181 期终试卷参考答案

一、计算下列极限（每小题 5 分，共 10 分）：

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{\ln(1+x^3)}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{\ln(1+x^3)}==\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}$ ------------3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sec^2 x}{3x^2}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{-\tan^2 x}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$ --------------2 分

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\cdots\sqrt{n^2}\right)$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\cdots\sqrt{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}}+\sqrt{\dfrac{2}{n}}+\cdots\sqrt{\dfrac{n}{n}}\right)$-------------------3 分

$=\int_0^1\sqrt{x}dx=\dfrac{2}{3}$ ---------------------2 分

二、解下列各题（每小题 6 分，共 18 分）：

1、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 确定，求 $dy\big|_{x=0}$.

解：由 $x=0$ 得 $y=1$，方程两边同时微分，得

$d\sin(xy)+d\ln(y-x)=dx$ ---------------2 分

即 $\cos(xy)(xdy+ydx)+\dfrac{1}{y-x}(dy-dx)=dx$ ---------------2 分

代入 $(x,y)=(0,1)$，得 $dy\big|_{x=0}=dx$ -----------------2 分

2、求曲线 $\begin{cases}x=\int_0^{2(t-1)}e^{-u^2}du\\ y=t\ln(3t-2)\end{cases}$ 在 $(x,y)=(0,0)$ 点处的切线方程.

解：由 $(x,y)=(0,0)$ 得 $t=1$---------------2 分

$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=1}=\dfrac{\ln(3t-2)+\dfrac{3t}{3t-2}}{2e^{-4(t-1)^2}}\Big|_{t=1}=\dfrac{3}{2}$ -------------2 分

切线方程为 $y=\dfrac{3}{2}x$-------------------2 分

3、求曲线 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$ 在 $x=0$ 处的曲率半径.

解：$y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}=\dfrac{1}{2}\left[\ln(1-x)-\ln(1+x^2)\right]$，

$y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$，-------------------------2 分

$y''=\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\right]$ -----------2 分

$y'(0)=-\dfrac{1}{2}$，$y''(0)=-\dfrac{3}{2}$，

曲率半径为 $R=\dfrac{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\Big|_{x=0}=\dfrac{5\sqrt{5}}{12}$ ------------------2 分

三、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设 $f(x)=\ln(1+x)-x$，且 $f(x)$ 是无穷小量 x^k 的同阶无穷小，则 $k=$ （　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

解：B

2、设函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有

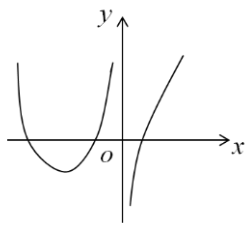
（　　）

（A）一个极小值点和两个极大值点

（B）两个极小值点和一个极大值点

（C）两个极小值点和两个极大值点

（D）三个极小指点和一个极大值点



解：C

3、设函数 $f(x)=\begin{cases} x^3e^{-x}, & x>0 \\ x, & x\le 0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 （　　）

（A）可导　　（B）右导数存在而左导数不存在

（C）左导数存在而右导数不存在　　（D）连续但不可导

解：D

4、下列命题中不正确的是 （　　）

（A）若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的某个原函数是常数，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内恒为零，即 $f(x)\equiv 0$；

（B）若 $f(x)$ 的某个原函数为零，则 $f(x)$ 的所有原函数都是常数;

（C）若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内不是连续函数，则在这个区间内 $f(x)$ 必无原函数;

（D）若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)$ 必为连续函数.

解：C

5、$x=2$ 是函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{2-x}$ 的 （　　）

（A）连续点　　　　　　　　　　　　　　（B）可去间断点

（C）跳跃间断点　　　　　　　　　　　　（D）第二类间断点

解 C

四、计算下列积分（每小题 6 分，共 18 分）：

1、$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} \mathrm{d}x$.

解：令 $t=\sqrt[4]{x}$，则 $x=t^4, dx=4t^3dt$， ----------------2 分

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} \mathrm{d}x=\int \frac{4t^3}{t^2+t}\mathrm{dt}=4\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{dt}$$ --------------2 分

$$=2t^2-4t+4\ln(1+t)+C=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C$$ --------------2 分

2、$\int \frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \quad (x>1)$.

