图论

Graph Theory

无向树

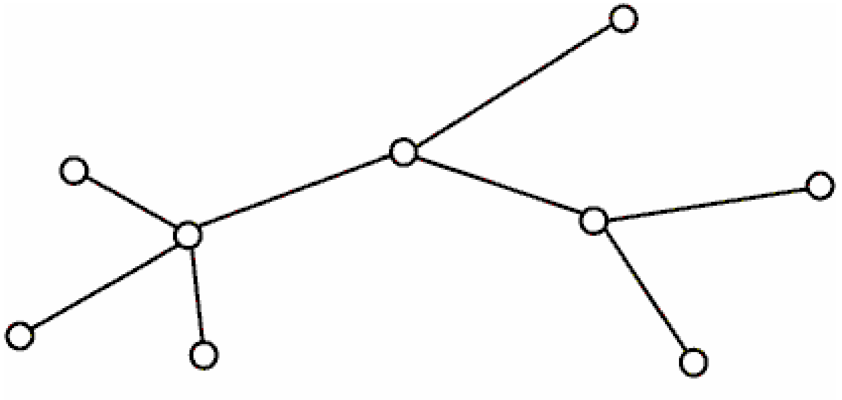
连通且无初级回路的无向图。

- 树叶——1度顶点
- 分支点——度数≥2的顶点

森林

每个连通分支都是树的无向图。

例：



无向树的等价定义

设$G=\langle V,E\rangle$是n阶m条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1) G 是树.

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无圈且 $m=n-1$.

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

(5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥.

(6) G 中没有圈，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.

证明思路

(1)⇒(2). 关键一步是, 若路径不惟一必有回路.

(2)⇒(3). 若G中有回路，则回路上任意两点之间的路径不惟一. 对n用归纳法证明$m=n-1$.

$n=1$正确. 设$n\le k$时对，证$n=k+1$时也对：取G中边e，$G-e$有且仅有两个连通分支G_1,G_2(为什么?)．$n_i\le k$，由归纳假设得$m_i=n_i-1$, $i=1,2$. 于是，$m=m_1+m_2+1=n_1+n_2-2+1=n-1$.

(3)⇒(4). 只需证明G连通. 用反证法. 否则G有s（$s\ge2$）个连通
分支都是小树. 于是有$m_i=n_i-1$, ,

$$m=\sum_{i=1}^{s} m_i=\sum_{i=1}^{s} n_i-s=n-s\ (s\ge 2)$$

这与$m=n-1$矛盾.

证明思路

(4)⇒(5). 只需证明G中每条边都是桥. 为此只需证明命题

“G 是 n 阶 m 条边的无向连通图，则 $m \geq n-1$”.

命题的证明: 对n归纳.

$\forall e \in E$, $G-e$只有$n-2$条边，由命题可知$G-e$不连通，故e为桥.

(5)⇒(6). 由(5)易知G为树，由(1)⇒(2)知，$\forall u,v \in V$（$u \neq v$），u到v有惟一路径，加新边(u,v)得惟一的一个圈.

(6)⇒(1). 只需证明G连通，这是显然的.

无向树的性质

定理：设T是n阶非平凡的无向树，则T 中至少有两片树叶.

证 设 T 有 x 片树叶，则

$$2(n-1)=\sum d(v_i)\geq x+2(n-x)$$

由上式解出$x\geq 2$.

例题

已知无向树T中有1个3度顶点，2个2度顶点，其余顶点全是树叶，试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树.

