算法设计与分析 2021 秋期末试题（回忆版）

By CandyOre[1], Kuwernv

一. 选择题($2' \times 5$)

1. 关于概念，正确的是：
   a) 复杂度是算法在计算机上运行的时间（×）
   b) 时间复杂度是衡量算法性能最重要的指标（？）
   c) 能在计算机器上运行的计算过程就是算法（×）
   d) 计算机无法解决的问题数量多于可解决的问题数量（？）
2. 求解递归方程的方法不包括；
   a) 代换法；
   b) 主定理；
   c) 递归树；
   d) 线性规划；（√）
3. $g(n)$是$f(n)$的严格上界，则：
   a) $g(n) = \Omega(f(n))$;
   b) $g(n) = O(f(n))$;
   c) $g(n) = \omega(f(n))$;
   d) $g(n) = o(f(n))$; （√）
4. 关于贪心算法，错误的是：
   a) 贪心优化解的正确性需要被严格证明；
   b) 可以被贪心算法解决的问题具有优化子结构；
   c) 可以被贪心算法解决的问题具有重叠子问题；（√）
   d) 能被动态规划解决的问题不一定能被贪心算法解决；
5. 以下为线性字符串匹配算法的是：
   a) BMH 算法；
   b) KMP 算法；（√）
   c) Rabin-Karp 算法；
   d) 朴素字符串匹配算法；

二. ($10'$) 证明$(n+1)^3 = \Theta(n^3)$。

解答：

取$c_1 = 1, c_2 = 10, n_0 = 10$, 则$\forall n > n_0$，一方面$(n+1)^3 > n^3 = c_1 n^3$，另一方面$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 < 8n^3 < 10n^3 = c_2 n^3$，由定义得证。

[1] 试题属于哈尔滨工业大学（深圳）。本文档允许不修改地转载，但任何基于本文档的修改/重构等行为，应事先与 CandyOre 取得联系。

三. (**12′**) 设有序数组$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，满足$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，且$n = 2^k$，设计算法求解数组中相邻两数差距的最小值，要求使用分治算法，时间复杂度尽可能小。

（1）写出递归方程和复杂度。(**4′**)

（2）补充算法伪代码。(**8′**)

（注：原卷伪代码有点丑，以及下面的等于号是原卷就写的，伪代码应该用箭头）

期末试卷 算法 1 分治法求有序数组中相邻两数差距的最小值

输入： 有序数组 $A[l...r]$

输出： 相邻两数差距的最小值

```
function chooseMinimumDifference(A[l...r])
    if __________ then
        return False
    else
        if __________ then
            return __________
        else
            ____________________
            d1 = ____________________
            d2 = ____________________
            ____________________
            ans = min(__________)
            return ans
        end if
    end if
end function
```

解答：

（1）设$C[i,j] = A[i \cdots j]$中的最小差距，则

$$C[i,j] = \min(C[i,mid], C[mid+1,j], A[mid+1] - A[mid]), mid = \left\lceil \frac{i+j}{2} \right\rceil.$$

复杂度表示为$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 = O(n)$。

（2）伪代码填空如下

期末试卷 算法 2 分治法求有序数组中相邻两数差距的最小值

输入： 有序数组 $A[l \cdots r]$

输出： 相邻两数差距的最小值

```
function chooseMinimumDifference(A[l···r])
    if r ≤ l then
        return False
    else
        if r = l + 1 then
            return A[r] − A[l]
        else
            mid ← (l + r)/2
            d1 = chooseMinimumDifference(A[l···mid])
            d2 = chooseMinimumDifference(A[mid + 1···r])
            cur ← A[mid + 1] − A[mid]
            ans = min(d1, d2, cur)
            return ans
        end if
    end if
end function
```

四．（$\mathbf{12'}$）最长公共子串是两个字符串最长的公共子串，子串是字符串连续的一段子串。设计算法求$X[1,\cdots,m],Y[1,\cdots,n]$的最长公共子串。提示：与最长公共子序列类似，只是在某个位置断开后要清零。（原卷提示）

（1）写出递归方程。($\mathbf{5'}$)

