

## 第9章 机械臂的轨迹控制



**主讲：许璟、周家乐**

**单位：信息科学与工程学院**

**邮箱：[jingxu@ecust.edu.cn](mailto:jingxu@ecust.edu.cn)**

**办公：徐汇校区 实验19楼1213室**

# 轨迹控制



机器人  
激光切  
割加工

机器人运动过程中存在摩擦力、重力等扰动因素，使其轨迹偏离预定轨迹，必须实施**轨迹控制**以提高机器人工作的质量。

# 轨迹控制

## 策略一：开环控制

不实用

利用第七章所建立的操作臂动力学方程计算该运动轨迹所需的力矩（或力）。由于设定值  $q_d$ 、 $\dot{q}_d$  和  $\ddot{q}_d$  已经给定，计算出：

$$\tau = D(q_d)\ddot{q}_d + H(q_d, \dot{q}_d) + G(q_d)$$

理想条件：模型必须十分完善和绝对准确，没有噪声和干扰。

构造高性能控制系统的唯一方法是使用反馈控制，即：

## 策略二：闭环系统

由关节传感器组成闭环系统

系统的伺服误差包括两部分：位置误差  $e = q_d$  和速度误差  $\dot{e} = \dot{q}_d - \dot{q}$ 。然后，控制系统计算驱动器输出的力矩大小，它是伺服误差的函数。驱动器的力矩有使伺服误差减小的趋势。

