上下文无关文法和下推自动机

上下文无关文法

上下文无关文法可以表示**大多数程序设计语言**的语法，尤其是程序中**配对**或者**嵌套**的结构，应用领域有**程序语言的设计、编译器的实现、XML的格式类型定义DTD**

形式定义

上下文无关文法(CFG)，G是一个四元组

$$G = (V, T, P, S)$$

- **字母定义**

V：变元的有穷集

T：终结符的有穷集，$V \cap T = \varnothing$

P：产生式的有穷集：**左部→体/右部**$\in (V \cup T)^*$

S：初始符号

- **简化表达**

多个A的产生式$A \rightarrow \alpha_1, A \rightarrow \alpha_2, \ldots, A \rightarrow \alpha_n$简写为$A \rightarrow \alpha_1|\alpha_2|\alpha_3|\ldots|\alpha_n$

变元A的全体产生式称为A产生式

- **归约和派生**

归约：字符串到文法变元的分析过程，自底向上，从产生式的体向头

派生：文法变元到字符串的分析过程，自顶向下，从产生式的头向体

$\alpha A\beta \underset{G}{\Rightarrow} \alpha\gamma\beta$：当$A \rightarrow \gamma \in P$时，称为$\alpha A\beta$可派生出$\alpha\gamma\beta$，也称$\alpha\gamma\beta$可归约为$\alpha A\beta$

$\alpha A\beta \Rightarrow \alpha\gamma\beta$：$G$在已知情况下，可以省略

$\alpha A\beta \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha\gamma\beta$：经过0步或多步派生

$\alpha A\beta \overset{i}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha\gamma\beta$：恰好经过$i$步派生

$\underset{lm}{\Rightarrow}, \overset{*}{\underset{lm}{\Rightarrow}}$：最左派生，即派生过程中仅替换符号串**最左边的变元**

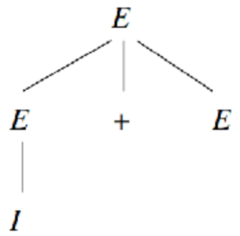
$\underset{rm}{\Rightarrow}, \overset{*}{\underset{rm}{\Rightarrow}}$：最右派生

$A \overset{*}{\Rightarrow} w$当且仅当$A \overset{*}{\underset{lm}{\Rightarrow}} w$，当且仅当$A \overset{*}{\underset{rm}{\Rightarrow}} w$

语法分析树

用来表示派生，可以从树中看出整个派生过程和最终产生的符号串

例：



- **定义**

1. 每个内节点是变元符号$\in V$
2. 每个叶子节点$\in V \cup T \cup \{\varepsilon\}$
3. 若某个内节点标记是A，其子节点从左到右为

$$X_1, X_2, X_3, ... X_n$$

   则$A \to X_1, X_2, X_3, ..., X_n$是$P$的一个产生式

- **相关定理和结论**

语法分析树的全部**叶节点**从左到右连接起来，称为该树的**产物**或**结果**，如果根节点是**初始符号$\mathbf{S}$**，叶节点是**终结符**，那么该树的产物属于$\mathbf{L(G)}$

若某个$\mathbf{X_i}$为ε**，则$\mathbf{X_i}$**一定是**$\mathbf{A}$唯一的子节点，且$\mathbf{A}$** $\to \varepsilon$是一个产生式（*）

- **等价定义，对**$CFG\ \ G = (V, T, P, S), A \in V$，以下命题等价：
  - 文法G中存在以A为根节点，产物为α的语法分析树
  - $A \overset{*}{\Rightarrow} w$
  - $A \underset{lm}{\overset{*}{\Rightarrow}} w$
  - $A \underset{rm}{\overset{*}{\Rightarrow}} w$

文法和语言的歧义性

- 若$CFG\ \ G$使某些符号串有两棵**不同**的语法分析树，则该文法是歧义的，有些文法的歧义性可以通过**重新设计文法**来消除
- 如果上下文无关语言L的所有文法都是有歧义的，则称L是固有歧义的
  - 例：$L = \{a^i b^j c^k | i = j\ or\ j = k\}$是固有歧义的
- 「判定任何给定$CFG\ \ G$是否是有歧义的」是一个不可判定问题

文法的化简

- **定理：每个不带**ε的**$\mathbf{CFL}$都可以由一个不带无用符号，**$\varepsilon-$产生式和单元产生式的文法来定义
- 文法化简的可靠顺序
  - 消除$\varepsilon-$产生式
  - 消除单元产生式
  - 消除非产生的无用符号
  - 消除非可达的无用符号