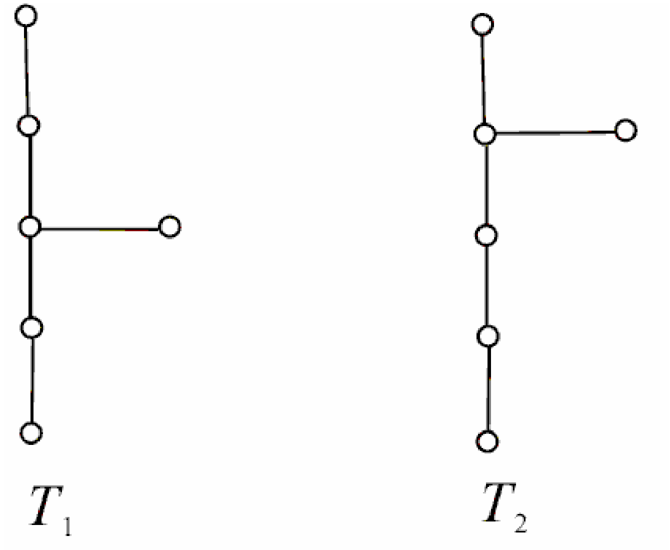
解　解本题用树的性质$m=n-1$，握手定理.

设有x片树叶，于是 $n = 1+2+x = 3+x$,

$$2m = 2(n-1) = 2\times(2+x) = 1\times3+2\times2+x$$

解出$x = 3$，故T有3片树叶.

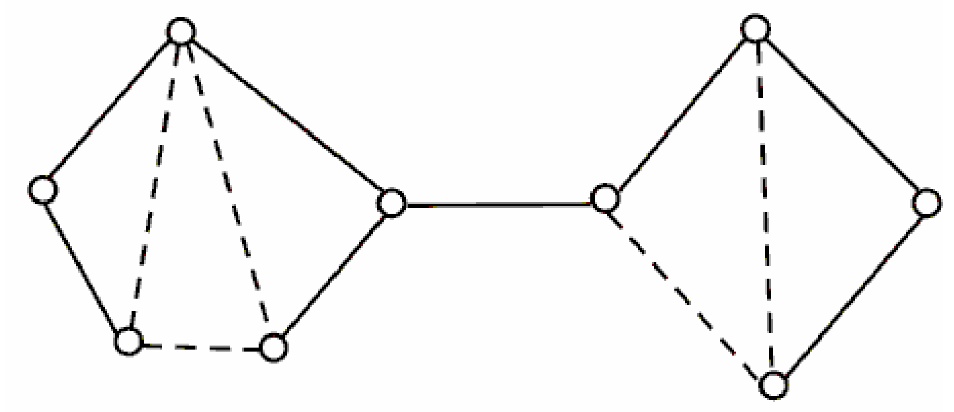
T 的度数列应为 1, 1, 1, 2, 2, 3，易知3度顶点与1个2度顶点相邻与和2个2度顶点均相邻是非同构的，因而有2棵非同构的无向树T_1, T_2，如图所示.



如果无向图*G*为无向图的生成子图T**是树，则称*T* 是*G* 的**生成树**。

- 生成树*T*的**树枝**——*T* 中的边
- 生成树*T*的**弦**——不在*T* 中的边
- 生成树*T*的**余树** ——全体弦组成的集合的导出子图 $\overline{T}$

注：$\overline{T}$ 不一定连通，也不一定不含回路，如图所示：



生成树存在条件

定理： 无向图G具有生成树当且仅当G连通.

推论： G为n阶m条边的无向连通图，则$m \geq n-1$.

最小生成树

定义： T是$G=<V,E,W>$的生成树

(1) $W(T)$——T各边权之和

(2) 最小生成树——G的所有生成树中权最小的。

避圈法（Kruskal算法）

设$G=<V,E,W>$，将G中非环边按权从小到大排序：$e_1, e_2, \ldots, e_m$.