设计控制系统的首要任务是使系统稳定，第二个任务是使系统的闭环性能令人满意。

# 本章内容

## 9.1 操作臂的单关节传递函数及PD控制

## 9.2 二阶线性系统控制器的分解

## 9.3 操作臂的单关节控制规律分解

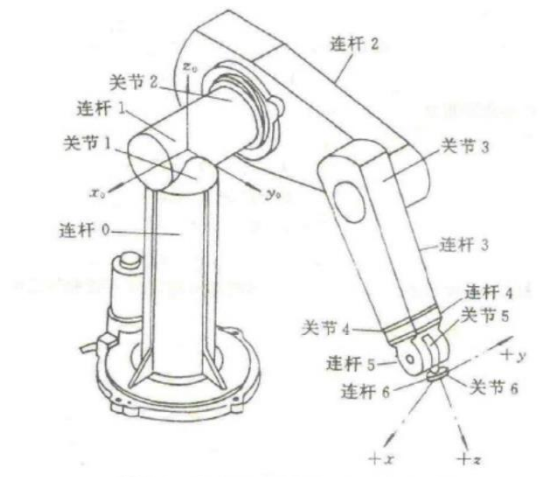
## 9.4 操作臂的非线性控制

## 9.5 操作臂的多关节控制

## 9.6 基于直角坐标的控制

## 9.7 李雅普诺夫稳定性分析

# 9.1 单关节的建模和控制



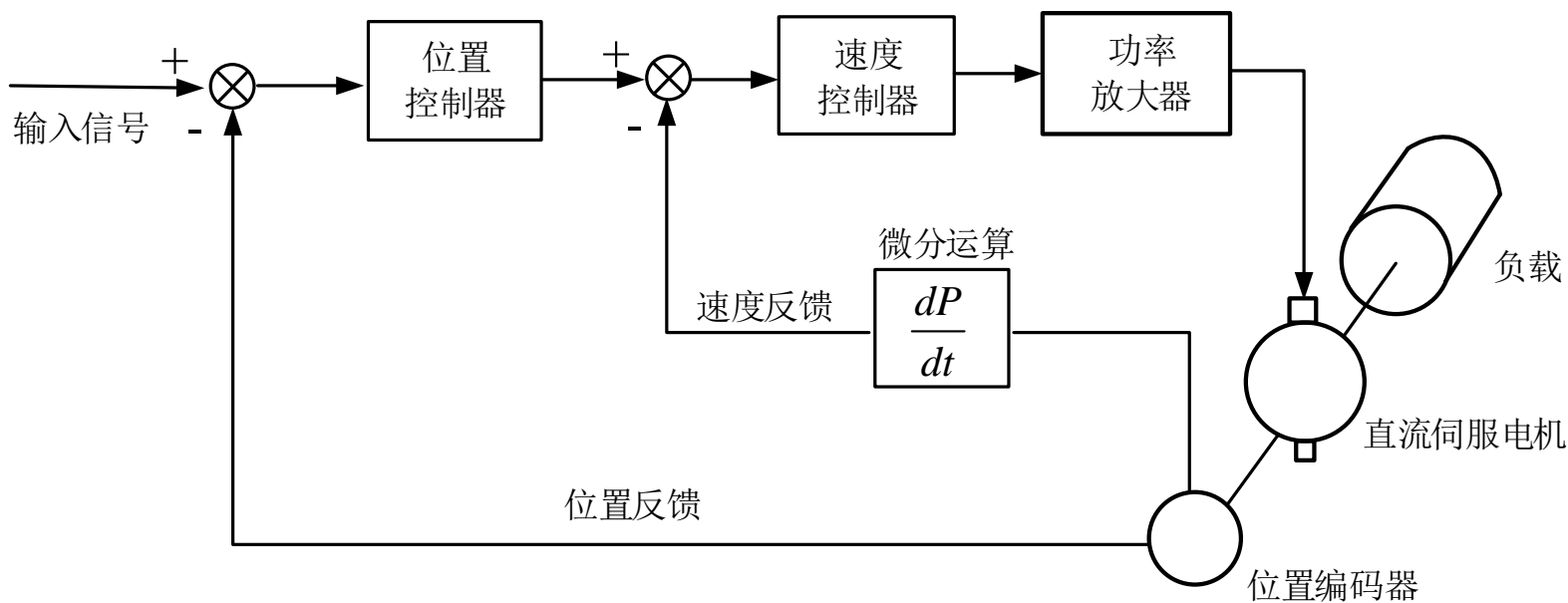
操作臂实际上是由一系列刚体通过**关节**连接而成的运动链



每个关节由一个单独的**驱动器（电机）**施加力和力矩

## 9.1.1 数学模型、单关节的传递函数

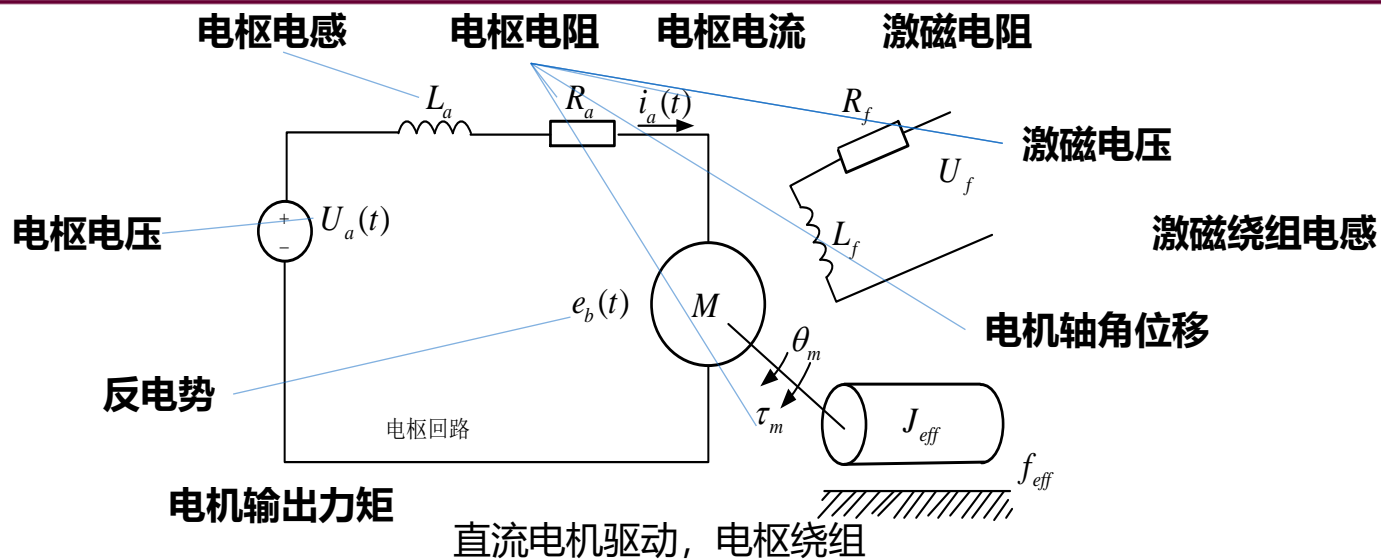
□ 最常见的驱动方式是每个关节用一个直流（DC）永磁力矩电机驱动。



直流电机驱动原理图

**特点：**力矩—功率比高，性能曲线平滑，可低速运转，力矩—速度特性是线性的，时间常数小。

## 9.1.1 数学模型、单关节的传递函数

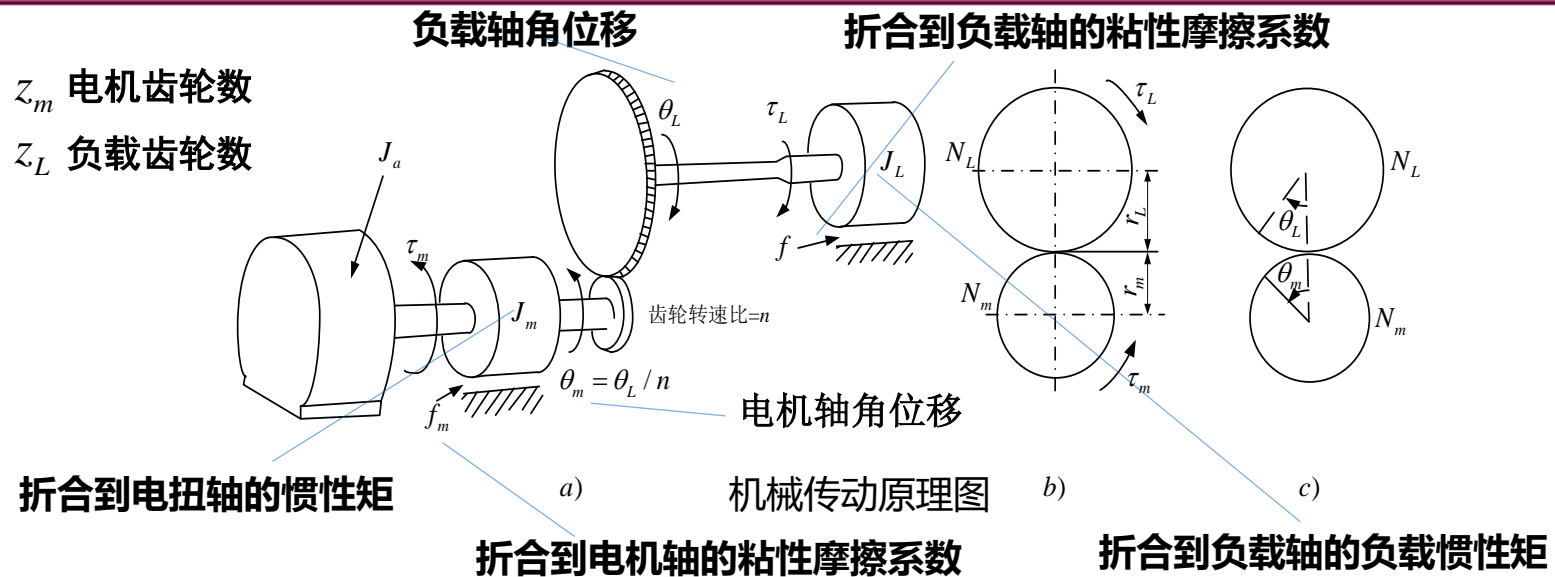


□ 电压平衡方程:  $U_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_b(t)$

□ 电机轴上产生的力矩随电枢电流线性变化  $\tau(t) = k_a i_a(t)$

□ 电机的反电动势与电机的角速度成正比  $e_b(t) = k_b \dot{\theta}_m(t)$

## 9.1.1 数学模型、单关节的传递函数



□ 力矩平衡方程:  $\tau(t) = J_{eff} \ddot{\theta}_m + f_{eff} \dot{\theta}_m$

□ 从电机轴到负载轴的传动比:  $n = z_m / z_L$

□ 折合到电机轴上的总的等效惯性矩  $J_{eff}$  和等效粘性摩擦系数  $f_{eff}$  为:  $J_{eff} = J_m + n^2 J_L$ ,  $f_{eff} = f_m + n^2 f_L$



## 9.1.1 数学模型、单关节的传递函数

例：如果操作臂负载惯性矩  $J_L$  在  $2 \sim 8 \text{kg} \cdot \text{m}^2$  之间变化，电机轴惯性矩

$J_m = 0.01 \text{kg} \cdot \text{m}^2$ ，减速比  $n = \frac{1}{40}$ ，求等效惯性矩的最大值和最小值。

求等效惯性矩的最大值和最小值。

解答：

等效惯性矩的最小值为

$$J_m + n^2 J_{L\min} = \left( 0.01 + \frac{1}{40^2} \times 2 \right) \text{kg} \cdot \text{m}^2 = 0.01125 \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

最大值为

$$J_m + n^2 J_{L\max} = \left( 0.01 + \frac{1}{40^2} \times 8 \right) \text{kg} \cdot \text{m}^2 = 0.015 \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

相对于负载惯性矩的变形率，减速器使则算到电机轴的等效惯性矩变化率减小了。

## 9.1.1 数学模型、单关节的传递函数

□ 对以上公式进行拉普拉斯变换得：
$$I_a(s) = \frac{U_a(s) - U_b(s)}{R_a + sL_a}$$

$$T(s) = s^2 J_{eff} \Theta_m(s) + s f_{eff} \Theta_m(s)$$

$$T(s) = k_a I_a(s), \quad U_b(s) = s k_b \Theta_m(s)$$

□ 将上面四式联立组合，得到从电枢电压到电机辐角位移的传递函数：

$$\frac{\Theta_m(s)}{U_a(s)} = \frac{k_a}{s[s^2 J_{eff} L_a + (L_a f_{eff} + R_a J_{eff})s + R_a J_{eff} + k_a k_b]}$$

□ 由于电机的电气时间常数远小于其机械时间常数，可以忽略电枢的电感。简化得到：

$$\frac{\Theta_m(s)}{U_a(s)} = \frac{k_a}{s(s R_a J_{eff} + R_a f_{eff} + k_a k_b)} = \frac{k}{s(T_m s + 1)}$$

其中，电机增益常数和时间常数分别为：

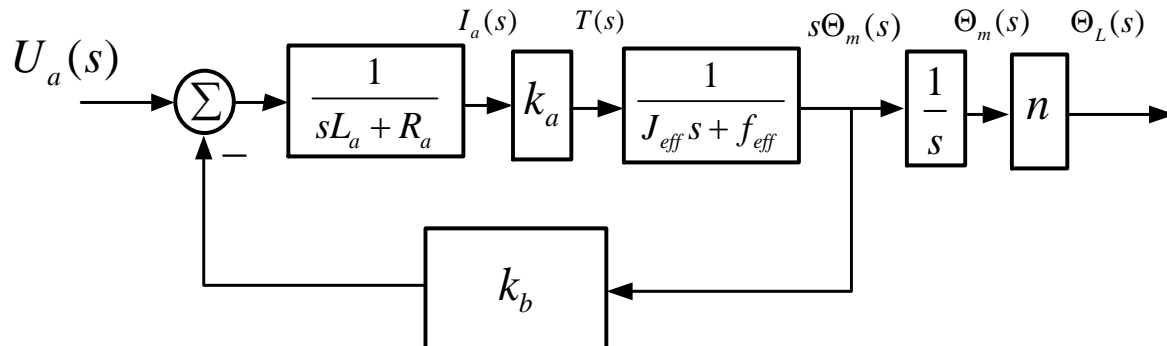
$$k = \frac{k_a}{R_a f_{eff} + k_a k_b}, \quad T_m = \frac{R_a J_{eff}}{R_a f_{eff} + k_a k_b}$$

## 9.1.1 数学模型、单关节的传递函数

□ 由于控制系统的输出是关节角位移 $\Theta_L(s)$ ，其与电枢电压 $U_a(s)$ 之间的传递关系为：

$$\frac{\Theta_L(s)}{U_a(s)} = \frac{nk_a}{s(sR_aJ_{eff} + R_af_{eff} + k_ak_b)}$$

该式表示所加电压与关节角位移之间的传递函数



单关节开环传递函数

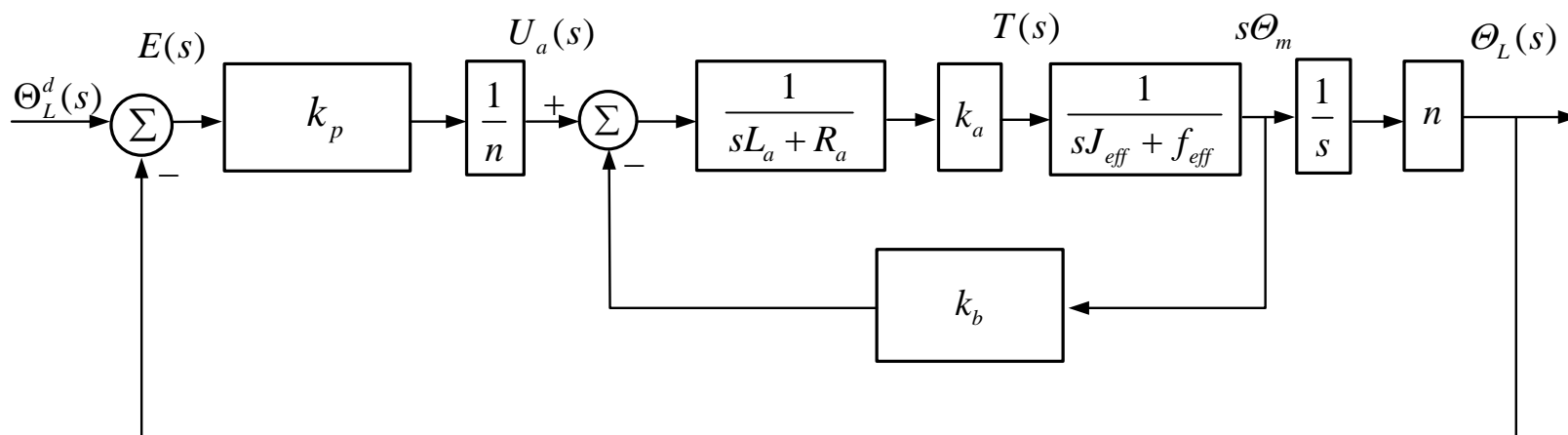
## 9.1.2 单关节的位置控制器

**作用：**利用电机组成的伺服系统使关节的实际角位移跟踪预期的角位移，把伺服误差作为电机的输入信号，产生适当的电压

$$U_a(t) = \frac{k_p e(t)}{n} = \frac{k_p (\theta_L^d(t) - \theta_L(t))}{n}$$

$k_p$  是位置反馈增益,  $e(t)$  是系统误差,  $n$  是传动比。

**单关节反馈控制如下：**



## 9.1.2 单关节的位置控制器

□ 对 $U_a(t)$  表达式进行拉普拉斯变换得：

$$U_a(s) = \frac{k_p (\theta_L^d(s) - \theta_L(s))}{n} = \frac{k_p E(s)}{n}$$

□ 误差信号与实际位移之间的开环传递函数：

$$G(s) = \frac{\theta_L(s)}{E(s)} = \frac{k_a k_p}{s(sR_a J_{eff} + R_a f_{eff} + k_a k_b)}$$

□ 由此可得系统的闭环传递函数：

$$\begin{aligned} \frac{\theta_L(s)}{\theta_L^d(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{k_a k_p}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b) + k_a k_p} \\ &= \frac{\frac{k_a k_p}{R_a J_{eff}}}{s^2 + \frac{s(R_a f_{eff} + k_a k_b)}{R_a J_{eff}} + \frac{k_a k_p}{R_a J_{eff}}} \end{aligned}$$

