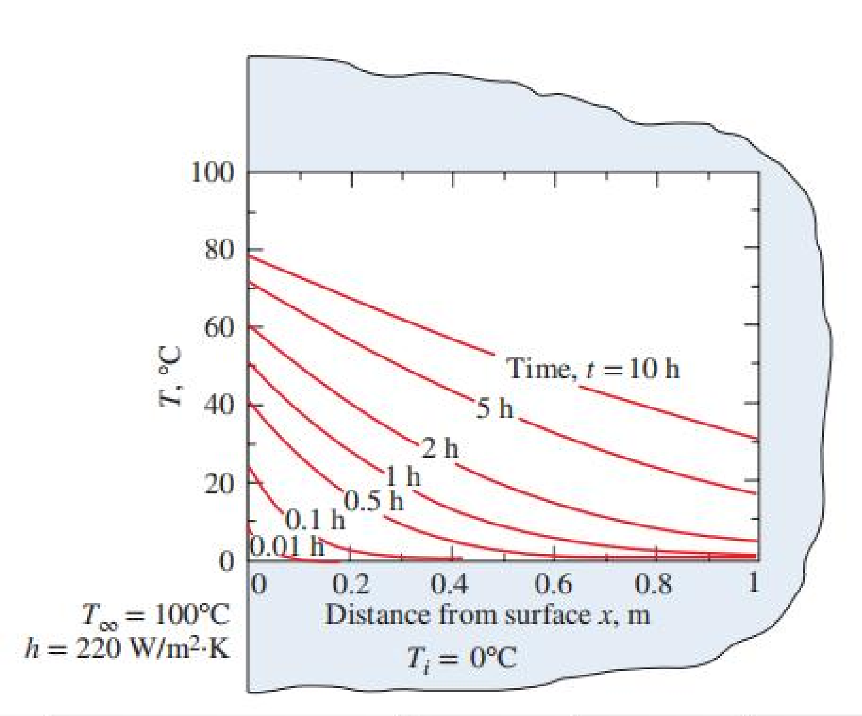
$$\frac{t - t_0}{t_\infty - t_0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) - \exp\left(\frac{hx}{\lambda} + \frac{h^2\alpha\tau}{\lambda^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} + \frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{\lambda}\right)$$



Dirichlet边界条件



Neumann边界条件



Robin边界条件

三种边界条件下半无限大物体温度场的分析解

通过任意截面x处的**热流密度**

$$q_x = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda(T_i - T_w)\frac{\partial \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right)}{\partial x} = \lambda\frac{T_w - T_i}{\sqrt{\pi\alpha\tau}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha\tau}\right)$$

在表面上(x=0)的**导热量**

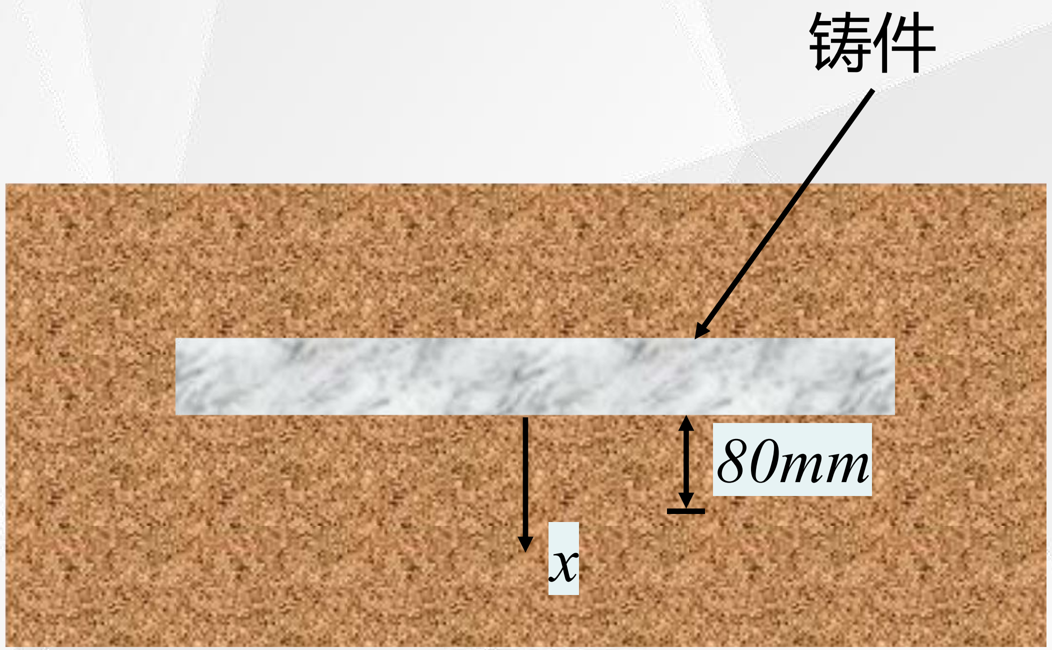
$$\Phi = A\int_0^\tau q_w d\tau = A\int_0^\tau \lambda\frac{T_w - T_i}{\sqrt{\pi\alpha\tau}}d\tau = 2A\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\sqrt{\rho c\lambda}(T_w - T_i)$$

