第 10 章（之 5）（总第 55 次）

教学内容：§10.4 空间曲面

1. 选择题

*(1) 曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 是 （ ）

（A） zox 平面上曲线 $z=x$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面

（B） zoy 平面上曲线 $z=|y|$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面

（C） zox 平面上曲线 $z=x$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面

（D） zoy 平面上曲线 $z=|y|$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面

答：B

** (2) 方程 $x^2+z^2=1$ 在空间表示 （ ）

（A） z 轴 （B）球面 （C）母线平行 y 轴的柱面 （D）锥面

答：C

*(3) 方程 $x^2+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{25}=-1$ 是 （ ）

(A) 单叶双曲面 (B) 双叶双曲面

(C) 椭球面 (D) 双曲抛物面

答：B

*(4) 双曲面 $x^2-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=1$ 与 yoz 平面 （ ）

(A) 交于一双曲线 (B) 交于一对相交直线

(C) 不交 (D) 交于一椭圆

答：C

*2. 求以 $M_1=(1,4,5), M_2=(1,1,1)$ 为直径的两个端点的球面的方程.

解： M_1, M_2 中点为 $M_0=(1,\dfrac{5}{2},3)$， $|M_1M_2|=5$.

即直径为 5，半径为 5/2.

故球面方程为 $(x-1)^2+(y-\dfrac{5}{2})^2+(z-3)^2=(\dfrac{5}{2})^2$.

即 $x^2+y^2+z^2-2x-5y-6z+10=0$.

**3. 动点 M 到两定点 $P_1=(a,0,0),P_2=(4a,0,0)$ 的两个距离之比等于 1：2，求动点 M 的轨迹方程.

解：设动点 $M=(x,y,z)$

$|P_1M|:|P_2M|=1:2$　即　$4[(x-a)^2+y^2+z^2]=(x-4a)^2+y^2+z^2$，

即　$x^2+y^2+z^2=(2a)^2$.

**4. 动点 $M=(x,y,z)$ 到点 $A=(0,0,2)$ 的距离和它到 xy 平面的距离相等,求动点 M 的轨迹方程.

解：动点 $M=(x,y,z)$ 到点 $A=(0,0,2)$ 的距离为　$d_1=\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}$，

动点 M 到 xOy 平面的距离为　$d_2=|z|$　　$d_1=d_2$，

∴动点 M 的轨迹方程为　$x^2+y^2+(z-2)^2=z^2$，

整理得：$x^2+y^2=4z-4$　是旋转抛物面.

**5. 求 yOz 平面上曲线 $y^2-z^2=1$ 分别绕 y 轴，z 轴而成的旋转曲面的方程.

解：绕 y 轴　$-x^2+y^2-z^2=1$；　绕 z 轴　$x^2+y^2-z^2=1$.

6. 把下列方程化为标准形式，从而指出方程所表示曲面的名称并画出图形.

**（1）$x^2+2y^2-z^2+2x+4y-1=0$；

解：$x^2+2y^2-z^2+2x+4y-1=0$，　$(x^2+2x)+(2y^2+4y)-z^2=1$，

$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{2}-\frac{z^2}{4}=1$，是一个单叶双曲面，　中心为 $M_0=(-1,-1,0)$.

**（2）$x^2-4y^2-z^2+8y-2z-9=0$.

解：$x^2-4y^2-z^2+8y-2z-9=0$，　$x^2-4(y^2-2y)-(z^2+2z)=9$，

$x^2-4(y-1)^2-(z+1)^2=4$，

$\frac{x^2}{4}-(y-1)^2-\frac{(z+1)^2}{4}=1$，是一个双叶双曲面，中心为$M_0=(0,1,-1)$.

第 10 章（之 6）（总第 56 次）

教学内容：§10.5 向量函数　空间曲线基本知识

**1. 求曲线$\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=1\\ x-2z+3=0\end{cases}$在$xoy$平面上的投影柱面方程.

解：消去z，得$x^2+20y^2-24x-116=0$，

即为所求投影柱面方程.

**2. 求以曲线$\begin{cases}x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1\\ x^2-y^2+z^2=1\end{cases}$为准线，母线平行于 z 轴的柱面方程.

解：$\begin{cases}x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1\\ x^2-y^2+z^2=1\end{cases}\overset{\text{消}z}{\Rightarrow}\quad 3x^2+5y^2=3$

故所求柱面方程为$3x^2+5y^2=3$.