单关节的比例控制闭环系统是个二阶系统。当系统参数均为正时，总是稳定的。

## 9.1.2 单关节的位置控制器



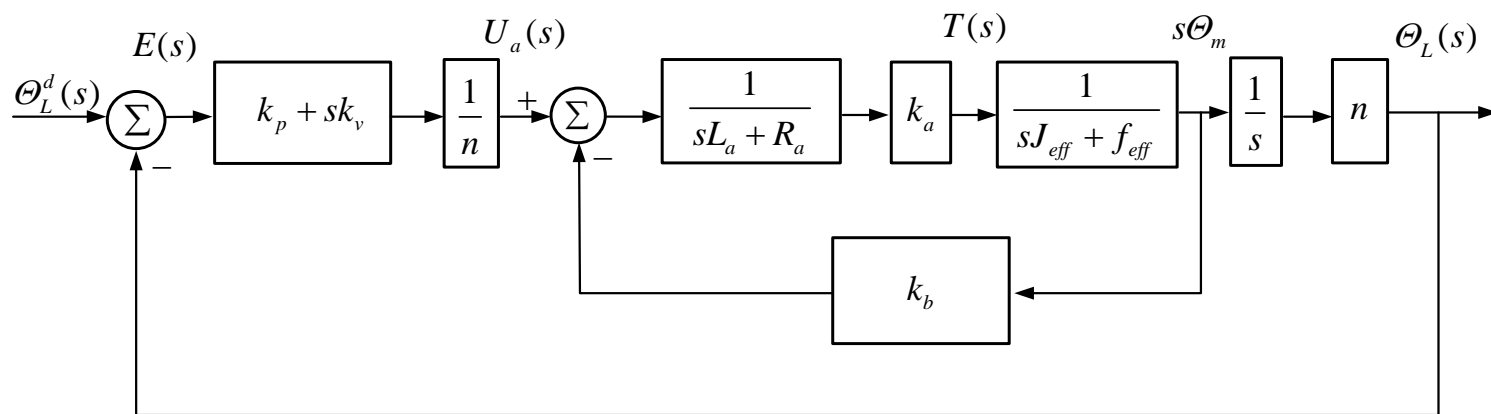
加大位置反馈增益 ( $k_p$ )  
引入速度反馈增益 ( $k_v$ )

为了改善系统的动态性能，减少静态误差

- 关节电机上所加的电压与位置误差和速度误差成正比：

$$U_a(t) = \frac{k_p e(t) + k_v \dot{e}(t)}{n} = \frac{k_p (\theta_L^d(t) - \theta_L(t)) + k_v (\dot{\theta}_L^d(t) - \dot{\theta}_L(t))}{n}$$

- 对应的闭环系统框图如下：



## 9.1.2 单关节的位置控制器

□ 此时，误差信号与实际位移之间的开环传递函数为：

$$G_{PD}(s) = \frac{\Theta_L(s)}{E(s)} = \frac{k_a(k_p + sk_v)}{s(sR_aJ_{eff} + R_af_{eff} + k_ak_b)} = \frac{sk_ak_v + k_ak_p}{s(sR_aJ_{eff} + R_af_{eff} + k_ak_b)}$$

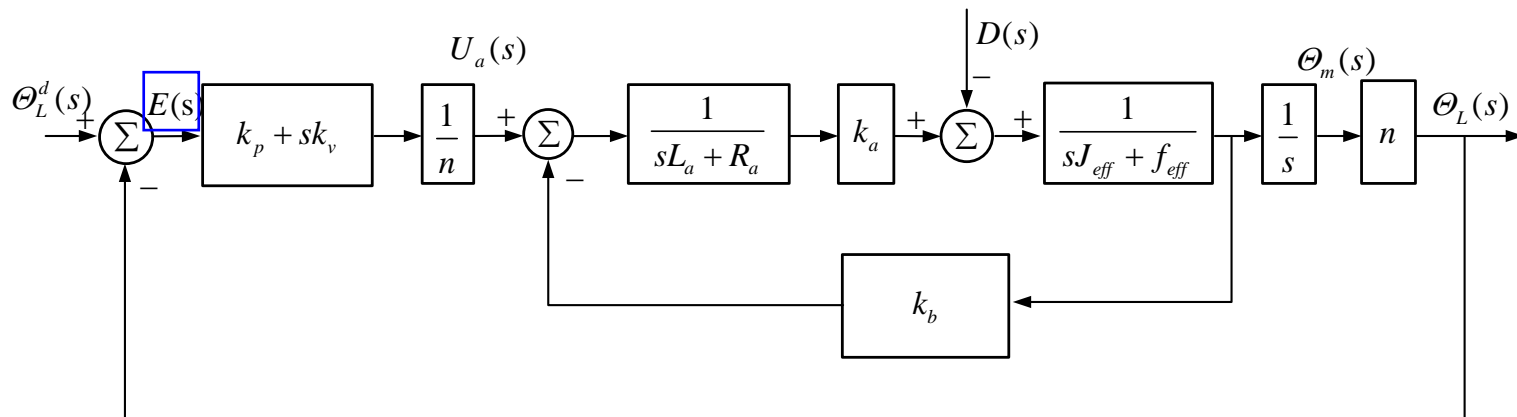
□ 由此可得系统的闭环传递函数：

$$\frac{\Theta_L(s)}{\Theta_L^d(s)} = \frac{G_{PD}(s)}{1 + G_{PD}(s)} = \frac{sk_ak_v + k_ak_p}{s^2R_aJ_{eff} + s(R_af_{eff} + k_ak_b + k_ak_v) + k_ak_p}$$

□ 当  $k_v = 0$  时，上式可简化为：

$$\frac{\Theta_L(s)}{\Theta_L^d(s)} = \frac{G_{PD}(s)}{1 + G_{PD}(s)} = \frac{k_ak_p}{s^2R_aJ_{eff} + s(R_af_{eff} + k_ak_b) + k_ak_p}$$

## 9.1.2 单关节的位置控制器



带干扰的反馈控制框图

如上图，操作臂控制系统还要受到**扰动** $D(s)$ 的影响，电机轴的出力矩的一部分必须用于克服各种扰动力矩，由式得：

$$T(s) = (s^2 J_{eff} + s f_{eff}) \Theta_m(s) + D(s)$$

□ 扰动输入与实际关节角位移的传递函数为：

$$\frac{\Theta_L(s)}{D(s)} \Big|_{\Theta_L'=0} = \frac{-nR_a}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p}$$

□ 运用叠加原理，关节的实际位移如下：

$$\Theta_L(s) = \frac{k_a(k_p + sk_v)\Theta_L^d(s) - nR_a D(s)}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p}$$



## 9.1.3 位置和速度反馈增益的确定

- 二阶闭环控制系统的性能指标有：快速上升时间，稳态误差的大小（是否为零），快速调整时间。这些都与位置反馈以及速度反馈增益有关。

前面求得二阶闭环控制系统的传递函数为：

$$\frac{\Theta_L(s)}{\Theta_L^d(s)} = \frac{G_{PD}(s)}{1 + G_{PD}(s)} = \frac{sk_a k_v + k_a k_p}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p}$$

- 二阶系统的特征方程具有下面标准形式： $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

- 上式进行对照，得出： $\omega_n^2 = \frac{k_a k_p}{J_{eff} R_a}$ ， $2\zeta\omega_n = \frac{R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v}{J_{eff} R_a}$

## 9.1.3 位置和速度反馈增益的确定

二阶系统的特性取决于它的无阻尼自然频率 $\omega_n$ 和阻尼比 $\zeta$

➤ 我们希望系统具有临界阻尼或过阻尼，即 $\zeta \geq 1$ ，代入：

$$\zeta = \frac{R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v}{2\sqrt{k_a k_p J_{eff} R_a}} \geq 1$$

因而速度反馈增益  $k_v$  为：

$$k_v \geq \frac{2\sqrt{k_a k_p J_{eff} R_a} - R_a f_{eff} - k_a k_b}{k_a}$$

取等号时，系统将为临界阻尼系统；  
取不等号时，为过阻尼系统。

### 9.1.3 位置和速度反馈增益的确定

在确定位置反馈增益  $k_p$  时，必须考虑操作臂的结构刚性和共振频率。

- 令关节的等效刚度为  $k_{eff}$ ，则恢复力矩为  $k_{eff}\theta_m(t)$ ，它与电机的惯性力矩相平衡，得微分方程： $J_{eff}\ddot{\theta}_m(t) + k_{eff}\theta_m(t) = 0$
- 系统结构的共振频率为： $\omega_r = \sqrt{k_{eff}/J_{eff}}$
- 若在已知的惯性矩  $J_0$  之下测出的结构共振频率为  $\omega_0$ ，则在其它惯性矩  $J_{eff}$  时的结构共振频率为： $\omega_r = \omega_0\sqrt{J_0/J_{eff}}$
- 为了不致于激起结构振盪和系统共振，要求  $\omega_n \leq 0.5\omega_r$ ， $k_p > 0$ 。由  $\omega_n^2 = \frac{k_a k_p}{J_{eff} R_a}$  得  $0 < k_p \leq \frac{\omega_r^2 J_{eff} R_a}{4k_a} = \frac{\omega_0^2 J_0 R_a}{4k_a}$
- 最终求出  $k_v$  为： $k_v \geq \frac{R_a \omega_0 \sqrt{J_0 J_{eff}} - R_a f_{eff} - k_a k_b}{k_a}$

## 9.1.4 稳态误差及其补偿

□ 系统误差定义为:  $e(t) = \theta_L^d(t) - \theta_L(t)$        $E(s) = \Theta_L^d(s) - \Theta_L(s)$

经拉普拉斯变换最后得出:

$$E(s) = \frac{\left[ s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b) \right] \Theta_L^d(s) + n R_a D(s)}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p}$$

对于一个幅位为 $A$ 的阶跃输入, 即  $\theta_L^d(t) = A$ , 若扰动输入未知, 则由这个阶跃输入而产生的系统稳态误差可从终值定理导出。

□在  $k_a k_p \neq 0$  的条件下, 可得稳态误差:

$$\begin{aligned} e_{ssp} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\left[ s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b) \right] A/s + n R_a D(s)}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{n R_a D(s)}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p} \end{aligned}$$

→ 扰动的函数

## 9.1.4 稳态误差及其补偿

干扰函数分**可确定的**和**无法直接确定的**，把干扰力矩分别表示为：

$$\tau_D(t) = \tau_G(t) + \tau_C(t) + \tau_e$$

连杆重力产生的力矩

离心力产生的力矩

除重力和离心力之外的扰动力矩

( $\approx$ 很小的恒值干扰  $\tau_e$ )

