实验三、智能无人车控制—转向控制

横向控制的主要目的是跟踪期望轨迹。在设计转向控制系统时，使用车辆与轨迹的相对位置及航向误差这类状态变量进行建模是十分合理的。

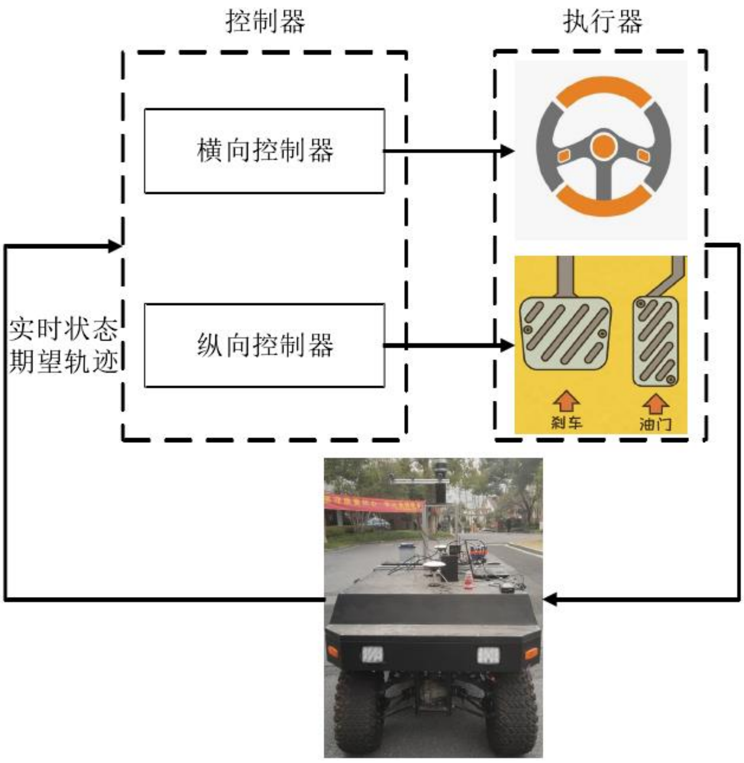


图 1 无人车控制系统流程图

1. 转向控制模型

对于单输入单输出的系统，一般可以用传递函数表示，而对于多输入多输出的系统，通常用状态空间方程来描述，本文横向控制器的设计中使用了横向误差 ex、横向误差变化率$\dot{e}_x$、航向误差e_ψ、航向误差变化率$\dot{e}_\psi$，构成状态向量$x = (e_x, \dot{e}_x, e_\psi, \dot{e}_\psi)^T$作为主要研究对象。无人车匹配到期望轨迹中的目标点后，为保持航向的一致性，从当前航向ψ 调节至期望点处的航向ψ_d，需要计算两者之间的偏差关系：$e_\psi = \psi - \psi_d$。从当前航向调节至目标点航向的过程中，航向调节的速度同样重要，可得到航向的变化率：$\dot{e}_\psi = \dot{\psi} - \dot{\psi}_d$。车辆若以纵向速度 Vx 在转弯半径为 R 的道路上行驶时，理论上需要产生的横向加速度为：$a_{yd} = V_x \frac{V_x}{R} =$

$V_x\dot{\psi}_d$. 为达到理论上的横向加速度，车辆从当前的瞬时加速度a_y调节至期望横向加速度a_{yd}，需要计算两者之间的偏差关系：$\ddot{e}_x = a_y - a_{yd} = \dot{V}_y + V_x\dot{e}_\psi$。假设短时间内车辆速度恒定，对式$\ddot{e}_x = a_y - a_{yd} = \dot{V}_y + V_x\dot{e}_\psi$积分可以得到一个线性时不变模型，即横向速度误差：

$$\dot{e}_x = V_y + V_x e_\psi$$

在小的侧偏角和单车模型的假设条件下，输入为车辆前轮转角δf，根据车辆动力学的分析过程，可得转向控制的动力学模型：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_\delta \delta_f + \mathbf{B}_\psi \dot{\psi}_d$$

