数学分析（上）

数学学院

靳勇飞

2024 年 9 月

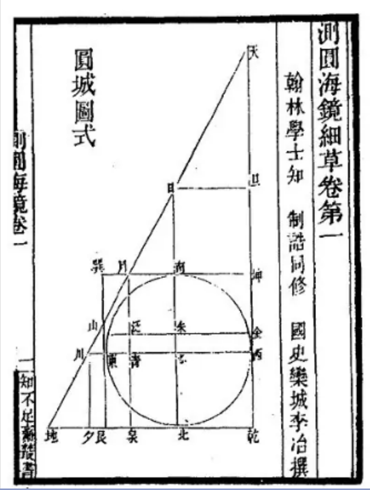
什么是数学

什么是数学？

什么是数学

在认识世界的过程中，对世界——物质世界以及对物质世界的理解产生的精神世界——中的规律的东西进行总结，形成符号，并脱离了原来的含义（抽象），对这些符号以及符号表示的规律的研究，以及把这些应用于解释世界规律、指导实践就是数学。

什么是数学



《测圆海镜》是金元之际李冶所著，成书于 1248 年

什么是数学

- 由于是抽象，可以适用于多种场合
- 由于是抽象，其必然受限于如何抽象，具体表现为不同时期的认识不同
- 它是一种共同的规律，因此具有再现性
- 抽象至不再具有字面的意思，区别于其他科学
- 前人所得到的数学成果，也可以作为进一步的认识对象

什么是数学

- 牛顿在推演物理规律的过程中，创立了微积分（数学分析的重要内容）
- 莱布尼茨在研究数学问题过程中，创立了微积分（数学分析的重要内容）
- 帕斯卡和费马为了回答关于赌博的问题，开始了概率论的研究
- 钱学森把控制论应用于实践，创立了工程控制论
- 在相对论中要用到非欧几何，要用到流形上的微积分
- 在量子物理研究中，主要的可观察量是 Hilbert 空间上的自伴算子，这是泛函分析的内容
- 在规范场理论、麦克斯韦方程组的统一方面，要用到近代的微分几何
- 微观经济学是微积分理论在经济研究方面的应用
- ………

什么是分析

问题

什么是分析？

什么是分析

问题

什么是分析？

思考讨论

把某事物分解成较简单的组成部分进行研究，找出这些部分的本质属性和彼此间的关系。

在数学上，广义的就是要把研究对象是什么、怎么样、为什么会这样研究清楚。狭义的，可以是通过极限、微分、积分等方法研究数学对象的总称。

什么是分析

思考讨论 (数学分析的主要内容)

1. 极限理论
2. 实数的基本理论
3. 区间上的连续函数
4. 区间上函数的导函数及其性质
5. 区间上函数积分及其性质
6. 级数理论
7. 多变量的微积分

什么是分析

- 复分析（复变函数）：研究复数上的极限、微分、积分
- 实分析（实变函数）：研究什么是积分，积分定义怎么推广
- 泛函分析：研究无穷维空间上的极限、微分、积分
- 偏微分方程：数学分析在方程中的应用
- 概率论：概率空间上的极限、微分、积分
- 高等代数：矩阵理论，以及矩阵上的极限、微分、积分
- 抽象代数：什么是加减乘除等基本运算
- 数值分析：用数学分析的方法研究数值计算的原理、算法
- 微分几何：研究什么是导数，导数定义怎么推广
- 点集拓扑：研究什么是连续
- 算子理论算子代数：算子空间上的分析和代数
- ....

怎么学分析

思考讨论（怎么学好数学（分析））

- 尽量重现数学家当时解决问题的思路过程

怎么学分析

思考讨论 (怎么学好数学（分析）)

- 尽量重现数学家当时解决问题的思路过程
- 听老师讲解概念的含义，思考这个数学概念可以是由什么相对具体的东西抽像而来

怎么学分析

思考讨论 (怎么学好数学（分析）)

- 尽量重现数学家当时解决问题的思路过程
- 听老师讲解概念的含义，思考这个数学概念可以是由什么相对具体的东西抽像而来
- 跟着老师推导相关的性质、定理，理清楚推导的过程，思考为什么这样推导，背后的规律是什么（或者说，具体的事物上，推导的过程是什么意思）

怎么学分析

思考讨论 (怎么学好数学（分析）)

- 尽量重现数学家当时解决问题的思路过程
- 听老师讲解概念的含义，思考这个数学概念可以是由什么相对具体的东西抽像而来
- 跟着老师推导相关的性质、定理，理清楚推导的过程，思考为什么这样推导，背后的规律是什么（或者说，具体的事物上，推导的过程是什么意思）
- 尝试按照自己的理解，自己独立推导性质、定理

怎么学分析

思考讨论 (怎么学好数学（分析）)

- 尽量重现数学家当时解决问题的思路过程
- 听老师讲解概念的含义，思考这个数学概念可以是由什么相对具体的东西抽像而来
- 跟着老师推导相关的性质、定理，理清楚推导的过程，思考为什么这样推导，背后的规律是什么（或者说，具体的事物上，推导的过程是什么意思）
- 尝试按照自己的理解，自己独立推导性质、定理
- 独立尝试完成布置的作业

怎么学分析

思考讨论 (怎么学好数学（分析）)

- 尽量重现数学家当时解决问题的思路过程
- 听老师讲解概念的含义，思考这个数学概念可以是由什么相对具体的东西抽像而来
- 跟着老师推导相关的性质、定理，理清楚推导的过程，思考为什么这样推导，背后的规律是什么（或者说，具体的事物上，推导的过程是什么意思）
- 尝试按照自己的理解，自己独立推导性质、定理
- 独立尝试完成布置的作业
- 日常生活中碰到的事情，思考讨论是否可以用学过的什么数学知识解释、讨论

怎么学分析

思考讨论（怎么学好数学（分析））

- 尽量重现数学家当时解决问题的思路过程
- 听老师讲解概念的含义，思考这个数学概念可以是由什么相对具体的东西抽像而来
- 跟着老师推导相关的性质、定理，理清楚推导的过程，思考为什么这样推导，背后的规律是什么（或者说，具体的事物上，推导的过程是什么意思）
- 尝试按照自己的理解，自己独立推导性质、定理
- 独立尝试完成布置的作业
- 日常生活中碰到的事情，思考讨论是否可以用学过的什么数学知识解释、讨论
- ....

怎么学分析

思考讨论 (碰到难题怎么办（独立思考部分）)

- 看看题目是不是某个定理的直接推论；
  有的话，尝试直接利用该定理，如不能解决的话看下一步；

怎么学分析

思考讨论 (碰到难题怎么办（独立思考部分）)

- 看看题目是不是某个定理的直接推论；
  有的话，尝试直接利用该定理，如不能解决的话看下一步；
- 看看是否有定理的条件部分和题目中的一样或相似；
  有的话，尝试先利用该定理得到一个结论，然后把该结论当作是条件，再从第一步按步骤解决新问题；或者模仿该定理的证明方法尝试证明。
  如不能解决的话，看下一步

怎么学分析

思考讨论 (碰到难题怎么办（独立思考部分）)

- 看看题目是不是某个定理的直接推论；
  有的话，尝试直接利用该定理，如不能解决的话看下一步；
- 看看是否有定理的条件部分和题目中的一样或相似；
  有的话，尝试先利用该定理得到一个结论，然后把该结论当作是条件，再从第一步按步骤解决新问题；或者模仿该定理的证明方法尝试证明。
  如不能解决的话，看下一步
- 看看是否有定理的结论部分和题目中的一样或相似
  有的话，把该定理的条件当作需要证明的结论，尝试先证明该结论，然后再从第一步按步骤解决问题
  如果没有，或者不能解决问题，看下一步

怎么学分析

思考讨论 (碰到难题怎么办（独立思考部分）)

- 看看题目是不是某个定理的直接推论；
  有的话，尝试直接利用该定理，如不能解决的话看下一步；
- 看看是否有定理的条件部分和题目中的一样或相似；
  有的话，尝试先利用该定理得到一个结论，然后把该结论当作是条件，再从第一步按步骤解决新问题；或者模仿该定理的证明方法尝试证明。
  如不能解决的话，看下一步
- 看看是否有定理的结论部分和题目中的一样或相似
  有的话，把该定理的条件当作需要证明的结论，尝试先证明该结论，然后再从第一步按步骤解决问题
  如果没有，或者不能解决问题，看下一步
- 把题目中所有涉及的术语（尤其是结论中的术语）的定义写出来，写的时候要具体到题目中的符号，再从第一步开始

数学的语言

注意 (数学理论的框架)

公理（定义）$\longrightarrow$ 定理 $\longrightarrow$ 推论

数学的语言

注意 (数学理论的框架)

公理（定义）$\to$ 定理 $\to$ 推论

注意 (数学语言的要求)