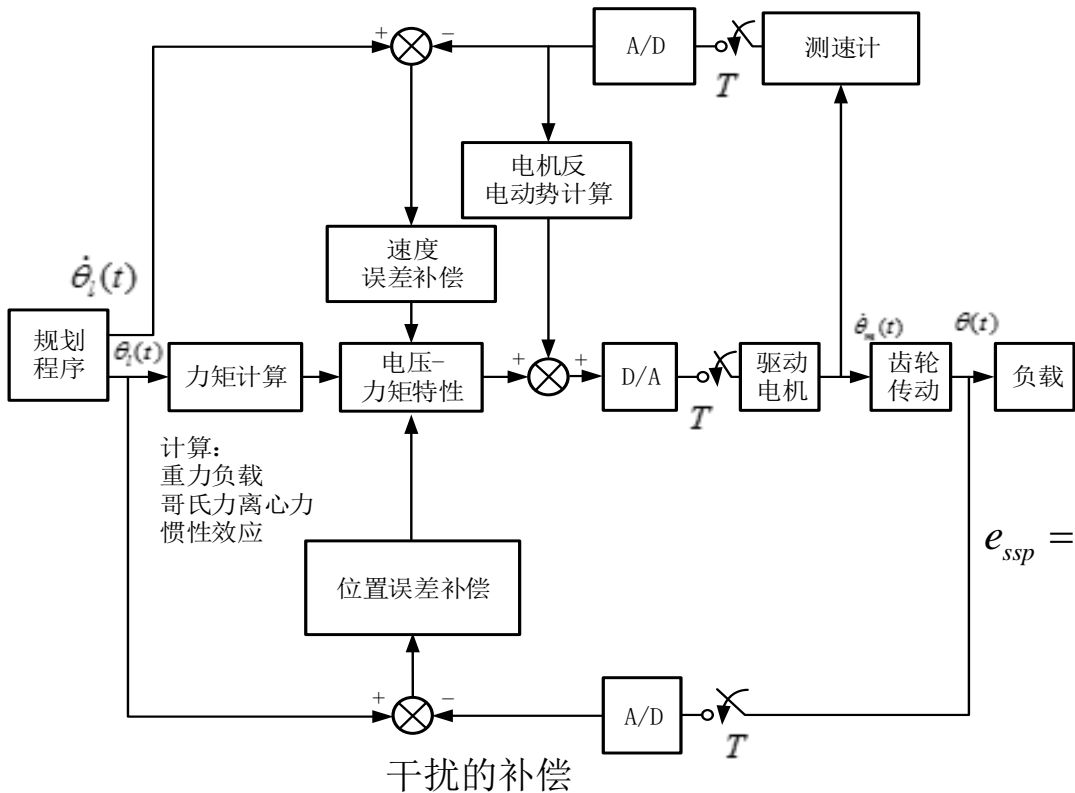
□ 经拉普拉斯变换为： $D(s) = T_G(s) + T_C(s) + T_e/s$

为了补偿重力负载和离心力的影响，可以预先算出这些力矩值，进行“**前馈补偿**”。（见下页干扰补偿图）

□ 令补偿力矩  $\tau_{com}$  的拉普拉斯变换为  $T_{com}(s)$ ，代入得出误差表达式：

$$E(s) = \frac{\left[ s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b) \right] \Theta_L^d(s)}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p} + \frac{n R_a [T_G(s) + T_C(s) + T_e/s - T_{com}(s)]}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p}$$

# 9.1.4 稳态误差及其补偿



对于阶跃输入而言，

$$\Theta_L^d(s) = A/s$$

系统的稳态误差如下：

$$e_{ssp} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{nR_a [T_G(s) + T_C(s) + T_e/s - T_{com}(s)]}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + k_a k_b + k_a k_v) + k_a k_p} \right]$$

当时间  $t \rightarrow \infty$  时，离心力产生的扰动作用为零，离心力是  $\dot{\theta}_L(\infty) \rightarrow 0$  的函数， $\dot{\theta}_L(\infty) \rightarrow 0$ ，因而不产生稳态位置误差。

## 9.1.4 稳态误差及其补偿

□ 如果计算出的补偿力矩  $\tau_{com}$  与连杆的重力负载相等：

$$e_{ssp} = \frac{nR_a T_e}{k_a k_p} \quad (\text{稳态位置误差仅与恒值扰动 } \tau_e \text{ 有关})$$

稳态位置误差在以下范围：
$$\frac{4nT_e}{\omega_0^2 J_0} \leq e_{ssp} < \infty$$

位置反馈增益  $k_p$  越大，稳态误差  $e_{ssp}$  越小

如果系统的输入是个斜坡函数： $\theta_L^d(s) = A/s^2$

□ 为了减小稳态误差，计算的补偿力矩  $\tau_{com}(t)$  应与重力和离心力的影响相抵消，稳态速度误差为：

$$e_{ssv} = \frac{(R_a f_{eff} + k_a k_b) A}{k_a k_p} + e_{ssp}$$

# 本章内容

**9.1 操作臂的单关节传递函数及PD控制**

**9.2 二阶线性系统控制器的分解**

**9.3 操作臂的单关节控制规律分解**

**9.4 操作臂的非线性控制**

**9.5 操作臂的多关节控制**

**9.6 基于直角坐标的控制**

**9.7 李雅普诺夫稳定性分析**



## 9.2.1 二阶线性系统

- 假设摩擦阻力与运动速度成正比，在**无其它外力**作用下，物体自由运动的微分方程是：

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

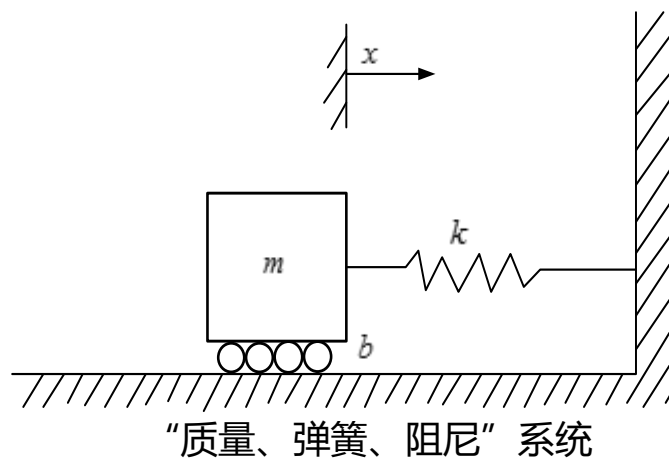
- 该二阶常系数微分方程式对应的特征方程是：

$$ms^2 + bs + k = 0$$

- 特征方程的根是：**系统的极点**

$$s_1 = -\frac{b}{2m} + \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \quad s_2 = -\frac{b}{2m} - \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

受控对象处于零位



其解依赖于初始条件：  
初始位置和初始速度

## 9.2.1 二阶线性系统

□ 系统的极点 $s_1$ 和 $s_2$ 在复平面上的位置决定了系统的运动状态和系统的动态品质。

□ 可分下列三种情况：

- **两不等实根**，即  $b^2 > 4mk$

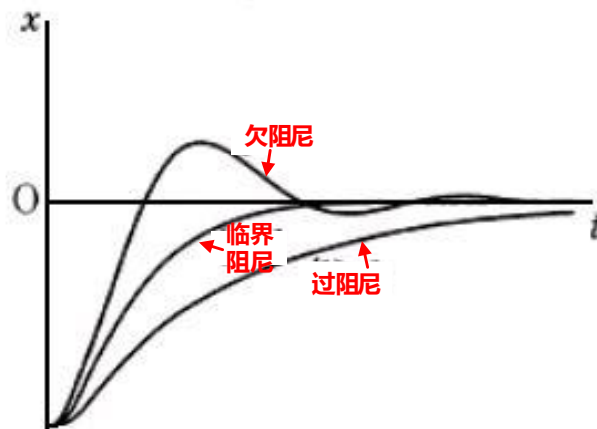
系统是过阻尼的系统，阻尼占主导地位，系统响应“迟钝”。

- **两复根**，即  $b^2 < 4mk$

系统是欠阻尼系统，刚度占主导地位，系统会产生震荡。

- **两等实根**，即  $b^2 = 4mk$

阻尼与刚度平衡，为临界阻尼情况，可以产生尽可能快的非振荡响应。



## 9.2.1 二阶线性系统

□ 采用阻尼比和自然频率表示，将特征方程式变成：

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

阻尼比

自然频率（无阻尼的）

其中：

$$\zeta = b/2\sqrt{km}, \quad \omega_n = \sqrt{k/m}$$

显然：  $\zeta > 1$  为过阻尼情况；

$\zeta < 1$  为欠阻尼情况；

$\zeta = 1$  为临界阻尼情况。

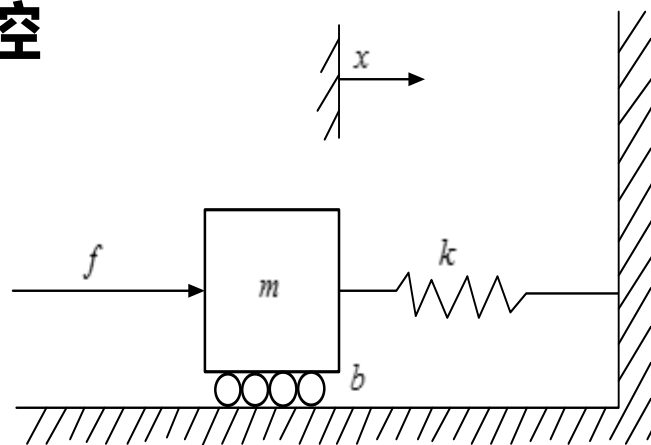
上述二阶系统的响应并不理想，**如何改变系统的品质，使之符合要求？**

## 9.2.1 二阶线性系统

□ **应对方式**：通过使用传感元件，驱动器和控制系统来改变系统的品质。

如右图，增添了一个驱动器，对受控物体施加力  $f$  的作用，物体的运动方程 变为： $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$

