





近世代数

计算机科学与技术学院
苏敬勇



内容

- 第一章 基本概念
- 第二章 群
- 第三章 正规子群和有限群
- 第四章 环与域
- 第五章 因子分解
- 第六章 域的扩张

第二章 群

- 群的定义和初步性质
- 元素的阶
- 子群
- 循环群
- 变换群
- 置换群
- 陪集、指数和Lagrange定理
- 群在集合上的作用

群的定义和初步性质

• 群:

定义 1: 非空集合 G , \circ 是它的一个代数运算, 如果满足以下条件:

I: 结合律成立, 即对 G 中任意元素 a, b, c 都有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

II: G 中有元素 e , 叫做 G 的**左单位元**, 它对 G 中每个元素 a 都有

$$e \circ a = a$$

III: 对 G 中每个元素 a , 在 G 中都有元素 a^{-1} , 叫做 a 的**左逆元**, 使

$$a^{-1} \circ a = e$$

则称 G 对代数运算 \circ 作成**一个群**。

群的定义和初步性质

- 交换群（Abel群）

定义：如果对群G中任二元素 a, b 均有

$$a \circ b = b \circ a$$

即G的代数运算满足交换律，则称G为**交换群**（可换群）或**Abel群**；
否则称G为**非交换群**（非可换群）或非**Abel群**。

例如：整数集Z对于数的普通加法显然作成了一个交换群，0是它的左单位元，整数 $-a$ 是整数 a 的左逆元。这个群常称为**整数加群**。

需要注意的是，整数集Z对于数的普通乘法不能做成群。因为，尽管普通乘法是Z的代数运算，并满足结合律，也有左单位元1，但是，除去 ± 1 ，其他元素在Z中均没有左逆元。

非零有理数、正有理数关于普通乘法——非零有理数乘群、正有理数乘群

群的定义和初步性质

- 例 1：设G为整数集。问：G对运算

$$a \circ b = a + b + 4$$

是否成群？

$$\begin{aligned}(a \circ b) \circ c &= (a + b + 4) \circ c \\ &= (a + b + 4) + c + 4 = a + b + c + 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a \circ (b \circ c) &= a \circ (b + c + 4) \\ &= a + (b + c + 4) + 4 = a + b + c + 8\end{aligned}$$

故有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

即代数运算 \circ 满足结合律。

又对 $\forall a \in G$ ，总有 $(-4) \circ a = -4 + a + 4 = a$ ，于是知-4是G中左单位元；而 $(-8-a) \circ a = -8 - a + a + 4 = -4$ ，知 $-8-a$ 是 a 的左逆元

群的定义和初步性质

- 例 2：全体正整数作成的集合G对运算

$$a \circ b = a^b$$

是否作成群？

解：首先，运算是正整数集合上的代数运算

但是，

$$(a \circ b) \circ c = a^b \circ c = a^{bc}$$

$$a \circ (b \circ c) = a \circ b^c = a^{b^c}$$

一般不会相等。例如

$$a=2, b=1, c=2$$

因此，正整数集合对于这个代数运算不构成群。

群的定义和初步性质

- 一般来讲：对于一个集合，要考察它是否作成群，不仅要注意它的元素是什么，更应该注意它的代数运算是什么。同一个集合，对这个代数运算可能作成群，对另一个代数运算却不一定作成群；即使对两个不同的代数运算同时都作成群，那么一般来说，也被认为是两个不同的群。
- 符号非本质，常把群的代数运算叫做“乘法”，还把 $a \circ b$ 简记为 $a \cdot b$ 或 ab

群的定义和初步性质

- 群的阶

定义： 一个群 G 中包含元素的个数为 n ，则称 n 为群 G 的阶，记为 $|G|=n$ 。
无限群的阶称为无限，被认为是大于任意的正数。例如， $|G|>1$ 意味着 G 可能是阶大于1的有限群，也可能是无限群。

例 3： 全体 n 次单位根对于数的普通乘法作成一群。这个群记为 U_n ，
并称作 n 次单位根群。

首先，满足结合律的代数运算；

再有，1在其中为左单位元；

最后，每个 n 次单位根的左逆元也在其中；

并且，可交换；

故， U_n 作成了一个 n 阶有限交换群。

群的定义和初步性质

• 例 4：令

$$G = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$$

并规定G的乘法如下：

\cdot	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

$$(-x)y = x(-y) = -xy$$

$$-(-x) = x$$

$$\text{其中 } x, y \in \{1, i, j, k\}$$

封闭-----此定义乘法为G上代数运算；

1----左单位元

1和-1的左逆元均为自身，其余*i*与-*i*，*j*与-*j*，*k*与-*k*互为左逆元

重点验证“结合律”？

群的定义和初步性质

- i, j, k 三元素对等，验证所有可能情况即可

$$\begin{aligned}(ii)i &= i(ii), & (ii)j &= i(ij), \\ (ji)i &= j(ii), & (ij)i &= i(ji), \\ (ij)k &= i(jk).\end{aligned}$$

