



近世代数

计算机科学与技术学院

苏敬勇



内容

- 1. 集合
- 2. 映射与变换
- 3. 代数运算
- 4. 运算律
- 5. 同态与同构
- 6. 等价关系与集合的分类

等价关系

• 定义

➤ 集合 M 上的一个法则 R ，如果对与 M 上的任意一对元素 a 和 b 总能由其判断出是否满足关系 R ，或者说，要么满足关系 R 要么不满足关系 R ，那么 R 就称为集合 M 上元素之间的一个关系，或者简称为 M 的一个关系。

$$aRb$$

$$a\bar{R}b$$

• 例子

1. 有理数集 Q ，法则 R 定义如下，判断它是否是 Q 的一个关系？

$$\because 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore 2\bar{R}\frac{1}{3}$$

$$aRb \Leftrightarrow a + b \in Z$$

$$\because 2 + 3 = 5$$

$$\therefore 2R3$$

$$\because \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

$$\therefore \frac{1}{2}R\frac{3}{2}$$

等价关系

• 例子

➤2. $M = R$, 法则R定义如下,判断其是否是 M 的一个关系?

$$aRb \Leftrightarrow a < b$$

$$\because 2 < 3, \therefore 2R3 \qquad \because 3 \not< 2, \therefore 3\bar{R}2 \qquad \because 2 \not< 2, \therefore 2\bar{R}2$$

➤3. $M = Z$, 法则 R定义如下, 判断其是否是 M 的一个关系?

$$aRb \Leftrightarrow \frac{a}{b} > 0$$

因为 $b=0$ 时, 法则无意义故不满足定义中“任意一对”, 它不是原集合的一个关系。

等价关系

- 例子

➤ 4. $M = \mathbb{Q}_+$, 法则 R 定义如下, 判断其是否是 M 的一个关系?

$$\frac{b}{a} R \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{b+d}{a+c} < 1$$

例

$$\therefore \frac{1+3}{2+2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} \bar{R} \frac{3}{2}$$

but

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{2+3}{4+2} = \frac{5}{6} < 1$$

$$\frac{2}{4} R \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} R \frac{3}{2}$$

no so called **determinacy**

等价关系

• 定义

➤ 若集合 M 上的一个关系 R 满足以下三个条件：

(1) 对 $\forall a \in M$, 总有 aRa ----- 反身性

(2) 若 aRb , 那么 bRa ----- 对称性

(3) 若 aRb , bRc , 那么 aRc ----- 传递性

那么关系 R 就被称为集合 M 的一个等价关系。

记为 “ \sim ”, $a \sim b$ 就表示 a 与 b 等价。

等价关系

- 例子

➤ 1. 设集合 $M = \mathbb{Z}$, 法则 R 定义如下, 判断其是否是 M 的一个关系? 是否是一个等价关系?

$$aRb \Leftrightarrow a|b$$

但不是 $M = Z$ 的一个等价关系。

反身性 ×

对称性 $\times \begin{array}{cc} 2|6 & 6|2 \\ 2R6 & 6\bar{R}2 \end{array}$

传递性

等价关系

- 例子

➤ 2. 集合 $M = \mathbb{Z}$, 对 $\forall n \in \mathbb{Z}, n > 0$, 如下定义的法則 R 是否是它的一个等价关系?

$$aRb \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

检验定义条件

集合的分类

- 定义

- 若把集合 M 的全体元素分成若干个互不相交的子集 (i.e., 任二子集之间没有公共元素), 则称每一个子集 M 的一个类, 类的全体叫做 M 的一个分类。
- 集合的分类 和 等价关系之间有密切关联。

等价关系和集合的分类

• 定理 1

➤ 集合 M 的一个分类决定了集合 M 的一个等价关系.

$$aRb \Leftrightarrow a, b \in \text{one class}$$

首先，是个关系——集合分类的定义。

其次，验证等价关系的三个条件：

自反性——分类要求所有元素参与。

对称性——同一个类是一个子集，无序。

传递性——类与类之间无交。

等价关系与集合的分类

• 定理 2

➤集合 M 的一个等价关系决定了集合 M 的一个分类。

证明：设 \sim 是集合 M 的一个等价关系. 目标找到一个集合的分类方法：

对 $\forall a \in M$, 设 $\bar{a} = \{x | a \sim x, x \in M\}$, 那么

- 因 $\forall a \in M$, $a \sim a$, 所以 $a \in \bar{a}$ 。任一元素都属于某一个子集。
- 若有某一个元素属于了不同的两个子集, 则有 $a \in \bar{b}, a \in \bar{c}$

$$a \sim b, a \sim c \Rightarrow b \sim c$$

那么 $\forall x \in \bar{b}$, $x \sim b \Rightarrow x \sim c \Rightarrow x \in \bar{c}$, 即 $\bar{b} \subseteq \bar{c}$

同理可以得到 $\bar{c} \subseteq \bar{b}$, 从而得到 $\bar{b} = \bar{c}$ 。任二子集不相交。

等价关系与集合的分类

- 例子

➤ 给出整数集 \mathbb{Z} 关于如下等价关系的分类.

$$aRb \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{4}$$

$$\{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

$$\{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$\{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$

$$\{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$$

他们称为模4的剩余类 或 模4的同余类，记为： $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ 。

模 n 的剩余类

等价关系与集合的分类

• 练习

➤ 1. 设集合 $M = \mathbb{Z}$, 法则 $aRb \Leftrightarrow 4 \mid a+b$ 是否是 M 的一个关系?
是否是 M 的一个等价关系?

反身性 \times $1\bar{R}1$

对称性 \checkmark

传递性 \times $1R7, 7R5$ $1\bar{R}5$

以下哪些关系是实数集R的等价关系？（ ）


$$aRb \Leftrightarrow a \leq b$$

$$aRb \Leftrightarrow ab \geq 0$$

$$aRb \Leftrightarrow a = b$$

$$aRb \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 0$$

提交

以下哪些关系是实数集 R 的等价关系？（ ）

A

$$aRb \Leftrightarrow a \leq b$$

B

$$aRb \Leftrightarrow ab \geq 0$$

C

$$aRb \Leftrightarrow a = b$$

D

$$aRb \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 0$$

提交

等价关系与集合的分类

• 练习

➤ 3. 给出实数集 R 由以下等价关系决定的集合的分类。

(3)
$$aRb \Leftrightarrow a = b$$

$\bar{a} = \{a\}$ ，每一个元素自己构成的子集成为一个类。

(4)
$$aRb \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 0$$

R ，全集是唯一的一个类。

等价关系与集合的分类

• 练习

➤4. 设计出3个满足两个等价关系条件但不满足剩余一个条件的实数集 R 的关系。

练习 2. (1) and (2) ----- to some set

$$aRb \Leftrightarrow a \leq b$$

$$aRb \Leftrightarrow ab \geq 0$$

$$(3) \quad aRb \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0$$

自反性

×

对称性

✓

传递性

✓

作业

- 非空集合 M ，设 $I = \{(a, b) | a, b \in M\}$ 。求证 M 的一个关系决定 I 的一个子集； I 的一个子集也决定了 M 的一个关系。且不同的关系决定出了 I 的不同子集。