数学的描述，每一句话都应该是确定的真假的陈述句。

数学的语言

注意 (数学理论的框架)

公理（定义）→ 定理 → 推论

注意 (数学语言的要求)

数学的描述，每一句话都应该是确定的真假的陈述句。

1. 这样可以吗？

数学的语言

注意 (数学理论的框架)

公理（定义）→ 定理 → 推论

注意 (数学语言的要求)

数学的描述，每一句话都应该是确定的真假的陈述句。

1. 这样可以吗？
2. 果然如此！

数学的语言

注意 (数学理论的框架)

公理（定义）$\rightarrow$ 定理 $\rightarrow$ 推论

注意 (数学语言的要求)

数学的描述，每一句话都应该是确定的真假的陈述句。

1. 这样可以吗？
2. 果然如此！
3. 收敛。

数学的语言

注意 (数学理论的框架)

公理（定义）→ 定理 → 推论

注意 (数学语言的要求)

数学的描述，每一句话都应该是确定的真假的陈述句。

1. 这样可以吗？
2. 果然如此！
3. 收敛。
4. 成立。

数学的语言

注意 (数学理论的框架)

公理（定义）$\rightarrow$ 定理 $\rightarrow$ 推论

注意 (数学语言的要求)

数学的描述，每一句话都应该是确定的真假的陈述句。

1. 这样可以吗？
2. 果然如此！
3. 收敛。
4. 成立。
5. 级数收敛。

数学的语言

定义（命题）

有确定的真假的陈述句，称为命题。

数学的语言

定义（命题）

有确定的真假的陈述句，称为命题。

注意

1. “有确定的真假”指的是对陈述句的判断结果只能是真 (对)、假 (错) 两种中的一个，不能是其他；判断的结果必须是确定的，不能是可变的。
2. 一个句子是否为命题，先看它是否为陈述句，再看它的真值是否唯一。
3. 一般在数学作业上写的命题，应该都是真命题。
4. 对是否命题的判定可以是在上下文约定的环境中进行。

数学的语言

判断

1. 2 是一个偶数。

数学的语言

判断

1. 2 是一个偶数。
2. 2 不是一个质数。

数学的语言

判断

1. 2 是一个偶数。
2. 2 不是一个质数。
3. $2n$ 是一个偶数。

数学的语言

判断

1. 2 是一个偶数。
2. 2 不是一个质数。
3. $2n$ 是一个偶数。
4. 对任意的自然数 n, $2n$ 是一个偶数。

数学的语言

判断

1. 2 是一个偶数。
2. 2 不是一个质数。
3. $2n$ 是一个偶数。
4. 对任意的自然数 n, $2n$ 是一个偶数。
5. $x^2 \geqslant 0.$

数学的语言

判断

1. 2 是一个偶数。
2. 2 不是一个质数。
3. $2n$ 是一个偶数。
4. 对任意的自然数 n, $2n$ 是一个偶数。
5. $x^2 \geqslant 0$.
6. 对任意的实数 x, $x^2 \geqslant 0$.

数学的语言

判断

1. 2 是一个偶数。
2. 2 不是一个质数。
3. $2n$ 是一个偶数。
4. 对任意的自然数 n, $2n$ 是一个偶数。
5. $x^2 \geqslant 0$.
6. 对任意的实数 x, $x^2 \geqslant 0$.
7. $f(x)$ 不一定是周期函数。

数学的语言

判断

1. 2 是一个偶数。
2. 2 不是一个质数。
3. $2n$ 是一个偶数。
4. 对任意的自然数 n, $2n$ 是一个偶数。
5. $x^2 \geqslant 0.$
6. 对任意的实数 x, $x^2 \geqslant 0.$
7. $f(x)$ 不一定是周期函数。
8. $3 \geqslant 2.$

数学的语言

注意 (由命题写出新的命题的常用方法)

1. 命题的否定
2. 且
3. 或
4. 如果..... 那么......
5. 当且仅当

数学的语言

定义（命题的否定）

命题 P	命题 P 的否定
真	假
假	真

数学的语言

定义 (且)

命题 P	命题 Q	命题 P 且命题 Q
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

数学的语言

定义 (且)

命题 P	命题 Q	命题 P 且命题 Q
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

例

1. 2 是一个奇数，且 3 是一个偶数。
2. 2 是一个奇数，但 3 是一个偶数。
3. 2 是一个奇数，3 是一个偶数。

数学的语言

定义（或）

命题 P	命题 Q	命题 P 或命题 Q
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

数学的语言

定义 (或)

命题 P	命题 Q	命题 P 或命题 Q
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

例

1. 2 是一个奇数，或 3 是一个偶数。
2. 2 是一个奇数，或 3 是一个奇数。
3. $1 \leqslant 2$.

数学的语言

定义 (且的否定)

命题 P	命题 Q	(命题 P 且 命题 Q) 的否定	命题 P 的否定或 命题 Q 的否定
真	真	假	假
真	假	真	真
假	真	真	真
假	假	真	真

注意

且的否定是否定的或

数学的语言

定义 (或的否定)

命题 P	命题 Q	（命题 P 或 命题 Q）的否定	命题 P 的否定且 命题 Q 的否定
真	真	假	假
真	假	假	假
假	真	假	假
假	假	真	真

注意

或的否定是否定的且

数学的语言

定义（如果.... 那么......）

命题 P	命题 Q	如果命题 P，那么命题 Q	命题 P 的否定或命题 Q
真	真	真	真
真	假	假	假
假	真	真	真
假	假	真	真

数学的语言

定义 (如果.... 那么......)

命题 P	命题 Q	如果命题 P，那么命题 Q	命题 P 的否定或命题 Q
真	真	真	真
真	假	假	假
假	真	真	真
假	假	真	真

注意

前一命题为假时，整个命题为真！
因此，这个命题不能处理前一命题为假的情形！
可理解为：只提到了前一命题为真的情况。

数学的语言

例 (如果.... 那么......)

1. 如果 $1+2=3$, 那么 $2+2=6$.

数学的语言

例 (如果.... 那么......)

1. 如果 $1 + 2 = 3$, 那么 $2 + 2 = 6$.
2. 如果 $1 + 2 = 3$, 则 $2 + 2 = 6$.

数学的语言

例 (如果.... 那么......)

1. 如果 $1+2=3$, 那么 $2+2=6$.
2. 如果 $1+2=3$, 则 $2+2=6$.
3. 若 n 是自然数，则 $2n$ 是偶数。

数学的语言

例 (如果.... 那么......)

1. 如果 $1+2=3$, 那么 $2+2=6$.
2. 如果 $1+2=3$, 则 $2+2=6$.
3. 若 n 是自然数，则 $2n$ 是偶数。
4. 2 是奇数，则 3 是偶数。

数学的语言

例 (如果.... 那么......)

1. 如果 $1+2=3$, 那么 $2+2=6$.
2. 如果 $1+2=3$, 则 $2+2=6$.
3. 若 n 是自然数，则 $2n$ 是偶数。
4. 2 是奇数，则 3 是偶数。
5. 2 是奇数，那么 3 是偶数。

数学的语言

例 (如果.... 那么......)

1. 如果 $1+2=3$, 那么 $2+2=6$.
2. 如果 $1+2=3$, 则 $2+2=6$.
3. 若 n 是自然数，则 $2n$ 是偶数。
4. 2 是奇数，则 3 是偶数。
5. 2 是奇数，那么 3 是偶数。
6. （对某范围内的函数 $f(x)$）函数 $f(x)$ 可导的必要条件是函数 $f(x)$ 连续。

数学的语言

例 (x 是实数)

如果 $x > 2$, 那么 $x + 2 > 2$.

1. 如果 $3 > 2$, 那么 $3 + 2 > 2$.

数学的语言

例 (x 是实数)

如果 $x > 2$, 那么 $x + 2 > 2$.

1. 如果 $3 > 2$, 那么 $3 + 2 > 2$.
2. 如果 $1 > 2$, 那么 $1 + 2 > 2$.

数学的语言

例 (x 是实数)

如果 $x > 2$, 那么 $x + 2 > 2$.

1. 如果 $3 > 2$, 那么 $3 + 2 > 2$.
2. 如果 $1 > 2$, 那么 $1 + 2 > 2$.
3. 如果 $-1 > 2$, 那么 $-1 + 2 > 2$.

数学的语言

例 (x 是实数)

如果 $x > 2$, 那么 $x + 2 > 2$.