都成立，故 G 对所规定的乘法作成一群。它是一个**8阶有限非交换群**，通常称这个群为**四元数群**。

群的定义和初步性质

- 性质

- 定理 1: 群G的左单位元也是右单位元, 并且是唯一的。

证明: 设 e 是G的左单位元, 对 $\forall a \in G$, 有 $a^{-1}a = e$, 也有 $a'a^{-1} = e$

$$\begin{aligned}ae &= e(ae) = a'a^{-1}(ae) = a'(a^{-1}a)e \\&= a'ee = a'(a^{-1}a) = (a'a^{-1})a \\&= ea = a\end{aligned}$$

即, 左单位元也是右单位元。

若存在另一左单位元 e' , 则

$$e' = e'e = e$$

即, 单位元唯一。

群的定义和初步性质

• **定理 2:** 群 G 中任意元素 a 的左逆元 a^{-1} 也是右逆元, 并且唯一。

证明: $\forall a \in G, a'a^{-1} = e$

$$\begin{aligned} aa^{-1} &= e(aa^{-1}) = a'a^{-1}(aa^{-1}) \\ &= a'(a^{-1}a)a^{-1} \\ &= a'a^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$

若有两个左逆元, 设为 a^{-1} 和 b , 则

$$\begin{aligned} a^{-1} &= a^{-1}e = a^{-1}(ba) \\ &= a^{-1}(ab) \\ &= (a^{-1}a)b \\ &= eb \\ &= b \end{aligned}$$

群的定义和初步性质

- 推论 1: 在群中消去律成立, 即

$$ab = ac \Rightarrow b = c$$

$$ba = ca \Rightarrow b = c$$

证明: 两遍分别左乘、右乘 a^{-1} 即可。

下面介绍一种同群有密切关系但比群更广泛的代数系统。

群的定义和初步性质

- 半群:

- 定义 2: 设 S 是一个非空集合, 如果它有一个代数运算满足结合律, 则称 S 是一个半群。

- 如果半群 S 中有元素 e , 它对 S 中任意的元素 a 都有

$$ea = a$$

则称 e 为半群 S 的一个左单位元; 如果在 S 中有元素 e' , 它对 S 中的任意元素 a 都有

$$ae' = a$$

则称 e' 为半群 S 的一个右单位元。

如果一个半群 S 有单位元 (既是左单位元又是右单位元), 则称 S 为有单位元的半群, 或简称幺半群 (monoid)。

群的定义和初步性质

- 性质

- 在一个半群中，可能既没有左单位元，也没有右单位元；可能只有左单位元，而没有右单位元；也可能只有右单位元，而没有左单位元。但是，如果既有左单位元又有右单位元，则二者必相等，它就是半群唯一的单位元。
- 例 5：正整数集对普通乘法作成一个半群，而且是一个么半群，1是单位元。
- 例 6：正整数集对普通加法作成一个半群，它既没有左单位元也没有右单位元。
- 例 7：设S是任一非空集合，对S中任意元素a, b规定

$$a \circ b = b$$

则S作成一个半群，而且S中每一个元素都是左单位元。但当 $|S| > 1$ 时，S没有右单位元。

以下关于半群的单位元说法正确的是（ ）

所有半群都有单位元。

半群中可能没有左单位元或没有右单位元。

半群的左单位元与右单位元一旦都存在，必然相等，且唯一。

半群若无单位元则必然是无左单位元且无右单位元。

提交

以下关于半群的单位元说法正确的是（ ）

- ☐ A 所有半群都有单位元。
- ☒ B 半群中可能没有左单位元或没有右单位元。
- ☒ C 半群的左单位元与右单位元一旦都存在，必然相等，且唯一。
- ☐ D 半群若无单位元则必然是无左单位元且无右单位元。

