数学分析（上）

数学学院

靳勇飞

2024 年 9 月

函数极限

$x_0 \in \mathbb{R}$, 函数 f 在集合 I 上有定义。

定义 (当 x 趋于 x_0 时函数 f 的极限存在)

存在实数 A, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I - \{x_0\}$ 时，成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 称为：当 x 趋于 x_0 时函数 f 的极限存在

同义词有：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 收敛；$f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时有极限; f 在 x_0 有极限

函数极限

$x_0 \in \mathbb{R}$, 函数 f 在集合 I 上有定义。

定义 (当 x 趋于 x_0 时函数 f 的极限存在)

存在实数 A, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I - \{x_0\}$ 时，成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 称为：当 x 趋于 x_0 时函数 f 的极限存在

同义词有：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 收敛；$f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时有极限; f 在 x_0 有极限

注意.

1. x_0 不需要在 f 定义域中，一般需要是 I 聚点。
2. $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I - \{x_0\}$ 常写作：$0 < |x - x_0| < \delta$ 且 $x \in I$

□

函数极限

定义 (当 x 趋于 x_0 时函数 f 的极限是 A)

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I - \{x_0\}$ 时，成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 称为：当 x 趋于 x_0 时函数 f 的极限是 A

同义词有：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ ；$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 收敛到 A；$f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时有极限 A；f 在 x_0 极限是 A

函数极限

定义 (当 x 趋于 x_0 时函数 f 的极限是 A)

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I - \{x_0\}$ 时，成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 称为：当 x 趋于 x_0 时函数 f 的极限是 A

同义词有：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ ；$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 收敛到 A；$f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时有极限 A；f 在 x_0 极限是 A

定义 (当 x 趋于 x_0 时函数 f 的极限不是 A)

存在 $\varepsilon > 0$, 对任意的 $\delta > 0$, 存在 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I - \{x_0\}$，使得 $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon$, 称为：当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的极限不是 A

函数极限

定义 (当 x 趋于 x_0 时函数 f 的极限是 A)

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I - \{x_0\}$ 时，成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 称为：当 x 趋于 x_0 时函数 f 的极限是 A

同义词有：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ ；$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 收敛到 A；$f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时有极限 A；f 在 x_0 极限是 A

定义 (当 x 趋于 x_0 时函数 f 的极限不是 A)

存在 $\varepsilon > 0$, 对任意的 $\delta > 0$, 存在 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I - \{x_0\}$，使得 $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon$, 称为：当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的极限不是 A

定义 (函数 f 在 x_0 连续)

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, 称为：函数 f 在 x_0 连续。

函数极限

例

证明：对任意实数 x_0，$\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

函数极限

例

证明：对任意实数 x_0，$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

证明.

对任意实数 x_0, 对任意的实数 $\varepsilon > 0$, 令 $\delta = \varepsilon$, 则 $\delta > 0$, 且当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ 时，成立 $|x - x_0| < \varepsilon$, 所以，$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$. □

函数极限

例

证明：对任意实数 x_0，$\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

证明.

对任意实数 x_0, 对任意的实数 $\varepsilon > 0$, 令 $\delta = \varepsilon$, 则 $\delta > 0$, 且当 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\}$ 时， 成立 $|x - x_0| < \varepsilon$, 所以， $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$. □

定理

对任意的 $x \in \mathbb{R}$, $I(x) = x$. 则函数 I 在实数集上每一点连续。

函数极限

例

证明：对任意实数 x_0，$\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

证明.

对任意实数 x_0, 对任意的实数 $\varepsilon > 0$, 令 $\delta = \varepsilon$, 则 $\delta > 0$, 且当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ 时，成立 $|x - x_0| < \varepsilon$, 所以，$\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$. □

定理

对任意的 $x \in \mathbb{R}$, $I(x) = x$. 则函数 I 在实数集上每一点连续。

交换函数符号与极限符号的次序.

函数 f 在 x_0 连续, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$, □

函数极限

例

对任意实数 x_0，当 x 趋于 x_0 时，狄里克莱 (Dirichlet) 函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ 极限不存在。

函数极限

例

对任意实数 x_0，当 x 趋于 x_0 时，狄里克莱 (Dirichlet) 函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ 极限不存在。

证明.

对任意实数 x_0，对任意的实数 A，对任意的 $\delta>0$，区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\}$ 中既存在无理数也存在有理数，因此存在 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\}$，使得

$$|D(x)-A|=\max\{|A|,|1-A|\}\geqslant\frac{|A|+|1-A|}{2}\geqslant\frac{|A+1-A|}{2}=\frac{1}{2}.$$

所以，当 x 趋于 x_0 时，$D(x)$ 的极限不是 A. □

函数极限

例

当 x 趋于 0 时，函数 $f(x) = xD(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ 极限为 0.

函数极限

例

当 x 趋于 0 时，函数 $f(x)=xD(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$ 极限为 0.

证明.

对任意的实数 $\varepsilon>0$, 令 $\delta=\varepsilon$, 则 $\delta>0$, 且当 $0<|x-0|<\delta$ 时，成立 $|f(x)-0|\leqslant|x-0|<\varepsilon$, 所以，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$. □

函数极限

例

当 x 趋于 0 时，函数 $f(x) = xD(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ 极限为 0.

证明.

对任意的实数 $\varepsilon > 0$, 令 $\delta = \varepsilon$, 则 $\delta > 0$, 且当 $0 < |x - 0| < \delta$ 时，成立 $|f(x) - 0| \leqslant |x - 0| < \varepsilon$, 所以，$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. □

事实.

函数在一点的是否有极限是局部性质。 □

函数极限

例

对任意实数 x_0，当 x 趋于 x_0 时，黎曼 (Riemann) 函数

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{p}, & x\in\mathbb{Q}, p=\min\{n\in\mathbb{N}^+ : nx\in\mathbb{Z}\}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

极限是 0.

函数极限

例

对任意实数 x_0，当 x 趋于 x_0 时，黎曼 (Riemann) 函数

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & x \in \mathbb{Q}, p = \min\{n \in \mathbb{N}^+ : nx \in \mathbb{Z}\} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$ 极限是 0.

证明.

对任意实数 x_0，对任意的实数 $\varepsilon > 0$，存在自然数 $N > 1$，使得 $\frac{1}{N} < \varepsilon$，则集合 $\left\{x \in (x_0 - 1, x_0 + 1) : D(x) \geqslant \frac{1}{N}\right\}$ 非空且元素个数不超过 $N(N+1)$，令

$$\delta = \min\left\{|x - x_0| : 0 < |x - x_0| < 1 且 D(x) \geqslant \frac{1}{N}\right\}$$

则 $1 > \delta > 0$，当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ 时，成立 $|D(x) - 0| = D(x) < \frac{1}{N} < \varepsilon$，所以，当 x 趋于 x_0 时，$D(x)$ 的极限是 0. □

函数极限的性质

$x_0 \in \mathbb{R}$，函数 f 在集合 I 上有定义。

定理（极限是唯一的）

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$，则 $A = B$.

函数极限的性质

$x_0 \in \mathbb{R}$, 函数 f 在集合 I 上有定义。

定理 (极限是唯一的)

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$, 则 $A = B$.

证明.

对任意的 $\varepsilon > 0$,
因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，存在 $\delta_1 > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap I - \{x_0\}$ 时，成立 $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$;
又 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$，存在 $\delta_2 > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \cap I - \{x_0\}$ 时，成立 $|f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$.
令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$,
于是当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I - \{x_0\}$ 时，成立 $|A - B| \leqslant |f(x) - A| + |f(x) - B| < \varepsilon$. 所以 $A = B$. $\square$

函数极限的性质

$x_0 \in \mathbb{R}$, 函数 f 在集合 I 上有定义。

定理（函数极限的局部有界性）

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则存在 $\delta > 0$, 使得 f 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap I - \{x_0\}$ 上有界。

函数极限的性质

$x_0 \in \mathbb{R}$, 函数 f 在集合 I 上有定义。

定理 (函数极限的局部有界性)

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则存在 $\delta > 0$，使得 f 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap I-\{x_0\}$ 上有界。

证明.

因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，存在 $\delta > 0$，当 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\cap I-\{x_0\}$ 时，成立 $|f(x)-A| < 1$，即 $A-1 < f(x) < A+1$. □

函数极限的性质

定理

$A > B$，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则存在 $\delta > 0$，当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I - \{x_0\}$ 时，$f(x) > B$.

函数极限的性质

定理

$A > B$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap I - \{x_0\}$ 时，$f(x) > B$.