消除$\varepsilon-$产生式

注意，对于$CFG\ \ L$，消除了$\varepsilon-$产生式之后，该文法对应的语言为$L-\{\varepsilon\}$，若空串本身不在该语言中，则$L=L-\{\varepsilon\}$

- **确定可空变元**
  - 若$A\rightarrow\varepsilon$，则A是可空的
  - 若$B\rightarrow\alpha$，且α中每个符号都是可空的，则B是可空的
- **替换产生式，对含有可空变元的一条产生式$\mathbf{A\rightarrow X_1,X_2,...,X_n}$，用一*组*产生式$\mathbf{A\rightarrow Y_1,Y_2,...,Y_n}$代替**
  - 若X_i不是可空的，则Y_i为X_i
  - 若X_i是可空的，则Y_i为X_i或ε
  - Y_i不全为ε

> 注意最后要先删除所有的ε-产生式，如果题目明确要求了化简后还要保留语言中的空串，则再加个产生式$S\rightarrow\varepsilon$即可，根据题意决定操作

消除单元产生式

- **确定单元对**：如果有$A\overset{*}{\Rightarrow}B$，则称$[A,B]$为单元对（注意这里的$A$和$B$都是单个**变元**）
  - 若$A\rightarrow B\in P$则$[A,B]$是单元对
  - 若$[A,B]$和$[B,C]$都是单元对，则$[A,C]$是单元对
- **消除单元产生式**
  - 删除全部形为$A\rightarrow B$的单元产生式
  - 对每个单元对$[A,B]$，将B的产生式复制给A

消除无用符号

若$S\overset{*}{\Rightarrow}\alpha X\beta$，则$X$是可达的，若$\alpha X\beta\overset{*}{\Rightarrow}w(w\in T^*)$，则$X$是产生的

如果X既是产生的，也是可达的，则X是有用的，注意这里的$\mathbf{X\in(V\cup T)}$

- 计算"产生的"符号集
  - T中符号都是产生的
  - 对产生式$A\rightarrow\alpha\in P$且α中符号**都是产生的**，则A是产生的
- 计算"可达的"符号集
  - 符号S是可达的
  - 对产生式$A\rightarrow\alpha\in P$且A是可达的，则α中符号**都是可达的**
- 删除全部含有"非产生的"和"非可达的"符号的产生式

文法的范式

乔姆斯基范式CNF

- 定义：每个不带ε的CFL都可以由这样的$CFG\ \ G$定义，G中每个产生式的形式都为：

  $$A\rightarrow BC\text{ 或 }A\rightarrow a$$

  其中A,B,C是变元，a是终结符

- **转换方法**

1. 设文法不带无用符号，$\varepsilon-$产生式和单元产生式（任何文法都可以化简成这种形式）

2. 考虑文法每个形式为$A \to X_1, X_2, \dots X_m (m \geq 2)$的产生式，若$X_i$为终结符$a$，则引入新变元$C_a$替换$X_i$并增加新产生式$C_a \to a$
3. 所有产生式的形式变成$A \to B_1, B_2, \dots, B_m (m \geq 2)$和$B_i$（即$C_a$）$\to a$
4. 对于$A \to B_1 B_2, \dots, B_m (m \geq 2)$，引入新变元$D_1, D_2, \dots, D_{m-2}$，即替换为一组级联产生式