1. 如果 $3 > 2$, 那么 $3 + 2 > 2$.
2. 如果 $1 > 2$, 那么 $1 + 2 > 2$.
3. 如果 $-1 > 2$, 那么 $-1 + 2 > 2$.
4. $(-1 > 2)$ 的否定，或 $-1 + 2 > 2$

数学的语言

作业

1. 用一张表画出“如果命题 P, 那么命题 Q”，“如果命题 Q 的否定, 那么命题 P 的否定”，“如果命题 Q, 那么命题 P”，“如果命题 P 的否定, 那么命题 Q 的否定”的真值表，观察相邻两列的关系，能的出什么结论？
2. 画出“‘如果命题 P，那么命题 Q’的否定”的真值表。

数学的语言

定义 (当且仅当)

命题 P	命题 Q	命题 P 当且仅当命题 Q
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	真

数学的语言

定义 (当且仅当)

命题 P	命题 Q	命题 P 当且仅当命题 Q
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	真

例

1. 2 是一个奇数当且仅当 3 是一个偶数。
2. 2 是一个奇数的充要条件是 3 是一个偶数。
3. 2 是一个奇数的充分必要条件是 3 是一个偶数。

数学的语言

$P(n)$ 是关于 n 的陈述:

$$P(n)\text{：}2n \text{ 是偶数。}$$

数学的语言

$P(n)$ 是关于 n 的陈述:

$$P(n)\text{：}2n\ \text{是偶数。}$$

定义（命题函数）

$P(x)$ 是关于 x 的一个陈述，E 是一个集合。如果对每一个 $x \in E$, $P(x)$ 都是一个命题，就称 $P(x)$ 是 E 上的一个（简单）命题函数或谓词。E 称为 $P(x)$ 的论域或者讨论范围。

数学的语言

$P(n)$ 是关于 n 的陈述:

$$P(n)\text{：}2n \text{ 是偶数。}$$

定义（命题函数）

$P(x)$ 是关于 x 的一个陈述，E 是一个集合。如果对每一个 $x \in E$, $P(x)$ 都是一个命题，就称 $P(x)$ 是 E 上的一个（简单）命题函数或谓词。E 称为 $P(x)$ 的论域或者讨论范围。

例

1. $n^2 + 2n$ 是奇数（论域 E 是正整数）
2. $x^2 - x - 6 = 0$（论域 E 是实数）

数学的语言

注意 (量词)

1. 全称量词：任意
2. 存在量词：存在

数学的语言

注意 (全称量词)

$P(x)$ 是某关于 x 的命题函数，全称量词常见的叙述有：

1. 对任意的 x, $P(x)$
2. 对每一个 x, $P(x)$
3. 对所有满足…… 条件的 x, $P(x)$
4. 对集合… 中的 x, $P(x)$
5. 当 x…… 时, $P(x)$

当且仅当 $P(x)$ 在指定范围内每个 x 都是真时，该陈述为真。

数学的语言

例 (全称量词)

1. 对任意的实数 x, $x^2 \geqslant 0$.

数学的语言

例 (全称量词)

1. 对任意的实数 x, $x^2 \geqslant 0$.
2. 每一个大于 4 的自然数都可以写成两个质数的和。

数学的语言

例 (全称量词)

1. 对任意的实数 x, $x^2 \geqslant 0$.
2. 每一个大于 4 的自然数都可以写成两个质数的和。
3. 三角形内角和是 $180°$.

数学的语言

例 (全称量词)

1. 对任意的实数 x, $x^2 \geqslant 0$.
2. 每一个大于 4 的自然数都可以写成两个质数的和。
3. 三角形内角和是 $180°$.
4. 当 $n > \frac{1}{10^{-6}}$ 时，$\left|\sqrt[n]{2} - 1\right| < \frac{1}{n} < 10^{-6}$.

数学的语言

例 (全称量词)

1. 对任意的实数 x, $x^2 \geqslant 0$.
2. 每一个大于 4 的自然数都可以写成两个质数的和。
3. 三角形内角和是 $180°$.
4. 当 $n > \frac{1}{10^{-6}}$ 时，$\left|\sqrt[n]{2} - 1\right| < \frac{1}{n} < 10^{-6}$.
5. 对任意的 $x \in \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\}$, $x < 3$.

数学的语言

例 (全称量词)

1. 对任意的实数 x, $x^2 \geqslant 0$.
2. 每一个大于 4 的自然数都可以写成两个质数的和。
3. 三角形内角和是 180°.
4. 当 $n > \frac{1}{10^{-6}}$ 时，$\left|\sqrt[n]{2} - 1\right| < \frac{1}{n} < 10^{-6}$.
5. 对任意的 $x \in \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\}$, $x < 3$.
6. (对某个确定的函数 f 和集合 D) 对集合 D 中任意的 x_1, x_2，若 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) < f(x_2)$.

数学的语言

例 (全称量词)

1. 对任意的实数 x, $x^2 \geqslant 0$.
2. 每一个大于 4 的自然数都可以写成两个质数的和。
3. 三角形内角和是 180°.
4. 当 $n > \frac{1}{10^{-6}}$ 时，$\left|\sqrt[n]{2} - 1\right| < \frac{1}{n} < 10^{-6}$.
5. 对任意的 $x \in \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\}$, $x < 3$.
6. (对某个确定的函数 f 和集合 D) 对集合 D 中任意的 x_1, x_2，若 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) < f(x_2)$.
7. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时，$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

数学的语言

注意 (存在量词)

$P(x)$ 是某关于 x 的命题函数，存在量词常见的叙述有：

1. 存在 x, 使得 $P(x)$
2. 有 x, 使得 $P(x)$
3. 至少有一个 x, 使得 $P(x)$
4. 在集合..... 中的存在 x, 使得 $P(x)$

当且仅当当 $P(x)$ 在指定范围内每个 x 都是假时，该陈述为假。

数学的语言

例 (存在量词)

1. 存在实数 x, 使得 $x^2 \leqslant 0$.

数学的语言

例 (存在量词)

1. 存在实数 x, 使得 $x^2 \leqslant 0$.
2. 存在三角形内角和大于 180°.

数学的语言

例 (存在量词)

1. 存在实数 x, 使得 $x^2 \leqslant 0$.
2. 存在三角形内角和大于 $180°$.
3. 存在 $n > \frac{1}{10^{-6}}$，使得 $\left|\sqrt[n]{2} - 1\right| < \frac{1}{n} < 10^{-6}$.

数学的语言

例 (存在量词)

1. 存在实数 x, 使得 $x^2 \leqslant 0$.
2. 存在三角形内角和大于 $180°$.
3. 存在 $n > \frac{1}{10^{-6}}$， 使得 $\left|\sqrt[n]{2} - 1\right| < \frac{1}{n} < 10^{-6}$.
4. 存在 $x \in \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\}$, 使得 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

数学的语言

例 (存在量词)

1. 存在实数 x, 使得 $x^2 \leqslant 0$.
2. 存在三角形内角和大于 $180°$.
3. 存在 $n > \frac{1}{10^{-6}}$，使得 $\left|\sqrt[n]{2} - 1\right| < \frac{1}{n} < 10^{-6}$.
4. 存在 $x \in \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\}$, 使得 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. 若 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数，则存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得.......

数学的语言

例 (存在量词)

1. 存在实数 x, 使得 $x^2 \leqslant 0$.
2. 存在三角形内角和大于 $180°$.
3. 存在 $n > \frac{1}{10^{-6}}$，使得 $\left|\sqrt[n]{2} - 1\right| < \frac{1}{n} < 10^{-6}$.
4. 存在 $x \in \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\}$, 使得 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. 若 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数，则存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得........
6. 每一个大于 4 的自然数都可以写成两个质数的和。

数学的语言

例 (存在量词)

1. 存在实数 x, 使得 $x^2 \leqslant 0$.
2. 存在三角形内角和大于 $180°$.
3. 存在 $n > \frac{1}{10^{-6}}$， 使得 $\left|\sqrt[n]{2} - 1\right| < \frac{1}{n} < 10^{-6}$.
4. 存在 $x \in \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\}$, 使得 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. 若 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数，则存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得.......
6. 每一个大于 4 的自然数都可以写成两个质数的和。
7. (对某个确定的函数 f) 存在 $T > 0$, 使得对 f 定义域内任意的 x，成立 $f(x + T) = f(x)$

数学的语言

例 (存在量词)

1. 存在实数 x, 使得 $x^2 \leqslant 0$.
2. 存在三角形内角和大于 $180°$.
3. 存在 $n > \frac{1}{10^{-6}}$，使得 $\left|\sqrt[n]{2} - 1\right| < \frac{1}{n} < 10^{-6}$.
4. 存在 $x \in \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\}$, 使得 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. 若 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数，则存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得……..
6. 每一个大于 4 的自然数都可以写成两个质数的和。
7. (对某个确定的函数 f) 存在 $T > 0$, 使得对 f 定义域内任意的 x，成立 $f(x + T) = f(x)$
8. (对某个确定的函数 f 和集合 D) 存在 $M > 0, N > 0$, 对集合 D 中任意的 x，成立 $N \leqslant f(x) \leqslant M$.

数学的语言

例 (量词)

1. 存在实数 y, 对任意的实数 x, 使得 $x+y=x$.