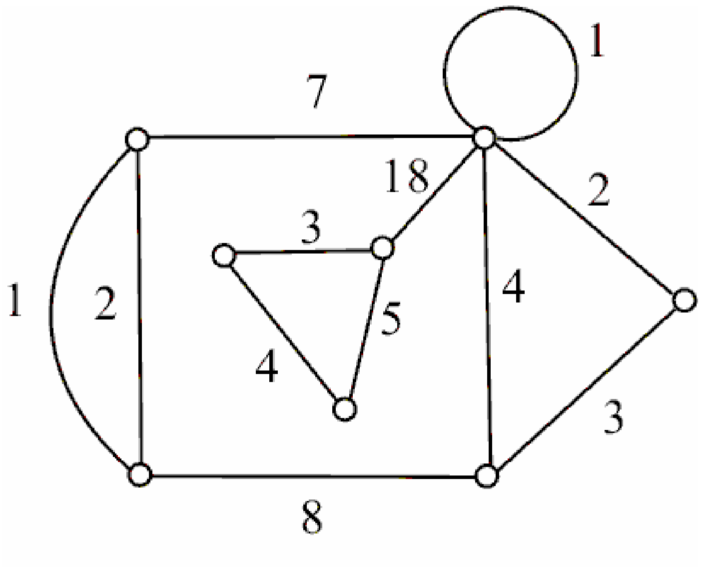
(1) 取e_1在T中；

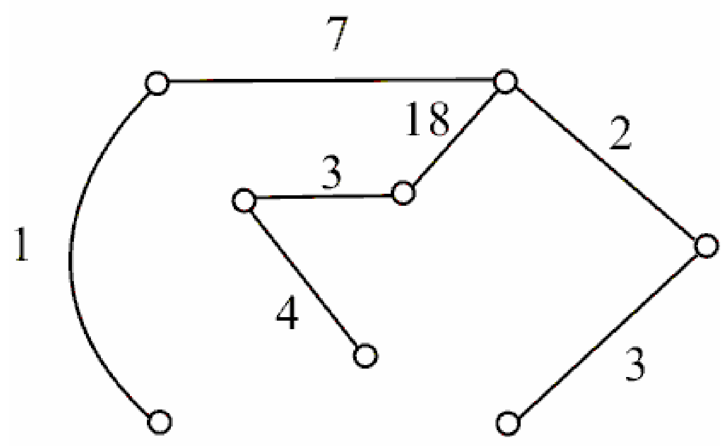
(2) 查e_2，若e_2与e_1不构成回路，取e_2也在T中，否则弃e_2；

(3) 再查$e_3,\ldots,$ 直到得到生成树为止.

实例

求图的一棵最小生成树.





所求最小生成树如图所示，*W*(*T*)=38.

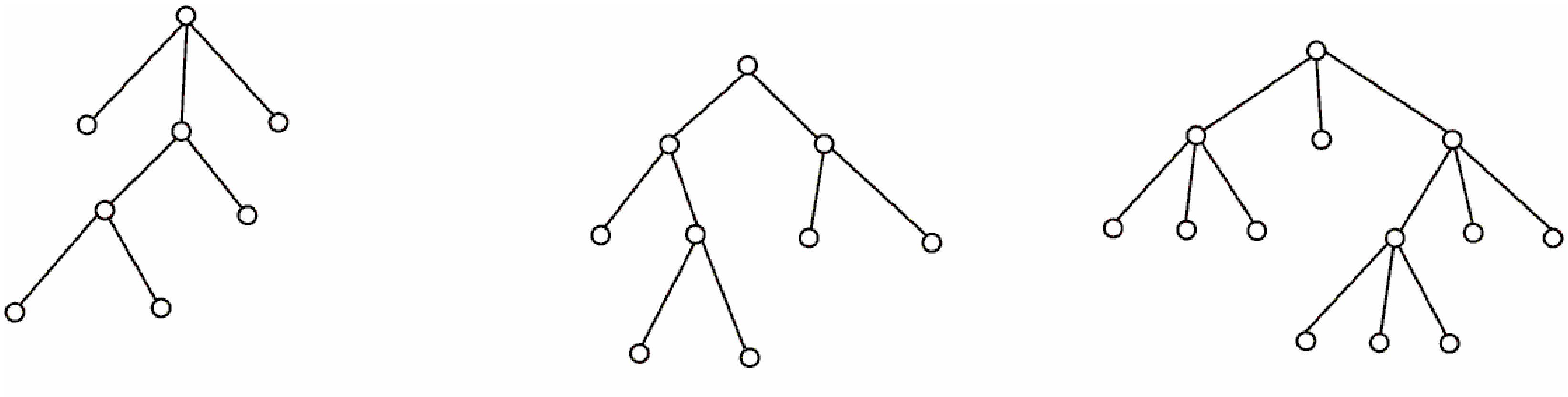
根树（Rooted Tree）

基图为无向树的有向图称为有向树；若有向树中一个顶点入度为**0**，其余的入度均为**1**，则称之为根树。

- 树根——入度为0的顶点
- 树叶——入度为1，出度为0的顶点
- 内点——入度为1，出度不为0的顶点
- 分支点——树根与内点的总称
- 顶点 v的层数——从树根到 v的通路长度
- 树高——T 中层数最大顶点的层数
- 平凡根树——平凡图