**3. 求曲线$\begin{cases}z=x^2+y^2\\ x+y+z=1\end{cases}$在各坐标平面上的投影曲线方程.

解：消去z，得$x^2+y^2+x+y=1$

故在xoy平面上，投影曲线为　$\begin{cases}x^2+y^2+x+y=1\\ z=0\end{cases}$

消去x，得$z=(1-y-z)^2+y^2$

故在yoz平面上，投影曲线为　$\begin{cases}z=(1-y-z)^2+y^2\\ x=0\end{cases}$

消去y，得$z=x^2+(1-x-z)^2$

故在 xoz 平面上，投影曲线为 $\begin{cases} z = x^2 + (1 - x - z)^2 \\ y = 0 \end{cases}$

** 4．把曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x + y = 1$ 的交线改写为母线分别平行于 x 轴与 y 轴的两个柱面的交线.

解： $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ (1)

由（1）消去 x $\Rightarrow (y-1)^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 2y^2 - 2y + z^2 = 0$，

由（1）消去 y $\Rightarrow (x-1)^2 + x^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x + z^2 = 0$，

交线可写为 $\begin{cases} 2y^2 + z^2 - 2y = 0 \\ 2x^2 + z^2 - 2x = 0 \end{cases}$.

**5. 求由曲面 $3x^2 + y^2 = z$ 和 $z = 1 - y^2$ 所围成的立体在 xOy 平面上的投影区域.

解：投影区域由交线 $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = z \\ z = 1 - y^2 \end{cases}$ 在 xOy 平面上投影曲线所围成

投影曲线为 $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 1 - y^2 \\ z = 0 \end{cases}$， 故投影区域为 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 \le 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

**6. 试求曲线 $\begin{cases} x = t \\ y = e^t \\ z = e^{-t} \end{cases}$ 对应于 $t = 0$ 点处的切线方程.

解：$t = 0$ 对应于曲线上的点为 $(0, 1, 1)$，由于

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = e^t, \quad z'(t) = -e^{-t},$$

则切线的方向向量为 $\{1, 1, -1\}$，故所求切线方程为

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1},$$

即：$x = y - 1 = \dfrac{z-1}{-1}$.

**7. 试求曲线 $\begin{cases} x(t)=2(\cos 3t) \\ y(t)=2(\sin 3t) \\ z(t)=t^2 \end{cases}$ 上从 $t=0$ 到 $t=4$ 这一段的弧长.

解：由于 $\begin{cases} x'(t)=-6\sin 3t \\ y'(t)=6\cos 3t \\ z'(t)=2t \end{cases}$ ， 则弧长为

$$s=\int_0^4\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt \ =\int_0^4\sqrt{36\sin^2 3t+36\cos^2 3t+4t^2}dt$$

$$=\int_0^4 2\sqrt{9+t^2}dt=20+9\ln 3\,.$$

第 11 章（之 1）（总第 57 次）

教材内容：§11. 1 多元函数

1．解下列各题：

**（1）. 函数 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$ 连续区域是 ______ .

答：$\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>1\}$

**（2）. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，　　则（　　）

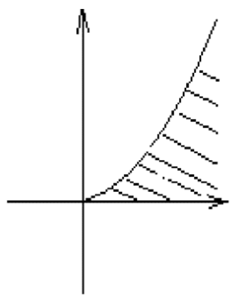
(A) 处处连续　　　　　　　　(B) 处处有极限，但不连续

(C) 仅在（0,0）点连续　　　　(D) 除（0,0）点外处处连续

答：(A)

**2. 画出下列二元函数的定义域：

（1）$u=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；



解：定义域为：$\left\{(x,y)\middle|\sqrt{y}\le x\right\}$，见图示阴影部分：

（2） $f(x,y)=\ln(1+xy)$；

解：$\left\{(x,y)\middle|xy>-1\right\}$，第二象限双曲线 $xy=-1$ 的下方，第四象限双曲线 $xy=-1$ 的上方（不包括边界，双曲线 $xy=-1$ 用虚线表示）.

（3） $z=\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$.

解： $\dfrac{x-y}{x+y}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)(x+y)\ge 0\\ x+y\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\ge|y|\\ x\neq -y\end{cases}$.

***3. 求出满足 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$ 的函数 $f(x,y)$.

解：令 $\begin{cases}s=x+y\\ t=\dfrac{y}{x}\end{cases}$，　　　　$\therefore\begin{cases}x=\dfrac{s}{1+t}\\ y=\dfrac{st}{1+t}\end{cases}$

$$\therefore\ f(s,t)=\frac{s^2-s^2t^2}{(1+t)^2}=\frac{s^2(1-t)}{1+t},\quad \text{即}\quad f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y}.$$

***4. 求极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解：$0\le\left|\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\dfrac{|xy|}{\left(\sqrt{1+xy}+1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}\le\dfrac{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}{\left(\sqrt{1+xy}+1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\left(\sqrt{1+xy}+1\right)}\to 0\quad（(x,y)\to(0,0)）$$

$$\therefore\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{1+xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

**5. 说明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 不存在.

解：我们证明 (x,y) 沿不同的路径趋于 $(0,0)$ 时，极限不同.

