课程基础

什么是形式语言与自动机

定义

形式语言：形式化描述的字母表上的字符串的集合

定义方式

- 通过一定的规则进行描述，根据这些规则能产生相应的符号串
- 通过抽象化的自动机去识别
  该语言由该自动机所能识别的所有符号串组成
  自动机的本质：$\text{当前状态} + \text{输入} \to \text{下一个状态}$

基础知识

字母表

符号的非空有穷集

- 例：$\Sigma = 0, 1$

字符串

字符串

由某字母表中符号组成的有穷序列，又称为句子

- 例：若$\Sigma = \{0, 1\}$，那么$0, 1, 00, 1001$是Σ上的字符串

空串

有0个字符的串，记为ε

符号的使用规定

- 字母表：Σ，Γ，$\ldots$
- 字符：a，b，c，$\ldots$
- 字符串：w，x，y，z，$\ldots$
- 集合：A，B，C，$\ldots$

字符串的长度

字符串中符号所占位置的个数，记为$|\cdot|$

我们使用递归定义，如果字母表为Σ，可以递归定义为：

$$|w| = \begin{cases} 0, & w = \varepsilon \\ |x| + 1, & w = xa \end{cases}$$

其中$a \in \Sigma$，w和x是Σ中字符组成的字符串

字符串的拼接

首尾相连，递归定义为

$$xy = \begin{cases} x, & y = \varepsilon \\ (xz)a, & y = za \end{cases}$$

其中$a \in \Sigma$，且x, y, z都是字符串

- 特别的，对任何字符串x，有$\varepsilon \cdot x = x \cdot \varepsilon = x$

字符串的n次幂

字符串x的n次幂$(n \geq 0)$，递归定义为

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon, & n = 0 \\ x^{n-1}x, & n > 0 \end{cases}$$

- $(ba)^2 = (ba)^1ba = (ba)^0baba = \varepsilon baba = baba$

集合

基本运算

- 交运算：$A \cap B = \{x|x \in A \ and \ x \in B\}$
- 并运算：$A \cup B = \{x|x \in A \ or \ x \in B\}$
- 差运算：$A - B = \{x|x \in A \ and \ x \notin B\}$
- 幂运算：$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & n = 0 \\ A^{n-1}A, & n \geq 1 \end{cases}$
    - 如果Σ是字母表，则Σ^n代表Σ上长度为n的字符串的集合
- 连接运算：$AB = \{w|w = xy, x \in A \ and \ x \in B\}$
- 笛卡尔积：$A \times B = \{(x, y)|x \in A \ and \ x \in B\}$
- 幂集：$2^A = \{B|B \subseteq A\}$，即A的子集构成的集合

克林闭包

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$$

克林闭包则是将Σ上所有长度的字符串放在一个集合中

正闭包

$$\Sigma^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma^i$$

i的下标从**1**开始，意为将Σ上长度至少为**1**的字符串放在一个集合中

显然，我们有

$$\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\varepsilon\}$$

基本的数学证明方法

演绎法

- 大前提：已知的一般性原理
- 小前提：所证明对象的特殊性
- 结论：根据一般性原理，对特殊情况做出判断

例：所有奇数都不能被2整除(大前提)，2100+1是奇数(小前提)，则2100+1不能被2整除(结论)

归纳法

由两部分组成：

- 基础：基本的元素定义
- 归纳：指出用已有元素来构造新元素的规则

- 例：若x和y是Σ上的字符串，请证明$|xy| = |x| + |y|$。
- 证明：通过对$|y|$的归纳来证明。

（1）基础：当$|y| = 0$，即$y = \varepsilon$

$$|x\varepsilon| = |x| \quad \text{连接的定义}$$
$$= |x| + |\varepsilon| \quad \text{长度的定义}$$

(2)归纳：假设$|y| = n$时命题成立，

则当$|y| = n + 1$，即$y = wa$

$$|xy| = |(xw)a| \quad \text{连接的定义}$$
$$= |xw| + 1 \quad \text{长度的定义}$$
$$= |x| + |w| + 1 \quad \text{归纳假设}$$
$$= |x| + |wa| \quad \text{长度的定义}$$

长度定义：

$$|w| = \begin{cases} 0 & , w = \varepsilon \\ |x| + 1, & w = xa \end{cases}$$

反证法

步骤如下：

- 假设反命题成立
- 推理出矛盾的结果
- 指出反命题不成立，原命题成立