第 11 章（之 3）（总第 59 次）

教材内容：§11.2 偏导数［§11.2.2 ～ 11.2.4］

**1. 求函数 $f(x,y,z)=x\mathrm{ch}z-y\mathrm{sh}x$ 的全微分，并求出其在点 $P=(0,1,\ln 2)$ 处的梯度向量.

解：$df(x,y,z)=d(x\mathrm{ch}z)-d(y\mathrm{sh}x)$

$$=\mathrm{ch}z\,dx+x\mathrm{sh}z\,dz-\mathrm{sh}x\,dy-y\mathrm{ch}x\,dx$$
$$=(\mathrm{ch}z-y\mathrm{ch}x)dx-\mathrm{sh}x\,dy+x\mathrm{sh}z\,dz$$

$$\therefore df(x,y,z)\Big|_{(0,1,\ln 2)}=\frac{1}{4}dx\,,\qquad \nabla f(x,y,z)\Big|_{(0,1,\ln 2)}=\left\{\frac{1}{4},0,0\right\}.$$

**2. 求函数 $z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$ 的全微分：

解：$dz=d\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}\ =d(\arctan x+\arctan y)$

$$=d(\arctan x)+d(\arctan y)=\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}$$

**3. 设 $z=\dfrac{\sec^2(xy)}{\ln(xy-1)}$，求 $\mathrm{d}\,z$.

解：$\mathrm{d}\,z=\dfrac{[\ln(xy-1)]\,\mathrm{d}[\sec^2(xy)]-\sec^2(xy)\,\mathrm{d}[\ln(xy-1)]}{[\ln(xy-1)]^2}$

$$=\frac{1}{[\ln(xy-1)]^2}[\ln(xy-1)2\sec^2(xy)\tan(xy)(y\,\mathrm{d}\,x+x\,\mathrm{d}\,y)-\frac{\sec^2(xy)}{xy-1}(y\,\mathrm{d}\,x+x\,\mathrm{d}\,y)]$$

$$=\frac{[2\ln(xy-1)\tan(xy)(xy-1)-1](y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)}{(xy-1)\cos^2(xy)\ln^2(xy-1)}\,.$$

**4. 利用 $\Delta f\approx df$，可推出近似公式：$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+df(x,y)$，

并利用上式计算 $\sqrt{(2.98)^2+(4.03)^2}$ 的近似值.

解：由于 $f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+df(x,y)$，

设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，$x=3,y=4,\Delta x=-0.02,\Delta y=0.03$，

于是 $$df(x,y)=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x\Delta x+y\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+\frac{x\Delta x+y\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\therefore \sqrt{(2.98)^2+(4.03)^2}\approx\sqrt{3^2+4^2}+\frac{3(-0.02)+4(0.03)}{\sqrt{3^2+4^2}}=5.012 .$$

***5. 已知圆扇形的中心角为$\alpha=60^\circ$，半径为$r=20cm$，如果α增加了1°，r减少了 1cm，试用全微分计算面积改变量的近似值.

解：由扇形的面积公式$S=\frac{1}{2}r^2\alpha$得到，$dS=r\alpha dr+\frac{1}{2}r^2d\alpha$，

取$\alpha=\frac{\pi}{3}$, $d\alpha=\Delta\alpha=\frac{\pi}{180}$, $r=20, dr=\Delta r=-1$

$$\therefore\ \Delta S\approx dS=20\frac{\pi}{3}(-1)+\frac{1}{2}400\frac{\pi}{180}=-\frac{50}{9}\pi\approx-17.45329\,(cm^2) .$$

***6. 计算函数 $f(x,y,z)=\ln(x+2y+3z)$在点$P=(1,2,0)$处沿给定方向 $\vec{l}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ 的方向导数$\left.\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}\right|_P$.

