第 2 章 （之 9）

第 10 次作业

教学内容： § 2.4.3 反函数的求导法则　　§ 2.4.4 复合函数求导法则　　§ 2.4.5 基本求导公式

*1．求下列各函数的导数：

(1) $y = \cot x - \csc x$；　　(2) $y = \dfrac{\sec x}{x^2}$；

(3) $y = \dfrac{\ln x}{x}$；　　(4) $y = x(e^x - \ln x)$；

(5) $y = xe^x \ln x$；　　(6) $y = e^x(\cos x + \sin x)$；.

(7) $y = 2x^3 + \dfrac{3}{x} - \log_3 e$；　　(8) $y = 2^x \tan x + \sec x$；

(9) $y = 3^x \arcsin x$;　　(10) $y = \tan x \cdot \arctan x$;

(11) $y = \dfrac{\ln x}{x^2+1}$;　　(12) $y = \dfrac{x^2+1}{\arctan x}$.

解：(1) $\cot x \csc x - \csc^2 x$；　　(2) $\dfrac{\sec x}{x^3}(x\tan x - 2)$；

(3) $\dfrac{1}{x^2}(1-\ln x)$；　　(4) $(x+1)\,e^x - \ln x - 1$；

(5) $e^x(x\ln x + \ln x + 1)$；　　(6) $2e^x \cos x$；

(7) $6x^2 - \dfrac{3}{x^2}$；　　(8) $2^x \ln 2 \cdot \tan x + 2^x \sec^2 x + \sec x \tan x$.

(9) $3^x \ln 3 \cdot \arcsin x + \dfrac{3^x}{\sqrt{1-x^2}}$;　　(10) $\sec^2 x \cdot \arctan x + \dfrac{\tan x}{1+x^2}$;

(11) $\dfrac{x^2+1-2x^2\ln x}{x(x^2+1)^2}$;　　(12) $\dfrac{2x\arctan x - 1}{(\arctan x)^2}$.

2．求下列函数的导数：

**(1) $y = \sin(3e^{2x}+1)$；

解：$y' = \cos(3e^{2x}+1)\cdot 3\cdot e^{2x}\cdot 2 = 6\cos(3e^{2x}+1)\cdot e^{2x}$.

**(2) $y = \left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)^4$；

解：$y' = 4\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)^3 \cdot \dfrac{2(x+3)-(2x-1)\cdot 1}{(x+3)^2}$

$$=4\frac{(2x-1)^3}{(x+3)^5}[2x+6-2x+1]=\frac{28(2x-1)^3}{(x+3)^5}.$$

**(3) $y=\ln[2\sin(x+1)]$；

解：$y'=\dfrac{2\cos(x+1)}{2\sin(x+1)}=\cot(x+1)$.

**(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

解：$y'=\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$；

**(5) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ ；

解：$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}})$；

**(6) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

解：$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$；

**(7) $y=\sin^2 x\cdot\sin(x^2)$ ；

解：$y'=\sin 2x\cdot\sin(x^2)+2x\sin^2 x\cdot\cos(x^2)$；

**(8) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$；

解：$y'=\dfrac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$；

**(9) $y=e^{-2x}\sin\dfrac{x}{3}$；

解：$y'=e^{-2x}(-2\sin\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{x}{3})$；

**(10) $y=\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$.

解：$y'=-\dfrac{1}{x^2+1}$.

*3. 求下列函数在指定点处的导数值：

（1） $y=\dfrac{2}{3+5x}$ ，求 $y'(0)$；

（2） $y=\arctan e^{x}$，求 $y'(0)$；

（3） $y=\sqrt{2+\ln^{2}x}$，求 $y'(e)$；

（4） $y=\log_{3}\cos x$，求 $y'(\frac{\pi}{4})$；

（5） $y=(\arcsin x)^{3}$，求 $y'(\frac{1}{2})$；

（6） $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$，求 $y'(1)$.

