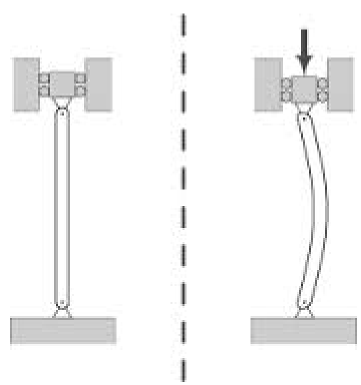
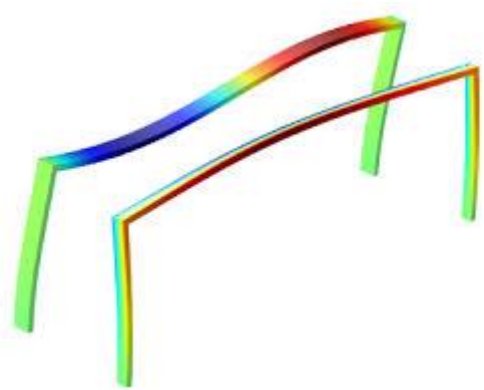
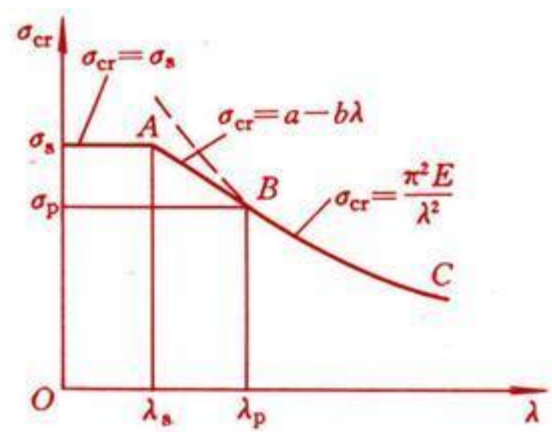
过程设备机械设计基础