假定，驱动器对于物体施加的力是根据实测的位置和速度决定的，即： $f = -k_p x - k_v \dot{x}$



带驱动控制的质量、弹簧、阻尼系统

以此计算控制力的大小，形成反馈控制信号

## 9.2.1 二阶线性系统

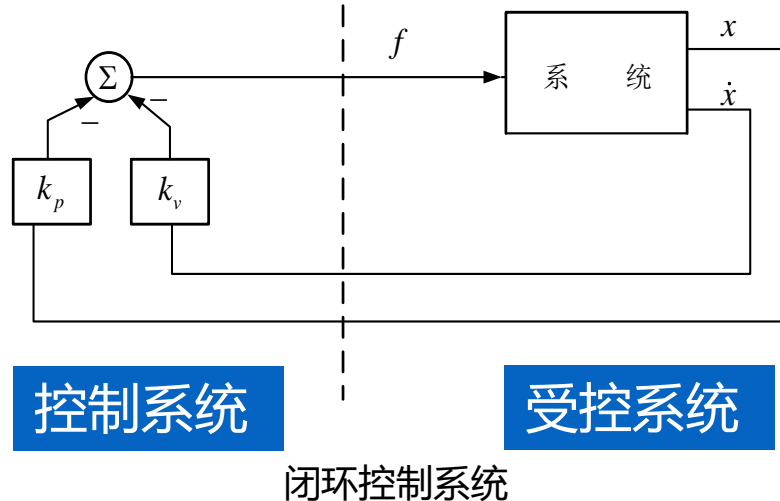
**□ 位置调节系统**——用来保持物体在一个固定的位置上，消除干扰力的影响。

推导出闭环系统的动力学方程：

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -k_p x - k_v \dot{x}$$

或：
$$m\ddot{x} + (b + k_v)\dot{x} + (k + k_p)x = 0$$

$$m\ddot{x} + b'\dot{x} + k'x = 0$$



➡ 适当地选择控制系统的增益（简称控制增益） $k_v$  和  $k_p$ ，可以得到所希望的任意二阶系统的品质。

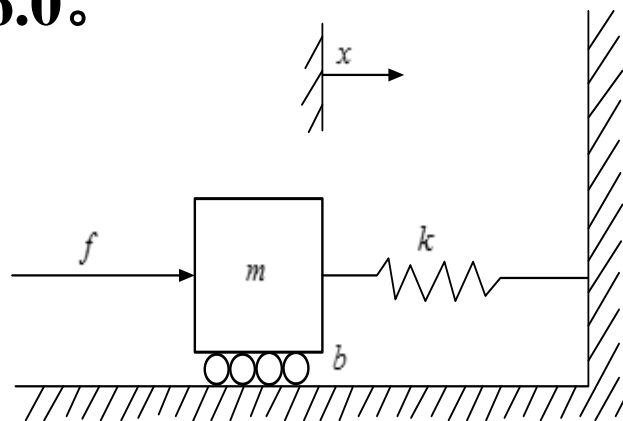
**注意：**  $k_v$  和  $k_p$  可正可负，随受控系统的参数而定。

当  $b'$  或  $k'$  变成负值时，控制系统将丧失稳定性，伺服误差将会增大。

## 9.2.1 二阶线性系统

### 例9.1:

系统参数  $m = 1$ ,  $b = 1$ ,  $k = 1$ 。按位置调节器的控制规律, 选择控制增益  $k_v$  和  $k_p$ , 使系统变成临界阻尼系统, 并使闭环系统刚度为16.0。



带驱动控制的质量、弹簧、阻尼系统

因为要求闭环系统刚度  $k' = 16.0$ , 又要使系统成为临界阻尼, 必须  $b' = 2\sqrt{mk'} = 8.0$

又因  $k = 1$  和  $b = 1$ , 因而  $k_p = k' - k = 15$ ,  $k_v = b' - b = 7$ .

## 9.2.2 控制规律的分解

□ **分解方法：**将控制器分解成两部分：**基于模型控制部分**和**伺服控制部分**。

□ **系统闭环运动方程为：**  $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$

□ **基于模型控制规律有如下形式：**

$$f = \alpha f' + \beta$$

□ **联立以上式子可以得到闭环系统控制方程为：**

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$$

## 9.2.2 控制规律的分解

□ 如果把  $\alpha$  和  $\beta$  选定为:  $\alpha=m$ ,  $\beta=b\dot{x}+kx$ , 可得:

$$\ddot{x} = f' \rightarrow \text{单位质量系统的运动方程}$$

□ 进一步假设上式是受控系统的开环动力学方程, 计算  $f'$ :

$$f' = -k_p x - k_v \dot{x}$$

□ 联立则得:  $\ddot{x} + k_v \dot{x} + k_p x = 0$

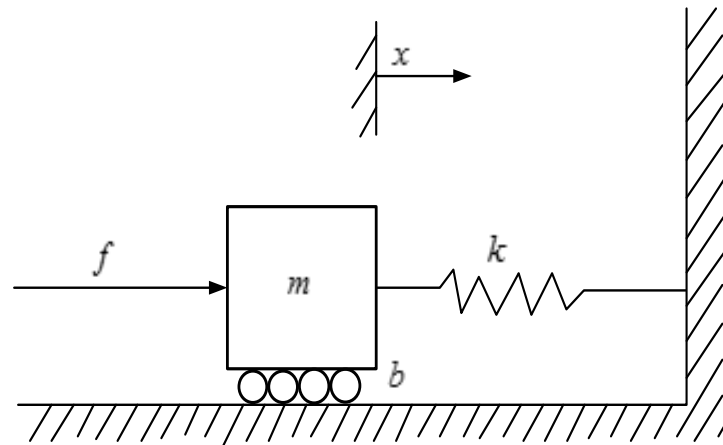
利用这种分解法则确定控制增益十分简单, 并且与系统参数无关, 即, 对于任何系统, 临界阻尼都必须满足:  $k_v = 2\sqrt{k_p}$ 。



## 9.2.2 控制规律的分解

例9.2:

系统参数  $m = 1, b = 1, k = 1$ 。求出位置调节器控制规律的  $\alpha$ 、 $\beta$  和增益  $k_v$  和  $k_p$ ，使得闭环系统具有临界阻尼，且刚度为16.0。



