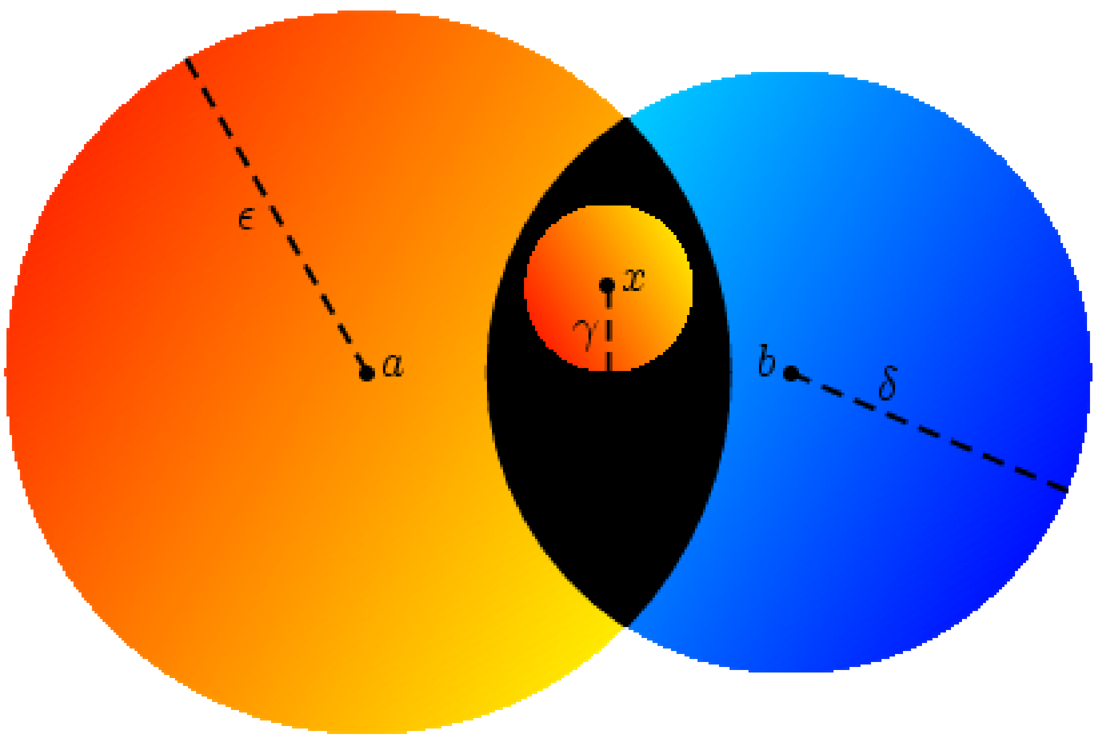
TOPOLOGÍA GENERAL



Clara M. Neira U.

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Índice general

Introducción

Estas notas de topología nacieron de la necesidad de presentar a estudiantes de la carrera y del posgrado en Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, los contenidos básicos de topología general, de forma clara, nítida y accesible, pero conservando todo el rigor y generalidad posibles.

He aprovechado la oportunidad de presentar a través de ellas enfoques novedosos de conceptos conocidos, así como varias demostraciones y resultados originales.

Es bien conocido por ejemplo, que cualquier espacio topológico T_0 se puede sumergir en un producto de espacios de Sierpinski. Como una generalización de este resultado, se muestra aquí que cualquier espacio topológico, goce o no de la propiedad de ser T_0, se puede sumergir en un producto de espacios de Sierpinski de tres puntos.

En el capítulo de compacidad se hace especial énfasis en la Caracterización de Kuratowski-Mrówka de los espacios topológicos compactos, que da una visión categórica del concepto y es una herramienta valiosa que permite dar demostraciones alternativas de resultados clásicos sobre compacidad. Es de resaltar la asombrosa sencillez de la demostración del Teorema de Tychonoff que brinda esta caracterización en el caso finito.

Al final de cada sección se ofrece una variada selección de ejercicios, algunos de los cuales buscan afianzar los conocimientos en los estudiantes, mientras que otros les ofrecen la oportunidad de poner a prueba su creatividad, ingenio y persistencia.

Las referencias bibliográficas incluyen no sólo textos clásicos de Topología General, sino también enlaces con sitios de interés en topología ubicados en la red.

Capítulo 1

Espacios Métricos

Los espacios métricos constituyen el ejemplo más importante de los espacios topológicos y su comportamiento sugiere gran parte de los conceptos abstractos que son objeto de estudio en topología general.
En este capítulo estudiaremos el concepto de distancia tanto entre dos puntos de un conjunto como entre un punto y un conjunto.