（2）写出伪代码($\mathbf{5'}$)，分析时间复杂度($\mathbf{2'}$)。

解答：

（1）设$LCS[i,j]$是$X[1,\cdots,i],Y[1,\cdots,j]$的以$X[i]=Y[j]$结尾最长公共子串，若$X[i]\neq Y[j]$，定义$LCS[i,j]=0$，则

$$LCS[i,j]=\begin{cases} 0 & if\ X[i]\neq Y[j]\ or\ i=0\ or\ j=0 \\ LCS[i-1,j-1] & if\ X[i]=Y[j] \end{cases}$$

（2）伪代码略，时间复杂度为$O(mn)$。

五．（$\mathbf{12'}$）设num是b位一个字符串形式表示的数，要从中删去$k\leq b$位数，要求删除后数最大。设计贪心算法，不要求证明正确性。

（1）描述贪心策略；($\mathbf{4'}$)

（2）描述算法思路，写出伪代码；($\mathbf{4'}$)

（3）若$num="267219","123429",k=3$，求贪心算法结果。($\mathbf{4'}$)

解答：

（1）考虑num最长不严格递增的前缀$num[0,\cdots,a]$，每次删除a，这样每次删除后剩下的数字最大。

（2）维护最长不减前缀，每次删除前增加前缀长度，用$del[0:b-1]$标记是否删除，若删除则在最长不减前缀搜索时忽略，伪代码略。

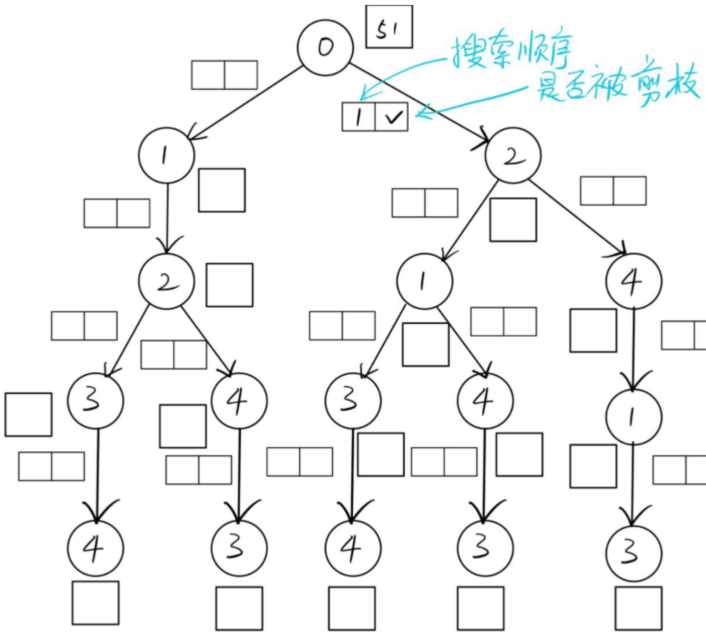
（3）"219"和"122"。

六. $(\mathbf{12'})$ 人员安排问题$P=\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$，$J=\{J_1,J_2,J_3,J_4\}$，$J_1\le J_3,J_2\le J_3,J_2\le J_4$。代价表格如下，$C[i,j]$ *is the cost of* $P_i\to J_j$。采用基于爬山法的分支界限方法。

$$C=\begin{pmatrix}28 & 18 & 14 & 12\\ 30 & 28 & 23 & 32\\ 3 & 20 & 7 & 9\\ 18 & 13 & 14 & 17\end{pmatrix}.$$