数学的语言

例 (量词)

1. 存在实数 y, 对任意的实数 x, 使得 $x+y=x$.
2. 对任意的实数 x, 存在实数 y, 使得 $x+y=x$.

数学的语言

例 (量词)

1. 存在实数 y, 对任意的实数 x, 使得 $x+y=x$.
2. 对任意的实数 x, 存在实数 y, 使得 $x+y=x$.
3. 对任意的实数 x, 存在实数 y, 使得 $x+y=0$.

数学的语言

例 (量词)

1. 存在实数 y, 对任意的实数 x, 使得 $x+y=x$.
2. 对任意的实数 x, 存在实数 y, 使得 $x+y=x$.
3. 对任意的实数 x, 存在实数 y, 使得 $x+y=0$.
4. 存在实数 y, 对任意的实数 x, 使得 $x+y=0$.

数学的语言

例 (量词)

1. 存在实数 y, 对任意的实数 x, 使得 $x+y=x$.
2. 对任意的实数 x, 存在实数 y, 使得 $x+y=x$.
3. 对任意的实数 x, 存在实数 y, 使得 $x+y=0$.
4. 存在实数 y, 对任意的实数 x, 使得 $x+y=0$.
5. 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时，$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$.

注意

同一个命题中，如果既有“任意”又有“存在”，交换两个量词得到的命题跟原命题不等价!!!

数学的语言

例 (量词)

1. 存在实数 y, 对任意的实数 x, 使得 $x+y=x$.
2. 对任意的实数 x, 存在实数 y, 使得 $x+y=x$.
3. 对任意的实数 x, 存在实数 y, 使得 $x+y=0$.
4. 存在实数 y, 对任意的实数 x, 使得 $x+y=0$.
5. 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时, $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$.
6. 存在 $N>0$, 对任意的 $\varepsilon>0$, 使得当 $n>N$ 时, $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$.

注意

同一个命题中，如果既有“任意”又有“存在”，交换两个量词得到的命题跟原命题不等价!!!

数学的语言

例 (量词)

1. 存在实数 y, 对任意的实数 x, 使得 $x+y=x$.
2. 对任意的实数 x, 存在实数 y, 使得 $x+y=x$.
3. 对任意的实数 x, 存在实数 y, 使得 $x+y=0$.
4. 存在实数 y, 对任意的实数 x, 使得 $x+y=0$.
5. 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时, $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$.
6. 存在 $N>0$, 对任意的 $\varepsilon>0$, 使得当 $n>N$ 时, $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$.
7. 对任意的 $\varepsilon>0$, 当 $n>N$ 时, 存在 $N>0$, $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$.

注意

同一个命题中，如果既有“任意”又有“存在”，交换两个量词得到的命题跟原命题不等价!!!

数学的语言

注意 (量词的否定)

1. “对任意的 $x \in X$, $P(x)$ 为真”的否定是“存在 $x \in X$, 使得 $P(x)$ 的否定为真”

数学的语言

注意 (量词的否定)

1. “对任意的 $x \in X$, $P(x)$ 为真”的否定是“存在 $x \in X$, 使得 $P(x)$ 的否定为真”
2. “存在 $x \in X$, 使得 $P(x)$ 为真”的否定是“对任意的 $x \in X$, $P(x)$ 的否定为真”

数学的语言

注意 (量词的否定)

1. “对任意的 $x \in X$, $P(x)$ 为真” 的否定是 “存在 $x \in X$, 使得 $P(x)$ 的否定为真”
2. “存在 $x \in X$, 使得 $P(x)$ 为真” 的否定是 “对任意的 $x \in X$, $P(x)$ 的否定为真”

注意 (写出带有（多个）量词的命题的否定的方法)

按照命题中出现的顺序，把 “任意” 改成 “存在”，把 “存在” 改成 “任意”，各符号范围不变，最后的式子取否定

数学的语言

例

写出陈述的否定：存在实数 y, 使得对任意的实数 x, $x + y = 0$.

数学的语言

例

写出陈述的否定：存在实数 y，使得对任意的实数 x，$x + y = 0$.

解

对任意的实数 y，存在实数 x，使得 $x + y \neq 0$.

数学的语言

例

写出陈述的否定：存在实数 y, 使得对任意的实数 x, $x+y=0$.

解

对任意的实数 y, 存在实数 x, 使得 $x+y\neq 0$.

例

写出陈述的否定：对任意的实数 x, 存在实数 y, 使得 $x+y=0$.

数学的语言

例

写出陈述的否定：存在实数 y, 使得对任意的实数 x, $x+y=0$.

解

对任意的实数 y, 存在实数 x, 使得 $x+y\neq 0$.

例

写出陈述的否定：对任意的实数 x, 存在实数 y, 使得 $x+y=0$.

解

存在实数 x, 使得对任意的实数 y, $x+y\neq 0$.

数学的语言

例

写出陈述的否定：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

数学的语言

例

写出陈述的否定：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

解

存在 $\varepsilon > 0$, 使得对任意的 $N > 0$, 存在 $n > N$, 使得 $\left|\frac{1}{n} - 0\right| \geqslant \varepsilon$.

数学的语言

注意 (关于符号字母的使用)

减少叙述漏洞的小技巧有：

1. 确保每一个要使用的表示对象的字母符号，在使用时，这个符号必须是引入过的！
   引入符号的三种方式：

数学的语言

注意 (关于符号字母的使用)

减少叙述漏洞的小技巧有：

1. 确保每一个要使用的表示对象的字母符号，在使用时，这个符号必须是引入过的！
   引入符号的三种方式：
   1. 直接给出该符号的定义，例如：令 $x = 5$, 这句引入了符号 x; 又例如：取 y 是比 x 大的最小的整数，这句引入了符号 y

数学的语言

注意 (关于符号字母的使用)

减少叙述漏洞的小技巧有：

1. 确保每一个要使用的表示对象的字母符号，在使用时，这个符号必须是引入过的！
   引入符号的三种方式：
   1. 直接给出该符号的定义，例如：令 $x = 5$, 这句引入了符号 x; 又例如：取 y 是比 x 大的最小的整数，这句引入了符号 y
   2. 使用全称量词引入，例如：对任意的 $\varepsilon > 0$, ... 这句引入了符号 ε

数学的语言

注意 (关于符号字母的使用)

减少叙述漏洞的小技巧有：

1. 确保每一个要使用的表示对象的字母符号，在使用时，这个符号必须是引入过的！
   引入符号的三种方式：
   1. 直接给出该符号的定义，例如：令 $x = 5$, 这句引入了符号 x; 又例如：取 y 是比 x 大的最小的整数，这句引入了符号 y
   2. 使用全称量词引入，例如：对任意的 $\varepsilon > 0$, …… 这句引入了符号 ε
   3. 使用存在量词引入，例如：存在 $\delta > 0$, ….. 这句引入了符号 δ

数学的语言

注意 (关于符号字母的使用)

减少叙述漏洞的小技巧有：

1. 确保每一个要使用的表示对象的字母符号，在使用时，这个符号必须是引入过的！
   引入符号的三种方式：
   1. 直接给出该符号的定义，例如：令 $x = 5$, 这句引入了符号 x; 又例如：取 y 是比 x 大的最小的整数，这句引入了符号 y
   2. 使用全称量词引入，例如：对任意的 $\varepsilon > 0$, …… 这句引入了符号 ε
   3. 使用存在量词引入，例如：存在 $\delta > 0$, ….. 这句引入了符号 δ
2. 在一个符号的使用范围里，不要再次引入同一个符号！

数学的语言

例

证明：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

数学的语言

例

证明：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

一个糟糕的叙述.

对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, 令 $N = 1000$, 则当 $n > N$ 时，$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. $\square$

数学的语言：怎么证明带量词的命题

好的叙述.

✔ $a \in A$，因为对任意的 $x \in A$，$P(x)$ 成立，所以 $P(a)$ 成立。

□

数学的语言：怎么证明带量词的命题

好的叙述.

- ✔ $a \in A$, 因为对任意的 $x \in A$, $P(x)$ 成立，所以 $P(a)$ 成立。
- ✔ A 非空，因为对任意的 $x \in A$, $P(x)$ 成立，所以存在 $a \in A$, 使得 $P(a)$ 成立。

□

数学的语言：怎么证明带量词的命题

好的叙述.

- ✔ $a \in A$, 因为对任意的 $x \in A$, $P(x)$ 成立，所以 $P(a)$ 成立。
- ✔ A 非空，因为对任意的 $x \in A$, $P(x)$ 成立，所以存在 $a \in A$, 使得 $P(a)$ 成立。
- ✔ 因为存在 $x \in A$, 使得 $P(x)$ 成立，可取 $a \in A$, 使得 $P(a)$ 成立。

□

数学的语言：怎么证明带量词的命题

糟糕的叙述.