1.1. Métricas y seudométricas

En esta sección definimos una estructura de espacio métrico sobre un conjunto dado, que nos permita percibir cuándo un punto está "cerca" de otro.

1.1.1 Definición. *Sea X un conjunto. Una* métrica *sobre X es una función $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

1. $\rho(x,y) \geq 0$,
2. $\rho(x,y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$,
3. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ *y*
4. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ *(desigualdad triangular),*

para todo $x,\ y,\ z \in X$.

Si ρ es una métrica sobre X decimos que (X,ρ), o simplemente X, si no hay lugar a confusión sobre la métrica con la que se trabaja, es un *espacio métrico*. La función ρ se conoce también como *función distancia* y para cada par de puntos x y y de X, se dice que $\rho(x, y)$ es la distancia entre x y y.

1.1.2 EJEMPLOS.

1. *Si X es un conjunto cualquiera, la función $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*
$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y \\ 1 & si\ x \neq y \end{cases}$$
es una métrica sobre X que se llama la métrica discreta.

2. *El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, junto con la función distancia ρ definida por $\rho(x, y) = |x - y|$, es un espacio métrico. En adelante diremos que esta función es la métrica usual de $\mathbb{R}$ y, a menos que se especifique lo contrario, cuando nos refiramos a los números reales estaremos considerando esta métrica sobre $\mathbb{R}$.*

   En general, $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual definida por
$$\rho((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$
es un espacio métrico.

3. *El plano $\mathbb{R}^2$, junto con la función ρ_1 definida por*
$$\rho_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$
es un espacio métrico. La función ρ_1 se suele llamar la métrica del taxista.

4. *El plano $\mathbb{R}^2$, junto con la función ρ_2 definida por*
$$\rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \text{máx}\{|x_1 - x_2|,\ |y_1 - y_2|\}$$
es un espacio métrico.

5. *Sea X el conjunto de todas las funciones acotadas $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada si existe un número real $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para todo $x \in \mathbb{R}$). La función $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\}$ es una métrica sobre X.*

6. *Sea $C(I)$ el conjunto de todas las funciones continuas definidas del intervalo $I = [0,1]$ en $\mathbb{R}$. La función $\rho : C(I) \times C(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\rho(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$ es una métrica sobre $C(I)$.*

7. *Cualquier subconjunto Y de un espacio métrico (X,d) es un espacio métrico con la restricción $d\restriction_{Y\times Y}$ de la métrica d a $Y \times Y$.*

8. *Si $X = \{x_1,\ x_2, ...\}$ es un conjunto enumerable, entonces la función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$d(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{i+j} & si\ i \neq j \\ 0 & si\ i = j \end{cases}$$

   es una métrica sobre X. El espacio (X,d) se llama el Espacio Métrico de Sierpinski y d se llama la métrica de Sierpinski.

En un espacio métrico, además de medir la distancia entre dos puntos, es posible medir la distancia entre un punto y un conjunto.

1.1.3 Definición. *Sea (X,d) un espacio métrico. Si A es un subconjunto no vacío de X entonces la distancia $d(x,A)$ de un punto $x \in X$ al conjunto A se define como el ínfimo de los números $d(x,a)$ donde $a \in A$; esto es,*

$$d(x,A) = \text{ínf}\{d(x,a) : a \in A\}.$$

Nótese que si (X,d) es un espacio métrico y $A \subset X$ entonces $d(x,A) = 0$ para todo $x \in A$; sin embargo $d(x,A) = 0$ no implica que x sea un elemento de A. Si consideramos por ejemplo el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con la métrica usual y $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ entonces $d(0,A) = 0$ pero $0 \notin A$.

1.1.4 Definición. *Sea (X,d) un espacio métrico. Si A es un subconjunto no vacío de X entonces el diámetro de A, $\operatorname{diam} A$ es $\sup\{d(x,y) : x,\ y \in A\}$. Si $\operatorname{diam} A < \infty$ entonces decimos que el conjunto A es acotado. Por convención $\operatorname{diam} \emptyset = 0$.*

De la definición se tiene que el espacio métrico X es acotado si la función d es acotada.

Las condiciones que debe satisfacer la función distancia d en un espacio métrico X son bastante rigurosas. En ocasiones una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, a pesar no ser una métrica en el sentido estricto, da lugar a una noción de "distancia" razonable para ciertos propósitos.

