



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**OBJETOS COMBINATORIOS Y FRACCIONES
CONTINUAS ASOCIADOS A AUTÓMATAS
PONDERADOS INFINITOS**

JOSÉ LUIS RAMÍREZ RAMÍREZ

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

Abril de 2015



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**COMBINATORIAL OBJECTS AND
CONTINUED FRACTIONS ASSOCIATED TO
INFINITE WEIGHTED AUTOMATA**

JOSÉ LUIS RAMÍREZ RAMÍREZ

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

Abril de 2015

**OBJETOS COMBINATORIOS Y FRACCIONES
CONTINUAS ASOCIADOS A AUTÓMATAS
PONDERADOS INFINITOS**

JOSÉ LUIS RAMÍREZ RAMÍREZ

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Director:
Ph.D., RODRIGO DE CASTRO KORGI

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
Abril de 2015

**OBJETOS COMBINATORIOS Y FRACCIONES
CONTINUAS ASOCIADOS A AUTÓMATAS
PONDERADOS INFINITOS**

JOSÉ LUIS RAMÍREZ RAMÍREZ

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

JURADOS:

Federico ARDILA, San Francisco State University.

Leandro JONES, California University of Pennsylvania.

Jan RUTTEN, Radboud University Nijmegen.

COORDINADOR:

Agustin MORENO, Universidad Nacional de Colombia.

DIRECTOR:

Rodrigo DE CASTRO KORGI, Universidad Nacional de Colombia.

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

Abril de 2015

Agradecimientos

El trabajo desarrollado en esta tesis no habría comenzado sin la guía y los consejos de mi tutor, el profesor Rodrigo De Castro Korgi. A él le doy mi más sincero agradecimiento por su ayuda durante todos estos años, por escuchar mis ideas y ayudarme a cristalizarlas. Por haberme introducido a la teoría de lenguajes formales y a la combinatoria.

Quiero también agradecer a los profesores del Departamento de Matemáticas, en particular al profesor Gustavo Rubiano por sus consejos durante el desarrollo de esta tesis. Asimismo, estoy muy agradecido con el Departamento de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda, gracias a su soporte he podido culminar esta tesis. Además, me han brindado la oportunidad de conocer a varios investigadores en el área de combinatoria, los cuales de una u otra forma me han aportado en mi formación académica. En particular agradezco a los profesores Istvan Mező, Victor Sirven, Juanjo Rue, Sergio Falcón, Ana Luzón y Manuel A. Morón.

Por último, agradezco a mi familia, en particular a mis papás que siempre han estado a mi lado de manera incondicional. Fue sólo a través de su constante apoyo y sacrificio que yo fui capaz de llegar tan lejos. A mi querida esposa, Sandra, le agradezco por haber compartido y “soportado” conmigo todas estas horas en la elaboración de este documento, y apoyarme en todos mis sueños.

Resumen

En este trabajo presentamos una metodología general para resolver una gran variedad de problemas clásicos de conteo sobre trayectorias en el plano. Estos problemas están relacionados con trayectorias de Dyck, trayectorias de Motzkin y algunas de sus generalizaciones. La metodología usa autómatas ponderados, ecuaciones de funciones generatrices y fracciones continuas. Hemos llamado a esta nueva metodología “Metodología de Autómatas de Conteo”, la cual es una variación de la técnica propuesta por Rutten, llamada “Conteo por Coinducción”.

Palabras Claves

Autómatas ponderados infinitos, combinatoria enumerativa, fracciones continuas, funciones generatrices, trayectorias en el plano, trayectorias de Dyck, trayectorias de Motzkin.

Abstract

In this work, we present a general methodology to solve a wide variety of classical lattice path counting problems in a uniform way. These counting problems are related to Dyck paths, Motzkin paths and some of their generalizations. The methodology uses weighted automata, equations of ordinary generating functions and continued fractions. We refer this new methodology as “Counting Automata Methodology”. It is a variation of the technique proposed by Rutten, which is called “Coinductive Counting”.

Keywords

Infinite weighted automata, enumerative combinatorics, continued fractions, generating functions, lattice paths, Dyck paths, Motzkin paths.

Índice general

Agradecimientos	v
Resumen	vi
Índice de figuras	vii
Introducción	xii
1. Conceptos y Resultados Preliminares	1
1.1. Lenguajes, Autómatas y Gramáticas	1
1.1.1. Palabras y Lenguajes	1
1.1.2. Autómatas Finitos	2
1.1.3. Gramáticas	6
1.2. Combinatoria y Lenguajes Formales	7
1.2.1. Series Formales	7
1.2.2. Funciones Generatrices y Clases Combinatorias	8
1.2.3. Funciones Generatrices y Lenguajes Formales	10
1.2.4. Metodología de Conteo por Coinducción	12
2. Autómatas Infinitos y Funciones Generatrices	14
2.1. Autómatas Ponderados	14
2.1.1. Series Formales y Autómatas Ponderados	15
2.2. Autómatas Convergentes y Teoremas de Convergencia	16
2.2.1. Criterios de Convergencia	17
3. Metodología de los Autómatas de Conteo	23
3.1. Ejemplos de la Metodología de los Autómatas de Conteo	24
3.2. Autómata Infinito Lineal de Conteo	28
3.2.1. Grafos y Autómatas Lineales	28
3.3. Función Generatriz Asociada a \mathcal{M}_{Lin} y $\mathcal{M}_{\text{BLin}}$	31

3.3.1.	Función Generatriz Ordinaria de \mathcal{M}_{Lin}	31
3.3.2.	Aplicaciones de la MAC a trayectorias generalizadas de Motzkin y k -Coloreadas	35
3.3.3.	Aplicaciones en las Trayectorias de Dyck y Algunas Generalizaciones	37
3.3.4.	Función Generatriz Ordinaria de $\mathcal{M}_{\text{BLin}}$	40
3.4.	Trayectorias Multicoloreadas e Inclinadas	47
4.	Operadores sobre Autómatas y sus Funciones Generatrices	52
4.1.	Operador FIN	52
4.1.1.	Función Generatriz Ordinaria de $\text{FIN}_{\mathbb{N}}(\mathcal{M}_{\text{Lin}})$	53
4.1.2.	Función Generatriz Ordinaria de $\text{FIN}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}_{\text{BLin}})$	60
4.1.3.	Autómatas de Conteo $\text{FIN}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{\text{Lin}})$ y $\text{FIN}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{\text{BLin}})$	64
4.2.	Operador INI	71
4.2.1.	Función Generatriz Ordinaria de $\mathcal{M}_{\text{Lin}}^{(r)}$	72
4.3.	Operador DELETE	74
4.3.1.	Funciones Generatrices Ordinarias de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}, \mathcal{M}_{\mathbb{I}}$ y $\mathcal{M}_{\text{Lin} \setminus i}$	75
4.3.2.	Trayectorias de Motzkin con Restricciones sobre sus Pasos Horizontales	76
4.3.3.	Funciones Generatrices Ordinarias de $\mathcal{M}_{b\mathbb{P}}, \mathcal{M}_{b\mathbb{I}}$ y $\mathcal{M}_{b\text{Lin} \setminus i}$	84
4.4.	Operador JUMP	85
4.4.1.	Aplicaciones en las Trayectorias de Motzkin sin picos de altura k	87
5.	Otras Aplicaciones de la Metodología de los Autómatas de Conteo	98
5.1.	Un ejemplo más de trayectorias de Motzkin	98
5.2.	Aplicaciones de la MAC en Trayectorias Reticulares n -Dimensionales	101
5.3.	Triángulos Numéricos	106
5.3.1.	Triángulo de Pascal	106
5.3.2.	Primera Generalización del Triángulo de Pascal	109
5.3.3.	Segunda Generalización del Triángulo de Pascal	114
5.3.4.	Rombo de Pascal	116
5.3.5.	El k -Rombo de Pascal	119
5.4.	Ejemplos en Varias Variables	120
5.5.	Limitaciones de la MAC	123
	Trabajos Futuros	125
	Referencias	126

Índice de figuras

1. Autómata ponderado infinito.	XIV
1.1. Autómata finito.	3
1.2. Funcionamiento del autómata.	4
1.3. Procesamiento cadena w	4
1.4. Procesamiento cadena v	5
1.5. Diagrama de transición del autómata \mathcal{M} del Ejemplo 1.1.3.	5
1.6. Triangulaciones de polígonos convexos.	8
1.7. Autómata \mathcal{M} , tal que $L(\mathcal{M}) = S$	11
1.8. Árbol infinito asociado al problema de los paréntesis bien formados.	13
1.9. Equivalencia con el árbol.	13
2.1. Diagrama de transición del autómata \mathcal{M} , Ejemplo 2.1.1.	14
2.2. Diagrama de transición del autómata $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$, Ejemplo 2.1.2.	15
2.3. Autómata de conteo asociado a \mathcal{M}	16
2.4. Diagrama de transición del autómata \mathcal{M} , Ejemplo 2.2.2.	17
2.5. Diagrama de transición del autómata \mathcal{M} , Ejemplo 2.2.3.	17
2.6. Diagrama de transición del autómata \mathcal{M} , Ejemplo 2.2.4.	17
2.7. Transiciones del estado p al estado q	18
2.8. Transición en paralelo.	18
2.9. Autómata de conteo con transiciones del tipo z , Ejemplo 2.2.9.	19
2.10. Autómatas de conteo con transiciones en paralelo, Ejemplo 2.2.9.	19
2.11. Transición en paralelo determinadas por $f_k z^k$	21
3.1. Trayectoria de Motzkin de longitud 14.	24
3.2. Autómata convergente asociado a las trayectorias de Motzkin.	24
3.3. Trayectorias de Riordan de longitud 4.	26
3.4. Autómata convergente asociado a las trayectorias de Riordan.	27
3.5. Equivalencia de autómatas $\mathcal{M}'_R \cong \mathcal{M}_R$, Ejemplo 3.1.2.	27
3.6. Grafo totalmente lineal G_L	28

3.7. Grafo totalmente bilineal G_{BL}	28
3.8. Grafo lineal, Ejemplo 3.2.2.	29
3.9. Grafo lineal, Ejemplo 3.2.3.	29
3.10. Grafo lineal, Ejemplo 3.2.4.	29
3.11. Autómata infinito lineal asociado a G_L	30
3.12. Autómata lineal de conteo, Ejemplo 3.2.8.	30
3.13. Autómata infinito lineal de conteo \mathcal{M}_{Lin}	31
3.14. Autómata infinito lineal de conteo \mathcal{M}_{BLin}	31
3.15. Autómata de conteo, Corolario 3.3.2.	33
3.16. Trayectoria de Motzkin 2-coloreada de longitud 14.	35
3.17. Trayectoria generaliza de Motzkin de longitud 14.	36
3.18. Autómata infinito lineal de conteo \mathcal{M}_{Dyck}	38
3.19. Autómata equivalente a \mathcal{M}_{BLin}	40
3.20. Trayectorias combinadas de Dyck y Motzkin de longitud 3.	41
3.21. Ejemplo Teorema de Chung-Feller.	41
3.22. Equivalencia entre autómatas de conteo.	43
3.23. Trayectoria bilateral de Motzkin de longitud 14.	44
3.24. Trayectoria inclinada de Dyck de longitud 16.	49
3.25. Autómata de conteo correspondiente a las trayectorias de Dyck inclinadas. . .	50
3.26. Trayectoria inclinada de Motzkin de longitud 21.	50
3.27. Autómata de conteo correspondiente a las trayectorias inclinadas de Motzkin. .	51
4.1. Autómata infinito lineal de conteo $\text{FIN}_{\mathbb{N}}(\mathcal{M}_{Lin})$	52
4.2. Autómata infinito lineal de conteo $\text{FIN}_{\mathbb{N}}(\mathcal{M}_{Dyck})$	54
4.3. Interpretación triángulo de Motzkin.	58
4.4. Autómata infinito bilineal de conteo $\text{FIN}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}_{BLin})$	61
4.5. Tetraedro de Pascal.	64
4.6. Autómata infinito lineal de conteo $\text{FIN}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{Lin})$	64
4.7. Autómata equivalente a $\text{FIN}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{Lin})$	65
4.8. Autómata infinito lineal de conteo $\text{FIN}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{Dyck})$	66
4.9. Trayectorias de Motzkin de altura 1 y de longitud 3.	66
4.10. Autómata infinito bilineal de conteo $\text{FIN}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{BLin})$	67
4.11. Trayectorias bilateral de Motzkin de altura 2 y de longitud 4.	68
4.12. Autómata infinito bilineal de conteo $\text{FIN}_{\{i,j\}}(\mathcal{M}_{BLin})$	69
4.13. Trayectorias bilateral de Motzkin de altura 2 o -3 y de longitud 4.	71
4.14. Autómata infinito lineal de conteo $\text{INI}_r(\mathcal{M}_{Lin})$	71
4.15. Autómata infinito lineal de conteo $\mathcal{M}_{Lin}^{(r)}$	71
4.16. Autómata equivalente a $\mathcal{M}_{Lin}^{(r)}$	72

4.17. Autómata infinito lineal de conteo $\mathcal{M}_{Lin}^{(r,n)}$	73
4.18. Autómata infinito lineal de conteo $\mathcal{M}_{\mathbb{I}}$	74
4.19. Autómata infinito lineal de conteo $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$	75
4.20. Autómata equivalente a $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$	81
4.21. Autómata infinito lineal de conteo $\mathcal{M}_{b\mathbb{I}}$	84
4.22. Autómata infinito lineal de conteo $\mathcal{M}_{b\mathbb{P}}$	84
4.23. Autómata infinito lineal de conteo $\mathcal{M}_{Lin(i \rightarrow j)}$	86
4.24. Autómata equivalente a $\mathcal{M}_{Lin(i \rightarrow j)}$	86
4.25. Autómata convergente para trayectorias sin picos de altura k	87
4.26. Trayectorias de Motzkin de longitud 4 sin picos de altura 1	89
4.27. Autómata convergente para trayectorias sin picos en H	91
4.28. Autómata convergente para trayectorias sin picos sobre los niveles impares	94
4.29. Autómata equivalente al autómata de la Figura 4.28	94
4.30. Autómata convergente para trayectorias sin picos sobre los niveles pares	95
4.31. Autómata equivalente al autómata de la Figura 4.30	96
5.1. Trayectorias de Motzkin de longitud 5 sin pasos de la forma UH^iD	98
5.2. Autómata de conteo \mathcal{M}_P	99
5.3. Autómata de conteo equivalente a \mathcal{M}_P	99
5.4. Elementos del conjunto $\tau_3^{(2)}$	102
5.5. Elementos del conjunto $\tau_2^{(3)}$	103
5.6. Autómata de conteo para las diagonales del triángulo de Pascal	108
5.7. Autómata de conteo para las columnas del triángulo de Pascal T_1	111
5.8. Autómata de conteo para las diagonales de la generalización del triángulo de Pascal (T_1)	112
5.9. Autómata de conteo para las diagonales del r -triángulo de Pascal	115
5.10. Autómata de conteo, Corolario 5.4.1	121
5.11. Autómata de conteo asociado a las palabras \mathcal{M}_k^x	122
5.12. Autómata de conteo asociado a $G_k(x, y, z)$	123
5.13. Trayectoria de Łukasewicz de longitud 16	124
5.14. Autómata de conteo asociado a las trayectoria de Łukasewicz	124

Introducción

Los lenguajes formales, autómatas finitos y gramáticas son objetos matemáticos básicos en la teoría de la computación, con importantes aplicaciones en varios campos, como el álgebra, la teoría de números y la combinatoria [9, 13, 20]. En particular, en combinatoria algunos resultados están relacionados con la enumeración de objetos discretos mediante el uso de cadenas de símbolos, autómatas, gramáticas y funciones generatrices [11, 20, 34, 43, 52].

La combinatoria es una rama de las matemáticas enfocada en el estudio de estructuras discretas. Muchas de estas estructuras provienen de la teoría de la computación. Hoy en día son muchas sus aplicaciones en diferentes campos, como por ejemplo en el análisis de algoritmos, física estadística o bioinformática [38]. Dentro de la combinatoria, la combinatoria enumerativa y biyectiva está enfocada en problemas fundamentales de las estructuras de conteo, en las clases combinatorias y en explicar las ocurrencias de estructuras recurrentes.

Los problemas de enumeración están asociados a una gran variedad de objetos, tales como trayectorias en el plano, árboles, poliomínos, arreglos numéricos, grafos, teselados, entre otros. El objetivo básico es estudiar la cantidad de elementos de una familia bajo uno o varios parámetros, de manera exacta o aproximada. Por lo general, estos problemas tienen como característica común que pueden ser representados por objetos sencillos, adecuados a las técnicas de combinatoria enumerativa.

Esta gran variedad de objetos genera dificultad a la hora de clasificarlos y no existe una técnica unificada para abordarlos, de ahí que existan varias metodologías tales como el conteo simbólico [34], método de transferencia de matrices [38], método ECO [1, 2], gramáticas objeto [27], metodología de Chomsky-Schützenberger [11], entre otras. En esta última metodología uno de los principales resultados es el bien conocido Teorema de Enumeración Chomsky-Schützenberger [17], el cual afirma que la función generatriz ordinaria asociada a un lenguaje independiente del contexto no ambiguo es algebraica sobre $\mathbb{Q}(x)$. Este último teorema es una relación directa entre la teoría de lenguajes formales y la combinatoria enumerativa.

El uso de autómatas finitos en combinatoria enumerativa se ha ampliado, teniendo en cuenta las nuevas generalizaciones de estos. Un ejemplo son los autómatas ponderados (*weighted automata*) los cuales fueron introducidos por Schützenberger [63]. Estos autómatas son de gran importancia en la teoría de la computación y tienen varias aplicaciones [26].

Los autómatas ponderados se pueden ver como una generalización de los autómatas no deterministas, donde cada transición tiene asociada una ponderación. Esta ponderación es un elemento de un semianillo, el cual puede representar, por ejemplo, una probabilidad. Los lenguajes ponderados asociados a estos autómatas están estrechamente relacionados con las series de potencias [8]. En efecto, para calcular la ponderación de una palabra dada, se van acumulando las ponderaciones de cada transición en la trayectoria mediante la multiplicación de ellas; en este caso la multiplicación del anillo juega el rol importante. Asimismo, la suma del anillo sirve para calcular el peso total de una cadena w mediante la suma de las ponderaciones de cada una de las trayectorias etiquetadas con w ; esto da como resultado una serie con coeficientes en el semianillo.

Estos autómatas ponderados se pueden generalizar aun más si se consideran infinitos estados [7, 49, 59, 60, 61, 57, 68, 69], el cual es un tema no muy desarrollado en la literatura. En particular en [49, 59, 60], se han utilizado autómatas ponderados infinitos para abordar problemas de combinatoria; sin embargo, son pocos los estudios existentes en esta dirección. Los trabajos más relevantes son los de Jan Rutten [58], el cual desarrolló una metodología basada en autómatas infinitos ponderados, co-inducción y cálculo de palabras o cadenas; dicha metodología lleva el nombre de Conteo por Coinducción. En esta metodología muchas de las funciones generatrices que resultan se expresan como fracciones continuas infinitas; esto está inspirado en el trabajo de Flajolet [33], ver también [37]. Esta metodología de Rutten ha permitido encontrar resultados de conteo existentes y nuevos desde una nueva perspectiva.

Uno de los principales resultados de Rutten es el siguiente:

Teorema 0.0.1 (Teorema 9.1 de [59]). *La función generatriz asociada al autómata de la Figura 1, donde cada ponderación es un número real, es*

$$F(z) = \frac{1}{1 - l_0z - \frac{u_0d_1z^2}{1 - l_1z - \frac{u_1d_2z^2}{1 - l_2z - \frac{u_2d_3z^2}{\ddots}}}}.$$

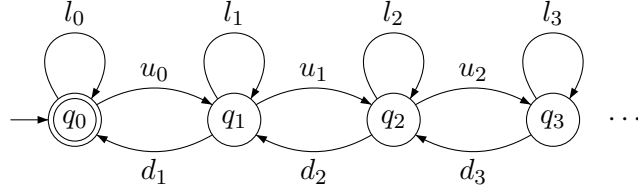


Figura 1: Autómata ponderado infinito.

Rutten hace un avance considerable en el estudio de los autómatas con infinitos estados; sin embargo, son muchas las preguntas que quedaron abiertas en su trabajo, por ejemplo: sistematizar la teoría subyacente, estudiar otra variedad de autómatas infinitos, mostrar nuevas aplicaciones, considerar transiciones etiquetadas por series y no simplemente por números reales y mostrar ejemplos con funciones generatrices de varias variables.

Es así como en la presente tesis se ha retomado el estudio de la mencionada metodología de una manera más amplia, a partir del uso sistemático de autómatas ponderados infinitos y de fracciones continuas. Como resultado se obtuvo una metodología que hemos llamado **Metodología de Autómatas de Conteo (MAC)**. Esta metodología es sin duda un ejemplo de la relación estrecha que existe entre los lenguajes formales y la combinatoria enumerativa. Además, brinda un método sistemático para estudiar una familia amplia de objetos combinatorios.

El objetivo básico de la MAC consiste en encontrar una biyección entre una familia de objetos de una determinada clase combinatoria y las palabras aceptadas por un autómata infinito ponderado. Luego de eso se plantea un sistema de ecuaciones y mediante manipulaciones algebraicas se obtiene una función generatriz cuyos coeficientes corresponden con el número de elementos de la clase combinatoria.

En particular, en el presente trabajo nos hemos concentrado en estudiar dos tipos de estructuras combinatorias, descritas a continuación:

- Trayectorias en el plano y n -dimensionales. Buena parte de las aplicaciones de la MAC se concentraron en el estudio de trayectorias sobre el plano reticular, es decir, en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y en algunos casos en \mathbb{Z}^n . Algunas de las trayectorias estudiadas fueron trayectorias de Dyck, Motzkin, Schröder y sus generalizaciones. Se obtuvieron resultados clásicos y nuevos de una manera diferente. Estos resultados están relacionados con sus funciones generatrices.
- Arreglos numéricos. En uno de los capítulos de la presente tesis nos concentramos en

el estudio de arreglos numéricos a partir de la MAC. En particular, se estudiaron las funciones generatrices de las columnas y diagonales. Los arreglos analizados fueron el triángulo de Pascal y varias de sus generalizaciones, el rombo de Pascal y una generalización de este, y los triángulos de Catalan y Motzkin.

Se escogieron los arreglos numéricos y las trayectorias del plano, ya que son uno de los tópicos más interesantes de la combinatoria enumerativa. Además, muchos otros objetos están en biyección con estos; por ejemplo, las trayectorias de Dyck pueden ser enumeradas por los números de Catalan, la cual es una sucesión que enumera una gran variedad de objetos; ver A000108 en [67] ¹.

Hay que aclarar que la metodología que aquí introducimos no busca reemplazar técnicas bien conocidas para el estudio de estructuras combinatorias, como por ejemplo el método simbólico. En cambio, queremos exhibir y resaltar las relaciones y aplicaciones de los autómatas ponderados infinitos en la enumeración de algunas estructuras combinatorias.

El presente documento está dividido en cinco capítulos. El primer capítulo presenta los conceptos y resultados básicos de teoría de la computación y combinatoria. En particular, se introducen las definiciones de lenguajes regulares, lenguajes independientes de contexto, autómatas finitos, gramáticas y el teorema de Kleene. Luego se hace una introducción a las funciones generatrices y a las clases combinatorias, teniendo en cuenta que esta es la maquinaria que se utilizará a lo largo de la tesis. A continuación se muestra la relación entre lenguajes formales y funciones generatrices; en particular, se expone el teorema de Chomsky-Schützenberger. Finalizamos el capítulo mostrando las ideas básicas de la metodología de Conteo por Coinducción introducida por Rutten, ya que esa fue la fuente de inspiración para este trabajo.

En el segundo capítulo se introducen los autómatas ponderados infinitos. Para nuestro enfoque las ponderaciones de estos autómatas van a ser funciones generatrices. El lenguaje aceptado por estos autómatas va a estar en biyección con diferentes objetos combinatorios. Por lo tanto, un autómata ponderado infinito arbitrario no necesariamente es útil ya que cada autómata debe estar en concordancia con la definición de clase combinatoria; por ejemplo, el autómata no puede aceptar infinitas cadenas de una misma longitud. Los autómatas apropiados los hemos denominado convergentes. Se presentan dos criterios para saber si un autómata es convergente o no. De estos autómatas convergentes estamos interesados en el número de palabras que acepta de cada longitud; tales autómatas los denominamos autómatas de conteo. El capítulo finaliza con una serie de resultados que muestran cómo obtener la

¹Muchas secuencias de enteros con sus propiedades pueden encontrarse en la On-Line Encyclopedia of Integers Sequences, [67]. Cuando se haga referencia a una sucesión de la enciclopedia, se citará mediante su código en la base de datos, que tiene el formato ANNNNNN.

función generatriz de un autómata de conteo.

En el tercer capítulo se introduce la Metodología de Autómatas de Conteo. Mostramos que los autómatas de conteo sirven para estudiar problemas combinatorios. Básicamente, hay que encontrar una biyección entre las palabras aceptadas por el autómata y los objetos de la clase combinatoria. Después nos concentramos en el estudio de dos familias de autómatas de conteo, los autómatas de conteo lineales y los bilineales, y encontramos sus funciones generatrices asociadas, las cuales se expresan por medio de fracciones continuas infinitas. Estos resultados generalizan los obtenidos por Rutten. En lo que resta del capítulo nos concentramos en mostrar aplicaciones relacionados con trayectorias en el plano, como por ejemplo las trayectorias de Motzkin, Dyck, y sus variaciones. Algunos resultados son bien conocidos y otros son nuevos; sin embargo, el tratamiento es original.

En el cuarto capítulo se introducen cuatro operadores sobre los autómatas lineales y bilineales. Estos operadores se denotan por FIN, INI, DEL, JUMP. El primero de ellos redefine los estados de aceptación; por ejemplo, se obtienen autómatas lineales en los que todos los estados son de aceptación. El segundo operador redefine el estado inicial. El tercer operador permite eliminar aristas del autómata. Y el cuarto operador agrega nuevas aristas entre estados no consecutivos. Lugo de aplicar estos operadores a los autómatas, procedemos a encontrar de manera general las funciones generatrices asociadas. Asimismo, mostramos un gran número de aplicaciones en trayectorias en el plano.

Finalmente, en el quinto capítulo se presentan aplicaciones de la MAC en el estudio de arreglos numéricos y de trayectorias n -dimensionales. Además, mostramos cómo extender esta metodología para el caso de autómatas cuyas ponderaciones son funciones generatrices en varias variables. Cerramos este capítulo mostrando algunas limitaciones que tiene este método.

Artículos obtenidos a partir de la elaboración de esta tesis:

- De Castro, R., Ramírez, A. Ramírez, J. Applications in Enumerative Combinatorics of Infinite Weighted Automata and Graphs. *Scientific Annals of Computer Science*, 24(1), 137-171, 2014.
- De Castro, R., Ramírez, J. Enumerating n -Dimensional Lattice Paths using Infinite Weighted Automata, sometido para publicación en *Pure Mathematics and Applications*.

Capítulo 1

Conceptos y Resultados Preliminares

En este capítulo presentamos algunos conceptos y resultados básicos de teoría de la computación y combinatoria, con los que debe contar un potencial lector de este trabajo.

1.1. Lenguajes, Autómatas y Gramáticas

1.1.1. Palabras y Lenguajes

Un alfabeto es un conjunto finito no vacío cuyos elementos se llaman símbolos. Denotamos un alfabeto arbitrario con la letra Σ . Una palabra sobre un alfabeto Σ es una secuencia finita de elementos de Σ , se denotan por las letras u, v, w, \dots . Se supone la existencia de una única palabra que no tiene símbolos, la cual se denomina palabra vacía y se denota con λ .

El conjunto de todas las palabras sobre un alfabeto Σ , incluyendo la palabra vacía, se denota por Σ^* . Dado un alfabeto Σ y dos palabras $u, v \in \Sigma^*$, la concatenación de u y v , es la palabra que se forma al escribir los símbolos de u y a continuación los símbolos de v . Se denota por uv . La longitud de una palabra $u \in \Sigma^*$, denotada con $|u|$, se define como el número de símbolos de u . Recursivamente se define de la siguiente manera.

$$|u| = \begin{cases} 0, & \text{si } u = \lambda; \\ |v| + 1, & \text{si } u = wa; \end{cases}$$

para todo $a \in \Sigma$ y $w \in \Sigma^*$. Además, denotaremos por $|u|_a$, con $a \in \Sigma$, el número de a 's que aparecen en la palabra u .

Un lenguaje L sobre un alfabeto Σ es un subconjunto de Σ^* . Todo lenguaje L satisface

$\emptyset \subseteq L \subseteq \Sigma^*$ y puede ser finito o infinito. Los lenguajes se denotan con letras mayúsculas $A, B, C, \dots, L, M, N, \dots$. Puesto que los lenguajes sobre Σ son subconjuntos de Σ^* , las operaciones usuales entre conjuntos son también operaciones válidas entre lenguajes.

La concatenación de dos lenguajes A y B sobre Σ , notada AB , se define como

$$AB = \{uv : u \in A, v \in B\}.$$

Dado un lenguaje A sobre Σ y un entero no negativo n , se define A^n de la siguiente forma

$$\begin{aligned} A^0 &= \{\lambda\}, \\ A^n &= A^{n-1}A = \{u_1 \cdots u_n : u_i \in A, \text{ para todo } i, 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

La estrella de Kleene o simplemente estrella de un lenguaje A , $A \subseteq \Sigma^*$, es la unión de todas las potencias de A y se denota por A^* .

$$A^* = \bigcup_{i \geq 0} A^i = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \cdots \cup A^n \cup \cdots.$$

Existe una clase especial de lenguajes, conocidos como lenguajes regulares. Los lenguajes regulares sobre un alfabeto dado Σ son todos los lenguajes que se pueden formar a partir de los lenguajes básicos $\emptyset, \{\lambda\}, \{a\}$, $a \in \Sigma$, por medio de las operaciones de unión, concatenación y estrella de Kleene.

A continuación presentamos una definición recursiva de los lenguajes regulares. Sea Σ un alfabeto:

1. $\emptyset, \{\lambda\}, \{a\}$, para todo $a \in \Sigma$, son lenguajes regulares sobre Σ . Estos se denominan lenguajes regulares básicos.
2. Si A y B son lenguajes regulares sobre Σ , también lo son

$$A \cup B \quad \text{Unión.} \quad AB \quad \text{Concatenación.} \quad A^* \quad \text{Estrella de Kleene.}$$

Ejemplo 1.1.1. Sea $\Sigma = \{0, 1\}$. Los siguientes son lenguajes regulares sobre Σ :

- (i) El lenguaje A de todas las palabras que tienen exactamente un 0: $A = \{1\}^* \{0\} \{1\}^*$.
- (ii) El lenguaje B de todas las palabras que tienen un número impar de símbolos:

$$B = [(\{0\} \cup \{1\}) (\{0\} \cup \{1\})]^* (\{0\} \cup \{1\}).$$

1.1.2. Autómatas Finitos

Los autómatas finitos son modelos de máquinas abstractas que procesan cadenas de entrada, leyendo un símbolo a la vez; después de leer toda la cadena decide si la acepta o rechaza.

El autómata consiste de dos partes: una cinta semi-infinita, dividida en celdas, sobre la cual se escribe una cadena de entrada un símbolo por casilla y una cabeza lectora que tiene un número finito de configuraciones o estados, la cual escanea cada celda de la cinta de entrada, leyendo el símbolo de la celda, moviéndose a la derecha y cambiando su configuración interna, ver Figura 1.1. Después de leer toda la cadena y dependiendo de la configuración con la que finalice, decide si acepta la cadena o no.

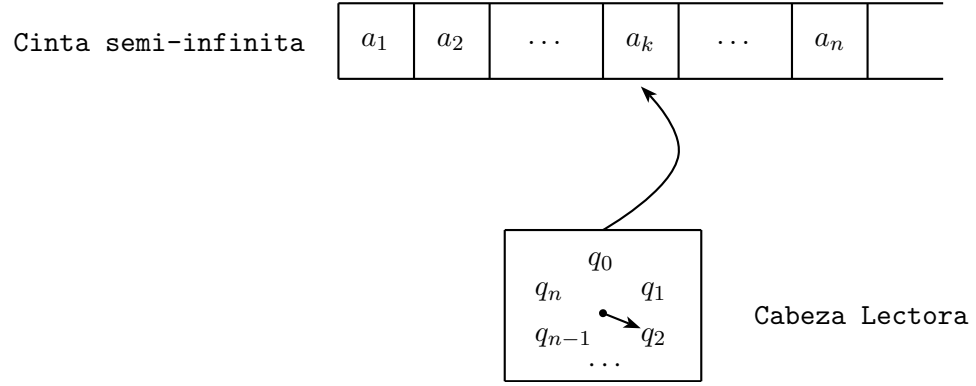


Figura 1.1: Autómata finito.

Formalmente se tiene que:

Definición 1.1.2. Un autómata finito determinista (AFD) \mathcal{M} es una quintupla $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$, donde:

- Σ es un alfabeto llamado alfabeto de cinta. Todas las cadenas que procesa \mathcal{M} pertenecen a Σ^* .
- $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ es un conjunto de estados internos del autómata.
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$ es un conjunto de estados finales o de aceptación, $F \neq \emptyset$.
- La función de transición del autómata

$$\begin{aligned} \delta : Q \times \Sigma &\longrightarrow Q \\ (q, a) &\longmapsto \delta(q, a). \end{aligned}$$

Una cadena de entrada $w \in \Sigma^*$ se coloca en la cinta de tal manera que el primer símbolo de w ocupa la primera casilla de la cinta. La cabeza lectora está inicialmente en el estado q_0

escaneando la primera celda, ver Figura 1.2.

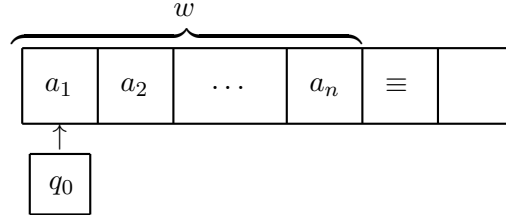


Figura 1.2: Funcionamiento del autómata.

La función de transición indica el estado al cual debe pasar la cabeza lectora, dependiendo del símbolo leído y de su estado actual. Es decir, si $\delta(q, a_i) = q'$ esto significa que al leer el símbolo a_i la cabeza lectora pasa del estado q al estado q' y se desplaza hacia la derecha. Esta acción constituye un paso computacional.

La cadena se procesa completamente ya que la función δ está definida para toda pareja $(q, a) \in Q \times \Sigma$. Además, la cadena es aceptada por el autómata si al terminar el procesamiento de la cadena w , la cabeza lectora queda en un estado de aceptación. Por lo tanto, el lenguaje aceptado por el autómata \mathcal{M} , el cual se denota por $L(\mathcal{M})$, es el conjunto de todas las cadenas w de Σ^* tal que \mathcal{M} termina el procesamiento de w en un estado de aceptación.

Ejemplo 1.1.3. Sea el autómata $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$, donde $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $F = \{q_2\}$ y δ está definida tabularmente por:

δ	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_2	q_2

Por ejemplo, el procesamiento de la cadena $w = 10100$ se muestra en la Figura 1.3.

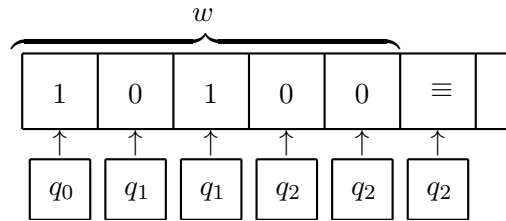


Figura 1.3: Procesamiento cadena w .

Como q_2 es un estado de aceptación entonces la cadena w es aceptada por el autómata. En la Figura 1.4 aparece el procesamiento de la cadena $v = 01000$. Como el estado q_1 no es de

aceptación entonces la cadena es rechazada.

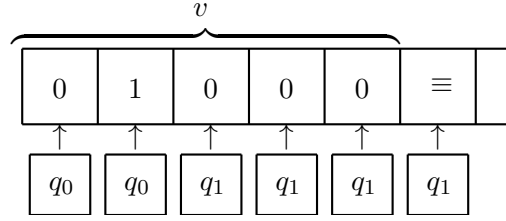


Figura 1.4: Procesamiento cadena v .

A todo autómata \mathcal{M} se le puede asociar un tipo especial de grafo, llamado diagrama de transición o grafo de \mathcal{M} , el cual es una forma alterna de representar \mathcal{M} . Específicamente para un autómata \mathcal{M} el diagrama de transición es un grafo etiquetado o dirigido con $|Q|$ vértices, donde cada uno de los vértices del grafo está etiquetado con cada uno de los estados de Q . Es decir, si $q \in Q$ este se representa por: \textcircled{q} . Si $q \in F$ este se representa por: $\textcircled{\textcircled{q}}$. El estado inicial q_0 se representa como: $\rightarrow \textcircled{q_0}$. Además, si $\delta(q, a) = p$ entonces el diagrama de transición tiene una arista que va del vértice q al vértice p y está etiquetada con el símbolo a , como se muestra a continuación: $\textcircled{q} \xrightarrow{a} \textcircled{p}$.

Es claro que una cadena w es aceptada por un autómata \mathcal{M} si y sólo si existe una trayectoria en el diagrama de transición del autómata \mathcal{M} etiquetada con los símbolos de w que comienza en el vértice q_0 y termina en un estado de aceptación. Además, los autómatas que aparecen en este documento no tienen estados inútiles, es decir, se omiten los estados que no están involucrados en trayectorias de aceptación.

Ejemplo 1.1.4. El diagrama de transición del autómata \mathcal{M} del Ejemplo 1.1.3 se muestra en la Figura 2.1.

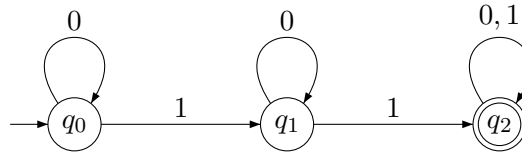


Figura 1.5: Diagrama de transición del autómata \mathcal{M} del Ejemplo 1.1.3.

Observando el diagrama de transición podemos verificar que la entrada 0010110 es aceptada, mientras que la cadena 001000 es rechazada. En general se tiene que

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* : |w|_1 \geq 2\}.$$

Además de los AFD existen otro tipo de máquinas que resultan ser equivalentes a éstos, conocidos como los autómatas finitos no deterministas (AFN) y los autómatas finitos con transiciones λ (AFN- λ), para más detalles ver [19, 61].

Existe una forma de relacionar los lenguajes regulares y los autómatas finitos, este resultado se conoce como el teorema de Kleene.

Teorema 1.1.5 (Teorema de Kleene [61]). *Un lenguaje es regular si y sólo si es aceptado por un autómata finito (AFD o AFN o AFN- λ).*

1.1.3. Gramáticas

Los autómatas son dispositivos que procesan palabras de entrada, sin embargo, existen otros tipos de mecanismos que generan palabras a partir de un símbolo inicial, las gramáticas generativas. A continuación presentamos un tipo de gramática generativa, denominada gramática independiente del contexto.

Definición 1.1.6. Una gramática independiente del contexto (GIC), es una cuádrupla, $G = (V, \Sigma, S, P)$, donde:

- V es un alfabeto finito, cuyos elementos se llaman variables o símbolos no terminales.
- Σ es un alfabeto, cuyos elementos se llaman símbolos terminales. Σ y V son disyuntos.
- $S \in V$ es una variable especial, llamada símbolo inicial de la gramática.
- Un conjunto finito $P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$ de producciones o reglas de re-escritura. Una producción $(A, w) \in P$ de G se denota por $A \rightarrow w$ y se lee “ A produce w ”; su significado es: la variable A se puede reemplazar (sobre-escribir) por la palabra w . En la producción $A \rightarrow w$, A se denomina la cabeza y w el cuerpo de la producción.

Las variables se denotan con letras mayúsculas A, B, C, \dots . Los elementos de Σ o símbolos terminales se denotan con letras minúsculas a, b, c, \dots . Si $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ y $A \rightarrow w$ es una producción, se dice que uwv se deriva directamente de uAv , lo cual se denota por $uAv \Rightarrow uwv$. Si se quiere hacer referencia a la gramática G , se escribe $uAv \xRightarrow{G} uwv$. Si u_1, u_2, \dots, u_n son palabras en $(V \cup \Sigma)^*$ y hay una sucesión de derivaciones directas

$$u_1 \xRightarrow{G} u_2, \quad u_2 \xRightarrow{G} u_3, \quad \dots, \quad u_{n-1} \xRightarrow{G} u_n,$$

se dice que u_n se deriva de u_1 y se escribe $u_1 \xRightarrow{*} u_n$.

Para toda palabra w se asume que $w \xRightarrow{*} w$; por lo tanto, $u \xRightarrow{*} v$ significa que v se obtiene de u utilizando cero, uno o más producciones de la gramática. Análogamente, $u \xRightarrow{+} v$ significa que v se obtiene de u utilizando uno o más producciones de la gramática.

El lenguaje generado por una gramática G se denota por $L(G)$ y se define como

$$L(G) := \left\{ w \in \Sigma^* : S \xRightarrow{+} w \right\}.$$

Un lenguaje L sobre un alfabeto Σ se dice que es un lenguaje independiente del contexto (LIC) si existe una GIC G tal que $L(G) = L$.

Ejemplo 1.1.7. La gramática G dada por: $S \rightarrow (S)S | \lambda$ genera el lenguaje de todas las cadenas de paréntesis anidados y equilibrados; es decir, cadenas como $(()), ()()(), ((()))((()))$. No tiene dificultad ver esto ya que cada aplicación de la producción $S \rightarrow (S)S$ da lugar a un par de paréntesis equilibrados. Para establecer la dirección recíproca se puede demostrar por inducción sobre n la siguiente afirmación: “Toda palabra con $2n$ paréntesis anidados y equilibrados se puede generar en G ” [19].

1.2. Combinatoria y Lenguajes Formales

1.2.1. Series Formales

Una serie formal $f(z)$ sobre un cuerpo \mathbb{F} de característica 0 es una expansión de la forma

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots,$$

donde $a_i \in \mathbb{F}$ para todo $i \geq 0$. La sucesión $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ se llama sucesión de coeficientes. Las series formales son un objeto puramente algebraico y por lo tanto no se está interesado en sus propiedades analíticas. Dadas dos series formales

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i,$$

se define la suma como la serie formal

$$f(z) + g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) z^i,$$

y el producto (producto usual de Cauchy) como

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) z^i.$$

Denotemos por $\mathbb{F}[[z]]$ el conjunto de series formales con coeficientes en \mathbb{F} . Es claro que $(\mathbb{F}[[z]], +, \cdot)$ es un anillo. Además, una serie $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ tiene recíproco si y sólo si $a_0 \neq 0$ y este recíproco es único.

Se dice que la serie $g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$ es la serie inversa de la serie $f(z)$ si $f(g(z)) = g(f(z)) = z$, donde

$$f(g(z)) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g(z)^i.$$

Para más detalles sobre las series formales ver por ejemplo [72].

1.2.2. Funciones Generatrices y Clases Combinatorias

Una clase combinatoria Ω es un conjunto finito o enumerable en el cual se ha definido una función de tamaño o de conteo que cumple las siguientes condiciones

1. El tamaño de cada elemento es un entero no negativo.
2. El número de elementos de cualquier tamaño dado es finito.

Denotamos por Ω_n el conjunto de elementos de Ω con tamaño n y $a_n = |\Omega_n|$.

Los problemas típicos de la combinatoria enumerativa están ligados a contar de manera general el número de elementos de cada conjunto de una clase combinatoria. Específicamente, dada una familia infinita de conjuntos Ω_n , donde n recorre sobre el conjunto \mathbb{N} de enteros no negativos, el problema consiste en determinar una función de conteo $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que $f(n) = |\Omega_n| = a_n$.

Ejemplo 1.2.1. Considere la clase combinatoria de todas las palabras binarias, la cual se denota por Ω_{bin} . Definimos la función de conteo como el número de símbolos de cada palabra. Es claro que $(\Omega_{bin})_n = 2^n$, para todo $n \geq 0$.

Ejemplo 1.2.2. Considere la clase combinatoria de todas las triangulaciones de un polígono convexo, la cual se denota por \mathcal{T} . En la Figura 1.6 se muestran las triangulaciones de los primeros polígonos.

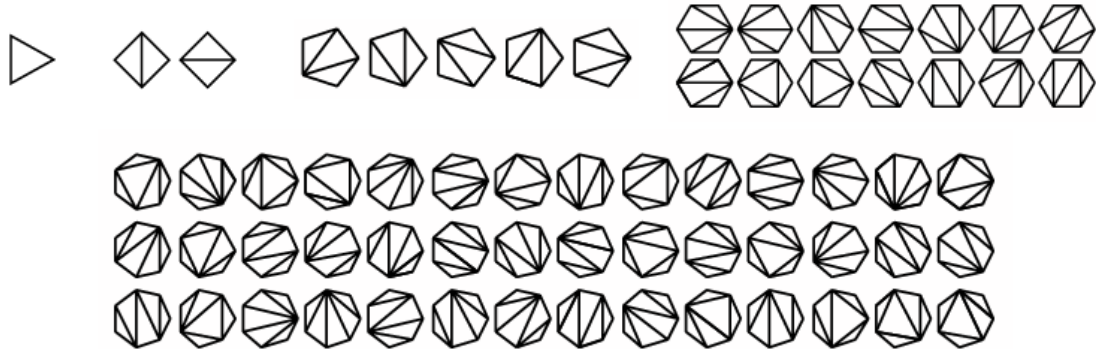


Figura 1.6: Triangulaciones de polígonos convexos.

En particular se tiene que $T_0 = 1$, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5$, $T_4 = 14$, $T_5 = 42, \dots$. En general se puede probar que esta sucesión de conteo corresponde con la sucesión de Catalán [33].

Definición 1.2.3. La sucesión de conteo de una clase combinatoria Ω es la sucesión de enteros $\{a_n\}_{n=0}^\infty$. Dos clases combinatorias Ω_1 y Ω_2 se dicen isomorfas, lo cual se denota como $\Omega_1 \cong \Omega_2$, si sus sucesiones de conteo son iguales.

Para más detalles sobre las clases combinatorias ver [34].

Definición 1.2.4. La función generatriz ordinaria (FG) de una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ es la serie formal

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i.$$

La función generatriz de una clase combinatoria Ω es la FG $f(z)$ de la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^\infty = \{|\Omega_n|\}_{n=0}^\infty$:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} |\Omega_i| z^i.$$

El coeficiente de z^n en una serie formal $f(z)$ lo denotaremos por $[z^n]f(z)$. Por lo tanto, se tienen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} [z^n] \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \right) &= a_n, \\ [z^n] \left(z^k f(z) \right) &= [z^{n-k}] f(z), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Es claro que la suma y multiplicación de FGs es análoga a la de las series formales.

Algunas FGs importantes son:

$$\begin{aligned} 1. \quad \sum_{i=0}^{\infty} z^i &= \frac{1}{1-z}. & 5. \quad \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m+i-1}{i} z^i &= \frac{1}{(1-z)^m}, \quad m \in \mathbb{Z}. \\ 2. \quad \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i z^i &= \frac{1}{1+z}. & 6. \quad \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m+i}{m} z^i &= \frac{1}{(1-z)^{m+1}}, \quad m \in \mathbb{Z}. \\ 3. \quad \sum_{i=0}^{\infty} z^{2i} &= \frac{1}{1-z^2}. & 7. \quad \sum_{i=0}^{\infty} F_i z^i &= \frac{1}{1-z-z^2}, \\ 4. \quad \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} z^i &= (1+z)^m, \quad m \in \mathbb{Z}. & 8. \quad \sum_{i=0}^{\infty} C_i z^i &= \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}, \end{aligned}$$

donde F_n y C_n son el n -ésimo número de Fibonacci y Catalan respectivamente.

