近世代数 2023 春期末试题（回忆版）

By zyj,qcx

一：选择题（2’ * 10)

（大多与往年接近，基本为定理、推论、基本概念、例题、雨课堂选择题和注解改编)

1. |A| = n, P(A)上的代数运算有___种 (B: $2^{n2^{2n}}$ D: n^{n^2})
2. 集合 A 有 3 个元素，则 |S(M)| = __
3. 考察同态映射$\varphi : A \to B$, $\varphi(A)$与 B 的关系 (是否为满射时)，同态映射是否为满射
4. 考察子群和群的单位元（单位元可否不同）、逆元的关系，子集可否继承大群的代数运算，子群可否继承大群运算律
5. 似乎考察了等价关系
6. 考察群与子群的关系。错误选项：两个子群的阶数的乘积等于其乘积的阶数
7. 循环群和其同态像的生成元、逆元的关系，循环群的商群是循环群，错误选项：循环群只有一个生成元

8.考察变换群：任何群都能与一个双射变换群同构

9. 考察置换群：置换奇偶性与阶数和对换个数奇偶性的关系
10.

Ps.复习时要注意每个定理的条件限定（如同态映射/ 同态（满射）/同构,是否要求可交换，是否要求群有限）

二：填空题(2’*15)

1. 已知|a| = n, 则 $|a^k|$ = __ ; 若 $|a^m| = n$，则_______; 由此可得,若循环群的阶为 n，则生成元的个数为___.
2. 设 N 是群 G 的一个子群，如果对 G 中每个元素 a 有 aN =Na，则 N 为 G 的___子群。任一群 G 至少有{e}与 G 本身为这样的群，称为 G 的____子群。如果{a,b,c ...} 是 G 的一个左陪集代表系，则一个右陪集代表系是_______。
3. $H \le G$,则拉格朗日定理书写为_________; 于是有限群子群的阶是原群的_____。 若 H H 是 G 的正规子群，G 同态于 G', 则 G' 与_____等势
4. G~G', N = ker ϕ，则群同态基本定理可写为__________; 因此在同构意义下群只关于它的____同态； |G’|与 |G| 在 G~G'下的关系是___ .
5. 环与其子环均有__个代数运算。假设环和其子环均有单位元， 则环与子环的单位元可能<u>相等</u>，也可能<u>不相等</u>

(21 级环只学了第一节)

三：计算题(10’*2)

1. 设 G = <a> 为 6 阶循环群。 给出 G 的一切生成元和所有子群
2. 求 Klein 四元群 K4 = { (1),(12)(34),(13)(24), (14)(23)} 的自同构群，并简要分析过程

四：证明题(10’*3)

1. 证明:若|G| <= 7，则 G 不可能为哈密顿群（所有子群均为正规子群的非交换群）
2. 证明:循环群只能同态于循环群
3. 证明: ${}^{S_4}/_{K_4} \cong S_3$