首先，$x=0$ 时，极限为 $\lim\limits_{\substack{x=0\\(x,y)\to(0,0)}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{-y^2}{y^2}=-1$，

其次，$y=0$ 时，极限为 $\lim\limits_{\substack{y=0\\(x,y)\to(0,0)}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{x^2}{x^2}=1$，

故极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-\mathrm{y}^2}{x^2+\mathrm{y}^2}$ 不存在.

**6. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^{\frac{1}{3}}}{x^2+y^2}$。

解：设 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^{\frac{1}{3}}}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\rho\to0+}\dfrac{\rho^{2+\frac{1}{3}}\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2}$

$$=\lim_{\rho\to0+}\rho^{\frac{1}{3}}\cos^2\theta\sin\theta$$

不论 θ 如何变化，$\cos^2\theta\sin\theta$ 总是有界量，而 $\rho^{\frac{1}{3}}$ 为无穷小，所以

$$\lim_{\rho\to0+}\rho^{\frac{1}{3}}\cos^2\theta\sin\theta=0。$$

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y^{\frac{1}{3}}}{x^2+y^2}=0$。

***7. 试讨论函数 $z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$ 的连续性.

解：由于 $\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$ 是初等函数，所以除 $xy=1$ 以外的点都连续，但在 $xy=1$ 上的点处不连续.

**8. 试求函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sin^2 \pi x+\sin^2 \pi y}$ 的间断点.

解：显然当 $(x,y)=(m,n)$ $m,n\in Z$ 时， $f(x,y)$ 没定义，故不连续.

又 $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sin^2 \pi x+\sin^2 \pi y}$ 是初等函数.

所以除点 (m,n)（其中 $m,n\in Z$）以外处处连续.

第 11 章（之 2） （总第 58 次）

教材内容： §11.2 偏导数［§11.2.1］

**1. 解下列各题：

（1）函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+|y|^3}$ 在 $(0,0)$ 点处 （ ）

（A） $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都存在； （B） $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都不存在；

（C） $f'_x(0,0)$ 存在，但 $f'_y(0,0)$ 不存在； （D） $f'_x(0,0)$ 不存在，但 $f'_y(0,0)$ 存在.

答：（D）.

（2） 设 $z=x+(y-2)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，那么 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(!,2)}=$ （ ）

(A) 0 ； (B) 1； (C) $\dfrac{\pi}{2}$； (D) $\dfrac{\pi}{4}$.

答：(D).

（3）设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，则 $f_x{}'(0,0)=$______， $f_y{}'(0,0)=$__________.

解：由于 $f(x,0)=0$，$\therefore$ $f_x{}'(0,0)=0$，同理 $f_y{}'(0,0)=0$.

**2. 设 $z=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3e^{xy}$， 求 z_x,z_y.

解：$z_x=1+\dfrac{x}{x^2+y^2}+3ye^{xy}$， $z_y=-2+\dfrac{y}{x^2+y^2}+3xe^{xy}$.

**3. 求函数 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$ 对各自变量的偏导数.

解：$z_x=-\dfrac{y}{x^2+y^2},z_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

**4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2\ln(x^2+y^2) & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_x(0,0),f_y(0,0)$.

解：$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ln x^2}{x}=0$， $f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0-0}{y}=0$.

***5. 求曲线 $\begin{cases}z=x^2-xy+y^2\\ x=1\end{cases}$ 在 $(1,1,1)$ 点处切线与 y 轴的夹角.

解：由于曲线在平面 $x=1$ 内，故由 $z_y\big|_{(1,1)}=(-x+2y)\big|_{(1,1)}=1$，

得切线与 y 轴的夹角为 $\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$. ［也可求出切向量为 $\{0,1,1\}$］

$\therefore$夹角=$\arccos\dfrac{\{0,1,1\}\{0,1,0\}}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{12}}=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$.

***6. 设函数 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续，已知函数 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 偏导数 $f_x'(0,0)$ 存在，

（1）证明 $\varphi(0,0)=0$； （2）证明 $f_y'(0,0)$ 也一定存在.

解：（1） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}$，

因为 $f_x'(0,0)$ 存在，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{\Delta x\cdot\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{-\Delta x\cdot\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}$

即 $\varphi(0,0)=-\varphi(0,0)$， 故 $\varphi(0,0)=0$.

（2）由于 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续，且 $\varphi(0,0)=0$，所以 $\Delta y\to 0$ 时，$\varphi(0,\Delta y)$ 是无穷小量，

而 $\dfrac{|\Delta y|}{\Delta y}$ 是有界量，所以 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta y|\varphi(0,\Delta y)}{\Delta y}=0$，即 $f_y'(0,0)=0$.