近世代数

计算机科学与技术学院
唐琳琳

内容

第二章 群

- 群同态与同构的简单性质
- 正规子群和商群
- 群同态基本定理
- 群的同构定理
- 群的自同构群
- *Sylow定理
- *有限交换群

群同态基本定理

- **定理1**：设N是群G的任一正规子群，则

$$G \sim G/N \text{，}$$

即任何群均与其商群同态。

证明：在群G与商群 G/N 间建立以下映射：

$$\tau : a \to aN \qquad (\forall a \in G) \text{。}$$

这是G到 G/N 的一个满射。

又任取 $a,b \in G$，则有

$$ab \to (ab)N = (aN)(bN) \text{，}$$

即 τ 是G到 G/N 的一个同态满射。故 $G \sim G/N$ 。

称群G到商群 G/N 的这个同态满射 τ 为G到商群 G/N 的自然同态。

群同态基本定理

- 定义：设 φ 是群G到群 $\overline{G}$ 的一个同态映射, $\overline{G}$ 的单位元在 φ 之下所有逆象作成的集合，叫做 φ 的核，记为 $Ker\varphi$。群G中所有元在 φ 之下的像作成的集合 $\varphi(G)$，称为 φ 的像集。记为 $\mathrm{Im}\,\varphi$。
- $Ker\varphi \le G$，$\mathrm{Im}\,\varphi \le \overline{G}$
- 定理1中同态映射 τ 的核就是N。

•**定理2**：（群同态基本定理）设 φ 是群G到群 $\overline{G}$ 的一个同态满射。则

$$N = Ker\varphi \trianglelefteq G \text{ ，且}$$

$$G/N \cong \overline{G} \text{ 。}$$

证明：首先, $\overline{G}$ 的单位元群是 $\overline{G}$ 的一个正规子群，故 $N = Ker\varphi$ 是群G的一个正规子群。

其次，证明同构。设

$$\varphi: a \to \overline{a} \qquad \left(a \in G, \overline{a} \in \overline{G}\right),$$

则在 G/N 和 $\overline{G}$ 之间建立以下映射：

群同态基本定理

$$\sigma : aN \to \bar{a} = \varphi(a)\text{。}$$

1）是映射：对于$\forall aN \in G/N$,$a \in G, \varphi(a)$ 唯一的存在于$\bar{G}$，即 G/N 中每个元素在 σ 下都有唯一的元素与之对应。

2）满射：任取 $\bar{a} \in \bar{G}$，则因φ 是满射，故有$a \in G$ 使 $\varphi(a) = \bar{a}$ 。从而在 σ 之下元素 $\bar{a}$ 在 G/N中有逆像aN，即σ为G/N到$\bar{G}$的一个满射。

3）单射：若$aN \neq bN$，则 $a^{-1}b \notin N$，从而$\bar{a}^{-1}\bar{b} \neq \bar{e}$，即 $\bar{a} \neq \bar{b}$。即 σ 为G/N 到$\bar{G}$ 的一个单射。

故，σ 为G/N 到$\bar{G}$的一个双射。

又由于

$$(aN)(bN) = abN \to \overline{ab} = \bar{a}\bar{b}\text{，}$$

故 σ 保持运算，从而为同构映射，于是有$G/N \cong \bar{G}$ 。

群同态基本定理

- 注：本定理中φ 为一同态满射。若 φ 只是一个同态映射（不一定是满射），虽然也有$Ker\varphi \trianglelefteq G$，但最后结论应改为

$$G/Ker\varphi \cong \varphi(G) = \mathrm{Im}\,\varphi$$ 。

- 总结：由定理1和定理2可知：

$G \xrightarrow{\varphi} \overline{G}$，　　　　$G \xrightarrow{\tau} G/N \xrightarrow{\sigma} \overline{G}$

$a \to \overline{a} = \varphi(a)$；　　　　$a \to aN \to \overline{a} = \varphi(a)$；

其中$N = Ker\varphi$ 。因此，$\varphi = \sigma\tau$，交换图如下

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau"'] & \overline{G} \\
G/N \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