解：$f_x=\frac{1}{x+2y+3z}$， $f_y=\frac{2}{x+2y+3z}$， $f_z=\frac{3}{x+2y+3z}$，

$$\vec{e}_l=\left\{\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right\},$$

$$\therefore\quad \left.\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}\right|_P=\nabla f\cdot\vec{e}_l=\left\{\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right\}\cdot\left\{\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}=\frac{1}{5\sqrt{6}} .$$

***7. 函数$z=\arctan\frac{1+x}{1+y}$在（0，0）点处沿哪个方向的方向导数最大，并求此方向导数的值.

解：$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1+y}\right)^2}\cdot\left.\frac{1}{1+y}\right|_{(0,0)}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(0,0)}=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1+y}\right)^2}\cdot\left[-\frac{1+x}{(1+y)^2}\right]\bigg|_{(0,0)}=-\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{1}{2}\cos\alpha+(-\frac{1}{2})\sin\alpha=\frac{1}{2}\{1,-1\}\cdot\{\cos\alpha,\sin\alpha\}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi,$$

其中 φ 为 $\vec{l}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$ 与 $\vec{g}=\left\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}$ 的夹角，

所以 $\varphi=0$ 时，即 $\vec{l}$ 与 $\vec{g}$ 同向时，方向导数取最大值 $\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**8. 对函数 $f(x,y,z)=e^{xyz}$ 求出 $\nabla f(x,y,z)$ 以及 $\nabla f(1,2,3)$.

解： $\nabla f=\{yze^{xyz},xze^{xyz},xye^{xyz}\}$， $\nabla f(1,2,3)=e^6\{6,3,2\}$.

**9. 求函数 $f(x,y,z)=(x+y)^{\frac{1}{z}}$ 在点 $P=(\frac{e+1}{2},\frac{e-1}{2},\frac{1}{2})$ 处的梯度.

解：$\nabla f=\left\{\frac{1}{z}(x+y)^{\frac{1}{z}-1},\frac{1}{z}(x+y)^{\frac{1}{z}-1},-\frac{(x+y)^{\frac{1}{z}}}{z^2}\ln(x+y)\right\}$,

$\nabla f(\frac{e+1}{2},\frac{e-1}{2},\frac{1}{2})=\{2e,2e,-4e^2\}$.

***10. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点（0，0）处的连续性，可导性和可微性.

解：因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$,

所以 $f(x,y)$ 在点（0，0）连续.

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}$,

极限不存在， $f(x,y)$ 在（0，0）处不可导，从而在（0，0）处不可微.

第 11 章（之 4）（总第 60 次）

教材内容：§11.3 复合函数微分法；§11.4 隐函数微分法

**1. 解下列各题：

（1） 若函数 $f(u,v)$ 可微，且有 $f(x,x^2)=x^4+2x^3+x$ 及 $f'_u\ (x,x^2)=2x^2-2x+1$，则

$f'_v\ (x,x^2)=$ （ ）

(A) $2x^2+2x+1$ (B) $2x^2+3x+\frac{1}{2x}$

(C) $2x^2-2x+1$ (D) $2x^2+3x+1$

答：(A)

（2）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xy^2z=x+y+z$ 所确定，则 $\frac{\partial z}{\partial y}$ =_________.

答： $\frac{2xyz-1}{1-xy^2}$.

（3）方程 $\frac{\partial z}{\partial x}=3\frac{\partial z}{\partial y}$，在变量代换 $u=x+3y$， $v=3x+y$ 下，可得新方程为_______.

答：$\frac{\partial z}{\partial u}=0$.

**2. 设 $u=x^2+y^2+z^2, x=r\cos\theta\sin\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\varphi$ 求 $\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial u}{\partial \theta},\frac{\partial u}{\partial \varphi}$.

解：$\frac{\partial u}{\partial r}=2x(\cos\theta\sin\varphi)+2y\sin\theta\sin\varphi+2z\cos\varphi=2r$，

$\frac{\partial u}{\partial \theta}=2x[r(-\sin\varphi)\sin\theta]+2y(r\cos\theta\sin\varphi)=0$，

$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=2x(r\cos\theta\cos\varphi)+2y(r\sin\theta\cos\varphi)-2z\,r\sin\varphi=0$.