$$A \to B_1 D_1, D_1 \to B_2 D_2, \dots, D_{m-2} \to B_{m-1} B_m$$

格雷巴赫范式GNF

- 定义：每个不带ε的CFL都可以由这样的$CFG\ \ G$定义，G中每个产生式的形式都为

$$A \to a\alpha$$

其中A是变元，a是终结符，α是**零或多个**变元的串

关于GNF，要记住的是，其每个产生式都会引入一个**终结符**，长度为**n**的串的派生恰好是**n**步

下推自动机

形式定义

- **定义下推自动机（PDA）P为七元组**

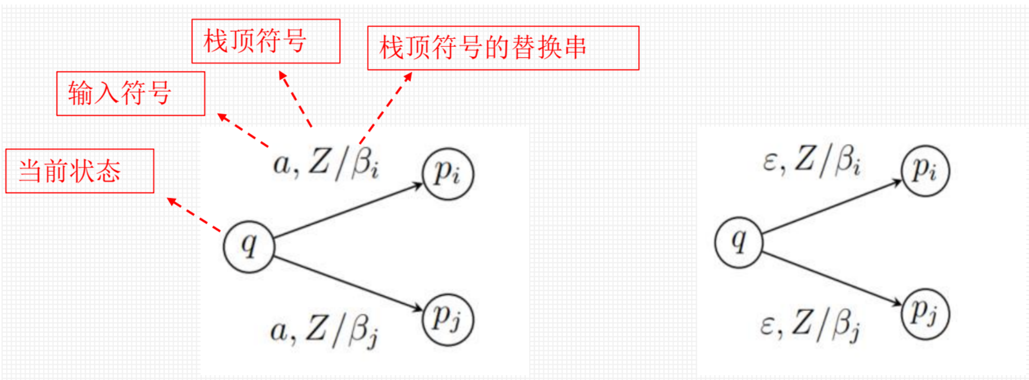
$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

  - Q：有穷状态集
  - Σ：有穷输入符号集
  - Γ：有穷栈符号集
  - $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$：状态转移函数
  - $q_0 \in Q$：初始状态
  - Z_0：初始栈底符号
  - $F \subseteq Q$：接受状态集
- PDA的动作

若$q, p_i \in Q (1 \leq i \leq m), a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, Z \in \Gamma, \beta_i \in \Gamma^*$，则$\delta(q, a, Z)$表示如下的动作：

$$\delta(q, a, Z) = \{(p_1, \beta_1), (p_2, \beta_2), \dots, (p_m, \beta_m)\}$$
$$\text{或}$$
$$\delta(q, \varepsilon, Z) = \{(p_1, \beta_1), (p_2, \beta_2), \dots, (p_m, \beta_m)\}$$

- **状态转移图**



- **瞬时描述**

$(q, aw, Z\alpha) \vdash_p (p, w, \beta\alpha)$：在状态$q$从当前符号串$aw$中消耗$a$(可为$\varepsilon$)，转移到状态$p$，同时用$\beta$(可为$\varepsilon$)替换栈顶的$Z$，余下的符号串为$w$

$(q, aw, Z\alpha) \vdash (p, w, \beta\alpha)$：所指$PDA$明确时，可以忽略角标$p$

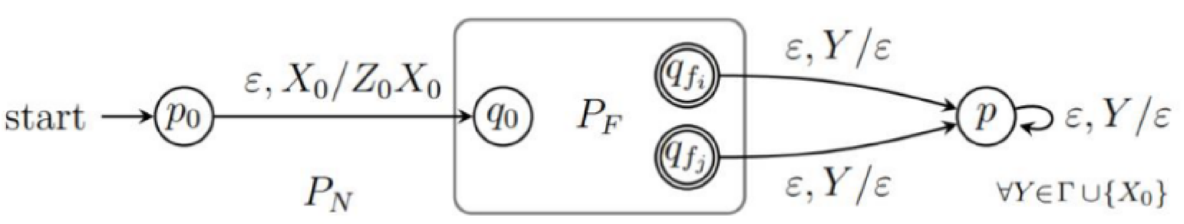
$(q, aw, Z\alpha) \vdash^* (p, w, \beta\alpha)$：经过**零个或多个动作**进行转移

终态方式和空栈方式的转换

首先明确两种方式的区别：

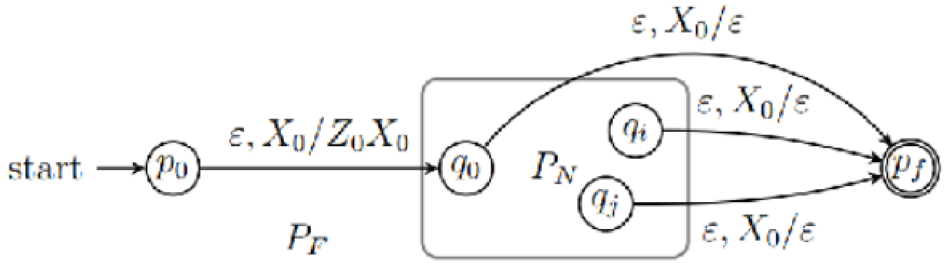
- **终态方式：** $L(P) = \{w | (q_0, w, Z_0 \vdash^* (p, \varepsilon, \gamma), p \in F\}$
  - 检查符号串是否消耗完
  - 检查是否进入了接受状态
- **空栈方式：** $N(P) = \{w | (q_0, w, Z_0 \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)\}$
  - 检查符号串是否消耗完
  - 检查栈是否已清空
- **定理**
  如果PDA P_F以终态方式接受语言L, 那么一定存在PDA P_N以空栈方式接受L
  如果PDA P_N以空栈方式接受语言L, 那么一定存在PDA P_F以终态方式接受L
  证明略