根树实例

根树的画法——树根放上方，省去所有有向边上的箭头



家族树与根子树

定义: *T* 为非平凡根树

(1)父亲(Parent)与儿子(Child): 假若从a到b有一条边, 则结点b称为a的``儿子", 或称a为b的``父亲".

(2)祖先(Ancestor)与后代(Descendant): 假若从a到c有一条单向通路, 称a为c的``祖先"或 c是a的``后裔".

(3) 兄弟(Sibling): 同一个分枝点的``儿子"称为``兄弟".

设v为根树T中任意一顶点，称v及其后代的导出子图为以v为根的根子树.

根树的分类

(1) T 为有序根树——同层上顶点标定次序的根树

(2) 分类

①r 叉树——每个分支点至多有r 个儿子

②r 叉有序树——r 树是有序的

③r 叉正则树——每个分支点恰有r 个儿子

④r 叉正则有序树

⑤r 叉完全正则树——树叶层数相同的r叉正则树

⑥r 叉完全正则有序树

最优二叉树

设2叉树T有t片树叶$v_1, v_2, \ldots, v_t$，权分别为$w_1, w_2, \ldots, w_t$，称 $W(t)=\sum_{i=1}^{t} w_i l(v_i)$ 为T的权，其中$l(v_i)$是v_i的层数.

在所有有t片树叶，带权$w_1, w_2, \ldots, w_t$的2叉树中，权最小的2叉树称为最优2叉树.

Huffman算法

给定实数$w_1, w_2, \ldots, w_t$，且$w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_t$.

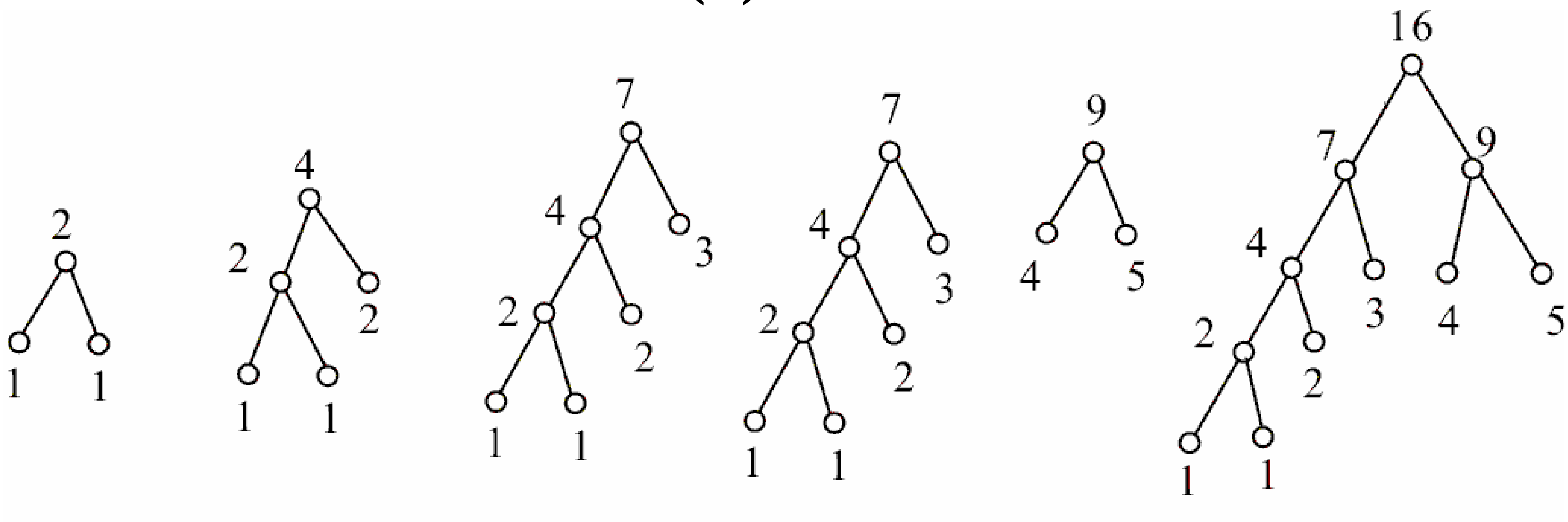
(1) 连接权为w_1, w_2的两片树叶，得一个分支点，其权为w_1+w_2.