解答：（1）. $-\frac{10}{9}$；　（2）. $\frac{1}{2}$；（3）. $\frac{1}{\sqrt{3e}}$；（4）. $-\frac{1}{\ln 3}$；（5）. $\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^{2}$（6）. $\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{4}}$.

4. **(1)　设 $f(u)$ 为可导函数, $y=f(\sin e^{3x})-3^{\cos f(x)}$, 求 $y'(x)$.

解：$y'(x)=3e^{3x}\cos e^{3x}\cdot f'(\sin e^{3x})$

$$+\sin f(x)\cdot f'(x)\cdot 3^{\cos f(x)}\cdot\ln 3.$$

***(2)　设 $y=f(\sec x)\cdot\sec(\phi(\tan x))$, 其中 $f(u)$，$\phi(u)$ 为可导函数, 求 $y'(x)$.

解：$y'(x)=\sec x\tan x f'(\sec x)\cdot\sec(\phi(\tan x))$

$$+\sec(\phi(\tan x))\tan(\phi(\tan x))\cdot\sec^{2}x\cdot\phi'(\tan x)\cdot f(\sec x)\quad .$$

***5.　设 $f(x)=\max\{x,\ x^{2}\}$, $x\in(-\infty,+\infty)$,　试讨论 $f(x)$ 的可导性,

并在可导点处求出 $f'(x)$.

解：由于 $f(x)=\begin{cases}x^{2}, & x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\\ x^{2}, & x>1\end{cases}$，　所以 $f'(0)$ 不存在, $f'(1)$ 不存在，

当 $x\neq 0, x\neq 1$ 时，$f'(x)=\begin{cases}2x, & x<0,\\ 1, & 0<x<1,\\ 2x, & x>1.\end{cases}$

***6.　设 $f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义

且在 $x=a$ 可导, 求 $f'(0)$ 的值.

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)-0}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[b\frac{\varphi(a+bx)-\varphi(a)}{bx}+b\frac{\varphi(a-bx)-\varphi(a)}{-bx}\right]=2b\varphi'(a).$$

7．**(1) 设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}(|x|<1)$,求反函数的导数$x'(y)$.

解： $y'=\dfrac{1}{x^2-1}$, $x'(y)=x^2-1.$

***(2) 设 $y=f(x)$ 具有连续的一阶导数, 已知 $f(2)=1$，$f'(2)=e$，

则$\left[f^{-1}(x)\right]'\Big|_{x=1}=$ ______.

解：$\dfrac{1}{e}$.

第 2 章 （之 10）

第 11 次作业

教学内容：§2.4.6 隐函数的导数及对数求导法 §2.4.7 由参数方程确定的函数的导数 §2.4.8 极坐标系下曲线的切线问题

1. **(1) 验证由方程 $xy-\ln y=1$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$

满足方程 $y^2+(xy-1)y'=0$.

证明：$y+xy'-\dfrac{y'}{y}=0$，两边同乘 y，得 $y^2+(xy-1)y'=0$.

**(2) 设$y=y(x)$由方程$\mathrm{e}^{xy}+\sin(xy)=y$确定,求$y'(0)$.

解： $\mathrm{e}^{xy}(y+xy')+(y+xy')\cos(xy)=y'$，

当$x=0$时, $y=1$, 代入上式有 $y'(0)=2$.

***(3) 设$y=y(x)$由方程$x^y+y^x=2$所确定,求$y'(1)$.

解：原方程化为$e^{y\ln x}+e^{x\ln y}=2$ ，

则有$e^{y\ln x}(y'\ln x+\dfrac{y}{x})+e^{x\ln y}(\ln y+x\dfrac{y'}{y})=0$，

当$x=1$时, $y=1$, 代入上式有 $y'(1)=-1$.

**2. 已知 y 是由方程 $x\cos y+\mathrm{e}^y=1$ 所确定的隐函数，求 y' 及该方程所表示

的曲线在点 $(0,0)$ 处的切线方程.