✘ 因为存在 $x \in A$, 使得 $P(x)$ 成立，所以对任意的 $x \in A$, $P(x)$ 成立。

$\square$

数学的语言：怎么证明带量词的命题

糟糕的叙述.

✘ 因为存在 $x \in A$，使得 $P(x)$ 成立，所以对任意的 $x \in A$，$P(x)$ 成立。

✘ 对任意的 $a \in A$，设 $a = 5$，则 a 是奇数，所以对任意的 $x \in A$，x 都是奇数。

□

数学的语言：怎么证明带量词的命题

糟糕的叙述.

- ✘ 因为存在 $x \in A$, 使得 $P(x)$ 成立，所以对任意的 $x \in A$, $P(x)$ 成立。
- ✘ 对任意的 $a \in A$, 设 $a = 5$, 则 a 是奇数，所以对任意的 $x \in A$, x 都是奇数。
- ✘ 因为存在 $x \in A$, 使得 $P(x)$ 成立, 可取 $a \in A$, 使得 $P(a)$ 成立，设 $a = 5$, 则 a^2 是奇数。

□

数学的语言：怎么证明带量词的命题

糟糕的叙述.

- ✘ 因为存在 $x \in A$, 使得 $P(x)$ 成立，所以对任意的 $x \in A$, $P(x)$ 成立。
- ✘ 对任意的 $a \in A$, 设 $a = 5$, 则 a 是奇数，所以对任意的 $x \in A$, x 都是奇数。
- ✘ 因为存在 $x \in A$, 使得 $P(x)$ 成立, 可取 $a \in A$, 使得 $P(a)$ 成立，设 $a = 5$, 则 a^2 是奇数。
- ✘ 因为存在 $x \in A$, 使得 $P(x)$ 成立, 可取 $a \in A$, 使得 $P(a)$ 成立，可取 $b \in A$, 使得 $P(b)$ 成立，因为 $a = b$，所以 $a^2 = b^2$.

□

数学的语言：怎么证明带量词的命题

糟糕的叙述.

- ✘ 因为存在 $x \in A$, 使得 $P(x)$ 成立，所以对任意的 $x \in A$, $P(x)$ 成立。
- ✘ 对任意的 $a \in A$, 设 $a = 5$, 则 a 是奇数，所以对任意的 $x \in A$, x 都是奇数。
- ✘ 因为存在 $x \in A$, 使得 $P(x)$ 成立, 可取 $a \in A$, 使得 $P(a)$ 成立，设 $a = 5$, 则 a^2 是奇数。
- ✘ 因为存在 $x \in A$, 使得 $P(x)$ 成立, 可取 $a \in A$, 使得 $P(a)$ 成立，可取 $b \in A$, 使得 $P(b)$ 成立，因为 $a = b$，所以 $a^2 = b^2$.
- ✘ 因为存在 $x \in A$, 使得 $P(x)$ 成立, 可取 $a \in A$, 使得 $P(a)$ 成立，因为存在 $x \in A$, 使得 $Q(x)$ 成立, 可取 $a \in A$, 使得 $Q(a)$ 成立，所以 $P(a)$ 与 $Q(a)$ 同时成立。

□

数学的语言：怎么证明带量词的命题

判断

判断下述推导过程是否合适。

1. 刚才看到有学生在上课的时候吃东西，这届学生素质很差。

数学的语言：怎么证明带量词的命题

判断

判断下述推导过程是否合适。

1. 刚才看到有学生在上课的时候吃东西，这届学生素质很差。
2. 这个教材有好几个定理的叙述不好，所以这不是一个本好教材。

数学的语言：怎么证明带量词的命题

判断

判断下述推导过程是否合适。

1. 刚才看到有学生在上课的时候吃东西，这届学生素质很差。
2. 这个教材有好几个定理的叙述不好，所以这不是一个本好教材。

注意

量词使用的时候，不要以偏概全！

数学的语言：怎么证明带量词的命题

判断

判断下述推导过程是否合适。

1. 刚才看到有学生在上课的时候吃东西，这届学生素质很差。
2. 这个教材有好几个定理的叙述不好，所以这不是一个本好教材。

注意

量词使用的时候，不要以偏概全！

评价其他人的时候也是如此！

数学的语言：怎么证明带量词的命题

例

已知 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足某条件，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

一个糟糕的证明.

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足某条件，所以存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
又因为 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足某条件，所以存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $g(\xi)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$.
两式相除，所以存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

□

数学的语言：怎么证明带量词的命题

例

证明：对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

数学的语言：怎么证明带量词的命题

例

证明：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

证明.

$\square$

数学的语言：怎么证明带量词的命题

例

证明：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

证明.

- 对任意的 $\varepsilon > 0$,

$\square$

数学的语言：怎么证明带量词的命题

例

证明：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

证明.

- 对任意的 $\varepsilon > 0$,
- 分析：当 $n > N$ 时，可推得 $\frac{1}{n} < \frac{1}{N}$.

□

数学的语言：怎么证明带量词的命题

例

证明：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

证明.

- 对任意的 $\varepsilon > 0$,
- 分析：当 $n > N$ 时，可推得 $\frac{1}{n} < \frac{1}{N}$.
- 因此，只要能取 N 使得 $\frac{1}{N} < \varepsilon$，也就是 $N > \frac{1}{\varepsilon}$ 就可以了

$\square$

数学的语言：怎么证明带量词的命题

例

证明：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

证明.

- 对任意的 $\varepsilon > 0$,
- 令 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$,

□

数学的语言：怎么证明带量词的命题

例

证明：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

证明.

- 对任意的 $\varepsilon > 0$,
- 令 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$,
- 则当 $n > N$ 时,

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

□

数学的语言：怎么证明带量词的命题

例

已知定义在自然数集上的函数 $x(n)$ 满足：

1. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(2n)| < \varepsilon$.
2. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(2n+1)| < \varepsilon$.

求证：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(n)| < \varepsilon$.

证明.

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(2n)| < \varepsilon$.

□

数学的语言：怎么证明带量词的命题

例

已知定义在自然数集上的函数 $x(n)$ 满足：

1. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(2n)| < \varepsilon$.
2. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(2n+1)| < \varepsilon$.

求证：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(n)| < \varepsilon$.

证明.

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(2n)| < \varepsilon$.

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(2n+1)| < \varepsilon$.

□

数学的语言：怎么证明带量词的命题

例

已知定义在自然数集上的函数 $x(n)$ 满足：

1. 对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，$|x(2n)| < \varepsilon$.
2. 对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，$|x(2n+1)| < \varepsilon$.

求证：对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，$|x(n)| < \varepsilon$.

证明.

对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，$|x(2n)| < \varepsilon$.

对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，$|x(2n+1)| < \varepsilon$.

则对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，$|x(n)| < \varepsilon$.

□

例

已知定义在自然数集上的函数 $x(n)$ 满足：

1. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(2n)| < \varepsilon$.
2. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(2n+1)| < \varepsilon$.

求证：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(n)| < \varepsilon$.

证明.

例

已知定义在自然数集上的函数 $x(n)$ 满足：

1. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(2n)| < \varepsilon$.
2. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(2n+1)| < \varepsilon$.

求证：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(n)| < \varepsilon$.

证明.

对任意的 $\varepsilon > 0$,

例

已知定义在自然数集上的函数 $x(n)$ 满足：

1. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(2n)| < \varepsilon$.
2. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(2n+1)| < \varepsilon$.

求证：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(n)| < \varepsilon$.

证明.

对任意的 $\varepsilon > 0$,

根据 (1), 存在 $N_1 > 0$, 使得当 $n > N_1$ 时，$|x(2n)| < \varepsilon$.

根据 (2), 存在 $N_2 > 0$, 使得当 $n > N_2$ 时，$|x(2n+1)| < \varepsilon$.

令 $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$,

例

已知定义在自然数集上的函数 $x(n)$ 满足：

1. 对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，$|x(2n)| < \varepsilon$.
2. 对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，$|x(2n+1)| < \varepsilon$.

求证：对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，$|x(n)| < \varepsilon$.

证明.

对任意的 $\varepsilon > 0$,

根据 (1)，存在 $N_1 > 0$，使得当 $n > N_1$ 时，$|x(2n)| < \varepsilon$.

根据 (2)，存在 $N_2 > 0$，使得当 $n > N_2$ 时，$|x(2n+1)| < \varepsilon$.

令 $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$,

则当 $n > N$ 时，

例

已知定义在自然数集上的函数 $x(n)$ 满足：

1. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(2n)| < \varepsilon$.
2. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(2n+1)| < \varepsilon$.

求证：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(n)| < \varepsilon$.

证明.

对任意的 $\varepsilon > 0$,

根据 (1), 存在 $N_1 > 0$, 使得当 $n > N_1$ 时，$|x(2n)| < \varepsilon$.