带驱动控制的质量、弹簧、阻尼系统

我们取：  $\alpha = m = 1$        $\beta = b\dot{x} + kx = \dot{x} + x$

根据规定的闭环系统刚度要求，确定增益  $k_p = 16.0$ ，

再按临界阻尼的要求确定  $k_v = 2\sqrt{k_p}$ ，得到  $k_v = 8.0$ 。

## 9.2.3 轨迹跟踪控制

- 要求物体跟踪指定的目标轨迹，即物体必须按照给定的时间函数  $x_d(t)$  来运动。

假定轨迹充分光滑，定义指定的目标轨迹与实际轨迹的差为伺服误差，即：  $e = x_d - x$

- 轨迹跟踪的控制规律为：  $f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e$

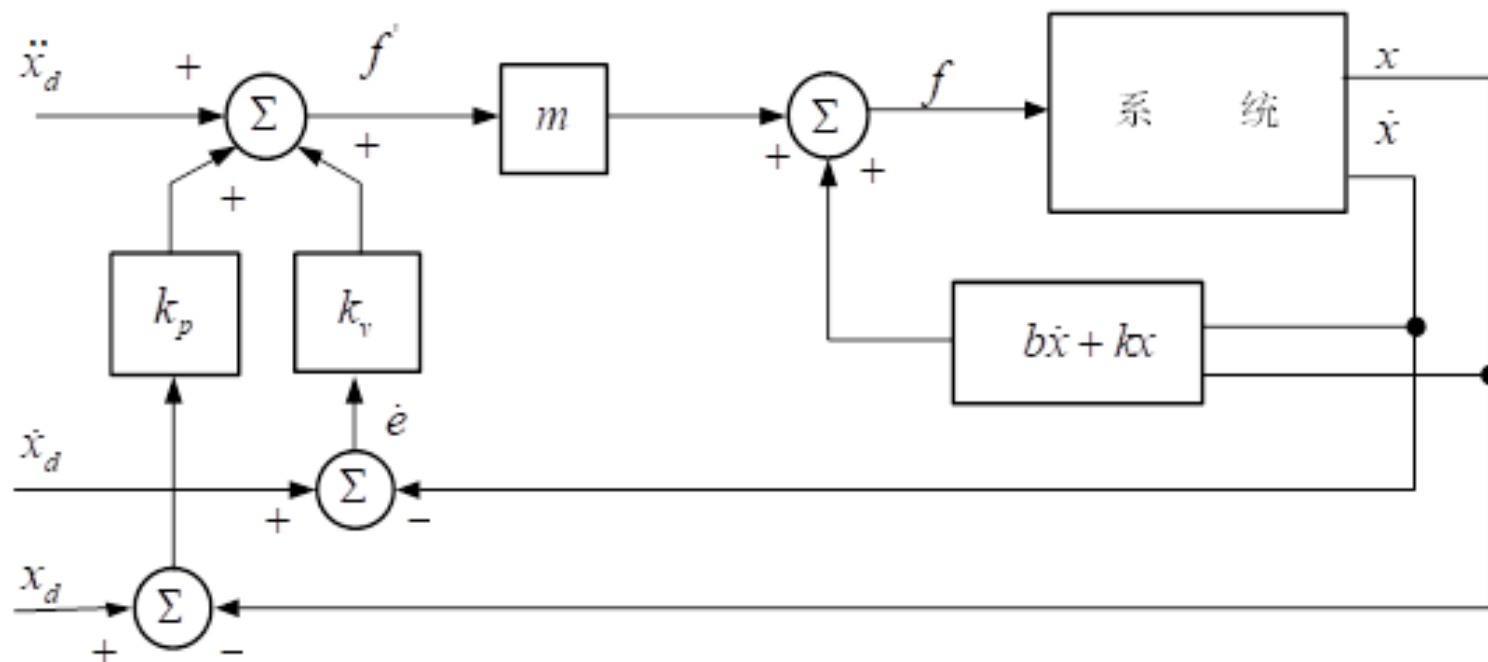
- 与单位质量系统运动方程式联立就可得到：

$$\ddot{x} = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e$$

- 最终得到误差方程：  $\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = 0$

## 9.2.3 轨迹跟踪控制

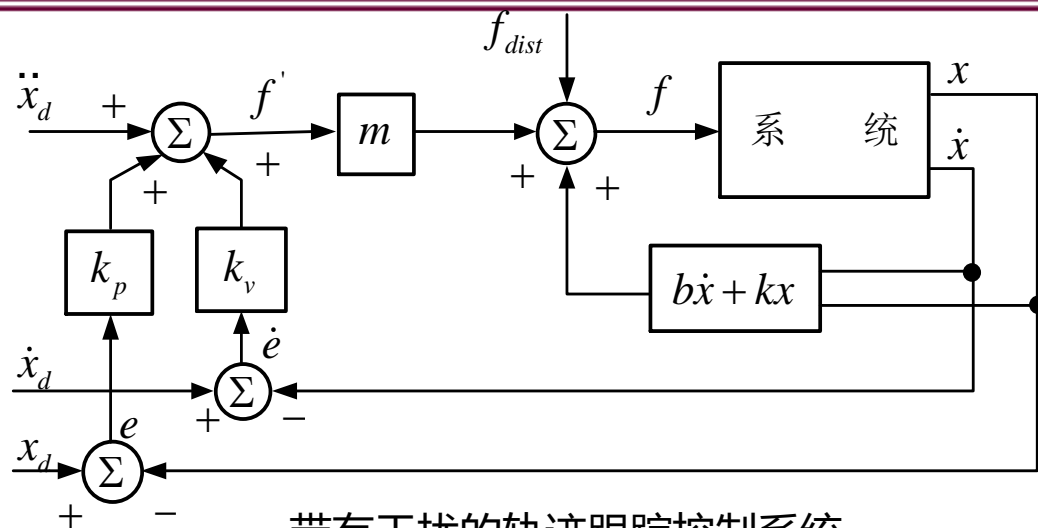
□ 它描述了相对于给定轨迹的误差变化规律，如下图：



如果模型十分准确，即参数  $m$ 、 $b$  和  $k$  的值十分准确，又没有噪声和初始误差，则物体将准确地跟踪给定的轨迹。

## 9.2.4 抑制干扰

如右图，分析这一闭环系统，可得到误差方程为： $\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = f_{dist}$



带有干扰的轨迹跟踪控制系统

### 一、稳态误差

eg: 常值干扰  $f_{dist}$

对系统进行稳态分析，令系统式中的变量的各阶导数为零，得稳态方程和稳态误差为：

$$k_p e = f_{dist}, \quad e = f_{dist} / k_p$$

位置增益越大，稳态误差越小

## 9.2.4 抑制干扰

### 二、增加积分项

增添积分项:  $f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt$

相应的误差方程为:  $\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt = f_{dist}$

对上式两边求导:  $\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e + k_i e = 0 \Rightarrow k_i e = 0$

增加积分项之后, 使得系统对于恒值干扰的稳态误差为零

### 三、周期干扰

可将周期性干扰当成各种谐波分量的线性叠加。对于二阶线性系统而言, 谐波干扰所产生的稳态误差也是个谐波函数, 其频率和干扰信号的频率相同, 其幅值和相位均和频率  $\omega$  有关。

# 本章内容

**9.1 操作臂的单关节传递函数及PD控制**

**9.2 二阶线性系统控制器的分解**

**9.3 操作臂的单关节控制规律分解**

**9.4 操作臂的非线性控制**

**9.5 操作臂的多关节控制**

**9.6 基于直角坐标的控制**

**9.7 李雅普诺夫稳定性分析**

## 9.3 操作臂的单关节控制规律分解

**建模时，对操作臂的控制问题进行一系列简化处理：**

- (1) 把多输入多输出系统当成多个独立的单输入单输出系统；**
- (2) 关节驱动器的等效惯性矩  $J_{\text{eff}} = J_{\text{m}} + n^2 J_{\text{L}}$  和等效阻尼  $f_{\text{eff}} = f_{\text{m}} + n^2 f_{\text{L}}$  为常数；**
- (3) 不考虑机操作臂动力学方程的非线性效果，所建立模型近似为线性模型；**
- (4) 忽略机械结构的刚度和变形；**
- (5) 忽略电机电枢的电感 $L_{\text{a}}$ 。**

基于以上假设，每个关节简化成一个质量-弹簧-阻尼系统：

$$\tau(t) = J_{\text{eff}} \ddot{\theta}_{\text{m}} + f_{\text{eff}} \dot{\theta}_{\text{m}}$$

## 9.3 操作臂的单关节控制规律分解

运用9.2节所介绍的控制规律分解方法对操作臂的单关节进行控制，令

$$\alpha = J_{\text{eff}}, \quad \beta = f_{\text{eff}} \dot{\theta}_{\text{m}}$$

则

$$\tau' = \ddot{\theta}_d + k_v \dot{e} + k_p e$$

所得到的闭环系统的误差方程为  $\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = \tau_{\text{dist}}$

其中  $\tau_{\text{dist}}$  是与干扰力矩有关的项。

为了不激起结构振盪和系统共振，必须将闭环系统无阻尼自然频率  $\omega_n$

限制在关节结构共振频率的一半之内，即  $\omega_n \leq 0.5\omega_r$

为了达到临界阻尼和避开结构自振频率，位置和速度反馈增益分别取为

$$k_p = \omega_n^2 = \frac{1}{4}\omega_r^2, \quad k_v = 2\sqrt{k_p} = \omega_r$$



## 9.3 操作臂的单关节控制规律分解

**例9.4** 假设单关节系统的各参数值为  $J_{\text{eff}}=1$ ,  $f_{\text{eff}}=0.1$ 。此外, 已知系统未建模的共振频率为 $8\text{rad/s}$ 。求 $\alpha$ ,  $\beta$ , 以及为使系统达到临近阻尼的位置控制规律的增益 $k_p, k_v$ 。在不激发未建模模态的前提下, 使系统的闭环刚度尽可能大。

取  $\alpha=1$ ,  $\beta=0.1\dot{\theta}_m$

此时系统在给定输入  $f'$  下呈现为一个单位质量。取闭环固有频率  $\omega_n = 0.5\omega_r = 4\text{rad/s}$

率

由式(9-53)得

$$k_p = \omega_n^2 = 16.0$$

$$k_v = 2\sqrt{k_p} = 8.0$$

# 本章内容

**9.1 操作臂的单关节传递函数及PD控制**

**9.2 二阶线性系统控制器的分解**

**9.3 操作臂的单关节控制规律分解**

**9.4 操作臂的非线性控制**

**9.5 操作臂的多关节控制**

**9.6 基于直角坐标的控制**

**9.7 李雅普诺夫稳定性分析**

## 9.4 操作臂的非线性控制

9.3节中在建立模型时，对操作臂的控制问题进行了一系列简化。实际上，如果不做假设，操作臂的控制模型应是一个 $n \times 1$ 的矢量**非线性微分方程**。

本节将直接研究非线性运动学方程，在控制规律中**引入非线性项“抵消”**系统固有的非线性，使整个闭环系统成为线性的。

运用上述控制器分解的方法，可以实现线性化的功能。

## 9.4 操作臂的非线性控制

例：在质量-弹簧-阻尼系统中包含非线性弹簧，其特性如图9-14所示。与普通线性弹簧( $f=kx$ )不同，该非线性弹簧特性曲线由 $f=qx^3$ 来描述。试确定控制规律，使系统保持临界阻尼状态，而且刚度为 $k_{CL}$ 。

**系统的开环方程为**

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + qx^3 = f$$

**对于基于模型的控制部分，有  $f = \alpha f' + \beta$**

**其中  $\alpha=m$ ,  $\beta = b\dot{x} + qx^3$**

**则对于伺服控制部分，有  $f' = \ddot{x}_d + kv_e + kp_e$**

# 本章内容

**9.1 操作臂的单关节传递函数及PD控制**

**9.2 二阶线性系统控制器的分解**

**9.3 操作臂的单关节控制规律分解**

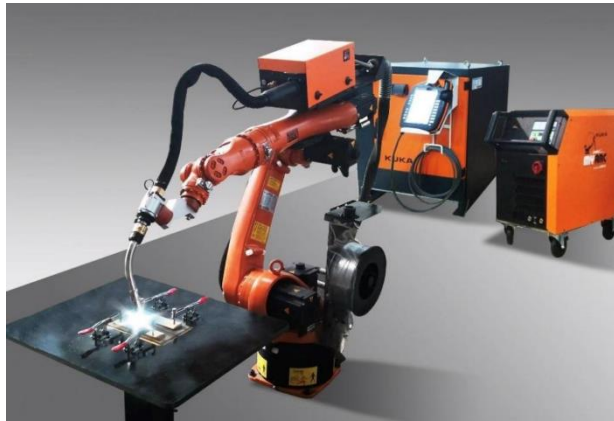
**9.4 操作臂的非线性控制**

**9.5 操作臂的多关节控制**

**9.6 基于直角坐标的控制**

**9.7 李雅普诺夫稳定性分析**

## 9.5 操作臂的多关节控制—9.5.1 稳线性解耦控制规律



操作臂的多关节控制是个**多输入多输出 (MIMO)** 的系统

□ 基于模型的控制规律，用“矩阵矢量”形式表示为：

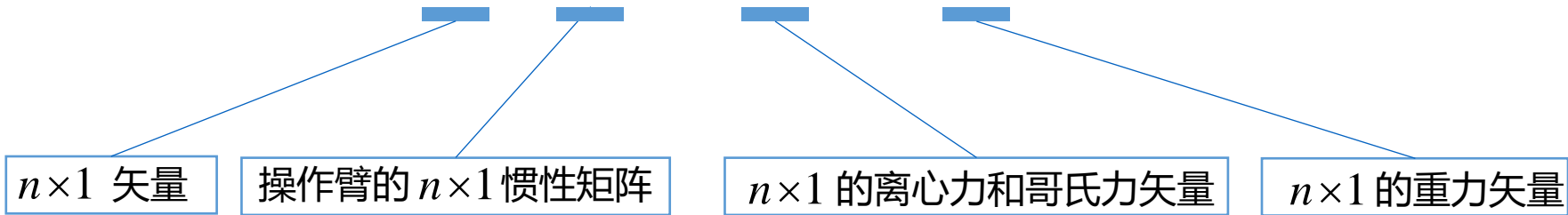
$$\mathbf{F} = \alpha \mathbf{F}' + \beta$$