提交

群的定义和初步性质

- **定理 3:** 设 G 是一个半群。则 G 作成群的充要条件是, 对 G 中任意元素 a, b , 方程

$$ax = b, \quad ya = b$$

在 G 中都有解。

证明: **必要性:** 若 G 作成群则任意元素均有逆元存在, 故

$$x = a^{-1}b, \quad y = ba^{-1}$$

自然的是上两个方程的解。

充分性: 首先对任意的固定元素 $b \in G$, 由于上两方程总有解, 则存在 e 使得

$$eb = b$$

而对于 $\forall a \in G$, 有 $bx = a$ 总有解 c , 于是 $bc = a$

$$ea = e(bc) = (eb)c = bc = a$$

即, e 是 G 的左单位元。

而 $ya = e$ 对于 $\forall a \in G$ 均有解, 则解即为 a 的左逆元。即任意 G 中元素有左逆元。

群的定义和初步性质

• **推论 2:** 有限半群G作成群的充分必要条件是, 在G中两个消去律成立。

证明: **必要性:** 消去律为

$$ab = ac \Rightarrow b = c$$

$$ba = ca \Rightarrow b = c$$

若G作成群则上下式左、右两遍分别左乘和右乘一个 a^{-1} 即可自然得到结论成立。

充分性: 设 $|G| = n$, 且 $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 在G中任取两个元素a, b, 若半群满足消去律则必有

$$b \in G = \{aa_1, aa_2, \dots, aa_n\}$$

即方程 $ax = b$ 在G中总是有解的, 同理可证方程 $ya = b$ 在G中也是有解的。由定理3可知有限半群G作成群。

注: 充分利用“有限”和“消去律”

要求群G是有限的是必要的, 如正整数集对乘法作成半群, 满足消去律, 但是它是无限集, 不能作成群。

群的定义和初步性质

- 注：
- 如果一个交换群的代数运算用加号“+”表示，常称其为一个加群。单位元用 0 表示，并称为 G 的零元；元素 a 的逆元用 $-a$ 表示，并称为 a 的负元。
- 例如：整数加群、有理数加群...
- 以后的讨论中不管群是否可交换，都常用乘号或者省略这个乘号，并仍称为乘法。

群的定义和初步性质---作业

- P25. 5

- 5. 设 $G = \{(a, b) | a, b \text{ 为实数且 } a \neq 0\}$ ，并规定

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, ad + b)$$

证明： G 对此运算做成一个群。又问：此群是否为交换群？

群中元素的阶

• 规定：

任取 $a \in G$ ， n 是一个正整数

$$a^0 = e, \quad a^n = \overbrace{aa \cdots a}^n$$

$$a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n = \overbrace{a^{-1}a^{-1} \cdots a^{-1}}^n$$

由此，不难推出常见的运算规则在群中也成立，其中 m, n 为任意整数：

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad \left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

阶

定义 1： 设 a 为群 G 中的一个元素，使 $a^n = e$ 的最小正整数 n ，叫做元素 a 的阶。

如果这样的阶不存在，称 a 的阶为无限。元素 a 的阶常用 $|a|$ 来表示。

群中元素的阶

- 例 1: $G = \{1, -1, i, -i\}$ (i 是虚数单位) 关于数的普通乘法作成一群, 即4次单位根群, 其中1的阶是1, -1的阶是2, i 与 $-i$ 的阶都是4。
- 例 2: 正有理数乘群 Q^+ 中, 除了单位元的阶是1外, 其余元素的阶均为无限。
- 例 3: 在非零有理数乘群 Q^* 中, 1的阶是1, -1的阶是2, 其余元素的阶均为无限。
- 定理 1: 有限群中每个元素的阶均有限。

证明: 设 G 为 n 阶有限群, 任取 $a \in G$, 则 $a, a^2, \dots, a^n, a^{n+1}$ 中必有相等的。设 $a^s = a^t$ ($1 \leq t < s \leq n+1$), 则 $a^{s-t} = e$, 从而 a 的阶有限。