解：$\int \frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}(x^2-1)=-\int \ln x d(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ ---------1 分

$$=-(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\ln x+\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$$ -----------------2 分

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx \underline{\underline{x=\sec t}} \int \frac{\sec t\tan t}{\sec t\tan t}dt=t+c=\arccos\frac{1}{x}+c$$ --------------2 分

$$\therefore \int \frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}+\arccos\frac{1}{x}+c$$ ----------------1 分

3、$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$.

解：$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1-x}{1+x^2}\right)dx$ ---------------3 分

$$=\left[\frac{1}{4}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x^2}+\frac{1}{2}\arctan x\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$$ ------------------3 分

五、（本题 6 分）求函数 $y=e^{\arctan x}$ 的拐点.

解：$y'=e^{\arctan x}\frac{1}{1+x^2}$， $y''=\frac{-2e^{\arctan x}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(1+x^2)^2}$. --------------2 分

令 $y''=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}$.

当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时， $y''>0$，曲线在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ 上是凸的;

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时， $y''<0$，曲线在 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上是凹的; -----------2 分

因此点 $\left(\dfrac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$ 为拐点.   ----------------2 分

六、（本题 6 分）计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}5\cos x\cdot\arctan e^{x}dx$.

解：$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}5\cos x\cdot\arctan e^{x}dx=5\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\arctan e^{x}d\sin x$ --------------2 分

$=(5\sin x\cdot\arctan e^{x})\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-5\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin xe^{x}}{1+e^{2x}}dx$ ---------------------2 分

$=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}(\arctan e^{\frac{\pi}{4}}+\arctan e^{-\frac{\pi}{4}})=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\pi$ ----------------2 分

七、（本题 8 分）求函数 $f(x)=\sin^{2}x$ 的带皮亚诺型余项的 $2n$ 阶麦克劳林公式，并求 $f^{(10)}(0)$.

解：$\sin^{2}x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$， -------------2 分

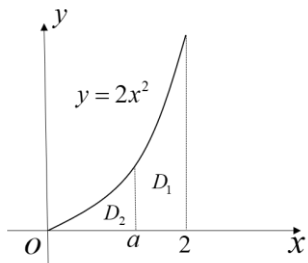
$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^{2}}{2!}+\frac{(2x)^{4}}{4!}-\frac{(2x)^{6}}{6!}+\cdots+(-1)^{n}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}),\ (x\to 0)$$

---------------2 分

$$\sin^{2}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^{2}}{2!}+\frac{(2x)^{4}}{4!}-\frac{(2x)^{6}}{6!}+\cdots+(-1)^{n}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})\right)$$

$$=x^{2}-\frac{2^{3}x^{4}}{4!}+\frac{2^{5}x^{6}}{6!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})\ \ (x\to 0)$$ ---------------2 分

由于 $\dfrac{f^{(10)}(0)}{10!}=(-1)^{4}\dfrac{2^{9}}{10!}$，所以 $f^{(10)}(0)=2^{9}$. --------------------2 分



八、（本题 8 分）设由抛物线 $y=2x^{2}$ 和直线 $x=a,x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形为 D_1 由

抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形为 D_2，其中 $0<a<2$（见图）

(1) 求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1，D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2，；

(2) 问当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？试求此最大值.

解：(1) $V_1=\pi\int_a^2\left(2x^2\right)^2dx=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)$ ----------------2 分

$V_2=2\pi\int_0^a xydx=2\pi\int_0^a 2x^3dx=\pi a^4$ ----------------2 分

（2）设 $V=V_1+V_2=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4$，

$V'=4\pi a^3(1-a)=0$，得 $a=1$ ------------------2 分

当 $0<a<1$ 时，$V'>0$；当 $a>1$ 时，$V'<0$，因此 $a=1$ 是极大值点也是最大值点，此时 V_1+V_2 取得最大值 $\frac{129}{5}\pi$. -------------------2 分

九、（本题 6 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导且取正值，而 $f(0)=0$，证明：对任何正整数 n，存在 $c\in(0,1)$，使得 $\frac{nf'(c)}{f(c)}=\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$.

证明：令 $F(x)=[f(x)]^n f(1-x)$，-------------------3 分

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，而 $F(0)=F(1)=0$，由罗尔中值定理知，存在 $c\in(0,1)$，使得 $F'(c)=0$，即

$$n[f(c)]^{n-1}f'(c)f(1-c)-[f(c)]^n f'(1-c)=0$$

由 $f(c)\neq 0, f(1-c)\neq 0$ 可得，$\frac{nf'(c)}{f(c)}=\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$. ----------------------3 分