Para más detalles sobre las FGs ver [48].

1.2.3. Funciones Generatrices y Lenguajes Formales

Dada una serie formal de potencias $F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, decimos que F es la función generatriz de un lenguaje formal L , si

$$f_n = |\{w \in L : |w| = n\}|,$$

es decir, el n -ésimo coeficiente de la serie F es el número de palabras en L de longitud n .

Es bien conocido el procedimiento para encontrar la función generatriz ordinaria de un lenguaje independiente del contexto dado, este procedimiento se conoce como la *Metodología de Chomsky-Schützenberger*, ver por ejemplo [34]. En particular si el lenguaje es regular, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.2.5 (Teorema de Enumeración Chomsky-Schützenberge). *Sea $M = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ un autómata finito, con $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_{n-1}\}$. La función generatriz del lenguaje $L(M)$ es una función racional dada por:*

$$L(z) = e_1(I_n - zA)^{-1}([q_0 \in F], [q_1 \in F], \dots, [q_{n-1} \in F])^t,$$

donde $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, I_n es la matriz identidad de orden n y A es la matriz de transición definida como:

$$A_{i,j} = |\{x \in \Sigma \mid \delta(q_i, x) = q_j\}|.$$

Demostración. Ver [34]. □

Recordemos que $[P]$ denota el paréntesis de Iverson, definido por $[P] = 1$ si la proposición P es verdadera y $[P] = 0$ si P es falsa.

De manera más general se tiene que la FG asociada a un lenguaje independiente del contexto no ambiguo es algebraica sobre $\mathbb{Q}(x)$. El procedimiento para encontrar la función generatriz de un lenguaje independiente del contexto L es el siguiente. Sea $G = (V, \Sigma, P, S)$ una gramática independiente del contexto no-ambigua del lenguaje L_G . A la gramática G se le asocia un sistema de ecuaciones, para ello se utiliza el morfismo Θ definido como:

$$\Theta(\lambda) = 1, \quad \Theta(a) = z, \quad \forall a \in \Sigma, \quad \Theta(A) = A(z), \quad \forall A \in V.$$

El morfismo Θ se aplica a todos los elementos de P , obteniéndose un sistema de ecuaciones algebraicas en $A(z), B(z), \dots$:

$$\Theta(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \Theta(e_i),$$

donde $A \rightarrow e_1|e_2|\cdots|e_k \in P$. Solucionando este sistema para $S(z)$ se obtiene la función generatriz para L_G , para más detalles ver por ejemplo [11, 20, 26, 34, 61].

Ejemplo 1.2.6. Denotemos por S el lenguaje definido por la expresión regular $(aa \cup b)^*$. Este lenguaje es aceptado por el autómata finito \mathcal{M} de la Figura 1.7.

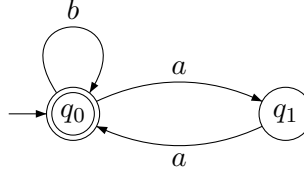


Figura 1.7: Autómata \mathcal{M} , tal que $L(\mathcal{M}) = S$.

En este caso la función de conteo está dada por la longitud de la palabra. Por lo tanto, si S_n es el subconjunto de S de palabras de longitud n , estamos interesados en la sucesión $a_n = |S_n|$. Es claro que

$$S_0 = \{\lambda\}, S_1 = \{b\}, S_2 = \{bb, aa\}, S_3 = \{bbb, baa, aab\}, S_4 = \{bbbb, bbaa, baab, aabb, aaaa\}, \dots$$

Luego $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5, \dots$, la cual corresponde a los primeros términos de la sucesión de Fibonacci, A00045. Esto se puede verificar utilizando el teorema de Chomsky-Schützenberger. En efecto, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 &= \{b\} \times \mathcal{L}_0 + \{a\} \times \mathcal{L}_1 + 1, \\ \mathcal{L}_1 &= \{a\} \times \mathcal{L}_0. \end{cases}$$

Luego se tiene el sistema de FGs:

$$\begin{cases} L_0(z) &= zL_0(z) + zL_1(z) + 1, \\ L_1(z) &= zL_0(z). \end{cases}$$

Por lo tanto, la FG de $L(\mathcal{M})$ es

$$L_0(z) = \frac{1}{1 - z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + 13z^6 + 21z^7 + \dots,$$

donde a_n es el n -ésimo número de Fibonacci. Es claro que la FG es racional ya que el autómata es finito determinista.

Ejemplo 1.2.7. A partir de la gramática del Ejemplo 1.1.7 se obtiene la siguiente ecuación entre FGs:

$$\begin{cases} L_0(z) = z^2 L_0^2(z) + 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, la FG de $L(\mathcal{M})$ es algebraica y está dada por

$$L_0(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = 1 + z^2 + 2z^4 + 5z^6 + 14z^8 + 42z^{10} + \dots,$$

donde C_n es el n -ésimo número de Catalan, sucesión A000108.

1.2.4. Metodología de Conteo por Coinducción

Dentro de los trabajos que inspiraron el desarrollo de esta tesis fueron lo de Jan Rutten. Este autor desarrolló una técnica basada en el uso de autómatas infinitos, funciones generatrices y coinducción [59].

La idea básica de Rutten consiste en encontrar un autómata infinito, que en una primera etapa es un árbol ponderado infinito, en el que los nodos o estados representan las etapas por las que pasa la construcción de la estructura combinatoria. Se puede descender a través de un arco desde un nodo a otro si la adición de un “bloque constitutivo” a la estructura combinatoria representada por el primer nodo conduce a la representada por el segundo. Algunos nodos corresponden a estructuras “no terminadas” y los nodos correspondientes a objetos “terminados” corresponden a los estados de aceptación. Luego de clasificar los nodos en conjuntos (clases) según alguna propiedad de las estructuras que representan (terminadas o no) se procede a simplificar este autómata, dando lugar a un segundo autómata equivalente al primero, esta equivalencia se prueba mediante *bisimulación*. Los nodos en un mismo conjunto dan lugar a un estado en el nuevo autómata, que serán de aceptación si corresponden a nodos de estructuras terminadas.

La raíz del árbol corresponde al estado inicial del segundo autómata. Finalmente existe una arista entre dos estados, si de los nodos representados por el primer estado se puede descender por el árbol a través de un arco hasta los nodos representados por el segundo estado. Finalmente se plantean ecuaciones sobre funciones generatrices y se resuelven, mediante el cálculo de palabras, con el fin de hallar la FG del problema dado. Muchas de las FGs resultantes se expresan como fracciones continuas infinitas, esto está inspirado en el trabajo de Flajolet [33], ver también [37]. Esta metodología de Rutten le permitió encontrar existentes y nuevos resultados de conteo desde una nueva perspectiva.

El Ejemplo 1.2.7 también se puede abordar mediante la metodología de Rutten. Para ello asociamos el árbol infinito de la Figura 1.8, en el que los superíndices corresponden al número de paréntesis no cerrados aún y las palabras subrayadas corresponden a palabras terminadas (bien formadas).

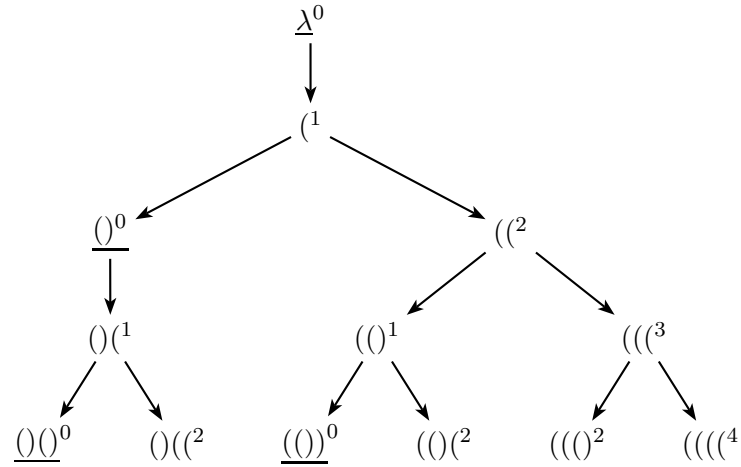


Figura 1.8: Árbol infinito asociado al problema de los paréntesis bien formados.

Cada nodo correspondiente a una palabra de paréntesis bien formada tienen un sólo descendiente, obtenido al añadir un paréntesis izquierdo a la derecha de la palabra. Cada nodo correspondiente a palabras que no son bien formadas tiene dos descendientes, uno de ellos obtenido al añadir un paréntesis derecho y el otro al añadir un paréntesis izquierdo, los cuales son siempre añadidos a la derecha de la palabra. La propiedad usada para clasificar los nodos será el número de formas de descender usando un arco desde un nodo con superíndice i en el árbol hasta un nodo con superíndice j ; en este ejemplo todos los rótulos son unos, ver autómata de la Figura 1.9.

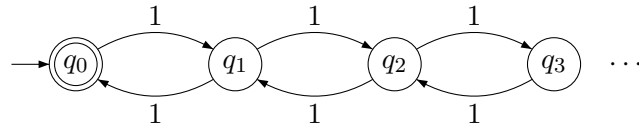


Figura 1.9: Equivalencia con el árbol.

De esta manera, el número de palabras bien formadas de longitud n es el número de trayectorias sobre el anterior autómata que parten y terminan en el estado q_0 . Luego de plantear un sistema de ecuaciones y utilizando algunos operadores se obtiene la FG. En este ejemplo es claro que se usa un autómata con ponderaciones.

En el trabajo de Rutten, quedan planteados varias cuestiones como por ejemplo estudiar otra variedad de autómatas infinitos, mostrar nuevas aplicaciones de esta teoría, considerar transiciones etiquetadas por series y no simplemente por números reales y mostrar ejemplos con funciones generatrices en varias variables, entre otros. En los siguientes capítulos introducimos una nueva técnica llamada Metodología de los Autómatas de Conteo, en la que sistematizamos las ideas de Rutten, y extendemos muchos de sus resultados.

Capítulo 2

Autómatas Infinitos y Funciones Generatrices

2.1. Autómatas Ponderados

La definición de autómata finito determinista se puede extender considerando infinitos estados. Específicamente, un autómata \mathcal{M} es una quintupla $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, q_0, F, E)$, donde Σ es un alfabeto llamado alfabeto de cinta. Todas las cadenas que procesa \mathcal{M} pertenecen a Σ^* . Q es un conjunto de estados internos del autómata (puede ser infinito), $q_0 \in Q$ es el estado inicial, $F \subseteq Q$ es un conjunto de estados finales o de aceptación, $F \neq \emptyset$. Por último se tiene el conjunto de transiciones del autómata $E \subseteq Q \times \Sigma \times Q$. Si Q, Σ y E son finitos, decimos que \mathcal{M} es un autómata finito [61].

Ejemplo 2.1.1. Sea el autómata finito $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, q_0, F, E)$, donde $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1\}$, $F = \{q_0\}$ y $E = \{(q_0, a, q_1), (q_0, b, q_0), (q_1, a, q_0)\}$. El diagrama de transición del autómata \mathcal{M} se muestra en la Figura 2.1. Se puede verificar que $L(\mathcal{M}) = (b \cup aa)^*$.

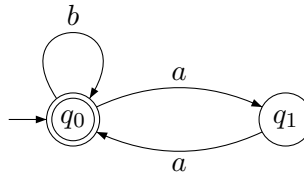


Figura 2.1: Diagrama de transición del autómata \mathcal{M} , Ejemplo 2.1.1.

Ejemplo 2.1.2. Sea el autómata infinito $\mathcal{M}_{\mathcal{D}} = (\Sigma, Q, q_0, F, E)$, donde $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1, \dots\}$, $F = \{q_0\}$ y $E = \{(q_i, a, q_{i+1}), (q_{i+1}, b, q_i) : i \in \mathbb{N}\}$ ¹. El diagrama de transición del autómata $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$ se muestra en la Figura 2.2.

¹En todo el documento \mathbb{N} denotará el conjunto de enteros no negativos.

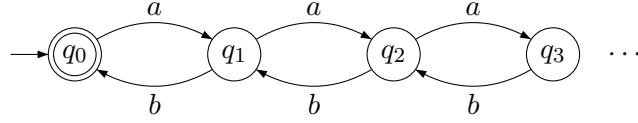


Figura 2.2: Diagrama de transición del autómata $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$, Ejemplo 2.1.2.

El lenguaje aceptado por $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$ es:

$$L(\mathcal{M}_{\mathcal{D}}) = \{w \in \Sigma^* : |w|_a = |w|_b \text{ y para todo prefijo } v \text{ de } w, |v|_b \leq |v|_a\}.$$

Este último autómata también se conoce como el autómata de Dyck [7]. Además, si a y b se relacionan con los paréntesis (y), entonces $L(\mathcal{M}_{\mathcal{D}})$ coincide con el lenguaje de los paréntesis bien formados, ver Ejemplo 1.1.7.

2.1.1. Series Formales y Autómatas Ponderados

A continuación presentamos las definiciones y notación necesaria sobre series formales y autómatas ponderados, para mayor detalle ver [26, 61]. Sea \mathbb{K} un semi-anillo² y Σ un alfabeto, una serie de potencias S es una función $S : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{K}$. La imagen de una palabra w bajo S se denomina el coeficiente de w en S y es denotado por s_w . La serie S se puede escribir como una suma formal $S = \sum_{w \in \Sigma^*} s_w w$. Nótese que aquí Σ es considerado como un conjunto de variables (no conmutativo). El conjunto de series formales sobre Σ con coeficientes en \mathbb{K} es denotado por $\mathbb{K} \langle \langle \Sigma^* \rangle \rangle$.

Un autómata \mathcal{M} sobre Σ^* con ponderaciones en \mathbb{K} es una cuádrupla $\mathcal{M} = (Q, I, E, F)$, donde:

- Q es un conjunto de estados internos del autómata (puede ser infinito).
- E es un elemento de $\mathbb{K} \langle \langle \Sigma^* \rangle \rangle^{Q \times Q}$ llamado matriz de transición. Esto quiere decir que en el diagrama de transición un arista del estado p al estado q está etiquetada con x si y sólo si $x = E_{pq}$, con $x \in \mathbb{K} \langle \langle \Sigma^* \rangle \rangle$.
- I es un elemento de $\mathbb{K} \langle \langle \Sigma^* \rangle \rangle^Q$, es decir I es una función de Q a $\mathbb{K} \langle \langle \Sigma^* \rangle \rangle$ y se denomina función inicial. I también se puede ver como un vector fila.
- F es un elemento de $\mathbb{K} \langle \langle \Sigma^* \rangle \rangle^Q$, y se denomina función final. F también se puede ver como un vector columna.

En el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ y $\Sigma^* = \{z\}^*$, diremos que \mathcal{M} es un autómata de conteo, cuya idea básica es contar el número de cadenas de una determinada longitud, sin importar cuál es el

²Un semi-anillo es un conjunto no vacío A dotado de dos operaciones $+$ y \cdot , tal que $(A, +)$ es un monoide conmutativo con elemento neutro 0 , (A, \cdot) es un monoide con elemento neutro 1 y la multiplicación distribuye respecto a la adición

lenguaje aceptado por el autómata. Es claro que

$$\mathbb{Z}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle = \{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots : \forall i \geq 0, a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Al igual que en el caso de los autómatas finitos, un autómata de conteo determina un sistema de ecuaciones del cual se deduce una ecuación, donde la función generatriz de la sucesión determinada por el número de cadenas de cada longitud es una solución de esta ecuación.

A todo autómata se le puede asociar un autómata de conteo, este se obtiene a partir del diagrama de transición del autómata dado, cambiando todas las transiciones etiquetadas con a , $a \in \Sigma$, por transiciones etiquetadas con z , ver Figura 2.3. Dicha transición se llamará transición de conteo y al grafo resultante grafo o autómata de conteo de \mathcal{M} .



Figura 2.3: Autómata de conteo asociado a \mathcal{M} .

La variable z permite contar el número de cadenas de cada longitud aceptadas por el autómata. Por lo tanto, una transición de p a los estados q_1, q_2, \dots, q_l contribuye al sistema de ecuaciones con la ecuación:

$$L(p)(z) = z \sum_{i=1}^l L(q_i)(z) + [p \in F].$$

De aquí en adelante escribiremos L_p en lugar de $L(p)(z)$. Recordemos que $[P]$ denota el paréntesis de Iverson, definido por $[P] = 1$ si la proposición P es verdadera y $[P] = 0$ si P es falsa.

Esta clase de autómatas infinitos ha sido estudiada para abordar algunos problemas de combinatoria, ver por ejemplo [49, 58, 59, 60, 68, 69]. El primer acercamiento utilizando la idea de grafos de conteo apareció en [57].

2.2. Autómatas Convergentes y Teoremas de Convergencia

En esta sección determinamos criterios para saber cuando un autómata acepta un número finito de cadenas para cada longitud n . Denotaremos por $L^{(n)}(\mathcal{M})$ al número de cadenas de longitud n aceptadas por el autómata, incluyendo repeticiones.

Definición 2.2.1. Sea \mathcal{M} un autómata, diremos que \mathcal{M} es un autómata convergente si para todo entero $n \geq 0$, $L^{(n)}(\mathcal{M})$ es finito.

El interés por los autómatas convergentes está dado por la definición de clase combinatoria.

Ya que estos autómatas se van a utilizar para contar ciertas estructuras combinatorias, por lo tanto el número de palabras que acepta de cada longitud debe ser finito. Es claro que todo autómata finito es convergente, sin embargo, no sucede lo mismo para el caso de autómatas infinitos.

Ejemplo 2.2.2. Sea $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, q_0, F, E)$ un autómata infinito, donde $\Sigma = \{a\}$, $Q = \{q_0, q_1, \dots\} = F$ y $E = \{(q_i, a, q_{i+1}) : i \in \mathbb{N}\}$, ver Figura 2.4. Es claro que $L(\mathcal{M}) = \{a^n : n \geq 0\}$, luego $L^{(n)}(\mathcal{M}) = 1$ para todo $n \geq 1$, entonces \mathcal{M} es convergente.

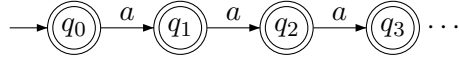


Figura 2.4: Diagrama de transición del autómata \mathcal{M} , Ejemplo 2.2.2.

Ejemplo 2.2.3. Sea $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, q_0, F, E)$, donde $\Sigma = \{a_0, a_1, \dots\}$, $Q = \{q_0, q\}$, $F = \{q\}$ y $E = \{(q_0, a_i, q) : i \in \mathbb{N}\}$, ver Figura 2.5. Es claro que $L(\mathcal{M}) = \Sigma$, el cual es infinito, luego \mathcal{M} no es convergente.

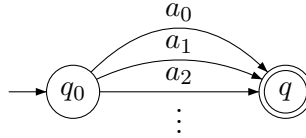


Figura 2.5: Diagrama de transición del autómata \mathcal{M} , Ejemplo 2.2.3.

Ejemplo 2.2.4. Sea $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, q_0, F, E)$, donde $\Sigma = \{a\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, \dots\}$, $F = \{q_1, q_2, \dots\}$ y $E = \{(q_0, a, q_i) : i \in \mathbb{Z}^+\}$, ver Figura 2.6. Es claro que $L(\mathcal{M}) = \{a\}$, sin embargo, $L^{(1)}(\mathcal{M})$ es infinito.

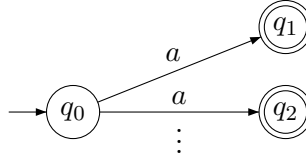


Figura 2.6: Diagrama de transición del autómata \mathcal{M} , Ejemplo 2.2.4.

2.2.1. Criterios de Convergencia

A continuación presentamos dos criterios para determinar si dado un autómata \mathcal{M} , es o no convergente.

Definición 2.2.5. Dado un autómata $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, q_0, F, E)$, se define el conjunto de estados de \mathcal{M} accesibles desde el estado $q \in Q$ en n transiciones, Q_n^q , de manera recursiva como:

$$Q_n^q = \begin{cases} \{q\}, & \text{si } n = 0; \\ \bigcup \{p' : (p, a, p') \in E, p \in Q_{n-1}^q\}, & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Teorema 2.2.6 (Primer Teorema de Convergencia). *Sea \mathcal{M} un autómata, tal que el grado de todo vértice del grafo o autómata de conteo de \mathcal{M} es finito, entonces \mathcal{M} es convergente.*

Demostración. Cualquier trayectoria (de aceptación o no) de longitud n sobre el grafo de \mathcal{M} se puede considerar como una sucesión de n elecciones de $n + 1$ estados, tomados exclusivamente de los conjuntos $Q_0^{q_0}, Q_1^{q_0}, Q_2^{q_0}, \dots, Q_n^{q_0}$. Como $\bigcup_{k=0}^n Q_k^{q_0}$ es finito, ya que el grado de cada vértice es finito, entonces $L^{(n)}(\mathcal{M})$ es finito, ya que toda cadena de longitud n se obtiene tras n elecciones, cada una con un número finito de opciones. \square

Ejemplo 2.2.7. El autómata de conteo asociado a $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$, ver Ejemplo 2.1.2, es convergente.

La siguiente definición juega un papel importante en el desarrollo de las aplicaciones, ya que permite simplificar los autómatas de conteo cuyas transiciones son series de potencias.

Definición 2.2.8. Sea $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n$ una serie de potencias, con $f_n \in \mathbb{N}$ para todo entero $n \geq 1$. Sea \mathcal{M} un autómata de conteo tal que para todo $n \geq 1$ existen f_n aristas del estado p al estado q con $n - 1$ estados intermedios tal que ninguno es de aceptación, ver Figura 2.7. Entonces estas transiciones se representan con un grafo de una sola arista etiquetada por $f(z)$, como se muestra en la Figura 2.8.

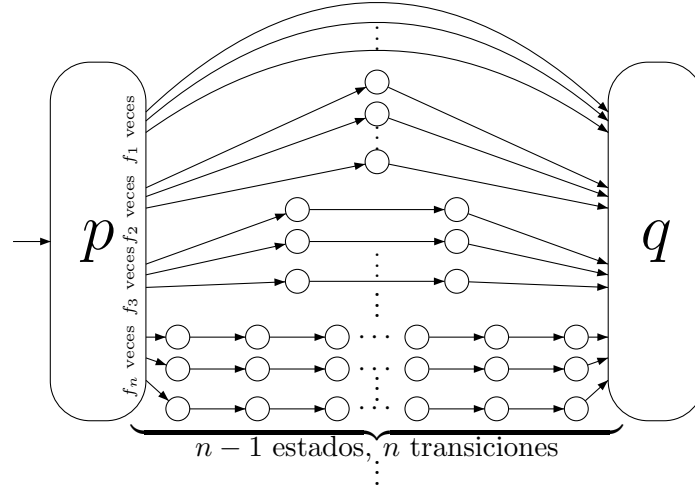


Figura 2.7: Transiciones del estado p al estado q .

Esta transición se llama transición en paralelo. Los estados p y q se llaman estados visibles, mientras que los estados intermedios se llaman estados ocultos.

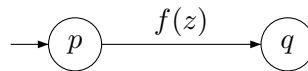


Figura 2.8: Transición en paralelo.

Ejemplo 2.2.9. En la Figura 2.9 aparece un autómata de conteo \mathcal{M}_1 , donde no hay transiciones en paralelo, es decir todas las transiciones son del tipo z , (se han omitido las etiquetas de las aristas). Las transiciones del vértice q_1 al q_2 corresponden con la serie

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2} = z + z^2 + 2z^3 + 5z^4 + 14z^5 + \dots$$

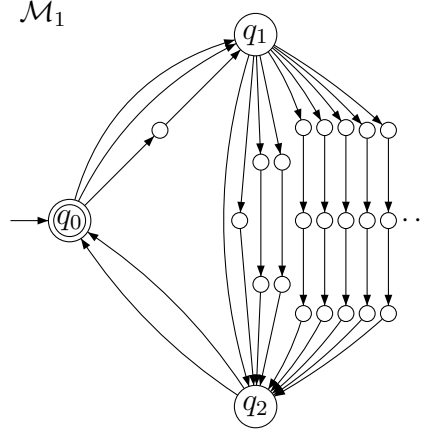


Figura 2.9: Autómata de conteo con transiciones del tipo z , Ejemplo 2.2.9.

Sin embargo, este autómata también se puede representar utilizando transiciones en paralelo, en la Figura 2.10 aparecen 2 ejemplos.

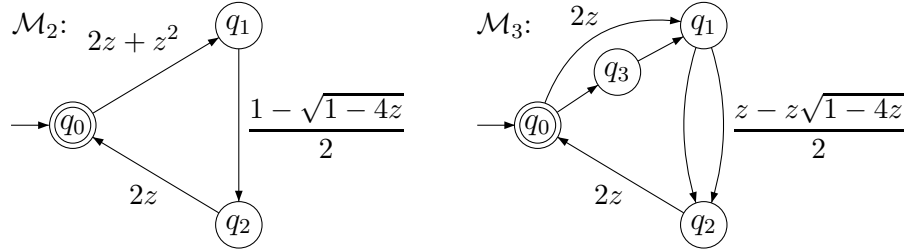


Figura 2.10: Autómatas de conteo con transiciones en paralelo, Ejemplo 2.2.9.

Este ejemplo muestra que un autómata puede tener diferentes representaciones todas equivalentes.

Definición 2.2.10. Dos autómatas de conteo \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 son equivalentes si para todo $n \geq 0$ se tiene que $L^{(n)}(\mathcal{M}_1) = L^{(n)}(\mathcal{M}_2)$. Esto lo denotaremos por $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$.

Dada la serie (o polinomio) $f(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f_t z^t$, denotamos ${}_n f(z)$ el polinomio

$${}_n f(z) = \sum_{t=0}^n f_t z^t.$$

Teorema 2.2.11 (Segundo Teorema de Convergencia). *Sea \mathcal{M} un autómata y sean $f_1^q(z), f_2^q(z), \dots$, las transiciones en paralelo que parten del estado $q \in Q$ en un grafo de conteo de \mathcal{M} . Entonces \mathcal{M} es convergente si la serie*

$$F^q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^q(z)$$

es una serie convergente para cada estado visible $q \in Q$ de tal representación.

Demostración. Cualquier cadena de longitud n es aceptada por \mathcal{M} si ingresa en un estado de aceptación después de recorrer exactamente n aristas. Sin embargo, los estados ocultos correspondientes a una transición en paralelo no pueden ser de aceptación, por lo tanto las trayectorias desde un estado visible hasta otro que corresponden a los términos $f_{n+1}z^{n+1}, f_{n+2}z^{n+2}, \dots$, de una transición $f(z)$ en el grafo de conteo de \mathcal{M} , no pueden incluirse en trayectorias de aceptación de longitud n . Sea \mathcal{M}' el autómata (posiblemente finito) obtenido al reemplazar toda transición en paralelo $f(z)$ en el grafo dado, por la transición ${}_nf(z)$, entonces es claro que $L^{(n)}(\mathcal{M}) = L^{(n)}(\mathcal{M}')$ para todo $n \geq 0$. Por otro lado, en \mathcal{M}' el número de transiciones que salen de cada estado visible $q \in Q'$ es finito, ya que

$$\sum_{k=1}^{\infty} {}_nf_k^q(1) = {}_nF^q(1) < \infty,$$

y de cada uno de los estados ocultos parte una única transición. Así, por el Teorema 2.2.6, \mathcal{M}' es convergente. Entonces $L^{(n)}(\mathcal{M}) = L^{(n)}(\mathcal{M}')$ es una cantidad finita, así \mathcal{M} es convergente. \square

Proposición 2.2.12. *Si $f(z)$ es una transición en paralelo polinómica que va del estado p al estado q en un autómata finito \mathcal{M} . Entonces se obtiene la siguiente ecuación en el sistema de ecuaciones entre FGs de \mathcal{M} :*

$$L_p = f(z)L_q + [p \in F] + \dots$$

En este caso los puntos suspensivos significan que esta ecuación puede tener más sumandos, en caso que existan más transiciones del estado p a estados diferentes de q .

Demostración. Sea $f(z) = f_1z + f_2z^2 + \dots + f_nz^n$ una transición en paralelo polinómica, entonces el conjunto de transiciones en paralelo determinadas por el término f_kz^k , $1 \leq k \leq n$, se pueden representar con el grafo de la Figura 2.11.

Por lo tanto, se tiene la ecuación entre FGs:

$$L_p(z) = zL_{q_{11}}(z) + zL_{q_{21}}(z) + \dots + zL_{q_{f_k1}}(z) + [p \in F].$$

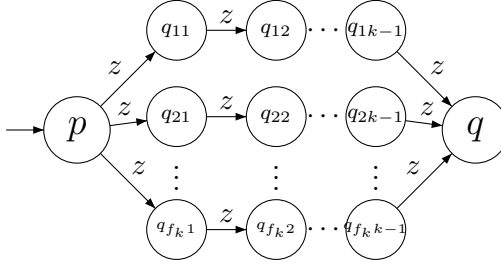


Figura 2.11: Transición en paralelo determinadas por $f_k z^k$.

Pero $L_{q_{i1}}(z) = z^{k-1}L_q(z)$, luego

$$\begin{aligned} L_p(z) &= \overbrace{z^k L_q(z) + z^k L_q(z) + \cdots + z^k L_q(z)}^{f_k \text{ veces}} + [p \in F] \\ &= f_k z^k L_q(z) + [p \in F]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta cada uno de los términos f_k , ($1 \leq k \leq n$), entonces se obtiene que

$$\begin{aligned} L_p(z) &= f_1 z L_q(z) + f_2 z^2 L_q(z) + \cdots + f_n z^n L_q(z) + [p \in F] \\ &= f(z) L_q(z) + [p \in F]. \end{aligned}$$

□

Proposición 2.2.13. Sea \mathcal{M} un autómata convergente tal que un autómata de conteo asociado a \mathcal{M} tiene un número finito de estados visibles q_0, q_1, \dots, q_r , en el que el número de transiciones en paralelo que parten de cada estado es finito. Sean $f_1^{q_t}(z), f_2^{q_t}(z), \dots, f_{s(t)}^{q_t}(z)$ las transiciones en paralelo que parten del estado $q_t \in Q$. Entonces la FG del lenguaje aceptado por \mathcal{M} se obtiene al resolver para $L_{q_0}(z)$ el sistema de $r + 1$ ecuaciones entre FGs:

$$L(q_t)(z) = f_1^{q_t}(z)L(q_{t_1})(z) + f_2^{q_t}(z)L(q_{t_2})(z) + \cdots + f_{s(t)}^{q_t}(z)L(q_{t_{s(t)}})(z) + [q_t \in F],$$

con $0 \leq t \leq r$ y donde q_{t_k} es el estado visible al cual conduce la transición en paralelo $f_k^{q_t}$ y $L(q_{t_k})$ es la FG del lenguaje aceptado por \mathcal{M} si su estado inicial es q_{t_k} .

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y \mathcal{M}' el autómata en el que se han reemplazado las $s(t)$ transiciones en paralelo que salen del estado $q_t \in Q$, $f_1^{q_t}(z), f_2^{q_t}(z), \dots, f_{s(t)}^{q_t}(z)$, por las transiciones ${}_n f_1^{q_t}(z), {}_n f_2^{q_t}(z), \dots, {}_n f_{s(t)}^{q_t}(z)$, con $0 \leq t \leq r$. Entonces \mathcal{M}' es un autómata finito y por la Proposición 2.2.12 se tiene que la FG de \mathcal{M}' se obtiene al resolver para $L'(q_0)$ el sistema

$$L'(q_t)(z) = {}_n f_1^{q_t}(z)L'(q_{t_1})(z) + {}_n f_2^{q_t}(z)L'(q_{t_2})(z) + \cdots + {}_n f_{s(t)}^{q_t}(z)L'(q_{t_{s(t)}})(z) + [q_t \in F],$$

donde $0 \leq t \leq r$. Por lo tanto, $L'(q_0)(z)$ es una función racional R evaluada en las variables

${}_nf_k^{qt}(z)$, con $0 \leq t \leq r, 1 \leq k \leq s(t)$. Lo anterior lo denotamos como $L'(q_0)(z) = R({}_nf_k^{qt}(z))$. Es claro que ${}_nL'(q_0)(z) = {}_nL(q_0)(z)$. Finalmente consideremos la serie $R(f_k^{qt}(z))$, como en el cálculo de una expresión racional sólo están involucrados un número finito de sumas, restas, productos y recíprocos, y dado que el término n -ésimo del resultado al realizar cualquiera de estas operaciones depende sólo de los primeros n términos de las series involucradas en la operación, se concluye que $R({}_nf_k^{qt}(z))$ coincide con ${}_nR(f_k^{qt}(z))$ para todo $n \geq 0$. Luego la FG de \mathcal{M} es $R(f_k^{qt}(z))$, que es precisamente la solución del sistema de ecuaciones enunciado en el teorema. \square

Ejemplo 2.2.14. El sistema de ecuaciones entre FGs obtenido a partir del autómatas \mathcal{M}_2 del Ejemplo 2.2.9 es:

$$\begin{cases} L_0 &= (2z + z^2)L_1 + 1 \\ L_1 &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2}L_2 \\ L_2 &= 2zL_0. \end{cases}$$

Despejando L_0 del sistema de ecuaciones se obtiene que la FG del lenguaje aceptado por \mathcal{M}_2 y por lo tanto por \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_3 es

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{1 - (2z^2 + z^3)(1 - \sqrt{1 - 4z})} \\ &= 1 + 4z^3 + 6z^4 + 10z^5 + 40z^6 + 114z^7 + 312z^8 + \dots \end{aligned}$$

Capítulo 3

Metodología de los Autómatas de Conteo

Un autómata de conteo asociado a un autómata \mathcal{M} puede emplearse para modelar estructuras combinatorias siempre y cuando se encuentre una biyección entre las palabras aceptadas por el autómata \mathcal{M} y los objetos de la estructura combinatoria. Tal procedimiento, junto con los teoremas del capítulo anterior, constituyen la **Metodología de los Autómatas de Conteo (MAC)**.

El procedimiento para aplicar la MAC es en general el siguiente:

1. Dado un problema de combinatoria enumerativa, cuya sucesión de conteo es $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, se debe encontrar un autómata convergente (ver Teoremas 2.2.6 y 2.2.11) cuya función generatriz $f(z)$ sea la solución del problema, es decir que $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, donde b_i es el cardinal del conjunto de las palabras aceptadas por el autómata cuya longitud es i .
2. Hallar una fórmula general para $L_0'(z)$, la función generatriz de \mathcal{M}' , (ver Proposiciones 2.2.12 y 2.2.13), es decir, se halla la función generatriz para un autómata \mathcal{M}' que se obtiene a partir de \mathcal{M} truncando un conjunto de estados. A veces bastará con encontrar una relación de tipo iterativo, como por ejemplo una fracción continua. Se pueden utilizar autómatas equivalentes (ver Definición 2.2.10) para simplificar los cálculos.
3. Encontrar la función generatriz $f(z)$ a la cual convergen las funciones generatrices asociadas a cada \mathcal{M}' , lo cual está garantizado por los teoremas de convergencia. Si en el paso anterior se obtuvo una relación de tipo iterativo, puede usarse la convergencia para plantear ecuaciones que involucren a $f(z)$ e intentar despejarla.

3.1. Ejemplos de la Metodología de los Autómatas de Conteo

Ejemplo 3.1.1. Un trayectoria de Motzkin de longitud n es una trayectoria reticular de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, en el primer cuadrante, la cual inicia en el origen y finaliza en $(n, 0)$, y que consiste de los pasos $U = (1, 1)$, $H = (1, 0)$ y $D = (1, -1)$. La cantidad de trayectorias de Motzkin de longitud n es el n -ésimo número de Motzkin m_n , A001006. Otros objetos combinatorios enumerados por los números de Motzkin se pueden encontrar por ejemplo en [6]. En la Figura 3.1 se muestra una trayectoria de Motzkin de longitud 14.

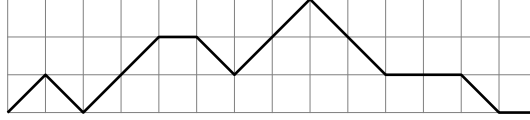


Figura 3.1: Trayectoria de Motzkin de longitud 14.

El número de cadenas de longitud n aceptadas por el autómata convergente \mathcal{M}_{Mot} , ver Figura 3.2, corresponde al n -ésimo número de Motzkin y la FG es:

$$M(z) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i z^i = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z^2} \quad (3.1)$$

$$= 1 + z + 2z^2 + 4z^3 + 9z^4 + 21z^5 + 51z^6 + 127z^7 + 323z^8 + \dots \quad (3.2)$$

$$= \frac{1}{1 - z - \frac{z^2}{1 - z - \frac{z^2}{1 - z - \frac{z^2}{\ddots}}}} \quad (3.3)$$

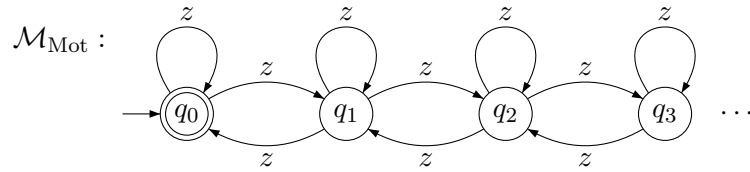
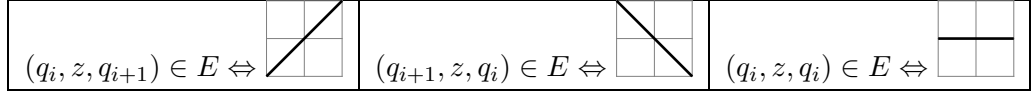


Figura 3.2: Autómata convergente asociado a las trayectorias de Motzkin.

En este caso la arista que parte del estado q_i a q_{i+1} y viceversa, representa los pasos de la forma $U = (1, 1)$ y $D = (1, -1)$ respectivamente; y los bucles representan los pasos de la forma $H = (1, 0)$, ver Cuadro 3.1.



Cuadro 3.1: Biyección entre \mathcal{M}_{Mot} y las trayectorias de Motzkin.

Además, es claro que una cadena es aceptada si y sólo si tiene tantos pasos a la derecha como a la izquierda, lo que garantiza que la trayectoria está bien formada, luego:

$$m_n = |\{w \in L(\mathcal{M}_{\text{Mot}}) : |w| = n\}| = L^{(n)}(\mathcal{M}_{\text{Mot}}).$$

Sea $\mathcal{M}_{\text{Mot}-s}$, $s \geq 1$, el autómata que se obtiene a partir de \mathcal{M}_{Mot} , eliminando los estados q_{s+1}, q_{s+2}, \dots . Por lo tanto, el sistema de ecuaciones entre FGs de $\mathcal{M}_{\text{Mot}-s}$ es:

$$\begin{cases} L_0 = zL_0 + zL_1 + 1 \\ L_i = zL_{i-1} + zL_i + zL_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq s-1 \\ L_s = zL_{s-1} + zL_s, \end{cases}$$

el cual es equivalente a

$$\begin{cases} L_0 = FL_1 + H \\ L_i = FL_{i-1} + FL_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq s-1 \\ L_s = FL_{s-1}, \end{cases}$$

donde $F = z/(1-z)$ y $H = 1/(1-z)$. Al sustituir reiteradamente en las ecuaciones se obtiene que

$$L_j = \left. \frac{\frac{F}{1 - \frac{F^2}{1 - \frac{F^2}{\ddots \frac{1}{1 - F^2}}}} L_{j-1}}{s-j \text{ veces}} \right\}$$

con $1 \leq j \leq s-1$. Por lo tanto,

$$L_0 = \left. \frac{\frac{H}{1 - \frac{F^2}{1 - \frac{F^2}{\ddots \frac{1}{1 - F^2}}}}}{s \text{ veces}} \right\}$$

Como \mathcal{M}_{Mot} es convergente, entonces cuando $s \rightarrow \infty$ se obtiene una fracción continua convergente M de la FG de \mathcal{M}_{Mot} . Luego

$$M = \frac{H}{1 - F^2\left(\frac{M}{H}\right)}$$

$$F^2 M^2 - HM + H^2 = 0$$

$$z^2 M^2 - (1 - z)M + 1 = 0.$$

Por lo tanto,

$$M(z) = \frac{1 - z \pm \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z^2}.$$

Como \mathcal{M}_{Mot} acepta la cadena λ , entonces si $z \rightarrow 0$, $M \rightarrow 0$, por lo tanto el radical debe ser con signo negativo.

Ejemplo 3.1.2. La cantidad de trayectorias de Motzkin de longitud n sin pasos horizontales sobre el eje x (trayectorias de Riordan) es el n -ésimo número de Riordan r_n , A005043. En la Figura 3.3 mostramos las trayectorias de Riordan de longitud 4.



Figura 3.3: Trayectorias de Riordan de longitud 4.

El número de cadenas de longitud n aceptadas por el autómata convergente \mathcal{M}_R , ver Figura 3.4, corresponde al n -ésimo número de Riordan y la FG es:

$$R(z) = \sum_{i=0}^{\infty} r_i z^i = \frac{1 + z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z(1 + z)} \quad (3.4)$$

$$= 1 + z^2 + z^3 + 3z^4 + 6z^5 + 15z^6 + 36z^7 + 91z^8 + \dots \quad (3.5)$$

$$= \frac{1}{z^2} \quad (3.6)$$

$$1 - \frac{z^2}{1 - z - \frac{z^2}{1 - z - \frac{z^2}{\ddots}}}$$

Se elimina el bucle inicial para no tener pasos horizontales en el eje x , entonces es claro que

$$r_n = |\{w \in L(\mathcal{M}_R) : |w| = n\}| = L^{(n)}(\mathcal{M}_R).$$

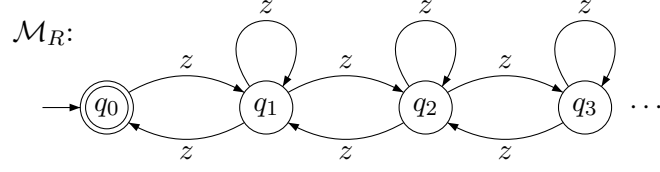


Figura 3.4: Autómata convergente asociado a las trayectorias de Riordan.

Además, se puede utilizar la equivalencia entre autómatas, ya que el autómata \mathcal{M}_R tiene como subautómata a \mathcal{M}_{Mot} . Así, existe un autómata \mathcal{M}'_R con sólo dos estados visibles, tal que $\mathcal{M}'_R \cong \mathcal{M}_R$, ver Figura 3.5.

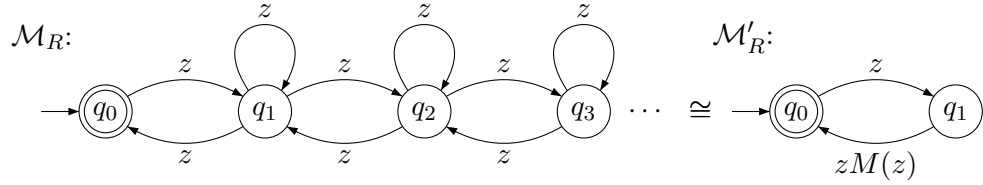


Figura 3.5: Equivalencia de autómatas $\mathcal{M}'_R \cong \mathcal{M}_R$, Ejemplo 3.1.2.

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones entre FGs se reduce a

$$\begin{cases} R(z) = 1 + zL_1 \\ L_1 = zM(z)R(z), \end{cases}$$

donde $M(z)$ es la FG de los números de Motzkin. Entonces

$$R(z) = 1 + z^2M(z)R(z), \quad (3.7)$$

luego

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^2M(z)} = \frac{2}{1 + z + \sqrt{1 - 2z - 3z^2}} = \frac{1 + z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z(1 + z)}.$$

Además, de la Ecuación (3.7) se deduce que

$$r_n = \sum_{j=0}^{n-2} m_j r_{n-j-2}, \quad n \geq 2.$$

También se tiene que

$$R(z) = \frac{1 + zM(z)}{1 + z},$$

entonces $(1 + z)R(z) = 1 + zM(z)$, por lo tanto $r_{n+1} + r_n = m_n$, para todo entero $n \geq 0$. Esta última identidad es deducida en [6] utilizando argumentos combinatorios.

3.2. Autómata Infinito Lineal de Conteo

En esta sección introducimos una familia de autómatas de conteo con el fin de sistematizar la metodología de los autómatas de conteo. Además, esta familia de autómatas permitirán estudiar una gran variedad de problemas relacionados con trayectorias en el plano.

3.2.1. Grafos y Autómatas Lineales

Definición 3.2.1. Un grafo lineal G es una cuadrupla $G = (V, A, n, F)$ donde

- $V \subseteq \mathbb{Z}$ es un conjunto de vértices etiquetados del grafo. Si $m \in V$, el vértice se etiqueta con m .
- $A = (A_-, A_\curvearrowright, A_\curvearrowleft)$ es un conjunto de aristas del grafo, donde
 - $A_- = \{i \in V : \text{existe un bucle en el vértice } i\}$.
 - $A_\curvearrowright = \{i \in V : \text{existe una arista del vértice } i \text{ al vértice } i + 1\}$.
 - $A_\curvearrowleft = \{i \in V : \text{existe una arista del vértice } i + 1 \text{ al vértice } i\}$.
- $n \in V$, es el vértice inicial.
- $F \subseteq V$, es el conjunto de vértices finales.

En particular cuando $V = \mathbb{N}$, $A = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N})$, $n = 0$, $F = \{0\}$, decimos que G es totalmente lineal y lo denotamos por G_L , ver Figura 3.6.

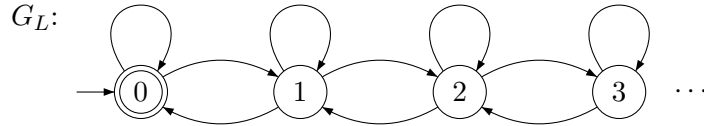


Figura 3.6: Grafo totalmente lineal G_L .

Si $V = \mathbb{Z}$, $A = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, $n = 0$, $F = \{0\}$, decimos que G es totalmente bilineal y lo denotamos por G_{BL} , ver Figura 3.7.

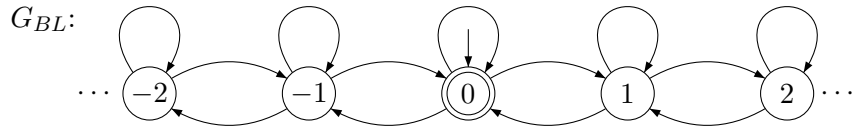


Figura 3.7: Grafo totalmente bilineal G_{BL} .

Un grafo lineal puede tener un número finito o infinito de vértices. Estos grafos lineales permiten representar trayectorias que parten del vértice inicial y se pueden mover entre vértices siempre y cuando exista una arista que los una, además, la trayectoria puede finalizar cuando llegue a un vértice de aceptación.

Ejemplo 3.2.2. Sea $V = \mathbb{N}$, $A = (\emptyset, \mathbb{N}, \emptyset)$, $n = 0$, $F = \mathbb{N}$, este grafo se representa en la Figura 3.8.



Figura 3.8: Grafo lineal, Ejemplo 3.2.2.

Ejemplo 3.2.3. Sea $V = \mathbb{N}$, $A = (2\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N})$, $n = 0$, $F = \{0\}$, este grafo se representa en la Figura 3.9.

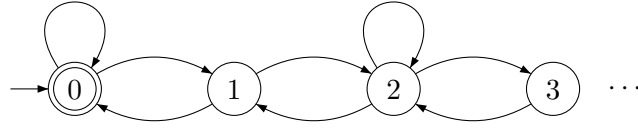


Figura 3.9: Grafo lineal, Ejemplo 3.2.3.

Ejemplo 3.2.4. Sea $V = \mathbb{Z}$, $A = (\emptyset, \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, $n = 0$, $F = \{0\}$, este grafo se representa en la Figura 3.10.

