第 2 卷第 6 期 江南大学学报(自然科学版) Vol. 2 No. 6
2003 年 12 月 Journal of Southern Yangtze University(Natural Science Edition) Dec. 2003

文章编号:1671 - 7147(2003)06 - 0553 - 04

过控制顶点的B 样条曲线

林 意[1] , 熊汉伟[2] , 骆少明[3] , 张湘伟[3]
(1. 江南大学 信息工程学院,江苏 无锡 214036;2. 汕头大学 机电学院,广东 汕头 515063;
3. 广东工业大学 机电学院,广东 广州 510090)

摘 要: 提出了一种B 样条曲线构造,得到了通过控制顶点的二次和三次B 样条曲线,这种曲线可通过调整控制顶点进行形状修改并始终通过控制点,又不必作反求计算,修改曲线形状很快,同时又能保证精度.

关键词: B 样条曲线; 控制顶点; 反求计算
中图分类号: TP 391.41 文献标识码: A

www.cnki.net

The B-Spline Curve Passing Control Points

LIN Yi[1] , XIONG Han-wei[2] , LUO Shao-ming[3] , ZHANG Xiang-wei[3]
(1. School of Information Technology, Southern Yangtge University, Wuxi 214036, China; 2. School of Mechano-electronic Engineering, Shantou Univiersity, Shantou 515063, China; 3. School of Mechano-electronic Engineering, Guangdong polytechnic University, Guangzhou 510090, China)

Abstract: The general B-spline curve does not pass the control points. But the B-spline curve can pass the control points when correcting shape of curve. This is Anti-calculate and An equation can be solved. However, it is difficulty to correct shape of curve real-time. In this paper, a new arithmetic about how to get B-spline curve which pass the control points and need not to solve equation, has been proposed. It is easy with the arithmetic to correct the shape of curve real-time.

Key words: B-spline; control points; anti-calculate

目前曲线造型主要有 Bezier 曲线、B 样条曲线和 NURBS 曲线,这些曲线以控制顶点作为权[1,2],相应的函数作为基线性组合而成. 然而,控制顶点的位置仅仅控制了曲线的基本形状,而不能直接控制曲线的变化,常常不能把曲线设计到所需要的位置[3]. 作为曲线的应用,有必要研究在曲线保型的同时还必须通过控制点的问题. 这是个反求过程,即通过反求B 样条曲线的理论控制顶点,保证曲线通过实际控制点. 这种方法的缺点在于当通过的实际控制点改变时,理论控制顶点与实测不一致,要重新反求理论控制顶点. 作者利用B 样条基底的性质,提出了一种曲线造型方法,产生的曲线通过控制点,且保留B 样条的性质;当通过的实际控制点变化时,无需作反求计算,修正速度快,且保证精度.

1 B 样条函数与B 样条曲线

B 样条函数的定义很多,这里用截尾幂函数的差商定义B 样条.

收稿日期:2003 - 10 - 09; 修订日期:2003 - 11 - 20.
基金项目: 国家自然科学基金项目(50105013)资助课题.
作者简介: 林意(1963 -),男,江苏无锡人,工学博士,副教授.

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

定义1
$$(t-x)_+^k=\begin{cases}(t-x)^k & t\geq x\\ 0 & t<x\end{cases}$$

定义2 称 $M_{i,k}(x)=[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+k+1}](t-x)_+^k$ 为 k 次($k+1$阶)B样条函数,并将 $N_{i,k}(x)=(x_{i+k+1}-x_i)M_{i,k}(x)$ 称为 k 次规范B样条函数,为了方便,统称B样条.