解：$\cos y - x\sin y\cdot y' + \mathrm{e}^y y' = 0$，得 $y' = \dfrac{\cos y}{x\sin y - \mathrm{e}^y}$，

$y'(0) = -1$，$(0,0)$点切线方程为$y = -x$.

3.＊(1) 设$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \cos t^2 \\ y = \mathrm{e}^{2t}\sin t \end{cases}$确定了函数$y = y(x)$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

解：$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{e}^{2t}(2\sin t + \cos t)}{\mathrm{e}^t(\cos t^2 - 2t\sin t^2)} = \frac{\mathrm{e}^t(2\sin t + \cos t)}{(\cos t^2 - 2t\sin t^2)}.$$

＊(2) 设 $y = y(x)$由方程$\begin{cases} x = 1 + t^3 \\ y = \mathrm{e}^{2t} \end{cases}$所确定,试求$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=2}$.

解：$\dfrac{dx}{dt} = 3t^2$， 当$x = 2$时， $t = 1$， $\dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=1} = 3$，

$\dfrac{dy}{dt} = 2\mathrm{e}^{2t}$， $\dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=1} = 2\mathrm{e}^2$， $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=2} = \dfrac{2\mathrm{e}^2}{3}$.

4.＊＊(1) 已知曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin\dfrac{t}{2} \end{cases}$ 则曲线 L 在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 处的法线方程为______________________.

答$4x - \sqrt{2}y + 1 = 0$.

＊＊＊(2) 试求由 $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t - x\cos t - 1 \\ y = t^2 + t \end{cases}$ 所确定的曲线 $y = y(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程.

解：由$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t - x\cos t - 1 \\ y = t^2 + t \end{cases}$知当 $x = 0$ 时，$t = 0$，$y = 0$，

且$\dfrac{dx}{dt} = \mathrm{e}^t - \dfrac{dx}{dt}\cos t + x\sin t$， $\dfrac{dy}{dt} = 2t + 1$，

$\therefore \dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = 1$ ， $\dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = \dfrac{1}{2}$， $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0} = 2$，

故:所求切线方程为$y = 2x$.

5. **(1) 设 $y=\dfrac{\sqrt[3]{1+x}}{(x-1)^2\sqrt[3]{5x-2}}$，求$y'$.

解：$\ln|y|=\dfrac{1}{3}\ln|x+1|-2\ln|x-1|-\dfrac{1}{3}\ln|5x-2|$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2}{x-1}-\frac{5}{3(5x-2)}$$

$$y'=\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x-1)^2\sqrt[3]{5x-2}}\left[\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2}{x-1}-\frac{5}{3(5x-2)}\right].$$

**(2) 设 $y=\sqrt{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{(x^2+1)\sqrt{\sin x}}},(0<x<\pi),$求$y'$.

解：$\ln y=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}(\ln(x^2+1)+\dfrac{1}{2}\ln|\sin x|)\right]$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2}+\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{4}\cot x\right]$$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{(1+x^2)\sqrt{\sin x}}}\left[\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4}\cot x\right].$$

***6. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $(x+y)^{x+1}=3x+2y-2$ 所确定，试求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(0,2)}$.

解：两边取对数 $(x+1)\ln(x+y)=\ln(3x+2y-2)$，

两边求导：$\ln(x+y)+(x+1)\dfrac{1+y'}{x+y}=\dfrac{3+2y'}{3x+2y-2}$，

将（0，2）点代入上式：$\ln 2+\dfrac{1+y'}{2}=\dfrac{3+2y'}{2}$， 可解得

$y'|_{(x,y)=(0,2)}=2\ln 2-2$.

***7. 证明曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ 上任意点 $P_0=(x_0,y_0)(x_0\neq 0,y_0\neq 0)$ 处的切线在两坐标轴之间的线段为定长.