**3. 一直圆锥的底半径以 3cm/s 的速率增加,高 h 以 5cm/s 的速率增加,试求 r=15cm，h=25cm 时其体积的增加速率.

解：$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$，

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt}+\frac{\partial V}{\partial h}\cdot\frac{dh}{dt}=\frac{2\pi}{3}rh\frac{dr}{dt}+\frac{1}{3}\pi r^2\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=25,r=15}=1125\pi cm^3/s$$

*4. 设 $z=e^x-\sqrt[3]{y}$, 而 $x=\sin t, y=t^4$，求 $\frac{dz}{dt}$.

解：$\frac{dz}{dt}=z_x\frac{dx}{dt}+z_y\frac{dy}{dt}=e^x\cos t-\frac{4t^3}{3y^{\frac{2}{3}}}$.

**5. 若 $z=\frac{xy}{f(x^2-y^2)}$，证明：$xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+x^2y\frac{\partial z}{\partial y}=x^2z+y^2z$.

解：$z_x=\frac{yf-2x^2yf'}{f^2}, z_y=\frac{xf+2xy^2f'}{f^2}$，

则 $xy^2z_x+x^2yz_y=\frac{xy(x^2+y^2)}{f}=x^2z+y^2z$.

**6. 设 $u=f(xe^y, ye^x, xy\cos^2 x)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},du$.

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=e^y f_1+ye^x f_2+(y\cos^2 x-xy\sin 2x)f_3$ ，

$\frac{\partial u}{\partial y}=xe^y f_1+e^x f_2+x\cos^2 xf_3$,

$du=\left[e^y f_1+ye^x f_2+(y\cos^2 x-xy\sin 2x)f_3\right]dx+\left[xe^y f_1+e^x f_2+x\cos^2 xf_3\right]dy$.

**7. 求由方程 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：方程 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 写为 $x=z(\ln z-\ln y)$，并两边关于 x 求偏导，得

$1=(\ln z-\ln y)z_x+z(\frac{z_x}{z}-0)$，所以 $z_x=\frac{1}{1+\ln z-\ln y}=\frac{1}{1+\frac{x}{z}}=\frac{z}{x+z}$。

对 $x = z(\ln z - \ln y)$ 两边关于 y 求偏导，得

$0 = (\ln z - \ln y)z_y + z(\frac{z_y}{z} - \frac{1}{y})$，所以 $z_y = \frac{z}{y(1+\ln z - \ln y)} = \frac{z}{y(1+\frac{x}{z})} = \frac{z^2}{y(z+x)}$。

**8. 设 $F(xy, y+z, xz) = 0,$ 试求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, dz$.

解法一：$F(xy, y+z, xz) = 0,$ 两边对 x 求导，得 $yF_1 + z_x F_2 + F_3(z + xz_x) = 0$，

解得 $z_x = -\frac{yF_1 + zF_3}{F_2 + xF_3}$，

两边对 y 求导，得 $xF_1 + F_2(1 + z_y) + F_3 xz_y = 0$.

解得 $z_y = -\frac{xF_1 + F_2}{F_2 + xF_3}$ ，所以 $dz = -\frac{yF_1 + zF_3}{F_2 + xF_3}dx - \frac{xF_1 + F_2}{F_2 + xF_3}dy$.

解法二：（利用微分形式不变性）

对 $F(xy, y+z, xz) = 0$ 两边求全微分，得

$F_1 d(xy) + F_2 d(y+z) + F_3 d(xz) = 0$，即

$F_1(xdy + ydx) + F_2(dy + dz) + F_3(zdx + xdz) = 0$，解得

$$dz = -\frac{yF_1 + zF_3}{F_2 + xF_3}dx - \frac{xF_1 + F_2}{F_2 + xF_3}dy$$

因而有：$z_x = -\frac{yF_1 + zF_3}{F_2 + xF_3}$， $z_y = -\frac{xF_1 + F_2}{F_2 + xF_3}$。

***9. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x, x+y+z, z+xy) = 1$ 所确定，其中 F 具有连续一阶偏导数，$F_2 + F_3 \neq 0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：$F_1\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)F_2 + (\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)F_3 = 0$，

$$\mathrm{d}z = -\frac{(F_1 + F_2 + yF_3)\,\mathrm{d}x + (F_2 + xF_3)\,\mathrm{d}y}{F_2 + F_3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_1 + F_2 + yF_3}{F_2 + F_3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_2 + xF_3}{F_2 + F_3}.$$

***10. 求由方程 $z^3-3xyz=a^3\quad (a\neq 0)$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 处沿方向 $\bar{a}=\left\{-1,-2\right\}$ 的方向导数.