于是,不难推得等距分布节点的3次(4阶)B样条函数为

$$N_{i,3}(u)=\begin{cases}0 & x\in(x_i,x_{i+4})\\ \frac{1}{6}u^3 & x\in[x_i,x_{i+1}]\\ \frac{1}{6}(1+3u+3u^2-3u^3) & x\in[x_{i+1},x_{i+2}]\\ \frac{1}{6}(4-6u^2+3u^3) & x\in[x_{i+2},x_{i+3}]\\ \frac{1}{3}(1-u)^3 & x\in[x_{i+3},x_{i+4}]\end{cases}\tag{1}$$

式中 $u=x-x_j$, $u\in[0,1]$ $(j=i,i+1,i+2,i+3)$

根据B样条基函数,B样条曲线方程可写为
$$p(u)=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{d}_iN_{i,k}(u)$$
其中 $\mathrm{d}_i(i=0,1,\cdots,n)$ 为控制顶点.

这种B样条曲线有许多优点,如:具有局部性质,有很高的光滑性等.但其缺点是控制点不在曲线上.特别地,二次均匀B样条曲线具有如下形式
$$\mathrm{S}_k(u)=\frac{1}{2}(1,u,u^2)\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&2&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}_k\\ \mathrm{d}_{k+1}\\ \mathrm{d}_{k+2}\end{pmatrix}\tag{2}$$
其中:d_k 为控制顶点,$0\leq u\leq 1$, $k=0,1,\cdots,n-2$. $\mathrm{S}_k(u)$ 过 $\mathrm{d}_k\mathrm{d}_{k+1}$ 的中点 b_k,并且在 b_k 处与 $\mathrm{d}_k\mathrm{d}_{k+1}$ 相切.

2 过控制点的二次均匀B样条曲线

若已知一组点 $\mathrm{b}_0,\mathrm{b}_1,\cdots,\mathrm{b}_{n+1}$,先求出一组点 $\mathrm{d}_i(i=1,2,\cdots,n)$,使得 b_k 成为 $\mathrm{d}_k\mathrm{d}_{k+1}$ 的中点.

令 $\mathrm{d}_0=(x_0,y_0,z_0)$ 是空间任意一点,则 $\mathrm{d}_1=2\mathrm{b}_0-\mathrm{d}_0$,使 b_0 成为 d_0、d_1 的中点.

同样,$\mathrm{d}_k=2\mathrm{b}_{k-1}-\mathrm{d}_{k-1}(k=1,\cdots,n)$ 使 b_{k-1} 成为 $\mathrm{d}_{k-1}\mathrm{d}_k$ 的中点.

一般而言,这种 $\mathrm{d}_k(k=0,1,\cdots,n)$ 不是唯一的,但为了使 d_k 成为二次均匀样条曲线的控制点,还必须满足一个边界条件
$$\dot{\mathrm{S}}(0)=\mathrm{a}_0$$

由(2)式得 $\mathrm{S}_0(u)=\frac{1}{2}[(1-2u+u^2)\mathrm{d}_0+(1+2u-2u^2)\mathrm{d}_1+u^2\mathrm{d}_2]=(-2u+2u^2)\mathrm{d}_0+(1+2u-4u^2)\mathrm{b}_0+u^2\mathrm{b}_1$,

$\dot{\mathrm{S}}(u)=(-2+4u)\mathrm{d}_0+(2-8u)\mathrm{b}_0+2u\mathrm{b}_1$,

$\dot{\mathrm{S}}(0)=-2\mathrm{d}_0+2\mathrm{b}_0$,

故 $\mathrm{d}_0=\frac{1}{2}(2\mathrm{b}_0-\mathrm{a}_0)$.

因而,若曲线经过 $\mathrm{b}_0,\mathrm{b}_1,\cdots,\mathrm{b}_{n-1}$ 并满足边界条件,则其控制点为:$\frac{1}{2}(2\mathrm{b}_0-\mathrm{a}_0)$,$(2\mathrm{b}_0-\mathrm{a}_0)$,$\cdots$,$\mathrm{d}_k=(2\mathrm{b}_{k-1}-\mathrm{d}_{k-1})$.