1.1.5 Definición. *Sea X un conjunto. Una función $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

1. $\rho(x, y) \geq 0$,
2. $\rho(x, x) = 0$,
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ *y*
4. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

para cada x, cada y y cada z en X, se llama una seudométrica sobre X. Si ρ es una seudométrica sobre X decimos que (X, ρ) (o simplemente X) es un espacio seudométrico*.*

Nótese que en un espacio seudométrico (X, ρ) pueden existir puntos distintos x y y, tales que $\rho(x, y) = 0$.

1.1.6 EJEMPLOS.

1. *Toda métrica sobre un conjunto X es también una seudométrica.*
2. *Si X es un conjunto entonces la función $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\rho(x, y) = 0$ es una seudométrica sobre X.*
3. *Sea $x_0 \in [0, 1]$. La función $\eta : C(I) \times C(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\eta(f, g) = |f(x_0) - g(x_0)|$ es una seudométrica sobre $C(I)$.*

Ejercicios 1.1

1. Demuestre que las siguientes funciones son métricas sobre los conjuntos dados.

a) Si X es un conjunto cualquiera, sea $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

b) En $\mathbb{R}$ la función definida por $\rho(x, y) = |x - y|$.

c) En $\mathbb{R}^n$ la función definida por

$$\rho((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

d) En el plano, la función definida por

$$\rho_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

e) En el plano, la función definida por

$$\rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \text{máx}\{|x_1 - x_2|,\ |y_1 - y_2|\}.$$

f) En el conjunto X de todas las funciones acotadas $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la función $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

g) En el conjunto $C(I)$ de todas las funciones continuas definidas del intervalo $I = [0, 1]$ en $\mathbb{R}$, la función $\rho : C(I) \times C(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\rho(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$.

h) En cualquier conjunto enumerable $X = \{x_1,\ x_2, ...\}$, la función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{i + j} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

2. Demuestre que las funciones definidas a continuación son seudométricas sobre los conjuntos dados, pero que no son métricas sobre los mismos conjuntos.

a) En un conjunto X con más de un punto, la función $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\rho(x, y) = 0$.

b) Sea $x_0 \in [0, 1]$. En $C(I)$, la función $\eta : C(I) \times C(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\eta(f, g) = |f(x_0) - g(x_0)|$.

3. Considere dos espacios métricos (X, d) y (Y, m). ¿Es la función $\rho : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\rho((x_1, x_1), (x_2, y_2)) = \text{máx}\{d(x_1, x_2), m(y_1, y_2)\}$, una métrica sobre $X \times Y$?

4. Sea ρ una seudométrica definida sobre un conjunto X. Definimos la relación $\sim$ sobre X por $x \sim y$ sii $\rho(x, y) = 0$.

   a) Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre X.

   b) Sea $X/\sim$ el conjunto de todas las clases de equivalencia determinadas por $\sim$. Demuestre que la función $d : X/\sim \times X/\sim \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d([x], [y]) = \rho(x, y)$ es una métrica sobre $X/\sim$.

1.2. Funciones continuas

El concepto fundamental en el estudio de los espacios métricos, seudométricos y en general de los espacios topológicos es el concepto de continuidad.

1.2.1 Definición. *Sean (X, ρ) y (Y, η) espacios métricos (resp. seudométricos). Una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua en un punto $x_0 \in X$ si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\rho(x, x_0) < \delta$, entonces $\eta(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.*

Si la función f es continua en cada punto de X decimos simplemente que f es continua.

Los siguientes son ejemplos típicos de funciones continuas.

1.2.2 EJEMPLOS.

1. *Si (X, d) es un espacio métrico entonces $Id_X : X \longrightarrow X$, la función idéntica de X, es continua. En efecto, si $x_0 \in X$ y si ϵ es un número real positivo y consideramos $0 < \delta \leq \epsilon$ entonces $d(x, x_0) < \delta$ implica $d(Id_X(x), Id_X(x_0)) < \epsilon$.*

2. *Si* (X,ρ) *y* (Y,η) *son espacios métricos y si* $k \in Y$ *es un punto arbitrario pero fijo de* Y*, entonces la función constante* $f : X \longrightarrow Y$ *de valor* k *es una función continua. Para demostrar esto basta observar que si* $x_0 \in X$*, si* $\epsilon > 0$ *y si* δ *es un número real positivo arbitrario, entonces* $\rho(x,x_0) < \delta$ *implica* $\eta(f(x), f(x_0)) = \eta(k,k) = 0 < \epsilon$.