根据 (2), 存在 $N_2 > 0$, 使得当 $n > N_2$ 时，$|x(2n+1)| < \varepsilon$.

令 $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$,

则当 $n > N$ 时，

若 n 是偶数，则因为 $\frac{n}{2} > \frac{N}{2} \geqslant N_1$, 得 $|x(n)| < \varepsilon$.

若 n 是奇数，则因为 $\frac{n-1}{2} > \frac{N-1}{2} \geqslant N_2$, 得 $|x(n)| < \varepsilon$.

数学的语言

注意 (再次提醒)

1. 确保每一个要使用的表示对象的字母符号，在使用时，这个符号必须是引入过的！
2. 一个符号一旦被引入，就不可以再进行修改，只能使用引入该符号时该符号所被确定的性质
3. 重复引入同一个符号，将使得自再次引入之处，符号的含义与再次引入之前失去联系
4. “对任意的 $x \in A$, $P(x)$ 成立”，等价于“对任意的 $y \in A$, $P(y)$ 成立”
5. “存在 $x \in A$, 使得 $P(x)$ 成立”，等价于“存在 $y \in A$, 使得 $P(y)$ 成立”

数学的语言

注意

1. 证明题是一种练习，要多做练习，才能熟练掌握
2. 你做证明题的目的不是证明给我看，而是要证明给自己看，证明给同学看，要做到自己能够接受自己的证明，自己能被自己的证明说服；证明给别的想知道原因的人看，别人要能在不用你做进一步解释的情况下看懂
3. 证明时只能使用公理或者已经证明过的结论，特别的，在学某一章节时不能使用该章节之后的东西来证明本章节的内容
4. 证明过程不要使用未经证明的结论；若确实需要该结论，请先证明该结论
5. 证明过程不要使用“显然”两个字

数学的语言

作业

1. 已知 $A > B$, 定义在自然数集上的函数 $x(n)$ 满足：对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(n) - A| < \varepsilon$. 求证：存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，，$x(n) > B$.
2. 已知定义在自然数集上的函数 $x(n)$ 以及实数 A,B, 满足：
   1. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(n) - A| < \varepsilon$.
   2. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(n) - B| < \varepsilon$.

   求证：$A = B$.
3. 已知定义在自然数集上的函数 $x(n)$ 满足：存在实数 A, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，$|x(n) - A| < \varepsilon$. 求证：存在实数 $M > 0$, 使得对任意的自然数 n, $|x(n)| < M$.

数学的语言：集合

事实 (朴素的集合)

一般把若干对象 (元素) 放在一起构成的整体，作为一个新的对象，称为集合。

数学的语言：集合

事实 (朴素的集合)

一般把若干对象 (元素) 放在一起构成的整体，作为一个新的对象，称为集合。

注意

1. 集合中的元素不必是具体的事物，也可以是抽象的对象，甚至集合也可以作为集合的元素。
2. 对具体一个集合而言，一个对象或在此集合中，或不在此集合中，二者必居其一：A 是集合当且仅当：$x \in A$ 是关于 x 的命题函数。
3. 确定一个集合，当且仅当确定了集合的元素。

数学的语言：集合

注意

本课程常用的符号：

1. $\mathbb{N}$: 自然数集
2. $\mathbb{Z}$: 整数集
3. $\mathbb{Q}$: 有理数集
4. $\mathbb{R}$: 实数集
5. $\mathbb{C}$: 复数集
6. 区间

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\} \qquad [a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a\leqslant x<b\}$$
$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a<x\leqslant b\} \qquad [a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a\leqslant x\leqslant b\}$$
$$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}:x>a\} \qquad [a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}:x\geqslant a\}$$
$$(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}:x<b\} \qquad (-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}:x\leqslant b\}$$
$$(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}=\{x\in\mathbb{R}:-\infty<x<+\infty\}$$

数学的语言：映射

定义 (课本第 9 页，定义 1.2.1)

X,Y 是两个给定的非空集合。对集合 X 中每一个元素，都存在集合 Y 中唯一一个元素和它对应，这个对应的关系 f，称为从 X 到 Y 的映射（函数）。记为 $f: X \to Y$.

数学的语言：映射

定义 (课本第 9 页，定义 1.2.1)

X,Y 是两个给定的非空集合。对集合 X 中每一个元素，都存在集合 Y 中唯一一个元素和它对应，这个对应的关系 f，称为从 X 到 Y 的映射（函数）。记为 $f: X \to Y$.

定义 (定义域)

f 为从 X 到 Y 的映射，则称 X 是 f 的定义域。

数学的语言：映射

定义 (课本第 9 页，定义 1.2.1)

X,Y 是两个给定的非空集合。对集合 X 中每一个元素，都存在集合 Y 中唯一一个元素和它对应，这个对应的关系 f，称为从 X 到 Y 的映射（函数）。记为 $f: X \to Y$.

定义 (定义域)

f 为从 X 到 Y 的映射，则称 X 是 f 的定义域。

注意

本课程讨论主要是定义域是实数集的子集的映射。

数学的语言：映射

定义（像、值域）

f 为从 X 到 Y 的映射，对 $x \in X$，称 $f(x)$ 为 x 的在映射 f 下的像。
X 的元素在映射 f 下的像的全体称为 f 的值域，记为

$$\operatorname{ran} f = \{y \in Y : \exists x \in X, y = f(x)\}$$

数学的语言：映射

定义（像、值域）

f 为从 X 到 Y 的映射，对 $x \in X$, 称 $f(x)$ 为 x 的在映射 f 下的像。
X 的元素在映射 f 下的像的全体称为 f 的值域，记为

$$\operatorname{ran} f = \{y \in Y : \exists x \in X, y = f(x)\}$$

定义（原像）

对 $y \in Y$, 称以 y 为像的元素的全体为 y 的原像，记为 $f^{-1}(y)$,

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : y = f(x)\}$$

集合的原像指的是集合中所有元素的原像的并。$A \subset Y$, 则

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$$

数学的语言：映射

注意

两个映射有相同的定义域，相同的对应规则，就意味着对应关系是一样的，就是同一个映射。

例

1. $y = \pi x^2,\ x \in [0, +\infty)$
2. $A = \pi R^2,\ R \in [0, +\infty)$

数学的语言：映射

定义

$f: X \to Y$ 是一个映射，$g: X \to Y$ 是另一个映射，$D \subset X$，且对任意的 $x \in D$，有 $f(x) = g(x)$，称 f 和 g 在 D 上相等，记为 $f|_D = g|_D$.

例

1. 在 $(-\infty, +\infty)$ 上，$f(x) = 2\cos^2 x - 1$ 和 $g(x) = 1 - 2\sin^2 x$ 相等
2. 在 $(0, +\infty)$ 上，$f(x) = |x|$ 和 $g(x) = x$ 相等

数学的语言：映射

例 (绝对值函数)

绝对值函数 $|\cdot|$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \begin{cases} x, & \text{如果} x > 0 \\ 0, & \text{如果} x = 0 \\ -x, & \text{如果} x < 0 \end{cases}.$$

例 (符号函数)

符号函数 sgn,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{如果} x > 0 \\ 0, & \text{如果} x = 0 \\ -1, & \text{如果} x < 0 \end{cases}.$$

数学的语言：映射

例 (高斯函数)

高斯函数 $[\cdot]$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}.$$

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。(x 的整数部分。)

数学的语言：映射

例 (集合的特征函数)

全集是 X, $A \subset X$, 集合 A 的特征函数,

$$\forall x \in X, \chi(x) = \begin{cases} 1, & 如果 x \in A \\ 0, & 如果 x \notin A \end{cases}.$$

例 (狄里克莱 (Dirichlet) 函数)

狄里克莱 (Dirichlet) 函数,

$$\forall x \in \mathbb{R}, D(x) = \begin{cases} 1, & 如果 x \in \mathbb{Q} \\ 0, & 如果 x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

数学的语言：映射

例 (黎曼 (Riemann) 函数)

黎曼 (Riemann) 函数

$$\forall x \in \mathbb{R}, R(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & x \in \mathbb{Q}, p = \min\{n \in \mathbb{Z}^+ : nx \in \mathbb{Z}\} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

数学的语言：映射

例

函数 $x:\{1,2\}\to\mathbb{R}$，记 $x_1=x(1)$，$x_2=x(2)$，则函数 x 可表示为 (x_1,x_2).

数学的语言：映射

例

函数 $x:\{1,2\}\to\mathbb{R}$, 记 $x_1=x(1)$, $x_2=x(2)$, 则函数 x 可表示为 (x_1,x_2).

例

函数 $x:\{1,2,3\}\to\mathbb{R}$, 记 $x_1=x(1)$, $x_2=x(2)$,$x_3=x(3)$, 则函数 x 可表示为 (x_1,x_2,x_3).