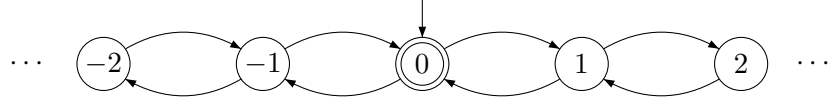


Figura 3.10: Grafo lineal, Ejemplo 3.2.4.

Definición 3.2.5. El autómata lineal asociado a un grafo lineal $G = (V, A, n, F_G)$, \mathcal{M}_G , es el autómata $\mathcal{M}_G = (\{a, b, c\}, Q, q_n, F, S)$ tal que

- $Q = \{q_i : i \in V\}$ es el conjunto de estados del autómata.
- q_n es el estado inicial si y sólo si n es el vértice inicial de G .
- $F = \{q_i : i \in F_G\} \subseteq Q$ es el conjunto de estados de aceptación del autómata.
- El conjunto de transiciones del autómata $S \subseteq Q \times \{a, b, c\} \times Q$, es tal que
 - $(q_i, c, q_i) \in S \leftrightarrow i \in A_-$.
 - $(q_i, a, q_{i+1}) \in S \leftrightarrow i \in A_{\curvearrowright}$.
 - $(q_{i+1}, b, q_i) \in S \leftrightarrow i \in A_{\curvearrowleft}$.

Además, el lenguaje aceptado por \mathcal{M}_G se define como

$$L(\mathcal{M}_G) = \{w \in \{a, b, c\}^* : (q_n, w, q_f) \in S, q_f \in F\}.$$

Ejemplo 3.2.6. El autómata asociado al grafo totalmente lineal G_L es el autómata que se muestra en la Figura 3.11, el cual denotaremos por \mathcal{M}_L . El lenguaje que acepta es

$$L(\mathcal{M}_L) = \{w \in \{a, b, c\}^* : |w|_a = |w|_b \text{ y si } w = uv \text{ entonces } |u|_b \leq |u|_a\},$$

es decir acepta las palabras de Motzkin.

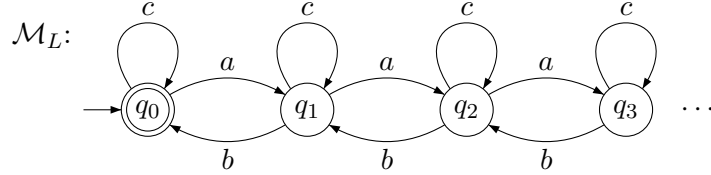


Figura 3.11: Autómata infinito lineal asociado a G_L .

Es claro que a todo autómata lineal se le puede asociar un autómata de conteo y así utilizar la metodología de los autómatas de conteo.

Definición 3.2.7. El autómata lineal de conteo asociado a un grafo lineal G , \mathcal{M}_c , es un autómata ponderado determinado por la pareja $\mathcal{M}_c = (G, E)$, donde E es un conjunto de ponderaciones dado por la terna $E = (E_-, E_{\curvearrowright}, E_{\curvearrowleft})$, tal que

- $E_- = \{h_i(z) : i \in A_-\}$.
- $E_{\curvearrowright} = \{f_i(z) : i \in A_{\curvearrowright}\}$.
- $E_{\curvearrowleft} = \{g_i(z) : i \in A_{\curvearrowleft}\}$.

Donde $f_i(z)$, $g_i(z)$ y $h_i(z)$ son transiciones en paralelo para todo entero i . Denotaremos por \mathcal{M}_c^* al conjunto de todos los autómatas de conteo.

Ejemplo 3.2.8. Sea $\mathcal{M}_c = (G, E = (\emptyset, \{z\}, \{z\}))$, donde $G = (\mathbb{N}, (\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{N}), 0, \{0\})$. Este autómata se representa en la Figura 3.12.

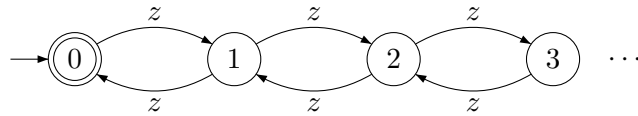


Figura 3.12: Autómata lineal de conteo, Ejemplo 3.2.8.

El autómata infinito lineal de conteo asociado al grafo totalmente lineal G_L , lo denotaremos por \mathcal{M}_{Lin} , ver Figura 3.13, en el cual se abreviaron las ponderaciones de las aristas como f_i , g_i y h_i .

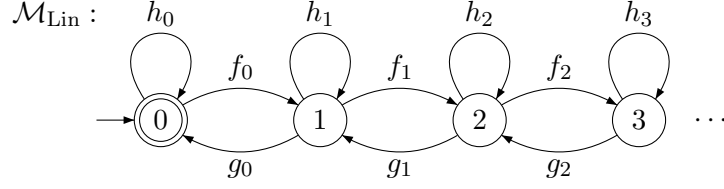


Figura 3.13: Autómata infinito lineal de conteo \mathcal{M}_{Lin} .

Asimismo, el autómata infinito lineal de conteo asociado al grafo totalmente bilineal G_{BL} , lo denotaremos por $\mathcal{M}_{\text{BLin}}$, ver Figura 3.14.

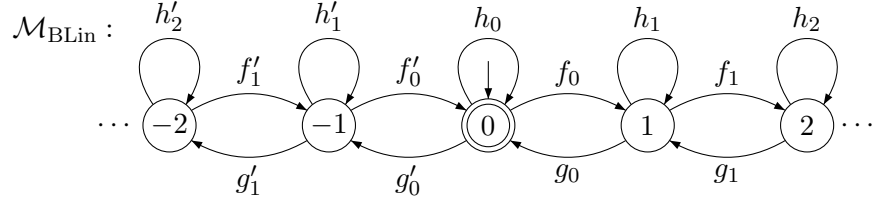


Figura 3.14: Autómata infinito lineal de conteo $\mathcal{M}_{\text{BLin}}$.

Los autómatas de conteo \mathcal{M}_{Lin} y $\mathcal{M}_{\text{BLin}}$ van a ser el objeto de estudio de lo que resta en el capítulo. Notaremos $\mathcal{M}_{\text{Lin}-s}$ al autómata obtenido a partir de \mathcal{M}_{Lin} suprimiendo los vértices $s, s+1, s+2, \dots$.

3.3. Función Generatriz Asociada a \mathcal{M}_{Lin} y $\mathcal{M}_{\text{BLin}}$

A continuación estudiamos la función generatriz asociada a los autómatas de conteo \mathcal{M}_{Lin} y $\mathcal{M}_{\text{BLin}}$.

3.3.1. Función Generatriz Ordinaria de \mathcal{M}_{Lin}

Teorema 3.3.1. *La función generatriz de \mathcal{M}_{Lin} , ver Figura 3.13, es*

$$E(z) = \frac{1}{1 - h_0(z) - \frac{f_0(z)g_0(z)}{1 - h_1(z) - \frac{f_1(z)g_1(z)}{1 - h_2(z) - \frac{f_2(z)g_2(z)}{\ddots}}}}, \quad (3.8)$$

donde $f_i(z), g_i(z)$ y $h_i(z)$ son transiciones en paralelo para todo $i \geq 0$, que vistas como funciones tienen algún radio de convergencia alrededor de 0.

Demostración. El sistema de ecuaciones entre FGs de $\mathcal{M}_{\text{Lin}-s}$, $s \geq 1$, es:

$$\begin{cases} L_0 = h_0 L_0 + f_0 L_1 + 1 \\ L_i = g_{i-1} L_{i-1} + h_i L_i + f_i L_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq s-1 \\ L_s = g_{s-1} L_{s-1} + h_s L_s, \end{cases}$$

el cual es equivalente a

$$\begin{cases} L_0 = F_0 L_1 + H \\ L_i = G_{i-1} L_{i-1} + F_i L_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq s-1 \\ L_s = G_{s-1} L_{s-1}, \end{cases}$$

donde $H = 1/(1 - h_0)$, $F_i = f_i/(1 - h_i)$ y $G_i = g_i/(1 - h_{i+1})$, para todo $i \geq 0$. Al sustituir reiteradamente en las ecuaciones se obtiene que

$$L_i = \left. \begin{array}{c} \frac{G_{i-1}}{1 - \frac{F_i G_i}{1 - \frac{F_{i+1} G_{i+1}}{\vdots \\ 1 - F_{s-1} G_{s-1}}}} L_{i-1} \end{array} \right\} s - i \text{ veces}$$

con $1 \leq i \leq s-1$. Por lo tanto,

$$L_0 = \frac{1}{1 - h_0 - \frac{f_0 g_0}{1 - h_1 - \frac{f_1 g_1}{\vdots \\ 1 - h_{s-1} - \frac{f_{s-1} g_{s-1}}{1 - h_s}}}}.$$

Como \mathcal{M}_{Lin} es convergente (ver teoremas de convergencia), entonces cuando $s \rightarrow \infty$ se obtiene la fracción continua convergente $E(z)$ de la FG de \mathcal{M}_{Lin} . \square

El anterior resultado coincide con el Teorema 1 de [33] y el Teorema 9.1 de [59], sin embargo, esta presentación amplía sus aplicaciones, teniendo en cuenta que las funciones $f_i(z)$, $g_i(z)$ y $h_i(z)$ representan funciones generatrices, a diferencia de [59] que sólo considera las ponderaciones como números reales.

Corolario 3.3.2. Si para todo $i \geq 0$, $f_i(z) = f(z)$, $g_i(z) = g(z)$ y $h_i(z) = h(z)$ en \mathcal{M}_{Lin} , ver Figura 3.15, entonces se obtiene la siguiente FG:

$$B(z) = \frac{1 - h(z) - \sqrt{(1 - h(z))^2 - 4f(z)g(z)}}{2f(z)g(z)} \quad (3.9)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n \binom{m+2n}{m} (f(z)g(z))^n (h(z))^m \quad (3.10)$$

$$= \frac{1}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{\ddots}}}}, \quad (3.11)$$

donde $f(z)$, $g(z)$ y $h(z)$ son transiciones en paralelo y C_n es el n -ésimo número de Catalan, A000108.

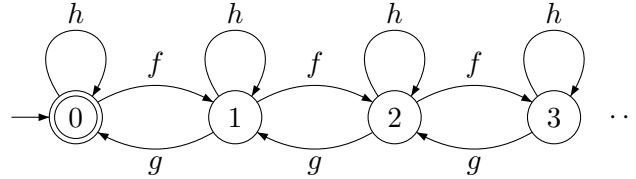


Figura 3.15: Autómata de conteo, Corolario 3.3.2.

Demostración. Por el Teorema 3.3.1 la FG es

$$B(z) = \frac{1}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{\ddots}}}}.$$

Como el autómata es convergente, entonces

$$B(z) = \frac{1}{1 - h(z) - f(z)g(z)B(z)} = \frac{1 - h(z) - \sqrt{(1 - h(z))^2 - 4f(z)g(z)}}{2f(z)g(z)}.$$

La Ecuación (3.10) se obtiene al observar que

$$\begin{aligned}
B(z) &= \frac{1 - h(z) - \sqrt{(1 - h(z))^2 - 4f(z)g(z)}}{2f(z)g(z)} \\
&= \frac{1}{1 - h(z)} \frac{1 - \sqrt{1 - 4\frac{f(z)g(z)}{(1 - h(z))^2}}}{2\frac{f(z)g(z)}{(1 - h(z))^2}} \\
&= \frac{1}{1 - h(z)} C(u),
\end{aligned}$$

donde $u = f(z)g(z)/(1 - h(z))^2$ y $C(z) = (1 - \sqrt{1 - 4z})/(2z)$ es la FG de los números de Catalan. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
B(z) &= \frac{1}{1 - h(z)} C(u) = \frac{1}{1 - h(z)} \sum_{n=0}^{\infty} C_n u^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{(f(z)g(z))^n}{(1 - h(z))^{2n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n \binom{m + 2n}{m} (f(z)g(z))^n (h(z))^m. \quad \square
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.3. Si $h(z) = f(z) = g(z) = z$ en el Corolario 3.3.2, se obtiene la FG de las trayectorias de Motzkin $M(z)$, ver Ejemplo 3.1.1. Además,

$$m_s = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} C_n \binom{s}{2n}.$$

En efecto, utilizando la Ecuación (3.10) se deduce que

$$M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n \binom{m + 2n}{m} z^{2n+m},$$

haciendo $t = 2n + m$

$$M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=2n}^{\infty} C_n \binom{t}{t - 2n} z^t,$$

luego

$$m_s = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} C_n \binom{s}{s - 2n} = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} C_n \binom{s}{2n}.$$

3.3.2. Aplicaciones de la MAC a trayectorias generalizadas de Motzkin y k -Coloreadas

Ejemplo 3.3.4. Una trayectoria de Motzkin k -coloreada es una trayectoria de Motzkin cuyos pasos horizontales se pueden pintar con k colores. La cantidad de trayectorias de Motzkin k -coloreadas de longitud n es el n -ésimo número de Motzkin k -coloreado, $m_{n,k}$. En la Figura 3.16 se muestra una trayectoria de Motzkin 2-coloreada de longitud 14.



Figura 3.16: Trayectoria de Motzkin 2-coloreada de longitud 14.

Si $f(z) = z = g(z)$ y $h(z) = kz$ en el Corolario 3.3.2, entonces se obtiene la FG de las trayectorias de Motzkin k -coloreadas.

$$M_k(z) = \sum_{i=0}^{\infty} m_{i,k} z^i = \frac{1 - kz - \sqrt{(1 - kz)^2 - 4z^2}}{2z^2},$$

$$m_{n,k} = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} C_n \binom{s}{2n} k^{s-2n}.$$

La última identidad coincide con la ecuación (8) de [62]. En particular si $k = 2$, se obtiene que

$$M_2(z) = \sum_{i=0}^{\infty} m_{i,2} z^i = \frac{1 - 2z - \sqrt{1 - 4z}}{2z^2}$$

$$= 1 + 2z + 5z^2 + 14z^3 + 42z^4 + 132z^5 + 429z^6 + 1430z^7 + 4862z^8 + \dots,$$

luego $zM_2(z) = C(z) - 1$, así $m_{n,2} = C_{n+1}$, para todo entero $n \geq 1$. Es decir que los números de Motzkin 2-coloreados de n pasos están dados por el número de Catalan C_{n+1} . En [25, 71] aparecen algunas biyecciones de los números $m_{n,2}$ con otros objetos combinatorios. Para $k = 3$, se obtiene que

$$M_3(z) = \sum_{i=0}^{\infty} m_{i,3} z^i = \frac{1 - 3z - \sqrt{1 - 6z + 5z^2}}{2z^2}$$

$$= 2 + 3z + 10z^2 + 36z^3 + 137z^4 + 543z^5 + 2219z^6 + 9285z^7 + 39587z^8 + \dots,$$

la cual corresponde con la sucesión A002212. Algunas propiedades de estos números aparecen en [23, 66]. Para $k = 4$ corresponde con la sucesión A005572, cuyos primeros valores son 1, 4, 17, 76, 354, 1704, ... Para $k = 5$ corresponde con la sucesión A182401, cuyos primeros

valores son 1, 5, 26, 140, 777, 4425, ...

Ejemplo 3.3.5. Una trayectoria generalizada de Motzkin es una trayectoria de Motzkin que consiste de los pasos $U = (1, 1)$, $D = (1, -1)$ y $H = (k, 0)$ con k fijo y $0 \leq k \leq n$. Este último representa un paso horizontal de longitud k y n es la longitud de la trayectoria. La cantidad de trayectorias generalizadas de Motzkin de longitud n es el n -ésimo número generalizado de Motzkin, m_n^k . En la Figura 3.17 se representa una trayectoria generalizada de Motzkin de longitud 14 y $k = 2$.



Figura 3.17: Trayectoria generaliza de Motzkin de longitud 14.

Si $f(z) = z = g(z)$ y $h(z) = z^k$ en el Corolario 3.3.2, se obtiene la FG de las trayectorias generalizadas de Motzkin.

$$M^{(k)}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i^k z^i = \frac{1 - z^k - \sqrt{(1 - z^k)^2 - 4z^2}}{2z^2}.$$

Esta última coincide con la ecuación (1) de [2]. Si $k = 2$ se obtienen la FG de las trayectorias de Schröder, A006318.

$$\begin{aligned} M^{(2)}(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} m_i^2 z^i = \frac{1 - z^2 - \sqrt{1 - 6z^2 + z^4}}{2z^2} \\ &= 1 + 2z^2 + 6z^4 + 22z^6 + 90z^8 + 394z^{10} + 1806z^{12} + \dots \end{aligned}$$

Existe una relación bien conocida entre los números m_i^2 y los números de Narayana $N(n, k) = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}$ con $1 \leq k \leq n$, los cuales enumeran una gran familia de objetos combinatorios, ver A001263. En particular se tiene la siguiente identidad [15].

$$m_{2n}^2 = \sum_{k=0}^n N(n, k) 2^k.$$

Ejemplo 3.3.6. Si $f(z) = z = g(z)$ y $h(z) = kz/(1 - z)$ en el Corolario 3.3.2, se obtiene la FG $F_k(z)$ de las trayectorias en el plano formadas por los pasos $U = (1, 1)$, $D = (1, -1)$ y $H(i) = (i, 0)$, con $i \geq 1$, tal que cada paso horizontal se puede pintar de k colores.

$$F_k(z) = \frac{1 - (1 + k)z - \sqrt{1 - (2k + 2)z + (k^2 + 2k - 3)z^2 + 8z^3 - 4z^4}}{2z^2(1 - z)} \quad (3.12)$$

y

$$f_s^{(k)} = \sum_{n=0}^s \sum_{m=0}^{s-2n} C_n \binom{m+2n}{m} \binom{s-2n-1}{m-1} k^m, \quad (3.13)$$

donde $f_s^{(k)} = [z^s] F_k(z)$. Las Ecuaciones (3.12) y (3.13) se obtienen del Corolario 3.3.2. En efecto

$$\begin{aligned} F_k(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n \binom{m+2n}{m} z^{2n} \left(\frac{kz}{1-z} \right)^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} C_n \binom{m+2n}{m} \binom{i+m-1}{i} k^m z^{2n+m+i}, \end{aligned}$$

haciendo $t = 2n + m + i$ se obtiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{t=2n+m}^{\infty} C_n \binom{m+2n}{m} \binom{t-2n-1}{t-m-2n} k^m z^t,$$

luego

$$f_s^{(k)} = \sum_{n=0}^s \sum_{m=0}^{s-2n} C_n \binom{m+2n}{m} \binom{s-2n-1}{m-1} k^m.$$

En el Cuadro 3.2 aparecen las sucesiones para $k = 1, 2$ y 3 . Las sucesiones para $k = 2, 3$ no aparecían en [67].

k	Secuencia	A-Número
1	1,1,3,7,19,51,143,407,1183,3487,...	A135052
2	1,2,7,24,86,316,1189,4562,17796,70398,...	A256938
3	1,3,13,57,257,1185,5573,26661,129437,636429,...	A256939

Cuadro 3.2: Sucesiones obtenidas para $k = 1, 2$ y 3 , Ejemplo 3.3.6.

Este último ejemplo muestra la gran variedad de resultados que se pueden obtener con la MAC, simplemente variando las diferentes transiciones en paralelo, es decir, variando las FGs $f_i(z)$, $g_i(z)$ y $h_i(z)$.

3.3.3. Aplicaciones en las Trayectorias de Dyck y Algunas Generalizaciones

A continuación presentamos algunas aplicaciones del autómata de conteo \mathcal{M}_{Lin} en trayectorias de Dyck, obteniéndose una gran cantidad de resultados de una manera unificada, los cuales no todos aparecen referenciados en trabajos relacionados.

Corolario 3.3.7. La FG del autómata de la Figura 3.18, el cual denotaremos por \mathcal{M}_{Dyck} , es

$$M_{Dyck}(z) = \frac{1}{1 - \frac{f_0(z) g_0(z)}{1 - \frac{f_1(z) g_1(z)}{1 - \frac{f_2(z) g_2(z)}{\ddots}}}}, \quad (3.14)$$

donde $f_i(z)$ y $g_i(z)$ son transiciones en paralelo para todo $i \geq 0$.

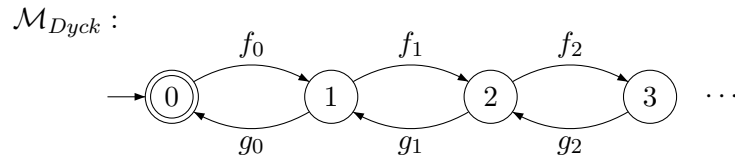


Figura 3.18: Autómata infinito lineal de conteo \mathcal{M}_{Dyck} .

Demostración. Se obtiene directamente del Teorema 3.3.1. □

Corolario 3.3.8. Si para todo entero $i \geq 0$ $f_i(z) = f(z)$ y $g_i(z) = g(z)$ en \mathcal{M}_{Dyck} , entonces se obtiene la siguiente FG:

$$\begin{aligned} M_{Dyck}(z) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4f(z)g(z)}}{2f(z)g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (f(z)g(z))^n \\ &= \frac{1}{1 - \frac{f(z)g(z)}{1 - \frac{f(z)g(z)}{1 - \frac{f(z)g(z)}{\ddots}}}}, \end{aligned}$$

donde C_n es el n -ésimo número de Catalan.

Demostración. Se obtiene directamente del Corolario 3.3.2. □

Ejemplo 3.3.9. Si $f(z) = z = g(z)$ en el Corolario 3.3.8, se obtiene la FG $T(z) = C(z^2)$ que cuenta las trayectorias de Dyck de longitud $2n$.

$$T(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{2n} = 1 + z^2 + 2z^4 + 5z^6 + 14z^8 + 42z^{10} + 132z^{12} + \dots$$

Esta última sucesión corresponde a A126120.

Ejemplo 3.3.10. Si $f(z) = kz$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ y $g(z) = z$ en el Corolario 3.3.8, se obtiene la FG $F(z)$ que cuenta las trayectorias de Dyck, tal que los pasos $U = (1, 1)$ se pueden pintar de k colores diferentes:

$$F(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4kz^2}}{2kz^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n k^n z^{2n} = \frac{1}{1 - \frac{kz^2}{1 - \frac{kz^2}{\ddots}}}$$

y $[z^{2n}] F(z) = k^n C_n$.

En el Cuadro 3.3 mostramos las secuencias que se obtienen para $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

k	Secuencia	A-Número
1	1, 0, 1, 0, 2, 0, 5, 0, 14, 0, 42, ...	A126120
2	1, 0, 2, 0, 8, 0, 40, 0, 224, 0, 1344, ...	A151374
3	1, 0, 3, 0, 18, 0, 135, 0, 1134, 0, 10206, ...	A005159
4	1, 0, 4, 0, 32, 0, 320, 0, 3584, 0, 43008, ...	A151403
5	1, 0, 5, 0, 50, 0, 625, 0, 8750, 0, 131250, ...	A156058

Cuadro 3.3: Sucesiones obtenidas para $k = 1, 2, 3, 4, 5$, Ejemplo 3.3.10

Hay que aclarar que para los valores de $k = 2, 3, 4, 5$ en la OEIS aparasen sin la interpolación de ceros, además, en ninguno de los casos aparecía la interpretación que estamos dando.

Ejemplo 3.3.11. Si $f(z) = kz^l$ con $k, l \in \mathbb{Z}^+$ y $g(z) = z$ en el Corolario 3.3.8, se obtiene la FG $C(kz^{l+1})$ que cuenta las trayectorias de Dyck que terminan en el punto $((l+1)n, (l-1)n)$, y está formado con pasos $U = (1, l)$ los cuales se pueden pintar de k colores diferentes:

$$C(kz^{l+1}) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4kz^{l+1}}}{2kz^{l+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n k^n z^{(l+1)n} = \frac{1}{1 - \frac{kz^{l+1}}{1 - \frac{kz^{l+1}}{\ddots}}}$$

Por ejemplo, si $k = 2$ y $l = 3$ se obtiene que

$$C(2z^4) = \frac{1 - \sqrt{1 - 8z^4}}{4z^4} = 1 + 2z^4 + 8z^8 + 40z^{12} + 224z^{16} + 1344z^{20} + \dots$$

3.3.4. Función Generatriz Ordinaria de $\mathcal{M}_{\text{BLin}}$

Definición 3.3.12. Para $i \geq 0$ se define la fracción continua $E_i(z)$ como:

$$E_i(z) = \frac{1}{1 - h_i(z) - \frac{f_i(z)g_i(z)}{1 - h_{i+1}(z) - \frac{f_{i+1}(z)g_{i+1}(z)}{1 - h_{i+2}(z) - \frac{f_{i+2}(z)g_{i+2}(z)}{\ddots}}}}.$$

Teorema 3.3.13. La función generatriz de $\mathcal{M}_{\text{BLin}}$, ver Figura 3.14, es

$$\mathcal{E}_b(z) = \frac{1}{1 - h_0(z) - f_0(z)g_0(z)E_1(z) - f'_0(z)g'_0(z)E'_1(z)}, \quad (3.15)$$

donde $f_i(z), f'_i(z), g_i(z), g'_i(z), h_i(z)$ y $h'_i(z)$ son transiciones en paralelo para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Es claro que el autómata $\mathcal{M}_{\text{BLin}}$ es equivalente al autómata de la Figura 3.19.

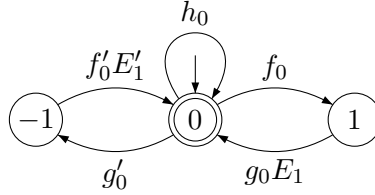


Figura 3.19: Autómata equivalente a $\mathcal{M}_{\text{BLin}}$.

Por lo tanto, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones entre FGs:

$$\begin{cases} L_0 = h_0 L_0 + f_0 L_1 + g'_0 L'_1 + 1 \\ L_1 = g_0 E_1 L_0 \\ L'_1 = f_0 E'_1 L_0, \end{cases}$$

donde $L'_1 = L_{-1}$. Al despejar L_0 se obtiene la FG deseada. \square

Corolario 3.3.14. Si para todo entero i , $f_i(z) = f(z)$, $f'_i(z) = f'(z)$, $g_i(z) = g(z)$, $g'_i(z) = g'(z)$, $h_i(z) = h(z)$ y $h'_i(z) = h'(z)$ en $\mathcal{M}_{\text{BLin}}$, entonces se obtiene la siguiente FG:

$$B_b(z) = \frac{1}{1 - h_0(z) - f(z)g(z)B(z) - f'(z)g'(z)B'(z)}, \quad (3.16)$$

donde $f(z), f'(z), g(z), g'(z), h(z)$ y $h'(z)$ son transiciones en paralelo y $B(z), B'(z)$ son la FG del Corolario 3.3.2.

Con el anterior corolario se pueden estudiar combinaciones de trayectorias en el plano, así como se muestra en el siguiente ejemplo

Ejemplo 3.3.15. La FG de las trayectorias en el plano tal que en el primer cuadrante son trayectorias de Dyck y en el cuarto cuadrante son trayectorias de Motzkin, se obtiene de reemplazar en el Corolario 3.3.14 $f(z) = z = f'(z), g(z) = z = g'(z), h(z) = z = h_0(z)$ y $h'(z) = 0$. Por lo tanto

$$B_b(z) = \frac{1}{1 - z - z^2 C(z^2) - z^2 M(z)} = 1 + z + 3z^2 + 6z^3 + 16z^4 + 38z^5 + \dots, \quad (3.17)$$

donde $C(z^2)$ es la FG de las trayectorias de Dyck y $M(z)$ es la FG de las trayectorias de Motzkin. La sucesión corresponde con A256943, en la cual no aparecía esta interpretación combinatoria [67]. En la Figura 3.20 aparecen las trayectorias de longitud 3.



Figura 3.20: Trayectorias combinadas de Dyck y Motzkin de longitud 3.

Ejemplo 3.3.16. En este ejemplo vamos a demostrar el Teorema de Chung-Feller. Este teorema es clásico en la combinatoria enumerativa y afirma que el número de trayectorias de Dyck de longitud n desde $(0,0)$ hasta $(2n,0)$ con k pasos $U = (1, -1)$ por debajo del eje x , ($k \leq n$), es independiente del k , para todo $k = 0, 1, \dots, n$, es decir es igual al n -ésimo número de Catalan. Por ejemplo si $n = 3$ y $k = 2$ obtenemos las $C_3 = 5$ trayectorias que se muestran en la Figura 3.21.

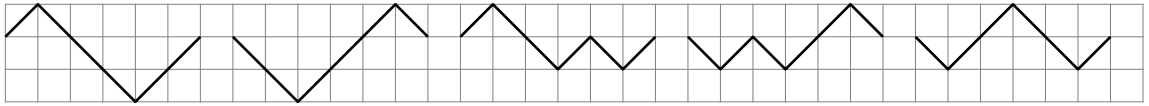


Figura 3.21: Ejemplo Teorema de Chung-Feller.

En [18] el teorema fue demostrado por primera vez utilizando métodos analíticos. Luego de esto fue demostrado usando otros métodos, como por ejemplo permutaciones cíclicas [54], expansiones de Taylor de las FGs [30] y métodos biyectivos [16]. Además, existen algunos refinamientos y generalizaciones, ver por ejemplo [29, 50]. A continuación mostramos una demostración utilizando el autómata $\mathcal{M}_{\text{BLin}}$.

Sea $f(z) = z = g(z) = g'(z)$, $f'(z) = tz$ y $h(z) = 0 = h'(z)$ en el Corolario 3.3.14, entonces

$$\begin{aligned}
B_b(tz) &= \frac{1}{1 - z^2 C(z^2) - z^2 t^2 C(z^2 t^2)} \\
&= \frac{1}{1 - z^2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2} \right) - (tz)^2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4(tz)^2}}{2(tz)^2} \right)} \\
&= \frac{1}{\frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2} - \frac{1 - \sqrt{1 - 4(tz)^2}}{2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1 - 4z^2} - \sqrt{1 - 4(tz)^2}}.
\end{aligned}$$

Racionalizando la última expresión

$$\begin{aligned}
B_b(tz) &= \frac{\sqrt{1 - 4z^2} - \sqrt{1 - 4(tz)^2}}{4z^2(t^2 - 1)} = \frac{1}{1 - t^2} (C(z^2) - t^2 C(z^2 t^2)) \\
&= \frac{1}{1 - t^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (C_n z^{2n} - C_n t^{2n+2} z^{2n}) \right) = \frac{1 - t^{2n+2}}{1 - t^2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\sum_{k=0}^{2n} t^{2k} \right) z^{2n}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto el coeficiente $[t^{2k} z^{2n}] B_b(tz)$ es igual a C_n para todo $0 \leq k \leq n$.

Corolario 3.3.17. Si para todo entero i , $f_i(z) = f(z) = f'_i(z)$, $g_i(z) = g(z) = g'_i(z)$ y $h_i(z) = h(z) = h'_i(z)$ en $\mathcal{M}_{\text{BLin}}$, entonces se obtiene la siguiente FG:

$$B_b(z) = \frac{1}{\sqrt{(1 - h(z))^2 - 4f(z)g(z)}} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1 - h(z) - \frac{2f(z)g(z)}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{\ddots}}}}}, \quad (3.19)
\end{aligned}$$

donde $f(z), g(z)$ y $h(z)$ son transiciones en paralelo. Si $h(z) = 0$, entonces corresponde al mismo autómata pero sin bucles, luego

$$B_b(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4f(z)g(z)}}. \quad (3.20)$$

Demostración. Es claro que a partir de la Ecuación (3.15) se obtiene que

$$B_b(z) = \frac{1}{1 - h(z) - 2f(z)g(z)B(z)},$$

donde $B(z)$ es la FG del Corolario 3.3.2. La fracción continua se obtiene del mismo corolario. \square

Del Corolario 3.3.17 deducimos la equivalencia de autómatas que aparece en la Figura 3.22.

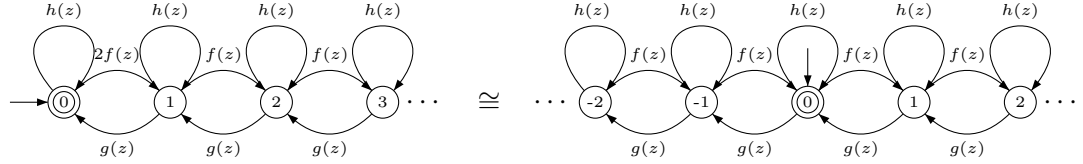


Figura 3.22: Equivalencia entre autómatas de conteo.

Corolario 3.3.18. Si en el Corolario 3.3.17 se tiene que $f(z) = g(z)$ entonces se obtiene la siguiente FG:

$$B_b(z) = \frac{1}{1 - h(z)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} 2^n \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \binom{l+2n+2k}{l} f^{2n+2k}(z) h^l(z), \quad (3.21)$$

donde $f(z), g(z)$ y $h(z)$ son transiciones en paralelo.

Demostración. Por el Teorema 3.3.13 se tiene que

$$B_b(z) = \frac{1}{1 - h(z) - 2f^2(z)B(z)},$$

donde $B(z)$ es la FG del Corolario 3.3.2 con $g(z) = f(z)$, es decir

$$B(z) = \frac{1 - h(z) - \sqrt{(1 - h(z))^2 - 4f^2(z)}}{2f^2(z)} = \frac{1}{1 - h(z)} C(u),$$

donde $u = f^2(z)/(1 - h(z))^2$ y $C(u)$ es la FG de los números de Catalan. Como las potencias de la FG de los números Catalan satisfacen que (ver Ecuación 5.70 de [39]):

$$C^n(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} u^k, \quad n \geq 1.$$

Entonces

$$B_b(z) = \frac{1}{1 - h(z) - 2f^2(z)\frac{C(u)}{1-h(z)}} = \frac{1}{1 - h(z)} \cdot \frac{1}{1 - 2uC(u)} = \frac{1}{1 - h(z)} \sum_{n=0}^{\infty} (2uC(u))^n \quad (3.22)$$

$$= \frac{1}{1 - h(z)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 2^n \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \frac{f^{2n}(z)}{(1-h(z))^{2n}} u^k \quad (3.23)$$

$$= \frac{1}{1 - h(z)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 2^n \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \frac{f^{2n+2k}(z)}{(1-h(z))^{2n+2k}} \quad (3.24)$$

$$= \frac{1}{1 - h(z)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} 2^n \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \binom{l+2n+2k}{l} f^{2n+2k}(z) h^l(z). \quad \square$$

Ejemplo 3.3.19. Un trayectoria bilateral de Motzkin¹ de longitud n es una trayectoria reticular de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la cual inicia en el origen y finaliza en $(n, 0)$ y que consiste de los pasos $U = (1, 1)$, $H = (1, 0)$ y $D = (1, -1)$. La cantidad de trayectorias bilaterales de Motzkin de longitud n es el n -ésimo número bilateral de Motzkin m_n^b , A002426. En la Figura 3.23 se presenta una trayectoria bilateral de Motzkin de longitud 14.

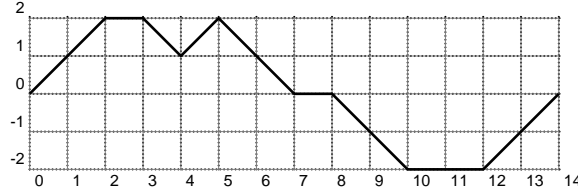


Figura 3.23: Trayectoria bilateral de Motzkin de longitud 14.

El número de cadenas de longitud n aceptadas por el autómata convergente $\mathcal{M}_{\text{BLin}}$, ver Figura 3.14, con $f_i(z) = z = g_i(z) = h_i(z) = f'_i(z) = g'_i(z) = h_i(z)$ para todo entero i , corresponde al n -ésimo número bilateral de Motzkin y la FG es:

$$M^b(z) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i^b z^i = \frac{1}{\sqrt{1 - 2z - 3z^2}} = 1 + z + 3z^2 + 7z^3 + 19z^4 + 51z^5 + \dots \quad (3.25)$$

$$= \frac{1}{1 - z - \frac{2z^2}{1 - z - \frac{z^2}{1 - z - \frac{z^2}{\ddots}}}} \quad (3.26)$$

$$= \frac{1}{1 - z} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} 2^n \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \binom{l+2n+2k}{l} z^{2n+2k+l} \quad (3.27)$$

¹En inglés estas trayectorias se conocen como Grand Motzkin Paths, ver [32].

Estas ecuaciones se obtienen claramente de los Corolarios 3.3.17 y 3.3.18.

En este caso la arista entre los estados i a $i+1$ y viceversa, representan los pasos de la forma $U = (1, 1)$ y $D = (1, -1)$ que están sobre el eje x ; la arista entre los estados $-i$ a $-(i+1)$ y viceversa, representan los pasos de la forma $U = (1, 1)$ y $D = (1, -1)$ que están por debajo del eje x ; y los bucles representan los pasos de la forma $H = (1, 0)$. Además, es claro que una cadena es aceptada si y sólo si tiene tantos pasos a la derecha como a la izquierda, lo que garantiza que la trayectoria está bien formada, luego:

$$m_n^b = |\{w \in L(\mathcal{M}_{\text{BLin}}) : |w| = n\}| = L^{(n)}(\mathcal{M}_{\text{BLin}}).$$

Por otro lado, si hacemos $t = 2n + 2k + l$ en la Ecuación (3.27), obtenemos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} m_i^b z^i = \frac{1}{1-z} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=2n+2k}^{\infty} 2^n \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \binom{t}{t-2n-2k} z^t,$$

luego

$$m_s^b = 1 + \sum_{n=0}^s \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{s-2n}{2} \rfloor} 2^n \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \binom{s}{2n+2k}.$$

Estas trayectorias bilaterales de Motzkin están relacionas con los coeficientes trinomiales centrales. Los números trinomiales centrales son los coeficientes en la expansión de $(1+x+x^2)^n$ y los coeficientes trinomiales centrales corresponden al término x^n , el cual se denota por T_n . Otra forma equivalente, es ver que los números trinomiales son los coeficientes en la expansión de $(x+y+z)^n$ y los coeficientes trinomiales centrales son los coeficientes de los términos de la forma $x^n y^n z^k$. Por ejemplo para $n = 2$ se tiene que $T_2 = 3$, ya que

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

Al realizar el producto $(x+y+z)^n$ se hacen n elecciones cada una con tres posibilidades x, y o z . Por lo tanto, si en el autómata $\mathcal{M}_{\text{BLin}}$, con $f_i(z) = z = g_i(z) = h_i(z) = f'_i(z) = g'_i(z) = h_i(z)$ para todo entero i , se relacionan los bucles con las elecciones de z , las transiciones a derecha con las elecciones de x y las transiciones a izquierda con las elecciones de y , entonces se obtiene el autómata que enumera los números T_n , luego $T_n = m_n^b$. Así

$$\sum_{i=0}^{\infty} T_i z^i = \frac{1}{\sqrt{1-2z-3z^2}}.$$

Los coeficientes trinomiales generalizados corresponden a los coeficientes de la expansión $(a+bx+cx^2)^n$ y los coeficientes trinomiales centrales corresponden al término x^n , el cual

se denota por T_n^* . Como en el caso anterior, los números trinomiales generalizados también se pueden ver como los coeficientes en la expansión de $(ax + cy + bz)^n$ y los coeficientes trinomiales centrales generalizados son los coeficientes de los términos de la forma $x^n y^n z^k$. Tomando $f(z) = az = f'(z)$, $g(z) = cz = g'(z)$ y $h(z) = bz = h'(z)$ en el autómata de conteo $\mathcal{M}_{\text{BLin}}$ se obtiene que dicho autómata enumera los números T_n^* . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} T_i^* z^i &= \frac{1}{\sqrt{(1-bz)^2 - 4acz^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2bz+(b^2-4ac)z^2}} \\ &= \frac{1}{1-bz - \frac{2acz^2}{1-bz - \frac{acz^2}{1-bz - \frac{acz^2}{\ddots}}}}. \end{aligned}$$

Esta última FG coincide con la ecuación (3) de [55]. Además, por el Teorema del Binomio aplicado dos veces y utilizando la identidad $\binom{n}{k} \binom{n-k}{n-2k} = \binom{2k}{k} \binom{n}{2k}$, se obtiene que

$$T_n^* = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{n}{2k} b^{n-2k} (ac)^k.$$

Como $m_n^b = T_n$ entonces se obtiene la siguiente igualdad

$$\sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{s}{2k} = 1 + \sum_{n=0}^s \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{s-2n}{2} \rfloor} 2^n \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \binom{s}{2n+2k}.$$

Como caso particular de los coeficientes trinomiales centrales tenemos los coeficientes binomiales centrales, correspondientes a la expresión $(1+x)^n$, cuya fórmula es $\binom{2n}{n}$, los cuales corresponden a la fila central del triángulo de Pascal. Por lo tanto tenemos que su FG es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-4z^2}}.$$

Esta FG es claro que también corresponde a las trayectorias bilaterales de Dyck.

Corolario 3.3.20. *Los coeficientes binomiales satisfacen la siguiente identidad:*

$$\binom{2m}{m} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m n 2^n \binom{2m-n-1}{m-1}, \quad m \geq 1.$$

Demostración. Tomando $f(z) = z = g(z)$ y $h(z) = 0$ en la Ecuación (3.24) obtenemos que

$$B_b(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 2^n \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} z^{2n+2k}.$$

Haciendo $2t = 2n + 2k$

$$B_b(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=n}^{\infty} 2^n \frac{n}{2t-n} \binom{2t-n}{t-n} z^t.$$

Por lo tanto,

$$\binom{2m}{m} = [z^{2m}] B_b(z) = \sum_{n=1}^m 2^n \frac{n}{2m-n} \binom{2m-n}{m-n} = \sum_{n=1}^m \frac{n 2^n}{m} \binom{2m-n-1}{m-1}.$$

□

3.4. Trayectorias Multicoloreadas e Inclinadas

Para cerrar este capítulo vamos a generalizar algunas de las aplicaciones sobre trayectorias en el plano vistas hasta el momento y mostrar la forma unificada en la que se pueden trabajar con la metodología de los autómatas de conteo, simplemente cambiando las ponderaciones de las aristas. Esto nos permite encontrar una gran variedad de funciones generatrices asociadas a nuevos objetos combinatorios, además, permite encontrar nuevas interpretaciones de familias combinatorias ya existentes.

Una trayectoria de n pasos es una sucesión finita $T = (s_1, \dots, s_n)$ de parejas ordenadas $s_i = ((x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i))$, $1 \leq i \leq n$, de puntos reticulares tales que $x_0 = y_0 = 0$ y para todo $1 \leq i \leq n$, se tiene que $x_i = x_{i-1} + \delta_i$ y $y_i = y_{i-1} + \delta'_i$. El conjunto de parejas (δ, δ') se denomina conjunto de pasos permitidos.

Denotaremos por $\mathcal{L}_{n,S}$, $\mathcal{L}_{n,S}^+$ y $\mathcal{L}_{n,S}^-$ el conjunto de trayectorias desde $(0,0)$ hasta $(n,0)$, cuyos pasos permitidos están en S y se encuentran en los semiplanos $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^-$, respectivamente. Es claro que $\mathcal{L}_{n,S}^+$ y $\mathcal{L}_{n,S}^-$ son equivalentes. Además, definimos los siguientes conjuntos

$$\mathcal{L}_{\mathbb{N},S} := \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{L}_{n,S}, \quad \mathcal{L}_{k\mathbb{N},S} := \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{L}_{kn,S},$$

y así para cada uno de los conjuntos definidos anteriormente. Denotaremos por $\mathcal{L}_{n,S,C}$ el conjunto de trayectorias desde $(0,0)$ hasta $(n,0)$, cuyos pasos permitidos están en S y tal que cada pareja $(\delta_i, \delta'_i) \in S$ se puede colorear de c_i colores, en este caso $C = (c_1, c_2, \dots, c_{|S|})$. El conjunto S puede ser infinito.

Ejemplo 3.4.1. En el Cuadro 3.4 mostramos algunas familias de trayectorias estudiadas hasta el momento.

Familia de Trayectorias	Función Generatriz
$\mathcal{L}_{2\mathbb{N}, S=\{(1,1),(1,-1)\}}^+$ Trayectorias de Dyck, (Ej. 3.3.9)	$T(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z^2}}{2z^2}$
$\mathcal{L}_{2\mathbb{N}, S=\{(1,1),(1,-1)\}, C=(k,1)}^+$ Trayectorias Ejemplo 3.3.10	$F(z) = \frac{1-\sqrt{1-4kz^2}}{2kz^2}$
$\mathcal{L}_{\mathbb{N}, S=\{(1,1),(1,-1),(1,0)\}}^+$ Trayectorias de Motzkin, (Ej. 3.1.1)	$M(z) = \frac{1-z-\sqrt{1-2z-3z^2}}{2z^2}$
$\mathcal{L}_{\mathbb{N}, S=\{(1,1),(1,-1),(1,0)\}}^+$, sin pasos horizontales sobre el eje x . Trayectorias de Riordan, (Ej. 3.1.2)	$R(z) = \frac{1+z-\sqrt{1-2z-3z^2}}{2z(1+z)}$
$\mathcal{L}_{\mathbb{N}, S=\{(1,1),(1,-1),(1,0)\}, C=(1,1,k)}^+$ Trayectorias de Motzkin k -coloreadas, (Ej. 3.3.4)	$M_k(z) = \frac{1-kz-\sqrt{(1-kz)^2-4z^2}}{2z^2}$
$\mathcal{L}_{\mathbb{N}, S=\{(1,1),(1,-1),(k,0)\}}^+$ Trayectorias Generalizadas de Motzkin, (Ej. 3.3.5)	$M^{(k)}(z) = \frac{1-z^k-\sqrt{(1-z^k)^2-4z^2}}{2z^2}$
$\mathcal{L}_{\mathbb{N}, S=\{(1,1),(1,-1)\} \cup \{(i,0): i \geq 1\}, C=(1,1,k,k,\dots)}^+$ Trayectorias Ejemplo 3.3.6	$F_k(z) = \frac{1-(1+k)z-\sqrt{1-(2k+2)z+(k^2+2k-3)z^2+8z^3-4z^4}}{2z^2(1-z)}$
$\mathcal{L}_{\mathbb{N}, S=\{(1,1),(1,-1),(1,0)\}}$ tal que en el Cuadrante 1 son Trayectorias de Dyck y en el Cuadrante 4 son Trayectorias de Motzkin, (Ej. 3.3.15)	$B_b(z) = \frac{1}{1-z-z^2T(z)-z^2M(z)}$
$\mathcal{L}_{2\mathbb{N}, S=\{(1,1),(1,-1)\}}$ Trayectorias Bilaterales de Dyck, (Ej. 3.3.19)	$M^b(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4z^2}}$
$\mathcal{L}_{\mathbb{N}, S=\{(1,1),(1,-1),(1,0)\}}$ Trayectorias Bilaterales de Motzkin, (Ej. 3.3.19)	$M^b(z) = \frac{1}{\sqrt{1-2z-3z^2}}$

Cuadro 3.4: Ejemplos de familias de trayectorias.

Las siguientes proposiciones generalizan los ejemplos que se muestran en la Cuadro 3.4.

Proposición 3.4.2. Sea $\mathcal{L}_{\mathbb{N}, S=\{(1,1), (1,-1), (1,0)\}, C=(a,1,b)}^+$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{L}_{n,S,C}^+| z^n = \frac{1 - bz - \sqrt{(1-bz)^2 - 4az^2}}{2az^2}$$

y

$$|\mathcal{L}_{n,S,C}^+| = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} C_k a^k b^{n-2k},$$

donde C_k es el k -ésimo número de Catalan. Sea $\mathcal{L}_{\mathbb{N}, S=\{(1,1), (1,-1), (1,0)\}, C=(a,1,b)}$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{L}_{n,S,C}| z^n = \frac{1}{\sqrt{(1-bz)^2 - 4az^2}}$$

y

$$|\mathcal{L}_{n,S,C}| = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{n}{2k} b^{n-2k} a^k.$$

Demostración. Se obtiene directamente de los Corolarios 3.3.2 y 3.3.17. □

Esta última proposición se demuestra utilizando el método simbólico en [14].