非稳态导热中，导热量与物体的$\sqrt{\rho c\lambda}$成正比（稳态导热中，与ρc无关）

$\sqrt{\rho c\lambda}$为**吸热系数**，代表了物体向与其接触的高温物体吸热的能力

三种边界条件下半无限大物体温度场的分析解

例题1：一块大平板型钢铸件在在地坑中浇铸，浇铸前型砂温度为20℃。设在很短时间内浇铸完成，并且浇铸后铸件的表面温度一直维持在其凝固温度1450℃，试计算离铸件底面80mm处浇铸后2h的温度。型砂的热扩散率α =0.89×10^{-6}m^2/s。



如果我想计算2h后从铸件地面到其下方80mm范围内的温度分布，一个个温度算吗？

三种边界条件下半无限大物体温度场的分析解

```
%==================================================================
clear
clc
format short
syms t
%------------------------------------------------------------------
x = (0:0.001:0.08);
% define the variables
alpha = 0.89*10^(-6); %热扩散率
time = 7200; %时间
T0 = 20; %初温
TW = 1450; %末温
% calculate Eata
Eata = x/2/sqrt(a*time); %无量纲参数
% calculate erf
for n = 1:length(Eata)
    y = 2/sqrt(pi)*exp(-t^2);
    f = int(y,t,0,Eata(n)); %积分
    erf(n) = f;
end
% calculate temperature
T = vpa(TW+erf*(T0-TW));
% extract the results
display(['x =',num2str(x)]);
fprintf('T = %3.2f\n',double(T))
%------------------------------------------------------------------
% draw the picture
plot(T,x,'linewidth',2);
%set(gca,'YDIR','reserve')
hold on
plot(T,x,'o','Markersize',6);
xlabel('{\itT}/K','Fontname','Times New Roman','fontsize',11)
ylabel('{\itx}/m','Fontname','Times New Roman','fontsize',11)
set(gca,'Fontname','Times New Roman','FontSize',11);
%==================================================================
```

系统设置

从底面到距离其下方80cm处每10cm为一节点（距离可以更改）

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \qquad \mathrm{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} e^{-t^2}dt$$