推论

$A > 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap I - \{x_0\}$ 时，$f(x) > \dfrac{A}{2} > 0$.

推论

$A < 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap I - \{x_0\}$ 时，$f(x) < \dfrac{A}{2} < 0$.

函数极限的性质

推论

$A > B$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap I - \{x_0\}$ 时, $f(x) > g(x)$.

函数极限的性质

推论

$A > B$，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，则存在 $\delta > 0$，当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I - \{x_0\}$ 时，$f(x) > g(x)$.

推论

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，且存在 $\delta > 0$，当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I - \{x_0\}$ 时，$f(x) > g(x)$，则 $A \geqslant B$.

函数极限的性质

定理 (函数的控制性收敛定理)

对任意函数 f, g, h, 若存在 $r > 0$，使得

$$\text{当 } 0 < |x - x_0| < r \text{ 时成立 } f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$, 则

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = A.$$

函数极限的性质

证明.

对任意的 $\varepsilon > 0$,

由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 存在 $\delta_1 > 0$，使得

$$\text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \text{ 时，} |f(x) - A| < \varepsilon, \text{ 则 } f(x) > A - \varepsilon.$$

又由 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$, 存在 $\delta_2 > 0$，使得

$$\text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta_2 \text{ 时，} |h(x) - A| < \varepsilon, \text{ 则 } h(x) < A + \varepsilon.$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, r\}$, 则 $\delta > 0$ 且

$$\text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时}, A - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < A + \varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = A = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x).$$

函数极限的性质

例

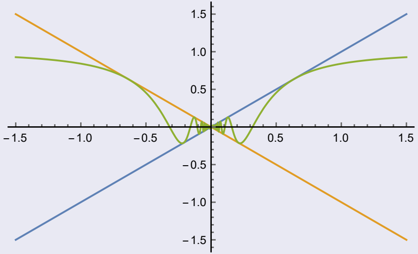
求 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

函数极限的性质

例

求 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

解



对任意的 $x\neq 0$, $0\leqslant\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x|$, 因为 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

函数极限的性质

f 在集合 I 上有定义，且 x_0 是 I 的一个聚点。

定理（Heine 定理）

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是：对 I 中任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$，若满足条件 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ 且对任意 n，$x_n \neq x_0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$

函数极限的性质

例

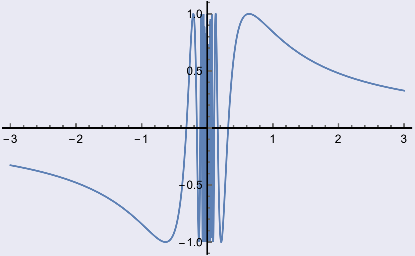
求 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$.

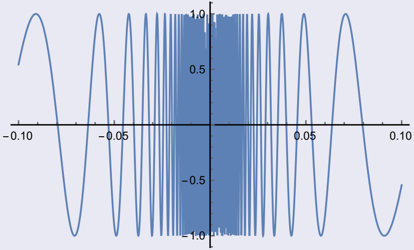
函数极限的性质

例

求 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$.

解





函数极限的性质

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$.

解

对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$, 令 $x_{2n}=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, $x_{2n+1}=\dfrac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}$. 则对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$, $x_n\neq 0$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n+1}=0$, 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$.

对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$, $\sin\dfrac{1}{x_n}=(-1)^n$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}$ 不收敛。

由 Heine 定理, $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在。

函数极限的性质

f 在集合 I 上有定义，且 x_0 是 I 的一个聚点。

定理（Heine 定理）

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是：对 I 中任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$，若满足条件 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$ 且对任意 n，$x_n \neq x_0$，则 $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = A$

函数极限的性质

f 在集合 I 上有定义，且 x_0 是 I 的一个聚点。

定理（Heine 定理）

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是：对 I 中任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$，若满足条件 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ 且对任意 n，$x_n\neq x_0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=A$

必要性.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. 对 I 中任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$，若满足条件 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ 且对任意 n，$x_n\neq x_0$.

对任意的 $\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 且 $x\in I$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$. 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$|x_n-x_0|<\delta$，又对任意 i，$x_i\neq x_0$，$x_n\in I$，所以 $0<|x_n-x_0|<\delta$ 且 $x_n\in I$，，于是 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$. □

函数极限的性质

充分性.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不收敛到 A，则存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任意的 $\delta>0$，都存在 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap I-\{x_0\}$，使得 $|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$.

对 $\delta_1=1$，存在 $x_1\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap I-\{x_0\}$，使得 $|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$.

若 $\delta_k=\frac{1}{k}$，$x_k\in(x_0-\delta_k,x_0+\delta_k)\cap I-\{x_0\}$，使得 $|f(x_k)-A|\geqslant\varepsilon_0$. 令 $\delta_{k+1}=\min\{\frac{1}{k+1},|x_k-x_0|\}$，则 $\delta_{k+1}>0$，存在 $x_{k+1}\in(x_0-\delta_{k+1},x_0+\delta_{k+1})\cap I-\{x_0\}$，使得 $|f(x_{k+1})-A|\geqslant\varepsilon_0$.

由数学归纳法，存在一个数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$，使得对任意的 n，$0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$，且 $|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$.

即存在数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$，若满足条件 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$ 且对任意 n，$x_n\neq x_0$，但 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)$ 不收敛到 A. □

函数极限的运算

定理

对任意函数 f, g，如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\lim_{x\to x_0} g(x)$ 存在，则

1. 对任意的实数 α, β，都成立 $\lim_{x\to x_0}(\alpha f(x)+\beta g(x)) = \alpha \lim_{x\to x_0} f(x) + \beta \lim_{x\to x_0} g(x)$.
2. $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$.

函数极限的运算

定理

对任意函数 f, g，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，则

1. 对任意的实数 α, β，都成立 $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha f(x)+\beta g(x)) = \alpha \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \beta \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

定理

对任意函数 f, g，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$，则成立

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

函数极限的运算

例

对任意的自然数 $n \in \mathbb{N}$, 对任意实数 x_0, $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$.

函数极限的运算

例

对任意的自然数 $n \in \mathbb{N}$, 对任意实数 x_0, $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$.

定理

对任意的自然数 $n \in \mathbb{N}$, 定义为
对任意的 $x \in \mathbb{R}$, $p(x) = x^n$
的函数 p 在实数集上每一点连续。

函数极限的运算

例

对任意的自然数 $n \in \mathbb{N}$, 对任意实数 x_0, $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$.

定理

对任意的自然数 $n \in \mathbb{N}$, 定义为
对任意的 $x \in \mathbb{R}$, $p(x) = x^n$
的函数 p 在实数集上每一点连续。

定义

函数在定义域内每一点连续称为连续函数。
函数 f 在集合 I 中每一点连续，称为函数 f 在 I 上连续。

函数极限的运算

定理

实数 $x_0 \in \mathbb{R}$, 对任意函数 f, g, f 在 x_0 连续，g 在 x_0 连续，则

1. 对任意的实数 α, β, 函数 $\alpha f + \beta g$ 在 x_0 连续。
2. 函数 $f \cdot g$ 在 x_0 连续。

函数极限的运算

定理

实数 $x_0 \in \mathbb{R}$, 对任意函数 f, g, f 在 x_0 连续，g 在 x_0 连续，则

1. 对任意的实数 α, β, 函数 $\alpha f + \beta g$ 在 x_0 连续。
2. 函数 $f \cdot g$ 在 x_0 连续。

定理

实数 $x_0 \in \mathbb{R}$, 对任意函数 f, g, f 在 x_0 连续，g 在 x_0 连续，且 $g(x_0) \neq 0$, 则 $\dfrac{f}{g}$ 在 x_0 连续。

函数极限的运算

事实

定义在一个区间上的连续函数，如果知道了其在有理数点的定义，因为任意无理数都可以写成是一列有理数的极限，根据 Heine 定理，这个函数在无理点的定义就是确定的，从而这个函数就定义好了。

函数极限的运算

事实

定义在一个区间上的连续函数，如果知道了其在有理数点的定义，因为任意无理数都可以写成是一列有理数的极限，根据 Heine 定理，这个函数在无理点的定义就是确定的，从而这个函数就定义好了。

例

假设函数 f 在实数集上连续，且对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 证明：存在实数 c, 使得对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 成立 $f(x) = cx$.

函数极限的运算

事实

定义在一个区间上的连续函数，如果知道了其在有理数点的定义，因为任意无理数都可以写成是一列有理数的极限，根据 Heine 定理，这个函数在无理点的定义就是确定的，从而这个函数就定义好了。

例

假设函数 f 在实数集上连续，且对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 证明：存在实数 c, 使得对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 成立 $f(x) = cx$.

