第五部分全真测试卷答案

全真模拟试卷 1 答案

一、 选择题

1、A　2、A　3、C　4、D　5、D　6、C

二、填空题

7、e^{-2}　8、$y=x+1$　9、8　10、$[2,4)$

11、$\int_{-2}^{0}dx\int_{2x+4}^{4-x^2}f(x,y)dy$　12、$x=1$；0。

三、计算题

13．解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3}\cdot\frac{1-\cos(\sin x)}{x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{6}\text{。}$$

注：当$x\to 0$时，$\tan x\sim x, 1-\cos(\sin x)\sim\dfrac{1}{2}\sin^2 x\sim\dfrac{1}{2}x^2$。

14．解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^2-2t}{1-\frac{1}{1+t}}=3t^2+t-2$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t+1}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{6t^2+7t+1}{t}\text{。}$$

15．解：原式$=\int\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}d(\ln x)\overset{令\ln x=t}{=}\int\dfrac{t}{\sqrt{1+t}}dt\overset{令\sqrt{1+t}=u}{=}\int\dfrac{u^2-1}{u}\cdot 2udu$

$=\int(2u^2-2)du=\dfrac{2}{3}u^3-2u+C=\dfrac{2}{3}(1+\ln x)\sqrt{1+\ln x}-2\sqrt{1+\ln x}+C$。

16．解：原式$=\begin{array}{l}2\int_1^e \ln x d\left(\sqrt{x}\right)=2[\sqrt{x}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{x}dx] \\ =2\sqrt{e}-4\sqrt{x}\Big|_1^e=4-2\sqrt{e}\end{array}$。

17．解：由已知条件可得，直线过点 A（-1，2，0），

所求直线的方向向量$\vec{s}\perp$已知直线的方向向量$\vec{s_0}=(3,-4,0)$，所求直线的方向向量$\vec{s}\perp$已知平面的法向量$\vec{n}=(2,-3,4)$，因而$\vec{s}=\vec{s_0}\times\vec{n}=(-16,-12,-1)$。

由直线方程的点向式得所求的直线方程为：

$\dfrac{x+1}{-16}=\dfrac{y-2}{-12}=\dfrac{z}{-1}$，即$\dfrac{x+1}{16}=\dfrac{y-2}{12}=\dfrac{z}{1}$。

18．解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+g'\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=yf_1'-\dfrac{y}{x^2}g'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot 2y]-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^2}g''\cdot\frac{1}{x}=f_1'+xyf_{11}''+2y^2f_{12}''-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$$

19、解：原式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r\cdot rdr=\dfrac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta d\theta=\dfrac{10}{9}\sqrt{2}$。

20．解：（1）求$y''+2y'-3y=0$的通解Y

特征方程为：$r^2+2r-3=0$，特征根为：$r=-3,r=1$，通解$Y=C_1e^{-3x}+C_2e^x$。

（2）求$y''+2y'-3y=e^{-3x}$的特解y^*

由$f(x)=e^{-3x}$得$n=0,\lambda=-3$为单特征根，所以$k=1$。

特解可设为$y^*=Axe^{-3x}$，求出一阶、二阶导数，代入微分方程，解得$A=-\dfrac{1}{4}$，

因而所求特解为：$y^*=-\dfrac{1}{4}xe^{-3x}$。

（3）由解的结构定理得，所求微分方程的通解为：

$$y = Y + y^* = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x - \frac{1}{4} x e^{-3x}$$ 。

四、证明题

21．证：令 $f(x) = \frac{1}{\alpha} x^\alpha + 1 - \frac{1}{\alpha} - x,\ x \in (0, +\infty)$。

$f'(x) = x^{\alpha-1} - 1$，由 $f'(x) = x^{\alpha-1} - 1 = 0$，得驻点 $x = 1$。

$f''(x) = (\alpha - 1) x^{\alpha-2}$，因为 $f''(1) = \alpha - 1 < 0$，所以 $f(1) = 0$ 为极大值。

因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内只有唯一的极大值 $f(1) = 0$，所以由单峰原理知，

$f(1) = 0$ 也是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的最大值。

故 当 $x > 0$ 时，$f(x) \le f(1) = 0$，即 $\frac{1}{\alpha} x^\alpha + 1 - \frac{1}{\alpha} \le x$。

22．证：$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{2(1 - \cos x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{2 \cdot \frac{1}{2} x^2}{x^2} = 1$，

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\cos x^2}{1} = 1$， $f(0) = 1$，

因为 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$，所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{2(1 - \cos x)}{x^2} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2 - 2\cos x - x^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{2\sin x - 2x}{3x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2\cos x - 2}{6x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2} x^2\right)}{6x} = 0,$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\int_0^x\cos t^2dt}{x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2dt-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2-1}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^4}{2x}=0,$$

因为 $f_-'(0)=f_+'(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

五、综合题

23．解：由 $x=0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点，知 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty$，

由该极限式得 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}(x-a)(x-1)=0\\ \lim\limits_{x\to0}(e^x-b)\neq0\end{cases}$，从而得 $a=0,b\neq1$。

由 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，知 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{e^x-b}{x(x-1)}=A$ (其中 A 为常数)，

因为该极限的分母的极限 $\lim\limits_{x\to1}x(x-1)=0$，而分式极限存在，所以分子极限

$\lim\limits_{x\to1}(e^x-b)=0$，因而 $b=e$。

24．解：（1）直线与抛物线的交点为 (k,k^2)。

$$S_{D_1}=\int_0^k(kx-x^2)dx.=\left(\frac{k}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^k=\frac{1}{6}k^3,$$

$$S_{D_2}=\int_k^1(x^2-kx)dx=\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{k}{2}x^2\right)\Big|_k^1=\frac{1}{3}-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}k^3,$$

由 $S_{D_1}=S_{D_2}$ 得 $\frac{1}{6}k^3=\frac{1}{3}-\frac{k}{2}+\frac{1}{6}k^3$ ，解得 $k=\frac{2}{3}$ 。

（2）当两者面积相等时，$k=\frac{2}{3}$，交点为$\left(\frac{2}{3},\frac{4}{9}\right)$。

$$V_y=\pi\int_0^{\frac{4}{9}}ydy-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{4}{9}=\frac{8\pi}{243},$$

$$V_x=\pi\int_{\frac{2}{3}}^{1}x^4dx-\pi\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{2}{3}x)^2dx=\frac{211\pi}{1215}-\frac{76\pi}{729}。$$

全真模拟试卷 2 答案

一、 选择题

1、B 2、D 3、C 4、C 5、A 6、D

二、填空题

7、3,2 8、$\frac{1}{99\cdot 50\cdot 101\cdot 102}$ 9、$\ln(1+\sin x)\cdot\cos x+\ln(1+\cos^2 x)\cdot\sin 2x$

10、$\frac{1}{2}$ 11、$\frac{x(1-e^x)}{e^x}$ 12、$\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_0^{y}f(x,y)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_0^{1-y}f(x,y)dx$

