近世代数

计算机科学与技术学院
苏敬勇

内容

多选题 1分

设置

以下关于代数运算和运算律说法正确的是（ ）

整数集上的加、减、乘都是其上的代数运算。

一个集合上的代数运算也是其子集上的代数运算。

代数运算满足结合律后只要同一组元素的顺序不变，随便加括号其结果都一样。

代数运算满足结合律就满足交换律

提交

多选题 1分

设置

以下关于代数运算和运算律说法正确的是（ ）

A 整数集上的加、减、乘都是其上的代数运算。

B 一个集合上的代数运算也是其子集上的代数运算。

C 代数运算满足结合律后只要同一组元素的顺序不变，随便加括号其结果都一样。

D 代数运算满足结合律就满足交换律

提交

同态

- 定义

➢集合M 上有代数运算$\circ$,集合 $\overline{M}$ 上有代数运算 $\bar{\circ}$ ， 若存映射φ , $\varphi: M \to \overline{M}$, 若满足：

$$\varphi: a \to \bar{a}, \qquad b \to \bar{b}$$

$$\varphi: a \circ b \to \bar{a} \,\bar{\circ}\, \bar{b}$$

即, $\overline{a \circ b} = \bar{a} \,\bar{\circ}\, \bar{b}$ 或 $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \,\bar{\circ}\, \varphi(b)$

那么, φ 被成为代数系统M到 $\overline{M}$ 的一个同态映射。若其为一满射, 就称代数系统M 与 $\overline{M}$ 同态。记为： $M \sim \overline{M}$

同态

- 例子

➤1. $\circ$是数域F上全体 n 阶方阵的集合 M 上的矩阵乘法代数运算，$\bar{\circ}$ 是数域F=$\bar{M}$上的普通数乘代数运算。即：

$$\varphi: \quad M \to \bar{M} \qquad\qquad \varphi: \quad A \to |A|$$

问 φ 是不是一个同态映射?

Yes $\quad |AB| = |A| \cdot |B| \qquad \varphi(AB) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$

它是不是个满射? Yes

$$\forall a \in \bar{M} \qquad \exists A = \begin{bmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \in M \qquad M \sim \bar{M}$$

同态

- 定理1

➢ 代数系统 M 和 $\bar{M}$ 分别有代数运算 $\circ$ 和 $\bar{\circ}$，若 $M \sim \overline{M}$ 则会有以下结论成立：

(1) $\circ$ 满足结合律, 那么 $\bar{\circ}$ 也满足结合律。

(2) $\circ$ 满足交换律, 那么 $\bar{\circ}$ 也满足交换律。

证明：(1)设 φ 为两代数系统之间的满同态映射, 则有

$$\varphi: \begin{array}{l} (a \circ b) \circ c \rightarrow \left(\overline{a \circ b}\right) \bar{\circ}\, \bar{c} = \left(\bar{a}\, \bar{\circ}\, \bar{b}\right) \bar{\circ}\, \bar{c} \\ a \circ (b \circ c) \rightarrow \bar{a}\, \bar{\circ} \left(\overline{b \circ c}\right) = \bar{a}\, \bar{\circ} \left(\bar{b}\, \bar{\circ}\, \bar{c}\right) \end{array} \qquad a \rightarrow \bar{a}, b \rightarrow \bar{b}, c \rightarrow \bar{c}$$

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \qquad \left(\bar{a}\, \bar{\circ}\, \bar{b}\right) \bar{\circ}\, \bar{c} = \bar{a}\, \bar{\circ} \left(\bar{b}\, \bar{\circ}\, \bar{c}\right)$$

同态

(2) $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \bar{M}$

设 φ : $a \to \bar{a}$, $b \to \bar{b}$

那么 $a \circ b \to \bar{a} \,\bar{\circ}\, \bar{b}$ $b \circ a \to \bar{b} \,\bar{\circ}\, \bar{a}$

$$a \circ b = b \circ a \quad \to \quad \bar{a} \,\bar{\circ}\, \bar{b} = \bar{b} \,\bar{\circ}\, \bar{a}$$