证明要点.

令 $c = f(1)$. 由 $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, 可得 $f(0) = 0 = c \cdot 0$. 再证对任意的正整数 n, $f(n) = nf(1) = cn$; 再证对任意的整数 n, $f(n) = nf(1) = cn$; 再证对任意的有理数 x, $f(x) = cx$; 最后再由连续性证对任意的实数 n, $f(x) = cx$. □

函数极限的运算

思考讨论

1. 假设函数 f 在实数集上连续，且对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 证明：存在实数 c, 使得对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 成立 $f(x) = cx$.
2. 假设函数 f 在实数集上连续，$f(0) \neq 0$ 且对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)f(y)$. 证明：存在实数 $c \neq 0$, 使得对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 成立 $f(x) = c^x$.

函数极限的运算

定理

实数 $x_0 \in \mathbb{R}$, 对任意函数 f,g, g 的定义域为 I_g, f 的定义域为 I_f, $g(I_g) \subset I_f$(f 在 g 的值域有定义)，若 f 在 g_0 连续，g 在 x_0 连续，且 $g(x_0) = g_0$, 则函数 $f \circ g$ 在 x_0 连续。

函数极限的运算

定理

实数 $x_0 \in \mathbb{R}$, 对任意函数 f,g, g 的定义域为 I_g, f 的定义域为 I_f, $g(I_g) \subset I_f$(f 在 g 的值域有定义)，若 f 在 g_0 连续，g 在 x_0 连续，且 $g(x_0) = g_0$, 则函数 $f \circ g$ 在 x_0 连续。

证明.

对任意的 $\varepsilon > 0$, 因为 f 在 g_0 连续，存在 $\eta > 0$, 当 $t \in (g_0 - \eta, g_0 + \eta) \cap I_f$ 时，成立 $|f(t) - f(g_0)| < \varepsilon$.

因为 g 在 x_0 连续，存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I_g$ 时，成立 $|g(x) - g(x_0)| < \eta$, 则 $g(x) \in (g_0 - \eta, g_0 + \eta) \cap g(I_g) \subset (g_0 - \eta, g_0 + \eta) \cap I_f$.

所以

$$|(f \circ g)(x) - f(g(x_0))| = |f(g(x)) - f(g_0)| < \varepsilon.$$

□

函数极限的运算

定理

实数 $x_0 \in \mathbb{R}$，对任意函数 f,g，g 的定义域为 I_g，f 的定义域为 I_f，$g(I_g) \subset I_f$（f 在 g 的值域有定义），若 f 在 g_0 连续，g 在 x_0 连续，且 $g(x_0) = g_0$，则函数 $f \circ g$ 在 x_0 连续。

定理

连续函数的复合是连续函数。

函数极限的运算

定理

实数 $x_0 \in \mathbb{R}$, 对任意函数 f,g, g 的定义域为 I_g, f 的定义域为 I_f, $g(I_g) \subset I_f$(f 在 g 的值域有定义)，若 f 在 g_0 连续，g 在 x_0 连续，且 $g(x_0) = g_0$, 则函数 $f \circ g$ 在 x_0 连续。

定理

连续函数的复合是连续函数。

交换函数符号与极限符号的次序.

函数 f 在 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ 连续, 函数 g 在 x_0 连续, 则

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(g(\lim_{x \to x_0} x)).$$

□

函数极限的运算

$a < b$

定理

对任意函数 f, 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上是严格单调增加的连续函数，$\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, 则函数 f 的反函数 f^{-1} 在 $[\alpha,\beta]$ 上是严格单调增加的连续函数。

函数极限的运算

$a < b$

定理

对任意函数 f, 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上是严格单调增加的连续函数，$\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, 则函数 f 的反函数 f^{-1} 在 $[\alpha,\beta]$ 上是严格单调增加的连续函数。

引理

对任意函数 f, 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上是严格单调增加的连续函数，$\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, 则函数 f 的反函数 f^{-1} 在 $[\alpha,\beta]$ 上有定义。

函数极限的运算

$a < b$

定理

对任意函数 f, 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上是严格单调增加的连续函数，$\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, 则函数 f 的反函数 f^{-1} 在 $[\alpha,\beta]$ 上是严格单调增加的连续函数。

引理

对任意函数 f, 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上是严格单调增加的连续函数，$\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, 则函数 f 的反函数 f^{-1} 在 $[\alpha,\beta]$ 上有定义。

引理

对任意函数 f, 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上是严格单调增加的连续函数，$\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, 则函数 f 的反函数 f^{-1} 在 $[\alpha,\beta]$ 上是严格单调增加的。

函数极限的运算

引理

若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上是严格单调增加的连续函数，$\alpha = f(a), \beta = f(b)$，则函数 f 的反函数 f^{-1} 在 $[\alpha,\beta]$ 上有定义。

函数极限的运算

引理

若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上是严格单调增加的连续函数，$\alpha = f(a), \beta = f(b)$, 则函数 f 的反函数 f^{-1} 在 $[\alpha,\beta]$ 上是严格单调增加的。

函数极限的运算

引理

若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上是严格单调增加的连续函数，$\alpha = f(a), \beta = f(b)$, 则函数 f 的反函数 f^{-1} 在 $[\alpha,\beta]$ 上是严格单调增加的。

证明.

对任意的 $y_1, y_2 \in [\alpha,\beta]$, 设 $y_1 < y_2$. 令 $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$.

1. 若 $x_1 > x_2$, 则由 f 严格单调增加可得

$$y_1 = f(f^{-1}(y_1)) = f(x_1) > f(x_2) = f(f^{-1}(y_2)) = y_2.$$

2. 若 $x_1 = x_2$, 则由 f 严格单调增加可得

$$y_1 = f(f^{-1}(y_1)) = f(x_1) = f(x_2) = f(f^{-1}(y_2)) = y_2.$$

都与 $y_1 < y_2$ 矛盾。因此必有 $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$. □

函数极限的运算

定理

对任意函数 f, 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上是严格单调增加的连续函数，$\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, 则函数 f 的反函数 f^{-1} 在 $[\alpha,\beta]$ 上是严格单调增加的连续函数。

函数极限的运算

定理

对任意函数 f, 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上是严格单调增加的连续函数，$\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, 则函数 f 的反函数 f^{-1} 在 $[\alpha,\beta]$ 上是严格单调增加的连续函数。

证明.

对任意函数 f, 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上是严格单调增加的连续函数，$\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, 由前面的引理，则函数 f 的反函数 f^{-1} 在 $[\alpha,\beta]$ 上是严格单调增加的函数。对任意的 $y_0 \in [\alpha,\beta]$, 记 $x_0 = f(y_0)$, 则 $x_0 \in [a,b]$. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 记 $y_1 = f(\min\{b, x_0+\varepsilon\})$, $y_2 = f(\max\{a, x_0-\varepsilon\})$, 令

$$\delta = \begin{cases} y_0 - y_2, & \text{如果} y_0 = y_1 \\ y_1 - y_0, & \text{如果} y_0 = y_2 \\ \min\{y_1 - y_0, y_0 - y_2\}, & \text{其它情况} \end{cases}$$

则 $\delta > 0$, 且当 $|y - y_0| < \delta$ 且 $y \in [\alpha,\beta]$ 时，$\left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| < \varepsilon$. □

初等函数的连续性

1. 函数 $I(x) = x$ 的连续性由定义已经证得
2. 整数次幂函数（含常数函数）的连续性由极限的乘法运算可以得到
3. 开整数次幂的函数的连续性可由反函数的连续性可以得到
4. 有理数次幂函数的连续性可由极限的乘法除法运算得到
5. 超越函数（e^x, $\sin x$,$\cos x$）的连续性将在函数定义的时候保证（不使用任何依赖他们的性质得到结论）
6. 对数函数，反三角函数的连续性由反函数的连续性得到
7. 初等函数的连续性由极限的四则运算、复合函数的连续性得到

定理

所有初等函数在定义域上连续。

初等函数的连续性

例

求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

初等函数的连续性

例

求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

解

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

函数极限的运算

作业

1. 由函数
$$\text{对任意的 } x \in [0,+\infty),\ s(x) = x^2$$
在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增加且连续，模仿反函数连续性的证明过程，证明：开方函数 $\sqrt{\cdot}$ 作为 s 的反函数在 $[0,+\infty)$ 上有定义严格单调增加且连续。
2. 证明：绝对值函数 $|\cdot|$ 连续。
3. 课本第 72 页习题 1(1)(3), 2(1)(3)(4)(5)(6), 8
4. 课本第 83 页习题 5

思考讨论

1. 课本第 72 页习题 9
2. 课本第 83 页习题 3，4，6

关于超越函数的两个极限

定理

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

关于超越函数的两个极限

定理

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

关于超越函数的两个极限

定理

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

定理

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, 且当 $x\neq x_0$ 时,$f(x)\neq 0$, 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1.$$

关于超越函数的两个极限

定理

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

关于超越函数的两个极限

定理

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

关于超越函数的两个极限

定理

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

例

求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=2$$

关于超越函数的两个极限

例

$\alpha \neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\alpha=\alpha.$

例

$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$.