6. 压杆稳定

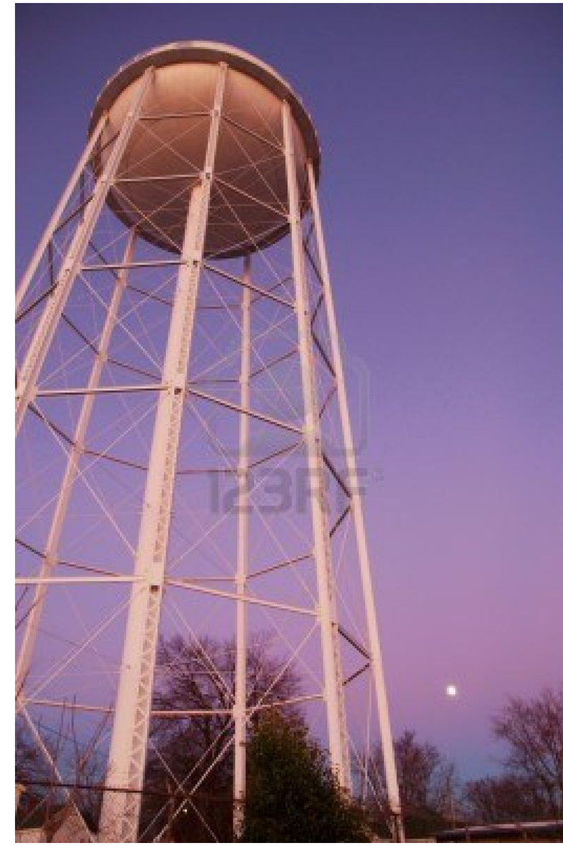






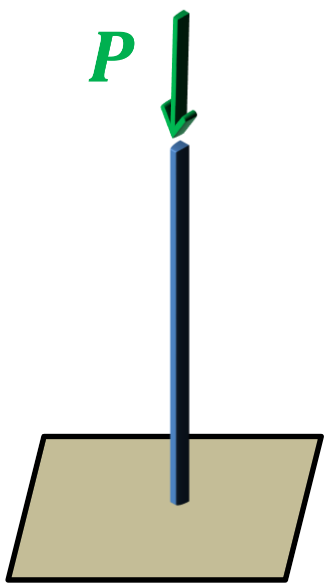
各类受压杆

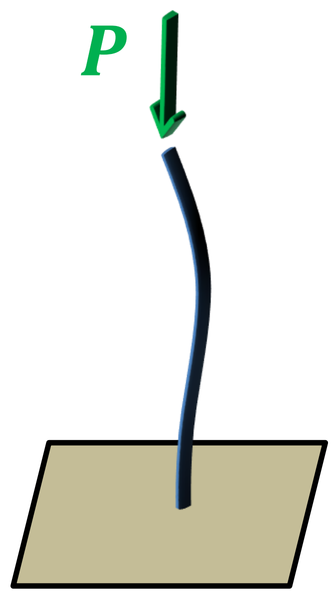
- 机场屋顶支撑结构



- 支柱式水塔

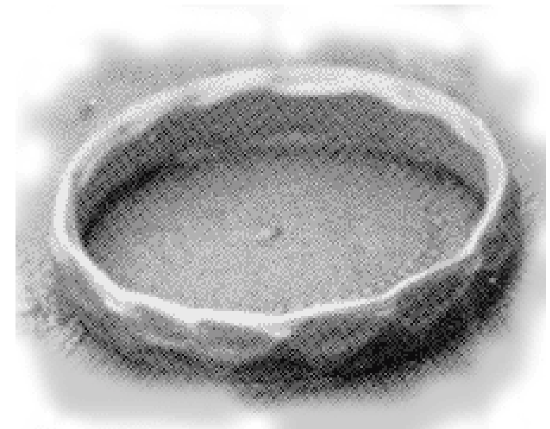
压杆失稳的概念（Buckling）





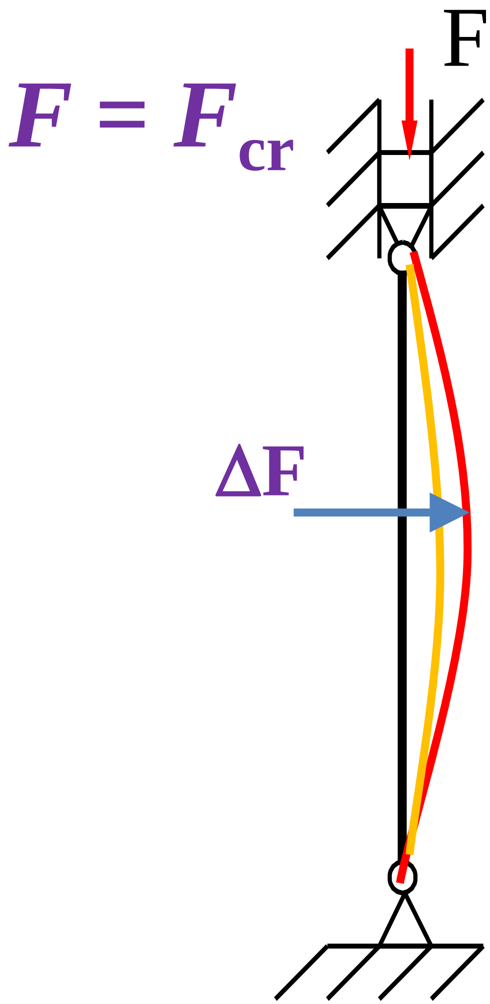
压杆失稳：杆件在低于屈服应力条件时，由于横向弯曲变形导致的失效行为。

压杆失稳案例



工程师之戒：在魁北克大桥第三次竣工后，加拿大的七大工程学院一起出钱将建桥过程中倒塌的残骸全部买下，并把这些钢材打造成一枚枚戒指，发给每年从工程系毕业的学生。

临界压力的相关因素



- 与压杆长度有关
- 与弹性模量有关
- 与截面面积有关
- 与支承形式有关

欧拉公式

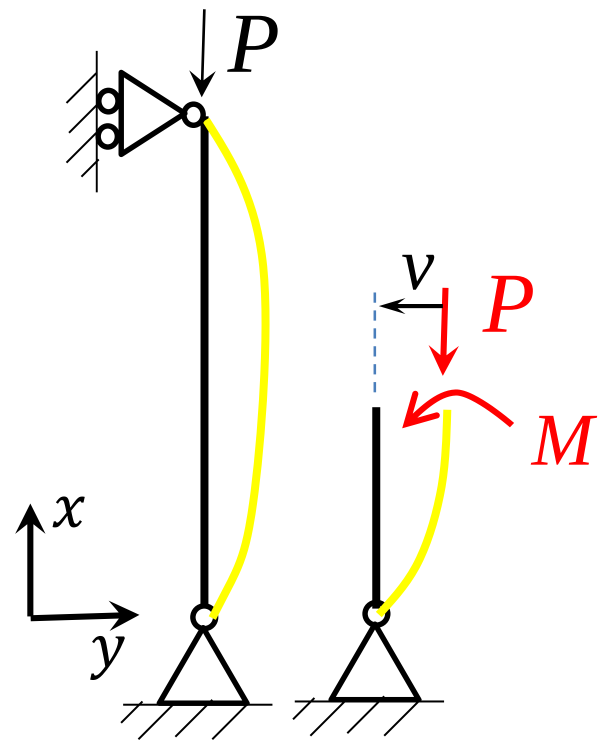
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