同态

- 定理2

➢ $\circ$和$\oplus$是代数系统M上的两个代数运算，$\bar{\circ}$和$\bar{\oplus}$是代数系统$\overline{M}$上的两个代数运算；φ是M到$\overline{M}$的一个满射，且对$\circ$与$\bar{\circ}$，$\oplus$与$\bar{\oplus}$同态；那么如果$\circ$对$\oplus$满足左（右）分配律，那么$\bar{\circ}$对$\bar{\oplus}$也将满足左（右）分配律。

证明：
$$\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c}\in\overline{M},\quad \exists a,b,c\in M$$
$$\varphi: a\to\bar{a},\ b\to\bar{b},\ c\to\bar{c}$$
$$\varphi(a\circ(b\oplus c))=\varphi(a)\bar{\circ}\varphi(b\oplus c)=\varphi(a)\bar{\circ}[\varphi(b)\bar{\oplus}\varphi(c)]=\bar{a}\bar{\circ}(\bar{b}\bar{\oplus}\bar{c})$$
$$\because\quad a\circ(b\oplus c)=(a\circ b)\oplus(a\circ c)$$
$$\therefore\quad \varphi(a\circ(b\oplus c))=\varphi[(a\circ b)\oplus(a\circ c)]=\varphi(a\circ b)\bar{\oplus}\varphi(a\circ c)$$
$$=(\bar{a}\bar{\circ}\bar{b})\bar{\oplus}(\bar{a}\bar{\circ}\bar{c})$$

同构

- 定义

➢ φ 是代数系统 M 到$\overline{M}$ 关于代数运算$\circ$与$\bar{\circ}$ 的同态满射，如果 φ 同时也是一个单射（即双射），那么它就是 M 到 $\overline{M}$ 的一个同构映射。称M 与$\overline{M}$同构，记为：

$$M \cong \bar{M}$$

- 1. 如果没有这种同构映射，则称 M 与$\overline{M}$不同构。
- 2.M到其自身的同态映射叫做 M的自同态映射，简称为M的自同态。
- 3. M 到其自身的同构映射叫做M 的自同构映射，简称为M 的自同构。

同构

- 例子

  ➢1. $M=Z$, $\bar{M}$ 是偶数集, $\varphi:\quad n\to 2n$ ，是否是他们之间的同构映射?

  注：要对一定的运算来讲

  ➢2. $M=Q+$ 是正有理数集, $\circ$ 若是普通数乘运算 " $\times$ ", 那么下面法则是否是一个 $M=Q+$ 上的自同构?

$$\varphi:\quad a\to\frac{1}{a}$$

  ➢若 $\circ$ 是普通数的加法 "+", 那么法则此时还是不是原集合上的自同构?

$$\varphi(2+3)=\varphi(5)=\frac{1}{5}$$

$$\varphi(2)+\varphi(3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\neq\frac{1}{5}$$

$$\varphi(2+3)\neq\varphi(2)+\varphi(3)$$

同构

➢性质

➢ 1. $M \cong M$　　反身性

➢ 2. 若$M_1 \cong M_2$，那么$M_2 \cong M_1$　　对称性

➢ 3. 若 $M_1 \cong M_2$ 且 $M_2 \cong M_3$，那么 $M_1 \cong M_3$　　传递性

构造 一个 同构映射.

➢1. I 是恒等映射

➢2. 若φ_1 是 $M_1 \cong M_2$ 的同构映射，那么 φ_1^{-1} 就是$M_2 \cong M_1$ 的同构映射。

➢3. 若 φ_1 是 $M_1 \cong M_2$ 的同构映射，φ_2 是 $M_2 \cong M_3$ 的同构映射，那么$\varphi_3=\varphi_2\varphi_1$ 是 $M_1 \cong M_3$的同构映射。

同构

- 意义

➢ $\circ$ 是 $M=\{a,b,c,\cdots\}$ 的代数运算，$\bar{\circ}$ 是 $\bar{M}=\{\bar{a},\bar{b},\bar{c},\cdots\}$ 的代数运算，若 $M\cong\bar{M}$，同构映射如下：

$$\varphi:\quad a\to\bar{a},\quad b\to\bar{b},\quad c\to\bar{c},\cdots$$

$$a\circ b=c \qquad \Leftrightarrow \qquad \bar{a}\,\bar{\circ}\,\bar{b}=\bar{c}$$

那么代数系统 M 上所有的运算性质都可以自动的传递给所有与 M 同构的代数系统上。

同态与同构

- 练习

➢1. (1) $x\to|x|$， (2) $x\to 2x$， (3) $x\to x^2$, (4) $x\to -x$ for R, “ $\times$“

自同态? 自同态满射? 自同构?