El siguiente resultado muestra la continuidad de una función poco mencionada hasta ahora.

1.2.3 Proposición. *Sean* (X,d) *un espacio métrico y* $A \subset X$*,* $A \neq \emptyset$*. La función de* X *en los números reales definida por* $x \longmapsto d(x,A)$ *es continua.*

Demostración. Sean $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$. Si $d(x,x_0) < \epsilon$, entonces para cada $a \in A$ se tiene que

$$\begin{aligned} d(x,A) &\leq d(x,a) \\ &\leq d(x,x_0) + d(x_0,a) \\ &< \epsilon + d(x_0,a). \end{aligned}$$

Esto significa que $d(x,A) - \epsilon < d(x_0,a)$, para todo $a \in A$. Entonces $d(x,A) - \epsilon \leq d(x_0,A)$, es decir

$$d(x,A) - d(x_0,A) \leq \epsilon.$$

De la misma forma se obtiene que

$$d(x_0,A) - d(x,A) \leq \epsilon,$$

luego

$$|d(x,A) - d(x_0,A)| \leq \epsilon.$$

Esto completa la demostración.

□

Ejercicios 1.2

1. Demuestre que si X tiene la métrica discreta y Y es un espacio métrico cualquiera, entonces cualquier función definida de X en Y es continua. ¿Qué ocurre si Y es un espacio seudométrico?

2. Demuestre que si X es un espacio métrico cualquiera y Y tiene la seudométrica definida por $d(w, z) = 0$ para todo w y todo z en Y, entonces cualquier función definida de X en Y es continua. ¿Qué ocurre si X es un espacio seudométrico?

3. Dé un ejemplo de dos métricas d_1 y d_2, definidas sobre un mismo conjunto X, de tal manera que la función idéntica de (X, d_1) en (X, d_2) no resulte continua.

4. Suponga que d_1 y d_2 son dos métricas definidas sobre un mismo conjunto X. Si la aplicación idéntica definida de (X, d_1) en (X, d_2) es continua, ¿qué puede afirmar de d_1 y d_2? Demuestre su conjetura.

5. Se dice que dos espacios métricos (X, d) y (Y, m) son *isométricos* si existe una función biyectiva $f : X \longrightarrow Y$ tal que

$$d(x_1, x_2) = m(f(x_1), f(x_2)),$$

para cada x_1 y cada x_2 en X. La función f se llama una *isometría*.

   a) Pruebe que si $f : X \longrightarrow Y$ es una isometría, entonces f y f^{-1} son funciones continuas.

   b) Pruebe que el intervalo $[0, 1]$ es isométrico a cualquier otro intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ de la misma longitud.

   c) Pruebe que si $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ tienen cada uno su métrica usual, entonces no son isométricos.

   d) Pruebe que si X y Y tienen cada uno la métrica discreta entonces X y Y son isométricos si y sólo si tienen la misma cardinalidad.

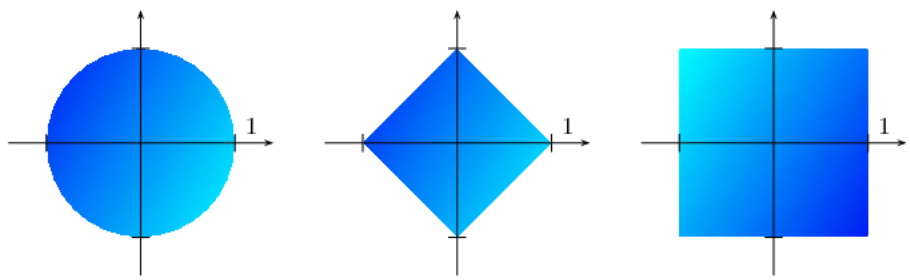
   e) Defina una métrica en el intervalo abierto $(0, 1)$, de tal manera que el espacio métrico resultante sea isométrico a $\mathbb{R}$ con la métrica usual.

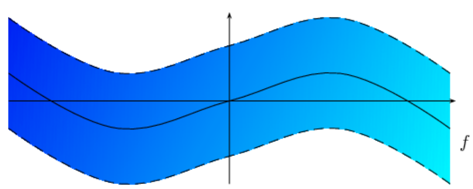
1.3. Topología de un espacio métrico

1.3.1 Definición. *Sean (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $\epsilon > 0$. El conjunto $B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$ se llama la bola abierta centrada en x con radio ϵ. El conjunto $B[x, \epsilon] = \{y \in X : d(x, y) \leq \epsilon\}$ se llama la bola cerrada centrada en x con radio ϵ.*

Nótese que en $\mathbb{R}$, la bola abierta centrada en un número real x con radio ϵ es el intervalo abierto $(x-\epsilon, x+\epsilon)$.