关于超越函数的两个极限

例

$\alpha \neq 0$ 时， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\alpha = \alpha.$

例

$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\frac{\alpha x}{\beta x}\cdot\frac{\beta x}{\sin\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$$

关于超越函数的两个极限

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

关于超越函数的两个极限

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)}=1.$$

关于超越函数的两个极限

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

关于超越函数的两个极限

例

求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

关于超越函数的两个极限

例

求 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$.

关于超越函数的两个极限

例

求 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$.

解

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}\xlongequal{t=x-\pi}\lim_{t\to0}\frac{\sin(t+\pi)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{t}=-1.$$

关于超越函数的两个极限

定理

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

定理

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, 且当 $x\neq x_0$ 时,$f(x)\neq 0$, 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1.$$

关于超越函数的两个极限

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

关于超越函数的两个极限

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\xlongequal{t=\ln(1+x)}\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}=1.$$

关于超越函数的两个极限

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

关于超越函数的两个极限

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{1} = e.$$

关于超越函数的两个极限

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

关于超越函数的两个极限

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

解

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{-2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

关于超越函数的两个极限

例

$\alpha \neq 0$，求：$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$.

关于超越函数的两个极限

例

$\alpha \neq 0$, 求： $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{\alpha\ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha\ln(1+x)}{x} \\ &= \alpha.\end{aligned}$$

函数的左右极限

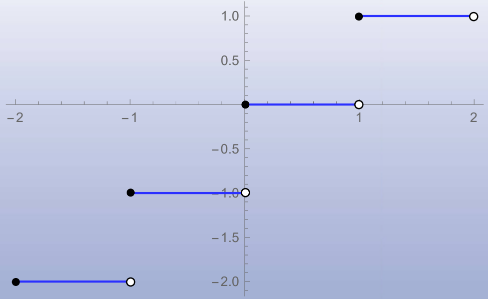


图: $y = [x]$

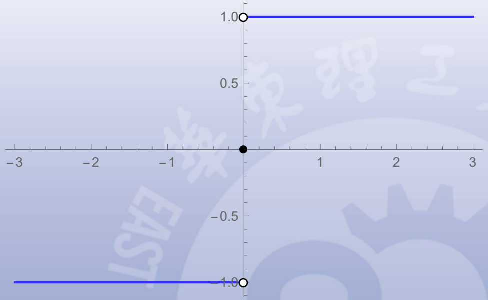


图: $y = \operatorname{sgn} x$

函数的左右极限

$x_0 \in \mathbb{R}$, 函数 f 在集合 I 上有定义。

定义 (当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的极限是 A)

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I - \{x_0\}$ 时，成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 称为：当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的极限是 A. 记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

函数的左右极限

$x_0 \in \mathbb{R}$, 函数 f 在集合 I 上有定义。

定义 (当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的极限是 A)

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I - \{x_0\}$ 时，成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 称为：当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的极限是 A. 记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

定义 (当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的右极限是 A)

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap I$ 时，成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 称为：当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的右极限是 A. 记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$

函数的左右极限

$x_0 \in \mathbb{R}$, 函数 f 在集合 I 上有定义。

定义 (当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的极限是 A)

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I - \{x_0\}$ 时，成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 称为：当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的极限是 A. 记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

定义 (当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的右极限是 A)

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap I$ 时，成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 称为：当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的右极限是 A. 记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$

定义 (当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的左极限是 A)

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap I$ 时，成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 称为：当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的左极限是 A. 记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$

函数的左右极限

(函数 f 在 x_0 两侧有定义。)

定理

f 在 x_0 极限存在的充分必要条件是 f 在 x_0 左极限、右极限都存在且相等。

定理

f 在 x_0 连续的充分必要条件是 f 在 x_0 左连续且右连续。

函数的左右极限

如果函数表达式是分段函数，或使用了分段函数，讨论的点正好是分段点的话，考虑连续性时就应该考虑左右极限。

例

讨论函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\geqslant 0 \\ x^2+1, & x<0 \end{cases}$ 的连续性。

函数的左右极限

如果函数表达式是分段函数，或使用了分段函数，讨论的点正好是分段点的话，考虑连续性时就应该考虑左右极限。

例

讨论函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x \geqslant 0 \\ x^2+1, & x<0 \end{cases}$ 的连续性。

解

当 $x>0$ 时，$f(x)=e^x$. 故 f 在 $(0,+\infty)$ 连续。当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+1$. 故 f 在 $(-\infty,0)$ 连续。因为 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} x^2+1=1$,

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} e^x=1=\lim_{x\to0^-} f(x)=f(0)$$

所以，f 在 0 连续。
所以，f 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续。

函数的极限

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\square$ ________ 存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，________

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\square$ ________ 存在 $\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，________

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\square$ ________ 存在 $\delta>0$，当 $0<x_0-x<\delta$ 时，________

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\square$ ________ 存在 $N>0$，当 $x>N$ 时，________

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\square$ ________ 存在 $N>0$，当 $x<-N$ 时，________

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\square$ ________ 存在 $N>0$，当 $|x|>N$ 时，________

$\lim f(x)=A$ 对任意 $\varepsilon>0$，________________，成立 $|f(x)-A|<\varepsilon$

$\lim f(x)=\infty$ 对任意 $M>0$，________________，成立 $|f(x)|>M$

$\lim f(x)=+\infty$ 对任意 $M>0$，________________，成立 $f(x)>M$

$\lim f(x)=-\infty$ 对任意 $M>0$，________________，成立 $f(x)<-M$

函数的极限

例

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

函数的极限

例

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

例

$\lim_{x \to \infty} e^x$ 不存在。

函数的极限

注意.

提到函数的极限时，应当写清楚极限过程！ □

函数的极限

注意.

提到函数的极限时，应当写清楚极限过程！ □

事实.

不管是哪种极限过程，均有类似的唯一性、保序性、四则运算、复合、控制性收敛定理、Heine 定理等结论，证明过程也都类似。
函数极限也有相应的无穷大量、无穷小量、待定型的概念，以及相应的运算性质。 □

函数的极限

例

求：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

函数的极限

例

求：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

函数的极限

例

求：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

解（错误解答）

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}x}=1^{\lim\limits_{x\to\infty}x}=\lim_{x\to\infty}1^{x}=1.$$

函数的极限

例

求：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

解（错误解答）

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}x}=1^{\lim\limits_{x\to\infty}x}=\lim_{x\to\infty}1^{x}=1.$$

解

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.$$

函数的间断点

定义

f 在 x_0 不连续，亦称 f 在 x_0 间断，此时，x_0 称为 f 的不连续点或间断点。

函数的间断点

定义

f 在 x_0 不连续，亦称 f 在 x_0 间断，此时，x_0 称为 f 的不连续点或间断点。

间断点的分类.

1. f 在 x_0 左右极限存在。这类间断点称为第一类间断点。
   1. f 在 x_0 左右极限存在且相等。此时，f 在 x_0 左右极限不等于 $f(x_0)$ 或者 f 在 x_0 无定义。这类间断点称为可去间断点。例如：0 是 $\frac{\sin x}{x}$ 的可去间断点。
   2. f 在 x_0 左右极限存在但不相等。这类间断点称为跳跃间断点。例如：0 是符号函数 sgn 的跳跃间断点。
2. f 在 x_0 左右极限至少有一个不存在。这类间断点称为第二类间断点。根据导致极限不存在的方式，可称为无穷间断点、振荡间断点等。例如：0 是 $\frac{1}{x}$ 的无穷间断点，0 是 $\sin\frac{1}{x}$ 的振荡间断点。

□

函数的间断点

事实.

若 f 的定义域是 I, x_0 是 f 的可去间断点，则存在一个函数 $\hat{f}$ 在 $I \cup \{x_0\}$ 上有定义，$\hat{f}$ 在 x_0 连续，且对任意的 $x \in I - \{x_0\}$, $\hat{f}(x) = f(x)$. □

函数的间断点

事实.