群同态基本定理

- 注：每个群能且只能同它的商群同态。（同构意义下）
- 若$G \sim \overline{G}$，且同态核为N，则$\overline{G}$中每一个元素的全体逆象恰好都是关于N的一个陪集。$\overline{G}$中元素与陪集的这种对应不仅是一个双射，而且还是同构映射。
- 推论1：设G与$\overline{G}$是两个有限群。如果$G \sim \overline{G}$，则

$$\left|\overline{G}\right| \mid \left|G\right|$$ 。

证明：因为$G \sim \overline{G}$，设此同态核为N，则由定理2知，

$$G/N \cong \overline{G}$$ ，

从而$\left|G/N\right| = \left|\overline{G}\right|$，由Lagrange定理知$\left|G/N\right| \mid \left|G\right|$，故有上结论成立。

群同态基本定理

- **定理3**：设G与$\overline{G}$是两个群且 $G\sim\overline{G}$。若G是循环群，则 $\overline{G}$ 也是循环群。即循环群的同态像必为循环群。

证明：设 $G=\langle a\rangle$ 。由于$G\sim\overline{G}$ ，设在此同态下G的生成元a在$\overline{G}$中的像是$\overline{a}$ ，下证$\overline{G}=\langle\overline{a}\rangle$。

实际上,$\langle\overline{a}\rangle\subseteq\overline{G}$ 显然， 取$\forall\overline{x}\in\overline{G}$ 令

$$x\to\overline{x}\qquad\left(x\in G=\langle a\rangle\right),$$

且 $x=a^m$ ，有

$$a^m\to\overline{a}^m\ ,$$

故$\overline{x}=\overline{a}^m\in\langle\overline{a}\rangle$，于是有$\overline{G}\subseteq\langle\overline{a}\rangle$，故得 $\overline{G}=\langle\overline{a}\rangle$ 。

- 注：同态满射下，循环群的生成元的像也是生成元。
- **推论2**：循环群的商群也是循环群。

群同态基本定理

- 引理：设 φ 是群G到群$\overline{G}$的一个同态映射，又$H \leq G$ 。如果$H \supseteq Ker\varphi$，则

$$\varphi^{-1}\left[\varphi(H)\right]=H \quad 。$$

证明：首先，

$$H \subseteq \varphi^{-1}\left[\varphi(H)\right] \quad 。$$

其次，任取 $x \in \varphi^{-1}\left[\varphi(H)\right]$，则$\varphi(x) \in \varphi(H)$。于是有$h \in H$使

$$\varphi(h)=\varphi(x), \quad \varphi\left(h^{-1}x\right)=\overline{e} \quad ,$$

从而 $h^{-1}x \in Ker\varphi$，但由假设$Ker\varphi \subseteq H$，故

$$h^{-1}x \in H, \quad x \in H \quad 。$$

于是又有 $\varphi^{-1}\left[\varphi(H)\right] \subseteq H$，故原结论成立：$\varphi^{-1}\left[\varphi(H)\right]=H$。

群同态基本定理

- **定理4**：设 φ 是群G到 $\bar{G}$ 的一个同态满射，核是K，则G的包含K的所有子群与 $\bar{G}$ 的所有子群间可建立一个保持包含关系的双射。

证明：设M是G的含K的所有子群作成的集合，$\bar{M}$是 $\bar{G}$ 的所有子群的集合，则易知

$$f: H \to \varphi(H) \qquad (\forall H \in M)$$

是M到$\bar{M}$的一个映射；其次任取 $\bar{H} \in \bar{M}$，并令$H = \varphi^{-1}(\bar{H})$，则由第一节的定理2可知，H是G的一个子群且包含核K，故$H \in M$。再由于φ 是满同态，故

$$\varphi(H) = \varphi\left[\varphi^{-1}(\bar{H})\right] = \bar{H} \text{ ,}$$

即 f 是M到$\bar{M}$ 的一个满射。

最后，任取 $H_1, H_2 \in M$，若$f(H_1) = f(H_2)$，即

$$\varphi(H_1) = \varphi(H_2) \text{ ,}$$

则 $\varphi^{-1}\left[\varphi(H_1)\right] = \varphi^{-1}\left[\varphi(H_2)\right]$，由引理知,$H_1 = H_2$。即 f 是单射。

因此,f 是 M到$\bar{M}$的一个双射。

群同态基本定理

又有对M中H_1与H_2，$H_1 \subseteq H_2$当且仅当$\varphi(H_1) \subseteq \varphi(H_2)$，即双射$f$还保持M与$\bar{M}$中子群间的包含关系。

作业

- P97. 1、设群$G\sim\bar{G}$,且同态核是K。证明：G 中二元素在$\bar{G}$ 中有相同的像，当且仅当它们在 K 的同一陪集中。

2、证明：单群的同态像是单群或单位元群（即只含一个元素的群）。