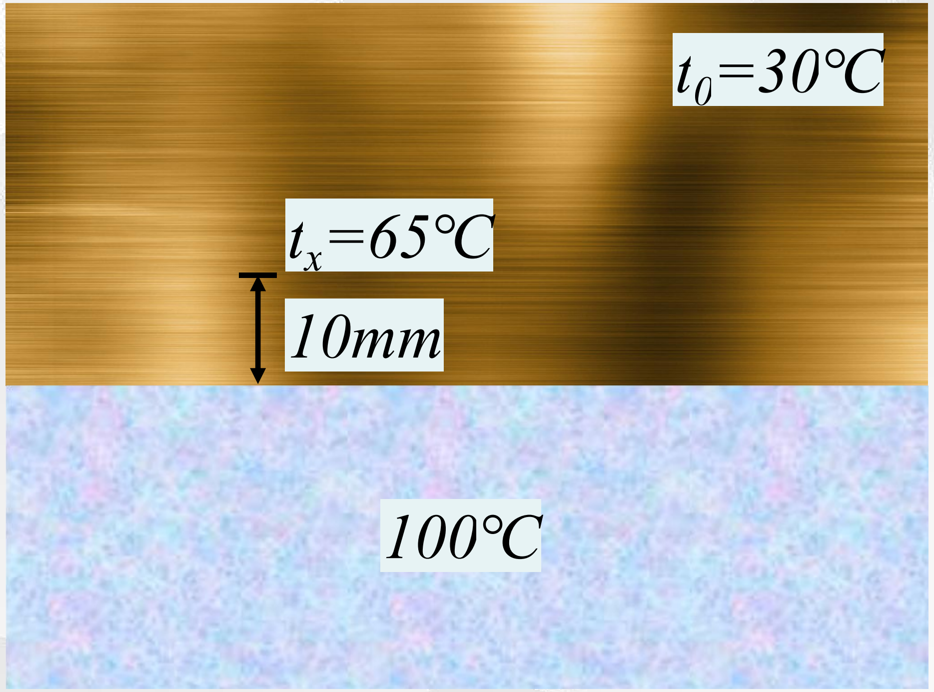
使用for循环语句计算误差函数

$$T = T_w + erf(\eta)(T_0 - T_w)$$

绘制图线

三种边界条件下半无限大物体温度场的分析解

例题2：一种测量导热系数的瞬态法是基于半无限大物体的导热过程而设计的。设有一块厚金属，初温为30℃，然后其一侧表面突然与温度为100℃的沸水相接触。在离开此表面10mm处由热电偶测得2min后该处的温度为65℃。已知材料的ρ=2200kg/m³、c=700J/(kg·K)，试计算该材料的导热系数。