(1) $\varphi(ab)=|ab|=|a||b|=\varphi(a)\varphi(b)$

(2) $\varphi(ab)=2ab\neq 2a\cdot 2b=\varphi(a)\varphi(b)$

(3) $\varphi(ab)=(ab)^2=a^2\cdot b^2=\varphi(a)\varphi(b)$

(4) $\varphi(ab)=-ab\neq(-a)\cdot(-b)=\varphi(a)\varphi(b)$

同态与同构

- 练习

➢ 2.给出有理数集 Q 上一个不同与恒等映射的自同构。代数运算是普通加法“+”。

➢映射、保持运算

$$\varphi : x \rightarrow -x$$

$$a \rightarrow -a, b \rightarrow -b$$

$$\varphi(a \circ b) = -(a+b) = (-a) + (-b) = \varphi(a) \bar{\circ} \varphi(b)$$

➢双射

对 $\forall x \in Q$ $\exists -x \in Q$ 有 $\varphi(-x) = -(-x) = x$ 满

对 $\forall x, y \in Q, x \neq y$, 有 $\varphi(x) = -x \neq -y = \varphi(y)$ 单

自同构

同态与同构

- 练习

➢3. $\circ$ 和 $\bar{\circ}$ 分别是M 和 $\overline{M}$ 上的代数运算, $M \sim \overline{M}$，若$\bar{\circ}$在 $\overline{M}$ 上满足结合律，则$\circ$ 是否在M 上也满足结合律?

➢ 设φ 是两代数系统之间的满同态映射, 已知对 $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \overline{M}$,

$$\exists a, b, c \in M, \qquad s.t. \quad \varphi(a) = \bar{a}, \varphi(b) = \bar{b}, \varphi(c) = \bar{c}$$

$$\because (\bar{a} \,\bar{\circ}\, \bar{b}) \,\bar{\circ}\, \bar{c} = \bar{a} \,\bar{\circ}\, (\bar{b} \,\bar{\circ}\, \bar{c})$$

$$\therefore \varphi((a \circ b) \circ c) = \varphi(a \circ (b \circ c))$$

➢即便φ 是一个同态满射, 还是没办法从 $\varphi((a \circ b) \circ c) = \varphi(a \circ (b \circ c))$ 得到 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

$$M = Z \qquad\qquad \overline{M} = \{1\}$$

$$\circ \to "-" \qquad\qquad \bar{\circ} \to "\times"$$

$$\varphi: \quad x \to 1$$

同态与同构

- 练习

➢4. (1) 若 $M_1 \cong M_2$，那么 $M_2 \cong M_1$

(2) 若 $M_1 \cong M_2$，$M_2 \cong M_3$，那么 $M_1 \cong M_3$

(1) $\forall \bar{a}, \bar{b} \in M_2 \quad \varphi(a \circ b) = \varphi(a) \bar{\circ} \varphi(b) = \bar{a} \bar{\circ} \bar{b}$

$$\varphi^{-1}(\bar{a}) = a, \varphi^{-1}(\bar{b}) = b$$

$$\varphi^{-1}(\bar{a} \bar{\circ} \bar{b}) = \varphi^{-1}(\varphi(a \circ b)) = a \circ b = \varphi^{-1}(\bar{a}) \circ \varphi^{-1}(\bar{b})$$

(2) $\forall a, b \in M_1$, $\varphi_1(a \circ b) = \varphi_1(a) \bar{\circ} \varphi_1(b)$, $\varphi_2(\varphi_1(a) \bar{\circ} \varphi_1(b)) = \varphi_2(\varphi_1(a)) \bar{\bar{\circ}} \varphi_2(\varphi_1(b))$

$\varphi_3 = \varphi_2 \varphi_1$

$$\varphi_2(\varphi_1(a \circ b)) = \varphi_2(\varphi_1(a)) \bar{\bar{\circ}} \varphi_2(\varphi_1(b))$$

$$\varphi_3(a \circ b) = \varphi_3(a) \bar{\bar{\circ}} \varphi_3(b)$$

作业

- P16. 1 ——ppt上“练习1”，要求：证明过程书写清楚。