（1）填写每个节点代价。$(\mathbf{6'})$

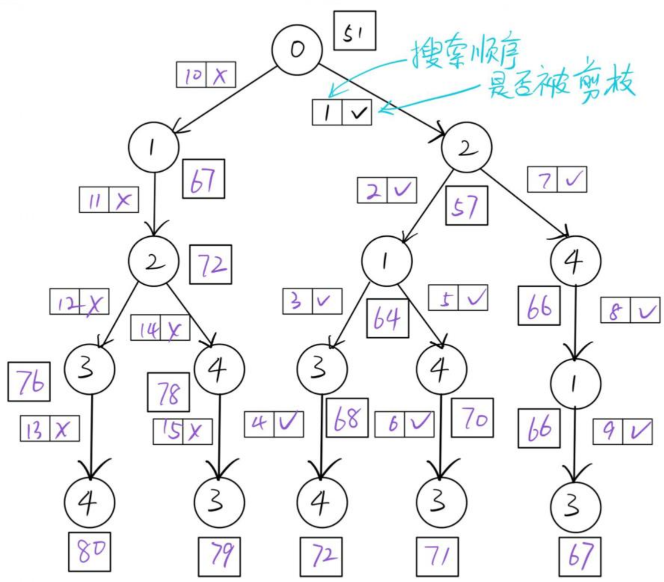
（2）填写每条分治的搜索顺序及是否被砍掉到，写出最有安排方案。$(\mathbf{6'})$



解答：爬山法是dfs，是在子节点入栈的时候对顺序优化，首先搜索关键值较小的子节点。分支界限是在达到一个可能解后，以该解作为界限，接下来搜索过程中若某节点值大于等于该界限，则停止搜索。搜索前对代价矩阵行、列减值，保证每行列出现一个0。

$$C'=\begin{pmatrix}16 & 6 & 2 & 0\\ 7 & 5 & 0 & 9\\ 0 & 17 & 4 & 6\\ 5 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix},d=51.$$

最优方案是$P_1\to J_2,P_2\to J_4,P_3\to J_1,P_4\to J_3$.



七. ($\mathbf{12'}$) 给定动态表扩张收缩算法，用势能法分析摊还代价。

输入：表T，待插入的元素x

输出：插入元素后的表T

算法：TABLE—INSERT(T, x)

```
  If size[T]=0  Then
      allocate table[T] with 1 slot;
      size[T]←1;
  If num[T]=size[T] Then
      allocate new table with 2×size[T] slots;
      insert all items in table[T] into new-table;
      free table[T];
      table[T]←new-table;
      size[T]←2×size[T];
Insert x into table[T];
num[T]←num[T]+1
```

改进表的收缩策略：

- 当删除元素时，允许装载因子低于1/2
- 当删除一项而引起表不足1/4满时，将表缩小为原来的1/2
- 当向满的表中插入一项时，还是将表扩大一倍
- 扩张和收缩过程都使得表的装载因子变为1/2，但表的装载因子的下界是1/4

（原卷上两个伪代码，形式和图一基本一样）

（1）写出势能函数。($\mathbf{4'}$)

（2）分析不同情况下摊还代价$\hat{c}_i$，共九个空。($\mathbf{8'}$)

- 插入操作：$\alpha \geq \frac{1}{2}$，引起扩张、未引起扩张；$\alpha_{i-1} < \frac{1}{2}$，$\alpha_i < \frac{1}{2}$、$\alpha_i \geq \frac{1}{2}$。
- 删除操作：$\alpha < \frac{1}{2}$，引起收缩、未引起收缩；$\alpha_{i-1} \geq \frac{1}{2}$，$\alpha_i \geq \frac{1}{2}$、$\alpha_i < \frac{1}{2}$。
- 任意一个操作序列的时间总和的复杂度上限为____。

解答：

（1）定义为

$$\Phi = \begin{cases} 2 \cdot num[T] - size[T] & \alpha(T) \geq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \cdot size[T] - num[T] & \alpha(T) < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

（2）$\hat{c}_i = c_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}$，硬算。

$\alpha \geq \frac{1}{2}$，引起扩张、未引起扩张，摊还代价为 3；

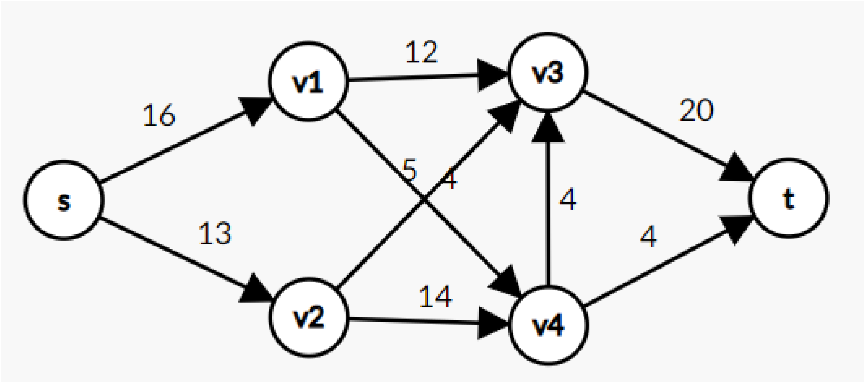
$\alpha_{i-1} < \frac{1}{2}$，$\alpha_i < \frac{1}{2}$、$\alpha_i \geq \frac{1}{2}$，摊还代价为 0；