$$M = EI\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}x^2}$$

$$M - P(-v) = EI\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}x^2} + Pv = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{P}{EI}v = 0$$

$$v = C_1 \sin\left(\sqrt{P/EI}\,x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{P/EI}\,x\right)$$

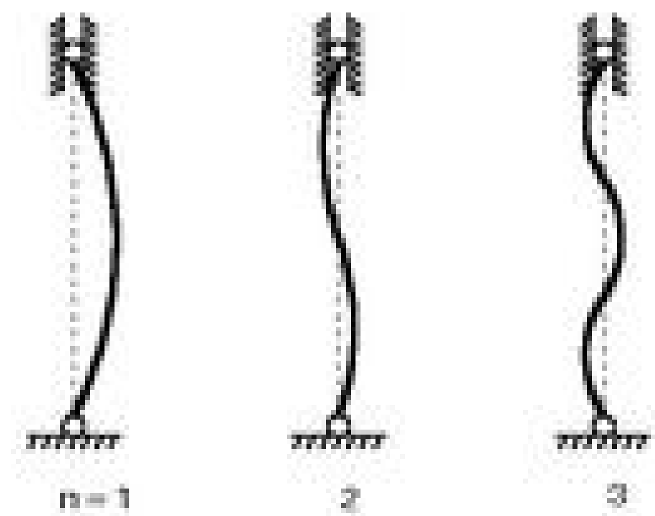


欧拉公式

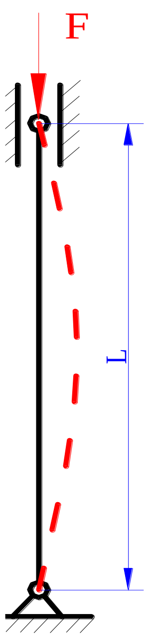
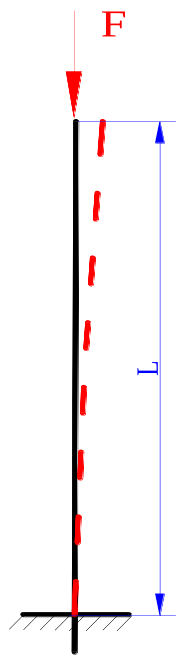
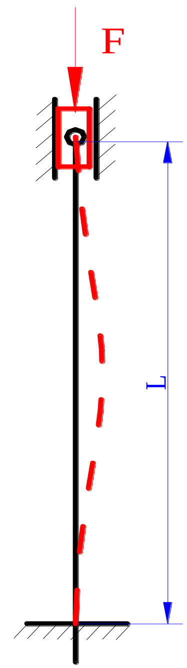
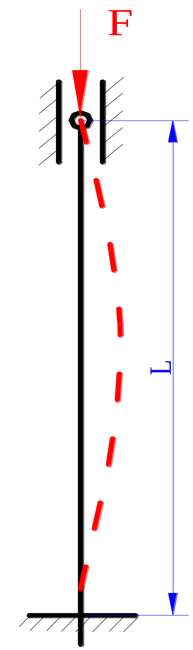
当 $x = 0$ 时， $v = 0 \;\Rightarrow C_2 = 0$

当 $x = l$ 时， $v = 0 \;\Rightarrow \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}l\right) = 0$