若 f 的定义域是 I, x_0 是 f 的可去间断点，则存在一个函数 $\hat{f}$ 在 $I \cup \{x_0\}$ 上有定义，$\hat{f}$ 在 x_0 连续，且对任意的 $x \in I - \{x_0\}$, $\hat{f}(x) = f(x)$. □

例

对任意的 $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

若对任意的实数 x, 定义 $\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

则 $\hat{f}$ 在 0 连续，且对任意的 $x \neq 0$, $\hat{f}(x) = f(x)$.

函数的间断点

定理

区间上的单调函数在区间上没有第二类间断点。

函数的间断点

定理

区间上的单调函数在区间上没有第二类间断点。

定理

设 f 是定义在 I 上的一个单调增加的函数，$x_0 \in I$, 若存在 $a \in I$ 使得 $(a, x_0) \subset I$, 则 f 在 x_0 有左极限。

函数的间断点

定理

设 f 是定义在 I 上的一个单调增加的函数，$x_0 \in I$, 若存在 $a \in I$ 使得 $(a, x_0) \subset I$, 则 f 在 x_0 有左极限，且左极限小于等于函数值 $f(x_0)$.

证明.

设 $a \in I$ 使得 $(a, x_0) \subset I$. 对任意的 $x \in (a, x_0) \cap I$, 由 f 是单调增加的，$f(x) \leqslant f(x_0)$, 所以集合 $R_{x_0} = \{f(x) : x \in (a, x_0) \cap I\}$ 有上界 $f(x_0)$, 由确界存在定理，集合 R_{x_0} 有上确界，记为 α，即 $\alpha = \sup R_{x_0}$. 因 $f(x_0)$ 是 R_{x_0} 的上界，$\alpha \leqslant f(x_0)$.
对任意的 $\varepsilon > 0$, $\alpha - \varepsilon$ 不是 R_{x_0} 的上界，因此必存在 $y' \in R_{x_0}$, 使得 $y' > \alpha - \varepsilon$, 所以存在 $x' \in (a, x_0) \cap I$, 使得 $y' = f(x') > a - \varepsilon$. 令 $\delta = x_0 - x'$, 则 $\delta > 0$, 当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时且 $x \in I$，$x' = x_0 - \delta < x < x_0$, 由 f 是单调增加的，

$$\alpha - \varepsilon < f(x') \leqslant f(x) \leqslant \alpha$$

所以 $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. 因此 $\lim f(x) = \alpha$, f 在 x_0 有左极限。 □

函数的间断点

定理

区间上的单调函数在区间上没有第二类间断点。

推论

单调函数在定义域内没有可去间断点。

推论

单调函数的不连续点最多有可数多个。

函数的极限

作业

1. 课本第 83 页习题 7(1)(3)
2. 课本第 58 页习题 1(1)(3)(5)
3. 课本第 84 页习题 8(2)(7),9
4. 设 f 是定义在 I 上的一个单调增加的函数，$x_0 \in I$, 存在 $b \in I$ 使得 $(x_0, b) \subset I$, 证明：f 在 x_0 有右极限。

思考讨论

1. 设 f 是定义在 I 上的一个单调减少的函数，$x_0 \in I$, 存在 $a \in I$ 使得 $(a, x_0) \subset I$, 证明：f 在 x_0 有左极限。
2. 设 f 是定义在 I 上的一个单调减少的函数，$x_0 \in I$, 存在 $b \in I$ 使得 $(x_0, b) \subset I$, 证明：f 在 x_0 有右极限。

无穷大量无穷小量的比较

定义 (高阶无穷小量, 低阶无穷小量)

$\lim_{x\to x_0} u(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} v(x) = 0$, 如果 $\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = 0$, 称当 x 趋于 x_0 时，u 是 v 的高阶无穷小量，当 x 趋于 x_0 时，v 是 u 的低阶无穷小量。表示为

$$u(x) = o(v(x))(x \to x_0)$$

或者

$$\text{当 } x \text{ 趋于 } x_0 \text{ 时}, u(x) = o(v(x)).$$

无穷大量无穷小量的比较

例

由 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}-1=0$ 可得当 x 趋于 0 时，$\sin x-x=o(x)$.

无穷大量无穷小量的比较

例

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} - 1 = 0$ 可得当 x 趋于 0 时, $\sin x - x = o(x)$.

例

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1 - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} - 1 = 0$ 可得当 x 趋于 0 时, $e^x - 1 - x = o(x)$.

无穷大量无穷小量的比较

例

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x - x}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x} - 1 = 0$ 可得当 x 趋于 0 时, $\sin x - x = o(x)$.

例

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x - 1 - x}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x - 1}{x} - 1 = 0$ 可得当 x 趋于 0 时, $e^x - 1 - x = o(x)$.

例

$m > n$, 由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^m}{(x-1)^n} = \lim\limits_{x\to1}(x-1)^{m-n} = 0$ 可得当 x 趋于 1 时, $(x-1)^m = o((x-1)^n)$.

无穷大量无穷小量的比较

注意.

1. 高阶无穷小量的表示中用的是等号，因此可以用在等式中
2. 用高阶无穷小量符号 $o(v(x))$ 表示时，只关注这个式子除以 $v(x)$ 的极限是 0 这个性质，不关注其它的性质
3. 为了叙述方便，用 $o(1)$ 表示（某极限过程下的）一个无穷小量

□

无穷大量无穷小量的比较

注意.

1. 高阶无穷小量的表示中用的是等号，因此可以用在等式中
2. 用高阶无穷小量符号 $o(v(x))$ 表示时，只关注这个式子除以 $v(x)$ 的极限是 0 这个性质，不关注其它的性质
3. 为了叙述方便，用 $o(1)$ 表示（某极限过程下的）一个无穷小量

□

例

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 也可表示为当 x 趋于 x_0 时，$f(x) - A = o(1)$.

无穷大量无穷小量的比较

例

某定理叙述为：设 f 在 x_0 处有 n 阶导数，则当 x 趋于 x_0 时，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right).$$

含义就是：假设 f 在 x_0 处有 n 阶导数，则

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} = 0.$$

无穷大量无穷小量的比较

定义（有界量，同阶无穷小量）

$\lim_{x\to x_0} u(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} v(x) = 0$.

如果存在 $A > 0$, 及 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right| < A$, 称当 x 趋于 x_0 时，$\frac{u(x)}{v(x)}$ 是有界量。表示为

$$u(x) = O(v(x))(x \to x_0)$$

或者：当 x 趋于 x_0 时，$u(x) = O(v(x))$.

如果存在 $a > 0$, $A > 0$, 及 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$a < \left|\frac{u(x)}{v(x)}\right| < A$, 称当 x 趋于 x_0 时，u 是 v 的同阶无穷小量。

无穷大量无穷小量的比较

定义 (k 阶无穷小量)

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0,\ k > 0.$

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{(x-x_0)^k} = c \neq 0$，称当 x 趋于 x_0 时，u 是关于无穷小量 $x - x_0$ 的 k 阶无穷小量。

无穷大量无穷小量的比较

定义 (k 阶无穷小量)

$\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0,\ k > 0.$

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x)}{(x-x_0)^k} = c \neq 0$, 称当 x 趋于 x_0 时，u 是关于无穷小量 $x-x_0$ 的 k 阶无穷小量。

例

由 $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi} = -1$，当 x 趋于 π 时，$\sin x$ 是关于无穷小量 $x-\pi$ 的 1 阶无穷小量。

无穷大量无穷小量的比较

定义 (k 阶无穷小量)

$\lim_{x\to x_0} u(x)=0,\ k>0.$

如果 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{(x-x_0)^k}=c\neq 0$，称当 x 趋于 x_0 时，u 是关于无穷小量 $x-x_0$ 的 k 阶无穷小量。

例

由 $\lim_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}=-1$，当 x 趋于 π 时，$\sin x$ 是关于无穷小量 $x-\pi$ 的 1 阶无穷小量。

例

由 $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，当 x 趋于 0 时，$1-\cos x$ 是关于无穷小量 x 的 2 阶无穷小量。

无穷大量无穷小量的比较

定义 (等阶无穷小量)

$\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = 0.$

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = 1$, 称当 x 趋于 x_0 时，u 是 v 的等阶无穷小量。表示为

$$u(x) \sim v(x)(x \to x_0)$$

或者

$$\text{当 } x \text{ 趋于 } x_0 \text{ 时}, u(x) \sim v(x).$$

无穷大量无穷小量的比较

常见的等阶无穷小量.