En general los ejemplos vistos hasta el momento estudian trayectorias “simétricas”, es decir con $f(z) = g(z)$, sin embargo, esto no es una limitante como se muestra a continuación.

Ejemplo 3.4.3. Sea $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{2\mathbb{N}, S=\{(3,1), (1,-1)\}}^+$, estas trayectorias son ejemplos de trayectorias “inclinadas” de Dyck. En la Figura 3.24 se representa una trayectoria de inclinada de Dyck de longitud 16.



Figura 3.24: Trayectoria inclinada de Dyck de longitud 16.

El autómata de la Figura 3.25 permite contar estas trayectorias. En este caso la arista etiquetada con z^3 que va del estado i al $i+1$ representa el paso $(3,1)$, ya que avanza tres unidades y sube una. La arista etiquetada con z que va del estado $i+1$ al i representa el paso $(1,-1)$. Esta interpretación combinatoria difiere de la del Ejemplo 3.3.11.

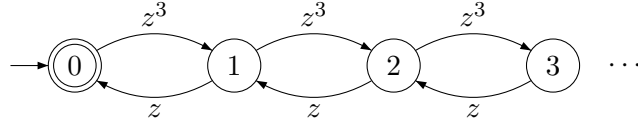


Figura 3.25: Autómata de conteo correspondiente a las trayectorias de Dyck inclinadas.

Por lo tanto, haciendo $f(z) = z^3$ y $g(z) = z$ en el Corolario 3.3.8, se obtiene la FG del problema.

$$F(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^4}}{2z^4} = C(z^4) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{4n}. \quad (3.28)$$

El anterior ejemplo se generaliza en la siguiente proposición.

Proposición 3.4.4. Sea $\mathcal{L}_{2\mathbb{N}, S}^+ = \{(k, 1), (1, -1)\}, C = (a, b)$, el conjunto de trayectorias inclinadas y coloreadas de Dyck, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{L}_{2n, S, C}^+| z^{2n} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4abz^{k+1}}}{2abz^{l+1}} = C(abz^{k+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (ab)^n z^{(k+1)n}.$$

Sea $\mathcal{L}_{2\mathbb{N}, S} = \{(k, 1), (1, -1)\}, C = (a, 1, b)$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{L}_{2n, S, C}| z^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1 - 4abz^{l+1}}}.$$

El siguiente ejemplo muestra como se pueden combinar trayectorias de Motzkin usuales con trayectorias inclinadas.

Ejemplo 3.4.5. Sea $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{2\mathbb{N}, S}^+ = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, -1), (1, 0)\}$. En la Figura 3.26 se muestra una trayectoria inclinada de Motzkin de longitud 21.

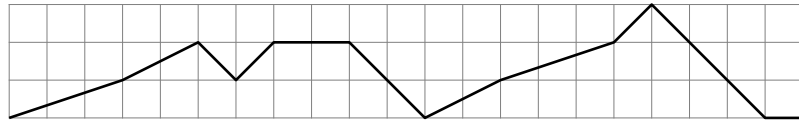


Figura 3.26: Trayectoria inclinada de Motzkin de longitud 21.

Es claro que el autómata de la Figura 3.27 permite contar estas trayectorias.

Por lo tanto, haciendo $f(z) = z + z^2 + z^3$, $g(z) = z$ y $h(z) = z$ en el Corolario 3.3.2, se obtiene la FG del problema.

$$F(z) = \frac{1 - z - \sqrt{(1 - z)^2 - 4(z^2 + z^3 + z^4)}}{2(z^2 + z^3 + z^4)}. \quad (3.29)$$

El anterior ejemplo se generaliza en la siguiente proposición.

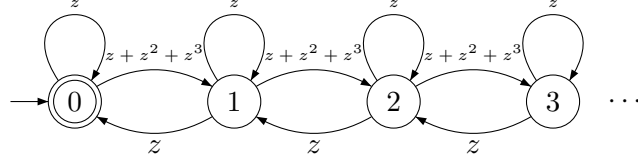


Figura 3.27: Autómata de conteo correspondiente a las trayectorias inclinadas de Motzkin.

Proposición 3.4.6. Sea $\mathcal{L}_{\mathbb{N},S}^+ = \{(1,1), (2,1), \dots, (k,1), (1,-1), (1,0)\}$, el conjunto de trayectorias inclinadas de Motzkin, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{L}_{n,S,C}^+| z^n = \frac{1 - z - \sqrt{(1-z)^2 - 4z^2 \left(\frac{z^k-1}{z-1}\right)}}{2z^2 \left(\frac{z^k-1}{z-1}\right)}.$$

Sea $\mathcal{L}_{\mathbb{N},S} = \{(1,1), (2,1), \dots, (k,1), (1,-1), (1,0)\}$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{L}_{n,S,C}| z^n = \frac{1}{\sqrt{(1-z)^2 - 4z^2 \left(\frac{z^k-1}{z-1}\right)}}.$$

Proposición 3.4.7. Sea $\mathcal{L}_{\mathbb{N},S}^+ = \{(i,1): i \geq 1\} \cup \{(1,-1)\}$, un conjunto de trayectorias inclinadas, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{L}_{n,S,C}^+| z^n = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2 + 4z^3}}{2z^2} \quad (3.30)$$

$$= 1 + z^2 + z^3 + 3z^4 + 5z^5 + 12z^6 + 24z^7 + 55z^8 + \dots \quad (3.31)$$

Sea $\mathcal{L}_{\mathbb{N},S}^+ = \{(i,1): i \geq 1\} \cup \{(1,-1), (1,0)\}$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{L}_{n,S,C}^+| z^n = \frac{1 - 2z + z^2 - \sqrt{1 - 4z + 2z^2 + z^4}}{2z^2} \quad (3.32)$$

$$= 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + 13z^4 + 35z^5 + 97z^6 + 275z^7 + \dots \quad (3.33)$$

En [67] aparecen referenciadas las anterior sucesiones como A090345 y A086581, respectivamente, sin embargo, esta interpretación combinatoria no aparecía. En particular la primera FG corresponde a la cantidad de trayectorias de Motzkin sin pasos horizontales sobre los niveles pares. La segunda FG corresponde a trayectorias de Dyck sin pasos de la forma $DDUU$. Esto muestra que con la MAC se pueden encontrar biyecciones entre diferentes objetos combinatorios.

Capítulo 4

Operadores sobre Autómatas y sus Funciones Generatrices

A continuación definimos una serie de operadores que nos permitirán obtener nuevos ejemplos de autómatas de conteo.

4.1. Operador FIN

Definición 4.1.1. Dado un autómata lineal de conteo $\mathcal{M}_c = (G, E)$, donde $G = (V, A, n, F)$. Sea $H \subseteq V$, definimos el operador $\text{FIN}_H : \mathcal{M}_c^* \rightarrow \mathcal{M}_c^*$, como $\text{FIN}_H(\mathcal{M}_c) = \mathcal{M}'_c$, donde $\mathcal{M}'_c = (G', E)$ está definido como $G' = (V, A, n, H)$.

En otras palabras este operador redefine el conjunto de estados finales de un autómata de conteo dado.

Ejemplo 4.1.2. El autómata $\text{FIN}_{\mathbb{N}}(\mathcal{M}_{\text{Lin}})$ se muestra en la Figura 4.1.

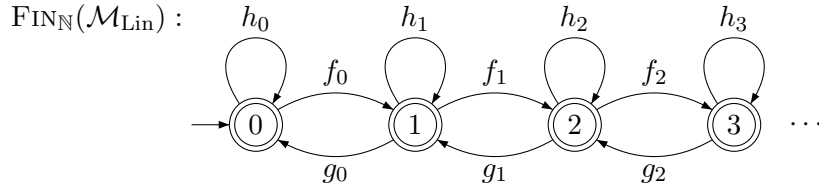


Figura 4.1: Autómata infinito lineal de conteo $\text{FIN}_{\mathbb{N}}(\mathcal{M}_{\text{Lin}})$.

4.1.1. Función Generatriz Ordinaria de $\text{Fin}_{\mathbb{N}}(\mathcal{M}_{\text{Lin}})$

Teorema 4.1.3. *La función generatriz del autómata $\text{Fin}_{\mathbb{N}}(\mathcal{M}_{\text{Lin}})$, ver Figura 4.1, es*

$$G(z) = E(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{j-1} (f_i(z)E_i(z)) \right) E_j(z), \quad (4.1)$$

donde $E(z)$ es la FG del Teorema 3.3.1 y $E_i(z)$ es la FG de la Definición 3.3.12.

Demostración. El sistema de ecuaciones entre FGs de $\text{Fin}_{\mathbb{N}}(\mathcal{M}_{\text{Lin}-s})$, $s \geq 1$, es:

$$\begin{cases} L_0 = h_0 L_0 + f_0 L_1 + 1 \\ L_i = g_{i-1} L_{i-1} + h_i L_i + f_i L_{i+1} + 1, \quad 1 \leq i \leq s-1 \\ L_s = g_{s-1} L_{s-1} + h_s L_s + 1, \end{cases}$$

el cual es equivalente a

$$\begin{cases} L_0 = F_0 L_1 + H_0 \\ L_i = G_{i-1} L_{i-1} + F_i L_{i+1} + H_i, \quad 1 \leq i \leq s-1 \\ L_s = G_{s-1} L_{s-1}, \end{cases}$$

donde $F_i = f_i(z)/(1 - h_i(z))$, $G_i = g_i(z)/(1 - h_{i+1}(z))$ y $H_i = 1/(1 - h_i(z))$, para todo $i \geq 0$. Al sustituir reiteradamente en las ecuaciones se obtiene que

$$L_i = \frac{G_{i-1}}{\text{Trunc}(E_i)} L_{i-1} + \frac{\prod_{j=i}^{s-2} F_j (H_s + H_{s-1})}{\prod_{j=i}^{s-1} \text{Trunc}(E_j)} + \sum_{j=i}^{s-2} \frac{\prod_{k=i}^{j-1} F_k H_j}{\prod_{l=i}^j \text{Trunc}(E_l)},$$

donde

$$\text{Trunc}(E_i) = 1 - \frac{F_i G_i}{1 - \frac{F_{i+1} G_{i+1}}{\vdots \over 1 - F_{s-1} G_{s-1}}},$$

para todo $1 \leq i \leq s-1$. Luego

$$L_0 = \frac{H_0}{\text{Trunc}(E_0)} + \frac{\prod_{j=0}^{s-2} F_j (H_s + H_{s-1})}{\prod_{j=0}^{s-1} \text{Trunc}(E_j)} + \sum_{j=1}^{s-2} \frac{\prod_{k=0}^{j-1} F_k H_j}{\prod_{l=0}^j \text{Trunc}(E_l)}.$$

Como $\text{FIN}_{\mathbb{N}}(\mathcal{M}_{\text{Lin}})$ es convergente, entonces cuando $s \rightarrow \infty$ se obtiene la FG

$$L_0 = E(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{j-1} F_k H_j}{\prod_{l=0}^j \text{Trunc}_{\infty}(E_l)} = E(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{j-1} (f_i(z) E_i(z)) \right) E_j(z),$$

donde

$$\text{Trunc}_{\infty}(E_i) = 1 - \frac{F_i G_i}{1 - \frac{F_{i+1} G_{i+1}}{1 - \frac{F_{i+2} G_{i+2}}{\ddots}}}$$

□

Corolario 4.1.4. *La FG del autómata $\text{FIN}_{\mathbb{N}}(\mathcal{M}_{\text{Dyck}})$, ver Figura 4.2, es*

$$G(z) = M_{\text{Dyck}}(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{j-1} (f_i(z) M_{\text{Dyck},i}(z)) \right) M_{\text{Dyck},j}(z), \quad (4.2)$$

donde $M_{\text{Dyck}}(z)$ es la FG del Corolario 3.3.8 y

$$M_{\text{Dyck},i}(z) = \frac{1}{1 - \frac{f_i(z) g_i(z)}{1 - \frac{f_{i+1}(z) g_{i+1}(z)}{1 - \frac{f_{i+2}(z) g_{i+2}(z)}{\ddots}}}}$$

$\text{FIN}_{\mathbb{N}}(\mathcal{M}_{\text{Dyck}})$:

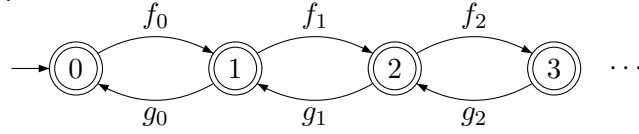


Figura 4.2: Autómata infinito lineal de conteo $\text{FIN}_{\mathbb{N}}(\mathcal{M}_{\text{Dyck}})$.

Corolario 4.1.5. Si para todo entero $i \geq 0$, $f_i(z) = f(z)$, $g_i(z) = g(z)$ y $h_i(z) = h(z)$ en $\text{FIN}_{\mathbb{N}}(\mathcal{M}_{\text{Lin}})$, entonces se obtiene la siguiente FG:

$$G(z) = \frac{1 - 2f(z) - h(z) - \sqrt{(1 - h(z))^2 - 4f(z)g(z)}}{2f(z)(f(z) + g(z) + h(z) - 1)} = \sum_{i=0}^{\infty} B^{n+1}(z)f^n(z) \quad (4.3)$$

$$= \frac{1}{1 - f(z) - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{\ddots}}}}, \quad (4.4)$$

donde $f(z)$, $g(z)$ y $h(z)$ son transiciones en paralelo y $B(z)$ es la FG del Corolario 3.3.2. Si $h(z) = 0$, es equivalente a la ausencia de bucles y la ecuación sigue siendo válida, luego

$$G(z) = \frac{1 - 2f(z) - \sqrt{1 - 4f(z)g(z)}}{2f(z)(f(z) + g(z) - 1)} = \sum_{i=0}^{\infty} M_{Dyck}^{n+1}(z)f^n(z) \quad (4.5)$$

$$= \frac{1}{1 - f(z) - \frac{f(z)g(z)}{1 - \frac{f(z)g(z)}{1 - \frac{f(z)g(z)}{\ddots}}}}. \quad (4.6)$$

Demostración. Por el Teorema 4.1.3 se obtiene la siguiente FG

$$\begin{aligned} G(z) &= B(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{j-1} (f(z)B(z)) \right) B(z) = B(z) + \sum_{j=1}^{\infty} f^j(z)B^{j+1}(z) \\ &= B(z) + f(z)B(z) \sum_{j=1}^{\infty} f^{j-1}(z)B^j(z) = B(z) + f(z)B(z)G(z). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{B(z)}{1 - f(z)B(z)} = \frac{1 - h(z) - \sqrt{(1 - h(z))^2 - 4f(z)g(z)}}{f(z) \left(2g(z) + h(z) - 1 + \sqrt{(1 - h(z))^2 - 4f(z)g(z)} \right)} \\ &= \frac{1 - 2f(z) - h(z) - \sqrt{(1 - h(z))^2 - 4f(z)g(z)}}{2f(z)(f(z) + g(z) + h(z) - 1)}. \end{aligned}$$

La fracción continua (4.4) se obtiene de observar que

$$G(z) = \frac{1}{\frac{1}{B(z)} - f(z)}.$$

Si $h(z) = 0$ el razonamiento es similar. □

Corolario 4.1.6. *Si en el Corolario 4.1.5 se tiene que $f(z) = g(z)$ y $h(z) \neq 0$, entonces se obtiene la siguiente FG:*

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+k+1} \binom{n+2k+l}{k, l, k+n} f^{2k+n}(z) h^l(z) \quad (4.7)$$

$$= \frac{1}{1 - f(z) - h(z) - \frac{f^2(z)}{1 - h(z) - \frac{f^2(z)}{1 - h(z) - \frac{f^2(z)}{\ddots}}}}, \quad (4.8)$$

donde $f(z), g(z)$ y $h(z)$ son transiciones en paralelo y

$$\binom{a}{a_1, a_2, a_3} = \frac{a!}{a_1! a_2! a_3!}$$

con $a = a_1 + a_2 + a_3$. Si $h(z) = 0$, entonces

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+k+1} \binom{n+2k}{k} f^{2k+n}(z). \quad (4.9)$$

Demostración. Por el Corolario 4.1.5, se tiene que

$$G(z) = \frac{B(z)}{1 - f(z)B(z)},$$

donde $B(z)$ es la FG del Corolario 3.3.2, con $g(z) = f(z)$, es decir

$$B(z) = \frac{1 - h(z) - \sqrt{(1 - h(z))^2 - 4f^2(z)}}{2f^2(z)} = \frac{1}{1 - h(z)} C(u),$$

con $u = f^2(z)/(1 - h(z))^2$ y $C(u)$ la FG de los números de Catalan. Entonces

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{\frac{1}{1-h(z)}C(u)}{1 - \frac{f(z)}{1-h(z)}C(u)} = \frac{1}{1-h(z)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f(z)}{1-h(z)} \right)^n C^{n+1}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z)}{(1-h(z))^{n+1}} C^{n+1}(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2k+1} \binom{n+2k+1}{k} \frac{f^n(z)}{(1-h(z))^{n+1}} u^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2k+1} \binom{n+2k+1}{k} \frac{f^{n+2k}(z)}{(1-h(z))^{n+2k+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2k+1} \binom{n+2k+1}{k} \binom{l+n+2k}{l} f^{n+2k}(z) h^l(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2k+1} \frac{n+2k+1}{n+k+1} \frac{(l+n+2k)!}{k!l!(n+k)!} f^{n+2k}(z) h^l(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+k+1} \binom{n+2k+l}{k, l, k+n} f^{2k+n}(z) h^l(z).
\end{aligned}$$

Si $h(z) = 0$ el razonamiento es similar. □

En el autómata $\text{FIN}_{\mathbb{N}}(\mathcal{M}_{\text{Lin}})$ todos los estados son de aceptación, así que este autómata cuenta todos los prefijos posibles de longitud n de las palabras aceptadas por \mathcal{M}_{Lin} . En ese sentido vamos a presentar a continuación algunas ejemplos en el que se cuentan los “prefijos” de ciertas estructuras combinatorias.

Ejemplo 4.1.7. El triángulo de Motzkin es un triángulo numérico, tal que cada termino $T(n, k)$, $0 \leq k \leq n$, donde n corresponde a la fila y k a la columna, está definido recursivamente como se muestra a continuación:

$$T(n, k) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = k = 0; \\ T(n-1, k-1) + T(n-1, k) + T(n-1, k+1), & \text{si } k \leq n; \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Este triángulo corresponde con el arreglo A020474. En el Cuadro 4.1 se muestra los primeros valores de dicho triángulo.

Este triángulo recibe dicho nombre ya que el elemento $T(i, j)$ cuenta el número de trayectorias en el cuadrante 4 del plano xt , formadas por los vectores $(0, -1)$, $(1, -1)$ y $(-1, -1)$, donde el primer vector inicia en $(0, 0)$ y los demás vectores inician donde termina el último, entonces es claro que la columna 0 corresponde a los números de Motzkin, ver Figura 4.3. Además, $t_i = \sum_{j=0}^i T(i, j)$ cuenta la cantidad de trayectorias de longitud i y alturas j , con $j = 0, 1, \dots, i$, es decir, las trayectorias de Motzkin de longitud i en las que no se exige que terminen en el

1					
1	1				
2	2	1			
4	5	3	1		
9	12	9	4	1	
21	30	25	14	5	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

Cuadro 4.1: Triángulo de Motzkin.

eje x (“prefijos” de las trayectorias de Motzkin) o equivalentemente cuenta la suma de las filas del triángulo de Motzkin.

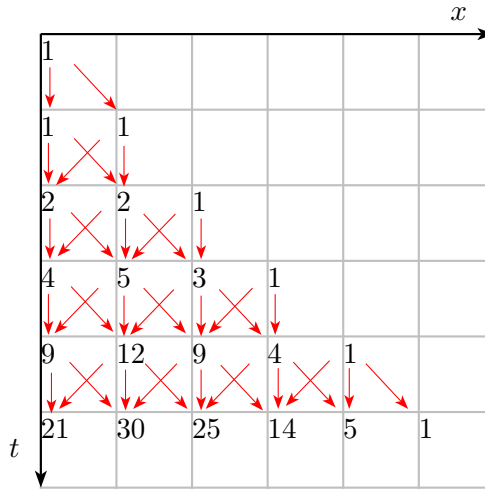


Figura 4.3: Interpretación triángulo de Motzkin.

Así, por los Corolarios 4.1.5 y 4.1.6 con $f(z) = z = g(z) = h(z)$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} t_i z^i &= \frac{1 - 3z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z(3z - 1)} = 1 + 2z + 5z^2 + 13z^3 + 35z^4 + 96z^5 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+k+1} \binom{n+2k+l}{k, l, k+n} z^{2k+n+l}. \end{aligned}$$

Esta sucesión corresponde a A005773 (salvo por el primer termino). Si hacemos $t = 2k + n + l$ obtenemos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} t_i z^i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=2k+n}^{\infty} \frac{n+1}{n+k+1} \binom{t}{k, t-2k-n, k+n} z^t,$$

luego

$$t_i = \sum_{n=0}^s \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{s-n}{2} \rfloor} \frac{n+1}{n+k+1} \binom{s}{k, s-2k-n, k+n} = \sum_{n=0}^s \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{s-n}{2} \rfloor} \frac{n+1}{n+k+1} \binom{2k+n}{k} \binom{i}{2k+n}.$$

Sea $T(x, t) = \sum_{k,n=0}^{\infty} T(n, k) x^n t^k$, entonces haciendo $f(x, t) = xt$, $g(x, t) = x/t$ y $h(x, t) = t$ en el Corolario 4.1.5 se obtiene que

$$T(x, t) = \frac{1 - 2tx - t - \sqrt{1 - 2t - 3t^2}}{2t(tx^2 + tx + t - x)}.$$

Esto es claro ya que $f(x, t) = xt$ cuenta la distancia que avanza en sentido horizontal (eje x) y vertical (eje t), $g(x, t) = x/t$ cuenta la distancia que avanza verticalmente y resta uno a la distancia horizontal y $h(x, t) = t$ cuenta únicamente los avances verticales. Utilizando otros argumentos combinatorios se obtiene esta FG, ver [48, 53].

Ejemplo 4.1.8. Análogo al triángulo de Motzkin, se puede definir el triángulo de Catalan, el cual fue introducido por Shapiro en [64]. El termino $B(n, k)$, donde n corresponde a la fila y k a la columna, está definido recursivamente como se muestra a continuación:

$$B(n, k) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = k = 1; \\ B(n-1, k-1) + 2B(n-1, k) + B(n-1, k+1), & \text{si } 1 \leq k \leq n; \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

En el Cuadro 4.2 se muestra los primeros valores de dicho triángulo.

1					
2	1				
5	4	1			
14	14	6	1		
42	48	27	8	1	
132	165	110	44	10	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

Cuadro 4.2: Triángulo de Catalan.

En la primera columna aparece la sucesión de los números de Catalan. Además, se verifica que $B(n, k) = \frac{k}{n} \binom{2n}{n-k}$. Algunas propiedades de estos números se pueden encontrar en [40, 46, 73]. En este ejemplo mostraremos la FG para la suma de las filas de una variación del triángulo de Catalan, que corresponde al arreglo A008313. Este triángulo tiene espacios en blanco y cada termino se obtiene a partir de la suma de los dos números que se encuentran por encima, además, su valor inicial es 1. Los primeros términos se muestran en el Cuadro 4.3.

1								
	1							
1		1						
	2		1					
2		3		1				
	5		4		1			
5		9		5		1		
	14		14		6		1	
14		28		20		7		1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

Cuadro 4.3: Variación triángulo de Catalan.

Por los Corolarios 4.1.5 y 4.1.6, con $f(z) = z = g(z)$, se obtiene que la FG de la suma de las filas del triángulo de Catalan es

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2z - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z(2z - 1)} &= 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 6z^4 + 10z^5 + 20z^6 + 35z^7 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+k+1} \binom{n+2k}{k} z^{2k+n}. \end{aligned}$$

Esta sucesión corresponde a A001405. Si hacemos $t = 2k + n$ obtenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=2k}^{\infty} \frac{t-2k-1}{t-k+1} \binom{t}{k} z^t,$$

luego su termino l -ésimo es:

$$a_l = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \frac{l-2k-1}{l-k+1} \binom{l}{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \left(1 - \frac{k}{l-k+1} \right) \binom{l}{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \left(\binom{l}{k} - \binom{l}{k-1} \right) = \binom{l}{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}.$$

4.1.2. Función Generatriz Ordinaria de $\text{Fin}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}_{\text{BLin}})$

Teorema 4.1.9. *La función generatriz del autómata $\text{Fin}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}_{\text{BLin}})$, ver Figura 4.4, es*

$$H(z) = \frac{E(z)E'(z)}{E(z) + E'(z) - E(z)E'(z)(1 - h_0(z))} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j-1} f_k E_k f_0 E_j + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j-1} g'_k E'_k g'_0 E'_j \right) \quad (4.10)$$

$$= \frac{E'(z)G(z) + E(z)G'(z) - E(z)E'(z)}{E(z) + E'(z) - E(z)E'(z)(1 - h_0(z))}, \quad (4.11)$$

donde $G(z)$ es la FG del Teorema 4.1.3 y $G'(z), E'(z)$ son las FGs que se obtienen a partir de $G(z)$ y $E(z)$ intercambiando $f(z)$ por $g'(z)$ y $g(z)$ por $f'(z)$.

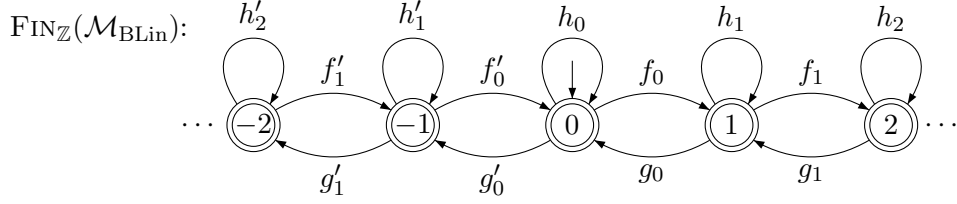


Figura 4.4: Autómata infinito bilineal de conteo $\text{FIN}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}_{\text{BLin}})$.

Demostración. El sistema de ecuaciones entre FGs de $\text{FIN}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}_{\text{Lin}-s})$, $s \geq 1$, es:

$$\begin{cases} L_0 = h_0 L_0 + f_0 L_1 + g'_0 L'_1 + 1 \\ L_i = g_{i-1} L_{i-1} + h_i L_i + f_i L_{i+1} + 1, \quad 1 \leq i \leq s-1 \\ L_s = g_{s-1} L_{s-1} + h_s L_s + 1 \\ L'_i = f'_{i-1} L'_{i-1} + h'_i L'_i + g'_i L'_{i+1} + 1, \quad 1 \leq i \leq s-1 \\ L'_s = f'_{s-1} L'_{s-1} + h'_s L'_s + 1, \end{cases}$$

donde $L'_i = L_{-i}$ y $h'_0(z) = h_0(z)$. Este sistema es equivalente a

$$\begin{cases} L_0 = F_0 L_1 + H_0 \\ L_i = G_{i-1} L_{i-1} + F_i L_{i+1} + H_i, \quad 1 \leq i \leq s-1 \\ L_s = G_{s-1} L_{s-1} \\ L'_i = F'_{i-1} L'_{i-1} + G'_i L'_{i+1} + H'_i, \quad 1 \leq i \leq s-1 \\ L'_s = F'_{s-1} L'_{s-1}, \end{cases}$$

donde $H_i = 1/(1-h_i)$, $H'_i = 1/(1-h'_i)$, $F_i = f_i/(1-h_i)$, $F'_i = f'_i/(1-h'_{i+1})$, $G_i = g_i/(1-h_{i+1})$ y $G'_i = g'_i/(1-h'_i)$, para todo $i \geq 0$. Utilizando las mismas justificaciones del Teorema 4.1.3, se obtiene que

$$\begin{aligned} L_0 = & \frac{H_0}{\text{Trunc}(E_0) + \text{Trunc}(E'_0) - 1} + \frac{\prod_{j=0}^{s-2} F_j (H_s + H_{s-1})}{\prod_{j=1}^{s-1} \text{Trunc}(E_j) (\text{Trunc}(E_0) + \text{Trunc}(E'_0) - 1)} \\ & + \sum_{j=1}^{s-2} \frac{\prod_{k=0}^{j-1} F_k H_j}{\prod_{l=1}^j \text{Trunc}(E_l) (\text{Trunc}(E_0) + \text{Trunc}(E'_0) - 1)} \\ & + \frac{\prod_{j=0}^{s-2} G'_j (H'_s + H'_{s-1})}{\prod_{j=1}^{s-1} \text{Trunc}(E'_j) (\text{Trunc}(E_0) + \text{Trunc}(E'_0) - 1)} \\ & + \sum_{j=1}^{s-2} \frac{\prod_{k=0}^{j-1} G'_k H'_j}{\prod_{l=1}^j \text{Trunc}(E'_l) (\text{Trunc}(E_0) + \text{Trunc}(E'_0) - 1)}, \end{aligned}$$

donde

$$\text{Trunc}(E'_i) = 1 - \frac{F'_i G'_i}{1 - \frac{F'_{i+1} G'_{i+1}}{1 - \frac{F'_{i+2} G'_{i+2}}{\ddots}}}$$

Como $\text{FIN}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}_{\text{Lin}})$ es convergente, entonces cuando $s \rightarrow \infty$ se obtiene la siguiente FG:

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{H_0}{\text{Trunc}_{\infty}(E_0) + \text{Trunc}_{\infty}(E'_0) - 1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{j-1} F_k H_j}{\prod_{l=1}^j \text{Trunc}_{\infty}(E_l) (\text{Trunc}_{\infty}(E_0) + \text{Trunc}_{\infty}(E'_0) - 1)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{j-1} G'_k H_j}{\prod_{l=1}^j \text{Trunc}_{\infty}(E'_l) (\text{Trunc}_{\infty}(E_0) + \text{Trunc}_{\infty}(E'_0) - 1)} \\ &= \frac{1}{(1 - h_0(z))(\text{Trunc}_{\infty}(E_0) + \text{Trunc}_{\infty}(E'_0) - 1)} + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j-1} \frac{f_k E_k f_0 E_j}{\text{Trunc}_{\infty}(E_0) + \text{Trunc}_{\infty}(E'_0) - 1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j-1} \frac{g'_k E'_k g'_0 E'_j}{\text{Trunc}_{\infty}(E_0) + \text{Trunc}_{\infty}(E'_0) - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{E(z)} + \frac{1}{E'(z)} - (1 - h_0(z))} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j-1} f_k E_k f_0 E_j + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j-1} g'_k E'_k g'_0 E'_j \right) \\ &= \frac{E(z)E'(z)}{E(z) + E'(z) - E(z)E'(z)(1 - h_0(z))} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j-1} f_k E_k f_0 E_j + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j-1} g'_k E'_k g'_0 E'_j \right) \\ &= \frac{E'(z)G(z) + E(z)G'(z) - E(z)E'(z)}{E(z) + E'(z) - E(z)E'(z)(1 - h_0(z))}. \end{aligned}$$

□

Corolario 4.1.10. Si para todo entero $i \geq 0$, $f_i(z) = f(z) = f'_i(z)$, $g_i(z) = g(z) = g'_i(z)$ y $h_i(z) = h(z) = h'_i(z)$ en $\text{FIN}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}_{\text{BLin}})$, entonces se obtiene la siguiente FG:

$$H(z) = \frac{1}{1 - f(z) - g(z) - h(z)}, \quad (4.12)$$

donde $f(z)$, $g(z)$ y $h(z)$ son transiciones en paralelo.

Demostración. Por el Teorema 4.1.9 se obtiene la FG

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{B^2(z)}{2B(z) - B^2(z)(1 - h(z))} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} f^j(z)B^j(z) + \sum_{j=1}^{\infty} g^j(z)B^j(z) \right) \\
&= \frac{1}{2B(z) - B^2(z)(1 - h(z))} (BG + BG' - B^2) \\
&= \frac{B(z)}{2 - B(z)(1 - h(z))} \left(\frac{G(z)}{B(z)} + \frac{G'(z)}{B(z)} - 1 \right),
\end{aligned}$$

donde $B(z)$ es la FG del Corolario 3.3.2. Además,

$$\begin{aligned}
\frac{B(z)}{2 - B(z)(1 - h(z))} &= \frac{1}{\frac{2}{B(z)} + h(z) - 1} \\
&= \frac{1}{1 - h(z) - \frac{2f(z)g(z)}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{\ddots}}}} = B_b(z),
\end{aligned}$$

donde $B_b(z)$ es la FG del Corolario 3.3.17. Luego, $H(z) = \frac{B_b(z)}{B(z)} (G(z) + G'(z) - B(z))$. Reemplazando y simplificando se obtiene que

$$G(z) + G'(z) - B(z) = \frac{(1 - h(z))(\sqrt{d} - (1 - h(z))) + 4f(z)g(z)}{(2f(z)g(z))(1 - f(z) - g(z) - h(z))},$$

donde $d = (1 - h(z))^2 - 4f(z)g(z)$. Similarmente

$$\frac{B_b(z)}{B(z)} = \frac{2f(z)g(z)}{\sqrt{d}(1 - h(z) - \sqrt{d})}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{(1 - h(z))(\sqrt{d} - (1 - h(z))) + 4f(z)g(z)}{\sqrt{d}(1 - h(z) - \sqrt{d})(1 - f(z) - g(z) - h(z))} \\
&= \frac{(1 - h(z))\sqrt{d} - d}{\sqrt{d}(1 - h(z) - \sqrt{d})(1 - f(z) - g(z) - h(z))} \\
&= \frac{1}{1 - f(z) - g(z) - h(z)}.
\end{aligned}$$

Una demostración más sencilla resulta de observar que el estado inicial puede ser cualquier entero i . Luego $L_0 = 1 + hL_0 + fL_0 + gL_0$, así $L_0 = 1/(1 - f(z) - g(z) - h(z))$. \square

Ejemplo 4.1.11. Los coeficientes trinomiales $(x + y + z)^n$ se pueden interpretar en un Tetraedro de Pascal como se muestra en la Figura 4.5 [10]. Algunas variaciones de este tetraedro fueron estudiadas por Guy en [41]. Por el Corolario 4.1.10, es claro que si $f(z) = z = g(z) = h(z)$, entonces el autómata $\text{FIN}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}_{\text{BLin}})$ cuenta la suma de los coeficientes en el desarrollo $(x + y + z)^n$, es decir la suma de los elementos de cada capa del tetraedro de Pascal. Por lo tanto, su FG es

$$\frac{1}{1-3z} = 1 + 3z + 9z^2 + 27z^3 + 81z^4 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} 3^i z,$$

el cual es un hecho bien conocido.

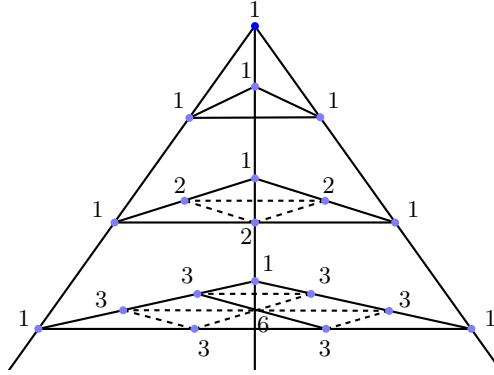


Figura 4.5: Tetraedro de Pascal.

4.1.3. Autómatas de Conteo $\text{Fin}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{\text{Lin}})$ y $\text{Fin}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{\text{BLin}})$

Teorema 4.1.12. La función generatriz del autómata $\text{Fin}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{\text{Lin}})$, ver Figura 4.6, es

$$D_i(z) = \prod_{j=0}^{i-1} f_j(z) E_j(z) E_i(z). \quad (4.13)$$

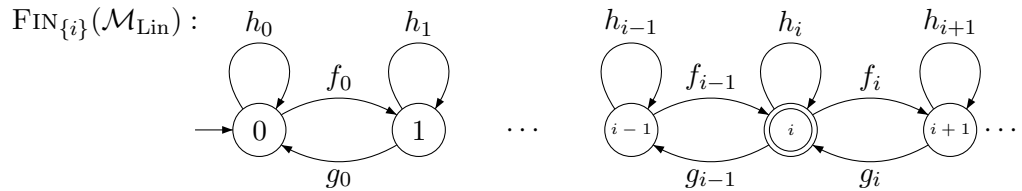


Figura 4.6: Autómata infinito lineal de conteo $\text{Fin}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{\text{Lin}})$.

Demostración. El autómata $\text{FIN}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{\text{Lin}})$ es equivalente al autómata de la Figura 4.7. Nótese que el vértice i está etiquetado con la FG $E_i(z)$, ya que si se eliminan los primeros i vértices del autómata $\text{FIN}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{\text{Lin}})$, el autómata que resulta tiene como FG $E_i(z)$. Por lo tanto, el autómata equivalente debe tener en cuenta dicho conteo, (recordar que en los autómatas de conteo se permite que los estados finales estén etiquetados con FG).

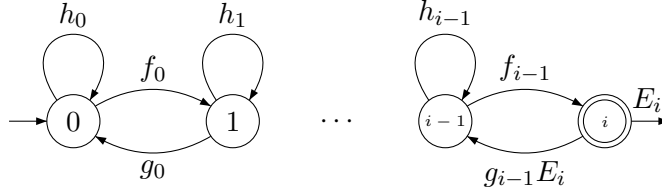


Figura 4.7: Autómata equivalente a $\text{FIN}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{\text{Lin}})$.

Por lo tanto, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones entre FGs:

$$\begin{cases} L_0 = h_0 L_0 + f_0 L_1 \\ L_j = g_{j-1} L_{j-1} + h_j L_j + f_j L_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq i-1 \\ L_i = g_{i-1} E_i L_{i-1} + E_i. \end{cases}$$

Al sustituir reiteradamente se obtiene que

$$L_j = \prod_{k=j}^{i-1} f_k E_k E_i + g_{j-1} E_j L_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq i-1.$$

Luego

$$L_0 = h_0 L_0 + f_0 L_1 = h_0 L_0 + f_0 \prod_{k=1}^{i-1} f_k E_k E_i + f_0 g_0 E_1 L_0.$$

Concluyendo que

$$L_0 = \frac{f_0 \prod_{k=1}^{i-1} f_k E_k E_i}{1 - h_0 - f_0 g_0 E_1} = \prod_{j=0}^{i-1} f_j(z) E_j(z) E_i(z).$$

□

Corolario 4.1.13. La FG del autómata $\text{FIN}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{\text{Dyck}})$, ver Figura 4.8, es

$$D_i(z) = \prod_{j=0}^{i-1} f_j(z) M_{\text{Dyck},j}(z) M_{\text{Dyck},i}(z). \quad (4.14)$$

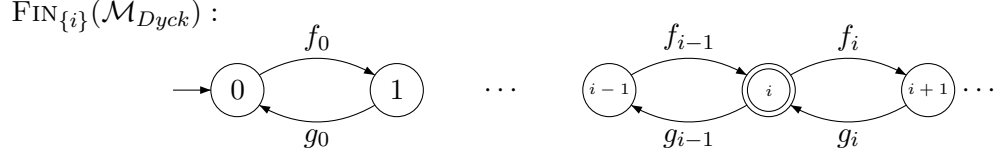


Figura 4.8: Autómata infinito lineal de conteo $\text{FIN}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{Dyck})$.

Corolario 4.1.14. Si para todo entero $i \geq 0$, $f_i(z) = f(z)$, $g_i(z) = g(z)$ y $h_i(z) = h(z)$ en el Teorema 4.1.12, entonces se obtiene la FG $D_i(z) = f^i(z)B^{i+1}(z)$, donde $B(z)$ es la FG del Corolario 3.3.2. Si $h(z) = 0$, entonces se obtiene la FG $D_i(z) = f^i(z)M_{Dyck}^{i+1}(z)$, donde $M_{Dyck}(z)$ es la FG del Corolario 3.3.8.

Ejemplo 4.1.15. Si para todo entero $i \geq 0$ $f_i(z) = z = g_i(z) = h_i(z)$, en la FG $D_i(z)$, se obtiene la FG que cuenta las trayectorias de Motzkin de altura i , es decir que terminan en el punto (n, i) . Así, $D_i(z) = z^i M(z)^{i+1}$, donde $M(z)$ es la FG de los números de Motzkin. En la Figura 4.9 se muestran las trayectorias de Motzkin de altura 1 y de longitud 3.

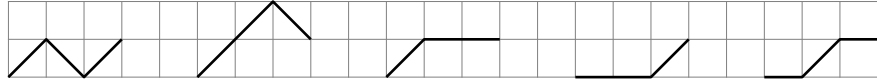


Figura 4.9: Trayectorias de Motzkin de altura 1 y de longitud 3.

Para $i = 1$ se tiene que

$$D_1(z) = zM(z)^2 = z + 2z^2 + 5z^3 + 12z^4 + 30z^5 + 76z^6 + 196z^7 + 512z^8 + \dots$$

Esta sucesión corresponde a A002026. Asimismo, es claro que $[z^l] D_1(z)$ corresponde al término l -ésimo de la columna 1 del triángulo de Motzkin, ver Ejemplo 4.1.7. En general $[z^l] D_i(z)$ corresponde al término l -ésimo de la columna i del triángulo de Motzkin. En el Cuadro 4.6 aparecen las sucesiones para $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

i	Secuencia	A-Número
0	1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835,...	A001006 (Números de Motzkin)
1	0, 1, 2, 5, 12, 30, 76, 196, 512, 1353,...	A002026
2	0, 0, 1, 3, 9, 25, 69, 189, 518, 1422,...	A005322
3	0, 0, 0, 1, 4, 14, 44, 133, 392, 1140,...	A005323
4	0, 0, 0, 0, 1, 5, 20, 70, 230, 726,...	A005324

Cuadro 4.4: Sucesiones obtenidas para $i = 0, 1, 2, 3, 4$, Ejemplo 4.1.15.

Ejemplo 4.1.16. Si para todo entero $i \geq 0$, $f_i(z) = z = g_i(z)$ y $h_i(z) = 0$, en la FG $D_i(z)$, se obtiene la FG que cuenta las trayectorias de Dyck de altura i , es decir que terminan en el punto (n, i) . Así, $D_i(z) = z^i C(z^2)^{i+1}$, donde $C(z)$ es la FG de los números de Catalan.

Para $i = 1$ se tiene que

$$D_1(z) = zC(z^2)^2 = z + 2z^3 + 5z^5 + 14z^7 + 42z^9 + 132z^{11} + 429z^{13} + 1430z^{15} + \dots,$$

la cual corresponde con la sucesión A126120, es decir, las trayectorias de Dyck de altura 1 son enumeradas por los números de Catalan. Además, $[z^l] D_i(z)$ corresponde al término l -ésimo de la columna i del triángulo de Catalan. En el Cuadro 4.5 aparecen las sucesiones para $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

i	Secuencia	A-Número
0	1, 0, 1, 0, 2, 0, 5, 0, 14, 0, 42, 0, 132, 0, 429, 0, 1430, ...	A126120
1	0, 1, 0, 2, 0, 5, 0, 14, 0, 42, 0, 132, 0, 429, 0, 1430, ...	A126120
2	0, 0, 1, 0, 3, 0, 9, 0, 28, 0, 90, 0, 297, 0, 1001, 0, 3432, ...	A000245
3	0, 0, 0, 1, 0, 4, 0, 14, 0, 48, 0, 165, 0, 572, 0, 2002, ...	A002057
4	0, 0, 0, 0, 1, 0, 5, 0, 20, 0, 75, 0, 275, 0, 1001, 0, 3640, ...	A000344

Cuadro 4.5: Sucesiones obtenidas para $i = 0, 1, 2, 3, 4$, Ejemplo 4.1.16.

Teorema 4.1.17. *La función generatriz del autómata $\text{FIN}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{\text{BLin}})$, ver Figura 4.10, es*

$$Db_i(z) = \frac{f_0(z) \prod_{k=1}^{i-1} f_k(z) E_k(z) E_i(z)}{1 - h_0(z) - f_0(z) g_0(z) E_1(z) - g'_0(z) f'_0(z) E'_1(z)}. \quad (4.15)$$

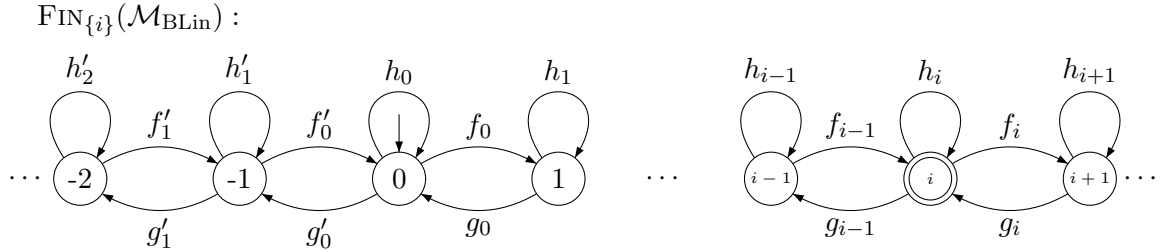


Figura 4.10: Autómata infinito bilineal de conteo $\text{FIN}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{\text{BLin}})$.

Demostración. A partir de las demostraciones de los Teoremas 4.1.12 y 3.3.1, se deduce que

$$\begin{aligned} L_0 &= h_0(z) L_0(z) \\ &+ f_0(z) \prod_{k=1}^{i-1} f_k(z) E_k(z) E_i(z) + f_0(z) g_0(z) E_1(z) L_0(z) + g'_0(z) f'_0(z) E'_1(z) L_0(z), \end{aligned}$$

quedando demostrado. \square

Corolario 4.1.18. Si para todo entero $i \geq 0$, $f_i(z) = f(z) = f'_i(z)$, $g_i(z) = g(z) = g'_i(z)$ y $h_i(z) = h(z) = h'_i(z)$ en el Teorema 4.1.17, entonces se obtiene la FG

$$Db_i(z) = \frac{f^i(z)B^i(z)}{1 - h(z) - 2f(z)g(z)B(z)} = f^i(z)B^i(z)B_b(z), \quad (4.16)$$

donde $B(z)$ es la FG del Corolario 3.3.2 y $B_b(z)$ es la FG del Corolario 3.3.17. Si $h(z)=0$, entonces se obtiene la FG

$$Db_i(z) = \frac{f^i(z)M_{Dyck}^i(z)}{1 - 2f(z)g(z)M_{Dyck}(z)} = f^i(z)M_{Dyck}^i(z)B_b(z), \quad (4.17)$$

donde $M_{Dyck}(z)$ es la FG del Corolario 3.3.8 y $B_b(z)$ es la FG (3.20) del Corolario 3.3.17.

Ejemplo 4.1.19. Si para todo entero $i \geq 0$, $f_i(z) = z = g_i(z) = h_i(z)$, en la FG $Db_i(z)$, se obtiene la FG que cuenta las trayectorias bilaterales de Motzkin de altura i , ver Ejemplo 3.3.19, es decir que terminan en el punto (n, i) .

$$Db_i(z) = \frac{z^i M(z)^i}{1 - z - 2z^2 M(z)},$$

donde $M(z)$ es la FG de los números de Motzkin. En la Figura 4.11 se muestran las trayectorias bilaterales de Motzkin de altura 2 y de longitud 4.