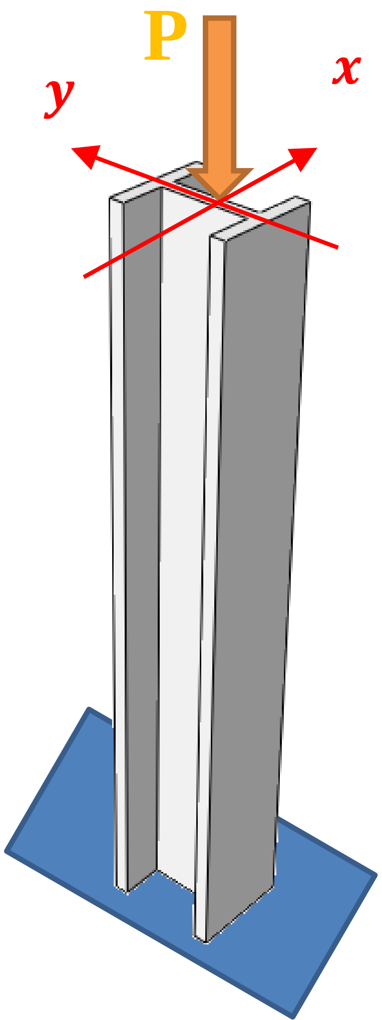
$$\therefore \sqrt{\frac{P}{EI}}l = n\pi \qquad P = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}$$



各种支承条件下的μ值

两端铰支	一端固定,一端自由	两端固定	一端固定,一端铰支
			
$\mu=1$	$\mu=2$	$\mu=0.5$	$\mu=0.7$

如图所示一端固定、一端自由的工字钢受压杆件，其中$I_x = 2370\text{cm}^4$，$I_y = 158\text{cm}^4$，截面积$A = 35.578\text{cm}^2$，梁长1m。材料的弹性模量$E = 200\text{GPa}$，屈服强度为200MPa，求杆件的最大许用压力P。



$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_y}{(\mu l)^2} = 779698N$$

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = 219.15\text{MPa} > \sigma_s$$

$$\therefore\ P_{max} = \sigma_s A = 711560N$$

欧拉公式的适用范围

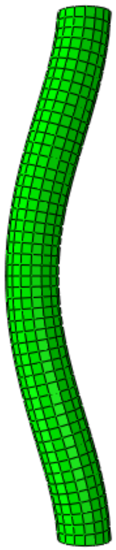
临界应力： $\sigma_{cr} = \dfrac{F_{cr}}{A} = \dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A}$

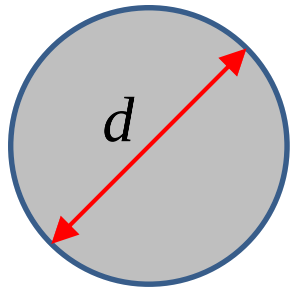
定义截面惯性半径为： $i = \sqrt{I/_A}$

则压杆柔度 $\lambda = \dfrac{\mu l}{i} = \mu l\sqrt{\dfrac{A}{I}}$

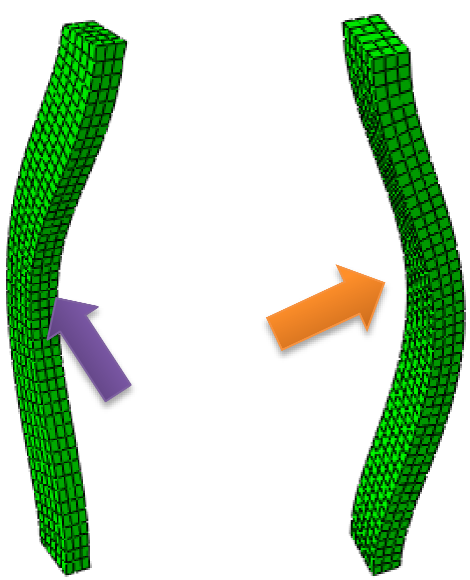
简化后的欧拉公式： $\sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

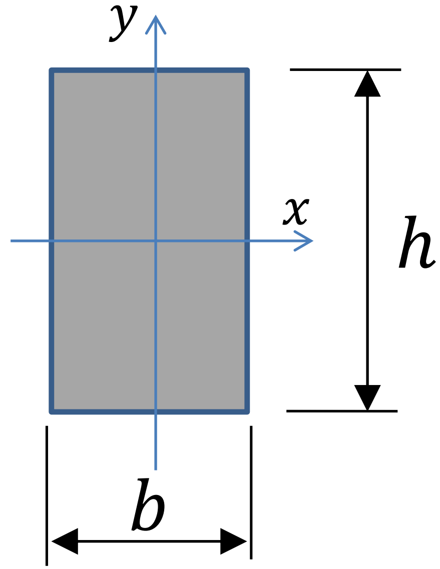
求截面惯性半径i





$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d}{4}$$





$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \frac{b}{\sqrt{12}}$$

欧拉公式的适用范围

弹性条件下： $\sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_p$

因此欧拉公式的适用范围为： $\lambda \ge \lambda_p = \sqrt{\dfrac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$