三、计算题

13、原式$=\lim\limits_{x\to0^+}\left[1+(\cos\sqrt{x}-1)\right]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$ 。

14、两边对 x 求导得 $\frac{1}{x^2+y}\cdot(2x+y')=3x^2y+x^3y+\cos x$

化 简 整 理 得 $2x+y'=3x^4y+3x^2y^2+x^5y'+x^3yy'+x^2\cos x+y\cos x$

（1）

（1） 式两边对 x 求导得

$2+y''=12x^3y+3x^4y'+6xy^2+6x^2yy'+5x^4y'+x^5y''+3x^2yy'+x^3(y')^2+x^3yy''$
$+2x\cos x-x^2\sin x+y'\cos x-y\sin x$

（2）

将$x=0$代入原方程得$y=1$，

将$x=0,y=1$代入（1）得$y'=1$，

将$x=0,y=1,y'=1$代入（2）得$y''=-1$。

15、原式$=2\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}d(\sqrt{x})=2\int\arcsin\sqrt{x}d(\arcsin\sqrt{x})=(\arcsin\sqrt{x})^2+C$。

16、原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin x)}{1+\sin^2 x}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d(\sin x)}{1+\sin^2 x}=\frac{\pi}{2}$。

17、在已知直线上取一点 A（1，0，2），直线的方向向量为$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-1,-1,-3)$，

平面的法向量$\vec{n}=\vec{s}\times\vec{AM}=(4,-4,0)$。由点法式得所求平面的方程为$x-y-1=0$。

18、$\frac{\partial z}{\partial x}=f+2xf'+g_1'+yg_2',\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-f'-2xf''+xg_{12}''+g_2'+xyg_{22}''$。

19、原式$=\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{x}}x^2dy+\int_1^2dx\int_0^{\frac{1}{x}}x^2dy=\frac{25}{14}$。

20、由已知极限可得两个初始条件$y(0)=0.y'(0)=1$。

（1）$r^2-r=0\Rightarrow r=0,r=1\Rightarrow Y=C_1+C_2e^x$；

（2）由题意可设$y^*=Ax^2+Bx$，求出一、二阶导数代入方程解得A=-1,B=-3,

所以$y^*=-x^2-3x$；

（3）通解为$y=Y+y^*=C_1+C_2e^x-x^2-3x$；

（4）代入两个初始条件$y(0)=0.y'(0)=1$，可得$C_1=-4,C_2=4$，故所求特解为$y=-4+4e^x-x^2-3x$。

四、证明题

21、令$f(x)=e^x-x-2+\cos x$，则$f'(x)=e^x-1-\sin x, f''(x)=e^x-\cos x$。

当　$x>0$　时，$f''(x)>0\Rightarrow f'(x)\uparrow$,又$f'(0)=0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f(x)\uparrow$,又$f(0)=0\Rightarrow f(x)>0$。

22. $f(0)=1,\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}=1,\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\cos^2 tdt}{x}=1$，

因为$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=1$，所以$f(x)$在$x=0$处连续。

又$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0,f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$，

即$f'_-(0)=f'_+(0)=0$，故$f(x)$在$x=0$处可导。

五、综合题

23、设所求直线的斜率为k，则由题意可知$k<0$，所求直线可写成$y-4=k(x-1)$，即$y=kx-k+4$，令$x=0,y=0$，可得两截距为$y=4-k,x=1-\dfrac{4}{k}$。

则两截距之和$z=5-k-\dfrac{4}{k}$，$z'=-1+\dfrac{4}{k^2}=0\Rightarrow k=-2(k=2舍去)$。

由于实际问题的最小值客观存在，且驻点唯一，所以当$k=-2$时，截距之和最小，最小值为9，此时直线方程为$y=-2x+2$。

24、（1）由题意可得$\int_0^t f(x)dx = e^t - 1 - f(t)$，

两边对 t 求导得 $f(t)=e^t - f'(t)$，即 $f'(t)+f(t)=e^t$，满足初始条件

$f(0)=0$，

由一阶线性方程的通解公式可得 $f(t)=\frac{1}{2}e^t + Ce^{-t}$，代入初始条件可得

$C=-\frac{1}{2}$，

即 $f(t)=\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}$。

（2）$V_x=\pi\int_0^2\left(e^x-1\right)^2dx-\pi\int_0^2\left[\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\right]^2dx=\left[\frac{9}{2}+\frac{3}{8}e^4+\frac{1}{2}e^{-4}-2e^2\right]\pi$.

全真模拟试卷 3 答案

一、选择题

1. A　　2. C　　3. C　　4. C　　5. B　　6. C

二、填空题

7. $\frac{1}{2}$　8. $\frac{2}{\sqrt{x}}$　9. $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}+C$　10. $3,\frac{1}{3}$

11. $\frac{x-\frac{15}{2}}{1}=\frac{y-\frac{9}{5}}{1}=\frac{z}{-1}$　12. $x^2\left(Ax+B\right)e^{-2x}$

三、计算题

13.原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+\cos x-2}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-\sin x}{2}=\frac{1}{2}$。

14.当 $x<0$ 时，间断点为 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}\quad\left(k=-1,-2,-3,\cdots\right)$，当 $x>0$ 时，间断点为 $x=1$，分界点 $x=0$ 也是间断点。

因为 $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{x(2x+\pi)}{2\cos x}=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{4x+\pi}{-2\sin x}=-\frac{\pi}{2}$，所以 $x=-\frac{\pi}{2}$ 为可去间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}(k\neq-1)} f(x)=\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}(k\neq-1)}\frac{x(2x+\pi)}{2\cos x}=\infty$，

所以 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=-2,-3,\cdots)$ 为无穷间断点。

因为 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\sin1,\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=0$，所以 $x=0$ 为跳跃间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\sin\frac{1}{x^2-1}$ 振荡而不存在，所以 $x=1$ 为振荡间断点。

15.原式= $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)-\arcsin x$

$=-\sqrt{1-x^2}-\arcsin x+C$

本题也可使用三角代换 $x=\sin t$ 求解。

16．原式= $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\ln(1-x)|dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln(1-x)dx-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\ln(1-x)dx=\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{1}{2}$。

17.由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}f(x)=0\Rightarrow f(0)=0,$

且 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$。

令 $y=\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$，则 $\ln y=\frac{1}{x}\ln\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]$，

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}=2,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}y=e^2$。

18．令 $u = e^x \sin y$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^x \sin y, \dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(u)e^x \cos y$，

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)e^{2x}\sin^2 y + f'(u)e^x \sin y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x}\cos^2 y - f'(u)e^x \sin y,$$

由 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x} \Rightarrow f''(u)e^{2x} = f(u)e^{2x} \Rightarrow f''(u) = f(u)$，这是一个二阶常系数齐线性方程，其特征方程为：$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = -1, r = 1 \Rightarrow f(u) = C_1 e^{-u} + C_2 e^u$.