相应地,对固定初始点方向的二次均匀B样条曲线,有
$$\mathrm{S}_0(u)=\frac{1}{2}(1,u,u^2)\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&2&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(2\mathrm{b}_0-\mathrm{a}_0)\\ \mathrm{b}_0+\frac{1}{2}\mathrm{a}_0\\ 2\mathrm{b}_1-\mathrm{b}_0-\frac{1}{2}\mathrm{a}_0\end{pmatrix}$$
$$\mathrm{S}_k(u)=\frac{1}{2}(1,u,u^2)\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&2&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}_k\\ \mathrm{d}_{k+1}\\ \mathrm{d}_{k+2}\end{pmatrix}.$$
其中:$\mathrm{d}_k=2\mathrm{b}_{k-1}-\mathrm{d}_{k-1}$ $k=1,\cdots,n-2$; $u\in[0,1]$; a_0 是初始方向; $\mathrm{b}_k(k=0,1,\cdots,n)$ 是要经过的控制点.实际问题中的边界条件可能不一样,但可类似处理.

3 过控制点的三次均匀B样条

虽然由(1)式知,$\mathrm{S}_{l-1}(1)=\mathrm{S}_l(0)$, $\dot{\mathrm{S}}_{l-1}(1)=\dot{\mathrm{S}}_l(0)$, $\ddot{\mathrm{S}}_{l-1}(1)=\ddot{\mathrm{S}}_l(0)$,即样条曲线在分段连接点处是 C^2 连续的.由于 d_l 与 b_l 无直接几何关系,因而不能按二次均匀B样条那样处理.下面将理论控制点直接用实际控制点表示,把用于插值 $n+1$ 个数据点 $\mathrm{p}_i(i=0,\cdots,n+3)$ 的三次均匀B样条写为

$$\mathrm{S}_i(t)=\frac{1}{6}(1-3t+3t^2-t^3)\mathrm{d}_i+\frac{1}{6}(4-6t^2+3t^3)\mathrm{d}_{i+1}+\frac{1}{6}(1+3t+3t^2-3t^3)\mathrm{d}_{i+2}+\frac{1}{6}t^3\mathrm{d}_{i+3},$$

并让其满足 $\mathrm{S}_i(0)=\mathrm{p}_i$ $(i=0,\cdots,n)$ 代入后,得
$$\begin{cases}\frac{1}{6}\mathrm{d}_0+\frac{4}{6}\mathrm{d}_1+\frac{1}{6}\mathrm{d}_2=\mathrm{p}_0\\ \frac{1}{6}\mathrm{d}_1+\frac{4}{6}\mathrm{d}_2+\frac{1}{6}\mathrm{d}_3=\mathrm{p}_1\\ \cdots\\ \frac{1}{6}\mathrm{d}_{n-3}+\frac{4}{6}\mathrm{d}_{n-2}+\frac{1}{6}\mathrm{d}_{n-1}=\mathrm{p}_{n-3}\end{cases}$$
其中:d_i 是理论控制点,而 p_i 是实际控制点.这有 $n-2$ 个方程,n 个未知数,需添加两个边界条件,一

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

个边界条件是 $\dot{S}_0(0) = q_0, \dot{S}_{n-3}(0) = q_{n-3}$,

故
$$\frac{1}{2}(-d_0 + 3d_2) = q_0$$
$$\frac{1}{2}(-d_{n-3} + 3d_{n-1}) = q_{n-3}$$

则方程为
$$\begin{cases} \frac{1}{2}(-d_0 + 3d_2) = q_0 \\ \frac{1}{6}d_0 + \frac{4}{6}d_1 + \frac{1}{6}d_2 = p_0 \\ \frac{1}{6}d_1 + \frac{4}{6}d_2 + \frac{1}{6}d_3 = p_1 \\ \cdots \\ \frac{1}{6}d_{n-3} + \frac{4}{6}d_{n-2} + \frac{1}{6}d_{n-1} = p_{n-3} \\ \frac{1}{2}(-d_{n-3} + 3d_{n-1}) = q_{n-3} \end{cases}$$