Q235钢弹性模量为$E = 206\text{GPa}$，比例极限$\sigma_p = 200\text{MPa}$，截面尺寸为$1 \times 1\ \text{mm}^2$，求临界失稳长度（$\mu = 1$）

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} \ge \sqrt{\pi^2 E/\sigma_p} \approx 100 \qquad l \ge \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{A\sigma_p}} \approx 29\ \text{mm}$$

欧拉公式的适用范围

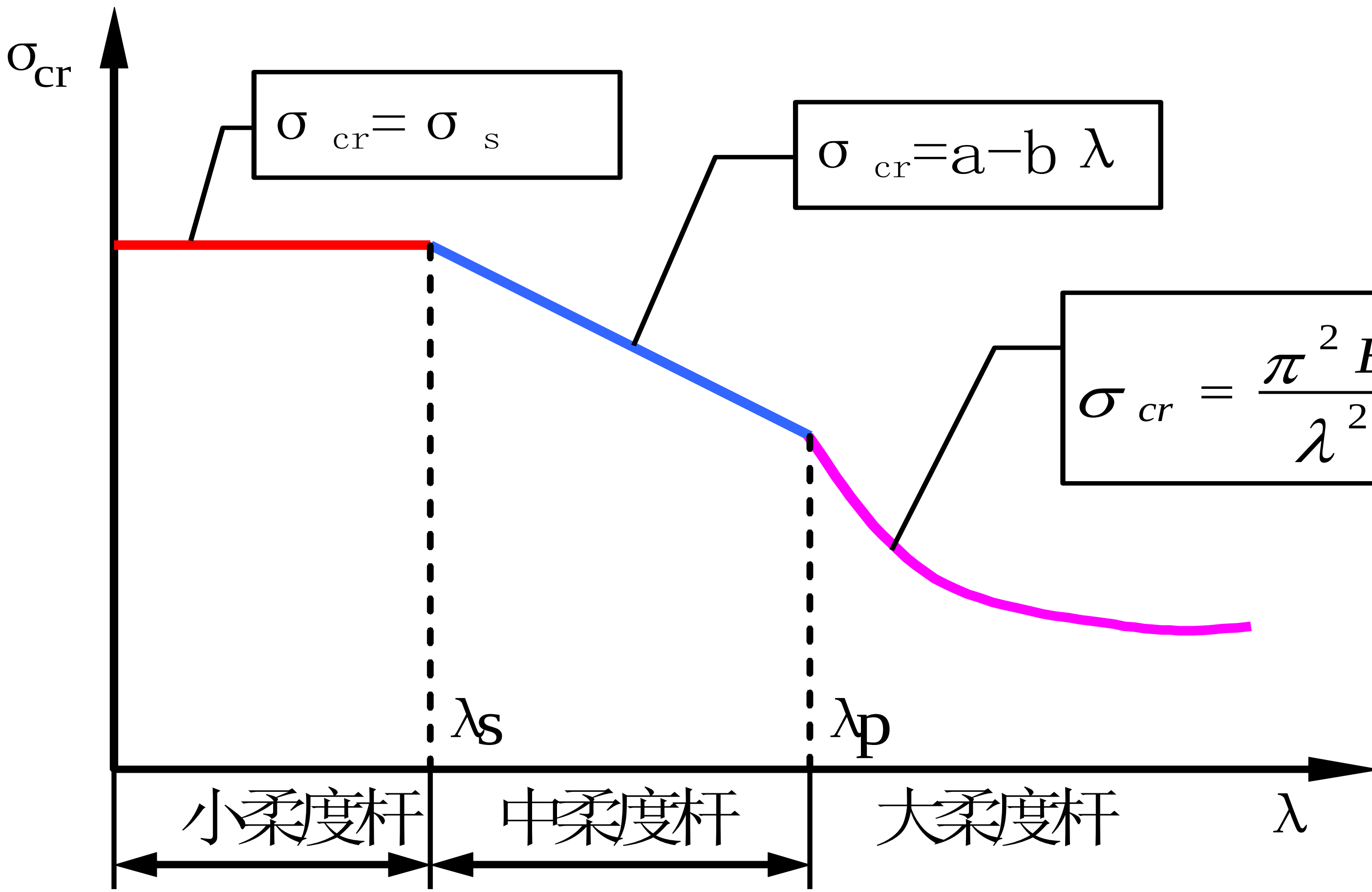
如果 $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ 时压杆发生屈服