(2) 在$w_1+w_2, w_3, \ldots, w_t$中选出两个最小的权，连接它们对应的顶点(不一定是树叶)，得新分支点及所带的权.

(3) 重复(2)，直到形成 $t-1$个分支点，t片树叶为止.

例： 求带权为1, 1, 2, 3, 4, 5的最优树.

解: 过程由下图给出，$W(T)$=38



前缀码 Prefix code

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$是长度为 n 的符号串

(1) 前缀——$\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$

(2) 前缀码——$\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$中任何两个元素互不为前缀

(3) 二元前缀码——β_i (i=1, 2, …, m) 中只出现两个符号，如0与1.

如何产生二元前缀码?

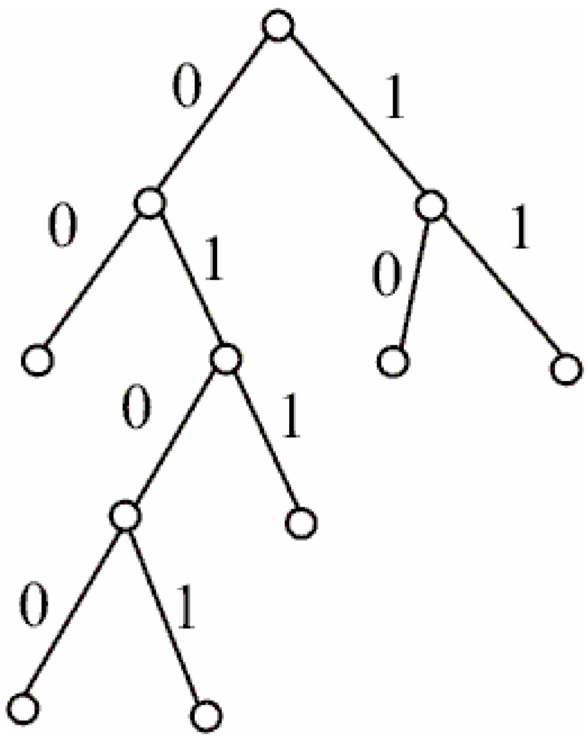
（1）一棵2叉树产生一个二元前缀码.

（2） 一棵正则2叉树产生惟一的前缀码。

（按左子树标0，右子树标1）

图所示二叉树产生的前缀码为

{ 00, 10, 11, 011, 0100, 0101 }



用Huffman算法产生最佳前缀码

例：在通信中，八进制数字出现的频率如下：

0：25%　　1：20%

2：15%　　3：10%

4：10%　　5：10%

6：5%　　7：5%

求传输它们的最佳前缀码，并求传输10^n（n≥2）个按上述比例出现的八进制数字需要多少个二进制数字？若用等长的（长为3）的码字传输需要多少个二进制数字？

求最佳前缀码

解　用100个八进制数字中各数字出现的个数，即以100乘各频率为权，并将各权由小到大排列，得$w_1=5, w_2=5, w_3=10, w_4=10, w_5=10, w_6=15, w_7=20, w_8=25$. 用此权产生的最优树如图所示.

01-----0	11-----1
001-----2	100-----3
101-----4	0001-----5
00000-----6	00001-----7

$W(T)=285$，

传$10^n(n\geq 2)$个

用二进制数字需

2.85×10^n个，

用等长码需

3×10^n个数字.