从终态方式到空栈方式



- 设$P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_F, q_0, Z_0, F)$
  构造$P_N = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0, \varnothing)$*即添加了新的开始状态*$q_0$、消除状态$q$*和一个栈符号$X_0$
- 先将P_F的栈底符号Z_0压栈
  $\delta_N(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$
- 模拟P_F的动作
  $\delta_N(q, a, Y)$包含$\delta_F(q, a, Y)$的全部元素
- 从$q_f \in F$开始弹出栈中符号
  $\delta_N(q_f, \varepsilon, Y)$包含$(p, \varepsilon)$
- 状态p时，弹出全部栈中符号，即$\forall Y \in \Gamma \cup \{X_0\}$
  $\delta_N(p, \varepsilon, Y) = \{(p, \varepsilon)\}$

从空栈方式到终态方式



- 设$P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0, \varnothing)$
  构造$P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$
- 开始时，将P_N栈底符号Z_0压栈
  $\delta_F(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$
- 模拟P_N的动作
  $\delta_F(q, a, Y)$包含$\delta_N(q, a, Y)$的全部元素
- $\forall q \in Q$，看到P_F的栈底X_0，则转移到新的终态p_f
  $\delta_F(q, \varepsilon, X_0) = \{(p_f, \varepsilon)\}$

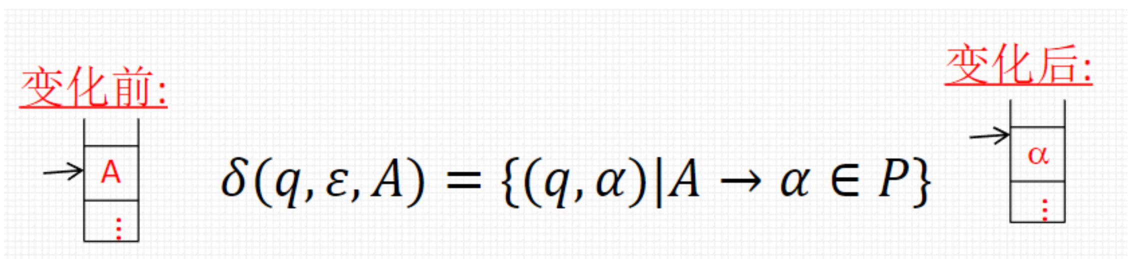
下推自动机和文法的等价性

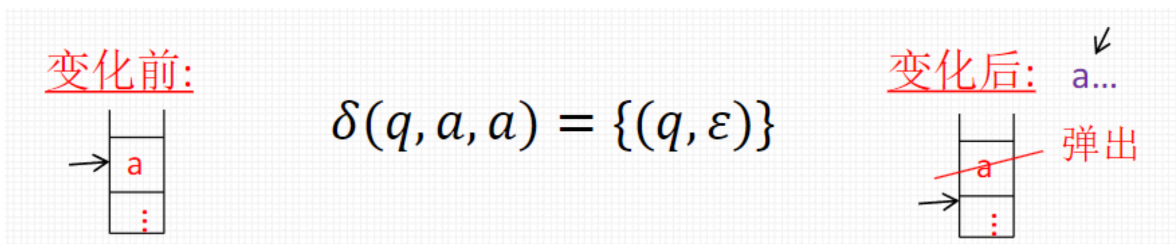
任意CFG到PDA

- 定理：对任何$CFL\ \ L$，一定存在$PDA\ \ P$，使得$L = N(P)$
- 构造方法
  给定$CFG\ \ G = (V, T, P, S)$
  构造$PDA\ \ P_N = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S, \varnothing)$

  其中δ:

  1. 对每个变元A，输入空串，压入产生式：$\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \alpha) | A \to \alpha \in P\}$
  2. 对每个终结符a，输入字符，弹出字符a：$\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$





