

计算方法 2022 期末考试回忆版

By CandyOre 2022.6.18

注：每题大概 10 分，有 8 分和 12 分的题。

一、求 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的 1 范数、2 范数、无穷范数、条件数。

二、建立 $f(x) = x^3 - 2$ 的牛顿迭代法公式，并求关于误差的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i^2}$ 。

三、利用梯形求积法数值计算 $\int_1^2 x^3 dx$ 。

四、利用 LU 分解求解方程 $Ax = b$ ，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 。

五、分别建立 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法求解方程 $Ax = b$ 的公式，并分别分析迭代公式

的收敛性，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

六、利用 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $x = 1, 4, 9$ 处函数值做拉格朗日二次插值，并求余项。

七、求参数使得求积公式 $\int_{-1}^1 f(x) dx = A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$ 代数精度最大。

八、利用 $1, x$ 的线性组合逼近 $f(x) = x^3 + 3x + 2$ ，求最佳平方逼近多项式。

九、函数 $\varphi(x)$ 满足以下性质： $x \in [a, b]$ 时 $\varphi(x) \in [a, b]$ ；对任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$ ，存在 $L < 1$ ，使得 $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ 。对任意初值 $x_0 \in [a, b]$ 的单点定常迭代法，求证以下结论：

(1) $\varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有且仅有一个不动点。

(2) 证明迭代收敛于根 x^* 。

(3) 证明： $|x^* - x_i| \leq \frac{1}{1-L} |x_{i+1} - x_i|$, $|x^* - x_i| \leq \frac{L^i}{1-L} |x_1 - x_0|$ 。

十、给定带一个参数的线性多步法公式，计算特殊取值时方法的阶及局部截断误差首项，并求该公式收敛时的参数取值范围。