当 x 趋于 0 时，有下列常见的等价无穷小量：

1. $\sin x \sim x$
2. $\arcsin x \sim x$
3. $e^x - 1 \sim x$
4. $\ln(1+x) \sim x$
5. $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
6. $\tan x \sim x$
7. $\arctan x \sim x$
8. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

□

无穷大量无穷小量的比较

定理

假设当 x 趋于 x_0 时, $u(x) \sim v(x)$, 那么

1. 当 $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)w(x) = A$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)w(x) = A$;
2. 当 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{w(x)}{u(x)} = A$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{w(x)}{v(x)} = A$.

无穷大量无穷小量的比较

定理

假设当 x 趋于 x_0 时, $u(x) \sim v(x)$, 那么

1. 当 $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)w(x) = A$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)w(x) = A$;
2. 当 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{w(x)}{u(x)} = A$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{w(x)}{v(x)} = A$.

例

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{(e^{2x}-1)\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x\cdot x} = \frac{1}{2}.$$

无穷大量无穷小量的比较

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

无穷大量无穷小量的比较

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 (课本第 90 页，例 3.3.12)

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(1-(1-\cos x))^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{2}{x^2}}\right]^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

无穷大量无穷小量的比较

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}.$$

无穷大量无穷小量的比较

定理

1. 对任意的 $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

2. 对任意的 $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

3. 对任意的 $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

无穷大量无穷小量的比较

定理 (续)

1. 对任意的 $x \in (-1, 1]$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

2. 对任意的 $x \in (-1, 1)$,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} C_\alpha^n x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + C_\alpha^n x^n + \cdots$$

特别的 对任意的 $x \in (-1, 1)$,

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

无穷大量无穷小量的比较

当 x 趋于 0 时.

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$
5. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + C_\alpha^n x^n + o(x^n)$

$\square$

无穷大量无穷小量的比较

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

无穷大量无穷小量的比较

例

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

错误解法.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=0.$$

□

无穷大量无穷小量的比较

例

求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

错误解法.

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x^3}=0.$$

□

错误解法.

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3!}}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

□

无穷大量无穷小量的比较

例

求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

错误解法.

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3!}}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

□

正确解法.

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{3!}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=\frac{1}{6}.$$

无穷大量无穷小量的比较

定义 (高阶无穷大量, 低阶无穷大量)

$\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \infty$, 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = \infty$, 称当 x 趋于 x_0 时，u 是 v 的高阶无穷大量，当 x 趋于 x_0 时，v 是 u 的低阶无穷大量。

无穷大量无穷小量的比较

定义 (有界量，同阶无穷大量)

$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\infty.$

如果存在 $A>0$, 及 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$\left|\dfrac{u(x)}{v(x)}\right|<A$, 称当 x 趋于 x_0 时，$\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 是有界量。表示为

$$u(x)=O(v(x))(x\to x_0)$$

或者：当 x 趋于 x_0 时, $u(x)=O(v(x))$.

如果存在 $a>0$, $A>0$, 及 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$a<\left|\dfrac{u(x)}{v(x)}\right|<A$, 称当 x 趋于 x_0 时，u 是 v 的同阶无穷大量。

无穷大量无穷小量的比较

定义 (k 阶无穷大量)

$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\infty,\ k>0.$

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v^k(x)}=c\neq 0$, 称当 x 趋于 x_0 时，u 是关于无穷大量 $v(x)$ 的 k 阶无穷大量。

无穷大量无穷小量的比较

定义 (k 阶无穷大量)

$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\infty$, $k>0$.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v^k(x)}=c\neq 0$, 称当 x 趋于 x_0 时，u 是关于无穷大量 $v(x)$ 的 k 阶无穷大量。

定义 (等阶无穷大量)

$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\infty$.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}=1$, 称当 x 趋于 x_0 时，u 是 v 的等阶无穷大量。表示为

$$u(x)\sim v(x)(x\to x_0)$$

或者

$$\text{当 } x \text{ 趋于 } x_0 \text{ 时}, u(x)\sim v(x).$$

无穷大量无穷小量的比较

例

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=\gamma$, 可知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n}{\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\gamma}{\ln n}=0$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}=1$, 所当 n 趋于 $+\infty$ 时，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 是 $\ln n$ 的等价无穷大量, 即

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n\ (n\to+\infty)$$

无穷大量无穷小量的比较

事实

前面关于无穷大量无穷小量的比较的定义，稍加修改即适用于极限过程：$x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$, $n \to +\infty$ 等等。

无穷大量无穷小量的比较

事实

前面关于无穷大量无穷小量的比较的定义，稍加修改即适用于极限过程：$x \to x_0^+$，$x \to x_0^-$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$，$x \to \infty$，$n \to +\infty$ 等等。

例

对任意的 $\varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{n^{\varepsilon}} = 0$，可知当 n 趋于 $+\infty$ 时，$\ln n$ 是关于无穷大量 n 的任意阶的低阶无穷大量。

无穷大量无穷小量的比较

事实

前面关于无穷大量无穷小量的比较的定义，稍加修改即适用于极限过程：$x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$, $n \to +\infty$ 等等。

例

对任意的 $\varepsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n^\varepsilon} = 0$，可知当 n 趋于 $+\infty$ 时，$\ln n$ 是关于无穷大量 n 的任意阶的低阶无穷大量。

例

$a > 1$, 对任意的 $k > 0$, 由 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$，可知当 n 趋于 $+\infty$ 时，a^n 是关于无穷大量 n 的任意阶的高阶无穷大量。

无穷大量无穷小量的比较

例

$m, n \in \mathbb{N}^+$, 且 $m > n$, $a_m \neq 0$, $a_n \neq 0$. 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=n}^{m} a_k x^k}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1}\cdots + a_m x^m}{x^n} = \lim_{x\to 0}\left(a_n + a_{n+1}x\cdots + a_m x^{m-n}\right) = a_n$$

当 x 趋于 0 时，$\sum_{k=n}^{m} a_k x^k \sim a_n x^n$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\sum_{k=n}^{m} a_k x^k}{x^m} &= \lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1}\cdots + a_m x^m}{x^m}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(a_n\frac{1}{x^{m-n}} + a_{n+1}\frac{1}{x^{m-n-1}}\cdots + a_m\right) = a_m\end{aligned}$$

当 x 趋于 ∞ 时，$\sum_{k=n}^{m} a_k x^k \sim a_m x^m$.

无穷大量无穷小量的比较

定理

当 x 趋于 0 时，

1. 若 $m > n > 0$，则 $o(x^m) + o(x^n) = o(x^n)$;
2. 若 $m, n > 0$，则 $o(x^m)o(x^n) = o(x^{m+n})$;
3. 若 $|f| < M$，则 $f(x)o(x) = o(x)$;
4. 若 $m, n > 0$，则 $x^m o(x^n) = o(x^{m+n})$;
5. $m > 0$, $o(x^m) - o(x^m) = o(x^m)$;
6. $-o(x) = o(x)$;
7. $o(x) = O(x)$.

无穷大量无穷小量的比较

例

当 x 趋于 0 时，$e^x\sin x - x$ 是关于无穷小量 x 的多少阶无穷小量？

无穷大量无穷小量的比较

例

当 x 趋于 0 时，$e^x \sin x - x$ 是关于无穷小量 x 的多少阶无穷小量？

解

当 x 趋于 0 时，$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, 所以

$$\begin{aligned} e^x \sin x - x = & \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - x \\ = & x + x^2 + o(x^2) - x \\ = & x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

当 x 趋于 0 时，$e^x \sin x - x$ 是关于无穷小量 x 的 2 阶无穷小量。

无穷大量无穷小量的比较

例

求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$.

当 $x\to 0$ 时，$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3+o(x^3)$

无穷大量无穷小量的比较

例

求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$.

当 $x\to 0$ 时，$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3+o(x^3)$

解

当 x 趋于 $+\infty$ 时，

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{x}-\frac{1}{8}\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right) = x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{8}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{x}-\frac{1}{8}\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right) = x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{8}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

所以当 x 趋于 $+\infty$ 时，$x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right) = -\frac{1}{4}+x^{\frac{3}{2}}o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$,

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right) = -\frac{1}{4}$.

无穷大量无穷小量的比较

求极限步骤.

1. 看极限过程
2. 判断所求的极限的地方是否是函数的连续点，如果是，直接代入函数
3. 把不是趋于 0 的过程，通过变换化为趋于 0 的过程：$x \to x_0$ 时用 $t = x - x_0$; $x \to \infty$ 时用 $t = \frac{1}{x}$
4. 化简
5. 判断 0 是否是函数的连续点，如果是，直接代入函数
6. 用等价无穷小量替换其中的因子，或者带 o 的等式替换其中较复杂的式子
7. 化简
8. 判断 0 是否是函数的连续点，如果是，直接代入函数
9. 用等价无穷小量替换其中的因子，或者带 o 的等式替换其中较复杂的式子
10. $\vdots$

无穷大量无穷小量的比较

例

求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$.

