一、（每小题 4 分，共 28 分）填空题

1. $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}6 & -3 & 2\\ -3 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}$.

3. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=\underline{-40}$

4. $|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_2|=\underline{-3}$

5. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\underline{-\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})}$

6. a 满足 $\underline{a\neq 0 \text{且} a\neq -10}$

7. $\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^*\\ (2\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\underline{-\frac{1}{6}}$

二、（每小题 4 分，共 12 分）选择题

BBC

得　分

三、（12 分）设 $\boldsymbol{a}=[2,-1,3]^T$，求 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}$， $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$ 及 $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T)^{50}$

解：$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}=[2,-1,3]\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}=14$

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}\left[2,-1,3\right]=\begin{bmatrix}4&-2&6\\-2&1&-3\\6&-3&9\end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T)^{50}=14^{49}\begin{bmatrix}4&-2&6\\-2&1&-3\\6&-3&9\end{bmatrix}$$

四、（12 分）计算行列式

解：（1）$\alpha\beta^T=\begin{bmatrix}k&k&k&k\\2k&2k&2k&2k\\2k&2k&2k&2k\\2k&2k&2k&2k\end{bmatrix}$

（2） $(m+7k)m^3$

五、

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-8&2\\-2&-7&2\\2&10&-1\end{bmatrix}$$

六、

$$-\frac{1}{2}$$

七、（10 分）设 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{3\times3}$ 为可逆矩阵，A_{ij} 是 a_{ij} 对应的代数余子式，并且 $A_{ij}=2a_{ij}$，

证明：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=4\boldsymbol{E}$.

证： 由 $A_{ij}=2a_{ij}$，得 $\boldsymbol{A}^*=2\boldsymbol{A}^T,\left|\boldsymbol{A}^*\right|=\left|2\boldsymbol{A}^T\right|,\left|\boldsymbol{A}\right|^2=8\left|\boldsymbol{A}\right|,\ \left|\boldsymbol{A}\right|=8\text{或}0$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，所以 $\left|\boldsymbol{A}\right|=8$. ………5 分

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{2}\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}=4\boldsymbol{E}$ ………5 分