$\alpha$  是  $n \times n$  的矩阵  
作用是对  $n$  个运动方程进行解耦

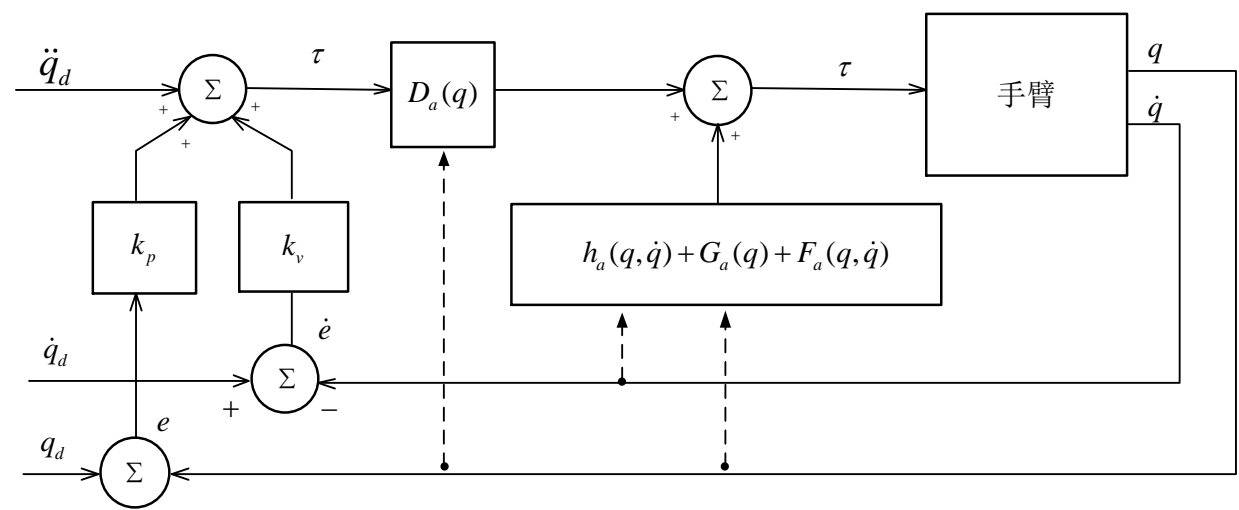
如果正确地选择  $\alpha$  和  $\beta$ ，那么，系统对于输入  $\mathbf{F}'$  将表现为  $n$  个独立的单位质量系统。

# 9.5.2 多关节位置控制规律的分解

$$\tau = D(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + G(q) + F(q, \dot{q})$$



□ 控制规律分解法得到的控制系统方框图如下：



## 9.5.3 计算力矩方法

□ 计算力矩方法总的说来属于**前馈控制**，分为前馈和反馈两部分。

**前馈部分** 补偿各关节之间的相互作用力矩

**反馈部分** 计算校正力矩，以补偿轨迹偏差

假定能够计算动力学方程式中的各项式，应用上述控制规律。

□ 使用**比例微分控制（PD控制）**实现伺服控制，控制规律如下：

$$\tau(t) = D_a(q) \left\{ \ddot{q}_d(t) + K_v [\dot{q}_d(t) - \dot{q}(t)] + K_p [q_d(t) - q(t)] \right\} \\ + h_a(q, \dot{q}) + G_a(q) + F_a(q, \dot{q})$$

( $K_p$  和  $K_v$  分别是  $6 \times 6$  的速度和位置反馈增益矩阵，下标  $a$  表示计算模型参数)

□ 联立各式，得：

$$D(q) \ddot{q}_d(t) + h(q, \dot{q}) + G_a(q) + F_a(q, \dot{q}) \\ = D_a(q) \left\{ \ddot{q}_d(t) + K_v [\dot{q}_d(t) - \dot{q}(t)] + \right. \\ \left. K_p [q_d(t) - q(t)] \right\} + h_a(q, \dot{q}) + G_a(q) + F_a(q, \dot{q})$$



## 9.5.3 计算力矩方法

- 假设计算模型值等于实际值，并简化得：

$$D(q)\left[\ddot{e}(t)+K_v\dot{e}(t)+K_pe(t)\right]=0$$

$$\text{其中: } e(t)=q_d(t)-q(t) \quad , \quad \dot{e}(t)=\dot{q}_d(t)-\dot{q}(t)$$

- 由于是  $D(q)$  正定的，因而也是非奇异矩阵，从上式可以得到闭环系统的误差方程：

$$\ddot{e}(t)+K_v\dot{e}(t)+K_pe(t)=0$$

- 由于上述误差矢量方程是解耦的， $K_v$  和  $K_p$  是对角阵，可将矢量形式写成各个关节单独的形式：

$$\ddot{e}_i(t)+k_{vi}\dot{e}_i(t)+k_{pi}e_i(t)=0, \quad i=1,\dots,n$$

▲ 得到与线性解耦控制规律完全相同的结果

# 本章内容

**9.1 操作臂的单关节传递函数及PD控制**

**9.2 二阶线性系统控制器的分解**

**9.3 操作臂的单关节控制规律分解**

**9.4 操作臂的非线性控制**

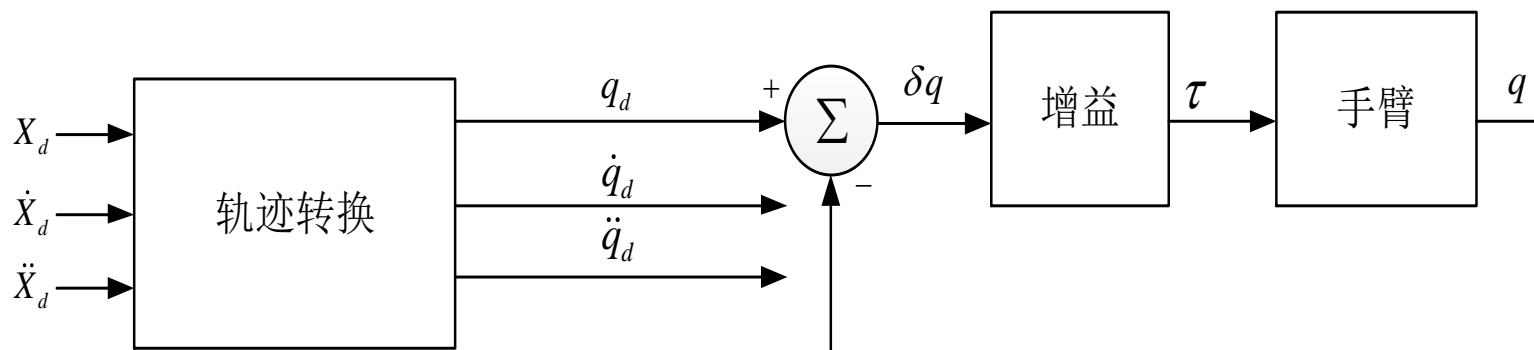
**9.5 操作臂的多关节控制**

**9.6 基于直角坐标的控制**

**9.7 李雅普诺夫稳定性分析**

## 9.6 基于直角坐标的控制

□ 直角坐标的控制与基于关节坐标的控制系统不同，需要输入期望的直角坐标、速度和加速度。实际中的工业机器人大都采用基于关节坐标的控制，系统的输入是期望的关节轨迹，所以要进行**轨迹变换**。



输入直角坐标轨迹在关节空间控制的方案图

基于直角坐标的控制系统的输入是期望的直角轨迹  $X_d$ ,  $\dot{X}_d$  和  $\ddot{X}_d$ ，为了计算出与之对应的关节空间轨迹  $q_d$ ,  $\dot{q}_d$  和  $\ddot{q}_d$ ，理论上用上图的“轨迹变换”即可解决。