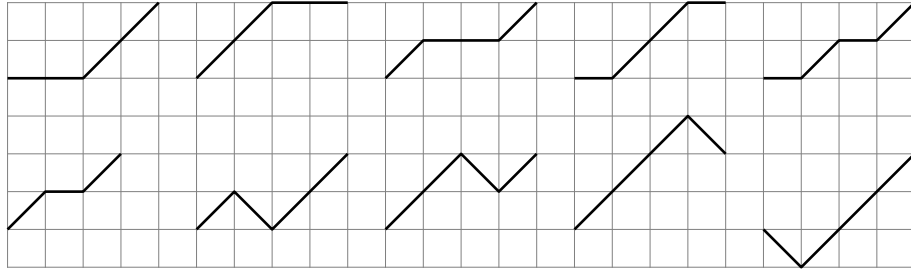


Figura 4.11: Trayectorias bilateral de Motzkin de altura 2 y de longitud 4.

Para $i = 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} Db_2(z) &= \frac{z^2 M(z)^2}{1 - z - 2z^2 M(z)} \\ &= z^2 + 3z^3 + 10z^4 + 30z^5 + 90z^6 + 266z^7 + 784z^8 + \dots \end{aligned}$$

la cual corresponde a A014531, sin embargo, no aparece esta interpretación. En el Cuadro 4.6 aparecen las sucesiones para $i = 1, 2, 3, 4$. En ninguno de los casos aparecía esta interpretación en [67].

i	Secuencia	A-Número
1	0, 1, 2, 6, 16, 45, 126, 357, 1016, 2907, ...	A005717
2	0, 0, 1, 3, 10, 30, 90, 266, 784, 2304, ...	A014531
3	0, 0, 0, 1, 4, 15, 50, 161, 504, 1554, ...	A014532
4	0, 0, 0, 0, 1, 5, 21, 77, 266, 882, 2850, ...	A014533

Cuadro 4.6: Sucesiones obtenidas para $i = 1, 2, 3, 4$, Ejemplo 4.1.19.

Ejemplo 4.1.20. Si para todo entero $i \geq 0$, $f_i(z) = z = g_i(z)$ y $h_i(z) = 0$, en la FG $Db_i(z)$, se obtiene la FG que cuenta las trayectorias bilaterales de Dyck de altura i .

$$Db_i(z) = \frac{z^i C(z^2)^i}{1 - 2z^2 C(z^2)},$$

donde $C(z^2)$ es la FG de los números de Catalan.

En el Cuadro 4.7 aparecen las sucesiones para $i = 1, 2, 3, 4$. Ninguna de las interpretaciones combinatorias de estas sucesiones en [67] coincidía con la que aquí damos.

i	Secuencia	A-Número
1	0, 1, 0, 3, 0, 10, 0, 35, 0, 126, 0, 462, 0, 1716, 0, 6435, ...	A138364
2	0, 0, 1, 0, 4, 0, 15, 0, 56, 0, 210, 0, 792, 0, 3003, 0, 11440, ...	A001791
3	0, 0, 0, 1, 0, 5, 0, 21, 0, 84, 0, 330, 0, 1287, 0, 5005, ...	A002054
4	0, 0, 0, 0, 1, 0, 6, 0, 28, 0, 120, 0, 495, 0, 2002, 0, 8008, ...	A002694

Cuadro 4.7: Sucesiones obtenidas para $i = 1, 2, 3, 4$, Ejemplo 4.1.20.

Corolario 4.1.21. La FG del autómata $\text{FIN}_{\{i,j\}}(\mathcal{M}_{\text{BLin}})$, ver Figura 4.12, es

$$Db_{i,j}(z) = \frac{f_0(z) \prod_{k=1}^{i-1} f_k(z) E_k(z) E_i(z) + g'_0(z) \prod_{k=1}^{j-1} g'_k(z) E'_k(z) E'_j(z)}{1 - h_0(z) - f_0(z) g_0(z) E_1(z) - f'_0(z) g'_0(z) E'_1(z)}. \quad (4.18)$$

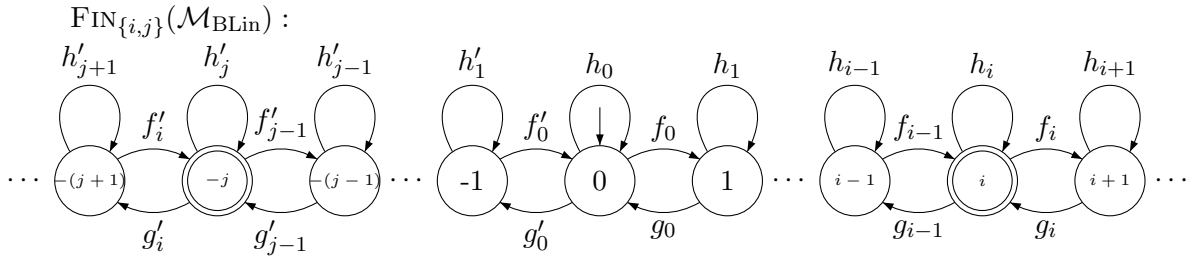


Figura 4.12: Autómata infinito bilineal de conteo $\text{FIN}_{\{i,j\}}(\mathcal{M}_{\text{BLin}})$.

Demostración. A partir de los argumentos de la demostración del Teorema 4.1.17, se tiene que

$$\begin{aligned}
L_0 = h_0(z)L_0(z) + f_0(z) \prod_{k=1}^{i-1} f_k(z)E_k(z)E_i(z) + f_0(z)g_0(z)E_1(z)L_0(z) \\
+ g'_0(z) \prod_{k=1}^{j-1} g'_k(z)E'_k(z)E'_j(z) + f'_0(z)g'_0(z)E'_1(z)L_0(z).
\end{aligned}$$

Al despejar L_0 se obtiene claramente la FG. \square

Corolario 4.1.22. Si para todo entero $i \geq 0$, $f_i(z) = f(z) = f'_i(z)$, $g_i(z) = g(z) = g'_i(z)$ y $h_i(z) = h(z) = h'_i(z)$ en el Corolario 4.1.21, entonces se obtiene la FG

$$Db_{i,j}(z) = \frac{f^i(z)B^i(z) + g^j(z)B^j(z)}{1 - h(z) - 2f(z)g(z)B(z)} = (f^i(z)B^i(z) + g^j(z)B^j(z))B_b(z),$$

donde $B(z)$ es la FG del Corolario 3.3.2 y $B_b(z)$ es la FG del Corolario 3.3.17. Si $h(z) = 0$ entonces se obtiene la FG

$$Db_{i,j}(z) = \frac{f^i(z)M_{Dyck}^i(z) + g^j(z)M_{Dyck}^j(z)}{1 - 2f(z)g(z)M_{Dyck}(z)} = (f^i(z)M_{Dyck}^i(z) + g^j(z)M_{Dyck}^j(z))B_b(z),$$

donde $M_{Dyck}(z)$ es la FG del Corolario 3.3.8 y $B_b(z)$ es la FG (3.20) del Corolario 3.3.17.

Ejemplo 4.1.23. Si para todo entero $i \geq 0$, $f_i(z) = z = f'_i(z) = g_i(z) = g'_i(z) = h_i(z) = h'_i(z)$, en la FG $Db_{i,j}(z)$, se obtiene la FG que cuenta las trayectorias bilaterales de Motzkin de altura i o $-j$, es decir que terminan en el punto (n, i) o $(n, -j)$.

$$Db_{i,j}(z) = \frac{z^i M(z)^i + z^j M(z)^j}{1 - z - 2z^2 M(z)},$$

donde $M(z)$ es la FG de los números de Motzkin. En la Figura 4.13 se muestran las trayectorias bilaterales de Motzkin de altura 2 o -3 y de longitud 4.

Para $i = 2$ y $j = 3$ se tiene que

$$Db_{2,3}(z) = \frac{z^2 M(z)^2 + z^3 M(z)^3}{1 - z - 2z^2 M(z)} = z^2 + 4z^3 + 14z^4 + 45z^5 + 140z^6 + 427z^7 + 1288z^8 + \dots,$$

la cual corresponde con la sucesión A005775, sin embargo, esta interpretación no aparecía en [67].

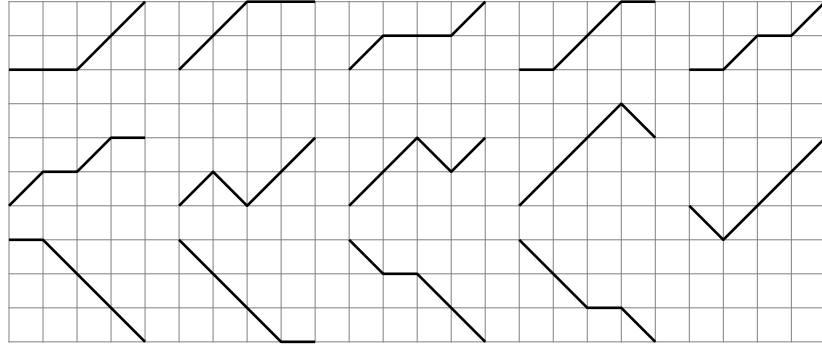


Figura 4.13: Trayectorias bilateral de Motzkin de altura 2 o -3 y de longitud 4.

4.2. Operador INI

Definición 4.2.1. Dado un autómata lineal de conteo $\mathcal{M}_c = (G, E)$, donde $G = (V, A, n, F)$. Definimos el operador $\text{INI}_r : \mathcal{M}_c^* \rightarrow \mathcal{M}_c^*$, como $\text{INI}_r(\mathcal{M}_c) = \mathcal{M}'_c$, donde $\mathcal{M}'_c = (G', E)$ está definido como $G' = (V, A, r, F + r)$, donde $F + r = \{f + r : f \in F\}$.

En otras palabras este operador redefine el estado inicial del autómata de conteo dado.

Ejemplo 4.2.2. $\text{INI}_r(\mathcal{M}_{\text{Lin}})$ aparece en la Figura 4.14. Por facilidad vamos a redefinir los estados del autómata como se muestran en la Figura 4.15. Este autómata lo denotaremos por $\mathcal{M}_{\text{Lin}}^{(r)}$.

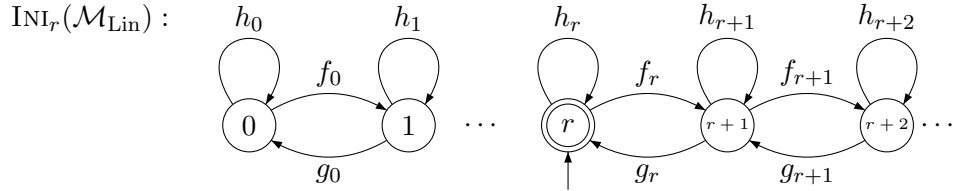


Figura 4.14: Autómata infinito lineal de conteo $\text{INI}_r(\mathcal{M}_{\text{Lin}})$.

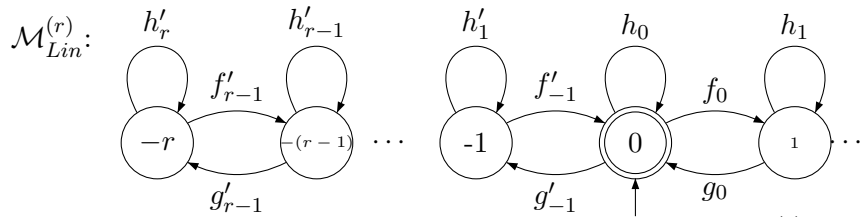


Figura 4.15: Autómata infinito lineal de conteo $\mathcal{M}_{\text{Lin}}^{(r)}$.

Si aplicamos el operador INI_r a $\mathcal{M}_{\text{BLin}}$ el autómata que resulta es claramente isomorfo a un autómata bilineal, así que no es tan interesante estudiarlo.

4.2.1. Función Generatriz Ordinaria de $\mathcal{M}_{Lin}^{(r)}$

Definición 4.2.3. Para enteros $r \geq i \geq 0$, se define la fracción continua $E_{i,r}(z)$ como

$$E_{i,r}(z) = \frac{1}{1 - h_i(z) - \frac{f_i(z)g_i(z)}{1 - h_{i+1}(z) - \frac{f_{i+1}(z)g_{i+1}(z)}{\vdots \frac{f_{r-1}g_{r-1}}{1 - h_r}}}}.$$

Teorema 4.2.4. La función generatriz del autómata $\mathcal{M}_{Lin}^{(r)}$, ver Figura 4.15, es

$$K_r(z) = \frac{1}{1 - h_0(z) - f_0(z)g_0(z)E_1(z) - f'_0(z)g'_0(z)E'_{1,r}(z)}, \quad (4.19)$$

donde $E_1(z)$ es la FG de la Definición 3.3.12.

Demostración. El autómata $\mathcal{M}_{Lin}^{(r)}$ es equivalente al autómata de la Figura 4.16.

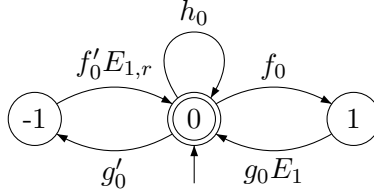


Figura 4.16: Autómata equivalente a $\mathcal{M}_{Lin}^{(r)}$.

Por lo tanto, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones entre FGs:

$$\begin{cases} L_0 = h_0 L_0 + f_0 L_1 + g'_0 L'_1 + 1 \\ L_1 = g_0 E_1 L_0 \\ L'_1 = f'_0 E_{1,r} L_0. \end{cases}$$

Al despejar L_0 del sistema de ecuaciones se obtiene la FG $K_r(z)$. □

Corolario 4.2.5. Si para todo entero $i \geq 0$, $f_i(z) = f(z)$, $g_i(z) = g(z)$ y $h_i(z) = h(z)$ en $\mathcal{M}_{Lin}^{(r)}$, entonces se obtiene la siguiente FG:

$$K_r(z) = \frac{1}{1 - h(z) - f(z)g(z)(B(z) - B_{1,r}(z))}, \quad (4.20)$$

donde $f(z)$, $g(z)$ y $h(z)$ son transiciones en paralelo y $B(z)$ es la FG del Corolario 3.3.2. Si $h(z) = 0$, la ecuación sigue siendo válida.

Ejemplo 4.2.6. Si $f(z) = z = g(z) = h(z)$ en la FG $K_r(z)$, se obtiene la FG de las trayectorias bilaterales de Motzkin que no pueden pasar por debajo de $y = -r$. Por ejemplo, si $r = 2$, obtenemos lo siguiente FG:

$$\begin{aligned} K_2(z) &= \frac{1}{1 - z - z^2 \left(M(z) - \frac{1}{1 - z - \frac{z^2}{1 - z}} \right)} \\ &= 1 + z + 3z^2 + 7z^3 + 19z^4 + 51z^5 + 140z^6 + 386z^7 + 1071z^8 + 2983z^9 + \dots, \end{aligned}$$

donde $M(z)$ es la FG de las trayectorias de Motzkin. Esta sucesión corresponde a A026325, sin embargo esta interpretación no aparecía en [67].

Teorema 4.2.7. La función generatriz del autómata $\text{FIN}_{\{n\}}(\mathcal{M}_{Lin}^{(r)})$ el cual denotaremos por $\mathcal{M}_{Lin}^{(r,n)}$, ver Figura 4.17, donde $0 < n$, es

$$K_{r,n}(z) = \frac{f_0(z) \prod_{k=1}^{n-1} f_k(z) E_k(z) E_n(z)}{1 - h_0(z) - f_0(z) g_0(z) E_1(z) - f'_0(z) g'_0(z) E'_{1,r}(z)}. \quad (4.21)$$

$\mathcal{M}_{Lin}^{(r,n)}$:

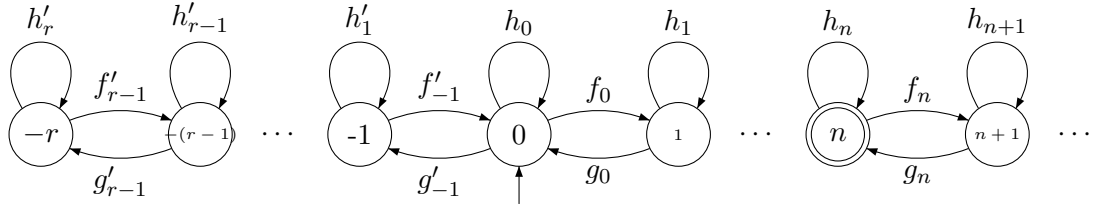


Figura 4.17: Autómata infinito lineal de conteo $\mathcal{M}_{Lin}^{(r,n)}$.

Demostración. La demostración es análoga a la del Teorema 4.1.12. □

Corolario 4.2.8. Si para todo entero $i \geq 0$, $f_i(z) = f(z)$, $g_i(z) = g(z)$ y $h_i(z) = h(z)$ en $\mathcal{M}_{Lin}^{(r,n)}$, entonces se obtiene la siguiente FG:

$$K_{r,n}(z) = \frac{f^n(z) B^n(z)}{1 - h(z) - f(z) g(z) (B(z) - B_{1,r}(z))}, \quad (4.22)$$

donde $f(z)$, $g(z)$ y $h(z)$ son transiciones en paralelo y $B(z)$ es la FG del Corolario 3.3.2. Si $h(z) = 0$, la ecuación sigue siendo válida.

Ejemplo 4.2.9. Si $f(z) = z = g(z) = h(z)$ en la FG $K_{r,n}(z)$, se obtiene la FG de las trayectorias bilaterales de Motzkin de altura $n \geq 0$ y que no pueden pasar por debajo de $y = -r$.

Por ejemplo, si $r = 2 = n$, obtenemos lo siguiente FG:

$$K_{2,2}(z) = \frac{z^2 M^2(z)}{1 - z - z^2 \left(M(z) - \frac{1}{1 - z - \frac{z^2}{1 - z}} \right)}$$

$$= z^2 + 3z^3 + 10z^4 + 30z^5 + 90z^6 + 266z^7 + 783z^8 + 2295z^9 + \dots,$$

donde $M(z)$ es la FG de las trayectorias de Motzkin. Esta sucesión corresponde a A026327, sin embargo, esta interpretación no aparecía.

Los autómatas definidos en esta sección van a ser de gran importancia para estudiar algunos arreglos numéricos, ver Capítulo 5.

4.3. Operador DELETE

Definición 4.3.1. Dado un autómata lineal de conteo $\mathcal{M}_c = (\mathcal{M}, E)$, donde $G = (V, A, n, F)$. Definimos el operador $\text{DELETE}(D_-, D_\curvearrowright, D_\curvearrowleft): \mathcal{M}_c^* \rightarrow \mathcal{M}_c^*$, denotado por $D_E(D_-, D_\curvearrowright, D_\curvearrowleft)$, como $D_E(D_-, D_\curvearrowright, D_\curvearrowleft)(\mathcal{M}_c) = \mathcal{M}'_c$, donde $\mathcal{M}'_c = (G', E')$ está definido por $G' = (V, A', n, F)$ y $A' = (A'_-, A'_\curvearrowright, A'_\curvearrowleft)$, con $A'_- = A_- \setminus D_-$, $A'_\curvearrowright = A_\curvearrowright \setminus D_\curvearrowright$, $A'_\curvearrowleft = A_\curvearrowleft \setminus D_\curvearrowleft$. Además, $E' = (E'_-, E'_\curvearrowright, E'_\curvearrowleft) \subseteq E$, donde

- $E'_- = \{h_i(z) \in E_- : i \in A'_-\}$.
- $E'_\curvearrowright = \{f_i(z) \in E_\curvearrowright : i \in A'_\curvearrowright\}$.
- $E'_\curvearrowleft = \{g_i(z) \in E_\curvearrowleft : i \in A'_\curvearrowleft\}$.

Este operador lo que hace es eliminar aristas del autómata y mantener las mismas ponderaciones o etiquetas de las aristas que no fueron eliminadas. El autómata resultante puede ser disconexo, en este caso los vértices aislados no aportan información y por lo tanto no aparecen en el grafo.

Ejemplo 4.3.2. Sea $D_E(2\mathbb{N}, \emptyset, \emptyset)(\mathcal{M}_{\text{Lin}}) = \mathcal{M}_{\mathbb{I}}$, el cual está representado en la Figura 4.18. Similarmente, $D_E(2\mathbb{N} + 1, \emptyset, \emptyset)(\mathcal{M}_{\text{Lin}}) = \mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, está representado en la Figura 4.19.

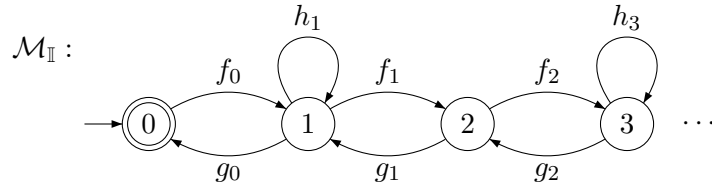


Figura 4.18: Autómata infinito lineal de conteo $\mathcal{M}_{\mathbb{I}}$.

Ejemplo 4.3.3. Sea $D_E(\{i\}, \emptyset, \emptyset)(\mathcal{M}_{\text{Lin}}) = \mathcal{M}_{\text{Lin} \setminus i}$, el cual se obtiene a partir de \mathcal{M}_{Lin} eliminando el bucle del vértice i .

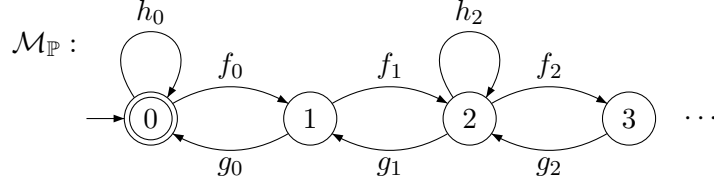


Figura 4.19: Autómata infinito lineal de conteo $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$.

4.3.1. Funciones Generatrices Ordinarias de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, $\mathcal{M}_{\mathbb{I}}$ y $\mathcal{M}_{Lin \setminus i}$

Corolario 4.3.4. *Las funciones generatrices de los autómatas $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, $\mathcal{M}_{\mathbb{I}}$ y $\mathcal{M}_{Lin \setminus i}$ se pueden representar por medio de las siguientes fracciones continuas:*

$$M_{\mathbb{P}}(z) = \frac{1}{1 - h_0(z) - \frac{f_0(z)g_0(z)}{1 - \frac{f_1(z)g_1(z)}{1 - \frac{f_2(z)g_2(z)}{\ddots}}}},$$

$$M_{\mathbb{I}}(z) = \frac{1}{1 - \frac{f_0(z)g_0(z)}{1 - h_1(z) - \frac{f_1(z)g_1(z)}{1 - \frac{f_2(z)g_2(z)}{\ddots}}}},$$

$$M_{Lin \setminus i}(z) = \frac{1}{1 - h_0(z) - \frac{f_0(z)g_0(z)}{\vdots \frac{f_{i-1}(z)g_{i-1}(z)}{1 - h_{i-1}(z) - \frac{f_i(z)g_i(z)E_{i+1}(z)}{1 - f_i(z)g_i(z)E_{i+1}(z)}}}},$$

donde $f_i(z)$, $g_i(z)$ y $h_i(z)$ son transiciones en paralelo para todo entero $i \geq 0$.

Demostración. Estas FGs se obtienen directamente del Teorema 3.3.1. □

El autómata $\mathcal{M}_{Lin \setminus i}$ se puede generalizar como $\mathcal{M}_{Lin \setminus H} = D_E(H, \emptyset, \emptyset)(\mathcal{M}_{Lin})$, donde $H = \{i_1, i_1, \dots, i_l\} \subseteq \mathbb{N}$, es decir se obtiene a partir de \mathcal{M}_{Lin} eliminando los bucles de los vértices i_1, i_1, \dots, i_l .

Corolario 4.3.5. *La FG del autómata $\mathcal{M}_{Lin \setminus H}$ se pueden representar por la siguiente fracción continua.*

$$M_{Lin \setminus H}(z) = \frac{1}{1 - h_0(z) [0 \notin H] - \frac{f_0(z) g_0(z)}{1 - h_1(z) [1 \notin H] - \frac{f_1(z) g_1(z)}{1 - h_2(z) [2 \notin H] - \frac{f_2(z) g_2(z)}{\ddots}}}},$$

donde $f_i(z), g_i(z)$ y $h_i(z)$ son transiciones en paralelo para todo entero $i \geq 0$.

4.3.2. Trayectorias de Motzkin con Restricciones sobre sus Pasos Horizontales

En esta sección vamos a mostrar una relación que existe entre los autómatas de conteo $\mathcal{M}_{Lin \setminus i}, \mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ y $\mathcal{M}_{\mathbb{I}}$, y las trayectorias de Motzkin sin pasos horizontales sobre ciertos niveles.

Corolario 4.3.6. *Si para todo entero $i \geq 0$, $f_i(z) = f(z), g_i(z) = g(z)$ y $h_i(z) = h(z)$ en $\mathcal{M}_{Lin \setminus i}$, entonces se obtiene que su FG $H_i(z)$ satisface las siguientes relaciones:*

$$H_0(z) = \frac{1}{1 - f(z)g(z)B(z)} = \frac{1}{1 - \frac{f(z)g(z)}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{\ddots}}}}}, \quad (4.23)$$

donde $B(z)$ es el FG del Corolario 3.3.2, y

$$H_i(z) = \frac{1}{1 - h(z) - f(z)g(z)H_{i-1}(z)}, \quad (4.24)$$

para todo entero $i \geq 1$. Para $i = 0$ se tiene que

$$H_0(z) = \frac{1 + h(z) - \sqrt{(1 - h(z))^2 - 4f(z)g(z)}}{2(h(z) + f(z)g(z))} \quad (4.25)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \binom{i+n+2k-1}{i} (f(z)g(z))^{n+k} h^i(z), \quad (4.26)$$

y

$$h_k = \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j \sum_{l=0}^i f_l g_{i-l} b_{j-i} h_{k-j}, \quad (4.27)$$

donde $h_n = [z^n] H_0(z)$, $f_n = [z^n] f(z)$, $g_n = [z^n] g(z)$ y $b_n = [z^n] B(z)$. Además,

$$(h(z) + f(z)g(z))H(z) = h(z) + f(z)g(z)B(z). \quad (4.28)$$

Demostración. Las Ecuaciones (4.23), (4.24) y (4.25) se obtienen del Teorema 3.3.1 y del Corolario 3.3.2. La Ecuación (4.26) se obtiene de observar que

$$\begin{aligned} H_0(z) &= \frac{1}{1 - f(z)g(z)B(z)} = \frac{1}{1 - f(z)g(z)\frac{C(u)}{1-h(z)}} = \frac{1}{1 - (1-h(z))uC(u)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} ((1-h(z))uC(u))^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f(z)g(z)}{1-h(z)} \right)^n C^n(u), \end{aligned}$$

donde $u = f(z)g(z)/(1-h(z))^2$ y $C(z)$ es la FG de los números de Catalan. Utilizando la FG de las potencias de los números Catalan (ver Ec. 5.70 de [39]), se tiene que

$$\begin{aligned} H_0(z) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \frac{(f(z)g(z))^{n+k}}{(1-h(z))^{n+2k}} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \binom{i+n+2k-1}{i} (f(z)g(z))^{n+k} h^i(z). \end{aligned}$$

La Ecuación (4.27) se obtiene del hecho que $H_0(z) = 1 + f(z)g(z)B(z)H_0(z)$.

Para la Ecuación (4.28) se utiliza que

$$2f(z)g(z)B(z) + 2h(z) = 1 + h(z) - \sqrt{(1-h(z))^2 - 4f(z)g(z)}.$$

□

Ejemplo 4.3.7. Si $f(z) = g(z) = h(z) = z$ en el Corolario 4.3.6 se obtiene la FG H_i de las trayectorias de Motzkin sin pasos horizontales sobre el nivel i . Estas trayectorias satisfacen que $H_i(z) = 1 + zH_i(z) + z^2H_{i-1}(z)H_i(z)$, luego

$$h_n^{(i)} = h_{n-1}^{(i)} + \sum_{j=0}^{n-2} h_j^{(i-1)} h_{n-j}^{(i)},$$

donde $h_n^{(i)} = [z^n] H_i(z)$.

En particular para $i = 0$ se obtiene la FG de las trayectorias de Motzkin sin pasos horizontales sobre el eje x , la cual es enumerada por los números de Riordan r_n , ver Ejemplo 3.1.2. Además,

$$r_s = \sum_{n=1}^s \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{s-2n}{2} \rfloor} \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \binom{s-n-1}{s-2n-2k}, \quad \text{con } s \geq 2 \text{ y}$$

$$h_n^{(1)} = h_{n-1}^{(1)} + \sum_{j=0}^{n-2} r_j h_{n-j}^{(1)}.$$

En el Cuadro 4.8 se muestran las sucesiones para $i = 0, 1, 2, 3$ y 4 . Algunas de estas sucesiones no aparecían en la [67].

i	Secuencia	A-Número
0	1, 0, 1, 3, 6, 15, 36, 91, 232, ...	A005043 (Números de Riordan)
1	1, 1, 2, 3, 6, 11, 23, 48, 107, 244, ...	A217312
2	1, 1, 2, 4, 9, 20, 46, 106, 248, 584, ...	A252354
3	1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 126, 316, 799, ...	A257386
4	1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 834, ...	A257387

Cuadro 4.8: Sucesiones obtenidas para $i = 0, 1, 2, 3$ y 4 , Ejemplo 4.3.7.

Ejemplo 4.3.8. Si $f(z) = g(z) = z$ y $h(z) = kz^l$ en el Corolario 4.3.6, se obtiene la FG $R_{(i,k,l)}(z)$ que cuenta las trayectorias generalizadas de Motzkin k -coloreadas con $H = (l, 0)$ y sin pasos horizontales sobre el nivel i .

$$R_{(0,k,l)}(z) = \frac{1 + kz^l - \sqrt{(1 - kz^l)^2 - 4z^2}}{2(kz^l + z^2)} = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{1 - kz^l - \frac{z^2}{1 - kz^l - \frac{z^2}{\ddots}}}}$$

y

$$R_{(i,k,l)}(z) = \frac{1}{1 - kz^l - z^2 R_{(i-1,k,l)}(z)}, \quad i \geq 1.$$

En particular para $l = 1$, la FG satisface que $R_{(i,k,1)}(z) = 1 + kz R_{(i,k,1)} + z^2 R_{(i,k,1)} R_{(i-1,k,1)}$, luego

$$r_n^{(i,k,1)} = k r_{n-1}^{(i,k,1)} + \sum_{j=0}^{n-2} r_j^{(i-1,k,1)} r_{n-j}^{(i,k,1)},$$

donde $r_n^{(i,k,1)} = [z^n] R_{(i,k,1)}(z)$.

En particular para $i = 0$, $R_{(0,k,1)}(z)$ es la FG de las trayectorias de Motzkin k -coloreados sin pasos horizontales sobre el eje x .

$$R_{(0,k,1)}(z) = \frac{1 + kz - \sqrt{(1 - kz)^2 - 4z^2}}{2z(k + z)} = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{1 - kz - \frac{z^2}{1 - kz - \frac{z^2}{\ddots}}}}$$

y

$$r_s^{(0,k,1)} = \sum_{n=1}^s \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s-2n}{2} \rfloor} \frac{n}{n+2j} \binom{n+2j}{j} \binom{s-n-1}{s-2n-2j} k^{s-2n-2j}, \quad s \geq 2.$$

En efecto, a partir de la Ecuación (4.26) se obtiene que

$$R_{(0,k,1)}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \binom{i+n+2k-1}{i} z^{2n+2k+i}.$$

Haciendo $t = 2n + 2k + i$

$$R_{(0,k,1)}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=2n+2k}^{\infty} \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \binom{t-n-1}{t-2n-2k} z^t.$$

En particular si $k = 2$, se obtiene que

$$\begin{aligned} R_{(0,2,1)}(z) &= \frac{1 + 2z - \sqrt{1 - 4z}}{2z(2 + z)} \\ &= 1 + z^2 + 2z^3 + 6z^4 + 18z^5 + 57z^6 + 186z^7 + \dots \end{aligned}$$

la cual corresponde con los números de Fine, A000957. Algunas objetos combinatorios enumerados por estos números se pueden encontrar en [24] .

Por otro lado, si $k = 1$ se obtiene la FG $R_{(i,1,l)}(z)$ que cuenta las trayectorias de Motzkin generalizadas sin pasos horizontales sobre el nivel i . La FG satisface que

$$R_{(i,1,l)}(z) = 1 + z^l R_{(i,1,l)} + z^2 R_{(i,1,l)} R_{(i-1,1,l)},$$

luego

$$r_n^{(i,1,l)} = r_{n-l}^{(i,1,l)} + \sum_{j=0}^{n-2} r_j^{(i-1,1,l)} r_{n-j}^{(i,1,l)}.$$

En particular para $i = 0$, $R_{(0,1,l)}(z)$ es la FG de las trayectorias generalizadas de Motzkin sin pasos horizontales sobre el eje x .

$$R_{(0,1,l)}(z) = \frac{1 + z^k - \sqrt{(1 - z^l)^2 - 4z^2}}{2(z^l + z^2)}.$$

En el Cuadro 4.9 mostramos las secuencias que se obtienen para $i = 0, 1$, $k = 1, 2, 3, 4$ y $l = 1, 2$. Algunas de estas sucesiones no existían en [67] o no tenían esta interpretación combinatoria.

i	k	l	Secuencia	A-Número
0	1	1	1, 0, 1, 1, 3, 6, 15, 36, 91, 232, 603,...	A005043 (Números de Riordan)
0	2	1	1, 0, 1, 2, 6, 18, 57, 186, 622, 2120,...	A000957 (Números de Fine)
0	3	1	1, 0, 1, 3, 11, 42, 167, 684, 2867, 12240,...	A117641
0	4	1	1, 0, 1, 4, 18, 84, 405, 2004, 10126, 52048,...	A185132
1	1	1	1, 1, 2, 3, 6, 11, 23, 48, 107, 244,...	A217312
1	2	1	1, 2, 5, 12, 30, 76, 197, 522, 1418,...	A253831
1	3	1	1, 3, 10, 33, 110, 369, 1247, 4248, 14603,...	A257363
0	1	2	1, 0, 1, 0, 3, 0, 11, 0, 45, 0, 197, 0, 903, 0, 4279,...	A001003 (N. Super-Catalan)
0	2	2	1, 0, 1, 0, 4, 0, 19, 0, 100, 0, 562, 0, 3304, 0, 20071, ...	A007564
0	3	2	1, 0, 1, 0, 5, 0, 29, 0, 185, 0, 1257, 0, 8925, 0, 65445, ...	A059231
1	1	2	1, 0, 2, 0, 5, 0, 15, 0, 52, 0, 201, 0, 841, 0, 3726,...	A224071
1	2	2	1, 0, 3, 0, 10, 0, 37, 0, 152, 0, 690, 0, 3422, 0, 18257,...	A250307
1	3	2	1, 0, 4, 0, 17, 0, 77, 0, 374, 0, 1959, 0, 11085, 0, 67500,...	A257072

Cuadro 4.9: Sucesiones obtenidas para $i = 0, 1$, $k = 1, 2, 3, 4$ y $l = 1, 2$, Ejemplo 4.3.8

En general para $i \geq 2$ no se tiene información en [67].

El siguiente corolario generaliza el Corolario 4.3.6.

Corolario 4.3.9. *Si para todo entero $i \geq 0$, $f_i(z) = f(z)$, $g_i(z) = g(z)$ y $h_i(z) = h(z)$ en $\mathcal{M}_{Lin \setminus H}$, entonces se obtiene que su FG $H_H(z)$ satisface la ecuación:*

$$H_H(z) = \frac{a(z) + b(z)\sqrt{c(z)}}{d(z)},$$

donde $a(z), b(z), c(z), d(z) \in \mathbb{Z}[z]$.

Corolario 4.3.10. Si para todo entero $i \geq 0$, $f_i(z) = f(z)$, $g_i(z) = g(z)$ y $h_{2i}(z) = h(z)$ en $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, entonces se obtiene la siguiente FG:

$$M_{\mathbb{P}}(z) = \frac{1 - h(z) - \sqrt{(1 - h(z))(1 - 4f(z)g(z) - h(z))}}{2f(z)g(z)(1 - h(z))} \quad (4.29)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n \binom{m+n}{m} (f(z)g(z))^n (h(z))^m, \quad (4.30)$$

donde C_n es el n -ésimo número de Catalan.

Demostración. En este caso tenemos que el autómata $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ es equivalente al autómata de la Figura 4.20

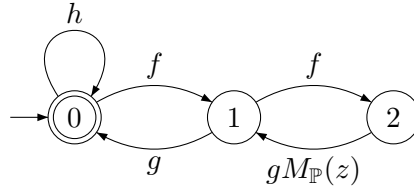


Figura 4.20: Autómata equivalente a $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$.

Por lo tanto, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones entre FGs

$$\begin{cases} M_{\mathbb{P}}(z) = hM_{\mathbb{P}}(z) + fL_1 \\ L_1 = gM_{\mathbb{P}}(z) + fL_2 \\ L_2 = gM_{\mathbb{P}}(z)L_1. \end{cases}$$

Al despejar $M_{\mathbb{P}}(z)$ se obtiene la FG deseada. La Ecuación (4.30) se obtiene de observar que

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{P}}(z) &= \frac{1 - h - \sqrt{(1 - h)^2 - 4fg(1 - h)}}{2fg(1 - h)} \\ &= \frac{1}{1 - h} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4fg}{1 - h}}}{\frac{2fg}{1 - h}} \\ &= \frac{1}{1 - h} C(u), \end{aligned}$$

donde $u = fg/(1 - h)$ y $C(u)$ es la FG de los números de Catalan. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{P}}(z) &= \frac{1}{1 - h(z)} \sum_{n=0}^{\infty} C_n u^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{(f(z)g(z))^n}{(1 - h(z))^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n \binom{m+n}{m} (f(z)g(z))^n (h(z))^m. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.3.11. Si $f(z) = g(z) = h(z) = z$ en el Corolario 4.3.10 se obtiene la FG $M_{\mathbb{P}}(z)$ de las trayectorias de Motzkin sin pasos horizontales sobre los niveles impares.

$$M_{\mathbb{P}}(z) = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2 + 4z^3}}{2z^2(1 - z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n \binom{m+n}{m} z^{2n+m} \\ = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 6z^4 + 11z^5 + 23z^6 + 47z^7 + \dots$$

Además,

$$[z^t] M_{\mathbb{P}}(z) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} C_n \binom{t-n}{n},$$

la cual corresponde a la sucesión A090344.

Ejemplo 4.3.12. Si $f(z) = g(z) = z$ y $h(z) = kz^l$ con $k, l \in \mathbb{Z}^+$ en el Corolario 4.3.10, se obtiene la FG $M_{\mathbb{P}}(z)$ de las trayectorias generalizadas de Motzkin k -coloreadas, con pasos horizontales de longitud l y sin pasos horizontales sobre los niveles impares.

$$M_{\mathbb{P}}^{(k,l)}(z) = \frac{1 - kz^l - \sqrt{(1 - kz^l)(1 - kz^l - 4z^2)}}{2z^2(1 - kz^l)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n \binom{m+n}{m} k^m z^{2n+lm}.$$

Para $l = 1$ se obtiene que

$$[z^t] M_{\mathbb{P}}^{(k,1)}(z) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} k^{t-2n} C_n \binom{t-n}{n}.$$

En el Cuadro 4.10 mostramos las secuencias que se obtienen para $k = 1, 2, 3, 4$ y $l = 1, 2, 3$. Algunas de estas secuencias no aparecían en [67].

l	k	Secuencia	A-Número
1	1	1, 1, 2, 3, 6, 11, 23, 47, 102, 221, 493,...	A090344
1	2	1, 2, 5, 12, 30, 76, 197, 520, 1398, 3820, ...	A086622
1	3	1, 3, 10, 33, 110, 369, 1247, 4245, 14558,...	A257178
1	4	1, 4, 17, 72, 306, 1304, 5573, 23888, 102702,...	A257388
2	1	1, 0, 2, 0, 5, 0, 15, 0, 51, 0, 188, 0, 731, 0, 2950,...	A007317
2	2	1, 0, 3, 0, 10, 0, 37, 0, 150, 0, 654, 0, 3012, 0, 14445,...	A064613
2	3	1, 0, 4, 0, 17, 0, 77, 0, 371, 0, 1890, 0, 10095, 0, 56040,...	A104455
2	4	1, 0, 5, 0, 26, 0, 141, 0, 798, 0, 4706, 0, 28820, 0, 182461,...	A104498
3	1	1, 0, 1, 1, 2, 2, 6, 6, 17, 21, 54, 74, 183, 272, 644, 1025,...	A257389
3	2	1, 0, 1, 2, 2, 4, 9, 12, 26, 48, 90, 172, 348, 664, 1349,...	A257515

Cuadro 4.10: Sucesiones obtenidas para $k = 1, 2, 3, 4$ y $l = 1, 2, 3$, Ejemplo 4.3.12

Corolario 4.3.13. Si para todo entero $i \geq 0$, $f_i(z) = f(z)$, $g_i(z) = g(z)$ y $h_{2i+1}(z) = h(z)$ en $\mathcal{M}_{\mathbb{I}}$, entonces se obtiene la siguiente FG:

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{I}}(z) &= \frac{1}{1 - f(z)g(z)M_{\mathbb{P}}(z)} = \frac{1 - h(z) - \sqrt{(1 - h(z))(1 - 4f(z)g(z) - h(z))}}{2f(z)g(z)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n \binom{m+n-1}{m} (f(z)g(z))^n (h(z))^m, \end{aligned}$$

donde $M_{\mathbb{P}}(z)$ es la FG del Corolario 4.3.10 y C_n es el n -ésimo número de Catalan.

Demostración. La demostración es análoga a la del Corolario 4.3.10 □

Ejemplo 4.3.14. Si $f(z) = g(z) = h(z) = z$ en el Corolario 4.3.13 se obtiene la FG de las trayectorias de Motzkin sin pasos horizontales en los niveles pares.

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{I}}(z) &= \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2 + 4z^3}}{2(1 - z)z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \binom{m+n-1}{m} z^{2n+m} \\ &= 1 + z^2 + z^3 + 3z^4 + 5z^5 + 12z^6 + 24z^7 + 55z^8 + \dots \end{aligned}$$

Además,

$$[z^t] M_{\mathbb{I}}(z) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} C_n \binom{t-n-1}{n-1},$$

la cual corresponde con la sucesión A090345.

Ejemplo 4.3.15. Si $f(z) = g(z) = z$ y $h(z) = kz^l$ con $k, l \in \mathbb{Z}^+$ en el Corolario 4.3.13, se obtiene la FG $M_{\mathbb{I}}(z)$ de las trayectorias generalizadas de Motzkin k -coloreados, con pasos horizontales de longitud l y sin pasos horizontales sobre los niveles pares.

$$M_{\mathbb{I}}^{(k,l)}(z) = \frac{1 - kz^l - \sqrt{(1 - kz^l)(1 - kz^l - 4z^2)}}{2z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n \binom{m+n-1}{m} k^m z^{2n+lm}.$$

Para $l = 1$ se obtiene que

$$[z^t] M_{\mathbb{I}}^{(k,1)}(z) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} k^{t-2n} C_n \binom{t-n-1}{n-1}.$$

En el Cuadro 4.11 mostramos las secuencias que se obtienen para $k = 1, 2, 3, 4$ y $l = 1, 2, 3$. Algunas de estas sucesiones no aparecían o no tenían esta interpretación combinatoria en [67].

l	k	Secuencia	A-Número
1	1	1, 0, 1, 1, 3, 5, 12, 24, 55, 119, 272,...	A090345
1	2	1, 0, 1, 2, 6, 16, 45, 126, 358, 1024, 2954, ...	A025266
1	3	1, 0, 1, 3, 11, 39, 140, 504, 1823, 6621, 24144,...	A257290
1	4	1, 0, 1, 4, 18, 80, 357, 1596, 7150, 32096, 144362,...	A257390
2	1	1, 0, 1, 0, 3, 0, 10, 0, 36, 0, 137, 0, 543, 0, 2219, 0, 9285,...	A002212
2	2	1, 0, 1, 0, 4, 0, 17, 0, 76, 0, 354, 0, 1704, 0, 8421, 0, 42508,...	A005572
2	3	1, 0, 1, 0, 5, 0, 26, 0, 140, 0, 777, 0, 4425, 0, 25755, 0, 152675,...	A182401
3	1	1, 0, 1, 0, 2, 1, 5, 4, 15, 15, 48, 57, 162,...	A257516
3	2	1, 0, 1, 0, 2, 2, 5, 8, 18, 30, 66, 120, 252,...	A257517

Cuadro 4.11: Sucesiones obtenidas para $k = 1, 2, 3, 4$ y $l = 1, 2, 3$, Ejemplo 4.3.15.

4.3.3. Funciones Generatrices Ordinarias de $\mathcal{M}_{b\mathbb{P}}$, $\mathcal{M}_{b\mathbb{I}}$ y $\mathcal{M}_{bLin \setminus i}$

Sea $D_E(2\mathbb{N}, \emptyset, \emptyset)(\mathcal{M}_{BLin}) = \mathcal{M}_{b\mathbb{I}}$, el cual está representado en la Figura 4.21. Similarmente, $D_E(2\mathbb{N} + 1, \emptyset, \emptyset)(\mathcal{M}_{BLin}) = \mathcal{M}_{b\mathbb{P}}$, está representado en la Figura 4.22.

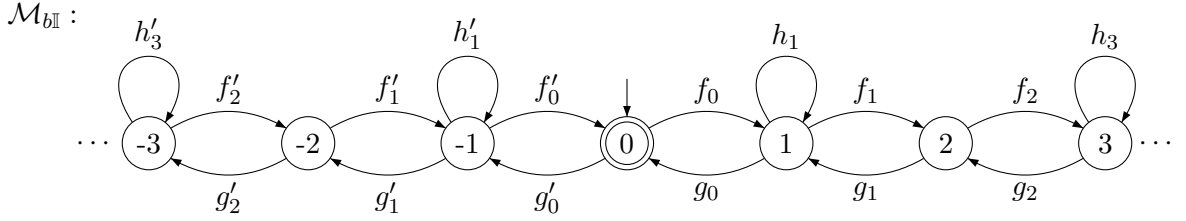


Figura 4.21: Autómata infinito lineal de conteo $\mathcal{M}_{b\mathbb{I}}$.

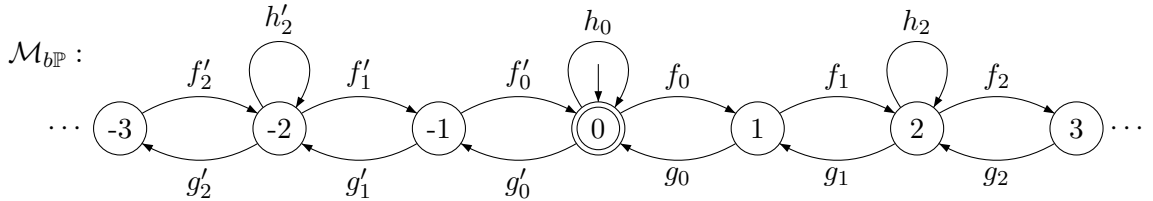


Figura 4.22: Autómata infinito lineal de conteo $\mathcal{M}_{b\mathbb{P}}$.

Sea $D_E(\{i\}, \emptyset, \emptyset)(\mathcal{M}_{BLin}) = \mathcal{M}_{bLin \setminus i}$, el cual se obtiene a partir de \mathcal{M}_{bLin} eliminando el bucle del vértice i .