19.由所给的二次积分，写出其积分区域为：D_1:$\begin{cases} x \le y \le x^2 \\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$，$D_2$:$\begin{cases} x \le y \le 8 \\ 2 \le x \le 8 \end{cases}$，

画出草图，写出 Y 型区域的积分区域为：D_1':$\begin{cases} \sqrt{y} \le x \le y \\ 1 \le y \le 4 \end{cases}$，$D_2'$:$\begin{cases} 2 \le x \le y \\ 4 \le y \le 8 \end{cases}$，

因而得原式=$\int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{y} f(x,y)dx + \int_4^8 dy \int_2^y f(x,y)dx$。

$$f(x) = \ln x - \ln(1+x) = \ln[1+(x-1)] - \ln 2 - \ln\left[1 + \frac{x-1}{2}\right]$$

20． $$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1} - \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n+1}$$ 。

$$= -\ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left[1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right](x-1)^{n+1}$$

由 $\begin{cases} -1 < x-1 \le 1 \\ -1 < \dfrac{x-1}{2} \le 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < x \le 2$，所以收敛区间为 $(0,2]$。

四、证明题

21．设曲线任一点为 (x_0, y_0)，满足 $\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} = \sqrt{a}$ 。

原方程两边对 x 求导得 $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'=0\Rightarrow y'=-\sqrt{\frac{y}{x}}$，

$k_{切}=-\sqrt{\frac{y_0}{x_0}}$，切线方程为：$y-y_0=-\sqrt{\frac{y_0}{x_0}}(x-x_0)$。

令 $x=0$，得 $y=y_0+\sqrt{x_0y_0}$，令 $y=0$，得 $x=x_0+\sqrt{x_0y_0}$。

两截距之和为：$x+y=x_0+y_0+2\sqrt{x_0y_0}=\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}\right)^2=a$，所以得证。

22．令 $f(x)=4x-x^4$，则 $f'(x)=4-4x^3=0\Rightarrow x=1$，

又 $f(1)=3,f(-1)=-5$，故 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上最小值为-5，最大值为 3，

因而 $-5\le f(x)\le 3\le 5$, 即 $\left|4x-x^4\right|\le 5$。

五、综合题

23．（1）$S=\int_a^{2a}\frac{a}{x}dx=a\ln 2$；

（2）$V_x=\pi\int_a^{2a}\left(\frac{a}{x}\right)^2dx=\frac{1}{2}\pi a$；

（3）$V_y=V_{1y}+V_{2y}-V_{3y}=\pi(2a)^2\cdot\frac{1}{2}+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{a}{y}\right)^2dy-\pi a^2\cdot 1=2\pi a^2$.

24.（1）$a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x}{1}=g'(0)$.

（2）当 $x\ne 0$ 时，

$$f'(x)=\left(\frac{g(x)-\cos x}{x}\right)'=\frac{[g'(x)+\sin x]x-[g(x)-\cos x]}{x^2};$$

当 $x=0$ 时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)-\cos x}{x}-g'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x}=\frac{1}{2}[g''(0)+1]$$

所以 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\left[g'(x)+\sin x\right]-\left[g(x)-\cos x\right]}{x^2} & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}\left[g''(0)+1\right] & x=0\end{cases}$。

全真模拟试卷 4 答案

一、选择题

1. B　2. C　3. B　4. C　5. A　6. B

二、填空题

7. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$　8. $\dfrac{1}{9}$　9. $\dfrac{4}{\pi}-1$　10. -3　11. $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

12. $-\dfrac{4x+3y}{3z^2+1}$

三、计算题

13.原式=$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\left(x+e^x-1\right)\right]^{\frac{1}{x+e^x-1}\cdot\frac{2(x+e^x-1)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\left(1+e^x\right)}{1}}=e^4$。

14.$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^2}{\frac{1}{t}}=3t^3,\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{9t^2}{\frac{1}{t}}=9t^3,\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=9$。

15.原式=$\displaystyle\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2+2x+3\right)'dx}{x^2+2x+3}-\frac{3}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2\mathrm{x}+3\right)-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}+C$。

16. 令 $\sqrt{2x+1}=t$，则 $x=\dfrac{t^2-1}{2},dx=tdt$，

原式$=\int_1^3 \frac{t^2+3}{2}dt=\frac{22}{3}$。

17.平面的法向量$\vec{n}\perp\vec{s}=(1,2,1)$ ，直线上过已知点 A（1，-2，0），纵轴与已知平面的交点为 B（0，3，0），$\vec{n}\perp\vec{AB}=(-1,5,0)$，所以$\vec{n}=\vec{s}\times\vec{AB}=$（-5,-1,7）。由点法式得所求平面的方程为：$5x+y-7z-3=0$。

18．$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+f_2'\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2x\left(f_{11}''\cdot 2y+f_{12}''\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\left(f_{21}'\cdot 2y+f_{22}''\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+f_2'\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$=4xyf_{11}''+(2x\frac{\partial z}{\partial y}+2y\frac{\partial z}{\partial x})f_{12}''+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot f_{22}''+f_2'\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \quad (1)$$

对于方程$x+y-z=e^z$

两边对x求偏导得 $1-\frac{\partial z}{\partial x}=e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$ （2）

两边对y求偏导得 $1-\frac{\partial z}{\partial y}=e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$ （3）

由（2），（3）解得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+e^z},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+e^z}$。

在（2）式两边再对y求偏导得 $-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+e^z\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ （4）

由（4）解得$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{e^z}{\left(1+e^z\right)^3}$。

将$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+e^z},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+e^z}$与$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{e^z}{\left(1+e^z\right)^3}$代入（1）得：

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=4xyf''_{11}+\frac{2x+2y}{1+e^z}f''_{12}+\frac{1}{\left(1+e^z\right)^2}f''_{22}-f'_2\cdot\frac{e^z}{\left(1+e^z\right)^3}$。

19. 原式=$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\frac{\sin\pi r}{r}\cdot rdr=-4$。

20. $f(x)=\left(xe^{-x}\right)'=(-x+1)e^{-x}$，

（1）求 $y''+3y'+2y=0$ 的通解 Y；

特征方程为 $r^2+3r+2=0\Rightarrow r=-1,r=-2\Rightarrow Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

（2）求 $y''+3y'+2y=(-x+1)e^{-x}$ 的一个特解 y^*；

由 $f(x)=(-x+1)e^{-x}$ 知，特解可设为 $y^*=x(Ax+B)e^{-x}$，求出其一、二阶导数代入方程，比较两边系数得 $A=-\frac{1}{2},B=2$,所以 $y^*=(-\frac{1}{2}x^2+2x)e^{-x}$。

（3）由解的结构定理得所求通解为 $y=Y+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+(-\frac{1}{2}x^2+2x)e^{-x}$。

四、证明题

21. 设 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$，显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-1<0,F(1)=1-\int_0^1 f(t)dt>0$，即 $F(0)F(1)<0$，所以由零点定理得：方程 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 在（0，1）内至少有一个实根。

又 $F'(x)=2-f(x)>0\Rightarrow F(x)$ 在(0,1)上单调增加,所以方程 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 在（0，1）内至多有一个实根。