## 9.6.1 轨迹变换

### 方案一：解析法 不实用

需计算：  $q_d = \text{invkin}(X_d)$

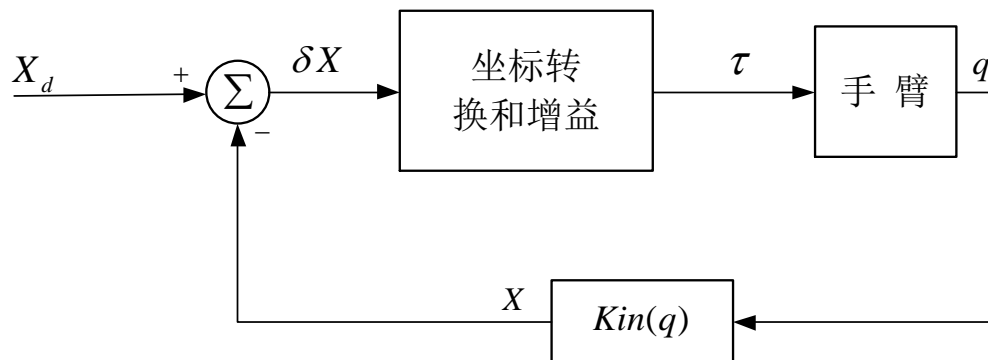
$$\dot{q}_d = J^{-1}(q) \dot{X}_d$$

$$\ddot{q}_d = \dot{J}^{-1}(q) \dot{X}_d + J^{-1}(q) \ddot{X}_d$$

计算困难，难以实现

### 方案二：直角坐标空间控制方案

如下图，检测到的各关节位置立即由运动学方程( $\text{kin}(q)$ )转换成直角坐标位置，然后把它与预期的位置比较，形成直角坐标空间的误差信息。



**直角坐标控制方案的缺点：**与关节坐标空间控制相比，计算量大，运算速度慢，系统的稳定性和抑制干扰的能力相对较弱。

## 9.6.2 直角坐标解耦控制

□ 为了使机器人的所有形位都具有临界阻尼状态，以抑制直角坐标误差，可以采用与关节空间控制器类似的线性化和解耦方法设计直角坐标控制器。

以直角坐标变量表示的操作臂动力学方程：

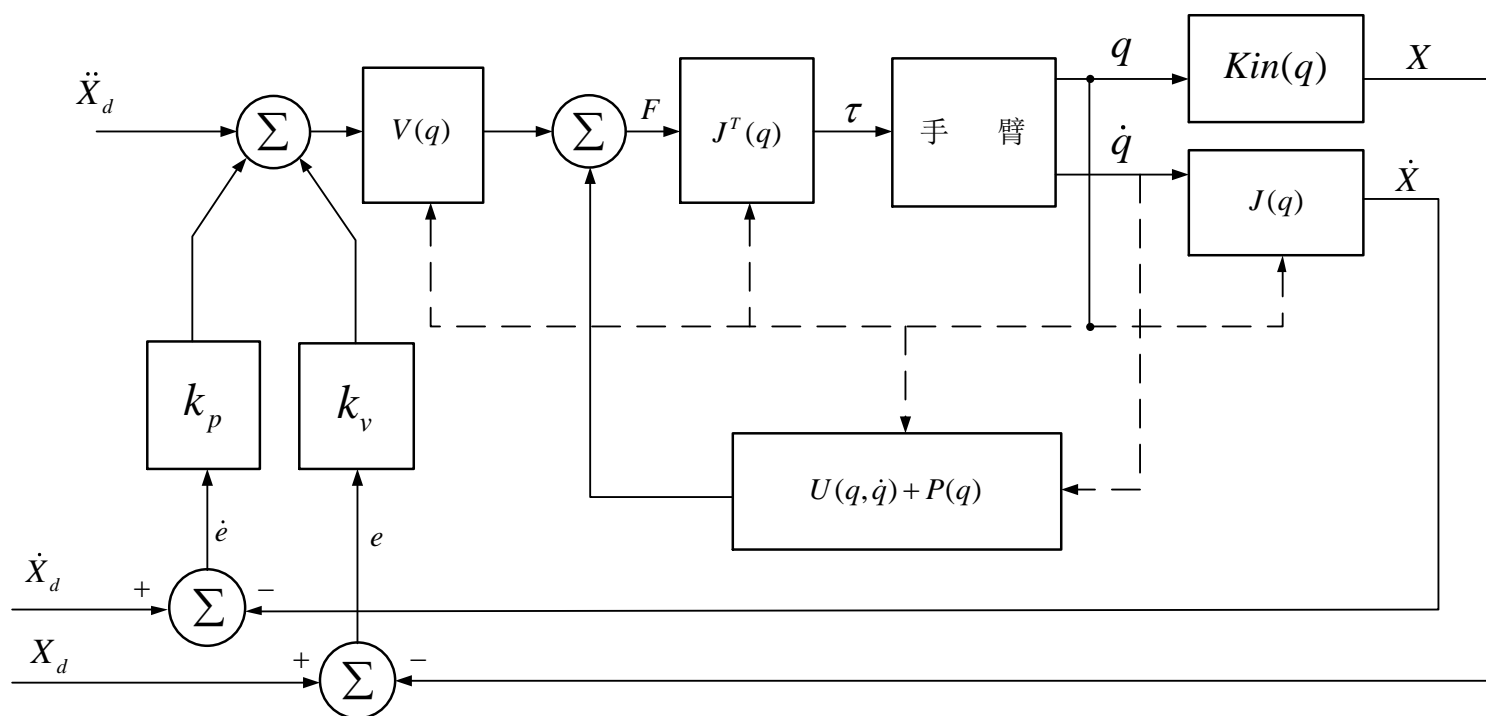
$$F = V(q) \ddot{X} + U(q, \dot{q}) + P(q)$$

The diagram illustrates the components of the Cartesian coordinate dynamics equation  $F = V(q) \ddot{X} + U(q, \dot{q}) + P(q)$ . Blue lines connect the terms in the equation to their corresponding descriptions in boxes below:

- $F$  is connected to "作用在操作臂终端抓手上的虚拟操作力" (Virtual operating force acting on the end effector).
- $V(q)$  is connected to "直角坐标空间的质量矩阵" (Mass matrix in Cartesian coordinate space).
- $\ddot{X}$  is connected to "直角坐标矢量" (Cartesian coordinate vector).
- $U(q, \dot{q})$  is connected to "向心力哥氏力矢量" (Centrifugal and Coriolis force vector).
- $P(q)$  is connected to "重力矢量" (Gravity vector).

## 9.6.2 直角坐标解耦控制

如下图所示的**动力学解耦的直角坐标控制方案**，首先利用上页的动力学方程式计算出  $F$ ，再由转置雅可比计算与操作力  $F$  相平衡的关节力  $\tau = J^T(q)F$



**注意：**转置雅可比在“手臂”环节之前，控制器允许直接描述直角坐标轨迹，勿需进行轨迹转换。

# 本章内容

**9.1 操作臂的单关节传递函数及PD控制**

**9.2 二阶线性系统控制器的分解**

**9.3 操作臂的单关节控制规律分解**

**9.4 操作臂的非线性控制**

**9.5 操作臂的多关节控制**

**9.6 基于直角坐标的控制**

**9.7 李雅普诺夫稳定性分析**

## 9.7 李雅普诺夫稳定性分析

### 一、李亚普诺夫判定依据

□ 对于单自由度的“质量、弹簧、阻尼”系统:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

□ 系统总的能量为:  $v = m\dot{x}^2/2 + kx^2/2$

质量  $m$  所具有的动能

储存在弹簧中的势能

□ 将其对时间求导, 得出总能量的变化速率:  $\dot{v} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x}$

□ 代入  $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$  中的  $m\ddot{x}$ , 得到总能量的变化速率:  $\dot{v} = -b\dot{x}^2$



## 9.7 李雅普诺夫稳定性分析

若  $b > 0$ ，则  $\dot{v}$  非正，这表明系统的能量是耗散的，除非  $\dot{x} = 0$ 。因此，系统经初始扰动后，将不断损失能量，直至静止状态为止，它的静止位置是在平衡点上： $kx = 0$  或  $x = 0$ 。

**李亚普诺夫直接方法判别系统稳定性的物理含义：**

**不论系统具有任何初始条件（即任何初始能量），只要系统的能量是耗散的，最终必定到达平衡点。**

- 特点：不要求解系统运动的微分方程就可得出有关稳定性的结论。
- 李亚普诺夫方法只用于判别系统稳定性，一般不能提供有关系统过渡过程或动态性能的任何信息。
- 总之，稳定性和动态品质是两个概念，虽然系统是稳定的，但是它的动态性能并不令人满意。

# 9.7 李雅普诺夫稳定性分析

## 二、李亚普诺夫方法理解

李亚普诺夫方法是用于确定下列微分方程的稳定性：

$$\dot{x} = f(x) \quad \rightarrow \text{非线性函数}$$

(任何高阶微分方程总是可以写成形式为上式的一组一阶微分方程。)

□ 为了用李亚普诺夫方法验证系统是否稳定，必须构造一个具有下列性质的李亚普诺夫函数： $v(x)$

- $v(x)$  具有连续的一阶偏导数，且对于所有的  $x \neq 0$  的值  $v(x) > 0$ ,  $v(0) = 0$  ;
- $\dot{v}(x) \leq 0$  ,  $\dot{v}(x)$  是指沿系数轨迹  $v(x)$  的变化。

**弱稳定：**在某一区域内可以找到具有上述性质的函数  $v(x)$

**强稳定：**在整个空间中可以找到具有上述性质的函数  $v(x)$

## 9.7 李雅普诺夫稳定性分析

**直观上可解释为：若  $v(x)$  是状态  $x$  的正定的拟能量函数，并且它的值总是下降的或保持为一个常数，则系统是稳定的，即表示系统的状态矢量是有界的。**

- 若  $\dot{v}(x)$  严格小于零，则状态矢量渐近收敛于零矢量。
- 在一定情况下，甚至当（注意包含等号）时，也可能是渐近稳定的。为了分析操作臂控制系统的稳定性，还将讨论  $\dot{v}(x)=0$  时的情况，以便确定所研究的系统是渐近稳定的，还是“粘在”  $v(x)$  以外的某个地方。

因为函数  $f(0)$  不显含  $t$ ，称为自治系统。李亚普诺夫方法可以推广到处于非自治系统，其中时间是非线性函数的自变量。

## 9.7 李雅普诺夫稳定性分析

例：

矢量线性系统  $\dot{x} = -Ax$  ,  $A$  是  $m \times m$  的正定矩阵。

可作为李亚普诺夫函数的取为： $v(x) = x^T x / 2$

显然，此函数到处连续，且非负，将其微分：

$$\dot{v}(x) = x^T \dot{x} = x^T (-Ax) = -x^T Ax$$

由于  $A$  是正定的，因此  $\dot{v}(x)$  到处非正。从而验证该系统是渐近稳定的，因为  $\dot{v}(x)$  只有在  $x = 0$  处为0，因而在其他地方  $\dot{v}(x)$  一定是减少的。

上述系统也是自治的。

## 9.7 李雅普诺夫稳定性分析

例：

由单位质量、弹簧、阻尼组成的机械系统， $\ddot{x} + b(\dot{x}) + k(x) = 0$

其中，弹簧和阻尼都是非线性的函数  $b(\dot{x})$  和  $k(x)$ ，满足

下列条件： $\dot{x}b(\dot{x}) > 0 \quad \dot{x} \neq 0$

$xk(x) > 0 \quad x \neq 0$

构造李亚普诺夫函数： $v(x, \dot{x}) = \dot{x}^2/2 + \int_0^x k(\lambda) d\lambda$

从而得到： $\dot{v}(x, \dot{x}) = \dot{x}\ddot{x} + k(x)\dot{x} = -\dot{x}b(\dot{x}) - k(x)\dot{x} + k(x)\dot{x} = -\dot{x}b(\dot{x})$

因此， $\dot{v}$  是非正的，不过只是半负定的，因为它只是  $\dot{x}$  的函数，不含  $x$ 。为了判断系统是否是渐近稳定的，还必须排除系统“粘在”某个非零状态  $x \neq 0$  的可能性。

现在研究所有  $x = 0$  的轨迹，考查微分方程： $\ddot{x} = -k(x)$

因为  $x = 0$  是它的唯一解，因而系统静止的条件是  $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$ 。

所以系统是渐近稳定的。