把方程组改写为
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & & & \\ 0 & \frac{4}{6} & \frac{4}{6} & & & \\ & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \frac{2}{9} & \frac{4}{6} & 0 \\ & & & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 + \frac{1}{3}q_0 \\ p_1 \\ \cdots \\ p_{n-3} - \frac{1}{9}q_{n-3} \\ q_{n-3} \end{pmatrix}$$

于是,只需解下列方程组
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & \frac{4}{3} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 \\ d_3 \\ \cdots \\ d_{n-3} \\ d_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6p_1 \\ 6p_2 \\ \cdots \\ 6p_{n-3} - \frac{2}{3}q_{n-3} \end{pmatrix}$$

而其余由下列式子求出:
$$4d_1 + 4d_2 = 6p_0 + 2q_0,$$
$$\frac{1}{2}(-d_0 + 3d_2) = q_0,$$
$$\frac{1}{2}(-d_{n-3} + 3d_{n-1}) = q_{n-3}$$

这时系统矩阵是对角占优的三对角矩阵,对其进行 LU 分解得:
$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & & \\ & \cdots & \cdots & \\ & & \gamma_{n-2} & \alpha_{n-2} \end{pmatrix},$$
$$U = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ & 1 & \beta_2 & & \\ & & \cdots & \cdots & \\ & & & 1 & \beta_{n-3} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

其中:$\gamma_i = 1\ (i = 2,3,\cdots,n-3)$; $\gamma_{n-2} = \frac{4}{3}$; $\alpha_1 = 3$; $\alpha_k = 4 - \frac{1}{\alpha_{k-1}}\ (k = 2,3,\cdots,n-3)$; $\alpha_{n-2} = 4 - \frac{4}{3\alpha_{n-3}}$; $\beta_k = \frac{1}{\alpha_k}\ (k = 1,2,\cdots,n-3)$; $\beta_{n-2} = \frac{4}{3\alpha_{n-2}}$.

注意到
$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ & 1 & \beta_1 & & \\ & & \cdots & \cdots & \\ & & & 1 & \beta_1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_{12} & \omega_{13} & \cdots & \omega_{1\,n-3} \\ & 1 & \omega_{23} & \cdots & \omega_{2\,n-3} \\ & & & \cdots & \cdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

其中　$\omega_{ij} = (-1)^{j-i}\beta_i\beta_{i+1}\cdots\beta_{j-1}$

而
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ 1 & \alpha_2 & & & & \\ & 1 & \alpha_3 & & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & 1 & \alpha_{n-4} & \\ & & & & \frac{4}{3} & \alpha_{n-3} \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & & & & & \\ \frac{(-1)}{\alpha_1\alpha_2} & \frac{1}{\alpha_2} & & & & \\ \frac{(-1)^2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} & \frac{(-1)}{\alpha_2\alpha_3} & \frac{1}{\alpha_3} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \frac{(-1)^{n-5}}{\alpha_1\cdots\alpha_{n-4}} & \frac{(-1)^{n-6}}{\alpha_2\cdots\alpha_{n-4}} & \frac{(-1)^{n-7}}{\alpha_3\cdots\alpha_{n-4}} & \cdots & \frac{1}{\alpha_{n-4}} & \\ \frac{4(-1)^{n-4}}{3\alpha_1\cdots\alpha_{n-3}} & \frac{4(-1)^{n-5}}{3\alpha_2\cdots\alpha_{n-3}} & \frac{4(-1)^{n-6}}{3\alpha_3\cdots\alpha_{n-3}} & \cdots & \frac{4(-1)}{3\alpha_{n-4}\alpha_{n-3}} & \frac{1}{\alpha_{n-3}} \end{pmatrix}$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