综上得方程 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 在（0，1）内有且仅有一个实根。

22. 整理得 $e^{x-y}\geq(x-y+1)$，令 $x-y=t$，即当 $t\geq0,e^t\geq t+1$。

设 $f(t)=e^t-t-1$，则 $f'(t)=e^t-1$。

当$t \geq 0 \Rightarrow e^t \geq 1 \Rightarrow f'(t) > 0 \Rightarrow f(t)\uparrow, f(0)=0 \Rightarrow f(t) \geq 0 \Rightarrow e^t \geq t+1$，

亦即当$x \geq y$时，$e^{x-y} \geq (x-y+1)$，从而不等式得证。

五、综合题

23．函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$；

$$f'(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2},\quad f''(x)=-xe^{-\frac{1}{2}x^2}, f''(x)=0 \Rightarrow x=0,$$

因为$f'(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$，所以函数的单调增加区间为$(-\infty,+\infty)$。

当$x \in (-\infty,0)$时，$f''(x)=-xe^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$，当$x \in (0,+\infty)$时，$f''(x)=-xe^{-\frac{1}{2}x^2} < 0$，

所以函数对应曲线的凹区间为$(-\infty,0)$，凸区间为$(0,+\infty)$，拐点坐标为（0，0）.

因为$f(-x)=\int_0^{-x} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt \overset{t=-u}{=} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}u^2}(-du)=-\int_0^x e^{-\frac{1}{2}u^2}du=-f(x)$，所以函数为奇函数。

24. $y=x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$,

$$S(a)=\int_0^a\left[0-\left(x^2-ax\right)\right]dx+\int_a^2\left(x^2-ax\right)dx=\frac{1}{3}a^3-2a+\frac{8}{3},$$

因为$S'(a)=a^2-2$，由$S'(a)=a^2-2=0$得$a=\pm\sqrt{2}$，在$0<a\leq 1$范围内无根。

又当$0<a\leq 1$时，$S'(a)<0 \Rightarrow S(a)\downarrow$，所以当$a=1$时，$S_{\min}(a)=S$（1）$=1$。

全真模拟试卷 5 答案

一、选择题

1. D　2. C　3. C　4. C　5. C　6. C

二、填空题

7. $-5,6$　8. $2-\dfrac{\pi}{2}$　9. $\dfrac{1}{2}dx-\dfrac{1}{2}dy$　10. 2　11. $\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^1 f(x,y)dx$

12. $(-4,0]$

三、计算题

13.原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{x^2}-2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$。

14.将 $x=0$ 代入原方程得 $y=1$。

原方程两边对 x 求导得　$y'=e^y+xe^y y'$　（1）

将 $x=0$，$y=1$ 代入（1）得 $y'=e$，

在（1）式两边对 x 求导得 $y''=e^y y'+e^y y'+xe^y(y')^2+xe^y y''$　（2）

将 $x=0$，$y=1$，$y'=e$ 代入（2）得 $y''=2e^2$，即 $y''(0)=2e^2$。

15．原式$=\int \ln x\, d\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{\ln x}{1-x}-\int\dfrac{1}{(1-x)x}dx=\dfrac{\ln x}{1-x}+\ln\left|\dfrac{1-x}{x}\right|+C$。

16.原式$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x dx=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{1}{2}}d(\cos x)=\dfrac{4}{3}$。

17.直线过点（1，2，-1），因为直线的方向向量 $\vec{s}\perp\vec{n}_1,\vec{s}\perp\vec{n}_2$，所以 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-2,3,1)$，

由点向式得所求直线的方程为：$\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{1}$。

18. $\frac{\partial z}{\partial x}=f+xf_1'\cdot y^2=f+xy^2f_1'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'\cdot 2xy+f_2'\cdot\cos y+2xyf_1'+xy^2\left(f_{11}''\cdot 2xy+f_{12}''\cdot\cos y\right)$$ 。

$$=4xyf_1'+f_2'\cos y+2x^2y^3f_{11}''+xy^2f_{12}''\cos y$$

19.原式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 r^3\cos\theta dr=\frac{\sqrt{2}}{8}$。

20.（1）求 $y''-3y'+2y=0$ 的通解 Y；

特征方程为 $r^2-3r+2=0\Rightarrow r=1,r=2\Rightarrow Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

（2）求 $y''-3y'+2y=2e^x$ 的一个特解 y^*；

由 $f(x)=2e^x$ 知，特解可设为 $y^*=xAe^x$，求出它的一、二阶导数，代入方程，

比较系数得 $A=-2$,所以特解为 $y^*=-2xe^x$。

（3）由解的结构定理得通解为 $y=Y+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$。

根据题意得初始条件 $y(0)=1,y'(0)=-1$，代入通解得 $C_1=1,C_2=0$,因而得所求

函数 $y=e^x-2xe^x$。

四、证明题

21．令 $f(x)=a\sin x+b-x^2,x\in\left[0,\sqrt{a+b}\right]$，显然 $f(x)$ 是连续的，且

$f(0)=b>0$，

$f\left(\sqrt{a+b}\right)=a\left[\sin\sqrt{a+b}-a\right]\le 0$。

若 $f\left(\sqrt{a+b}\right)=0$，则 $\xi=\sqrt{a+b}$ 就是方程的一个根；

若 $f\left(\sqrt{a+b}\right)<0$，则由零点定理知，方程在 $\left(0,\sqrt{a+b}\right)$ 内至少有一个实根。

综上得方程至少有一个不超过 $\sqrt{a+b}$ 的正根。

22．令 $f(x)=4x\ln x-x^2-2x+3$，则 $f'(x)=4\ln x-2x-2$，

由 $f'(x)=0\Rightarrow x=1$，$f''(x)=\dfrac{4}{x}-2$，

因为 $f''(1)=2>0$，所以 $f(1)=0$ 为极小值。

由单峰原理知 $f(1)=0$ 也是 $f(x)$ 在（0，2）上的最小值，因而 $f(x)\geq 0$，即不等式得证。

五、综合题

23．函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$；

$y'=\dfrac{-2x}{(x-1)^3}$， $y''=\dfrac{4x+2}{(x-1)^4}$，

令 $y'=\dfrac{-2x}{(x-1)^3}=0\Rightarrow x=0$，

x	$(-\infty,0)$	0	（0，1）	$(1,+\infty)$
y'	-	0	+	+
y	单减	-1（极小值）	单增	单增

由上讨论可知，函数的单调减少区间为 $(-\infty,0)$，单调增加区间为（0，1），$(1,+\infty)$；

当 $x=0$ 时，函数取得极小值 $y(0)=-1$。

令 $y''=\dfrac{4x+2}{(x-1)^4}=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$，

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},1\right)$	$(1,+\infty)$

y''	-	0	+	+
y	凸	$-\frac{8}{9}$ 拐点纵标	凹	凹

函数对应曲线的凸区间为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$，凹区间为$\left(-\frac{1}{2},1\right)$，$(1,+\infty)$；拐点坐标为（$-\frac{1}{2},-\frac{8}{9}$）。