注: 无限群中元素的阶可能无限, 也可能有限, 甚至每个元素的阶都有限。

群中元素的阶

- 例 4: 设 U_i (i 是正整数) 是全体 i 次单位根对普通乘法作成的群, 即 i 次单位根群。现在令

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

则由于一个 m 次单位根与一个 n 次单位根的乘积必是 mn 次单位根, 故 U 对普通乘法作成群, 而且是一个无限可交换群。

这个群中的每个元素的阶都有限。

- 定义 2: 若群 G 中每个元素的阶都有限, 则称 G 为周期群; 若 G 中除单位元 e 外, 其余元素的阶均无限, 则称 G 为无扭群; 既不是周期群又不是无扭群的群称为混合群。
- 定理 2: 设群 G 中元素 a 的阶是 n , 则

$$a^m = e \Leftrightarrow n \mid m$$

证明: 设 $a^m = e$, 并令 $m = nq + r$, $0 \leq r < n$ 。由上式可得

$$e = a^m = a^{nq+r} = (a^n)^q a^r = a^r$$

群中元素的阶

• 续

但由于 $|a| = n$ ，故不会存在更小的正整数使得 $a^r = e$ ，于是 $r=0$ ，也即得 $n|m$

反之，若 $n|m$ ，令 $m = nq$ ，因 a 的阶为 n ，则有

$$a^m = a^{nq} = (a^n)^q = e$$

总结：群 G 中元素 a ，有

$$|a| = n \Leftrightarrow a^n = e \text{ 且若 } a^m = e \Leftrightarrow n|m$$

• **定理 3：**若群中元素 a 的阶是 n ，则

$$|a^k| = \frac{n}{(k, n)}$$

其中 k 为任意整数， (k, n) 为 k 与 n 的正的最大公因数。

证明：设 $(k, n) = d$ ，且 $n = dn_1$ ， $k = dk_1$ ， $(n_1, k_1) = 1$ 。则由于 $|a| = n$ ，故有

$$(a^k)^{n_1} = a^{kn_1} = a^{k_1n} = (a^n)^{k_1} = e$$

群中元素的阶

其次, 设 $(a^k)^m = e$, 则 $a^{km} = e$, 于是由定理2可知

$$n \mid km, \quad n_1 \mid k_1 m$$

但是 $(n_1, k_1) = 1$, 故 $n_1 \mid m$, 因此, a^k 的阶是 n_1 , 故由上可知

$$|a^k| = n_1 = \frac{n}{(k, n)}$$

•推论 1: 在群中若 $|a| = st$, 则 $|a^s| = t$ 。其中 s, t 是正整数。

证明: 由于 $|a| = st$, 由定理3可知

$$|a^s| = \frac{st}{(s, st)} = \frac{st}{s} = t$$

即得 $|a^s| = t$

•推论 2: 在群中若 $|a| = n$, 则 $|a^k| = n \Leftrightarrow (k, n) = 1$ 。

证明: 根据定理3, 显然成立。

群中元素的阶

- **定理 4:** 群中 a 的阶为 m , b 的阶为 n , 当 $ab=ba$, 且 $(m, n) = 1$ 时, 有 $|ab| = mn$, 即

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

证明: 由已知条件,

$$(ab)^{mn} = a^{mn} b^{nm} = e$$

其次, 若有正整数 s 使得 $(ab)^s = e$, 则便有

$$e = (ab)^{sm} = (a^m)^s b^{sm} = b^{sm}$$

但是 $|b| = n$, 故 $n | sm$, 又因为 $(m, n) = 1$, 故 $n | s$ 。同理可得 $m | s$ 。再根据 $(m, n) = 1$, 可得 $mn | s$ 。

从而 $|ab| = mn$, 即 $|ab| = |a| \cdot |b|$ 。

群中元素的阶

- 注： $ab=ba$ 很重要
- 反例：有理数域上的二阶线性群 $GL_2(Q)$, 易知

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

的阶都有限，分别是4，3，但其乘积

$$ab = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的阶无限，即 $|ab| \neq |a| \cdot |b|$ 。这个例子也说明，一般来说一个群G的全体有限阶元素对G的乘法并不封闭。

又反例： $GL_2(Q)$ 中，

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

的阶无限，但乘积 $cd = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的阶有限为2。

群中元素的阶

- **定理 5:** 设 G 为交换群, 且 G 中所有元素有最大阶 m , 则 G 中每个元素的阶都是 m 的因数, 从而群 G 中每个元素均满足方程 $x^m = e$ 。