$\alpha < \frac{1}{2}$，引起收缩、未引起收缩，摊还代价为 2；

$\alpha_{i-1} \geq \frac{1}{2}$，$\alpha_i \geq \frac{1}{2}$，摊还代价为-1，$\alpha_i < \frac{1}{2}$，摊还代价为 2。

（3）$O(n)$.

八. (**10′**) 求下图$s \to t$的最大网络流。



要求：使用$Ford - Fulkerson$算法按以下增广路顺序求。

1. $s \to v_1 \to v_3 \to t$,
2. $s \to v_2 \to v_4 \to t$,
3. $s \to v_2 \to v_3 \to t$,
4. $s \to v_1 \to v_4 \to v_3 \to t$

解答：直接求，最大流是24。

九. (10′)

(1) 写出 BMH 算法的偏移表计算公式。

(2) 使用 BMH 算法补全下面的匹配过程（写出每一步的匹配过程即可）。

T	a	b	d	a	c	b	a	c	d	b	c	a	c	a	c	c	a	c
P	a	c	c	a	c													
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		
8																		
9																		
10																		

解答：

(1)　偏移表大小为$|\Sigma|$，计算方法如下：

$$shift[w] = \begin{cases} m - 1 - \max\{i < m - 1 \mid P[i] = w\} & if\ w\ in\ P[0, \ldots, m-2] \\ m & otherwise \end{cases}$$

(2)　表格填写如下：

T	a	b	d	a	c	b	a	c	d	b	c	a	c	a	c	c	a	c
P	a	c	c	a	c													
1	a	c	$\underline{c}$	a	c													
2			a	c	c	$\underline{a}$	c											
3				a	c	$\underline{c}$	a	c										
4					_	a	c	c	a	c								
5											a	c	$\underline{c}$	a	c			
6													a	c	c	$\underline{a}$	c	
7														a	c	c	a	c
8																		
9																		
10																		

注：最后空了三行

算法设计与分析 2021 秋考题说明

一、**算法设计与分析 2021 秋，试卷第五题，**关于贪心算法的考题（移除 k 位数字），贪心策略的标准答案为：从左往右遍历字符串，如果发现前一个数字大于当前位的数字，则将前一个数字删除，使得高位数字尽可能小。批阅时，其他的复杂性较高而结果正确的贪心策略阅卷时也视为正确：例如采用滑动窗口选择最小值作为保留位的贪心策略。

二、**算法设计与分析 2021 秋，试卷第六题，**关于人员安排的问题，由于部分同学对题目的理解有歧义，现将该题说明如下：

1、作答时认为人员间具有偏序关系，即 $P_1<P_2<P_3<P_4$，那么最优的分配方案是 $\{P_1{:}\,J_2,\ P_2{:}\,J_4, P_3{:}\,J_1, P_4{:}\,J_3\}$。符合该分配结果，使用以下两种思路，并按题目要求正确填写了节点权值和边扩展顺序的，判定正确。

a) 使用课件上讲授的人员安排问题的解法

b) 使用类似旅行商问题的解法，也即多次对代价矩阵进行优化

2、作答时认为人员间无偏序关系，那么最优的分配方案是 $\{P_1{:}\,J_4,\ P_2{:}\,J_3, P_3{:}\,J_1, P_4{:}\,J_2\}$。符合该分配结果，只要按给定的图，正确使用基于爬山法的分支界限方法，并按题目要求正确填写了节点权值和边扩展顺序的，判定正确。

3、不属上述理解的或虽属上述理解但填写节点权值和边扩展顺序有错误的，则根据作答情况，酌情扣分。