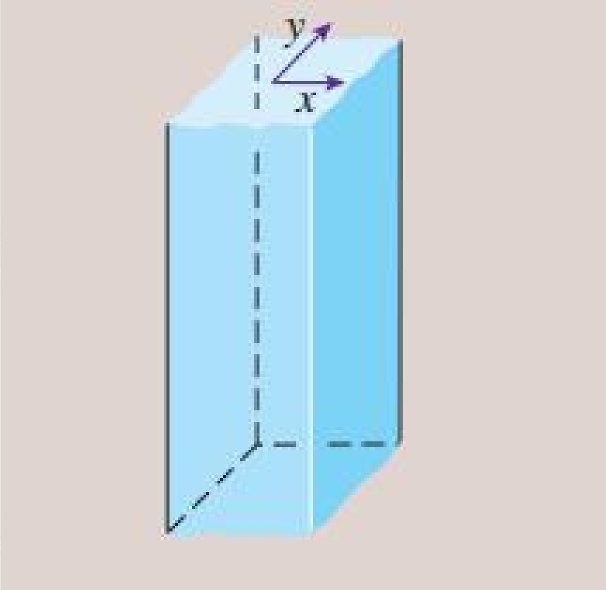


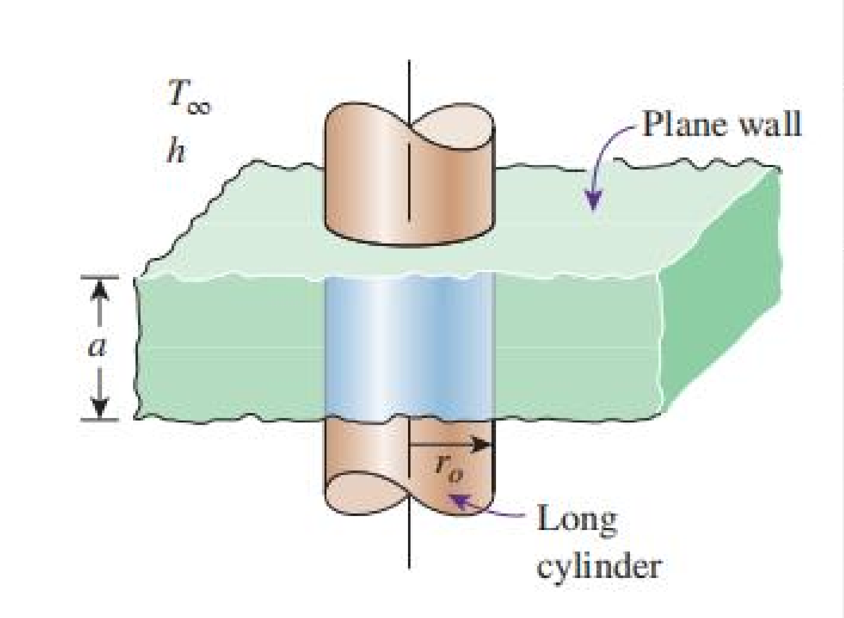
03

简单几何形状物体多维非稳态导热的分析解

- 乘积解法
  - 方形截面的二维柱体
  - 短圆柱体
  - 立方体
- 乘积解法适用条件

乘积解法



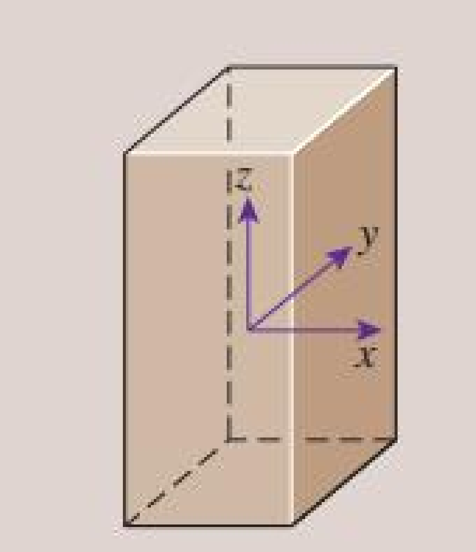


方形截面的二维柱体

短圆柱体

立方体

可用几个相应的一维非稳态导热分析解相乘得出

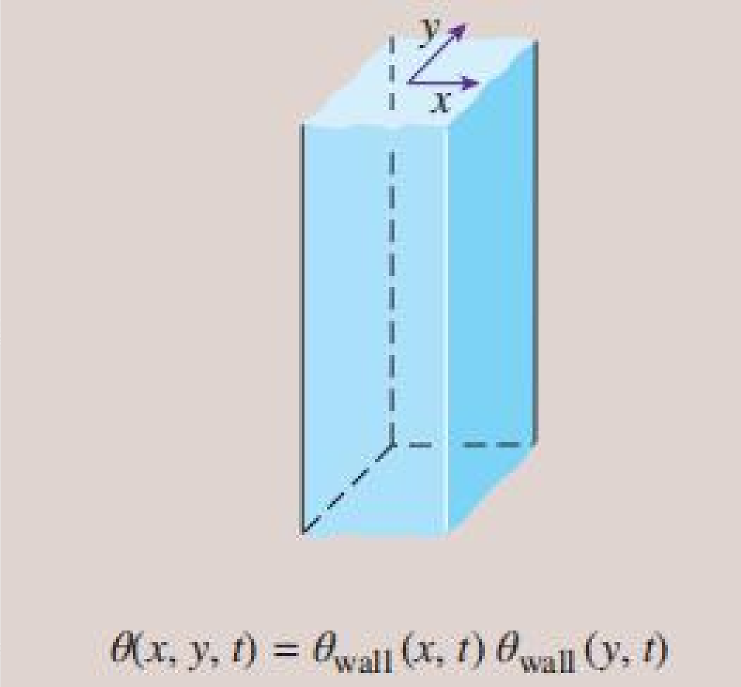


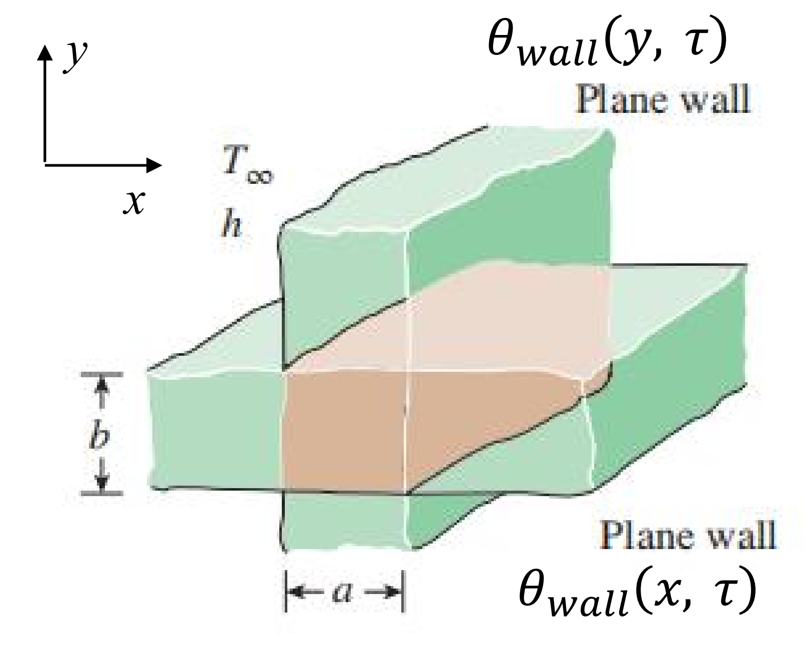
方形截面的二维柱体

- 沿着z方向物体温度没有变化
- 几何上可以看成是由两块平板相贯而成