证明: 设群 G 中元素 a 的阶为 m , b 为 G 中任意一个元素, 阶为 n 。如果 $n \nmid m$, 则必存在素数 p 满足以下等式:

$$m = p^k m_1, \quad p \nmid m_1$$

$$n = p^t n_1, \quad t > k$$

由于 $|a| = m$, $|b| = n$, 故由上面推论1知

$$|a^{p^k}| = m_1, \quad |b^{n_1}| = p^t$$

但由于 $(m_1, p^t) = 1$ 且 G 是交换群, 故由定理4知

$$|a^{p^k} b^{n_1}| = p^t m_1 > p^k m_1 = m$$

这与 m 是 G 中所有元素的最大阶矛盾, 因此, $n \mid m$ 。从而由定理2知, 群 G 中每个元素都满足方程 $x^m = e$ 。

以下关于群中元素的阶数叙述错误的是（ ）

群中元素乘积的阶数等于阶数的乘积。

群中任一元素的阶数都是其中最大阶数的因子。

有限群中元素的阶数都有限。

无限群中元素的阶数都无限。

提交

以下关于群中元素的阶数叙述错误的是（ ）

- ☒ A 群中元素乘积的阶数等于阶数的乘积。
- ☒ B 群中任一元素的阶数都是其中最大阶数的因子。
- ☐ C 有限群中元素的阶数都有限。
- ☒ D 无限群中元素的阶数都无限。

提交

群中元素的阶---作业

P29. 1. 1)

证明：群中以下每组中的元素有相同的阶：

1) a , a^{-1} , cac^{-1}

P29. 4. 设群 G 中元素 a 的阶为 n 。证明：

$$a^s = a^t \Leftrightarrow n \mid (s - t)$$

子群

• 子群

- **定义 1:** 设 G 是一个群, H 是 G 的一个非空子集。如果 H 本身对 G 的乘法也作成 H 的一个群, 则称 H 为群 G 的一个子群。
- 如果 $|G| > 1$, 则群 G 至少有两个子群, 一个是只由单位元 e 作成的子群 $\{e\}$ (以后常简记为 e), 另一个是 G 本身。这两个子群称为群 G 的平凡子群。别的子群, 如果存在的话, 叫做 G 的非平凡子群或真子群。

$$H \leq G, \quad H < G$$

- **例 1:** 正有理数乘群是非零有理数乘群的一个子群, 正实数乘群是非零实数乘群的子群。
- **例 2:** 全体偶数或全体3的整倍数, 更一般的, 全体 n 的整倍数 (n 是一个固定的整数) 作成的集合

$$\{\cdots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \cdots\}$$

都是整数加群的子群。

子群

- 例 3: 数域 F 上全体 n 阶满秩对角阵的集合 G_1 是 F 上一般线性群 $GL_n(F)$ 的一个子群; 又 F 上一切纯量矩阵 aE ($0 \neq a \in F$, E 为 n 阶单位方阵) 的集合 G_2 是 G_1 的一个子群, 当然也是 $GL_n(F)$ 的子群。
- 定理 1: 设 G 是群, $H \leq G$ 。则子群 H 的单位元就是群 G 的单位元, H 中元素 a 在 H 中的逆元就是 a 在群 G 中的逆元。

证明: 设 e' 是 H 中单位元, e 是 G 中单位元, 则

$$e'e' = e' = e'e$$

于是由消去律知, $e'=e$ 。

同样, 若 a' 是 a 在 H 中的逆元, a^{-1} 是 a 在 G 中的逆元, 则

$$a'a = e = a^{-1}a$$

再有群中满足消去律可得 $a'=a^{-1}$ 。

子群

• **定理 2:** 群 G 的一个非空子集 H 作成子群的充要条件是:

$$1) a, b \in H \Rightarrow ab \in H$$

$$2) a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$$

证明: 必要性, 显然。依据 H 作成群和定理1。

充分性, 验证定义, 由1) 知 G 中代数运算也是 H 中的代数运算, 由于 H 中元素都是 G 中元素, 故结合律自然满足; 其次, 由2) 知任意 H 中元素 a 的逆元也在 H 中, 则再由1) 可得

$$aa^{-1}=e \in H$$

即, 单位元 e 在 H 中, 故 H 作成群。有 $H \leq G$ 。

• **定理 3:** 群 G 的一个非空子集 H 作成子群的充要条件是:

$$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$$

证明: 必要性: 显然, 由定理2.