将这时的压杆柔度称为 λ_s

$$\lambda_s = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_s}}$$

因此对柔度$\lambda \le \lambda_s$的压杆，不存在稳定性问题，而是强度问题。

压杆分类



σ_{cr}
$\sigma_{cr}=\sigma_s$
$\sigma_{cr}=a-b\lambda$
$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$
λ_s
λ_p
小柔度杆
中柔度杆
大柔度杆
λ

压杆稳定性条件

$$\sigma = \frac{F}{A} < [\sigma_{cr}]$$

压杆的许可压应力 $[\sigma_{cr}]$

$$[\sigma_{cr}] = \frac{\sigma_{cr}}{n_{cr}}$$

n_{cr}：稳定安全系数

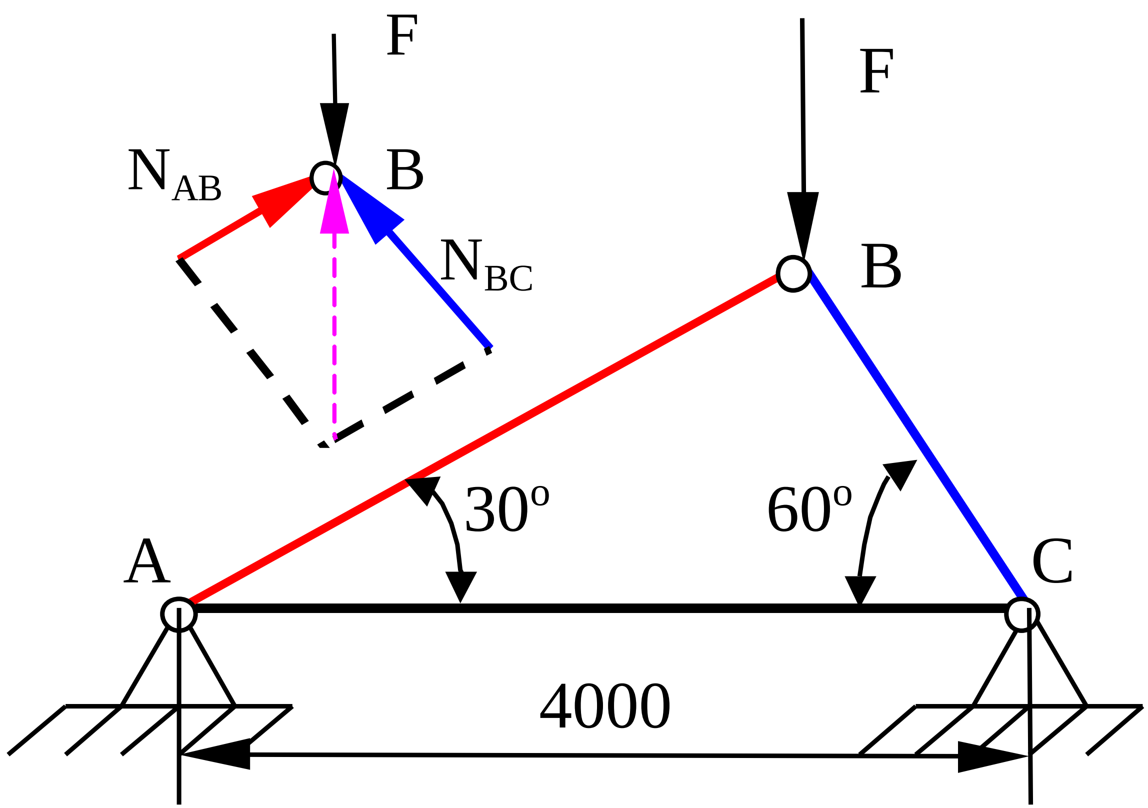
稳定安全系数与强度安全系数n不同，还额外考虑了压杆的初弯曲和外载荷偏心等因素，因此稳定安全系数n_{cr}要比强度安全系数取得搞一些。