- 假设初始温度 T_0 是均匀的，然后与周围介质之间发生对流传热，流体温度为T_∞，表面传热系数为h
- 无量纲温度场

$$\theta=\frac{\theta(x,\ y,\ \tau)}{\theta_0}=\theta_{wall}(x,\ \tau)\cdot\theta_{wall}(y,\ \tau)$$

采用近似拟合公式法或者图线法求解



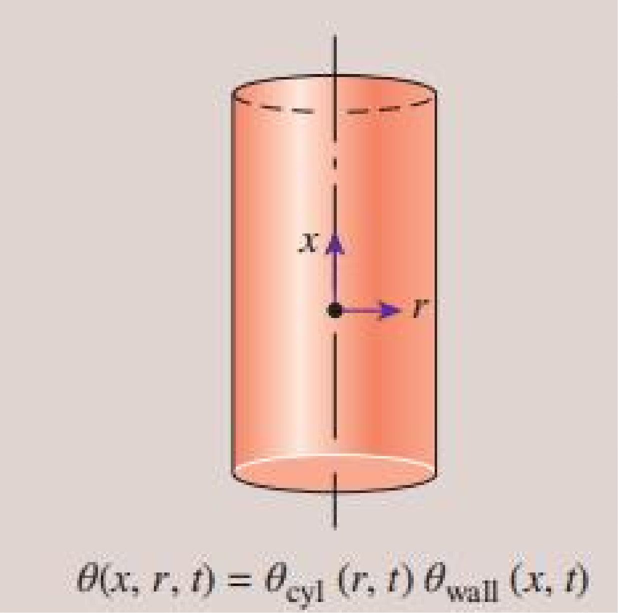


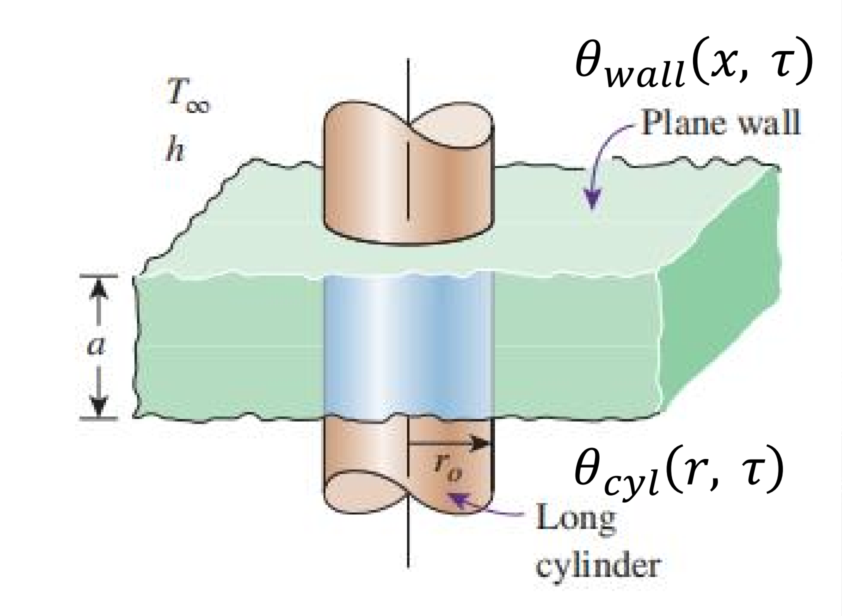
短圆柱体

- 物体温度在半径及轴向发生变化
- 几何上可以看成是由一块平板与一个圆柱相贯而成
- 假设初始温度 T_0 是均匀的，然后与周围介质之间发生对流传热，流体温度为T_∞，表面传热系数为h
- 无量纲温度场