证明：对曲线方程求导有： $\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$， $y'=-\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{3}}=-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$，

所以知曲线在 P_0 点的切线斜率为$=-\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}$，切线方程为：$y-y_0=-\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}(x-x_0)$，

令 $y=0$， 得 $x=x_0^{\frac{1}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}+x_0=x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}$， 切线与 x 轴的交点为 $M=(x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}},0)$，

令 $x=0$， 得 $y=y_0^{\frac{1}{3}}x_0^{\frac{2}{3}}+y_0=y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}$， 切线与 y 轴的交点为 $N=(0,y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}})$，

所以切线在两坐标轴间的线段长为：$\sqrt{(x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}})^2+(y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}})^2}=a$.

***8. 求三叶玫瑰线 $\rho=a\sin(3\theta)\quad(a>0)$ 上对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 的点处的切线方程（直角坐标形式）.

解：三叶玫瑰线方程可写为 $\begin{cases}x=a\sin(3\theta)\cos\theta\\ y=a\sin(3\theta)\sin\theta\end{cases}$。

$$k_{切}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{[a\sin(3\theta)\sin\theta]'}{[a\sin(3\theta)\cos\theta]'}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{3a\cos(3\theta)\sin\theta+a\sin(3\theta)\cos\theta}{3a\cos(3\theta)\cos\theta-a\sin(3\theta)\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2},$$

由于对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 的点的坐标为 $P=(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2})$， 所以切线方程为 $y-\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{a}{2})$，

即 $2x-4y+a=0$.

第 2 章 （之 11）

第 12 次作业

教学内容：§2.5 高阶导数

**1. 设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求y''.

解: $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}})=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$y''=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

**2. 设 $y=f(u),\ u=\varphi(x)$ 均存在 2 阶导数，试推导公式

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{dy}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}。$$

解：由 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\right)=\frac{dy}{du}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)+\frac{du}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\right)$$

$$=\frac{dy}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}\left[\frac{d\left(\frac{dy}{du}\right)}{du}\cdot\frac{du}{dx}\right]=\frac{dy}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2y}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2.$$

**3. 设 $y=f(x\mathrm{e}^x)$，其中$f(u)$二阶可导,求y''.

解：$y'=f'(x\mathrm{e}^x)\cdot\left[e^x+x\mathrm{e}^x\right]$

$$y''=f''(x\mathrm{e}^x)\cdot\left[\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x\right]^2+f'(x\mathrm{e}^x)\cdot\left[2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x\right]$$

**4. 求由方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 所确定的隐函数 $y(x)$ 的二阶导数.

解：两边同时对 x 求导数，得 $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0$， $(*)$

两边同时再对 x 求导数，得 $-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}+\frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}y^{-\frac{4}{3}}\cdot(y')^2+y^{-\frac{1}{3}}\cdot y''\right]=0$，

整理得 $y''=\frac{1}{3}a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$.

***5. 设 $\sqrt{x^2+y^2}=5e^{\arctan\frac{y}{x}}$ ，求 $\frac{dx}{dy},\frac{d^2x}{dy^2}$.

解： $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)=\ln 5+\arctan\frac{y}{x}$， $\frac{1}{2}\cdot\frac{2x\frac{dx}{dy}+2y}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{x-y\frac{dx}{dy}}{x^2}$

解得 $\frac{dx}{dy}=\frac{x-y}{x+y}$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{\left(\frac{dx}{dy}-1\right)(x+y)-(x-y)\left(\frac{dx}{dy}+1\right)}{(x+y)^2}=\frac{-2(x^2+y^2)}{(x+y)^3}$$

**6. 设 $\begin{cases}x=\sqrt{1+t}\\y=\sqrt{1-t}\end{cases}$，试证 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{2}{y^3}$.