解：当 $x=0,y=1$ 时，$z_0=a\neq 0$. 通过对 $z^3-3xyz=a^3$ 求偏导可得，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0.1)}=\left.\frac{yz}{z^2-xy}\right|_{(0,1)}=\frac{1}{a},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0.0)}=\left.\frac{xz}{z^2-xy}\right|_{(0,1)}=0，\therefore \frac{\partial z}{\partial \bar{a}}=gradz\cdot\frac{\{-1,-2\}}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5a}.$$

***11. 设 $xu-yv=0, yu+xv=1, (x^2+y^2\neq 0)$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$.

解：$$\begin{cases} u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ v+y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{xv-yu}{x^2+y^2} \end{cases}$$

类似地 $$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial y}-v-y\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ u+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+x\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{yu-xv}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2} \end{cases}$$

第 11 章 （之 5）（总第 61 次）

教材内容：§11.5 多元函数微分法在几何上的应用

**1. 曲面 $x^2-2y^2+z^2-xyz-4x+2z=6$ 在点 $A=(0,1,2)$ 处的切平面方程为 （ ）

（A）$3(x-1)+2(y-2)-3z+11=0$ （B）$\mathbf{3x+2y-3z+4=0}$

（C）$\frac{x}{3}+\frac{y-1}{2}+\frac{z-2}{-3}=0$ （D）$\frac{x}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-3}$

答：(A).

**2. 设函数 $F(x,y,z)$ 可微，曲面 $F(x,y,z)=0$ 过点 $M=(2,-1,0)$，且 $F_x(2,-1,0)=5, F_y(2,-1,0)=-\sqrt{2}, F_z(2,-1,0)=-3$. 过点 M 作曲面的一个法向量 $\vec{n}$，已知 $\vec{n}$ 与 x 轴正向的夹角为钝角，则 $\vec{n}$ 与 z 轴正向的夹角 $\gamma=$______ .

答：$\frac{\pi}{3}$.

***3. 设曲线 $x=2t+1, y=3t^2-1, z=t^3+2$ 在 $t=-1$ 对应点处的法平面为 S ，则点

$P=(-2,4,1)$ 到 S 的距离 $d=$______ .

答：2.

**4. 求曲线 $L: x=a\cos t, y=b\sin t, z=ct$ 在点 $M_0=(a,0,2\pi c)$ 处的切线和法平面方程.

解：$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=-a\sin t\Big|_{t=0}=0,$

$\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=-b\cos t\Big|_{t=0}=b,\qquad \frac{dz}{dt}\Big|_{t=0}=c$.

$\therefore$切线方程为：$\frac{x-a}{0}=\frac{y-0}{b}=\frac{z-2\pi c}{c}\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\\ \frac{y}{b}=\frac{z-2\pi c}{c}\end{cases}$，

法平面方程为：$by+c(z-2\pi c)=0$.

***5. 求曲线 $L: xy+yz+zx=11,\quad xyz=6$ 在点 $M_0=(1,2,3)$ 处的切线和法平面方程.

解：设 $F(x,y,z)=xy+yz+zx-11$，$G(x,y,z)=xyz-6$，

则 $\vec{n}=\nabla F\times\nabla G=\{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\}$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}y+z & x+z\\ yz & xz\end{vmatrix}=xz(y+z)-yz(x+z)=z^2(-y+x),$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}x+z & y+x\\ zx & xy\end{vmatrix}=xy(x+z)-xz(x+y)=x^2(y-z),$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix}x+y & y+z\\ xy & zy\end{vmatrix}=zy(x+y)-xy(y+z)=y^2(z-x).$$

$\therefore \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big|_{M_0}=-9,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_{M_0}=-1,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\Big|_{M_0}=8$，

$\therefore$切线方程为 $\qquad \frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{8}=\frac{z-3}{-9}$，

法平面方程为 $\quad (x-1)(-1)+(y-2)8+(z-4)(-9)=0$，

即 $\quad x-8y+9z-12=0$.