因为$\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0$，所以$y=0$为曲线的水平渐近线，

因为$\lim\limits_{x\to 1} y=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\infty$，所以$x=0$为曲线的垂直渐近线。

24．（1）设切线与坐标轴的交点为 M,N，平面图形的面积 $S=S_{RT\Delta OMN}-\int_0^1(1-x^2)dx$。

$k_{切}=y'(x_0)=-2x_0$，切线方程 MN 为：$y-y_0=-2x_0(x-x_0),\quad y_0=1-{x_0}^2$，

令 $x=0$，得 $y={x_0}^2+1$，令 $y=0$，得 $x=\frac{{x_0}^2+1}{2x_0}$，即

$M(0,\ {x_0}^2+1),N\left(\frac{{x_0}^2+1}{2x_0},0\right)$，

因而$S=S_{RT\Delta OMN}-\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{1}{2}\ ({x_0}^2+1)\ (\frac{{x_0}^2+1}{2x_0})-\frac{2}{3}=\frac{({x_0}^2+1)^2}{4x_0}-\frac{2}{3}$，

$S'(x_0)=\frac{(3{x_0}^2-1)({x_0}^2+1)}{4{x_0}^2}=0\Rightarrow x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

在$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$内 $S'<0$，在$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$内 $S'>0$，所以当 $x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，

$S\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}-\frac{2}{3}$为极小值，由单峰原理知$S\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}-\frac{2}{3}$也是最小值，

此时切点为$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3}\right)$。

（2）$V_x=V_{1x}-V_{2x}=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}-\pi\int_0^1\left(1-x^2\right)^2dx=\left(\frac{32\sqrt{3}}{81}-\frac{8}{15}\right)\pi$.

全真模拟试卷 6 答案

一、选择题

1. B　　2. A　　3. A　　4. D　　5. D　　6. D

二、填空题

7. e^{-2}　8. $\frac{2}{3}$　9. -1　10. 0　11. $-\frac{e^z}{xe^z+y}$　12. $(1,3]$

三、计算题

13.原式=

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^2}-1}\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-6$$

。

14.将$x=0$代入方程得$y=0$

方程两边对x求导得　$e^{x+y}\left(1+y'\right)-y-xy'=0$　　（1）

将$x=0$，$y=0$代入（1）得　$y'=-1$，即$y'(0)=-1$。

（1）　式两边对求导得

$$e^{x+y}\left(1+y'\right)^2+e^{x+y}y''-y'-y'-xy''=0 \qquad （2）$$

将 $x=0$， $y=0$， $y'=-1$ 代入（2）得 $y''=-2$，即 $y''(0)=-2$。

15.令 $\sqrt{x-1}=t$，则 $x=t^2+1, dx=2tdt$，

原式=$2\int te^t dt=2te^t-2e^t+C=2(\sqrt{x-1}$ -1） $e^{\sqrt{x-1}}+C$。

16.原式=$\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{1+(\frac{x^2}{2})^2}=\frac{1}{4}\left[\lim_{x\to+\infty}\arctan\frac{x^2}{2}-\arctan 0\right]=\frac{\pi}{8}$。

17.直线过点（-1，2，0），因为直线的方向 $\vec{s}\perp\vec{s_0}, \vec{s}\perp\vec{n}$，所以 $\vec{s}=\vec{s_0}\times\vec{n}=(11,7,1)$。

由点向式得所求直线的方程为：$\frac{x+1}{11}=\frac{y-2}{7}=\frac{z}{1}$。

18.$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2+f_2'\cdot ye^x$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x f_2'+6f_{11}''+(2+3y)e^x f_{12}''+ye^{2x}f_{22}''$。

19.原式=$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}}xdx=\frac{7}{12}$。

20.（1）$Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$；

（2）$y^*=y_1^*+y_2^*$，由 $f_1(x)=3x$ 知 $y_1^*=Ax+B$，由 $f_2(x)=e^x$ 知 $y_2^*=xCe^x$，

分别求出一、二阶导数，代入方程，比较系数得 $A=\frac{3}{2}, B=\frac{9}{4}, C=-1$，

所以 $y^*=y_1^*+y_2^*$=$\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}$ - xe^x；

（3）通解 $y=Y+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}$ - xe^x。

四、证明题

21. 令 $f(x)=e^{-x}+\sin x-1-\frac{x^2}{2}$，则

$f'(x)=-e^{-x}+\cos x-x, f''(x)=e^{-x}-\sin x-1,$

$f'''(x)=-e^{-x}-\cos x$ ，当 $0<x<1$ 时，

$f'''(x)<0 \Rightarrow f''(x)\downarrow$, 又$f''(0)=0$

$\Rightarrow f''(x)<f''(0)=0 \Rightarrow f'(x)\downarrow$, 又$f'(0)=0 \Rightarrow f'(x)<f'(0)=0$

$\Rightarrow f(x)\downarrow$, 又$f(0)=0 \Rightarrow f(x)<f(0)=0$

因而不等式得证。

22. $f(0)=2, \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(e^x+1)=2, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(3x+2)=2$，

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=2$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x}{x}=3,$$

因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。

五、综合题

23. $y'=3x^2+6ax+b, y''=6x+6a$，

由于函数为三次多项式函数，一、二阶导数恒存在，所以

$y'(-1)=0, y''(0)=0$，且 $y(0)=3$，联立上述三个方程解得

$a=0, b=-1, c=3$。

24.将微分方程化成标准形式为：$y'-\frac{2}{x}y=-1$，

代入一阶线性方程通解公式解得 $y=cx^2+x$。

$$V_x=\pi\int_1^2(cx^2+x)^2dx=\pi\left(\frac{31}{5}c^2+\frac{15}{2}c+\frac{7}{3}\right),$$

由$V_x{}' = 0 \Rightarrow c = -\dfrac{75}{124}$，

因为最小体积客观存在，驻点又唯一，所以当$c = -\dfrac{75}{124}$时，能使旋转体体积最小，此时，

$y = -\dfrac{75}{124}x^2 + x$。

全真模拟试卷 7 答案

一、选择题

1. B 2. D 3. D 4. D 5. A 6. C

二、填空题

7. $y = x$ 8. $\dfrac{2}{3}\ln 3$ 9. $\dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{4}$ 10. 5 11. $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x,y)dx$

12. $x = 0$

三、计算题

13. 原式 =

$$\lim_{x\to 0}\left(1+2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{2\sin^2 x}\cdot\frac{2\sin^2 x}{\ln\left(1-2x^2\right)}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{2\sin^2 x}}\right]^{\frac{2\sin^2 x}{\ln\left(1-2x^2\right)}} = \lim_{x\to 0} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{-2x^2}} = e^{-1}$$

.