当 $x\to 0$ 时，$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3+o(x^3)$

无穷大量无穷小量的比较

例

求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$.

当 $x\to 0$ 时，$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3+o(x^3)$

解

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right) \xlongequal{t=\frac{1}{x}} \lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{\frac{1}{t}+1}+\sqrt{\frac{1}{t}-1}-2\sqrt{\frac{1}{t}}}{t^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}-2}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2)\right)+\left(1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2)\right)-2}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{-\frac{1}{4}t^2+o(t^2)}{t^2}=-\frac{1}{4}$$

无穷大量无穷小量的比较

例

求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}+o(x^{n+1})$

无穷大量无穷小量的比较

例

求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}+o(x^{n+1})$

解

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(n-n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3\right)\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+n^2o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}$$

无穷大量无穷小量的比较

作业

1. 课本第 73 页习题 2(7)(8)(9)(10), 6(1)(4)
2. 课本第 91 页习题 3(1)(3)(5)(7)(9)(11)
3. 课本第 183 页习题 6(1)(2)

无穷大量无穷小量的比较

例

$a > 0$, $a \neq 1$, 求当 $x \to 0$ 时，$a^x - 1$ 的等价无穷小量.

无穷大量无穷小量的比较

例

$a>0,\ a\neq 1$, 求当 $x\to 0$ 时，a^x-1 的等价无穷小量.

例

$a>0,\ a\neq 1$, 求当 $x\to 0$ 时，$\log_a(1+x)$ 的等价无穷小量.

函数极限的 Cauchy 收敛原理

$x_0 \in \mathbb{R}$, 函数 f 在集合 I 上有定义。

定理

当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 收敛的充分必要条件是:
对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $x', x'' \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I - \{x_0\}$ 时，成立 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

定理

当 x 趋于 ∞ 时 $f(x)$ 收敛的充分必要条件是:
对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 使得当 $|x'| > M, |x''| > M$ 时，成立 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

连续函数的性质

定理 (有界性定理)

闭区间上的连续函数有界。

连续函数的性质

定理 (有界性定理)

闭区间上的连续函数有界。

用闭区间套定理证明的思路.

假设函数在闭区间上无界。把区间等分为两个，则函数在其中至少有一个上面是无界的，选择一个其中无界的一个。把区间等分为两个，则函数在其中至少有一个上面是无界的，选择一个其中无界的一个……，构造出一个闭区间套，找到区间端点的极限，然后利用极限的局部有界性，说明区间套中从某个区间开始，函数在上面是有界的，产生矛盾。 □

连续函数的性质

定理 (有界性定理)

闭区间上的连续函数有界。

用闭区间套定理证明的思路.

假设函数在闭区间上无界。把区间等分为两个，则函数在其中至少有一个上面是无界的，选择一个其中无界的一个。把区间等分为两个，则函数在其中至少有一个上面是无界的，选择一个其中无界的一个……，构造出一个闭区间套，找到区间端点的极限，然后利用极限的局部有界性，说明区间套中从某个区间开始，函数在上面是有界的，产生矛盾。 □

用 Bolzano-Weierstrass 定理证明的思路.

假设函数在闭区间上无界。利用无界的定义，在区间中找一个点列使得这个点列上的函数值趋于无穷。由 Bolzano-Weierstrass 定理，这个点列应该有收敛子列，这个收敛子列的函数值应该是收敛的，从而是有界的，与函数值点列趋于无穷矛盾。 □

连续函数的性质

定理 (最值定理)

闭区间上的连续函数在闭区间上可以取到最大值。

连续函数的性质

定理 (最值定理)

闭区间上的连续函数在闭区间上可以取到最大值。

用 Bolzano-Weierstrass 定理证明的思路.

由有界性定理先说明函数是有界的，从而是有上确界的。利用上确界的定义，在区间中找一个点列使得这个点列上的函数值趋于这个上确界。由 Bolzano-Weierstrass 定理，这个点列应该有收敛子列，这个收敛子列的函数值应该是收敛的，收敛的值就是上确界，函数在这个收敛子列的极限点的地方取到最大值。 □

连续函数的性质

定理 (零点存在定理)

闭区间上的连续函数在闭区间的两个端点符号相反，则该函数在闭区间内有零点。

连续函数的性质

定理 (零点存在定理)

闭区间上的连续函数在闭区间的两个端点符号相反，则该函数在闭区间内有零点。

由确界存在定理证明的思路.

考虑区间中函数取值小于 0 的点构成的集合，尝试证它的上确界的函数值为 0. 这个上确界的点作为函数值小于 0 的点的上确界，函数值小于 0 的集合中存在收敛到这点的点列，从而由函数连续性及极限保号性，得出在上确界的函数值小于等于 0。如果函数值小于 0，根据连续的保号性可以找到它右侧有点的函数值也小于 0，从而与它是上确界矛盾。 □

连续函数的性质

定理 (零点存在定理)

闭区间上的连续函数在闭区间的两个端点符号相反，则该函数在闭区间内有零点。

由确界存在定理证明的思路.

考虑区间中函数取值小于 0 的点构成的集合，尝试证它的上确界的函数值为 0. 这个上确界的点作为函数值小于 0 的点的上确界，函数值小于 0 的集合中存在收敛到这点的点列，从而由函数连续性及极限保号性，得出在上确界的函数值小于等于 0。如果函数值小于 0，根据连续的保号性可以找到它右侧有点的函数值也小于 0，从而与它是上确界矛盾。 □

用闭区间套定理证明的思路.

把区间等分为两个，考虑中点的符号，如果中点值为 0，则找到 0 点。如果中点不为 0，选择与区间端点符号相反的那个端点与中点组成新的区间。把区间等分为两个，考虑中点的符号，如果中点值为 0，则找到 0 点。如果中点不为 0，选择与区间端点符号相反的那个端点与中点组成新的区间。……，构造出一个闭区间套，找到区间端点的极限，这极限作为两个端点的极限，对应的函数值的符号相反，只能是取值为 0。 □

连续函数的性质

定理 (零点存在定理)

闭区间上的连续函数在闭区间的两个端点符号相反，则该函数在闭区间内有零点。

定理 (介值（中间值）定理)

闭区间上的连续函数在闭区间上可取到最大值最小值之间的所有值。

连续函数的性质

例

函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f([a,b])\subset[a,b]$, 则存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\xi$.

连续函数的性质

例

函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f([a,b]) \subset [a,b]$, 则存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \xi$.

证明.

对任意的 $x \in [a,b]$，定义 $g(x) = f(x) - x$. 则由函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，可得函数 g 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且

$$g(a)g(b) = (f(a) - a)(f(b) - b) \leqslant 0$$

所以存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $g(\xi) = 0$，此时 $f(\xi) = \xi$. □

连续函数的性质

定理 (连续保持紧性)

闭区间上的连续函数把闭区间映为闭区间。

定理 (连续保持连通性)

连续函数把区间映为区间。

连续函数的性质

定义 (一致连续)

函数 f 在集合 I 上有定义，如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得对集合 I 中任意两点 x, x', 只要 $|x - x'| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, 就称 f 在 I 上一致连续。

连续函数的性质

定义 (一致连续)

函数 f 在集合 I 上有定义，如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得对集合 I 中任意两点 x, x', 只要 $|x - x'| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, 就称 f 在 I 上一致连续。

定理

在集合 I 上一致连续的函数在集合 I 上连续。

连续函数的性质

定义 (一致连续)

函数 f 在集合 I 上有定义，如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得对集合 I 中任意两点 x, x', 只要 $|x - x'| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, 就称 f 在 I 上一致连续。

定理

在集合 I 上一致连续的函数在集合 I 上连续。

证明.

对任意在 I 上一致连续的函数 f, 对任意的 $x_0 \in I$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 因为 f 在 I 上一致连续，存在 $\delta > 0$, 使得对集合 I 中任意两点 x, x', 只要 $|x - x'| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 且 $x \in I$ 时，$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 因此 f 在 x_0 连续。所以 f 在集合 I 上连续。 □

连续函数的性质

例

$\frac{1}{x}$ 在集合 $(0,1]$ 上不一致连续。

连续函数的性质

例

$\frac{1}{x}$ 在集合 $(0,1]$ 上不一致连续。

f 在集合 I 不一致连续的定义.