***6. 求曲面 $4x^2+y^2+4z^2=16$ 在点 $P=(1,2\sqrt{2},-1)$ 处的法线在 yOz 平面上投影方程.

解：曲面在点 $P=(1,2\sqrt{2},-1$ 处的法线方向向量

$\vec{n}=\{8,4\sqrt{2},-8\}=4\{2,\sqrt{2},-2\}$,

法线方程为： $\quad \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{z+1}{-2}$.

法线在 yOz 平面上投影方程为 $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{z+1}{-2}$.

***7. 求曲线 $x=t^3, y=2t^2, z=3t$ 上的点，使曲线在该点处的切线平行于平面 $x+2y-z=1$.

解：设所求的点对应于 $t=t_0$，则对应的切线方向向量为： $\vec{s}=\{3t_0^2,4t_0,3\}$.

因为 $\vec{s}$ 垂直于平面法向量 $\vec{n}=\{1,2,-1\}$，所以 $\vec{s}\cdot\vec{n}=3t_0^2+8t_0-3=0$，

解得：$t_0=\dfrac{1}{3}$ 和 $t_0=-3$. 所求点为：$\left(\dfrac{1}{27},\dfrac{2}{9},1\right)$ 和 $(-27,18,-9)$.

**8. 求曲面 $z=\dfrac{6}{xy}$ 上平行于平面 $6x-3y-2z+6=0.$ 的切平面方程.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{6}{xy}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{6}{xy^2}$,

$$\therefore \text{由条件，得：} \left.\begin{matrix} -\dfrac{6}{x^2y}=6k \\ -\dfrac{6}{y^2x}=-3k \\ -1=-2k \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=-3 \end{cases}$$

∴切平面方程为：$6(x-1)-3(y+2)-2(z+3)=0,$

即　$6x-3y-2z-18=0$.

***9. 求函数 $z=e^{x^2+y^2}$ 在点 $M_0=(x_0,y_0)$ 沿过该点的等值线的外法线方向的方向导数.

解：首先，过 $M_0=(x_0,y_0)$ 的等值线方程为 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$,

在 $M_0=(x_0,y_0)$ 处的法线斜率为 $k=\dfrac{y_0}{x_0}$，即法线方向向量为 $\vec{n}=\{1,\dfrac{y_0}{x_0}\}$ 或 $\{x_0,y_0\}$,

方向余弦为：$\cos\alpha=\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$　　$\cos\beta=\dfrac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial n}=e^{x_0^2+y_0^2}\cdot 2x_0\cdot\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}+e^{x_0^2+y_0^2}\cdot 2y_0\cdot\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\qquad =2e^{x_0^2+y_0^2}\cdot\sqrt{x_0^2+y_0^2}\ .$$

***10.　求函数 $z=\sqrt{y+\sin x}$ 在 $P=\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ 点沿 $\bar{a}$ 方向的方向导数，其中 $\bar{a}$ 为曲线 $x=2\sin t$，$y=\pi\cos 2t$ 在 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 处的切向量（指向 t 增大的方向）.

解：$\tan\alpha=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}=\left.\dfrac{-2\pi\sin 2t}{2\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}=-\pi$,

$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{\pi^2+1}}$，$\sin\alpha=\dfrac{-\pi}{\sqrt{\pi^2+1}}$,

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},1\right)}=\left.\dfrac{\cos x}{2\sqrt{y+\sin x}}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},1\right)}=0$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},1\right)}=\left.\dfrac{1}{2\sqrt{y+\sin x}}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},1\right)}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$,

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial a}=0\times(\dfrac{1}{\sqrt{\pi^2+1}})+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\times(-\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}})=-\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi^2+1}}$.