14. $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2+t^2}{(\cos t-t\sin t)^3}$。

15.令 $\sqrt{\sqrt{x}+1}=t$, 则 $x=t^4-2t^2+1,dx=(4t^3-4)dt$，

原式=$\int\frac{1}{t}\cdot 4(t^3-t)dt=\frac{4}{3}t^3-4t+C=\frac{4}{3}\sqrt{(\sqrt{x}+1)^3}-4\sqrt{\sqrt{x}+1}+C$。

16.原式=
$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^1 x^2df'(2x)=\frac{1}{2}f'(2)-\int_0^1 xf'(2x)dx\\&=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)dx\\&=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{4}\int_0^2 f(t)dt=0\end{aligned}$$
。

17.已知直线的方向向量 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-1,-1,-3)$，直线上取一点 N（1，-2，0），则平面的法向量 $\vec{n}\perp\vec{s},\vec{n}\perp\overrightarrow{MN}$，则 $\vec{n}=\vec{s}\times\overrightarrow{MN}=(-8,2,2)$,由点法式得所求平面方程为：$4x-y-z-6=0$。

18．$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\cos x+yg'\cdot(e^x+xe^x)=\cos x\cdot f_1'+(e^x+xe^x)yg'$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos x\cdot f_{12}''\cdot 2y+(e^x+xe^x)g'=2y\cos x\cdot f_{12}''+(e^x+xe^x)g'$。

19．因为区域 D 关于 y 轴对称，函数 x^3 关于 x 是奇函数，所以 $\iint\limits_D x^3dxdy=0$，

而由二积分的性质得 $\iint\limits_D dxdy=\pi a^2$。

$\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2a\sin\theta}r^2rdr=\frac{3}{2}\pi a^4$，所以原式=$\pi a^2$-$\frac{3}{2}\pi a^4$。

20．原方程两边对 x 求导化简得 $f'(x)=e^x-\int_0^x f(t)dt$ （1）

（1）两边再对 x 求导化简得 $f''(x)+f(x)=e^x$ （2）

将 $x=0$ 代入原方程与（1）式得初始条件为：$f(0)=1, f'(0)=1$。

对方程（2）求解：$r^2+1=0 \Rightarrow r=\pm i \Rightarrow Y=C_1\cos x+C_2\sin x$，

$y^*=Ae^x$，求出一二阶导数，代入方程，比较系数得 A=$\frac{1}{2}$，所以 $y^*=\frac{1}{2}e^x$。

通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x$。将两个初始条件代入得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$，

故所求函数为：$f(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}e^x$。

四、证明题

21．原不等式可变形为：$e^{2x}(1+x)>1-x$。

令 $f(x)=e^{2x}(1+x)-1+x$, 则 $f'(x)=e^{2x}(3+2x)+1$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\uparrow$, 又 $f(0)=0 \Rightarrow f(x)>f(0)=0$，得证。

22．$\int_0^a x^3 f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^a x^2 f(x^2)d(x^2)\overset{x^2=t}{=}\frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$。

$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3\sin x^2 dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\cos x=\frac{1}{2}$。

五、综合题

23.PC⊥x 轴，由题意得：$\int_0^x ydx-\frac{1}{2}x(1+y)=x^3$，两边对 x 求导得：

$y-\frac{1}{2}(1+y)-\frac{1}{2}xy'=3x^2$, 化成标准形式为：$y'-\frac{1}{x}y=-6x-\frac{1}{x}$，

代入公式求解得：$y=-6x^2+cx+1$，代入初始条件 $y(1)=0 \Rightarrow c=5$，所以所

求曲线的方程为：$y=-6x^2+5x+1$。

$V_x=\pi\int_0^1(-6x^2+5x+1)^2dx=\frac{33\pi}{15}$。

24. $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$，

因为图形关于原点对称，即函数为奇函数，由 $f\left(x\right)=-f\left(-x\right)$ 得

$ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-bx^2+cx-\mathrm{d}\Rightarrow 2\mathrm{bx}^2+2d=0\Rightarrow b=0,d=0$。

$f\left(x\right)=ax^3+cx, f'\left(x\right)=3ax^2+c$，

由 $\begin{cases} f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0 \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{3}{4}a+c=0 \\ \dfrac{a}{8}+\dfrac{c}{2}=-1 \end{cases}\Rightarrow a=4,c=-3$，所以所求函数为：

$f\left(x\right)=4x^3-3x$。

$f'\left(x\right)=12x^2-3, f''\left(x\right)=24x,$ 令 $f''\left(x\right)=0\Rightarrow x=0$，且函数在 $x=0$ 两侧二阶导数变号，所以拐点坐标为（0，0）.

全真模拟试卷 8 答案

一、选择题

1. B　2. B　3. B　4. C　5. B　6. B

二、填空题

7. $e^{-\frac{1}{2}}$ 8. 1 9. $\frac{1}{a}F(ax+b)+C$ 10. $\frac{1}{2}$

11. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{1}{y}}^{2}f(x,y)dx+\int_{1}^{2}dy\int_{y}^{2}f(x,y)dx$

12. $e^{-y}(y+1)=\frac{1}{2}(x^2+1)$

三、计算题

13.原式= $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(\tan t-\sin t)dt}{\frac{3}{2}x^2\cdot2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{12x^3}$.

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x\cdot(1-\cos x)}{12x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{12x^3}=\frac{1}{24}$$

14. $\dfrac{dx}{dt}=2t-1,$

对于含 y,t 的方程两边 t 对求导得

$\dfrac{dy}{dt}\cdot t^2+y\cdot2t-\sqrt{1+y}\cdot\dfrac{dy}{dt}=0$，解得 $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2yt}{\sqrt{1+y}-t^2}$，

所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2yt}{\left(\sqrt{1+y}-t^2\right)(2t-1)}$。

15.在所给的不定积分两边求导得：$xf(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow\dfrac{1}{f(x)}=x\sqrt{1-x^2}$，

$\displaystyle\int\frac{dx}{f(x)}=\int x\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{\frac{1}{2}}d(1-x^2)=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$。

16. 原式= $-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x dx+\int_1^e\ln x dx=2-\frac{2}{e}$。

17.因为$\vec{n}\perp\vec{i},\vec{n}\perp\vec{AB}$,所以$\vec{n}=\vec{i}\times\vec{AB}=$（0,-7,1），

由点法式得所求平面的方程为：$7y-z-2=0$。

18．$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot 2+g_1'\cdot y=2f'+yg_1'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2f''\cdot(-1)+g_1'+y\left(g_{11}''\cdot x+g_{12}''\cdot 1\right)=-2f''+g_1'+xyg_{11}''+yg_{12}''。$$

19． 原式$=\int_0^{\pi}d\theta\int_1^2\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}dr=\pi\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$。

20．（1） 由 $f''(x)+f(x)=e^x$，

$r^2+1=0\Rightarrow r=\pm i\Rightarrow Y=C_1\cos x+C_2\sin x$，

$y^*=Ae^x$，求出一二阶导数，代入方程，比较系数得 A=1，所以 $y^*=e^x$。

通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+e^x$。将两个初始条件代入得 $C_1=-1$， $C_2=1$，

故所求函数为： $f(x)=-\cos x+\sin x+e^x$.