这种方法构造出来的PDA在实际识别的时候会产生大量的**dead paths**，识别时只针对正确的路径分析即可

GNF到PDA

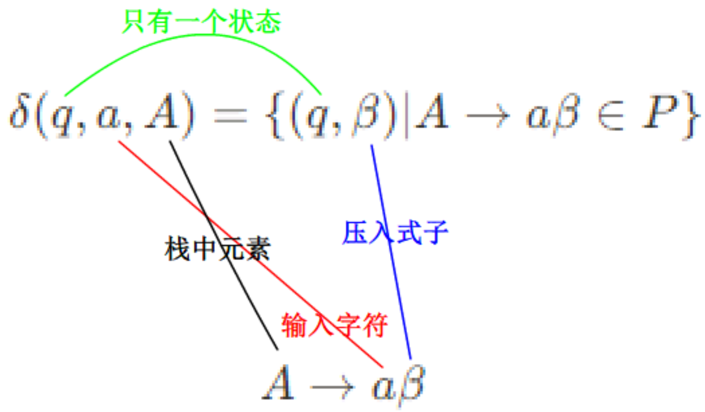
- 构造方法

如果有GNF格式的$CFG\ \ G = (V, T, P, S)$，那么构造$PDA\ \ P_N = \{\{q\}, T, V, \delta, q, S, \varnothing\}$

对**每个产生式**$A \to a\beta$，定义δ为：

$$\delta(q,a,A)=\{(q,\beta)|A\to a\beta\in P\}$$

他们之间的关系是这样的：



PDA到CFG

如果$PDA\ \ P_N=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,\varnothing)$，有$L=N(P)$（即$P_N$以空栈方式接受$L$）
那么可以构造$CFG\ \ G=(V,\Sigma,P,S)$，其中：

变元$V=\{[qXp]\mid p,q\in Q,X\in\Gamma\}\cup\{S\}$

产生式集合P包括：

1. $\forall p\in Q$，构造产生式$S\to[q_0Z_0p]$
2. $\forall(p,Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)\in\delta(q,a,X)$，构造$|Q|^n$个产生式

$$[qXr_n]\to a[pY_1r_1][r_1Y_2r_2]\ldots[r_{n-1}Y_nr_n]$$
$$\text{其中}a\in\Sigma\cup\{\varepsilon\};\quad X,Y_i\in\Gamma;\quad r_i\text{是}Q\text{中任意一个状态}$$

3. $\forall(p,Y_1Y_2\ldots Y_n)\in\delta(q,a,X)$，若$Y_1Y_2\ldots Y_n=\varepsilon$，则有产生式$[qXp]\to a$（这代表着从状态$q$完全弹出栈符号$X$到状态$p$，只需要接受一个符号$a$）

- 通常我们在完成了上述步骤之后，还需要**消除无用符号**，这是因为，在上面的过程中我们多次地**假定所有状态之间相互可达**，假如某个状态q_i是不能到达q_j的，但是我们在构造产生式时还是会用到状态$[q_iXq_j]$，因此是需要消除无用符号的
- PPT上的例题是没有消除ε-产生式的
- 此外，为了化简方便，可以进一步使用$A,B,\ldots$替换这些看起来复杂的变元

细节方面

在构造的过程中，大量地使用了「穷举」的思想，需要后续来消除无用的符号

确定型下推自动机

- 定义，如果$PDA\ \ P=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$满足：
  - 对于任何的(q,a,X)组合，$q\in Q,a\in\Sigma\cup\{\varepsilon\},X\in\Gamma,\delta(q,a,X)$至多有一个转移
  - 如果$\delta(q,a,X)$对于某个$a\in\Sigma$是有定义的，则$(q,\varepsilon,X)=\varnothing$
- 上面的定义可以从两个方面考虑：
  - 在确定某个状态q、某个栈顶符号X和输入字符a下，状态转移的结果数量最多一个
  - 在确定某个状态q、某个栈顶符号X下，不可能既能接受终结符a进行状态转移，又可以接受空字符ε进行状态转移
- 表示语言的能力上$DFA\Leftrightarrow NFA$，但是$DPDA$和PDA不等价

- **终态方式**

$DPDA$以终态方式接受的语言也被称为$DCFL$（确定的上下文无关语言）

$RL \subset DCFL$（正则语言真包含于$DCFL$）

$DCFL$应用于：

1. 非固有歧义语言的真子集
2. 著名语法分析器YACC的基础$LR(k)$文法是$DCFL$的子集

- **空栈方式**

定义：语言L中不存在字符串x和y，使x是y的前缀，则L具有前缀性质

定理：如果$L = N(P)$，即被某个$DPDA\ \ P$以空栈方式接受，当且仅当L有前缀性质，且存在以终态方式接受的$DPDA\ \ P'$使$L = L(P')$

$DPDA\ \ P$的$N(P)$更有限，不能接受0^*

- $DPDA$与歧义文法

定理：$DPDA\ \ P$，语言$L = L(P)$，那么L有无歧义的CFG

定理：$DPDA\ \ P$，语言$L = N(P)$，那么L有无歧义的CFG