存在 $\varepsilon>0$, 使得对任意的 $\delta>0$, 在集合 I 中存在两点 $x,x'\in I$, 使得 $|x-x'|<\delta$, 且 $|f(x)-f(x')|>\varepsilon$. □

连续函数的性质

例

$\dfrac{1}{x}$ 在集合 $(0, 1]$ 上不一致连续。

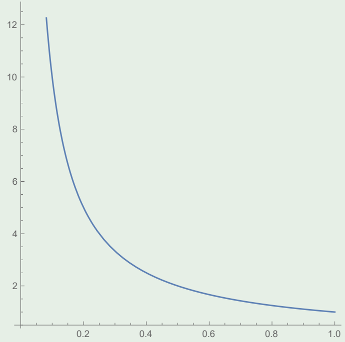


图: $y = \dfrac{1}{x}$

连续函数的性质

例

$\frac{1}{x}$ 在集合 $(0,1]$ 上不一致连续。

证明.

$(\varepsilon = \frac{1}{2},)$ 对任意的 $\delta > 0$, 存在 $N > 1$, 使得 $\frac{1}{N(N+1)} < \delta$, 令 $x_1 = \frac{1}{N}$, $x_2 = \frac{1}{N+1}$, 则 $x_1, x_2 \in (0,1]$, 且 $|x_1 - x_2| = \frac{1}{N(N+1)} < \delta$, 且

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right| = 1 \geqslant \frac{1}{2}.$$

所以 $\frac{1}{x}$ 在集合 $(0,1]$ 上不一致连续。 $\square$

连续函数的性质

定理

函数 f 在集合 I 上有定义。
f 在 I 上不一致连续的充要条件是：存在 $\varepsilon>0$, 及 I 中两个点列 $\{x_n'\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{x_n''\}_{n=1}^{+\infty}$, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|x_n'-x_n''\right|=0$, 但是对任意的 n, $\left|f(x_n')-f(x_n'')\right|>\varepsilon$.

连续函数的性质

定理 (Cantor 定理)

闭区间上连续函数是一致连续的。

连续函数的性质

定义

函数 f 在集合 I 上有定义，存在 $L>0$, 对集合 I 中任意两点 x', x'', 成立

$$\left|f(x')-f(x'')\right| \leqslant L\left|x'-x''\right|$$

就称 f 在 I 上满足 Lipschitz 条件。

连续函数的性质

定义

函数 f 在集合 I 上有定义，存在 $L > 0$, 对集合 I 中任意两点 x', x'', 成立

$$\left|f(x') - f(x'')\right| \leqslant L\left|x' - x''\right|$$

就称 f 在 I 上满足 Lipschitz 条件。

定理

f 在 I 上满足 Lipschitz 条件则 f 在集合 I 上一致连续。

连续函数的性质

定义

函数 f 在集合 I 上有定义，存在 $L>0$, 对集合 I 中任意两点 x',x'', 成立

$$\left|f(x')-f(x'')\right| \leqslant L\left|x'-x''\right|$$

就称 f 在 I 上满足 Lipschitz 条件。

定理

f 在 I 上满足 Lipschitz 条件则 f 在集合 I 上一致连续。

证明.

设 f 在 I 上满足 Lipschitz 条件, 则存在 $L>0$, 对集合 I 中任意两点 x',x'', 成立 $|f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|$.
对任意的 $\varepsilon>0$, 令 $\delta=\frac{1}{L}\varepsilon$, 则 $\delta>0$, 且对集合 I 中任意两点 x',x'', 只要 $|x'-x''|<\delta$, 就有 $|f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|<\varepsilon$. 所以 f 在集合 I 上一致连续。 $\square$

连续函数的性质

例

证明：$\sin x$ 在集合 $\mathbb{R}$ 上一致连续。

连续函数的性质

例

证明：$\sin x$ 在集合 $\mathbb{R}$ 上一致连续。

证明.

对任意两个实数 $x', x'' \in \mathbb{R}$,

$$\left|\sin x' - \sin x''\right| = \left|2\sin\frac{x'-x''}{2}\cos\frac{x'+x''}{2}\right| \leqslant \left|2\sin\frac{x'-x''}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x'-x''}{2}\right| = \left|x'-x''\right|.$$

$\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足 Lipschitz 条件，所以 $\sin x$ 在集合 $\mathbb{R}$ 上一致连续。 $\square$

连续函数的性质

定理

f 在集合 I 上一致连续，$I' \subset I$，则 f 在集合 I' 上一致连续。

连续函数的性质

定理

f 在有限开区间 (a,b) 上连续，则 f 在 (a,b) 上一致连续的充要条件是 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在。

充分性.

设 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在。定义 $\hat{f}$ 为：$\hat{f}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x), & x = a \\ f(x), & x \in (a,b) \\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x), & x = b \end{cases}$，由 f 在有限开区间 (a,b) 上连续，及当 $x \in (a,b)$ 时，$\hat{f}(x) = f(x)$，所以 $\hat{f}$ 在 (a,b) 连续，而 $\lim\limits_{x\to a^+} \hat{f}(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \hat{f}(a)$，$\lim\limits_{x\to b^-} \hat{f}(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \hat{f}(b)$，所以 $\hat{f}$ 在 $[a,b]$ 连续，由 Cantor 定理，$\hat{f}$ 在 $[a,b]$ 是上一致连续，所以 $\hat{f}$ 在 (a,b) 是上一致连续，f 在 (a,b) 是上一致连续。 $\square$

连续函数的性质

定理

f 在有限开区间 (a,b) 上连续，则 f 在 (a,b) 上一致连续的充要条件是 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在。

必要性.

假设 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 不存在，由 Cauchy 收敛原理，存在 $\varepsilon>0$，对任意的 $\delta>0$，存在 $x',x''\in(a,b)$，使得 $0<|x'-a|<\delta$，$0<|x''-a|<\delta$，但是 $|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon$. 因而对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$，$\frac{1}{n}>0$，存在 $x_n',x_n''\in(a,b)$，使得 $0<\left|x_n'-a\right|<\frac{1}{n}$，$0<\left|x_n''-a\right|<\frac{1}{n}$，但是 $\left|f(x_n')-f(x_n'')\right|\geqslant\varepsilon$. 则找到数列 $\{x_n'\}_{n=1}^{+\infty}\subset(a,b)$，$\{x_n''\}_{n=1}^{+\infty}\subset(a,b)$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n'=\lim\limits_{n\to+\infty} x_n''=a$，但对任意的 n，$\left|f(x_n')-f(x_n'')\right|\geqslant\varepsilon$，这与 f 在 (a,b) 是上一致连续矛盾。所以 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在。 $\square$

连续函数的性质

定理

f 在有限开区间 (a,b) 上连续，则 f 在 (a,b) 上一致连续的充要条件是 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在。

必要性 (续).

假设 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 不存在，由 Cauchy 收敛原理，存在 $\varepsilon>0$, 对任意的 $\delta>0$，存在 $x', x''\in(a,b)$，使得 $0<|x'-b|<\delta$, $0<|x''-b|<\delta$, 但是 $|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon$. 因而对任意的 $n\in\mathbb{N}^+$, $\frac{1}{n}>0$, 存在 $x_n', x_n''\in(a,b)$，使得 $0<\left|x_n'-b\right|<\frac{1}{n}$, $0<\left|x_n''-b\right|<\frac{1}{n}$, 但是 $\left|f(x_n')-f(x_n'')\right|\geqslant\varepsilon$. 则找到数列 $\{x_n'\}_{n=1}^{+\infty}\subset(a,b)$, $\{x_n''\}_{n=1}^{+\infty}\subset(a,b)$, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n' = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n'' = b$, 但对任意的 n, $\left|f(x_n')-f(x_n'')\right|\geqslant\varepsilon$, 这与 f 在 (a,b) 是上一致连续矛盾。所以 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在。 □

连续函数的性质

作业

1. 写出 x 趋于 x_0^+ 时函数极限存在的 Cauchy 收敛原理，x 趋于 x_0^- 时函数极限存在的 Cauchy 收敛原理，x 趋于 $+\infty$ 时函数极限存在的 Cauchy 收敛原理，x 趋于 $-\infty$ 时函数极限存在的 Cauchy 收敛原理。
2. 用 Bolzano-Weierstrass 定理证明：闭区间上的连续函数在闭区间上可以取得最小值。
3. 课本第 99 页习题 4, 7, 8(1)(3),15

思考讨论

1. 课本第 99 页习题 2,3, 6, 9, 13,14