（2） $g(x)=f'(x)=\sin x+\cos x+e^x$，

原式$=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx+\int_0^{\pi}f(x)d\left(\frac{1}{1+x}\right)$

$$=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx+\frac{f(x)}{1+x}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{f'(x)}{1+x}dx$$

$$=\frac{f(\pi)}{1+\pi}=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}。$$

四、证明题

21．令 $f(x)=x\ln x,x\in(0,e]$，则 $f'(x)=1+\ln x$，由 $f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{e}$。

$f''(x)=\frac{1}{x}$，因为 $f''\left(\frac{1}{e}\right)=e>0,$ 所以 $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$ 为极小值，由单峰原理得 $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$ 也是 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 内的最小值。又因为 $f(e)=e,\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$，所以 $f(x)=x\ln x$ 在 $x\in(0,e]$ 上最大值为 e。因而当 $0<x\le e$ 时，$-\frac{1}{e}\le\ln x\le e$。

22.令 $F(x)=f^2(x)+g^2(x)-1,$

则 $F'(x)=2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)=2f(x)g(x)-2f(x)g(x)=0,x\in R$，所以 $F(x)=C$

令 $x=0$ 代入得：$C=F(0)=f^2(0)+g^2(0)-1=0$，故得证。

五、综合题

23、由 $y=ax^2+bx+c$ 过原点得 $c=0$，所以 $y=ax^2+bx$。

$\frac{1}{3}=\int_0^1(ax^2+bx)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\Rightarrow b=\frac{2}{3}(1-a)$

$V_x=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2dx=\frac{\pi}{30}\left[6a^2+\frac{40}{9}(1-a)^2+10a(1-a)\right],$

$V_x'=0\Rightarrow a=-\frac{5}{4}$ 解得 $b=\frac{3}{2}$。

因为 $V_x''\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{8}{9}>0$，所以 $a=-\frac{5}{4}$ 为极小值点，由单峰原理得 $a=-\frac{5}{4}$ 也是最小值点。

故当 $a=-\frac{5}{4}$，$b=\frac{3}{2}$，$c=0$ 时，旋转体的体积最小。

24.（1）$c=\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$；

（2）当 $x\neq 0$ 时，$F'(x)=\dfrac{x^2f(x)-2\int_0^x tf(t)dt}{x^3}$，

当 $x=0$ 时，$F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{3x}=\dfrac{1}{3}f'(0)$。

因为 $\lim\limits_{x\to 0}F'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2\int_0^x tf(t)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x tf(t)dt}{x^3}$

$=f'(0)-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xf(x)}{3x^2}=f'(0)-\dfrac{2}{3}f'(0)=\dfrac{1}{3}f'(0)=F'(0)$，所以 $F'(x)$ 连续。

全真模拟试卷 9 答案

一、选择题

1. B　2. C　3. C　4. D　5. D　6. B

二、填空题

7. $4x^2e^{x^2}+2e^{x^2}-e^x$　8. $k=2,a=-\dfrac{2}{\ln 2}$　9. $\ln 3$　10. $7!-2^7$

11. $4e^{-1}$　12. $-\left(\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{x}{y^3}\right)e^{\frac{x}{y}}$

三、计算题

13．原式$=\lim\limits_{x\to 0^+} f'\left(e^{\cos\sqrt{x}}\right)\cdot e^{\cos\sqrt{x}}\cdot\dfrac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=-\dfrac{1}{2}f'(e)\cdot e\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=-1$。

14. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1+e^{-t}}{2e^{2t}}=\dfrac{e^t+1}{2e^{3t}},\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-2e^{4t}-3e^{3t}}{4e^{8t}}$。

$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=1,\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=-\dfrac{5}{4}$。

15.原式$=2\int\dfrac{1+(\arctan\sqrt{x})^3}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}d\left(\sqrt{x}\right)=2\int\left[1+\left(\arctan\sqrt{x}\right)^3\right]d\left(\arctan\sqrt{x}\right)$

$=2\arctan\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\left(\arctan\sqrt{x}\right)^4+C$。

16 设 $\int_0^1 f(x)dx=A$，则 $f(x)=\dfrac{1}{2}x\ln(x+1)-A$，两边从 0 至 1 进行积分得：

$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x\ln(x+1)-A\int_0^1 dx\Rightarrow 2A=\frac{1}{8}\Rightarrow A=\frac{1}{16}$。

17．设过点 A 与已知直线垂直相交的平面为 π，则 π 的方程为：$x+y+2z-7=0$，

平面 π 与已知直线的交点为 B，直线的参数式为：$\begin{cases}x=-1+t\\y=2+t\\z=2t\end{cases}$ 代入上面的平面方程解得 $t=1$，所以交点 B（0，3，2），已知点 A（-1，0，4），$\vec{s}=\vec{AB}=(1,3,-2)$，

所求直线的方程为：$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-4}{-2}$。

18. $\frac{\partial w}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot yz=f_1'+yzf_2'$，

$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=f_{11}''+(xy+yz)f_{12}''+xy^2zf_{22}''+yf_2'$。

19．原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{a\cos\theta}^{2a\cos\theta}(1+2\cos\theta\sin\theta)r^3dr=\frac{45\pi}{32}a^4$。

20．由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)}{x}=1\Rightarrow y(0)=0,y'(0)=1$。

（1）$r^2-2r+2=0\Rightarrow r=1\pm i\Rightarrow Y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$；

（2）特解可设为 $y^*=Ae^x$，代入解得 A=2,所以 $y^*=2e^x$；

（3）通解为 $y=Y+y^*=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+2e^x$。

代入初始条件解得 $C_1=-2,C_2=1$，因而

$y=e^x(-2\cos x+\sin x)+2e^x$。

四、证明题

21．原不等式可化为 $e^x(1-x)\le 1$。

令 $f(x)=e^x(1-x)-1$，则 $f'(x)=-xe^x, f''(x)=-(1+x)e^x$，

由 $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$，因为 $f''(0)=-1<0$，所以 $f(0)=0$ 为极大值，由单峰原理知，$f(0)=0$ 也是最大值，因而得证。

22．要证：$\int_a^{\xi} f(t)dt=\int_{\xi}^{b} f(t)dt$。

令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt-\int_x^b f(t)dt$，$F(x)$ 显然是连续的，且 $F(a)=-\int_a^b f(t)dt<0, F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$，由零点定理知，至少有一 $\xi\in(a,b)$，使

$\int_a^{\xi} f(t)dt=\int_{\xi}^{b} f(t)dt$。

又 $F'(x)=f(x)+f(x)=2f(x)>0 \Rightarrow F(x)\uparrow$，因而至多有一 $\xi\in(a,b)$，使 $\int_a^{\xi} f(t)dt=\int_{\xi}^{b} f(t)dt$。综上得，有且仅有 $\xi\in(a,b)$，使 $\int_a^{\xi} f(t)dt=\int_{\xi}^{b} f(t)dt$。