La siguiente figura muestra la bola abierta de radio 1 centrada en el origen, para cada una de las métricas ρ, ρ_1 y ρ_2 definidas sobre $\mathbb{R}^2$ en los numerales 2, 3 y 4 de los ejemplos 1.1.2.





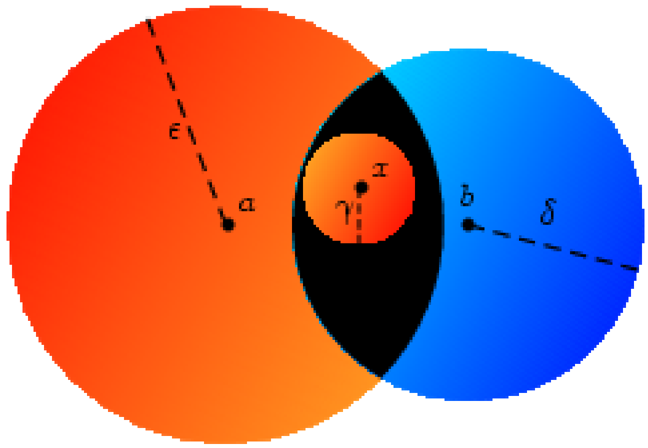
Por su parte, la bola abierta de radio ϵ centrada en una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que pertenezca al espacio métrico descrito en el numeral 5. de los ejemplos 1.1.2., está formada por las funciones acotadas que tienen su gráfica contenida en la franja sombreada que se muestra en la figura.

Si X es un espacio discreto, es decir si en X consideramos la métrica discreta, entonces la bola abierta de radio $\epsilon > 0$ centrada en un punto $x \in X$ se reduce a $\{x\}$ si $\epsilon \leq 1$ y es todo el conjunto X si $\epsilon > 1$.

Si X es el espacio métrico de Sierpinski definido en el numeral 8 de 1.1.2. entonces la bola de radio $0 < \epsilon \leq 1$ centrada en cualquier punto $x \in X$ se reduce a $\{x\}$.

Una de las propiedades más interesantes de las bolas abiertas en un espacio métrico se enuncia en el siguiente resultado:

1.3.2 Proposición. *Si (X, d) es un espacio métrico, si a y b son elementos de X, si ϵ y δ son números reales positivos y si $x \in B(a,\epsilon) \cap B(b,\delta)$ entonces existe $\gamma > 0$ tal que $B(x,\gamma) \subset B(a,\epsilon) \cap B(b,\delta)$.*



Para probar esta proposición basta considerar $\gamma = \text{mín}\{\epsilon - d(a,x), \delta - d(x,b)\}$ y utilizar la desigualdad triangular.

En los espacios métricos tenemos la capacidad de hablar de "cercanía". Decir que un punto está tan cerca de otro como queramos, significa que los puntos están a una distancia menor que un número positivo que hemos fijado con anterioridad. En otras palabras, si convenimos que "estar suficientemente cerca" de un punto a significa estar a una distancia menor que un cierto número $\epsilon > 0$, entonces los "vecinos" de a o los puntos "suficientemente cercanos a a" son precisamente los elementos del conjunto $B(a, \epsilon)$. Estas consideraciones sugieren la siguiente definición:

1.3.3 Definición. *Sean X un espacio métrico y $x \in X$. Un subconjunto V de X es una* vecindad *de x si existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset V$. Denotamos por $\mathcal{V}(x)$ al conjunto de todas las vecindades del punto x.*

1.3.4 EJEMPLOS.

1. *En los números reales el intervalo $[1, +\infty)$ es una vecindad de 3 (en realidad es una vecindad de cualquier real mayor que 1); pero no es una vecindad de 1.*

2. *El conjunto $\{x \in \mathbb{R} : |x| > 2\}$ es una vecindad de 3 en $\mathbb{R}$.*

3. *La bola cerrada* $B[x, 1]$ *es una vecindad de* $x = (0, 0)$ *en* $\mathbb{R}^2$*.*

4. *El conjunto* $A = \{(x, y) : y < x\} \subset \mathbb{R}^2$ *es una vecindad de cada uno sus puntos.*

5. *El conjunto* $\{f : |f(x)| < 2 \text{ para cada } x \in \mathbb{R}\}$ *es una vecindad de la función* $\arctan x$ *en el espacio de funciones acotadas, definido en el numeral 5. de 1.1.2..*

Los items 2 y 4 de los ejemplos anteriores muestran conjuntos muy especiales en los que se basará todo nuestro estudio en topología. Tienen en común la característica de ser vecindades de cada uno de sus puntos. Diremos que estos conjuntos son conjuntos abiertos.

