

近世代数 2021 秋期末试题（回忆版）

By CandyOre¹

一. 选择题 (2' × 10)

1. 代数系统 A 有 n 个元素, A 上代数运算有 n^{n^2} 种;
2. 集合 A 有 n 个元素, 则 $|T(M)|=\underline{n^n}$, $|S(M)|=\underline{n!}$;
3. $\phi: A \rightarrow B$ 是满射等价于 $\phi(A) = B$;
4. 子群与群的单位元不可能不一致;
5. 正整数上整除关系不是等价关系;
6. 平凡子群是全特征子群; (以下是三个错误的选项)
 - i. 有限群子群的阶可以不是原群阶的因子;
 - ii. 两子群相乘可作成原群的子群;
 - iii. 单群只有两个子群;
7. 循环群商群一定是循环群;
8. 同一变换群中不能同时有双射变换和非双射变换;
9. 置换奇偶性和对换个数奇偶性相同;

二. 填空题 (2' × 15)

1. $\tau: G \sim G/N, N \trianglelefteq G$, 则 $\ker \tau = \underline{N}$; 于是, 同构意义下, 群仅于商群同态; 如果 $\phi: G \sim G'$, 则 $|G'|$ 被 $|G|$ 整除;
2. 若阶大于 1 的非交换群 G 上的子群都是正规子群, 则 G 是 Hamilton 群; 最小的这种群是 8 阶; 如果 $\{a, b, \dots\}$ 是一个左陪集代表系, 则一个右陪集代表系是 $\{a^{-1}, b^{-1}, \dots\}$;
3. $H \leq G$, 则拉格朗日定理书写为 $|G| = |H|(G:H)$; 于是有限群子群的阶是原群阶的因子; 如果 $H \trianglelefteq G$, 则拉格朗日定理可以书写为 $|G| = |H|(G/H)$;
4. 整环可逆元有1, -1; n 阶有限循环环生成元有 $\phi(n)$ 个; 如果环有单位元, $\text{char } R =$ 单位元在加群中的阶;
5. 除环和域没有零因子; 环中左消去律或右消去律成立, 则环的零因子不存在; 高斯环的单位群是 $\{1, -1, i, -i\}$;

三. 计算题 (10' × 2)

1. 写出十阶循环群的生成元和子群;
 - i. 生成元 a, a^3, a^7, a^9 , 子群 $\langle a \rangle, \langle a^2 \rangle, \langle a^5 \rangle$;
2. $\tau = (12)(435), \sigma = (153)(24)$, 计算 $\sigma\tau\sigma^{-1}$;
 - i. $\sigma\tau\sigma^{-1} = (45)(132)$;

四. 证明题 (4' + 6' + 8' + 12')

1. 证明: 所有元素的平方都是单位元的群是Abel群;
2. 证明: 循环群的同态群都是循环群;
3. 证明: $S_4/K_4 \cong S_3$;
4. 通过举例分析环和子环的单位元情况;
 - i. 提示: 有五种 (提示: 原卷没有提示)

¹ 试题属于哈尔滨工业大学 (深圳)。本文档允许不修改地转载, 但任何基于本文档的修改/重构等行为, 应事先与 CandyOre 取得联系。