五、综合题

23.（1）$\begin{cases} a\sqrt{x_0}=\dfrac{1}{2}\ln x_0 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2x_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=e^2 \\ a=\dfrac{1}{e} \end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{1}{e}$,切点$(e^2,1)$,

公切线：$y-1=\dfrac{1}{2e^2}(x-e^2)\Rightarrow y=\dfrac{1}{2e^2}x+\dfrac{1}{2}$；

（2）$S=\int_0^1 (e^{2y}-e^2y^2)dy=\dfrac{1}{6}e^2$ 或 $S=\int_0^{e^2}\dfrac{1}{e}\sqrt{x}dx-\int_1^{e^2}\dfrac{1}{2}\ln xdx=\dfrac{1}{6}e^2$；

（3）$V_x=\pi\int_0^{e^2}\dfrac{1}{e^2}xdx-\pi\int_1^{e^2}\dfrac{1}{4}\ln^2 xdx=\dfrac{\pi}{2}.$

24. $D:\begin{cases} y\le x\le y^2 \\ 1\le y\le 2 \end{cases}$,

原式$=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx=\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi}{2}ydy=\frac{4}{\pi^2}-\frac{8}{\pi^3}$。

全真模拟试卷 10 答案

一、选择题

1. B　　2. B　　3. D　　4. A　　5. C　　6. A

二、填空题

7. $x=2$　　8. $\frac{1}{3}$　　9. $e^{t^2}+2t^2e^{t^2}$　　10. $y^2=2x^2(1+\ln x)$　　11. π

12. $(0,6]$

三、计算题

13.原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1-x}}{2x}=-\frac{1}{2}$。

14.两边取对数得　　$\ln y=\ln x+3x+\cos x\ln(\sin x)$　　（1）

（1）式两边对 x 求导得 $\frac{1}{y}y'=\frac{1}{x}+3-\sin x\ln(\sin x)+\frac{\cos^2 x}{\sin x}$，

化简解得 $y'=xe^{3x}(\sin x)^{\cos x}\left[\frac{1}{x}+3-\sin x\ln(\sin x)+\cos x\cot t\right]$。

15． $f(x)=\left(\frac{\cos x}{x}\right)'=-\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$，

$\int\frac{1}{x}f'(\ln x)dx=\int f'(\ln x)d(\ln x)=f(\ln x)+C=-\frac{\ln x\sin(\ln x)+\cos(\ln x)}{\ln^2 x}+C$

;

$\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx=-\frac{x\sin x+\cos x}{x}-\frac{\cos x}{x}+C$

$=-\sin x-\frac{2\cos x}{x}+C$。

16.原式=$\int_0^1 e^{f(x)}dx+\int_0^1 xe^{f(x)}df(x)=\int_0^1 e^{f(x)}dx+xe^{f(x)}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{f(x)}dx=e^{f(1)}=1$。

17.平面过点 A(1,2,3),

因为平面的法向量 $\vec{n}\perp\vec{s},\vec{n}\perp\vec{n}_0$，所以 $\vec{n}=\vec{s}\times\vec{n}_0=(1,-7,-5)$，

由点法式得所求平面的方程为： $x-7y-5z+28=0$。

18. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\cos x+f_3'\cdot e^{x+y}=\cos xf_1'+e^{x+y}f'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos x[f_{12}''\cdot(-\sin y)+f_{13}''\cdot e^{x+y}]+e^{x+y}f_3'+e^{x+y}[f_{32}''\cdot(-\sin y)+f_{33}''\cdot e^{x+y}]$$

$$=-\cos x\sin yf_{12}''+e^{x+y}\cos xf_{13}''+e^{x+y}f_3'-e^{x+y}\sin yf_{32}''+e^{2(x+y)}f_{33}''$$。

19.交换二次积分次序

$$I=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-y^2}d(-y^2)=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$。

20．由方程的特解 $y=3+2e^{2x}+xe^{2x}$ 可知，齐次方程有二个特征根为 $r=0,r=2$，非齐次方程的一个特解为 $y^*=xe^{2x}$。

特征方程为：$r(r-2)=0\Rightarrow r^2-2r=0$，对应的二阶常系数线性齐次微分方程为 $y''-2y'=0\Rightarrow p_1=-2,p_2=0$。

$y^*=xe^{2x}$ 为 $y''-2y'=p_3e^{2x}$ 的一个特解，求出一二阶导数，代入比较系数得 $p_3=2$。

非齐方程的通解为：$y=Y+y^*=C_1+C_2e^{2x}+xe^{2x}$。

四、证明题

21．左端 $\overset{\text{交换积分次序}}{=}\int_a^b dx\int_x^b (y-x)^n f(x)dy=\int_a^b f(x)\cdot\frac{1}{n+1}(y-x)^{n+1}\Big|_x^b dx$

$$=\frac{1}{n+1}\int_a^b (b-x)^{n+1}f(x)dx$$

=右端。

22. $y'=(\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt)'=e^{-\arctan^2 x}\cdot\frac{1}{1+x^2},y'(0)=1$，

切线斜率 k=1，切点（0，0），所以切线方程为：$y=x$。

对于函数 $y=f(x)$，满足 $f(0)=0, f'(0)=1$。

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{2}{n}\right)-f(0)}{\dfrac{1}{n}}=2f'(0)=2$。

五、综合题

23．以圆心 O 为原点，OA 为 x 轴建立直角坐标系，设在圆周上的 D 点处坐游艇，D 的坐标为 $(2\cos\theta, 2\sin\theta)$，摩托车的速度为 v，

则 $A\overset{\frown}{D}=2\theta, BD=\sqrt{(1-2\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2}=\sqrt{5-4\sin\theta}$，

所用时间 $t=\dfrac{2\theta}{v}+\dfrac{\sqrt{5-4\sin\theta}}{\dfrac{v}{4}}, t'=\dfrac{1}{v}\left(2-\dfrac{8\cos\theta}{\sqrt{5-4\sin\theta}}\right)$，

由 $t'=0\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{5}+1}{8}$。所用最短时间客观存在，且驻点唯一，因而当 $\theta=\arcsin(\dfrac{3\sqrt{5}+1}{8})$ 时，所用时间最短。

24． $f(x)(x^2-x)=\int_a^x f(t)dt+a$ （1）

（1）两边求导得 $f'(x)(x^2-x)+f(x)(2x-1)=f(x)$，化简得

$xf'(x)=-2f(x)$，分离变量，两边积分得 $f(x)=\dfrac{c}{x^2}$。

将 $x=a$ 代入（1）得 $f(a)=\dfrac{1}{a-1}$，代入通解，解得 $c=\dfrac{a^2}{a-1}$，

所以 $f(x)=\dfrac{a^2}{(a-1)x^2}$。

$V_x=\pi\int_1^2\frac{a^4}{(a-1)^2}x^{-4}dx=\frac{7\pi}{24}\cdot\frac{a^4}{(a-1)^2}$，由 $\frac{7\pi}{24}\cdot\frac{a^4}{(a-1)^2}=\frac{7\pi}{6}$

解得 $a=-1\pm\sqrt{3}$。