***11.　设 $f(y,z),g(z)$ 都是可微函数，求曲线 $\begin{cases}x=f(y,z)\\ y=g(z)\end{cases}$ 在对应于 $z=z_0$ 点处的切线方程和法平面方程.

解：将曲线写为参数式 $\begin{cases}x=f(g(z),z)\\ y=g(z)\\ z=z\end{cases}$，而 $z=z_0$ 对应点 $\left(f[g(z_0),z_0],g(z_0),z_0\right)$，所以对

应切线的方向向量为：

$$\vec{S}=\left\{f_y[g(z_0),z_0]g'(z_0)+f_z[g(z_0),z_0],g'(z_0),1\right\}.$$

因此，切线方程为：$\dfrac{x-f[g(z_0),z_0]}{f_y[g(z_0),z_0]g'(z_0)+f_z[g(z_0),z_0]}=\dfrac{y-g(z_0)}{g'(z_0)}=z-z_0$，

法平面方程为：$\left\{f_y[g(z_0),z_0]g'(z_0)+f_z[g(z_0),z_0]\right\}\left\{x-f[g(z_0),z_0]\right\}$

$+g'(z_0)[y-g(z_0)]+(z-z_0)=0$.

****12. 在函数 $u=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的等值线中哪些曲线与椭圆 $x^2+8y^2=16$ 相切？

解：对等值线 $u_0=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 两边微分得 $-\dfrac{dx}{x^2}-\dfrac{dy}{y^2}=0$，　即 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y^2}{x^2}$，

同样对 $x^2+8y^2=16$ 两边微分，有 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{8y}$，

由于两条曲线相切，切点处必有相同切向量，故令 $-\dfrac{y^2}{x^2}=-\dfrac{x}{8y}$，得 $x=2y$，

代入 $x^2+8y^2=16$，得 $x=\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}$，$y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，

$$\therefore\quad u_0=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

***13. 试证明曲面 $xyz=a^3$ 上任一点处的切平面在三个坐标轴上截距之积为定值.

解：由 $xyz=a^3$，得 $z=\dfrac{a^3}{xy}$，

$\therefore$在点 (x_0,y_0,z_0) 处法向量为：$-\left\{\dfrac{a^3}{{x_0}^2y_0},\dfrac{a^3}{{y_0}^2x_0},1\right\}$，

$\therefore$切平面为：

$$\frac{a^3}{{x_0}^2y_0}(x-x_0)+\frac{a^3}{x_0{y_0}^2}(y-y_0)+z-z_0=0,$$

又 $\because x_0y_0z_0=a^3$，

∴ 切平面方程化为：$\dfrac{x}{3x_0}+\dfrac{y}{3y_0}+\dfrac{z}{3z_0}=1$，

∴ 截距之积为： $27x_0y_0z_0=27a^3$（定值）.

***14. 证明曲面 $F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$ 的所有切平面都通过一个定点，这里 $F(u,v)$ 具有一阶连续偏导数.

解：设 $G(x,y,z)=F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)$, 所以

曲面上点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面法向量：

$$\bar{n}=\nabla G\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left\{\frac{F_1}{z_0-c},\frac{F_2}{z_0-c},-\frac{1}{(z_0-c)^2}\left[(x_0-a)F_1+(y_0-b)F_2\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{(z_0-c)^2}\left\{(z_0-c)F_1,(z_0-c)F_2,-\left[(x_0-a)F_1+(y_0-b)F_2\right]\right\}\quad .$$

切平面方程为： $(z_0-c)F_1(x-x_0)+(z_0-c)F_2(y-y_0)$

$$-\left[(x_0-a)F_1+(y_0-b)F_2\right](z-z_0)=0\,.$$

易知 $x=a,y=b,z=c$ 满足上述方程，即曲面的所有切平面都通过定点 (a,b,c) .