其中，

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{C_f+C_r}{mV_x} & \frac{C_f+C_r}{m} & \frac{bC_r-aC_f}{mV_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{aC_f-bC_r}{I_zV_x} & \frac{aC_f-bC_r}{I_z} & -\frac{a^2C_f+b^2C_r}{I_zV_x} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C_f}{m} \\ 0 \\ \frac{aC_f}{I_z} \end{pmatrix} \mathbf{B}_\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{aC_f-bC_r}{mV_x} - V_x \\ 0 \\ -\frac{a^2C_f+b^2C_r}{I_zV_x} \end{pmatrix}。$$

2．LQR 控制理论

在车辆各项参数已知的情况下开环系统矩阵 A 是一个已知的固定矩阵，初始时系统状态可能并不稳定，此时需要通过引入一定的反馈量形成闭环来调节矩阵 A 的特征值从而达到改善系统特性的目的。具体的，在系统输入δ_f中引入线性负反馈分量$\delta_{fb} = -Kx$形成闭环系统：

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}_\delta \mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}_\psi \dot{\psi}_d$$

式中，反馈矩阵 $\mathrm{K} = (k_1, k_2, k_3, k_4)$; $\mathrm{A} - B_\delta K$为新的闭环系统的状态变换矩阵，通过求解不同的 K 矩阵，可以改变状态空间方程的特征值，进而控制系统的表现。LQR 控制器是反馈系统设计的核心，通过现代控制理论对系统进行分析，得出以状态空间形式表示的线性模型，LQR 将其作为研究对象，在系统输入中引入设计的线性负反馈，通过调节反馈量使控制系统达到最优。当系统状态由于任何内部扰动或者外部干扰而偏离了平衡状态时，控制系统一般会在能量消耗和促使系统各状态分量趋于平衡之间进行权衡，并设计相关规则确定最终优化目标，可以定义如下的二次型目标函数：

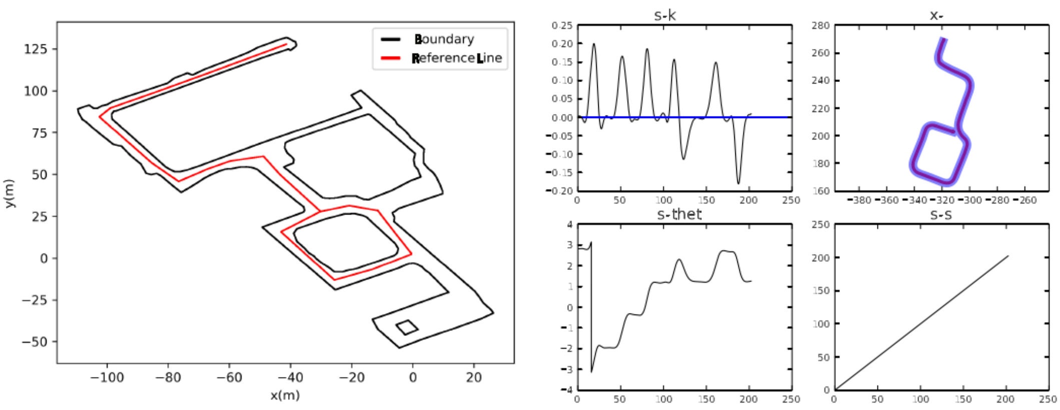
$$J=\int_{0}^{\infty}\left(\mathbf{x}^{T}\mathbf{Q}\mathbf{x}+\delta_{f}^{T}\mathbf{R}\delta_{f}\right)dt$$

其中，Q 为半正定矩阵，R 为正定矩阵。LQR 设计的状态反馈矩阵 K 由 Q 和 R 共同决定, 目的是要使目标函数 J 最小。

实验要求：

① 设置对角阵 Q,R, 编写反馈增益求解程序；绘制其阶跃响应曲线；分析不同 Q,R 对于系统性能的影响；

② 根据终值定理，基于传递函数，求解轨迹跟踪的稳态误差；



(a) 参考线原始信息　　(b) 参考线平滑处理