数学的语言：映射

例 (数列)

函数 $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, 对任意的自然数 n, 记 $x_n = x(n)$, 则函数 x 可表示为

$$x_0, x_1, x_2, \cdots$$

称为数列，可记为 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$.

数学的语言：映射

例 (数列)

函数 $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, 对任意的自然数 n, 记 $x_n=x(n)$, 则函数 x 可表示为

$$x_0, x_1, x_2, \cdots$$

称为数列，可记为 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$.

例 (函数列)

集合 X 中的元素都是函数，函数 $f:\mathbb{N}\to X$, 对任意的自然数 n, 记 $f_n=f(n)$, 则函数 f 可表示为

$$f_0, f_1, f_2, \cdots$$

称为函数列，可记为 $\{f_n\}_{n=0}^{+\infty}$.

数学的语言：映射

定义 (复合函数)

若 f 为从 X 到 Y 的映射，g 为从 Y 到 Z 的映射，则映射

$$x \mapsto g(f(x))$$

是 X 到 Z 的映射, 称为 f 和 g 的复合函数，记为 $g \circ f$. 对任意的 $x \in X$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

数学的语言： 映射

定义 (复合函数)

若 f 为从 X 到 Y 的映射，g 为从 Y 到 Z 的映射，则映射

$$x \mapsto g(f(x))$$

是 X 到 Z 的映射, 称为 f 和 g 的复合函数，记为 $g \circ f$. 对任意的 $x \in X$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

注意

一般来说，$g \circ f \neq f \circ g$.
例如:$f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, 则

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sin x^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$$

数学的语言：映射

定义 (单射)

f 为从 X 到 Y 的映射，若对 X 中任意的 x_1,x_2，如果 $x_1 \neq x_2$，则 $f(x_1) \neq f(x_2)$，称 f 是单射 (injection)，$1-1$ 映射 ($1-1$ mapping)。

数学的语言：映射

定义 (单射)

f 为从 X 到 Y 的映射，若对 X 中任意的 x_1,x_2，如果 $x_1 \neq x_2$，则 $f(x_1) \neq f(x_2)$，称 f 是单射 (injection)，$1-1$ 映射 ($1-1$ mapping)。

注意

若 f 是单射，则对任意的 $y \in \operatorname{ran} f$，$f^{-1}(y)$ 是 X 的独点集。这确定了一个从 $\operatorname{ran} f$ 到 X 的映射，用 f^{-1} 表示。

于是，对任意的 $y \in \operatorname{ran} f$，

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

对任意的 $x \in X$，则有

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

数学的语言：映射

定义（满射）

f 为从 X 到 Y 的映射，若对任意的 $y \in Y$，存在 $x \in X$，使得 $f(x) = y$，称 f 是满射 (surjection)，到上 (onto) 的映射。

数学的语言：映射

定义（满射）

f 为从 X 到 Y 的映射，若对任意的 $y \in Y$, 存在 $x \in X$, 使得 $f(x) = y$, 称 f 是满射 (surjection)，到上 (onto) 的映射。

注意

若 f 是满射，则 $\operatorname{ran} f = Y$.

数学的语言：映射

定义（双射）

f 为从 X 到 Y 的映射，f 既是单射，又是满射，称 f 为从 X 到 Y 的双射 (bijection)，又称为 $1-1$ 对应 ($1-1$ correspondence)。

数学的语言：映射

定义 (双射)

f 为从 X 到 Y 的映射，f 既是单射，又是满射，称 f 为从 X 到 Y 的双射 (bijection)，又称为 $1-1$ 对应 ($1-1$ correspondence)。

定义 (反函数)

若 f 是 $1-1$ 对应，则 f^{-1} 称为 f 的逆映射，或者反函数 (inverse function)。

数学的语言：映射

定义 (双射)

f 为从 X 到 Y 的映射，f 既是单射，又是满射，称 f 为从 X 到 Y 的双射 (bijection)，又称为 $1-1$ 对应 ($1-1$ correspondence)。

定义 (反函数)

若 f 是 $1-1$ 对应，则 f^{-1} 称为 f 的逆映射，或者反函数 (inverse function)。

定义

双射与双射的复合，还是双射。
若 f 为从 X 到 Y 的双射，g 为从 Y 到 Z 的双射，则 $g\circ f$ 是从 X 到 Z 的双射。

数学的语言：映射

注意

f 为从 X 到 Y 的双射，$f : X \to Y$
当且仅当
f^{-1} 为从 Y 到 X 的双射，$f^{-1} : Y \to X$

数学的语言： 映射

注意

f 为从 X 到 Y 的双射，$f: X \to Y$
当且仅当
f^{-1} 为从 Y 到 X 的双射，$f^{-1}: Y \to X$

注意

若 f 为从 X 到 Y 的双射，（或 f^{-1} 为从 Y 到 X 的双射），则

1. 对任意的 $x \in X$，有
$$f^{-1}(f(x)) = x$$
2. 对任意的 $y \in Y$，有
$$f(f^{-1}(y)) = y$$

数学的语言：映射

判断

下面哪个是正确叙述？

1. $y = f^{-1}(x),\ x \in Y$ 是 $y = f(x)$，$x \in X$ 的反函数
2. $x = f^{-1}(y),\ y \in Y$ 是 $y = f(x)$，$x \in X$ 的反函数

数学的语言：映射

注意

学数学要有直觉但要摒弃直觉

数学的语言：映射

定义 (可数集、基数)

如果一个集合与自然数集之间存在一个 $1-1$ 到上的映射（双射），称这个集合是可数集，或者可列集。
称这个集合的势 (基数，cardinal) 是 $\aleph_0$ （读作：阿列夫 0）。

数学的语言：映射

定义 (可数集、基数)

如果一个集合与自然数集之间存在一个 $1-1$ 到上的映射（双射），称这个集合是可数集，或者可列集。

称这个集合的势 (基数，cardinal) 是 $\aleph_0$ （读作：阿列夫 0）。

注意

若 X 是可数集，x 是从自然数集 $\mathbb{N}$ 到 X 的 $1-1$ 对应，则

$$\{x(n) : n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{ran} x = X$$

把集合中的元素，按照自然数集中对应的顺序 (原像的顺序)，依次写出来

$$x(0), x(1), x(2), x(3), \cdots$$

在这个数列中，X 中所有元素都出现，每个元素都只出现一次。

数学的语言：映射

注意 (简易版本)

X 是一个集合，若可以把集合 X 中的元素，依次写出来

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots$$

使得在这个数列中，X 中所有元素都出现，且每个元素都只出现一次。就相当于在 X 与自然数集 $\mathbb{N}$ 之间建立了一个 $1-1$ 对应，那么这个集合 X 就是可数集。

数学的语言：映射

注意 (简易版本)

X 是一个集合，若可以把集合 X 中的元素，依次写出来

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots$$

使得在这个数列中，X 中所有元素都出现，且每个元素都只出现一次。就相当于在 X 与自然数集 $\mathbb{N}$ 之间建立了一个 $1-1$ 对应，那么这个集合 X 就是可数集。

例

正自然数集（正整数集）$\mathbb{N}^+$ 是可数集。

数学的语言：映射

注意 (简易版本)

X 是一个集合，若可以把集合 X 中的元素，依次写出来

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots$$

使得在这个数列中，X 中所有元素都出现，且每个元素都只出现一次。就相当于在 X 与自然数集 $\mathbb{N}$ 之间建立了一个 $1-1$ 对应，那么这个集合 X 就是可数集。

例

正自然数集（正整数集）$\mathbb{N}^+$ 是可数集。

例

正偶数集是可数集。

数学的语言：映射

例

求整数集 $\mathbb{Z}$ 和自然数集 $\mathbb{N}$ 之间的一个双射及其逆映射。

数学的语言：映射

例

求整数集 $\mathbb{Z}$ 和自然数集 $\mathbb{N}$ 之间的一个双射及其逆映射。

提示

把整数集 $\mathbb{Z}$ 按照下面的顺序排列：

$$0,\quad 1,\quad -1,\quad 2,\quad -2,\quad 3,\quad -3,\quad \cdots$$

与自然数对应

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad \cdots$$

数学的语言：映射

思考讨论 (Hilbert 旅馆)

Hilbert 旅馆有无穷多个房间，里面住满了客人。此时又来了一位客人，旅店老板通过一个巧妙的安排，成功的把这个客人安排进了旅馆里。他是怎么做到的？

数学的语言：映射

定理

1. 任何无穷集都包含有可数集。
2. 可数集和有限集的并是可数集。
3. 可数集和可数集的并是可数集。
4. 有限多个可数集的并是可数集。
5. 可数多个有限集的并是至多可数集。
6. 可数多个可数集的并是可数集。