子群

- 充分性：设当 $a, b \in H$ 时, $ab^{-1} \in H$, 则若 $a \in H$, 便有

$$aa^{-1} = e \in H, \quad a^{-1} = ea^{-1} \in H$$

于是当 $a, b \in H$ 时有 $a, b^{-1} \in H$, 从而

$$ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$$

故由定理2知, $H \leq G$ 。

- 注：这个定理中的条件

$$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$$

显然也可以改写成

$$a, b \in H \Rightarrow a^{-1}b \in H$$

- 注：群G的有限子集H作成子群的充要条件是, H对G的乘法封闭, 即:

$$a, b \in H \Rightarrow ab \in H$$

利用了有限半群成群的充要条件（第一节推论2）

子群

- 例 4：令H为数域F上行列式等于1的全体n阶方阵作成的集合。由于

$$|A| = |B| = 1 \Rightarrow |AB^{-1}| = 1$$

即有 $A, B \in H$ 可得 $AB^{-1} \in H$ ，由定理2可知H作成数域F上一般线性群 $GL_n(F)$ 的一个子群。这个子群常记为 $SL_n(F)$ ，并称为F上的特殊线性群。

- **定义2：**令G是一个群，G中元素a如果同G中每个元素都可换，则称a是群G的一个中心元素。
- 群G的单位元e总是群G的中心元素，除e外可能还有别的中心元素。若群G的中心元素只有e，则称G为无中心群。
- 交换群的每个元素都是中心元素。
- $GL_n(F)$ 除去单位元外还有别的中心元素（例如纯量矩阵），但当 $n > 1$ 时，显然群中还有非中心元素。

子群

- **定理 4:** 群 G 的中心元素作成的集合 $C(G)$ 是 G 的一个子群, 称为群 G 的中心。

证明: 因为 $e \in C(G)$, 故 $C(G)$ 非空, 对于 $\forall a, b \in C(G)$ 对于群 G 中任意的元素 x 都有

$$ax = xa, \quad bx = xb$$

由此可得

$$(ab)x = x(ab), \quad a^{-1}x = xa^{-1}$$

故 $ab, a^{-1} \in C(G)$, 从而 $C(G) \leq G$ 。

- **注:** 群 G 的中心显然是 G 的一个交换子群, 又显然 G 是交换群当且仅当
$$C(G) = G$$

- 群 G 的中心在不发生混淆时也常简记为 C

- **定义3**: 设A, B是群G的任二非空子集, 规定

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\},$$

$$A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\},$$

并分别称 AB 为A与B的**乘积**, A^{-1} 为A的**逆**。

由此易知, 对群的任意三个非空子集A,B,C均有

$$(AB)C = A(BC), \quad A(B \cup C) = AB \cup AC,$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

- 由定理2和定理3可直接得到以下两个推论。
- **推论1**: 设H是群G的一个非空子集, 则

$$H \leq G \Leftrightarrow HH = H \quad \& \quad H^{-1} = H$$

证明: **必要性**: 设 $H \leq G$, 则 $HH = H$ 显然。又若 $a \in H$, 则必有 $a^{-1} \in H$, 从而 $a = (a^{-1})^{-1} \in H^{-1}$ 故 $H \subseteq H^{-1}$ 。类似有 $H^{-1} \subseteq H$, 故 $H^{-1} = H$ 。

子群

充分性：由 $HH = H$ 可知H对G的乘法封闭。另外，若 $a \in H$ ，则 $a \in H^{-1}$ 。于是有 $b \in H$ 使

$$a = b^{-1}, \quad a^{-1} = b \in H$$

于是由定理2知， $H \leq G$ 。

类似的

• **推论 2：**设H是群G的一个非空子集，则

$$H \leq G \Leftrightarrow HH^{-1} = H$$

特别地，若H是群G的一个非空有限子集，则

$$H \leq G \Leftrightarrow HH = H$$

• **注：**一个群的两个子群的乘积一般不再是子群。但在一定条件下可以是子群。

子群

- **定理 5:** 设 H, K 是群 G 的两个子群, 则

$$HK \leq G \Leftrightarrow HK = KH$$

证明: **必要性:** 由于 $HK \leq G$, 则由推论1可知

$$(HK)^{-1} = HK$$

因为 H 和 K 都是子群, 则有 $H^{-1} = H$, $K^{-1} = K$ 。于是又有

$$(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH$$

因此, $HK = KH$ 。

充分性: 设 $HK = KH$, 则有

$$\begin{aligned}(HK)(HK)^{-1} &= HK \cdot K^{-1}H^{-1} = HKKH \\ &= HKH = HHK = HK\end{aligned}$$

由推论2知, $HK \leq G$ 。

子群---作业

- P32 1、4
- 1. 证明：群 G 的任意个子群的交仍是 G 的一个子群。
- 4. 证明：一般线性群 $GL_n(F)$ 的中心是一切纯量矩阵 aE ($0 \neq a \in F$) 作成的子群。