证：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{1-t}}\right)}{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}\right)}=-\dfrac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=-\frac{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}\cdot\dfrac{2}{(1-t)^2}}{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}\right)}=\left(-\sqrt{1-t}\right)\cdot\frac{2}{(1-t)^2}=\frac{-2}{(1-t)\sqrt{1-t}}=\frac{-2}{y^3}.$$

**7. 设由参数方程$\begin{cases}x=t-\ln(1+t^2)\\ y=\arctan t\end{cases}$确定函数$y=y(x)$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{(1-t)^2}$，　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2(1+t^2)}{(1-t)^5}$.

**8. 设由参数方程$\begin{cases}x=2t^3+2\\ y=e^{2t}\end{cases}$确定函数$x=x(y)$，求$\dfrac{dx}{dy},\dfrac{d^2x}{dy^2}$　.

解：$\dfrac{dx}{dy}=3t^2e^{-2t}$，　　$\dfrac{d^2x}{dy^2}=3t(1-t)e^{-4t}$

***9. 设$x=\varphi(y)$是$y=f(x)$的反函数，$f'(x)\neq 0$，且$f'''(x)$存在，证明：

（1）$\varphi''(y)=-\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$；　　　　（2）$\varphi'''(y)=\dfrac{3[f''(x)]^2-f'(x)\cdot f'''(x)}{[f'(x)]^5}$.

证：（1）由反函数与直接函数导数的关系，知有 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$。于是

$$\varphi''(y)=\frac{d\varphi'(y)}{dy}=\frac{d\left[\dfrac{1}{f'(x)}\right]}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\varphi'(y)=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}.$$

（2）
$$\varphi'''(y)=\frac{d\varphi''(y)}{dy}=\frac{d\left\{\dfrac{-f''(x)}{[f'(x)]^3}\right\}}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}$$

$$=-\frac{f'''(x)[f'(x)]^3-f''(x)\cdot 3[f'(x)]^2\cdot f''(x)}{[f'(x)]^6}\cdot\varphi'(y)$$

$$=\frac{3[f''(x)]^2-f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}.$$

***10. 求下列函数的n阶导数:

(1). $y=\cos^2 3x$；　　(2). $y=\dfrac{x^3}{x^2-3x+2}$.

解:（1）. $y=\dfrac{1}{2}(1+\cos 6x)$　　$y'=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cos(6x+\dfrac{\pi}{2})$

$$y''=\frac{1}{2}\cdot 6^2\cos(6x+\frac{2\pi}{2}),$$

……,　$y^{(n)}=\dfrac{1}{2}6^n\cos(6x+\dfrac{n\pi}{2})$.

（2）. $y=(x+3)+\dfrac{7x-6}{(x-2)(x-1)}=(x+3)+\dfrac{8}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$

$$y'=1-\frac{8}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\left[\frac{8}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]\ (n\geq 2)\cdot$$

**11. 设　$y=x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n)$，求$y^{(n)}$与$y^{(n+1)}$.

解: $y=x^{n+1}-\dfrac{n(n+1)}{2}x^n+\cdots(-1)^n n!x$,

$$y^{(n)}=(n+1)!x-\frac{n(n+1)}{2}n!,$$

$$y^{(n+1)}=(n+1)!.$$

**12. 设$u=u(x),v=v(x)$都是 n 阶可导函数，有如下莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}.$$

利用莱布尼茨公式，求函数$y=x^3\mathrm{e}^x$的 5 阶导数.

解：由于当$n\geq 4$时，$(x^3)^{(n)}\equiv 0$。所以，利用莱布尼茨公式可求得

$$y^{(5)}=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(x^3)^{(5-k)}(\mathrm{e}^x)^{(k)}$$

$$=\binom{5}{2}\cdot 6\cdot\mathrm{e}^x+\binom{5}{3}\cdot 6x\cdot\mathrm{e}^x+\binom{5}{4}\cdot 3x^2\cdot\mathrm{e}^x+\binom{5}{5}\cdot x^3\cdot\mathrm{e}^x$$

$$=e^x(x^3+15x^2+60x+60).$$