数学的语言：映射

定理

有理数集是可数集。

数学的语言：映射

定理

有理数集是可数集。

提示

$$
\begin{array}{cccccccc}
0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \cdots \\
\frac{0}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{-1}{2}, & \frac{2}{2}, & \frac{-2}{2}, & \frac{3}{2}, & \frac{-3}{2}, & \cdots \\
\frac{0}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{-1}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{-2}{3}, & \frac{3}{3}, & \frac{-3}{3}, & \cdots \\
\frac{0}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{-1}{4}, & \frac{2}{4}, & \frac{-2}{4}, & \frac{3}{4}, & \frac{-3}{4}, & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

数学的语言：映射

定义（不可数集）

如果一个无穷集合不是可数集，就称为是一个不可数集。

数学的语言：映射

定义 (不可数集)

如果一个无穷集合不是可数集，就称为是一个不可数集。

定理

1. 可数集和不可数集的并是不可数集。
2. 不可数集和不可数集的并是不可数集。
3. 任意多个不可数集的并是不可数集。

数学的语言：映射

定理

实数集是不可数集。

数学的语言：映射

定理

实数集是不可数集。

提示

假设 $(0,1)$ 是可数集，则可以列出来为：$a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}a_{04}\cdots \\ a_1 &= 0.a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots \\ a_2 &= 0.a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}a_{14}\cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

对任意的 $n \in \mathbb{N}$，令 $b_n = \begin{cases} 3, & \text{若} a_{nn} \neq 3 \\ 2, & \text{若} a_{nn} = 3 \end{cases}$，则 $b = 0.b_0b_1b_2b_3\cdots$ 没有被列出来过。

数学的语言：映射

多个集合的交和并.

设 S 表示一组集合：对任意的 $A \in S$, A 是一个集合。

数学的语言：映射

多个集合的交和并.

设 S 表示一组集合：对任意的 $A \in S$, A 是一个集合。

1. $\bigcup S = \{x : 存在A \in S, 使得x \in A\}$, 也可表示为 $\bigcup S = \bigcup\limits_{A \in S} A$

数学的语言： 映射

多个集合的交和并.

设 S 表示一组集合：对任意的 $A \in S$, A 是一个集合。

1. $\bigcup S = \{x : 存在A \in S, 使得x \in A\}$, 也可表示为 $\bigcup S = \bigcup\limits_{A \in S} A$
2. $\bigcap S = \{x : 对任意的A \in S, x \in A\}$, 也可表示为 $\bigcap S = \bigcap\limits_{A \in S} A$

数学的语言：映射

多个集合的交和并.

设 S 表示一组集合：对任意的 $A \in S$, A 是一个集合。

1. $\bigcup S = \{x : 存在A \in S, 使得x \in A\}$, 也可表示为 $\bigcup S = \bigcup_{A \in S} A$
2. $\bigcap S = \{x : 对任意的A \in S, x \in A\}$, 也可表示为 $\bigcap S = \bigcap_{A \in S} A$
3. 若 S 是有限集，设 $S = \{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n\}$,

数学的语言： 映射

多个集合的交和并.

设 S 表示一组集合：对任意的 $A \in S$, A 是一个集合。

1. $\bigcup S = \{x : 存在A \in S, 使得x \in A\}$, 也可表示为 $\displaystyle\bigcup S = \bigcup_{A\in S} A$
2. $\bigcap S = \{x : 对任意的A \in S, x \in A\}$, 也可表示为 $\displaystyle\bigcap S = \bigcap_{A\in S} A$
3. 若 S 是有限集，设 $S = \{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n\}$,

$$\bigcup S = \bigcup_{A\in S} A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \bigcap S = \bigcap_{A\in S} A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

数学的语言：映射

多个集合的交和并.

设 S 表示一组集合：对任意的 $A \in S$, A 是一个集合。

1. $\bigcup S = \{x : 存在A \in S, 使得x \in A\}$, 也可表示为 $\bigcup S = \bigcup_{A \in S} A$
2. $\bigcap S = \{x : 对任意的A \in S, x \in A\}$, 也可表示为 $\bigcap S = \bigcap_{A \in S} A$
3. 若 S 是有限集，设 $S = \{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n\}$,
$$\bigcup S = \bigcup_{A \in S} A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \bigcap S = \bigcap_{A \in S} A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$
4. 若 S 是可数集，设 $S = \{A_1, A_2, A_3, \cdots\}$,

数学的语言：映射

多个集合的交和并.

设 S 表示一组集合：对任意的 $A \in S$, A 是一个集合。

1. $\bigcup S = \{x : 存在A \in S, 使得x \in A\}$, 也可表示为 $\displaystyle\bigcup S = \bigcup_{A\in S} A$
2. $\bigcap S = \{x : 对任意的A \in S, x \in A\}$, 也可表示为 $\displaystyle\bigcap S = \bigcap_{A\in S} A$
3. 若 S 是有限集，设 $S = \{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n\}$,
$$\bigcup S = \bigcup_{A\in S} A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \bigcap S = \bigcap_{A\in S} A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$
4. 若 S 是可数集，设 $S = \{A_1, A_2, A_3, \cdots\}$,
$$\bigcup S = \bigcup_{A\in S} A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i, \qquad \bigcap S = \bigcap_{A\in S} A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$$

$\square$

数学的语言：映射

定义 (朴素的集合)

把有共同特征的对象放在一起组成的整体是一个对象，集合。

数学的语言：映射

定义 (朴素的集合)

把有共同特征的对象放在一起组成的整体是一个对象，集合。

判断

所有集合组成的全体是一个集合。

数学的语言：映射

注意

如果 S 是个集合，那么 $x \in S$ 是关于 x 的命题函数。

数学的语言：映射

注意

如果 S 是个集合，那么 $x \in S$ 是关于 x 的命题函数。

例

设 $A = \{1, 2, \{3\}\}$, 那么下面的这些应该都是命题：

数学的语言：映射

注意

如果 S 是个集合，那么 $x \in S$ 是关于 x 的命题函数。

例

设 $A = \{1, 2, \{3\}\}$, 那么下面的这些应该都是命题：

1. $1 \in A$

数学的语言：映射

注意

如果 S 是个集合，那么 $x \in S$ 是关于 x 的命题函数。

例

设 $A = \{1, 2, \{3\}\}$, 那么下面的这些应该都是命题：

1. $1 \in A$
2. $3 \in A$

数学的语言：映射

注意

如果 S 是个集合，那么 $x \in S$ 是关于 x 的命题函数。

例

设 $A = \{1, 2, \{3\}\}$, 那么下面的这些应该都是命题：

1. $1 \in A$
2. $3 \in A$
3. $\{3\} \in A$

数学的语言： 映射

注意

如果 S 是个集合，那么 $x \in S$ 是关于 x 的命题函数。

例

设 $A = \{1, 2, \{3\}\}$, 那么下面的这些应该都是命题：

1. $1 \in A$
2. $3 \in A$
3. $\{3\} \in A$
4. $|\cdot| \in A$

数学的语言： 映射

注意

如果 S 是个集合，那么 $x \in S$ 是关于 x 的命题函数。

例

设 $A = \{1, 2, \{3\}\}$, 那么下面的这些应该都是命题：

1. $1 \in A$
2. $3 \in A$
3. $\{3\} \in A$
4. $|\cdot| \in A$
5. $A \in A$

数学的语言： 映射

一个重要的例子.

设 S 表示由所有自己不是自己元素的集合组成的集合。

$$S = \{\text{集合}A : A \notin A\}$$

□

数学的语言：映射

一个重要的例子.

设 S 表示由所有自己不是自己元素的集合组成的集合。

$$S = \{\text{集合}A : A \notin A\}$$

□

判断

1. $S \in S$
2. $S \notin S$

数学的语言：映射

一个重要的例子.

设 S 表示由所有自己不是自己元素的集合组成的集合。

$$S=\{集合A:A\notin A\}$$

□

判断

1. $S\in S$

$\Longrightarrow$ S 作为 S 的元素，应该有 $S\notin S$

2. $S\notin S$

数学的语言：映射

一个重要的例子.

设 S 表示由所有自己不是自己元素的集合组成的集合。

$$S = \{\text{集合}A : A \notin A\}$$

□

判断

1. $S \in S$

2. $S \notin S$

$\Longrightarrow$ S 作为非 S 的元素，应该有 $S \in S$

数学的语言：映射

一个重要的例子.

设 S 表示由所有自己不是自己元素的集合组成的集合。

$$S=\{\text{集合}A:A\notin A\}$$

□

判断

1. $S\in S$
2. $S\notin S$

上面两个都能推出自己的否定，因此都不是命题！这说明，S 不是个集合！

数学的语言：映射

注意

数学不承认法力无边、全能的存在！

数学的语言：映射

思考讨论

搜索康托尔（Cantor），了解康托儿对集合论、无穷理论的贡献。

思考讨论

搜索了解罗素悖论。

数学的语言：映射