Definición 4.3.16. Para $i \geq 0$ se define la fracción continua $E_{i,A}(z)$ como:

$$E_{i,A}(z) = \frac{1}{1 - h_i(z) [i \in A] - \frac{f_i(z) g_i(z)}{1 - h_{i+1}(z) [i+1 \in A] - \frac{f_{i+1}(z) g_{i+1}(z)}{1 - h_{i+2}(z) [i+2 \in A] - \frac{f_{i+2}(z) g_{i+2}(z)}{\ddots}}}}.$$

Corolario 4.3.17. Las funciones generatrices de los autómatas $\mathcal{M}_{b\mathbb{P}}$ y $\mathcal{M}_{b\mathbb{I}}$ se pueden representar por medio de las siguientes fracciones continuas, respectivamente.

$$M_{b\mathbb{P}}(z) = \frac{1}{1 - h_0(z) - f_0(z) g_0(z) E_{1,2\mathbb{N}} - f'_0(z) g'_0(z) E'_{1,2\mathbb{N}}},$$

$$M_{b\mathbb{I}}(z) = \frac{1}{1 - f_0(z) g_0(z) E_{1,2\mathbb{N}+1} - f'_0(z) g'_0(z) E'_{1,2\mathbb{N}+1}},$$

donde $f_i(z), g_i(z)$ y $h_i(z)$ son transiciones en paralelo para todo entero $i \geq 0$.

Corolario 4.3.18. Consideremos las siguientes FGs

$$Hb_0(z) = \frac{1}{1 - f_0(z)g_0(z)E(z) - f'_0(z)g'_0(z)E'(z)}$$

y

$$Hb_i(z) = \frac{1}{1 - h_i(z) - f_i(z)g_i(z)Hb_{i-1}(z)}, \quad i \geq 1.$$

Entonces la FG del autómata $\mathcal{M}_{bLin \setminus i}$ es

$$M_{bLin \setminus i}(z) = \frac{1}{1 - h_0(z) - f_0(z) g_0(z) Hb_{i-1}(z) - f'_0(z) g'_0(z) E'_1(z)}.$$

En general las aplicaciones son análogas a las de la sección anterior.

4.4. Operador JUMP

Definición 4.4.1. Sean $i, j \in \mathbb{Z}$ tales que $j - i \geq 2$. Dado un autómata lineal de conteo $\mathcal{M}_c = (\mathcal{M}, E)$ y una FG $J(z)$. Definimos el operador $\text{JUMP}_{i \rightarrow j}(\mathcal{M}_c) = \mathcal{M}'_c$, donde \mathcal{M}'_c se obtiene a partir de \mathcal{M}_c añadiendo la arista que va del vértice i al vértice j , etiquetada por la FG $J(z)$.

Ejemplo 4.4.2. $\text{JUMP}_{(i \rightarrow j)}(\mathcal{M}_{\text{Lin}}) = \mathcal{M}_{\text{Lin}(i \rightarrow j)}$ está representado en la Figura 4.23.

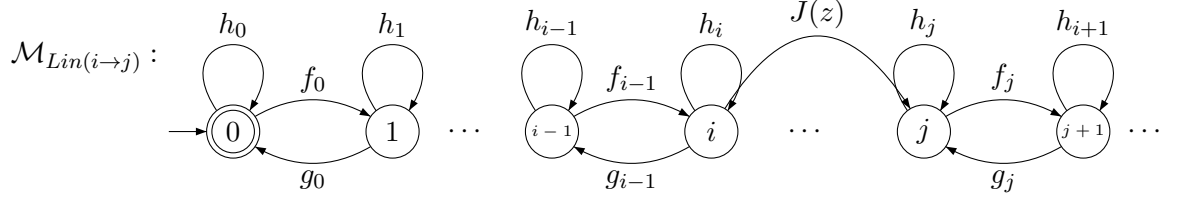


Figura 4.23: Autómata infinito lineal de conteo $\mathcal{M}_{\text{Lin}(i \rightarrow j)}$.

Definición 4.4.3. Sea $f_i(z)$ una función generatriz para todo entero $i \geq 0$ y $l, m \in \mathbb{Z}^+$ con $l \leq m$. Entonces definimos

$$f_{[l, \dots, m]}(z) = \prod_{i=l}^m f_i(z).$$

Teorema 4.4.4. La función generatriz del autómata $\mathcal{M}_{\text{Lin}(i \rightarrow j)}$, ver Figura 4.23, es

$$L(z) = \frac{1}{1 - h_0(z) - \frac{f_0(z)g_0(z)}{1 - h_1(z) - \frac{f_1(z)g_1(z)}{\vdots \frac{f_{i-1}(z)g_{i-1}(z)}{1 - h_i(z) - \frac{f_i(z)g_i(z)E_{i+1}(z) - J(z)g_{[i, \dots, j-1]}(z)E_{[i+1, \dots, j]}(z)}{1 - h_{j-1}(z) - \frac{f_{j-1}(z)g_{j-1}(z)E_j(z)}{1 - h_j(z) - \frac{f_j(z)g_j(z)E_{j+1}(z)}{1 - h_{j+1}(z) - \dots}}}}}}}} \quad (4.31)$$

donde $f_i(z), g_i(z), h_i(z)$ y $J(z)$ son transiciones en paralelo para todo entero $i \geq 0$.

Demostración. Es claro que el autómata $\mathcal{M}_{\text{Lin}(i \rightarrow j)}$ es equivalente al autómata de la Figura 4.24.

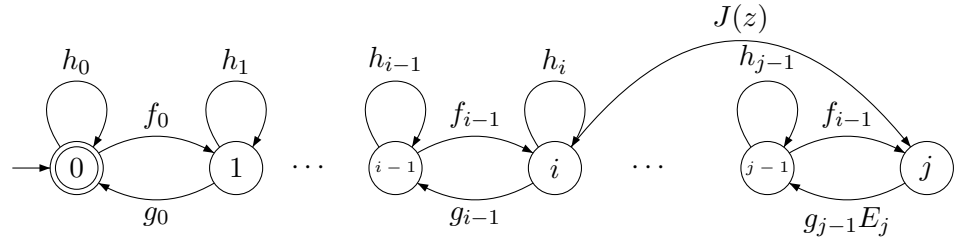


Figura 4.24: Autómata equivalente a $\mathcal{M}_{\text{Lin}(i \rightarrow j)}$.

Sea $j = i + k$ con $k \geq 2$, entonces se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones entre FGs:

$$\begin{cases} L_0 = h_0 L_0 + f_0 L_1 + 1 \\ L_l = g_{l-1} L_{l-1} + h_l L_l + f_l L_{l+1}, \quad 1 \leq l \leq i-1 \\ L_i = g_{i-1} L_{i-1} + h_i L_i + f_i L_{i+1} + J L_j \\ L_s = g_{s-1} L_{s-1} + h_s L_s + f_s L_{s+1}, \quad i+1 \leq s \leq i+k-1 \\ L_j = E_j g_{j-1} L_{j-1}. \end{cases}$$

Sustituyendo reiteradamente en las ecuaciones, se obtiene que $L_s = g_{s-1} E_s L_{s-1}$ para todo $i+1 \leq s \leq i+k-1$. Luego

$$L_i = \frac{g_{i-1}}{1 - h_i - f_i g_i E_{i+1} - J g_{[i, \dots, j-1]} E_{[i+1, \dots, j]}} L_{i-1}.$$

Sustituyendo en las primeras i ecuaciones se obtiene el resultado. \square

4.4.1. Aplicaciones en las Trayectorias de Motzkin sin picos de altura k

Un pico de altura k en una trayectoria en el plano es un punto sobre la trayectoria con ordenada $y = k$, el cual es precedido por un paso $U = (1, 1)$ y seguido inmediatamente por un paso $D = (1, -1)$. Para estudiar trayectorias sin picos de altura k , consideraremos el autómata de conteo $\mathcal{M}_{Lin(k-1 \rightarrow k+1)}$ de la Figura 4.25. En este caso las aristas que parten del vértice $k-1$ al k y del vértice $k-1$ al $k+1$, etiquetadas por $f_{k-1} h_k$ y $f_{k-1} f_k$, son las que restringen que no existan picos de altura k . Los resultados de esta sección generalizan los obtenidos en [31, 56].

$\mathcal{M}_{Lin(k-1 \rightarrow k+1)} :$

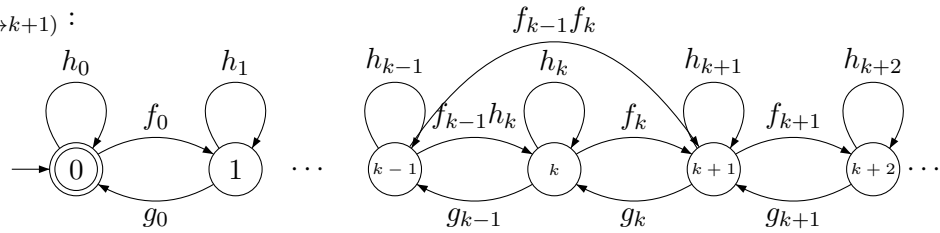


Figura 4.25: Autómata convergente para trayectorias sin picos de altura k .

Teorema 4.4.5. *La función generatriz del autómata $\mathcal{M}_{Lin(k-1 \rightarrow k+1)}$, ver Figura 4.25, es*

$$A_k(z) = \frac{1}{1 - h_0(z) - \frac{f_0(z)g_0(z)}{1 - h_1(z) - \frac{f_1(z)g_1(z)}{1 - h_2(z) - \frac{f_2(z)g_2(z)}{1 - h_3(z) - \frac{f_3(z)g_3(z)}{1 - h_4(z) - \frac{f_4(z)g_4(z)}{1 - h_5(z) - \frac{f_5(z)g_5(z)}{1 - h_6(z) - \frac{f_6(z)g_6(z)}{1 - h_7(z) - \frac{f_7(z)g_7(z)}{1 - h_8(z) - \frac{f_8(z)g_8(z)}{1 - h_9(z) - \frac{f_9(z)g_9(z)}{1 - h_{10}(z) - \frac{f_{10}(z)g_{10}(z)}{1 - h_{11}(z) - \frac{f_{11}(z)g_{11}(z)}{1 - h_{12}(z) - \frac{f_{12}(z)g_{12}(z)}{1 - h_{13}(z) - \frac{f_{13}(z)g_{13}(z)}{1 - h_{14}(z) - \frac{f_{14}(z)g_{14}(z)}{1 - h_{15}(z) - \frac{f_{15}(z)g_{15}(z)}{1 - h_{16}(z) - \frac{f_{16}(z)g_{16}(z)}{1 - h_{17}(z) - \frac{f_{17}(z)g_{17}(z)}{1 - h_{18}(z) - \frac{f_{18}(z)g_{18}(z)}{1 - h_{19}(z) - \frac{f_{19}(z)g_{19}(z)}{1 - h_{20}(z) - \frac{f_{20}(z)g_{20}(z)}{1 - h_{21}(z) - \frac{f_{21}(z)g_{21}(z)}{1 - h_{22}(z) - \frac{f_{22}(z)g_{22}(z)}{1 - h_{23}(z) - \frac{f_{23}(z)g_{23}(z)}{1 - h_{24}(z) - \frac{f_{24}(z)g_{24}(z)}{1 - h_{25}(z) - \frac{f_{25}(z)g_{25}(z)}{1 - h_{26}(z) - \frac{f_{26}(z)g_{26}(z)}{1 - h_{27}(z) - \frac{f_{27}(z)g_{27}(z)}{1 - h_{28}(z) - \frac{f_{28}(z)g_{28}(z)}{1 - h_{29}(z) - \frac{f_{29}(z)g_{29}(z)}{1 - h_{30}(z) - \frac{f_{30}(z)g_{30}(z)}{1 - h_{31}(z) - \frac{f_{31}(z)g_{31}(z)}{1 - h_{32}(z) - \frac{f_{32}(z)g_{32}(z)}{1 - h_{33}(z) - \frac{f_{33}(z)g_{33}(z)}{1 - h_{34}(z) - \frac{f_{34}(z)g_{34}(z)}{1 - h_{35}(z) - \frac{f_{35}(z)g_{35}(z)}{1 - h_{36}(z) - \frac{f_{36}(z)g_{36}(z)}{1 - h_{37}(z) - \frac{f_{37}(z)g_{37}(z)}{1 - h_{38}(z) - \frac{f_{38}(z)g_{38}(z)}{1 - h_{39}(z) - \frac{f_{39}(z)g_{39}(z)}{1 - h_{40}(z) - \frac{f_{40}(z)g_{40}(z)}{1 - h_{41}(z) - \frac{f_{41}(z)g_{41}(z)}{1 - h_{42}(z) - \frac{f_{42}(z)g_{42}(z)}{1 - h_{43}(z) - \frac{f_{43}(z)g_{43}(z)}{1 - h_{44}(z) - \frac{f_{44}(z)g_{44}(z)}{1 - h_{45}(z) - \frac{f_{45}(z)g_{45}(z)}{1 - h_{46}(z) - \frac{f_{46}(z)g_{46}(z)}{1 - h_{47}(z) - \frac{f_{47}(z)g_{47}(z)}{1 - h_{48}(z) - \frac{f_{48}(z)g_{48}(z)}{1 - h_{49}(z) - \frac{f_{49}(z)g_{49}(z)}{1 - h_{50}(z) - \frac{f_{50}(z)g_{50}(z)}{1 - h_{51}(z) - \frac{f_{51}(z)g_{51}(z)}{1 - h_{52}(z) - \frac{f_{52}(z)g_{52}(z)}{1 - h_{53}(z) - \frac{f_{53}(z)g_{53}(z)}{1 - h_{54}(z) - \frac{f_{54}(z)g_{54}(z)}{1 - h_{55}(z) - \frac{f_{55}(z)g_{55}(z)}{1 - h_{56}(z) - \frac{f_{56}(z)g_{56}(z)}{1 - h_{57}(z) - \frac{f_{57}(z)g_{57}(z)}{1 - h_{58}(z) - \frac{f_{58}(z)g_{58}(z)}{1 - h_{59}(z) - \frac{f_{59}(z)g_{59}(z)}{1 - h_{60}(z) - \frac{f_{60}(z)g_{60}(z)}{1 - h_{61}(z) - \frac{f_{61}(z)g_{61}(z)}{1 - h_{62}(z) - \frac{f_{62}(z)g_{62}(z)}{1 - h_{63}(z) - \frac{f_{63}(z)g_{63}(z)}{1 - h_{64}(z) - \frac{f_{64}(z)g_{64}(z)}{1 - h_{65}(z) - \frac{f_{65}(z)g_{65}(z)}{1 - h_{66}(z) - \frac{f_{66}(z)g_{66}(z)}{1 - h_{67}(z) - \frac{f_{67}(z)g_{67}(z)}{1 - h_{68}(z) - \frac{f_{68}(z)g_{68}(z)}{1 - h_{69}(z) - \frac{f_{69}(z)g_{69}(z)}{1 - h_{70}(z) - \frac{f_{70}(z)g_{70}(z)}{1 - h_{71}(z) - \frac{f_{71}(z)g_{71}(z)}{1 - h_{72}(z) - \frac{f_{72}(z)g_{72}(z)}{1 - h_{73}(z) - \frac{f_{73}(z)g_{73}(z)}{1 - h_{74}(z) - \frac{f_{74}(z)g_{74}(z)}{1 - h_{75}(z) - \frac{f_{75}(z)g_{75}(z)}{1 - h_{76}(z) - \frac{f_{76}(z)g_{76}(z)}{1 - h_{77}(z) - \frac{f_{77}(z)g_{77}(z)}{1 - h_{78}(z) - \frac{f_{78}(z)g_{78}(z)}{1 - h_{79}(z) - \frac{f_{79}(z)g_{79}(z)}{1 - h_{80}(z) - \frac{f_{80}(z)g_{80}(z)}{1 - h_{81}(z) - \frac{f_{81}(z)g_{81}(z)}{1 - h_{82}(z) - \frac{f_{82}(z)g_{82}(z)}{1 - h_{83}(z) - \frac{f_{83}(z)g_{83}(z)}{1 - h_{84}(z) - \frac{f_{84}(z)g_{84}(z)}{1 - h_{85}(z) - \frac{f_{85}(z)g_{85}(z)}{1 - h_{86}(z) - \frac{f_{86}(z)g_{86}(z)}{1 - h_{87}(z) - \frac{f_{87}(z)g_{87}(z)}{1 - h_{88}(z) - \frac{f_{88}(z)g_{88}(z)}{1 - h_{89}(z) - \frac{f_{89}(z)g_{89}(z)}{1 - h_{90}(z) - \frac{f_{90}(z)g_{90}(z)}{1 - h_{91}(z) - \frac{f_{91}(z)g_{91}(z)}{1 - h_{92}(z) - \frac{f_{92}(z)g_{92}(z)}{1 - h_{93}(z) - \frac{f_{93}(z)g_{93}(z)}{1 - h_{94}(z) - \frac{f_{94}(z)g_{94}(z)}{1 - h_{95}(z) - \frac{f_{95}(z)g_{95}(z)}{1 - h_{96}(z) - \frac{f_{96}(z)g_{96}(z)}{1 - h_{97}(z) - \frac{f_{97}(z)g_{97}(z)}{1 - h_{98}(z) - \frac{f_{98}(z)g_{98}(z)}{1 - h_{99}(z) - \frac{f_{99}(z)g_{99}(z)}{1 - h_{100}(z) - \frac{f_{100}(z)g_{100}(z)}{1 - h_{101}(z) - \frac{f_{101}(z)g_{101}(z)}{1 - h_{102}(z) - \frac{f_{102}(z)g_{102}(z)}{1 - h_{103}(z) - \frac{f_{103}(z)g_{103}(z)}{1 - h_{104}(z) - \frac{f_{104}(z)g_{104}(z)}{1 - h_{105}(z) - \frac{f_{105}(z)g_{105}(z)}{1 - h_{106}(z) - \frac{f_{106}(z)g_{106}(z)}{1 - h_{107}(z) - \frac{f_{107}(z)g_{107}(z)}{1 - h_{108}(z) - \frac{f_{108}(z)g_{108}(z)}{1 - h_{109}(z) - \frac{f_{109}(z)g_{109}(z)}{1 - h_{110}(z) - \frac{f_{110}(z)g_{110}(z)}{1 - h_{111}(z) - \frac{f_{111}(z)g_{111}(z)}{1 - h_{112}(z) - \frac{f_{112}(z)g_{112}(z)}{1 - h_{113}(z) - \frac{f_{113}(z)g_{113}(z)}{1 - h_{114}(z) - \frac{f_{114}(z)g_{114}(z)}{1 - h_{115}(z) - \frac{f_{115}(z)g_{115}(z)}{1 - h_{116}(z) - \frac{f_{116}(z)g_{116}(z)}{1 - h_{117}(z) - \frac{f_{117}(z)g_{117}(z)}{1 - h_{118}(z) - \frac{f_{118}(z)g_{118}(z)}{1 - h_{119}(z) - \frac{f_{119}(z)g_{119}(z)}{1 - h_{120}(z) - \frac{f_{120}(z)g_{120}(z)}{1 - h_{121}(z) - \frac{f_{121}(z)g_{121}(z)}{1 - h_{122}(z) - \frac{f_{122}(z)g_{122}(z)}{1 - h_{123}(z) - \frac{f_{123}(z)g_{123}(z)}{1 - h_{124}(z) - \frac{f_{124}(z)g_{124}(z)}{1 - h_{125}(z) - \frac{f_{125}(z)g_{125}(z)}{1 - h_{126}(z) - \frac{f_{126}(z)g_{126}(z)}{1 - h_{127}(z) - \frac{f_{127}(z)g_{127}(z)}{1 - h_{128}(z) - \frac{f_{128}(z)g_{128}(z)}{1 - h_{129}(z) - \frac{f_{129}(z)g_{129}(z)}{1 - h_{130}(z) - \frac{f_{130}(z)g_{130}(z)}{1 - h_{131}(z) - \frac{f_{131}(z)g_{131}(z)}{1 - h_{132}(z) - \frac{f_{132}(z)g_{132}(z)}{1 - h_{133}(z) - \frac{f_{133}(z)g_{133}(z)}{1 - h_{134}(z) - \frac{f_{134}(z)g_{134}(z)}{1 - h_{135}(z) - \frac{f_{135}(z)g_{135}(z)}{1 - h_{136}(z) - \frac{f_{136}(z)g_{136}(z)}{1 - h_{137}(z) - \frac{f_{137}(z)g_{137}(z)}{1 - h_{138}(z) - \frac{f_{138}(z)g_{138}(z)}{1 - h_{139}(z) - \frac{f_{139}(z)g_{139}(z)}{1 - h_{140}(z) - \frac{f_{140}(z)g_{140}(z)}{1 - h_{141}(z) - \frac{f_{141}(z)g_{141}(z)}{1 - h_{142}(z) - \frac{f_{142}(z)g_{142}(z)}{1 - h_{143}(z) - \frac{f_{143}(z)g_{143}(z)}{1 - h_{144}(z) - \frac{f_{144}(z)g_{144}(z)}{1 - h_{145}(z) - \frac{f_{145}(z)g_{145}(z)}{1 - h_{146}(z) - \frac{f_{146}(z)g_{146}(z)}{1 - h_{147}(z) - \frac{f_{147}(z)g_{147}(z)}{1 - h_{148}(z) - \frac{f_{148}(z)g_{148}(z)}{1 - h_{149}(z) - \frac{f_{149}(z)g_{149}(z)}{1 - h_{150}(z) - \frac{f_{150}(z)g_{150}(z)}{1 - h_{151}(z) - \frac{f_{151}(z)g_{151}(z)}{1 - h_{152}(z) - \frac{f_{152}(z)g_{152}(z)}{1 - h_{153}(z) - \frac{f_{153}(z)g_{153}(z)}{1 - h_{154}(z) - \frac{f_{154}(z)g_{154}(z)}{1 - h_{155}(z) - \frac{f_{155}(z)g_{155}(z)}{1 - h_{156}(z) - \frac{f_{156}(z)g_{156}(z)}{1 - h_{157}(z) - \frac{f_{157}(z)g_{157}(z)}{1 - h_{158}(z) - \frac{f_{158}(z)g_{158}(z)}{1 - h_{159}(z) - \frac{f_{159}(z)g_{159}(z)}{1 - h_{160}(z) - \frac{f_{160}(z)g_{160}(z)}{1 - h_{161}(z) - \frac{f_{161}(z)g_{161}(z)}{1 - h_{162}(z) - \frac{f_{162}(z)g_{162}(z)}{1 - h_{163}(z) - \frac{f_{163}(z)g_{163}(z)}{1 - h_{164}(z) - \frac{f_{164}(z)g_{164}(z)}{1 - h_{165}(z) - \frac{f_{165}(z)g_{165}(z)}{1 - h_{166}(z) - \frac{f_{166}(z)g_{166}(z)}{1 - h_{167}(z) - \frac{f_{167}(z)g_{167}(z)}{1 - h_{168}(z) - \frac{f_{168}(z)g_{168}(z)}{1 - h_{169}(z) - \frac{f_{169}(z)g_{169}(z)}{1 - h_{170}(z) - \frac{f_{170}(z)g_{170}(z)}{1 - h_{171}(z) - \frac{f_{171}(z)g_{171}(z)}{1 - h_{172}(z) - \frac{f_{172}(z)g_{172}(z)}{1 - h_{173}(z) - \frac{f_{173}(z)g_{173}(z)}{1 - h_{174}(z) - \frac{f_{174}(z)g_{174}(z)}{1 - h_{175}(z) - \frac{f_{175}(z)g_{175}(z)}{1 - h_{176}(z) - \frac{f_{176}(z)g_{176}(z)}{1 - h_{177}(z) - \frac{f_{177}(z)g_{177}(z)}{1 - h_{178}(z) - \frac{f_{178}(z)g_{178}(z)}{1 - h_{179}(z) - \frac{f_{179}(z)g_{179}(z)}{1 - h_{180}(z) - \frac{f_{180}(z)g_{180}(z)}{1 - h_{181}(z) - \frac{f_{181}(z)g_{181}(z)}{1 - h_{182}(z) - \frac{f_{182}(z)g_{182}(z)}{1 - h_{183}(z) - \frac{f_{183}(z)g_{183}(z)}{1 - h_{184}(z) - \frac{f_{184}(z)g_{184}(z)}{1 - h_{185}(z) - \frac{f_{185}(z)g_{185}(z)}{1 - h_{186}(z) - \frac{f_{186}(z)g_{186}(z)}{1 - h_{187}(z) - \frac{f_{187}(z)g_{187}(z)}{1 - h_{188}(z) - \frac{f_{188}(z)g_{188}(z)}{1 - h_{189}(z) - \frac{f_{189}(z)g_{189}(z)}{1 - h_{190}(z) - \frac{f_{190}(z)g_{190}(z)}{1 - h_{191}(z) - \frac{f_{191}(z)g_{191}(z)}{1 - h_{192}(z) - \frac{f_{192}(z)g_{192}(z)}{1 - h_{193}(z) - \frac{f_{193}(z)g_{193}(z)}{1 - h_{194}(z) - \frac{f_{194}(z)g_{194}(z)}{1 - h_{195}(z) - \frac{f_{195}(z)g_{195}(z)}{1 - h_{196}(z) - \frac{f_{196}(z)g_{196}(z)}{1 - h_{197}(z) - \frac{f_{197}(z)g_{197}(z)}{1 - h_{198}(z) - \frac{f_{198}(z)g_{198}(z)}{1 - h_{199}(z) - \frac{f_{199}(z)g_{199}(z)}{1 - h_{200}(z) - \frac{f_{200}(z)g_{200}(z)}{1 - h_{201}(z) - \frac{f_{201}(z)g_{201}(z)}{1 - h_{202}(z) - \frac{f_{202}(z)g_{202}(z)}{1 - h_{203}(z) - \frac{f_{203}(z)g_{203}(z)}{1 - h_{204}(z) - \frac{f_{204}(z)g_{204}(z)}{1 - h_{205}(z) - \frac{f_{205}(z)g_{205}(z)}{1 - h_{206}(z) - \frac{f_{206}(z)g_{206}(z)}{1 - h_{207}(z) - \frac{f_{207}(z)g_{207}(z)}{1 - h_{208}(z) - \frac{f_{208}(z)g_{208}(z)}{1 - h_{209}(z) - \frac{f_{209}(z)g_{209}(z)}{1 - h_{210}(z) - \frac{f_{210}(z)g_{210}(z)}{1 - h_{211}(z) - \frac{f_{211}(z)g_{211}(z)}{1 - h_{212}(z) - \frac{f_{212}(z)g_{212}(z)}{1 - h_{213}(z) - \frac{f_{213}(z)g_{213}(z)}{1 - h_{214}(z) - \frac{f_{214}(z)g_{214}(z)}{1 - h_{215}(z) - \frac{f_{215}(z)g_{215}(z)}{1 - h_{216}(z) - \frac{f_{216}(z)g_{216}(z)}{1 - h_{217}(z) - \frac{f_{217}(z)g_{217}(z)}{1 - h_{218}(z) - \frac{f_{218}(z)g_{218}(z)}{1 - h_{219}(z) - \frac{f_{219}(z)g_{219}(z)}{1 - h_{220}(z) - \frac{f_{220}(z)g_{220}(z)}{1 - h_{221}(z) - \frac{f_{221}(z)g_{221}(z)}{1 - h_{222}(z) - \frac{f_{222}(z)g_{222}(z)}{1 - h_{223}(z) - \frac{f_{223}(z)g_{223}(z)}{1 - h_{224}(z) - \frac{f_{224}(z)g_{224}(z)}{1 - h_{225}(z) - \frac{f_{225}(z)g_{225}(z)}{1 - h_{226}(z) - \frac{f_{226}(z)g_{226}(z)}{1 - h_{227}(z) - \frac{f_{227}(z)g_{227}(z)}{1 - h_{228}(z) - \frac{f_{228}(z)g_{228}(z)}{1 - h_{229}(z) - \frac{f_{229}(z)g_{229}(z)}{1 - h_{230}(z) - \frac{f_{230}(z)g_{230}(z)}{1 - h_{231}(z) - \frac{f_{231}(z)g_{231}(z)}{1 - h_{232}(z) - \frac{f_{232}(z)g_{232}(z)}{1 - h_{233}(z) - \frac{f_{233}(z)g_{233}(z)}{1 - h_{234}(z) - \frac{f_{234}(z)g_{234}(z)}{1 - h_{235}(z) - \frac{f_{235}(z)g_{235}(z)}{1 - h_{236}(z) - \frac{f_{236}(z)g_{236}(z)}{1 - h_{237}(z) - \frac{f_{237}(z)g_{237}(z)}{1 - h_{238}(z) - \frac{f_{238}(z)g_{238}(z)}{1 - h_{239}(z) - \frac{f_{239}(z)g_{239}(z)}{1 - h_{240}(z) - \frac{f_{240}(z)g_{240}(z)}{1 - h_{241}(z) - \frac{f_{241}(z)g_{241}(z)}{1 - h_{242}(z) - \frac{f_{242}(z)g_{242}(z)}{1 - h_{243}(z) - \frac{f_{243}(z)g_{243}(z)}{1 - h_{244}(z) - \frac{f_{244}(z)g_{244}(z)}{1 - h_{245}(z) - \frac{f_{245}(z)g_{245}(z)}{1 - h_{246}(z) - \frac{f_{246}(z)g_{246}(z)}{1 - h_{247}(z) - \frac{f_{247}(z)g_{247}(z)}{1 - h_{248}(z) - \frac{f_{248}(z)g_{248}(z)}{1 - h_{249}(z) - \frac{f_{249}(z)g_{249}(z)}{1 - h_{250}(z) - \frac{f_{250}(z)g_{250}(z)}{1 - h_{251}(z) - \frac{f_{251}(z)g_{251}(z)}{1 - h_{252}(z) - \frac{f_{252}(z)g_{252}(z)}{1 - h_{253}(z) - \frac{f_{253}(z)g_{253}(z)}{1 - h_{254}(z) - \frac{f_{254}(z)g_{254}(z)}{1 - h_{255}(z) - \frac{f_{255}(z)g_{255}(z)}{1 - h_{256}(z) - \frac{f_{256}(z)g_{256}(z)}{1 - h_{257}(z) - \frac{f_{257}(z)g_{257}(z)}{1 - h_{258}(z) - \frac{f_{258}(z)g_{258}(z)}{1 - h_{259}(z) - \frac{f_{259}(z)g_{259}(z)}{1 - h_{260}(z) - \frac{f_{260}(z)g_{260}(z)}{1 - h_{261}(z) - \frac{f_{261}(z)g_{261}(z)}{1 - h_{262}(z) - \frac{f_{262}(z)g_{262}(z)}{1 - h_{263}(z) - \frac{f_{263}(z)g_{263}(z)}{1 - h_{264}(z) - \frac{f_{264}(z)g_{264}(z)}{1 - h_{265}(z) - \frac{f_{265}(z)g_{265}(z)}{1 - h_{266}(z) - \frac{f_{266}(z)g_{266}(z)}{1 - h_{267}(z) - \frac{f_{267}(z)g_{267}(z)}{1 - h_{268}(z) - \frac{f_{268}(z)g_{268}(z)}{1 - h_{269}(z) - \frac{f_{269}(z)g_{269}(z)}{1 - h_{270}(z) - \frac{f_{270}(z)g_{270}(z)}{1 - h_{271}(z) - \frac{f_{271}(z)g_{271}(z)}{1 - h_{272}(z) - \frac{f_{272}(z)g_{272}(z)}{1 - h_{273}(z) - \frac{f_{273}(z)g_{273}(z)}{1 - h_{274}(z) - \frac{f_{274}(z)g_{274}(z)}{1 - h_{275}(z) - \frac{f_{275}(z)g_{275}(z)}{1 - h_{276}(z) - \frac{f_{276}(z)g_{276}(z)}{1 - h_{277}(z) - \frac{f_{277}(z)g_{277}(z)}{1 - h_{278}(z) - \frac{f_{278}(z)g_{278}(z)}{1 - h_{279}(z) - \frac{f_{279}(z)g_{279}(z)}{1 - h_{280}(z) - \frac{f_{280}(z)g_{280}(z)}{1 - h_{281}(z) - \frac{f_{281}(z)g_{281}(z)}{1 - h_{282}(z) - \frac{f_{282}(z)g_{282}(z)}{1 - h_{283}(z) - \frac{f_{283}(z)g_{283}(z)}{1 - h_{284}(z) - \frac{f_{284}(z)g_{284}(z)}{1 - h_{285}(z) - \frac{f_{285}(z)g_{285}(z)}{1 - h_{286}(z) - \frac{f_{286}(z)g_{286}(z)}{1 - h_{287}(z) - \frac{f_{287}(z)g_{287}(z)}{1 - h_{288}(z) - \frac{f_{288}(z)g_{288}(z)}{1 - h_{289}(z) - \frac{f_{289}(z)g_{289}(z)}{1 - h_{290}(z) - \frac{f_{290}(z)g_{290}(z)}{1 - h_{291}(z) - \frac{f_{291}(z)g_{291}(z)}{1 - h_{292}(z) - \frac{f_{292}(z)g_{292}(z)}{1 - h_{293}(z) - \frac{f_{293}(z)g_{293}(z)}{1 - h_{294}(z) - \frac{f_{294}(z)g_{294}(z)}{1 - h_{295}(z) - \frac{f_{295}(z)g_{295}(z)}{1 - h_{296}(z) - \frac{f_{296}(z)g_{296}(z)}{1 - h_{297}(z) - \frac{f_{297}(z)g_{297}(z)}{1 - h_{298}(z) - \frac{f_{298}(z)g_{298}(z)}{1 - h_{299}(z) - \frac{f_{299}(z)g_{299}(z)}{1 - h_{300}(z) - \frac{f_{300}(z)g_{300}(z)}{1 - h_{301}(z) - \frac{f_{301}(z)g_{301}(z)}{1 - h_{302}(z) - \frac{f_{302}(z)g_{302}(z)}{1 - h_{303}(z) - \frac{f_{303}(z)g_{303}(z)}{1 - h_{304}(z) - \frac{f_{304}(z)g_{304}(z)}{1 - h_{305}(z) - \frac{f_{305}(z)g_{305}(z)}{1 - h_{306}(z) - \frac{f_{306}(z)g_{306}(z)}{1 - h_{307}(z) - \frac{f_{307}(z)g_{307}(z)}{1 - h_{308}(z) - \frac{f_{308}(z)g_{308}(z)}{1 - h_{309}(z) - \frac{f_{309}(z)g_{309}(z)}{1 - h_{310}(z) - \frac{f_{310}(z)g_{310}(z)}{1 - h_{311}(z) - \frac{f_{311}(z)g_{311}(z)}{1 - h_{312}(z) - \frac{f_{312}(z)g_{312}(z)}{1 - h_{313}(z) - \frac{f_{313}(z)g_{313}(z)}{1 - h_{314}(z) - \frac{f_{314}(z)g_{314}(z)}{1 - h_{315}(z) - \frac{f_{315}(z)g_{315}(z)}{1 - h_{316}(z) - \frac{f_{316}(z)g_{316}(z)}{1 - h_{317}(z) - \frac{f_{317}(z)g_{317}(z)}{1 - h_{318}(z) - \frac{f_{318}(z)g_{318}(z)}{1 - h_{319}(z) - \frac{f_{319}(z)g_{319}(z)}{1 - h_{320}(z) - \frac{f_{320}(z)g_{320}(z)}{1 - h_{321}(z) - \frac{f_{321}(z)g_{321}(z)}{1 - h_{322}(z) - \frac{f_{322}(z)g_{322}(z)}{1 - h_{323}(z) - \frac{f_{323}(z)g_{323}(z)}{1 - h_{324}(z) - \frac{f_{324}(z)g_{324}(z)}{1 - h_{325}(z) - \frac{f_{325}(z)g_{325}(z)}{1 - h_{326}(z) - \frac{f_{326}(z)g_{326}(z)}{1 - h_{327}(z) - \frac{f_{327}(z)g_{327}(z)}{1 - h_{328}(z) - \frac{f_{328}(z)g_{328}(z)}{1 - h_{329}(z) - \frac{f_{329}(z)g_{329}(z)}{1 - h_{330}(z) - \frac{f_{330}(z)g_{330}(z)}{1 - h_{331}(z) - \frac{f_{331}(z)g_{331}(z)}{1 - h_{332}(z) - \frac{f_{332}(z)g_{332}(z)}{1 - h_{333}(z) - \frac{f_{333}(z)g_{333}(z)}{1 - h_{334}(z) - \frac{f_{334}(z)g_{334}(z)}{1 - h_{335}(z) - \frac{f_{335}(z)g_{335}(z)}{1 - h_{336}(z) - \frac{f_{336}(z)g_{336}(z)}{1 - h_{337}(z) - \frac{f_{337}(z)g_{337}(z)}{1 - h_{338}(z) - \frac{f_{338}(z)g_{338}(z)}{1 - h_{339}(z) - \frac{f_{339}(z)g_{339}(z)}{1 - h_{340}(z) - \frac{f_{340}(z)g_{340}(z)}{1 - h_{341}(z) - \frac{f_{341}(z)g_{341}(z)}{1 - h_{342}(z) - \frac{f_{342}(z)g_{342}(z)}{1 - h_{343}(z) - \frac{f_{343}(z)g_{343}(z)}{1 - h_{344}(z) - \frac{f_{344}(z)g_{344}(z)}{1 - h_{345}(z) - \frac{f_{345}(z)g_{345}(z)}{1 - h_{346}(z) - \frac{f_{346}(z)g_{346}(z)}{1 - h_{347}(z) - \frac{f_{347}(z)g_{347}(z)}{1 - h_{348}(z) - \frac{f_{348}(z)g_{348}(z)}{1 - h_{349}(z) - \frac{f_{349}(z)g_{349}(z)}{1 - h_{350}(z) - \frac{f_{350}(z)g_{350}(z)}{1 - h_{351}(z) - \frac{f_{351}(z)g_{351}(z)}{1 - h_{352}(z) - \frac{f_{352}(z)g_{352}(z)}{1 - h_{353}(z) - \frac{f_{353}(z)g_{353}(z)}{1 - h_{354}(z) - \frac{f_{354}(z)g_{354}(z)}{1 - h_{355}(z) - \frac{f_{355}(z)g_{355}(z)}{1 - h_{356}(z) - \frac{f_{356}(z)g_{356}(z)}{1 - h_{357}(z) - \frac{f_{357}(z)g_{357}(z)}{1 - h_{358}(z) - \frac{f_{358}(z)g_{358}(z)}{1 - h_{359}(z) - \frac{f_{359}(z)g_{359}(z)}{1 - h_{360}(z) - \frac{f_{360}(z)g_{360}(z)}{1 - h_{361}(z) - \frac{f_{361}(z)g_{361}(z$$

donde $f_i(z), g_j(z)$ y $h_i(z)$ son transiciones en paralelo para todo $i \geq 0$.

Demostración. El autómata de la Figura 4.25 es igual a $\text{JUMP}_{(k-1 \rightarrow k+1)}(\mathcal{M}'_{Lin})$, con $J(z) = f_{k-1}(z)f_k(z)$ y \mathcal{M}'_{Lin} es el autómata obtenido a partir de \mathcal{M}_{Lin} cambiando la ponderación de la arista que va del vértice $k-1$ al k por $f_{k-1}h_k$. Así por el Teorema 4.4.4 queda demostrado. \square

Corolario 4.4.6. Si para todo entero $i \geq 0$, $f_i(z) = f(z)$, $g_i(z) = g(z)$ y $h_i(z) = h(z)$ en $\mathcal{M}_{Lin(k-1 \rightarrow k+1)}$, entonces se obtiene la siguiente FG:

$$A_k(z) = \left. \begin{array}{c} \frac{1}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{1 - h(z) - g(z)f(z)h(z)B(z) - g^2(z)f^2(z)B^2}}}} \end{array} \right\} k-1 \text{ veces}$$

Recurivamente se puede ver como:

$$A_1(z) = \frac{1}{1 - h(z) - g(z)f(z)h(z)B(z) - g^2(z)f^2(z)B^2} \quad (4.33)$$

$$= \frac{1}{1 - h(z) + f(z)g(z) - f(z)g(z)B(z)} \quad (4.34)$$

$$= \frac{2f(z)g(z) - h(z) + 1 - \sqrt{(1 - h(z))^2 - 4f(z)g(z)}}{2f(z)g(z)(f(z)g(z) - h(z) + 2)}, \quad (4.35)$$

y

$$A_n(z) = \frac{1}{1 - h(z) - f(z)g(z)A_{n-1}(z)}.$$

Demostración. Se tiene directamente del Teorema 4.4.5. En la Ecuación (4.34) se utilizó que $B(z) = 1 + h(z)B(z) + f(z)g(z)B^2(z)$. \square

Ejemplo 4.4.7. Si $f(z) = z = g(z)$ y $h(z) = 0$ en el Corolario 4.4.6, se obtiene la FG $P_{\mathcal{D}_s}(z) = G_s(z^2)$, donde $G_s(z)$ es la FG de las trayectorias de Dyck de longitud $2n$ sin picos de altura s , con $s \geq 1$.

$$P_{\mathcal{D}_s}(z) = \left. \begin{array}{c} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{1 - \frac{z^2}{1 - \frac{z^2}{\vdots} \frac{z^2}{1 - \frac{z^2}{1 - z^4 T^2(z)}}}}} \end{array} \right\} s-1 \text{ veces.}$$

En particular para $s = 1$ se obtiene que

$$\begin{aligned} G_1(z) &= \frac{1}{1 - z^2 C^2(z)} = \frac{2}{1 + 2z + \sqrt{1 - 4z}} \\ &= 1 + z^2 + 2z^3 + 6z^4 + 18z^5 + 57z^6 + 186z^7 + \dots, \end{aligned}$$

la cual corresponde con los números de Fine, ver secuencia A000957. En general se tiene que

$$G_s(z) = \frac{1}{1 - zG_{s-1}(z)}, s \geq 2.$$

Además, para $s = 2$ se obtiene que $G_2(z) = 1 + zC(z)$, ver secuencia A059019. Estos últimos resultados coinciden con [56].

Ejemplo 4.4.8. Si $f(z) = g(z) = h(z) = z$ en el Corolario 4.4.6, se obtiene la FG de las trayectorias de Motzkin de longitud n sin picos de altura s , con $s \geq 1$:

$$P_{\mathcal{M}_s}(z) = \frac{1}{1 - z - \frac{z^2}{1 - z - \frac{z^2}{\ddots \frac{z^2}{1 - z - \frac{z^2}{1 - z - z^3 M(z) - z^4 M^2(z)}}}}} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{1 - z - \frac{z^2}{1 - z - \frac{z^2}{\ddots \frac{z^2}{1 - z - \frac{z^2}{1 - z - z^3 M(z) - z^4 M^2(z)}}}}} \right\} s - 1 \text{ veces},$$

donde $M(z)$ es la FG de los números de Motzkin. En la Figura 4.26 mostramos las trayectorias de Motzkin de longitud 4 sin picos de altura 1.

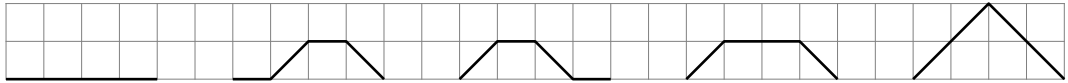


Figura 4.26: Trayectorias de Motzkin de longitud 4 sin picos de altura 1.

Para $s = 1$ se obtiene que

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{M}_1}(z) &= \frac{1}{1 - z - z^3 M(z) - z^4 M^2(z)} = \frac{1}{1 - z + z^2 - z^2 M(z)} \\ &= 1 + z + z^2 + 2z^3 + 5z^4 + 12z^5 + 29z^6 + 72z^7 + \dots, \end{aligned}$$

la cual corresponde con la secuencia A089372. Además, $h_s = h_{s-1} - h_{s-2} + \sum_{i=0}^{s-2} m_i h_{s-i}$, donde $h_s = [z^s] P_{\mathcal{M}_1}(z)$ y m_i es el i -ésimo número de Motzkin. En el Cuadro 4.12 aparecen las sucesiones para $s = 1, 2, 3, 4, \dots$. Algunas de estas sucesiones no aparecían en [67].

s	Secuencia	A-Número
1	1, 1, 1, 2, 5, 12, 29, 72, 183, 473,...	A089372
2	1, 1, 2, 4, 8, 17, 38, 88, 210, 514,...	A257300
3	1, 1, 2, 4, 9, 21, 50, 121, 297, 738,...	A257104
4	1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 322, 827,...	A257519

Cuadro 4.12: Sucesiones obtenidas para $s = 1, 2, 3, 4$, Ejemplo 4.4.8.

Ejemplo 4.4.9. Si $f(z) = z = g(z)$ y $h(z) = kz^l$ con $k, l \in \mathbb{Z}^+$, en el Corolario 4.4.6 se obtiene la FG $A_i(z)$ de las trayectorias generalizadas de Motzkin k -coloreados sin picos de altura i .

$$\begin{aligned}
A_1^{(k,l)}(z) &= \frac{1}{1 - kz^l - kz^{l+2}B(z) - z^4B^2(z)} = \frac{1}{1 - kz^l + z^2(1 - B(z))} \\
&= \frac{1 + 2z^2 - kz^l - \sqrt{(1 - kz^l)^2 - 4z^2}}{2z^2(z^2 - kz^l + 2)},
\end{aligned}$$

y

$$A_n^{(k,l)}(z) = \frac{1}{1 - kz^l - z^2A_{n-1}^{(k,l)}(z)}, \quad n \geq 2,$$

donde

$$B(z) = \frac{1 - kz^l - \sqrt{1 - 2kz^l + k^2z^{2l} - 4z^2}}{2z^2}.$$

Si $l = 1$ y $n = 1$ se obtiene que

$$A_1^{(k,1)}(z) = \frac{1 + 2z^2 - kz - \sqrt{(1 - kz)^2 - 4z^2}}{2z^2(z^2 - kz + 2)}.$$

Para $k = 1$ y $n = 1$ se obtiene que

$$A_1^{(1,l)}(z) = \frac{2z^2 + 1 - z^l - \sqrt{(1 - z^l)^2 - 4z^2}}{2z^2(2 - z^2 - z^l)}.$$

Como $1 - z^l - \sqrt{(1 - z^l)^2 - 4z^2} = 2z^2M^{(k)}(z)$, donde $M^{(k)}(z)$ es la FG de trayectorias generalizadas de Motzkin, ver Ejemplo 3.3.5, entonces

$$\begin{aligned}
A_1^{(1,l)}(z) &= \frac{1 + M^{(k)}(z)}{2 - z^2 - z^k} \\
(2 - z^2 - z^k)A_1^{(1,l)}(z) &= 1 + M^{(k)}(z).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$2a_{(1,n)}^{(1,l)} - a_{(1,n-2)}^{(1,l)} - a_{(1,n-k)}^{(1,l)} = 1 + m_n^k,$$

donde $a_{(1,n)}^{(1,l)} = [z^n] A_1^{(1,l)}(z)$ y m_n^k es el n -ésimo número generalizado de Motzkin. Este resultado coincide con la fórmula (2) de [2].

En el Cuadro 4.13 mostramos las secuencias que se obtienen para $i = 1, 2$, $k = 1, 2, 3, 4$ y $l = 1, 2$.

i	k	l	Secuencia	A-Número
1	1	1	1, 1, 1, 2, 5, 12, 29, 72, 183, 473, 1239, ...	A089372
1	2	1	1, 2, 4, 10, 29, 90, 290, 960, 3246, 11164, 38934, ...	A135334
1	3	1	1, 3, 9, 30, 109, 420, 1685, 6960, 29391, 126291, ...	A129167
1	4	1	1, 4, 16, 68, 305, 1428, 6914, 34368, 174438, 900392, ...	A202020
2	1	1	1, 1, 2, 4, 8, 17, 38, 88, 210, 514, 1285, ...	A257300
2	2	1	1, 2, 5, 14, 41, 124, 386, 1232, 4017, 13340, 45010, ...	-
2	3	1	1, 3, 10, 36, 136, 531, 2126, 8688, 36122, 152430, ...	-
1	1	2	1, 0, 1, 0, 3, 0, 11, 0, 45, 0, 197, 0, 903, 0, 4279, ...	A001003
1	2	2	1, 0, 2, 0, 7, 0, 32, 0, 166, 0, 926, 0, 5419, 0, 32816, 0, 203902, ...	A108524
1	3	2	1, 0, 3, 0, 13, 0, 71, 0, 441, 0, 2955, 0, 20805, 0, 151695, ...	A059231
2	1	2	1, 0, 2, 0, 5, 0, 15, 0, 52, 0, 201, 0, 841, 0, 3726, 0, 17213, ...	-
2	2	2	1, 0, 3, 0, 11, 0, 46, 0, 213, 0, 1070, 0, 5734, 0, 32328, ...	-

Cuadro 4.13: Sucesiones obtenidas para $i = 1, 2$, $k = 1, 2, 3, 4$ y $l = 1, 2$, Ejemplo 4.4.9.

