一道转动题的四种解法与评价

当飞机在空中以定值速度沿半径为的水平圆形轨道转弯时,求当螺旋桨尖端与螺旋桨中心的连线与竖直线成时,点的速度以及加速度.已知螺旋桨的长度,螺旋浆自身旋转的角速度为.

[解法1] 静止坐标系

建立如图所示的静止直角坐标系.



设螺旋桨的中心为初始时刻位于轴上,螺旋桨桨叶与竖直轴夹角为.飞机绕轴转动的角速度为.则在时刻, 的位矢为



对时间求一阶导数,可得速度.



再次对时间求导,可得加速度.



当与竖直轴夹角为时, ,带入即可求得速度与加速度的数值.

此方法思路清晰,但是计算过程繁琐,较易出错.

[解法2] 刚体转动

螺旋桨的运动可以看作是刚体的转动.那么速度就可以写成,其中, 是刚体内某一点的线速度, 是整个刚体的角速度, 是刚体内一点相对参考点的位矢.

在此问题中,仍建立与解法1相同的直角坐标系. 的位矢与解法1中的相同.为了求出点的速度,还要写出角速度的表达式.不难得出, 的角速度由两部分构成.一部分是绕原点”公转”的角速度,方向大小均不变,为.另一部分是绕点”自转”的角速度,大小不变,始终为,方向与螺旋桨中心的速度方向相同.经过时间后,总角速度为



速度为



加速度为



由于坐标系相同,最后的结果与解法1的结果相同.这种解法同样需要较大的计算量.

[解法3] 基点法

取点为基点,将刚体的运动分解为基点的平动和绕基点的转动.此时,速度与加速度的表达式变为



式中,是相对基点的位矢,是刚体相对于静止参考系的角速度.取固结在刚体上的坐标系.以螺旋桨中心为原点.在此坐标系下,螺旋桨的角速度为



位矢为,点的速度为



这就是点相对静止参考系的速度,只是式中的方向向量和的方向一直在改变,对时间求导不为,类似极坐标中的和.的方向大小均不变, .

类似地写出点的加速度. 相对于点转动,有一个的牵连加速度.

而角速度随时间的导数



得到



这种方法的好处在于计算简单.难点在于这个固结在刚体上的特殊的坐标系比较难以构架,并且角速度的表达式中要加上点相对点的角速度,以及方向向量的导数等都很难想到.此外,还很容易将此参考系与转动参考系混淆,从而写加速度的表达式时出现错误.

[解法4] 转动参考系

取原点在点,随一起转动的参考系.转动参考系下,质点的速度加速度表达式为



其中, 与是相对参考系的速度和加速度, 是参考系的角速度, 是相对于原点的位矢[[1]](#footnote-1),用转动参考系的坐标表示.

点在转动参考系的位矢为.刚体相对于转动参考系做一个平面的定点转动,角速度为,则点相对速度为



合速度为



这里的速度表达式与解法3的完全相同,因为两种解法的参考系只是原点不同, 三个方向向量的方向都是一样的.

再写出加速度



此方法计算简单,通用性好.只要掌握了转动参考系的相关知识,就能流畅地写出.

1. 因为转动参考系与静止参考系的原点是重合的,不必指定是哪个参考系的原点. [↑](#footnote-ref-1)