令
$$\delta_{ij} = \frac{(-1)^{j-1}}{a_i \cdots a_j}$$

则
$$\begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ 1 & a_2 & & & & \\ & 1 & a_3 & & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & 1 & a_{n-4} & \\ & & & & \frac{4}{3} & a_{n-3} \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & & & & & \\ \delta_{21} & \delta_{22} & & & & \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \delta_{n-4,1} & \delta_{n-4,2} & \delta_{n-4,3} & \cdots & \delta_{n-4,n-4} & \\ \frac{4}{3}\delta_{n-3,1} & \frac{4}{3}\delta_{n-3,2} & \frac{4}{3}\delta_{n-3,3} & \cdots & \frac{4}{3}\delta_{n-3,n-4} & \delta_{n-3,n-3} \end{pmatrix}$$

解方程组得

$$\begin{pmatrix} d_2 \\ d_3 \\ \cdots \\ d_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_{12} & \omega_{13} & \cdots & \omega_{1,n-3} \\ & 1 & \omega_{23} & \cdots & \omega_{2,n-3} \\ & & & \cdots & \cdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \times$$
$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & & & & & \\ \delta_{21} & \delta_{22} & & & & \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \delta_{n-4,1} & \delta_{n-4,2} & \delta_{n-4,3} & \cdots & \delta_{n-4,n-4} & \\ \frac{4}{3}\delta_{n-3,1} & \frac{4}{3}\delta_{n-3,2} & \frac{4}{3}\delta_{n-3,3} & \cdots & \frac{4}{3}\delta_{n-3,n-4} & \delta_{n-3,n-3} \end{pmatrix} \times$$
$$\begin{pmatrix} 6p_1 \\ 6p_2 \\ \cdots \\ 6p_{n-3} - \frac{2}{3}q_{n-1} \end{pmatrix}$$

因此,$d_i(i = 1, \cdots, n-2)$ 可以直接求出,而不必每次求解方程组,故在实时设计和控制等领域中有广泛的应用价值.

4 算例与结论

文中对以上算法进行了编程实现,程序运行结果如图1所示.

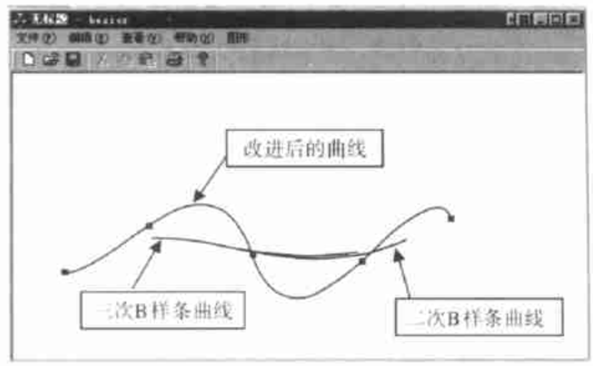

图1 3种曲线类型

Fig. 1 The three type curves

在主频为1.5 GHz的微机上,生成曲线的算法可根据文献[4],效果明显. 对改进后的B样条曲线,控制点可任意移动,曲线始终经过控制点,响应非常迅速;同时,插入一些控制点后,曲线响应也非常快,对自由设计很有好处. 几种曲线算法对比结果见表1.

表1 各种算法的比较

Tab. 1 The comparison of some algorithms

	二次B样条	三次B样条	改进的二次B样条	改进的三次B样条
变更控制点响应	慢	慢	快	快
生成曲线	慢	慢	快	快
保凸性	好	好	不好	好

传统的曲线保凸性较好,文中二次B样条曲线的保凸性不是很理想,要控制点较平滑才行,因此,其保凸性处理还有待进一步研究.

参考文献:

[1] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理B样条(CAGD &NURBS)[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,1994.

[2] 朱心雄. 自由曲线曲面造型技术[M]. 北京:科学出版社,2000.

[3] LAXMI PARIDA. A Computational technique for general shape deformation for use in font design[J]. **Computer &Graphics**, 1993,17(4):349-356.

[4] 刘勇奎. 计算机图形学的基础算法[M]. 北京:科学出版社,2001.

(责任编辑:邢宝姝)

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net