Ejemplo 4.4.10. Las trayectorias de Motzkin sin picos de altura en $H = \{1, 2, 3, \dots, m\}$, se pueden contar con el autómata de la Figura 4.27, el cual resulta de componer varias veces el operador JUMP.

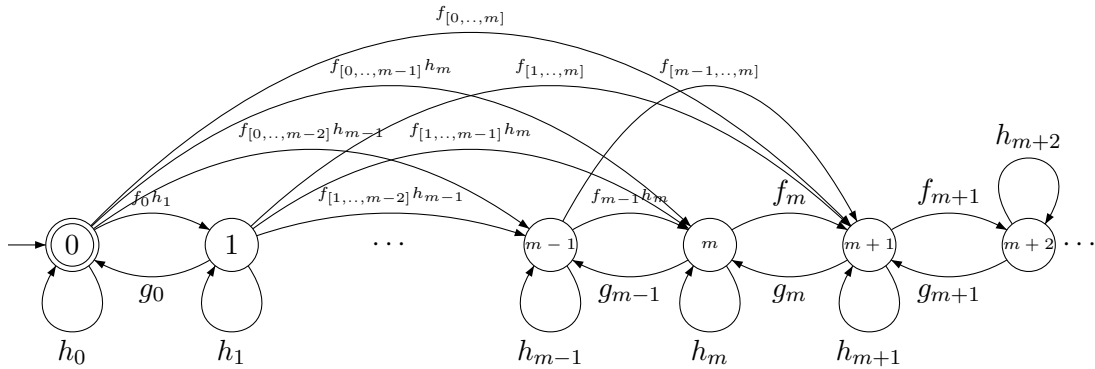


Figura 4.27: Autómata convergente para trayectorias sin picos en H .

Utilizando equivalencia entre autómatas se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones entre FGs:

$$\begin{cases} L_0 = h_0 L_0 + f_0 h_1 L_1 + f_{[0,..,1]} h_2 L_2 + \cdots + f_{[0,..,m-2]} h_{m-1} L_{m-1} + f_{[0,..,m-1]} h_m L_m + f_{[0,..,m]} L_{m+1} + 1 \\ L_i = g_{i-1} L_{i-1} + h_i L_i + f_i h_{i+1} L_{i+1} + f_{[i,..,i+1]} h_{i+2} L_{i+2} + \cdots + f_{[i,..,m-1]} h_m L_m + f_{[i,..,m]} L_{m+1}, \quad 1 \leq i \leq m-1 \\ L_m = g_{m-1} L_{m-1} + h_m L_m + f_m L_{m+1} \\ L_{m+1} = g_m E_{m+1} L_m. \end{cases}$$

El anterior sistema es equivalente a la siguiente ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} h_0 - 1 & f_0 h_1 & f_{[0,..,1]} h_2 & \cdots & f_{[0,..,m-3]} h_{m-2} & f_{[0,..,m-2]} h_{m-1} & f_{[0,..,m-1]} h_m & f_{[0,..,m]} \\ g_0 & h_1 - 1 & f_1 h_2 & \cdots & f_{[1,..,m-3]} h_{m-2} & f_{[1,..,m-2]} h_{m-1} & f_{[1,..,m-1]} h_m & f_{[1,..,m]} \\ 0 & g_1 & h_2 - 1 & \cdots & f_{[2,..,m-3]} h_{m-2} & f_{[2,..,m-2]} h_{m-1} & f_{[2,..,m-1]} h_m & f_{[2,..,m]} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{m-2} & h_{m-1} - 1 & f_{m-1} h_m & f_{[m-1,..,m]} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{m-1} & h_m - 1 & f_m \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & g_m E_{m+1} & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_{m-1} \\ L_m \\ L_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Este sistema se puede escribir como $A_m L = E_{-1}$. Por lo tanto, $L_0(z) = (A_m^{-1} E_{-1})_{(1,1)}$ es la FG de las trayectorias de Motzkin sin picos en H . En particular si para todo entero $i \geq 0$, $f_i(z) = f(z)$, $g_i(z) = g(z)$ y $h_i(z) = h(z)$, se obtiene que

$$\begin{bmatrix} h - 1 & f h & f^2 h & f^3 h & \cdots & f^{m-2} h & f^{m-1} h & f^m h & f^{m+1} \\ g & h - 1 & f h & f^2 h & \cdots & f^{m-3} h & f^{m-2} h & f^{m-1} h & f^m \\ 0 & g & h - 1 & f h & \cdots & f^{m-4} h & f^{m-3} h & f^{m-2} h & f^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & g & h - 1 & f h & f^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & g & h - 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & g B & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_{m-1} \\ L_m \\ L_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para $f(z) = g(z) = h(z) = z$, se obtienen los siguientes resultados. Si $m = 1$:

$$\begin{bmatrix} z-1 & z^2 & z^2 \\ z & z-1 & z \\ 0 & zM(z) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde $M(z)$ es la FG de los números de Motzkin. Luego

$$\begin{aligned} L_0(z) &= \frac{1 - z + \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{1 - 2z - z^3 + (z^2 - z + 1)\sqrt{1 - 2z - 3z^2}} \\ &= 1 + z + z^2 + 2z^3 + 5z^4 + 12z^5 + 29z^6 + 72z^7 + 183z^8 + \dots, \end{aligned}$$

la cual enumera las trayectorias de Motzkin sin picos de altura 1, A089372. Para $m = 2$ se tiene que

$$\begin{bmatrix} z-1 & z^2 & z^3 & z^3 \\ z & z-1 & z^2 & z^2 \\ 0 & z & z-1 & z \\ 0 & 0 & zM(z) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} L_0(z) &= \frac{1 - 2z - z^3 + (1 - z + z^2)\sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2 - 6z + 6z^2 - 6z^3 + 4z^4 - 2z^5 + (z-1)^2(1+z^2)\sqrt{1 - 2z - 3z^2}} \\ &= 1 + z + z^2 + 2z^3 + 4z^4 + 8z^5 + 18z^6 + 43z^7 + 105z^8 + 262z^9 + \dots, \end{aligned}$$

enumera las trayectorias de Motzkin sin picos de altura 1 y 2. En general es claro que para $H = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ se tiene que la FG es de la forma

$$\frac{p(x) + q(x)\sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{r(x)},$$

donde $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

El caso en que $h(x) = 0$ fue estudiado en [31].

Ejemplo 4.4.11. El autómata de la Figura 4.28 permite estudiar trayectorias sin picos sobre los niveles impares.

El autómata es equivalente al autómata de la Figura 4.29.

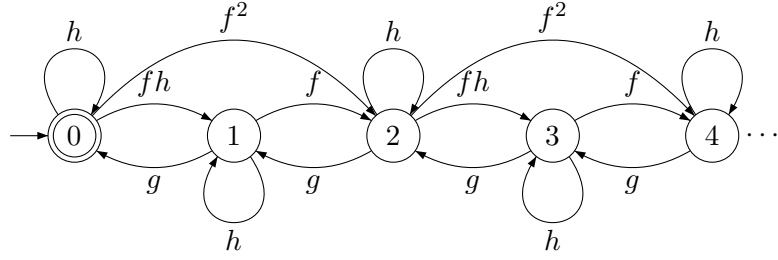


Figura 4.28: Autómata convergente para trayectorias sin picos sobre los niveles impares.

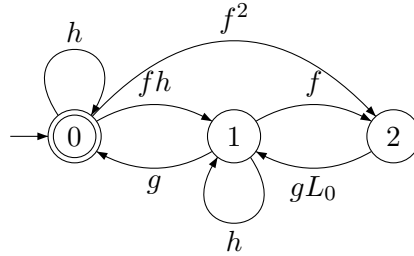


Figura 4.29: Autómata equivalente al autómata de la Figura 4.28.

Por lo tanto, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones entre FGs:

$$\begin{cases} L_0 = hL_0 + fhL_1 + f^2L_2 + 1 \\ L_1 = gL_0 + hL_1 + fL_2 \\ L_2 = gL_0L_1. \end{cases}$$

Despejando L_0 del sistema de ecuaciones, se obtiene que

$$L_0(z) = A_{\mathbb{I}}(z) = \frac{(1-h)^2 + fg(1-h) - \sqrt{((1-h)^2 - fg(1+h))^2 - 4f^2g^2}}{2fg(1+fg-h)}.$$

En particular para $f(z) = g(z) = z$ y $h(z) = 0$ se obtiene la FG de las trayectorias de Dyck sin picos en los niveles impares.

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{I}}(z) &= \frac{1 + z^2 - \sqrt{1 - 2z^2 - 3z^4}}{2(z^2 + z^4)} \\ &= 1 + z^4 + z^6 + 3z^8 + 6z^{10} + 15z^{12} + 36z^{14} + 91z^{16} + 232z^{18} + \dots \end{aligned}$$

En este caso $B(z^2) = A_{\mathbb{I}}(z)$ corresponde a la FG de los números de Riordan, A005043.

Si $f(z) = g(z) = h(z) = z$ se obtiene la FG de las trayectorias de Motzkin sin picos en los

niveles impares:

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{I}}(z) &= \frac{1 - 2z + 2z^2 - z^3 - \sqrt{1 - 4z + 4z^2 - 2z^3 + z^6}}{2z^2(1 - z + z^2)} \\ &= 1 + z + z^2 + 2z^3 + 5z^4 + 12z^5 + 28z^6 + 66z^7 + 159z^8 + \dots \end{aligned}$$

En general si $f(z) = g(z) = z$ y $h(z) = kz^l$ con $k, l \in \mathbb{Z}^+$ se obtiene la FG de las trayectorias generalizadas de Motzkin k -coloreadas sin picos en los niveles impares.

$$A_{\mathbb{I}}^{(k,l)}(z) = \frac{1 + z^2 - kz^l(2 + z^2) - \sqrt{(1 - z^2 - kz^l(2 + z^2))^2 - 4z^4}}{2z^2(1 + z^2 - kz^l)}.$$

En el Cuadro 4.14 mostramos las secuencias que se obtienen para $k = 1, 2$ y $l = 1, 2, 3$. Excluyendo $(l, k) = (2, 1)$, las sucesiones no son reportadas en [67].

l	k	Secuencia	A-Número
1	1	1, 1, 1, 2, 5, 12, 28, 66, 159, 390, 969,...	-
1	2	1, 2, 4, 10, 29, 90, 289, 948, 3159, 10662, 36378, ...	-
1	3	1, 3, 9, 30, 109, 420, 1684, 6942, 29199, 124698,...	-
2	1	1, 0, 1, 0, 3, 0, 10, 0, 36, 0, 137, 0, 543, 0, 2219, 0, 9285,...	A002212
2	2	1, 0, 2, 0, 7, 0, 31, 0, 151, 0, 776, 0, 4141, 0, 22742, 0, 127757,...	-
2	3	1, 0, 3, 0, 13, 0, 70, 0, 420, 0, 2673, 0, 17673, 0, 120159,...	-

Cuadro 4.14: Sucesiones obtenidas para $k = 1, 2, 3$ y $l = 1, 2$, Ejemplo 4.4.11.

Análogamente el autómata de la Figura 4.30 permite estudiar trayectorias sin picos en los niveles pares.

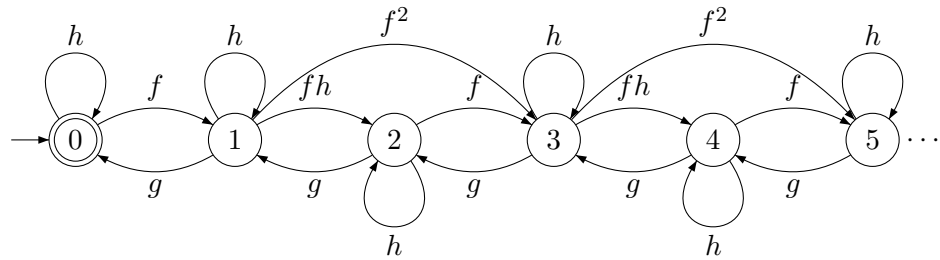


Figura 4.30: Autómata convergente para trayectorias sin picos sobre los niveles pares.

El autómata es equivalente al autómata de la Figura 4.31.

Por lo tanto, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones entre FG:

$$\begin{cases} A_{\mathbb{P}} = hA_{\mathbb{P}} + fL_1 + 1 \\ L_1 = gA_{\mathbb{I}}A_{\mathbb{P}}. \end{cases}$$

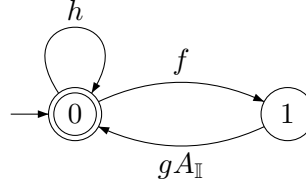


Figura 4.31: Autómata equivalente al autómata de la Figura 4.30.

Despejando $A_{\mathbb{P}}$ del sistema de ecuaciones, se obtiene que

$$A_{\mathbb{P}}(z) = \frac{1}{1 - h - fgA_{\mathbb{I}}}.$$

En particular, para $f(z) = g(z) = z$ y $h(z) = 0$ se obtiene la FG de las trayectorias de Dyck sin picos en los niveles pares.

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{P}}(z) &= \frac{2 + 2z^2}{1 + z^2 - \sqrt{1 - 2z^2 - 3z^4}} \\ &= 1 + z^2 + z^4 + 2z^6 + 4z^8 + 9z^{10} + 21z^{12} + 51z^{14} + 127z^{16} + 323z^{18} + \dots \end{aligned}$$

El coeficiente n -ésimo de la anterior FG coincide con el número m_{n-1} de Motzkin, es decir que el número de trayectorias de Dyck sin picos de alturas pares es igual al número de Motzkin m_{n-1} , este último resultado coincide con el Teorema 1 de [31].

Si $f(z) = g(z) = h(z) = z$ se obtiene la FG de las trayectorias de Motzkin sin pasos en los niveles pares:

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{P}}(z) &= \frac{2 - 2z + 2z^2}{1 - 2z + 2z^2 - z^3 + \sqrt{1 - 4z + 4z^2 - 2z^3 + z^6}} \\ &= 1 + z + 2z^2 + 4z^3 + 8z^4 + 17z^5 + 38z^6 + 88z^7 + 209z^8 + \dots \end{aligned}$$

En general si $f(z) = g(z) = z$ y $h(z) = kz^l$ con $k, l \in \mathbb{Z}^+$ se obtiene la FG de las trayectorias generalizadas de Motzkin k -coloreadas sin picos en los niveles pares.

$$A_{\mathbb{P}}^{(k,l)}(z) = \frac{1}{1 - kz^l - z^2 A_{\mathbb{I}}^{(k,l)}(z)}.$$

En el Cuadro 4.15 mostramos las secuencias que se obtienen para $k = 1, 2$ y $l = 1, 2, 3$.

l	k	Secuencia	A-Número
1	1	1, 1, 2, 4, 8, 17, 38, 88, 209, 506, 1244,...	-
1	2	1, 2, 5, 14, 41, 124, 386, 1232, 4016, 13324, 44861, ...	-
1	3	1, 3, 10, 36, 136, 531, 2126, 8688, 36121, 152406,...	-
2	1	1, 0, 2, 0, 5, 0, 15, 0, 51, 0, 188, 0, 731, 0, 2950, 0, 12235,...	A007317
2	2	1, 0, 3, 0, 11, 0, 46, 0, 212, 0, 1049, 0, 5463, 0, 29527, 0, 164069,...	-
2	3	1, 0, 4, 0, 19, 0, 101, 0, 583, 0, 3582, 0, 23073, 0, 154032, ...	-

Cuadro 4.15: Sucesiones obtenidas para $k = 1, 2, 3$ y $l = 1, 2$, Ejemplo 4.4.11.

Capítulo 5

Otras Aplicaciones de la Metodología de los Autómatas de Conteo

En este último capítulo vamos a mostrar algunas aplicaciones adicionales de los autómatas de conteo estudiados en los capítulos anteriores. Además, mostraremos algunos ejemplos de cómo extender la MAC para casos de funciones generatrices de más de una variable.

5.1. Un ejemplo más de trayectorias de Motzkin

Este ejemplo resume la idea general de cómo utilizar la MAC. El problema consiste en enumerar las trayectorias de Motzkin sin pasos de la forma UH^iD , con $i \geq 0$, entre los niveles $s-1$ y s . Denotaremos por $w_n^{(s)}$ la cantidad de estas trayectorias de longitud n . En la Figura 5.1 mostramos las trayectorias de Motzkin de longitud 5 sin pasos de la forma UH^iD entre el eje x y el nivel 1.

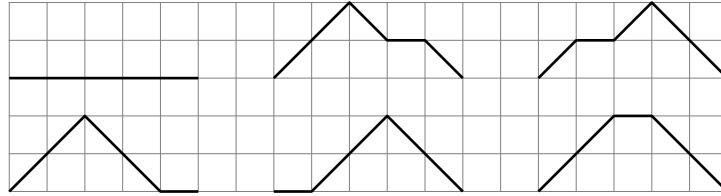


Figura 5.1: Trayectorias de Motzkin de longitud 5 sin pasos de la forma UH^iD .

Lo primero es construir un autómata de conteo convergente \mathcal{M}_P tal que para todo $n \geq 0$, $L^{(n)}(\mathcal{M}_P) = w_n^{(s)}$. Este problema se puede solucionar con el autómata de conteo de la Figura 5.2. Es claro que el subautómata determinado por los estados $s-1$, s , $s+1$ y s' es el encargado de evitar los pasos de la forma UH^iD entre los niveles $s-1$ y s .

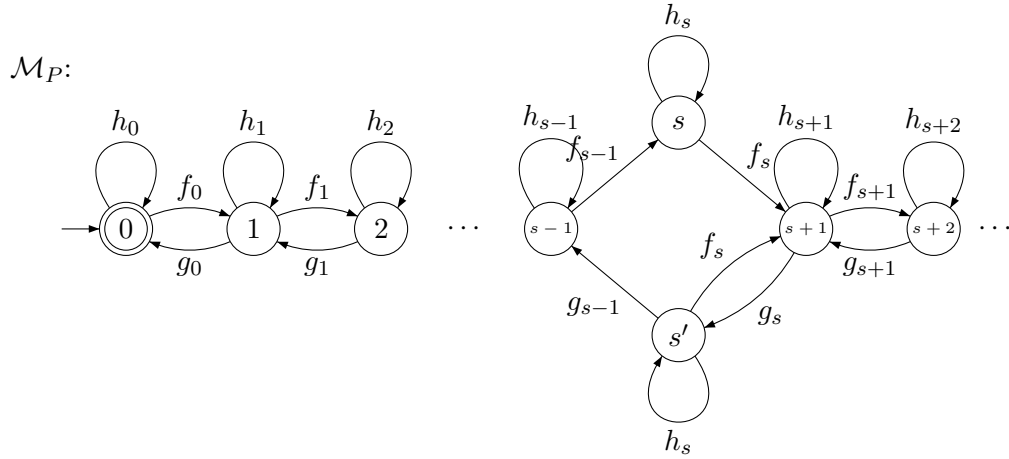


Figura 5.2: Autómata de conteo \mathcal{M}_P .

Lo segundo que se debe hacer es plantear un sistema de ecuaciones entre FGs, para lo cual se utilizará el autómata de conteo equivalente a \mathcal{M}_P de la Figura 5.3.

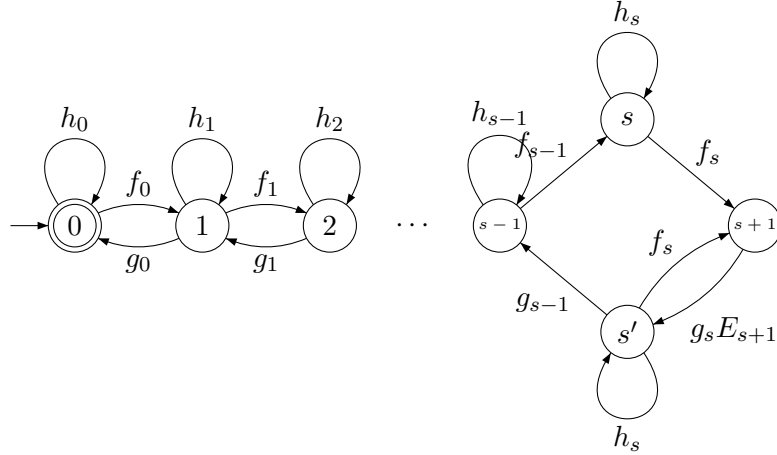


Figura 5.3: Autómata de conteo equivalente a \mathcal{M}_P .

Por lo tanto, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones entre FGs, en el que $L_0 = P_s(z)$:

$$\begin{cases} P_s(z) = h_0 P_s(z) + f_0 L_1 + 1 \\ L_i = g_{i-1} L_{i-1} + h_i L_i + f_i L_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq s-1 \\ L_s = h_s L_s + f_s L_{s+1} \\ L'_s = g_{s-1} L_{s-1} + h_s L'_s + f_s L_{s+1} \\ L_{s+1} = g_s E_{s+1} L'_s, \end{cases}$$

el cual es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} P_s(z) = F_0 L_1 + H \\ L_i = G_{i-1} L_{i-1} + F_i L_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq s-1 \\ L_s = F_s L_{s+1} \\ L'_s = G_{s-1} L_{s-1} + F_s L_{s+1} \\ L_{s+1} = g_s E_{s+1} L'_s, \end{array} \right.$$

donde $F_i = f_i(z)/(1 - h_i(z))$, $G_i = g_i(z)/(1 - h_{i+1}(z))$ para $i \geq 0$ y $H = 1/(1 - h_0(z))$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} L'_s &= \frac{G_{s-1}}{1 - g_s F_s E_{s+1}} L_{s-1} = g_{s-1} E_s L_{s-1}, \\ L_{s+1} &= g_{s-1} g_s E_s E_{s+1} L_{s-1}, \\ L_{s-1} &= \frac{G_{s-2}}{1 - f_s g_s F_{s-1} G_{s-1} E_s E_{s+1}} L_{s-2}. \end{aligned}$$

Al sustituir reiteradamente en cada una de las ecuaciones de obtiene que

$$P_s(z) = \frac{1}{1 - h_0 - \frac{f_0 g_1}{1 - h_1 - \frac{f_1 g_1}{\vdots \frac{f_{s-2} g_{s-2}}{1 - h_{s-2} - \frac{f_{s-1} g_{s-1} f_s g_s}{1 - h_{s-1} - \frac{f_s g_s}{1 - h_s} E_s(z) E_{s+1}(z)}}}}} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{1 - h_0 - \frac{f_0 g_1}{1 - h_1 - \frac{f_1 g_1}{\vdots \frac{f_{s-2} g_{s-2}}{1 - h_{s-2} - \frac{f_{s-1} g_{s-1} f_s g_s}{1 - h_{s-1} - \frac{f_s g_s}{1 - h_s} E_s(z) E_{s+1}(z)}}}}} \right\} s-1 \text{ veces},$$

donde $f_i(z)$, $g_i(z)$ y $h_i(z)$ son transiciones en paralelo para todo $i \geq 0$.

En particular si para todo $i \geq 0$, $f_i(z) = f(z)$, $g_i(z) = g(z)$ y $h_i(z) = h(z)$ se obtiene la siguiente FG:

$$P^*(z) = \frac{1}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{\vdots \frac{f(z)g(z)}{1 - h(z) - \frac{f^2(z)g^2(z)}{1 - h(z)} B^2(z)}}}}} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{1 - h(z) - \frac{f(z)g(z)}{\vdots \frac{f(z)g(z)}{1 - h(z) - \frac{f^2(z)g^2(z)}{1 - h(z)} B^2(z)}}}}} \right\} s-1 \text{ veces},$$

donde $B(z)$ es la FG del Corolario 3.3.2. Es claro que si $f(z) = g(z) = h(z) = z$, se obtiene la FG del problema dado.

$$P_{Mot_s}(z) = \left. \begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 - z - \frac{z^2}{\hline 1 - z - \frac{z^2}{\hline \vdots \\ \hline 1 - z - \frac{z^2}{\hline 1 - z - \frac{z^4}{1 - z} M^2(z)}}} \end{array} \right\} s - 1 \text{ veces},$$

donde $P_{Mot_s}(z)$ es la FG de las trayectorias de Motzkin de longitud n sin pasos de la forma UH^iD , con $i \geq 0$, entre los niveles $s - 1$ y s , y $M(z)$ es la FG de las trayectorias de Motzkin. En particular para $s = 1$ se obtiene que

$$\begin{aligned} P_{Mot_1}(z) &= \frac{1}{1 - z - \frac{z^4}{1 - z} M^2(z)} = \frac{2(1 - z)}{1 - 2z + 3z^2 + \sqrt{1 - 2z - 3z^2}(1 - z)} \\ &= 1 + z + z^2 + z^3 + 2z^4 + 6z^5 + 18z^6 + 50z^7 + 133z^8 + 349z^9 + \dots \end{aligned}$$

La cual corresponde con la sucesión A089380.

Algo importante es que no sólo se solucionó el problema para las trayectorias de Motzkin, también se puede adaptar el problema para una gran variedad de trayectorias, lo cual es una de las fortalezas de esta metodología.

5.2. Aplicaciones de la MAC en Trayectorias Reticulares n -Dimensionales

Dado un subconjunto S de \mathbb{Z}^n , definimos una trayectoria reticular n -dimensional con pasos en el conjunto S como una sucesión finita $\Gamma = s_1 s_2 \dots s_k$ donde $s_i \in S$ para todo $i \geq 0$. Suponga que $s_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})$ para cada $i = 1, 2, \dots, k$. Si Γ inicia en $s_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ entonces Γ pasa secuencialmente a través de los puntos reticulares $P_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, $P_1 = (x_{10} + x_{11}, x_{20} + x_{21}, \dots, x_{n0} + x_{n1})$, y así sucesivamente, terminando en el punto $P_k = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, donde $x_i = \sum_{j=0}^k x_{ij}$.

Diremos que la trayectoria reticular n -dimensional $\Gamma = s_1 s_2 \dots s_k$ es superior si $P_0 = (0, 0, \dots, 0)$ y para todo $j = 0, 1, \dots, k$ se tiene que $x_i = \sum_{j=0}^k x_{ij} \geq 0$, es decir Γ inicia en el origen y está siempre sobre el hiperplano $x_n = 0$.

Denotaremos por $\tau_k^{(n)}$ al conjunto de trayectorias reticulares superiores n -dimensionales de longitud k que terminan en el hiperplano $x_n = 0$ y tal que

$$S = \{\pm e_i : e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}.$$

Además, denotaremos $\tau^{(n)}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} |\tau_i^{(n)}| z^i$.

Por ejemplo, en la Figura 5.4 se muestran los elementos del conjunto $\tau_3^{(2)}$, el cual tiene un total de 14 elementos.

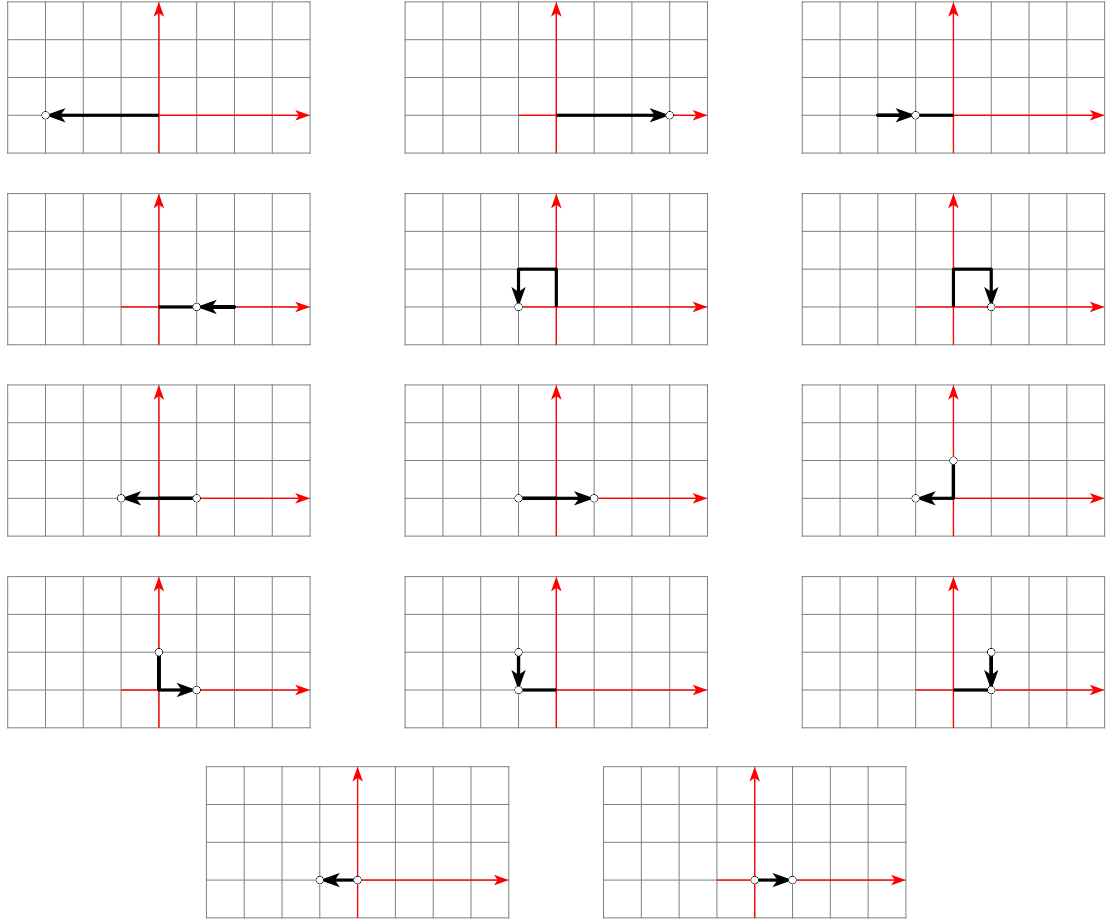


Figura 5.4: Elementos del conjunto $\tau_3^{(2)}$.

En la Figura 5.5 se muestran los elementos del conjunto $\tau_2^{(3)}$, el cual tiene un total de 17 elementos.

Utilizando la MAC es sencillo de enumerar el conjunto de estas trayectorias. Estos resultados generalizan los obtenidos en [41].

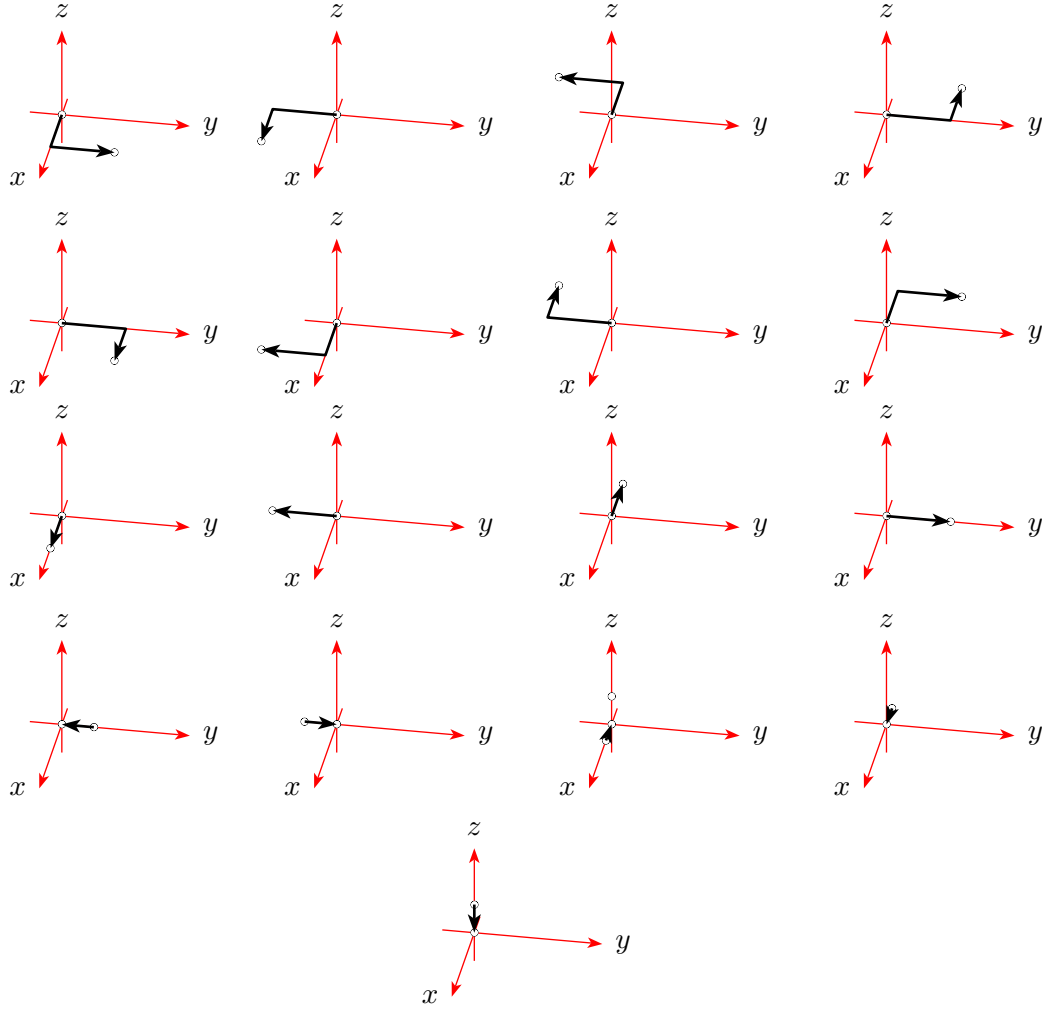


Figura 5.5: Elementos del conjunto $\tau_2^{(3)}$.

Proposición 5.2.1. *La función generatriz $\tau^{(n)}(z)$, con $n \geq 0$, está dada por*

$$\tau^{(n)}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} |\tau_i^{(n)}| z^i = \frac{1 - 2^{n-1}z - \sqrt{1 - 2^n z + (2^{2n-2} - 4)z^2}}{2z^2}$$

y

$$|\tau_l^{(n)}| = \sum_{i=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} C_i \binom{l}{2i} 2^{(n-1)(l-2i)}, \quad (5.1)$$

donde C_i es el i -ésimo número de Catalan.

Demostración. Para $n \geq 2$, al avanzar un paso, la coordenada x_{ni} de un punto $P_i \in \mathbb{Z}^n$ puede cambiar de 1 forma si P_i pertenece al hiperplano $x_n = 0$ y de 2 formas en caso contrario

(“arriba” o “abajo”). Las demás coordenadas siempre pueden cambiar de dos maneras. Si hacemos $f(z) = g(z) = z$ y $h(z) = 2^{n-1}z$ en el autómata \mathcal{M}_{Lin} , ver Figura 3.13, se obtiene la descripción de dicho problema, ya que $f(z) = g(z) = z$ modela las dos opciones de x_{ni} . Las demás coordenadas tienen 2^{n-1} posibilidades las cuales son modeladas con los bucles (no se cambia en el hiperplano). Por lo tanto, los resultados se obtienen directamente del Corolario 3.3.2. \square

Si $n = 2$, se obtiene que

$$\begin{aligned}\tau^{(2)}(z) &= \frac{1 - 2z - \sqrt{1 - 4z}}{2z^2} \\ &= 1 + 2z + 5z^2 + 14z^3 + 42z^4 + 132z^5 + 429z^6 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}z^n,\end{aligned}$$

luego $|\tau_l^{(2)}| = C_{l+1}$ donde C_l es el l -ésimo número de Catalan. Además, de la Ecuación (5.1) se obtiene que

$$C_{l+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} C_k \binom{l}{2k} 2^{l-2k},$$

la cual corresponde a la formula de Touchard. Esta presentación de la fórmula de Touchard es diferente a la que aparece en [3, 21, 36, 65].

Para $n = 3$, se obtiene que

$$\tau^{(3)}(z) = \frac{1 - 4z - \sqrt{1 - 8z + 12z^2}}{2z^2} = 1 + 4z + 17z^2 + 76z^3 + 354z^4 + 1704z^5 + 8421z^6 + \dots$$

y

$$|\tau_l^{(3)}| = \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} C_k \binom{l}{2k} 4^{l-2k}.$$

Además, es claro que estas trayectorias n -dimensionales, no son más que trayectorias de Motzkin 2^{n-1} -coloreadas. En el Cuadro 5.1 se muestran los valores para $n = 2, 3, 4, 5$.

n	Secuencia	A-Número
2	1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, ...	A000108
3	1, 4, 17, 76, 354, 1704, 8421, ...	A005572
4	1, 8, 65, 536, 4482, 37968, ...	-
5	1, 16, 257, 4144, 67074, 1089696, ...	-

Cuadro 5.1: Sucesiones obtenidas para $n = 2, 3, 4, 5$.

Diremos que una trayectoria reticular n -dimensional es (u, v) -coloreada si para todo $i = 1, 2, \dots, n-1$ los pasos $\pm e_i$ se pueden colorear de u colores diferentes y el paso e_n se puede colorear de v colores diferentes. Denotaremos por $\tau_{l,(u,v)}^{(n)}$ al conjunto de todas las trayectorias superiores (u, v) -coloreadas n -dimensionales de longitud l y $\tau_{(u,v)}^{(n)}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} |\tau_{i,(u,v)}^{(n)}| z^i$.

Corolario 5.2.2. *La FG $\tau_{(u,v)}^{(n)}(z)$, con $n \geq 2$, está dada por*

$$\tau_{(u,v)}^{(n)}(z) = \frac{1 - 2^{n-1}uz - \sqrt{1 - 2^nuz + (2^{2m-2}u^2 - 4v)z^2}}{2vz^2},$$

y

$$|\tau_{l,(u,v)}^{(n)}| = \sum_{i=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} C_i \binom{l}{2i} v u^{l-2i} 2^{(n-1)(l-2i)}.$$

Demostración. Se obtiene directamente del Corolario 3.3.2. □

Las trayectorias en las que no existe la condición de ser superiores, pueden ser estudiadas con el autómata \mathcal{M}_{BLin} .

Proposición 5.2.3. *La función generatriz de las trayectorias reticulares n -dimensionales con $S = \{\pm e_i : \text{para } i = 1, \dots, n\}$, es*

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2^nz + (2^{2n-2} + 4)z^2}}$$

y

$$[z^s] F(z) = 2^{s(n-1)} + \sum_{m=1}^s \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{s-2m}{2} \rfloor} 2^{m+(n-1)(s-2m-2k)} \frac{m}{m+2k} \binom{m+2k}{k} \binom{s}{2m+2k}.$$

Demostración. Se obtiene directamente de los Corolarios 3.3.17 y 3.3.18, con $f(z) = z = g(z)$ y $h(z) = 2^{n-1}z$. □

En el Cuadro 5.2 se muestran los valores para $n = 2, 3, 4, 5$.

n	Secuencia	A-Número
2	1, 2, 6, 20, 70, 252, 924, 3432, 12870, 48620, ...	A000984
3	1, 4, 18, 88, 454, 2424, 13236, 73392, 411462, 2325976, ...	A081671
4	1, 8, 66, 560, 4870, 43248, 390804, 3582048, 33213510, 310850480, ...	-
5	1, 16, 258, 4192, 68614, 1130976, 18766356, 313338048, 5262159942, ...	-

Cuadro 5.2: Sucesiones obtenidas para $n = 2, 3, 4, 5$.

Sea $\beta_l^{(n)}$ las trayectorias reticulares superiores n -dimensionales de longitud l y tal que $S = \{\pm e_i : \text{para } i = 1, \dots, n\}$, es decir, quitamos la restricción de terminar en el hiperplano $x_n = 0$. Sea $\beta^{(n)}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} |\beta_i^{(n)}| z^i$. El problema de calcular $|\beta_i^{(n)}|$ para $n = 3$ fue planteado por Deutsch en [22]. Dicho problema es equivalente a contar los prefijos de $\tau_i^{(3)}$. Es claro que el problema se puede solucionar para todo $n \geq 2$ utilizando el autómata $\text{FIN}_{\mathbb{N}}(\mathcal{M}_{Lin})$.

Proposición 5.2.4. *La función generatriz $\beta^{(n)}(z)$, con $n \geq 2$, está dada por*

$$\beta^{(n)}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} |\beta_i^{(n)}| z^i = \frac{1 - (2 + 2^{n-1})z - \sqrt{1 - 2^n z + (2^{2n-2} - 4)z^2}}{2z((2 + 2^{n-1})z - 1)}$$

y

$$|\beta_s^{(n)}| = \sum_{m=0}^s \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{s-m}{2} \rfloor} \frac{m+1}{m+k+1} \binom{s}{k, s-2k, k+m} 2^{(n-1)(s-2k-m)}.$$

Demostración. Se obtiene directamente de los Corolarios 4.1.5 y 4.1.6, con $f(z) = z = g(z)$ y $h(z) = 2^{n-1}z$. \square

En [12], Brawner presentó una solución diferente para el caso $n = 3$, sin utilizar funciones generatrices. Ninguna de las soluciones enviadas por los lectores coincide explícitamente con nuestra solución.

Podemos quitar la condición de ser superiores y obtenemos la siguiente FG, utilizando el autómata $\text{FIN}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}_{Lin})$.

$$\frac{1}{1 - (2 - 2^{n-1})z}.$$

5.3. Triángulos Numéricos

El objetivo de esta sección es aplicar la MAC en el estudio de las funciones generatrices asociadas a las filas y diagonales de algunas familias de arreglos numéricos.

5.3.1. Triángulo de Pascal

El triángulo de Pascal es tal vez uno de los arreglos numéricos más conocidos en la literatura, ver por ejemplo [5, 10, 47]. Cada componente está dada por el elemento $C(n, k) = \binom{n}{k}$ con $0 \leq k \leq n$. En la Figura 5.3 se muestran los primeros valores.

Cuadro 5.3: Triángulo de Pascal.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-4z^2}} = 1 + 2z^2 + 6z^4 + 20z^6 + 70z^8 + 252z^{10} + 924z^{12} \dots$$

Utilizando los autómatas de conteo del capítulo anterior vamos a encontrar las FGs de cada una de las columnas. La columna central corresponde a la columna 0, las columnas a su izquierda (derecha) se enumeran con enteros positivos (negativos). Con esta numeración se tiene una forma equivalente de notar el triángulo de Pascal, como se muestra en el Cuadro 5.4.

Cuadro 5.4: Otra notación para el triángulo de Pascal .

$$\binom{m}{n} = \left\langle \begin{matrix} m \\ 2n-m \end{matrix} \right\rangle \text{ y } \left\langle \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\rangle = \binom{m}{\frac{m+n}{2}} \quad (5.2)$$

Si $m + n \cong 1 \pmod 2$ entonces $\left(\frac{m}{\frac{m+n}{2}}\right) = 0$, esto corresponde a los espacios en blanco del triángulo de la derecha, ver Cuadro 5.4. Denotaremos por $\mathcal{CPas}_n(z)$ la FG de la columna n -ésima del triángulo de Pascal. Es claro que $\mathcal{CPas}_n(z) = \mathcal{CPas}_{-n}(z)$.

$$\mathcal{CP}as_n(z) = \frac{z^n T^n(z)}{1 - 2z^2 T(z)} = \frac{z^n}{\sqrt{1 - 4z^2}} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2} \right)^n, \quad n \geq 0,$$

donde $T(z) = C(z^2)$ y $C(z)$ es la FG de los números de Catalan.

Demostración. A partir del autómata de conteo $\text{FIN}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{BLin})$ (ver Teorema 4.1.17) con $f(z) = z = g(z)$ y $h(z) = 0$ se obtiene $\mathcal{CPas}_n(z)$. En efecto por la Ecuación (4.17), se obtiene que

$$\mathcal{CPas}_n(z) = \frac{z^n M_{Dyck}^n(z)}{1 - 2z^2 M_{Dyck}(z)} = \frac{z^n T^n(z)}{1 - 2z^2 T(z)}$$

□

Usando la siguiente identidad (ver Ecuación (2.5.15) de [72])

$$\frac{1}{\sqrt{1-4z}} \left(\frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} \right)^k = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m+k}{m} z^m, \quad (5.3)$$

se obtiene que

$$\mathcal{CPas}_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m+n}{m} z^{2m+n}.$$

El elemento $C(0,0) = 1$ en el triángulo de Pascal se denomina vértice del triángulo. La diagonal ascendente i -ésima del triángulo de Pascal corresponde a la diagonal determinada por los elementos $C(1,i), C(2,i), C(3,i), \dots$. Si $i = 0$ se obtiene la diagonal principal ascendente. Análogamente se tiene la diagonal descendente i -ésima del triángulo de Pascal y la diagonal principal descendente.

Proposición 5.3.2. *Sea $\mathcal{DPas}_n(z)$ la FG de la diagonal ascendente n -ésima del triángulo de Pascal. Entonces*

$$\mathcal{DPas}_n(z) = \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}},$$

y la entrada $(l-n)$ -ésima de la diagonal ascendente n -ésima, diag_l^n es

$$\text{diag}T1_l^n = \binom{l}{n}, \quad n \leq l.$$

Demostración. Consideremos el autómata de la Figura 5.6.

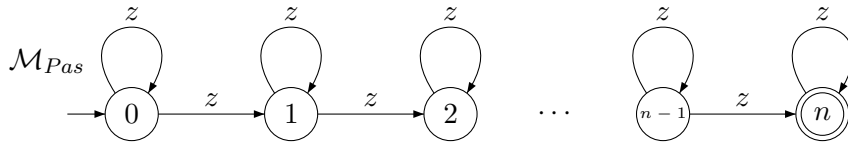


Figura 5.6: Autómata de conteo para las diagonales del triángulo de Pascal.

En este caso las transiciones de la forma $(i, z, i+1)$ con $0 \leq i \leq n-1$ representan pasos

en dirección $(1, -1)$ que descienden en el triángulo desde su vértice. Los bucles representan los pasos en dirección $(-1, -1)$. Como el estado de aceptación es el n , entonces es claro que $L^{(n)}(\mathcal{M}_{Pas})$ corresponde con el número de trayectorias de longitud n desde el vértice del triángulo hasta la diagonal ascendente n -ésima.

Luego se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de FGs

$$\begin{cases} L_0 &= zL_0 + zL_1 \\ L_i &= zL_i + zL_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ L_n &= zL_n + 1. \end{cases}$$

Al despejar L_0 del sistema de ecuaciones, se obtiene $\mathcal{DPas}_n(z)$. Por otro lado, como

$$\frac{z^n}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{t=0}^{\infty} \binom{t+n}{n} z^{t+n},$$

sustituimos $s = t + n$, obteniendo $\sum_{s=n}^{\infty} \binom{s}{s-n} z^s$, luego $diag_l^n = \binom{l}{l-n} = \binom{l}{n}$, $n \leq l$. \square

Note que la FG $\mathcal{DPas}_n(z)$ corresponde con la FG de la columna n -ésima y diagonal n -ésima del triángulo de Pascal justificado a la izquierda, ver Cuadro 5.5.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{array}$$

Cuadro 5.5: Triángulo de Pascal justificado a izquierda.

5.3.2. Primera Generalización del Triángulo de Pascal

Del triángulo de Pascal se conocen varias generalizaciones, ver por ejemplo [4, 5, 10, 44, 47, 70]. En particular, en esta sección estamos interesados en estudiar las FGs asociadas de la generalización del triángulo de Pascal introducida en [70].