$$[\sigma_{cr}] = \phi(\lambda)[\sigma]$$

ϕ（λ）：折减系数

例

材料为Q235，$[\sigma]$=160MPa，A、B、C为铰链，杆件的直径为80mm，忽略各杆重力，确定杆件的许可载荷。



解答

$$l_{AB}=4000\times\cos 30^{\mathrm{o}}=3460\mathrm{mm}$$

$$l_{BC}=4000\times\sin 30^{\mathrm{o}}=2000\mathrm{mm}$$

惯性半径： $i=\sqrt{\dfrac{I}{A}}=\dfrac{d}{4}=20\mathrm{mm}$

两端铰支： $\mu=1$

故各杆的柔度： $\lambda_{AB}=\dfrac{\mu l_{AB}}{i}=\dfrac{3640}{20}=173$

$$\lambda_{BC}=\frac{\mu l_{BC}}{i}=\frac{2000}{20}=100$$

解答

查表6-3

$$\phi_{AB} = 0.235 \Rightarrow [\sigma_{cr}^{AB}] = \phi_{AB}[\sigma] = 0.235 \times 160 = 37.6\text{MPa}$$

$$\phi_{BC} = 0.6 \Rightarrow [\sigma_{cr}^{BC}] = \phi_{BC}[\sigma] = 0.6 \times 160 = 96\text{MPa}$$

AB及BC杆的许可载荷为：

$$F_{cr}^{AB} = 37.6 \times \pi \times 40^2 = 188.9\text{KN}$$

$$F_{cr}^{BC} = 96 \times \pi \times 40^2 = 482.5\text{KN}$$

杆系的许可载荷：

$$[F] = \min\{F_{cr}^{AB}/\sin 30^{\circ}, F_{cr}^{BC}/\cos 30^{\circ}\} = 377.8\text{KN}$$

故杆件的许可载荷为377.78KN

提高压杆稳定性的措施

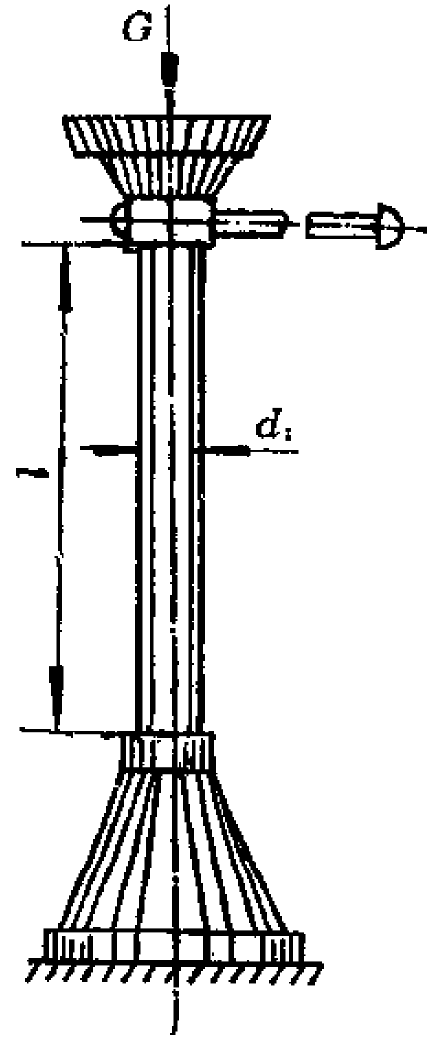
- 选用E大的材料
- 选择合理的截面形状
- 改变压杆的约束条件

例题

已知G=150kN,螺杆根径d_1=52mm，螺杆长500mm，材料Q235A，稳定安全系数n_{cr}=4,

试：1、校核螺杆的稳定性;

2、稳定性不够时的解决办法



解答

$$i=\sqrt{\frac{I}{A}}=\frac{d}{4}=13\text{mm}$$

一端固定，一端自由，$\mu=2$

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{2\times 500}{13}=76.9 \quad \left(\lambda_s<\lambda<\lambda_p\right)$$

$$\sigma_{cr}=a-b\lambda=304-1.12\times 76.9=217.6\ \text{MPa}$$

$$F_{cr}=\sigma_{cr}A=462\text{KN}$$

$$F_{max}=\frac{F_{cr}}{n}=\frac{462}{4}=115.5<G$$

经校核，该千斤顶螺杆的稳定性不够。

稳定性不足解决办法

1 两端固定？

2 减少长度？

3 用高强钢？

4 增加直径？

那种方法更好?