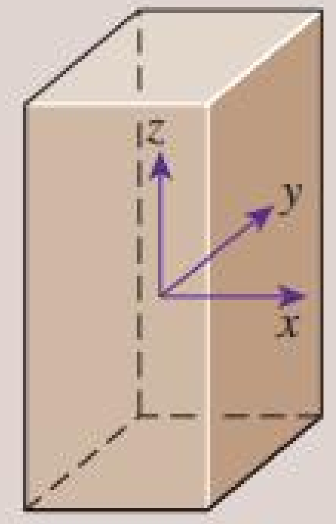
$$\theta = \frac{\theta(x, r, \tau)}{\theta_0} = \theta_{wall}(x, \tau) \cdot \theta_{cyl}(r, \tau)$$

采用近似拟合公式法或者图线法求解





立方体



$\theta(x, y, z, t) =$
$\theta_{wall}(x, t)\,\theta_{wall}(y, t)\,\theta_{wall}(z, t)$

温度在三个坐标方向均改变

几何上可以看成是由三块平板相贯而成

假设初始温度 T_0 是均匀的，然后与周围介质之间发生对流传热，流体温度为T_∞，表面传热系数为h

无量纲温度场

$$\theta = \frac{\theta(x, y, z, \tau)}{\theta_0} = \theta_{wall}(x,\ \tau)\cdot\theta_{wall}(y,\ \tau)\cdot\theta_{wall}(z,\ \tau)$$

采用近似拟合公式法或者图线法求解

乘积解法

对于多维非稳态导热，导热量**百分数**也可以通过类似乘积解法的模式得出

二维问题

$$\frac{Q}{Q_0}=\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1+\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_2\left[1-\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1\right]$$

三维问题

$$\frac{Q}{Q_0}=\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1+\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_2\left[1-\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1\right]+\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_3\left[1-\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1\right]\left[1-\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_2\right]$$

乘积解法适用条件

01 只适用于Robin边界条件 $$-\lambda\frac{\partial t}{\partial x}=h[T_{\infty}-T(0,\pi)]$$

02 物体初始温度均匀

03 周围介质温度均匀

04 表面传热系数均匀

05 常物性、没有热源

简单几何形状物体多维非稳态导热的分析解

例题3：一块牛肉从5℃的冷藏室中取出后置于180℃的烘箱中烘烤，加热到至少80℃就达到了所谓鲜嫩可食用的程度。设牛肉外表面与烘箱加热气流间的表面传热系数为20W/(m²·K)，试确定把牛肉加热到鲜嫩程度所需的时间。牛肉的物性可按水处理，其尺寸为40mm×60mm×100mm。

简单几何形状物体多维非稳态导热的分析解

例题4：一易拉罐饮料从30℃的室温中移入5℃的冰箱冷藏室中冷却。假设罐中饮料的自然对流可以忽略，其外表面与冷藏室环境的表面传热系数为10W/(m²·s)，罐壳的热阻可以忽略不计，试计算为把饮料冷却到至少10℃所需的时间。饮料物性可按水处理，罐的直径为50mm，高120mm。

预习小测验答案

1.(多选题，1分)
以下关于半无限大平板的描述正确的是?

A. 半无限大平板是从x=0的界面开始可以向正向以及上、下方向上无限延伸

B. 半无限大平板是一维平板的特殊情况

C. 半无限大平板在每一个与x坐标垂直的截面上物体的温度都不相等

D. 现实世界不存在半无限大平板，但工程导热问题中有不少情形可以按“半无限大物体”处理

答案： ABD

2.(多选题，1分)
以下关于半无限大物体温度场的分析解描述错误的是?

A. $\sqrt{\rho c\lambda}$ 为吸热系数，代表了物体向与其接触的高温物体吸热的能力

B. 误差函数是余误差函数的倒数

C. 非稳态导热中，导热量与物体的 $\sqrt{\rho c\lambda}$ 成反比

D. 稳态导热中，导热量与ρc无关

答案： BC

3.(多选题，1分)
关于简单几何形状物体多维非稳态导热的分析解的描述正确的是?

A. 对于多维非稳态导热，乘积解法只能求解无量纲温度场，不能求解导热量百分数

B. 乘积解法只适用于Robin边界条件

C. 乘积解法只适用于常物性、没有热源的情况

D. 求简单几何形状物体多维非稳态导热的分析解可以采用乘积解法

答案： BCD