Definición 5.3.3. Sea n un entero positivo. Para $i \in \mathbb{Z}$, definimos los números

$$A_{n,i} = \begin{cases} a^{n-1}q, & \text{si } i = 0; \\ b^n p, & \text{si } n = i; \\ aA_{n-1,k} + bA_{n-1,k-1}, & \text{si } 0 < i < n; \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Esta generalización del triángulo de Pascal se obtiene al ubicar los valores $A_{n,i}$ en un arreglo en forma triangular como se muestra en el Cuadro 5.6. Este triángulo lo denotaremos por T_1 . En la referencia [70] estudian la versión justificada a izquierda.

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & \star & & & \\ & & & & A_{1,0} & & A_{1,1} & \\ & & & A_{2,0} & & A_{2,1} & & A_{2,2} \\ & & A_{3,0} & & A_{3,1} & & A_{3,2} & & A_{3,3} \\ & A_{4,0} & & A_{4,1} & & A_{4,2} & & A_{4,3} & & A_{4,4} \\ A_{5,0} & & A_{5,1} & & A_{5,2} & & A_{5,3} & & A_{5,4} & & A_{5,5} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Cuadro 5.6: Primera generalización del triángulo de Pascal.

Claramente si $a = b = q = 1$ y $p = 0$ se obtiene el Triángulo de Pascal usual. En el Cuadro 5.7 se muestran los primeros valores del triángulo.

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & \star & & & \\ & & & & q & & bp & \\ & & aq & & abp + bq & & b^2p & \\ & a^2q & & a^2bp + 2abq & & 2ab^2p + b^2q & & b^3p \\ a^3q & & a^3bp + 3a^2bq & & 3a^2b^2p + 3ab^2q & & 3ab^3p + b^3q & & b^2p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Cuadro 5.7: Primera generalización del triángulo de Pascal.

Proposición 5.3.4. Sea $CPasT1_n(z)$ la FG de la columna n -ésima de la generalización del triángulo de Pascal T_1 . Entonces

$$CPasT1_n(z) = \begin{cases} \frac{qb^{n+1}z^{n+2}T^{n+1}(abz) + pb^n z^n T^{n-1}(abz)}{1 - 2abz^2T(abz)}, & \text{si } 1 \leq n; \\ \frac{(qb + pb^2)z^2T(abz)}{1 - 2abz^2T(abz)}, & \text{si } n = 0; \\ \frac{pb^{|n|+2}z^{|n|+2}T^{|n|+1}(abz) + qb^{|n|-1}z^{|n|}T^{|n|-1}(abz)}{1 - 2abz^2T(abz)}, & \text{si } n \leq -1. \end{cases}$$

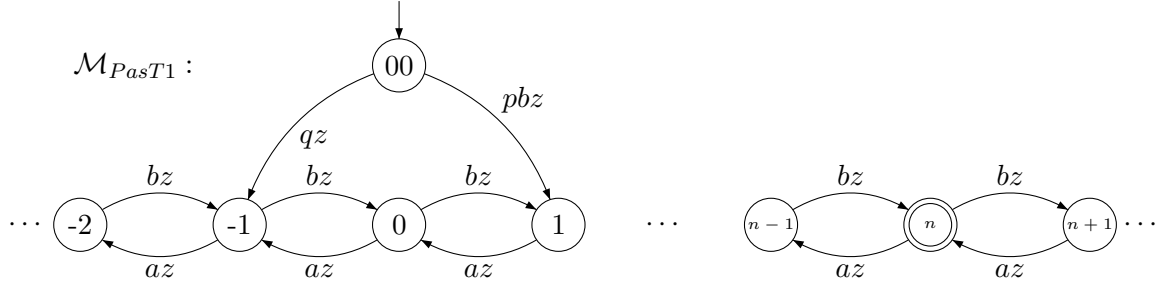


Figura 5.7: Autómata de conteo para las columnas del triángulo de Pascal T_1 .

Demostración. Consideremos el autómata de la Figura 5.7.

En este caso las ponderaciones de las transiciones $(00, qz, -1)$ y $(00, pbz, 1)$ representan los valores iniciales del triángulo (q y pb). Las demás transiciones tienen la misma función que en el triángulo de Pascal.

Si 1 fuera el estado inicial del autómata \mathcal{M}_{PasT_1} , entonces por el Corolario 4.1.18 se obtendría que

$$L_1(z) = \frac{b^{n-1}z^{n-1}T^{n-1}(abz)}{1 - 2abz^2T(abz)}.$$

Análogamente, si -1 fuera el estado inicial del autómata \mathcal{M}_{PasT_1} , se obtendría que

$$L'_1(z) = \frac{b^{n+1}z^{n+1}T^{n+1}(abz)}{1 - 2abz^2T(abz)}.$$

Puesto que $L_{00} = pbzL_1 + qzL'_1$, entonces

$$L_{00} = \mathcal{CPasT}_1(z) = \frac{qb^{n+1}z^{n+2}T^{n+1}(abz) + pb^n z^n T^{n-1}(abz)}{1 - 2abz^2T(abz)}$$

Si $n = 0$ se obtiene que

$$L'_1 = L_1 = \frac{bzT(abz)}{1 - 2abz^2T(abz)},$$

luego

$$L_{00} = \mathcal{CPasT}_1(z) = \frac{qbz^2T(abz) + pb^2z^2T(abz)}{1 - 2abz^2T(abz)}.$$

Para $n \leq -1$ el argumento es análogo. □

Proposición 5.3.5. Sea $\mathcal{DPasT}_1(z)$ la FG de la diagonal ascendente n -ésima de la generalización del triángulo de Pascal T_1 . Entonces

$$\mathcal{DPasT}_1(z) = \frac{qb^n z^{n+1}}{(1 - az)^{n+1}} + \frac{pb^n z^n}{(1 - az)^n},$$

y la entrada $(l - n)$ -ésima de la diagonal ascendente n -ésima, $diagT1_l^n$ es

$$diagT1_l^n = \binom{l-1}{n} qb^n a^{l-n-1} + \binom{l-1}{n-1} pa^{l-n} b^n, \quad n \leq l.$$

Demostración. Consideremos el autómata de la Figura 5.8.

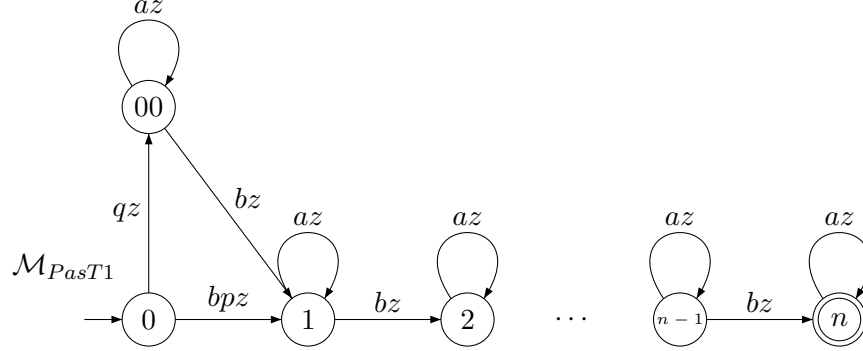


Figura 5.8: Autómata de conteo para las diagonales de la generalización del triángulo de Pascal (T_1).

En este caso las transiciones de la forma $(i, bz, i + 1)$ con $1 \leq i \leq n - 1$ y $(0, buz, 1)$ representan pasos en dirección $(1, -1)$ que descienden en el triángulo desde su vértice. Los bucles representan los pasos en dirección $(-1, -1)$. La transición $(0, qz, 00)$ representa el paso inicial en dirección $(1, 1)$. Como el estado de aceptación es el n , entonces es claro que $L^{(n)}(\mathcal{M}_{PasT1})$ corresponde con el número de trayectorias de longitud n desde el vértice del triángulo hasta la diagonal ascendente n -ésima.

Luego se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de FGs

$$\begin{cases} L_0 &= qzL'_0 + bpzL_1 \\ L'_0 &= azL'_0 + bzL_1 \\ L_i &= azL_i + bzL_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n - 1 \\ L_n &= azL_n + 1. \end{cases}$$

Al despejar L_0 del sistema de ecuaciones, se obtiene $\mathcal{DPasT1}_n(z)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{DPasT1}_n(z) &= \frac{qb^n z^{n+1}}{(1 - az)^{n+1}} + \frac{pb^n z^n}{(1 - az)^n} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+n}{l} qb^n a^l z^{l+n+1} + \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{r} pa^r b^n z^{n+r}. \end{aligned}$$

Haciendo $u = l + n + 1$ en la primer suma y $u = n + r$ en la segunda, obtenemos que:

$$\mathcal{DPas}T_1(z) = \sum_{u=n}^{\infty} \binom{u-1}{n} q b^n a^{u-n-1} z^u + \sum_{u=n}^{\infty} \binom{u-1}{n-1} p a^{u-n} b^n z^u,$$

quedando demostrado. \square

Triángulo (a, b) -Pascal

Un caso particular de la generalización del triángulo de Pascal T_1 son los arreglos numéricos A029635 (triángulo de Lucas), o el arreglo A029600 (triángulo $(2,3)$ -Pascal), entre otros.

Definición 5.3.6. Un triángulo (a, b) -Pascal es un triángulo numérico $T_{(a,b)}$ tal que su diagonal principal ascendente y su diagonal principal descendente son \star, a, a, a, a, \dots , y \star, b, b, b, b, \dots , respectivamente. Además, $T_{(a,b)}(n, m) = T_{(a,b)}(n-1, m-1) + T_{(a,b)}(n-1, m)$.

$$\begin{array}{cccccc} & & & \star & & \\ & & a & & b & \\ & a & & a+b & & b \\ & & 2a+b & & a+2b & \\ a & & 3a+b & & 3a+3b & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Cuadro 5.8: Triángulo (a, b) -Pascal.

Este triángulo se obtiene a partir de la generalización del triángulo de Pascal haciendo la sustitución $q \mapsto a, a = b \mapsto 1, bp \mapsto b$.

Corolario 5.3.7. Sea $\mathcal{CPas}(ab)_n(z)$ la FG de la columna n -ésima del triángulo (a, b) -Pascal. Entonces si $n \geq 0$ se obtiene que

$$\mathcal{CPas}(ab)_n(z) = \begin{cases} \frac{az^{n+2}T^{n+1}(z) + bz^nT^{n-1}(z)}{(1-2z^2T(z))^{n+1}} = az\mathcal{CPas}_{n+1}(z) + bz\mathcal{CPas}_{n-1}(z), & \text{si } n \geq 0. \\ \frac{bz^{|n|+2}T^{|n|+1}(z) + az^{|n|}T^{|n|-1}(z)}{1-2z^2T(z)} = bz\mathcal{CPas}_{|n|+1}(z) + az\mathcal{CPas}_{|n|-1}(z), & \text{si } n \leq 0. \end{cases}$$

Además, la entrada ubicada en la intersección de la fila m con la columna n , $\langle n \rangle_{ab}^m$, es

$$\langle n \rangle_{ab}^m = a \langle n+1 \rangle_{ab}^{m-1} + b \langle n-1 \rangle_{ab}^{m-1} = a \binom{m-1}{\frac{m-1}{2}} + b \binom{m-1}{\frac{m-1}{2}}.$$

Demostración. Se obtiene a partir de las Proposiciones 5.3.4 y 5.3.1, y la Ecuación (5.2). \square

El siguiente corolario se obtiene claramente de la Proposición 5.3.5.

Corolario 5.3.8. *La FG de la diagonal ascendente n -ésima del triángulo (a, b) -Pascal es*

$$a \frac{z^{n+1}}{(1-z)^{n+1}} + b \frac{z^n}{(1-z)^n},$$

y la entrada $l - n$ -ésima de la diagonal ascendente n -ésima es

$$a \binom{r-1}{n} + b \binom{r-1}{n-1}, \quad n \leq l.$$

5.3.3. Segunda Generalización del Triángulo de Pascal

La generalización que vamos a presentar a continuación del Triángulo de Pascal fue introducida por Barry en [4] y está basada en la siguiente igualdad (ver Proposición 14 de [4]).

$$\binom{n}{k} = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{j} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{n-k}{j}. \quad (5.4)$$

Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ una sucesión de enteros con $a_0 = 1$. Se define el siguiente arreglo numérico

$$T(n, k) = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{j} a_j, \quad n, k \geq 0. \quad (5.5)$$

Este arreglo se denomina triángulo asociados con la secuencia a_n . En particular si $a_n = r^n$ lo llamaremos un r -triángulo y lo denotaremos por $T(r)$. Claramente el 1-triángulo es el Triángulo de Pascal. En el Cuadro 5.9 aparecen los primeros términos de $T(r)$.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ 1 & r+1 & 1 & & & & \\ 1 & 2r+1 & 2r+1 & 1 & & & \\ 1 & 3r+1 & r^2+4r+1 & 3r+1 & & & \\ 1 & 4r+1 & 3r^2+6r+1 & 3r^2+6r+1 & 4r+1 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{array}$$

Cuadro 5.9: Triángulo de Pascal justificado a izquierda.

El objetivo es estudiar las FGs de las columnas y las diagonales de los r -triángulos.

Lema 5.3.9 (Barry, [4]). *Sea $T(n, k) = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{j} r^j$, entonces*

$$T(n, k) = T(n-1, k-1) + (r-1)T(n-2, k-1) + T(n-1, k). \quad (5.6)$$

La Ecuación (5.6) sugiere que los r -triángulos se pueden escribir en la forma usual del triángulo de Pascal, como se muestra en el Cuadro 5.10. Este triángulo lo denotaremos por $T_{Pas}(r)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 1 & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & 1 & & 1 & \\
& & 1 & & r+1 & & 1 \\
& 1 & & 2r+1 & & 2r+1 & 1 \\
& & 3r+1 & & r^2+4r+1 & & 3r+1 \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Cuadro 5.10: Triángulo $T_{Pas}(r)$.

Teorema 5.3.10. *La FG de la columna central del triángulo $T_{Pas}(r)$ (en el triángulo $T(r)$) corresponde a los elementos de la forma $T(2n, n)$, es*

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2(r+2)z^2 + (r-1)^2z^4}}.$$

Demostración. El resultado se obtiene a partir del Corolario 3.3.17 con $h(z) = (r-1)z^2$ y $f(z) = z = g(z)$. \square

Proposición 5.3.11. *La FG de la columna n -ésima del r -triángulo de Pascal es:*

$$\frac{z^n B^n(z)}{1 - (r-1)z^2 - 2z^2 B(z)}, \quad n \geq 0,$$

donde

$$B(z) = \frac{1 - (r-1)z^2 - \sqrt{(1 - (r-1)z^2)^2 - 4z^2}}{2z^2}.$$

Demostración. La demostración es análoga a la del Teorema 5.3.1. \square

Proposición 5.3.12. *La FG de la diagonal ascendente (o descendente) del r -triángulo de Pascal es*

$$\frac{(z + (r-1)z^2)^n}{(1-z)^{n+1}}.$$

Demostración. La demostración es analoga a la del Teorema 5.3.2. En este caso se considera el autómata de la Figura 5.9. \square

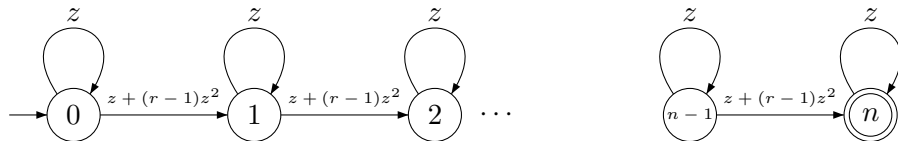


Figura 5.9: Autómata de conteo para las diagonales del r -triángulo de Pascal.

5.3.4. Rombo de Pascal

El rombo de Pascal es una variación del triángulo de Pascal el cual fue introducido en [45]. El arreglo inicia con 1 en el vértice y para hallar las demás entradas se suman los cuatro números en el rombo, así como se muestra en la Figura 5.11.

$$\begin{array}{ccc} & * & \\ * & * & * \\ & n & \end{array}$$

Cuadro 5.11: Regla de construcción rombo de Pascal.

Es decir, si $R(n, k)$ es la entrada en el rombo de Pascal ubicada en la fila n y la columna k , entonces

$$R(n+1, k) = R(n, k-1) + R(n, k) + R(n, k+1) + R(n-1, k),$$

con $R(0, 0) = R(1, 0) = R(1, 1) = R(1, 2) = 1$. En el Cuadro 5.12 aparecen los primeros valores del rombo de Pascal.

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & & & \\ & & 1 & 3 & 8 & 9 & 8 & 3 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 13 & 22 & 29 & 22 & 13 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 19 & 42 & 72 & 82 & 72 & 42 & 19 & 5 & 1 & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Cuadro 5.12: Rombo de Pascal.

En las referencias [35, 45] aparecen algunas propiedades del rombo Pascal, sin embargo, no hacen ningún estudio sobre las funciones generatrices de sus columnas. Este arreglo corresponde al arreglo A059317 de la OEIS. En esta última referencia mencionan que no parece existir una expresión simple para $R(n, k)$. En la siguiente proposición encontramos la FG de las columnas del rombo de Pascal y encontramos una fórmula general para $R(n, k)$ haciendo uso de los autómatas de conteo.

Proposición 5.3.13. *La FG de la columna n -ésima del rombo de Pascal es*

$$L_n(z) = \frac{F(z)^{n+1}T(F(z))^n}{z(1-2F(z)^2T(F(z)))},$$

donde $F(z)$ es la FG de los números de Fibonacci, es decir

$$F(z) = \frac{z}{1-z-z^2}.$$

Además,

$$R(a, b) = \sum_{m=0}^a \sum_{l=0}^{a-b-2m} \binom{2m+b}{m} \binom{l+b+2m}{l} \binom{l}{a-b-2m-l}.$$

Demostración. Teniendo en cuenta la regla de construcción del rombo de Pascal vamos a utilizar el autómata bilineal $\text{FIN}_{\{i\}}(\mathcal{M}_{BLin})$. Basta tomar $f(z) = z = g(z)$ y $h(z) = z + z^2$ en el Corolario 4.1.18. Luego

$$L_n(z) = \frac{z^n B(z)^n}{1 - z - z^2 - 2z^2 B(z)},$$

donde

$$\begin{aligned} B(z) &= \frac{1 - z - z^2 - \sqrt{(1 - z - z^2)^2 - 4z^2}}{2z^2} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\left(\frac{z}{1-z-z^2}\right)^2}}{\frac{2z^2}{1-z-z^2}} \\ &= \frac{1}{1 - z - z^2} \frac{1 - \sqrt{1 - 4F(z)^2}}{2F(z)^2} = \frac{F(z)}{z} T(F(z)). \end{aligned}$$

Así

$$L_n(z) = \frac{z^n \left(\frac{F(z)}{z} T(F(z)) \right)^n}{1 - z - z^2 - 2z^2 \frac{F(z)}{z} T(F(z))} = \frac{F(z)^{n+1} T(F(z))^n}{z(1 - 2F(z)^2 T(F(z)))}.$$

Por otro lado, a partir de la Identidad (5.3) es claro que

$$\frac{z^n T(z)^n}{1 - 2z^2 T(z)} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m+n}{m} z^{n+2m}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
L_n(z) &= \frac{F(z)^{n+1}T(F(z))^n}{z(1-2F(z)^2T(F(z)))} \\
&= \frac{F(z)^{n+1}(z)}{z} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m+n}{m} F(z)^{2m} \\
&= \frac{1}{1-z-z^2} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m+n}{m} F(z)^{2m+n} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m+n}{m} \frac{z^{2m+n}}{(1-z-z^2)^{n+2m+1}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{2m+n}{m} \binom{l+n+2m}{l} (1+z)^l z^{2m+n+l} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^l \binom{2m+n}{m} \binom{l+n+2m}{l} \binom{l}{s} z^{s+2m+n+l},
\end{aligned}$$

haciendo $t = s + 2m + n + l$

$$L_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{t=2m+n+l}^{2m+n+2l} \binom{2m+n}{m} \binom{l+n+2m}{l} \binom{l}{t-2m-n-l} z^t.$$

Entonces para $0 \leq b \leq a$, se tiene que

$$R(a, b) = \sum_{m=0}^a \sum_{l=0}^{a-b-2m} \binom{2m+b}{m} \binom{l+b+2m}{l} \binom{l}{a-b-2m-l}.$$

□

Definición 5.3.14. Los números convolucionados de Fibonacci $F_j^{(r)}$ son definidos por medio de la siguiente función generatriz

$$(1-x-x^2)^{-r} = \sum_{j=0}^{\infty} F_{j+1}^{(r)} x^j, \quad r \in \mathbb{Z}^+.$$

Si $r = 1$ se obtiene los números de Fibonacci.

Corolario 5.3.15. La entrada $R(a, b)$ del rombo de Pascal está dada por

$$R(a, b) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{a-b}{2} \rfloor} \binom{2m+b}{m} F_{a-b-2m+1}^{(b+2m+1)}, \quad (5.7)$$

donde $F_j^{(r)}$ son los números convolucionados de Fibonacci.

Demostración.

$$\begin{aligned} L_n(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m+n}{m} \frac{z^{2m+n}}{(1-z-z^2)^{n+2m+1}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2m+n}{m} F_{j+1}^{(n+2m+1)} z^{2m+n+j}, \end{aligned}$$

haciendo $t = 2m + n + j$

$$L_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{t=2m+n}^{\infty} \binom{2m+n}{m} F_{t-2m-n+1}^{(n+2m+1)} z^t,$$

de donde se obtiene la Ecuación (5.7). □

5.3.5. El k -Rombo de Pascal

El rombo de Pascal se puede generalizar a partir de la regla de construcción de la Figura 5.13. Dicho arreglo numérico se llamará k -rombo de Pascal. Claramente si $k = 1$ se obtiene el rombo de Pascal clásico.

$$\begin{array}{c} * \\ * \quad k \times * \quad * \\ n \end{array}$$

Cuadro 5.13: Regla de construcción del k -rombo de Pascal.

En este caso, si $R_k(n, m)$ es la entrada en el k -Rombo de Pascal ubicada en la fila n y la columna m , entonces

$$R_k(n+1, m) = R_k(n, m-1) + kR_k(n, m) + R_k(n, m+1) + R_k(n-1, m),$$

con $R_k(0, 0) = R_k(1, 0) = R_k(1, 1) = R_k(1, 2) = 1$. En el Cuadro 5.14 aparecen los primeros valores del 2-rombo de Pascal.

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 4 & 7 & 4 & 1 & & & \\ & & 1 & 6 & 17 & 24 & 17 & 6 & 1 & & \\ & 1 & 8 & 31 & 68 & 89 & 68 & 31 & 8 & 1 & \\ 1 & 10 & 49 & 42 & 72 & 82 & 72 & 42 & 19 & 5 & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Cuadro 5.14: El 2-rombo de Pascal.

Proposición 5.3.16. *La FG de la columna n -ésima del k -rombo de Pascal es*

$$L_{k,n}(z) = \frac{F_k(z)^{n+1} T(F_k(z))^n}{z(1 - 2F_k(z)^2 T(F_k(z)))},$$

donde $F_k(z)$ es la FG de los números k -Fibonacci, es decir

$$F_k(z) = \frac{z}{1 - kz - z^2}.$$

Además,

$$R_k(a, b) = \sum_{m=0}^a \sum_{l=0}^{a-b-2m} \binom{2m+b}{m} \binom{l+b+2m}{l} \binom{l}{a-b-2m-l} k^{2l-a+2m+b}.$$

Demostración. Basta con tomar $f(z) = z = g(z)$ y $h(z) = kz + z^2$ en el Corolario 4.1.18. \square

5.4. Ejemplos en Varias Variables

Una de las cuestiones que plantea Rutten en [59] es mostrar ejemplos de FG en más de una variable. En esta sección mostramos cómo extender la MAC para el caso de varias variables y mostramos algunos ejemplos. Para ello simplemente tomamos $\Sigma = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ en el autómata de conteo y todos los teoremas anteriores se extienden de una manera natural. Por ejemplo el Corolario 3.3.2 se puede reescribir como se muestra a continuación.

Corolario 5.4.1. *Sean $\mathbf{f}(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $\mathbf{g}(z_1, z_2, \dots, z_n)$ y $\mathbf{h}(z_1, z_2, \dots, z_n)$ funciones generatrices en $\mathbb{Z} \langle \langle \Sigma^* \rangle \rangle$. Entonces la función generatriz del autómata de la Figura 5.10 es*

$$B(z) = \frac{1 - \mathbf{h}(\vec{z}) - \sqrt{(1 - \mathbf{h}(\vec{z}))^2 - 4\mathbf{f}(\vec{z})\mathbf{g}(\vec{z})}}{2\mathbf{f}(\vec{z})\mathbf{g}(\vec{z})} \quad (5.8)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n \binom{m+2n}{m} (\mathbf{f}(\vec{z}) \mathbf{g}(\vec{z}))^n (\mathbf{h}(\vec{z}))^m \quad (5.9)$$

$$= \frac{1}{1 - \mathbf{h}(\vec{z}) - \frac{\mathbf{f}(\vec{z}) \mathbf{g}(\vec{z})}{1 - \mathbf{h}(\vec{z}) - \frac{\mathbf{f}(\vec{z}) \mathbf{g}(\vec{z})}{1 - \mathbf{h}(\vec{z}) - \frac{\mathbf{f}(\vec{z}) \mathbf{g}(\vec{z})}{\ddots}}}} \quad (5.10)$$

donde $\mathbf{f}(\vec{z}) = \mathbf{f}(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $\mathbf{g}(\vec{z}) = \mathbf{g}(z_1, z_2, \dots, z_n)$ y $\mathbf{h}(\vec{z}) = \mathbf{h}(z_1, z_2, \dots, z_n)$ son transiciones en paralelo en varias variables y C_n es el n -ésimo número de Catalan.

Ejemplo 5.4.2. Cualquier trayectoria k -coloreada de Motzkin se puede codificar con una

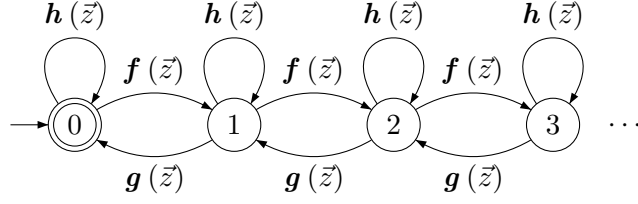


Figura 5.10: Autómata de conteo, Corolario 5.4.1.

cadena $w \in \mathbb{M}^*$ donde $\mathbb{M} = \{U, D, H_1, \dots, H_k\}$, con $U = (1, 1), D = (1, -1), H_i = (1, 0)$ ($i=1, \dots, k$), k representa la cantidad de posibles colores, $|w|_U = |w|_D$ y $|w|_D \leq |w|_U$. Denotaremos por \mathcal{M}_k a todas las palabras k -coloreadas de Motzkin y por \mathcal{M}_k^x a todas las palabras asociadas a trayectorias k -coloroedas de Motzkin sin pasos horizontales sobre el eje x . Además, denotaremos por $r(w)$ a la cantidad de D 's de una palabra de Motzkin. Con la MAC encontraremos las siguientes FGs

$$F_k(x, y) = \sum_{w \in \mathcal{M}_k} x^{|w|} y^{r(w)}, \quad G_k(x, y) = \sum_{w \in \mathcal{M}_k^x} x^{|w|} y^{r(w)}.$$

Si $f(x, y) = xy, g(x, y) = x$ y $h(x, y) = kx$ en el Corolario 5.4.1, se obtienen las anteriores FGs. En efecto la variable x permite contar la longitud de la palabra y la variable y permite contar el número de D 's de la palabra. Por lo tanto,

$$F_k(x, y) = \sum_{w \in \mathcal{M}_k} x^{|w|} y^{r(w)} = \frac{1 - kx - \sqrt{(1 - kx)^2 - 4x^2y}}{2x^2y} \quad (5.11)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=2n}^{\infty} C_n \binom{t}{2n} k^{t-2n} x^t y^n \quad (5.12)$$

$$[x^s y^r] F_k(x, y) = \frac{1}{1+r} \binom{s}{r, r, s-2r}, \quad r \leq \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \quad (5.13)$$

En efecto la Ecuación (5.11) se deduce del Corolario 5.4.1. Además,

$$F_k(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n \binom{m+2n}{m} k^m x^{2n+m} y^n,$$

haciendo $t = 2n + m$ se obtiene que

$$F_k(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=2n}^{\infty} C_n \binom{t}{t-2n} k^{t-2n} x^t y^n.$$

Luego

$$\begin{aligned}
[x^s y^r] F_k(x, y) &= C_r \binom{s}{s-2r} k^{s-2r} \\
&= \frac{1}{1+r} \binom{2r}{r} \binom{s}{s-2r} k^{s-2r} \\
&= \frac{1}{1+r} \frac{s!}{r!r!(s-2r)!} k^{s-2r} \\
&= \frac{1}{1+r} \binom{s}{r, r, s-2r},
\end{aligned}$$

con $r \leq \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$.

Para la FG $G_k(x, y)$ se utiliza el autómata de la Figura 5.11 y el Corolario 4.3.6.

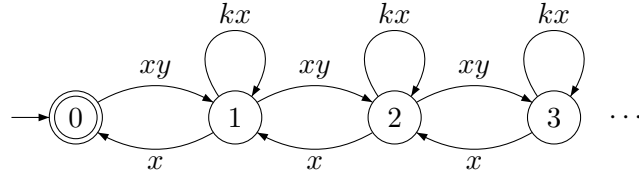


Figura 5.11: Autómata de conteo asociado a las palabras \mathcal{M}_k^x .

Se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
G_k(x, y) &= \sum_{w \in \mathcal{M}_k^x} x^{|w|} y^{r(w)} = \frac{1}{1 - x^2 y F_k(x, y)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \sum_{t=2r}^{\infty} \frac{n}{2r-n} \binom{2r-n}{r} \binom{t-n-1}{t-2r} k^{t-2r} x^t y^r. \\
[x^s y^l] G_k(x, y) &= \sum_{n=0}^l \frac{n}{2l-n} \binom{2l-n}{l} \binom{s-n-1}{s-2l}, \quad l \leq \lfloor \frac{s}{2} \rfloor.
\end{aligned}$$

En efecto por el Corolario 4.3.6 tenemos que

$$G_k(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \binom{i+n+2k-1}{i} x^{2n+2k+i} y^{n+k} k^i,$$

haciendo $t = 2n + 2k + i$

$$G_k(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=2n+2k}^{\infty} \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \binom{t-n-1}{t-2n-2k} k^{t-2n-2k} x^t y^{n+k},$$

ahora haciendo $r = n + k$

$$G_k(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \sum_{t=2r}^{\infty} \frac{n}{2r-n} \binom{2r-n}{r-n} \binom{t-n-1}{t-2r} k^{t-2r} x^t y^r.$$

Entonces

$$[x^s y^r] G_k(x, y) = \sum_{n=0}^l \frac{n}{2l-n} \binom{2l-n}{l-n} \binom{s-n-1}{s-2l} k^{s-2l},$$

con $l \leq \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$. Los anteriores resultados coinciden con [62].

Para el caso de las trayectorias de Motzkin k -coloreadas sin pasos horizontales sobre el eje x , definimos un nuevo parámetro y es el número de componentes primas. Una cadena $w \in \mathcal{M}_k^x$ se llama prima si y sólo si no es concatenación de dos cadenas (no vacías) de \mathcal{M}_k^x . En términos de trayectorias una cadena prima codifica una trayectoria de Motzkin cuya única intersección con el eje x es el origen y el punto final, denotaremos por $d(w)$ el número de componentes primas de una cadena.

Consideremos la FG

$$G_k(x, y, z) = \sum_{w \in \mathcal{M}_k^x} x^{|w|} y^{r(w)} z^{d(w)},$$

entonces podemos utilizar el autómata de conteo de la Figura 5.12.

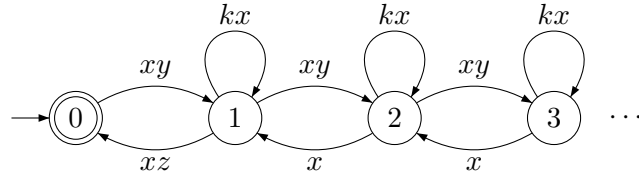


Figura 5.12: Autómata de conteo asociado a $G_k(x, y, z)$.

Utilizando equivalencia entre autómatas de conteo se obtiene que

$$G_k(x, y, z) = \frac{1}{1 - x^2 y z F_k(x, y)}.$$

5.5. Limitaciones de la MAC

Como hemos visto hasta el momento los objetos combinatorios estudiados guardan cierta regularidad que permite obtener relaciones recurrentes que se han podido resolver de manera eficiente. Sin embargo, son muchos los casos en los que no es fácil aplicar la MAC. Por

ejemplo, supongamos que queremos estudiar la trayectorias de Łukasewicz. Un trayectoria de Łukasewicz de longitud n es una trayectoria reticular de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, en el primer cuadrante, la cual inicia en el origen y finaliza en $(n, 0)$, y que consiste de los pasos $U = (1, 1)$, $H = (1, 0)$ y $D_1 = (1, -1)$, $D_2 = (1, -2)$, $D_3 = (1, -3), \dots$. En la Figura 5.13 se muestra una trayectoria de Łukasewicz de longitud 16.

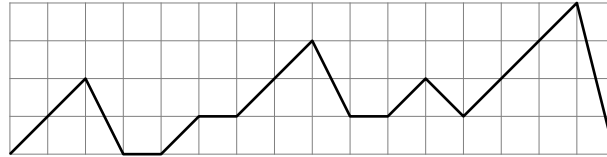


Figura 5.13: Trayectoria de Łukasewicz de longitud 16.

Una forma natural de modelar estas trayectorias es con el autómata de la Figura 5.14.

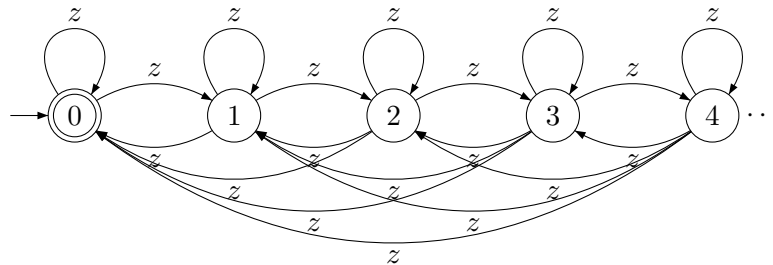


Figura 5.14: Autómata de conteo asociado a las trayectoria de Łukasewicz .

Como se observa tratar de resolver sistemas de ecuaciones no resulta ser un camino sencillo para encontrar la función generatriz asociada a este autómata, por lo que se hace necesario utilizar más herramientas. Una forma de resolver este problema puede ser con el uso de matrices, ver el Ejemplo 4.4.10. Es decir, asociar una matriz a este autómata y luego utilizar técnicas propias del álgebra lineal y la combinatoria para decir algo sobre el problema inicial. En principio hemos observado que la teoría de arreglos de Riordan, ver [42], podría ser una forma de abordar este tipo de matrices.

Trabajos Futuros

- Una forma de extender este trabajo puede ser con el uso de arreglos de Riordan. Muchas de las estadísticas de las trayectorias en el plano se pueden codificar mediante estas matrices. Por lo tanto, un trabajo a seguir debería ser mostrar las posibles relaciones entre la MAC y los arreglos de Riordan
- Estudiar otro tipo de trayectorias más complejas. Por ejemplo, estudiar con la MAC trayectorias cuyos pasos son $D = (1, 1)$, $H = (1, 0)$, $V = (0, 1)$, $L = (-1, 1)$ [28].
- Estudiar nuevos autómatas de conteo. Por ejemplo, autómatas que tengan forma de árbol binario.
- En el desarrollo de la tesis se encontraron nuevas interpretaciones para sucesiones combinatorias. Sería interesante hacer las pruebas biyectivas de cada una de esas relaciones.
- Estudiar las relaciones entre los autómatas de conteo y las gramáticas. Por ejemplo, en [51], se han utilizado recientemente las gramáticas para encontrar identidades combinatorias.

Bibliografía

- [1] E. BARCUCCI, A. DEL LUNGO, E. PERGOLA, AND R. PINZANI, *ECO: a methodology for the enumeration of combinatorial objects*, Journal of Difference Equations and Applications, 5(4-5) (1999), pp. 435–490.
- [2] E. BARCUCCI, E. PERGOLA, R. PINZANI, AND S. RINALDI, *ECO method and hill-free generalized Motzkin paths*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Article B46b (2001).
- [3] E. BARCUCCI AND M. C. VERRI, *Some more properties of Catalan numbers*, Discrete Mathematics, 102(3) (1992), pp. 229–237.
- [4] P. BARRY, *On integer-sequence-based constructions of generalized Pascal triangles*, Journal of Integer Sequences, 9 Article 06.2.4 (2006).
- [5] ———, *A Study of Integer Sequences, Riordan Arrays, Pascal-like Arrays and Hankel Transforms*, PhD thesis, University College Cork, Ireland, 2009.
- [6] F. R. BERNHART, *Catalan, Motzkin, and Riordan numbers*, Discrete Mathematics, 204(1-3) (1999), pp. 73–112.
- [7] J. BERSTEL, L. BOASSON, O. CARTON, AND I. FAGNOT, *Sturmian trees*, Theory of Computing Systems, 46(3) (2010), pp. 443–478.
- [8] J. BERSTEL AND C. REUTENAUER, *Rational Series and their Languages*, Springer-Verlag, 1988.
- [9] V. BERTHÉ AND M. RIGO, *Combinatorics, Automata and Number Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge, 2010.
- [10] B. A. BONDARENKO, *Generalized Pascal Triangles and Pyramids. Their Fractals, Graphs, and Applications*, Fibonacci Association, 1993.
- [11] M. BOUSQUET-MÉLOU, *Algebraic generating functions in enumerative combinatorics and context-free languages*, in STACS 2005, V. Diekert and B. Durand, eds., vol. 3404 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, Heidelberg, 2005, pp. 18–35.

- [12] J. BRAWNER, *Three-dimensional lattice walks in the upper half-space*, American Mathematical Monthly, 108(10) (2001), p. 980.
- [13] P. BRÄNDÉN AND T. MANSOUR, *Finite automata and pattern avoidance in words*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 110(1) (2005), pp. 127–145.
- [14] D. CALLAN, *On generating functions involving the square root of a quadratic polynomial*, Journal of Integer Sequences, 10 Article 07.5.2 (2007).
- [15] W. CHEN, S. YAN, AND L. YANG, *Identities from weighted Motzkin paths*, Advances in Applied Mathematics, 41(3) (2008), pp. 329–334.
- [16] Y.-M. CHEN, *The Chung-Feller theorem revisited*, Discrete Mathematics, 308(7) (2008), pp. 1328–1329.
- [17] N. CHOMSKY AND M. P. SCHÜTZENBERGER, *The algebraic theory of context free languages*, in Computer Programming and Formal Systems, P. Braffort and D. Hirschberg, eds., 1963, pp. 118–161.
- [18] K. CHUNG AND W. FELLER, *On fluctuations in-coin tossing*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 35(10) (1949), pp. 605–608.
- [19] R. DE CASTRO, *Teoría de la Computación, Lenguajes, Autómatas, Gramáticas*, Universidad Nacional de Colombia, 2004.
- [20] M. DELEST, *Algebraic languages: a bridge between combinatorics and computer science*, in Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 1996, pp. 71–88.
- [21] E. DEUTSCH, *Dyck path enumeration*, Discrete Mathematics, 204(1-3) (1999), pp. 167–202.
- [22] ———, *Three-dimensional lattice walks in the upper half-space*, American Mathematical Monthly, 107 (2000).
- [23] E. DEUTSCH, E. MUNARINI, AND S. RINALDI, *Skew Dyck paths*, Journal of Statistical Planning and Inference, 140(8) (2010), pp. 2191–2203.
- [24] E. DEUTSCH AND L. SHAPIRO, *A survey of the Fine numbers*, Discrete Mathematics, 241(1-3) (2001), pp. 241–265.
- [25] E. DEUTSCH AND L. SHAPIRO, *A bijection between ordered trees and 2-Motzkin paths and its many consequences*, Discrete Mathematics, 256 (2002), pp. 655–670.

- [26] M. DROSTE, W. KUICH, AND H. VOGLER, eds., *Handbook of Weighted Automata*, Series: Monographs in Theoretical Computer Science, 2009.
- [27] E. DUCH, J. FEDOU, AND S. RINALDI, *From object grammars to ECO systems*, Theoretical Computer Science, 314(1) (2004), pp. 57–95.
- [28] M. DZIEMIAŃCZUK, *Counting lattice paths with four types of steps*, Graphs and Combinatorics, 30(6) (2014), pp. 1427–1452.
- [29] S. EU, T. FU, AND Y. YEH, *Refined Chung-Feller theorems for lattice paths*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 112(1) (2005), pp. 143–162.
- [30] S. EU, S. LIU, AND Y. YEH, *Taylor expansions for Catalan and Motzkin numbers*, Advances in Applied Mathematics, 29(3) (2002), pp. 345–357.
- [31] S. EU, S. LIU, AND Y. YEH, *Dyck paths with peaks avoiding or restricted to a given set*, Studies in Applied Mathematics, 111(4) (2003), pp. 453–465.
- [32] L. FERRARI AND E. MUNARINI, *Enumeration of edges in some lattices of paths*, arXiv:1203.6792, (2012).
- [33] P. FLAJOLET, *Combinatorial aspects of continued fractions*, Discrete Mathematics, 32(2) (1980), pp. 125–161.
- [34] P. FLAJOLET AND R. SEDGEWICK, *Analytic Combinatorics*, Cambridge, 2009.
- [35] J. GOLDWASSER, W. KLOSTERMEYER, M. MAYS, AND G. TRAPP, *The density of ones in Pascal’s rhombus*, Discrete Mathematics, 204(1-3) (1999), pp. 231–236.
- [36] H. W. GOULD, *Generalization of a formula of Touchard for Catalan numbers*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 23(3) (1977), pp. 351–353.
- [37] I. GOULD AND D. JACKSON, *Combinatorial Enumeration*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics, John. Wiley & Sons, 1983.
- [38] R. GRAHAM, M. GRÖTSCHEL, AND L. LOVÁSZ, *Handbook of Combinatorics*, vol. 2, MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1995.
- [39] R. GRAHAM, D. KNUTH, AND O. PATASHNIK, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, segunda ed., 1994.
- [40] J. GUTIÉRREZ, M. HERNÁNDEZ, P. MIANA, AND N. ROMERO, *New identities in the Catalan triangle*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 341(1) (2008), pp. 52–61.

- [41] R. K. GUY, *Catwalks, sandsteps and Pascal pyramids*, Journal of Integer Sequences, 3 Article 00.1.6 (2000).
- [42] A. HENNESSY, *A Study of Riordan Arrays, with Applications to Continued Fractions, Orthogonal Polynomials and Lattice Paths*, PhD thesis, University College Cork, Ireland, 2011.
- [43] S. HEUBACH AND T. MANSOUR, *Combinatorics of Compositions and Words*, Discrete Mathematics and its Applications, CRC Press, 2010.
- [44] G. KALLÓS, *A generalization of Pascal's triangle using powers of base numbers*, Annales Mathématiques Blaise Pascal, 13(1) (2006), pp. 1–15.
- [45] W. KLOSTERMEYER, M. MAYS, L. SOLTES, AND G. TRAPP, *A Pascal rhombus*, The Fibonacci Quarterly, 35(4) (1997), pp. 318–328.
- [46] T. KOSHY, *Catalan Numbers with Applications*, Oxford University Press, 2009.
- [47] ———, *Triangular Arrays with Applications*, Oxford University Press, 2011.
- [48] S. K. LANDO, *Lectures on Generating Functions*, vol. 23, Student Mathematical Library, American Mathematical Society, 2003.
- [49] A. LASCoux, *Symmetric Functions and Combinatorial Operators on Polynomials*, (CBMS Regional Conference Series in Mathematics), American Mathematical Society, 2003.
- [50] S. C. LIU, Y. WANG, AND Y. N. YEH, *Chung-Feller property in view of generating functions*, The Electronic Journal of Combinatorics, 18(1) (2011).
- [51] S.-H. MA, *Some combinatorial arrays generated by context-free grammars*, European Journal of Combinatorics, 34 (2013), pp. 1081–1091.
- [52] T. MANSOUR, *Combinatorics of Set Partitions*, Discrete Mathematics and its Applications, CRC Press, 2012.
- [53] V. MESHKOV, A. OMELCHENKO, M. PETROV, AND E. TROPP, *Dyck and Motzkin triangles with multiplicities*, Moscow Mathematical Journal, 10(3) (2010), pp. 611–628.
- [54] T. NARAYANA, *Cyclic permutation of lattice paths and the Chung-Feller theorem*, Scandinavian Actuarial Journal, (1967), pp. 23–30.
- [55] T. D. NOE, *On the divisibility of generalized central trinomial coefficients*, Journal of Integer Sequences, 9 Article 06.2.7 (2006).

- [56] P. PEART AND W. WEN-JIN, *Dyck paths with no peaks at height k* , Journal of Integer Sequences, 4 Article 01.1.3. (2001).
- [57] A. RAMÍREZ, *Autómatas infinitos y combinatoria enumerativa*, Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia, Colombia, 2006.
- [58] J. J. M. M. RUTTEN, *Elements of stream calculus: (an extensive exercise in coinduction)*, Seventeenth Conference on the Mathematical Foundations of Programming Semantics, Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 45 (2001), pp. 358–423.
- [59] —, *Coinductive counting with weighted automata*, Journal of Automata, Languages and Combinatorics, 8(2) (2003), pp. 319–352.
- [60] J. J. M. M. RUTTEN AND P. PANANGADEN, *Mathematical Techniques for Analyzing Concurrent and Probabilistic Systems*, vol. 23 of CRM Monograph Series, American Mathematical Society, 2004.
- [61] J. SAKAROVITCH, *Elements of Automata Theory*, Cambridge, 2009.
- [62] A. SAPOUNAKIS AND P. TSIKOURAS, *On k -colored Motzkin words*, Journal of Integer Sequences, 7, Article 04.2.5. (2004).
- [63] M. P. SCHÜTZENBERGER, *On the definition of a family of automata*, Information and Control, 4(2-3) (1961), pp. 245–270.
- [64] L. W. SHAPIRO, *A Catalan triangle*, Discrete Mathematics, 14(1) (1976), pp. 83–90.
- [65] L. W. SHAPIRO, *A short proof of an identity of Touchard's concerning Catalan numbers*, Journal of Combinatorial Theory, Series A., 20 (1976), pp. 375–376.
- [66] L. W. SHAPIRO AND C. J. WANG, *A bijection between 3-Motzkin paths and Schröder paths with no peak at odd height*, Journal of Integer Sequences, 12, Article 09.3.2 (2009).
- [67] N. J. A. SLOANE, *The on-line encyclopedia of integer sequences*, Se puede consultar en <https://oeis.org/>, (2014).
- [68] K. UCHIMURA, *Properties of structure generating functions of automata and their applications for linear systems*, Theoretical Computer Science, 18 (1982), pp. 207–220.
- [69] —, *Truncations of infinite matrices and algebraic series associated with some cf grammars*, Theoretical Computer Science, 31 (1984), pp. 227–261.
- [70] R. WASUTHARAT AND K. KUHPATANAKUL, *The generalized Pascal-like triangle and applications*, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 7(41) (2012), pp. 1989–1992.

- [71] W. WEN-JIN, *Animals and 2-Motzkin paths*, Journal of Integer Sequences, 8 Article 05.5.6. (2005).
- [72] H. WILF, *generatingfunctionology*, Academic Press, 1994.
- [73] Z. ZHANG AND B. PANG, *Several identities in the Catalan triangle*, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 41(2) (2010), pp. 363–378.