1.3.5 Definición. *Un subconjunto* A *de un espacio métrico* X *es un conjunto abierto en* X *si* A *es vecindad de cada uno de sus puntos.*

Consideremos un espacio métrico X. De la definición se infieren de manera inmediata los siguientes hechos:

1. El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto X son conjuntos abiertos.

2. Si A y B son conjuntos abiertos en X entonces $A \cap B$ es un conjunto abierto en X.

3. La unión de cualquier familia de conjuntos abiertos en X es un conjunto abierto en X.

Nótese que en un espacio métrico X las bolas abiertas son conjuntos abiertos y que cada conjunto abierto se puede expresar como una unión de bolas abiertas. Decimos entonces que las bolas abiertas “generan” los conjuntos abiertos. Más adelante expresaremos este hecho diciendo que las bolas abiertas “generan la topología del espacio X” o que “son una base para la topología de X”.

La siguiente definición establece un criterio que nos permite saber cuándo, desde el punto de vista puramente topológico, dos métricas formalmente distintas son indistinguibles.

1.3.6 Definición. *Dos métricas sobre un conjunto X son equivalentes si generan los mismos conjuntos abiertos.*

1.3.7 EJEMPLOS.

1. *Hemos visto que si X es un conjunto enumerable entonces los subconjuntos unitarios de X son bolas abiertas, tanto si consideramos la métrica discreta sobre X, como si consideramos la métrica de Sierpinski. Estas dos métricas generan entonces los mismos conjuntos abiertos en X. En otras palabras, estas métricas son equivalentes.*

2. *Los numerales 2, 3 y 4 de 1.1.2. establecen métricas equivalentes sobre $\mathbb{R}^2$.*

3. *Si (X, d) es un espacio métrico, la función $d_1 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_1(x, y) = \min\{d(x, y),\ 1\}$ es una métrica acotada sobre X equivalente a la métrica d.*

Estudiaremos otros conceptos topológicos en espacios métricos a lo largo de los siguientes capítulos.

Ejercicios 1.3

1. Sea X un espacio métrico. Demuestre los siguientes hechos:

   a) El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto X son conjuntos abiertos.

   b) Si A y B son conjuntos abiertos en X entonces $A \cap B$ es un conjunto abierto en X.

   c) La unión de cualquier familia de conjuntos abiertos en X es un conjunto abierto en X.

   d) Todo intervalo abierto de $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto.

2. Sea X un espacio métrico. Se dice que un subconjunto F de X es cerrado en X si su complemento es abierto. Pruebe las siguientes afirmaciones:

   a) Los subconjuntos de X que tienen exactamente un punto son cerrados.

b) Si A y B son conjuntos cerrados en X entonces $A \cup B$ es un conjunto cerrado en X.

c) La intersección de cualquier familia de conjuntos cerrados en X es un conjunto cerrado en X.

d) Si X tiene la métrica discreta entonces todo subconjunto de X es abierto y cerrado.

e) Todo intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ es un conjunto cerrado.

3. Sean X y Y espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) f es continua.

   b) Si A es un subconjunto abierto de Y entonces $f^{-1}(A)$ es un subconjunto abierto de X.

   c) Si K es un subconjunto cerrado de Y entonces $f^{-1}(K)$ es un subconjunto cerrado de X.

4. Muestre que los numerales 2, 3 y 4 de 1.1.2. establecen métricas equivalentes sobre $\mathbb{R}^2$.

5. Suponga que (X, d) es un espacio métrico. Muestre que la función $d_1 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_1(x, y) = \text{mín}\{d(x, y),\ 1\}$ es una métrica acotada sobre X equivalente a la métrica d.

Capítulo 2

Espacios Topológicos

La distancia definida en un espacio métrico da lugar al concepto de bola abierta, que a su vez permite hablar de las vecindades de un punto y de los conjuntos abiertos en el espacio. En este capítulo generalizamos estas ideas a otros conjuntos en los que no necesariamente se tiene una función distancia.

2.1. Bases para una topología - Conjuntos abiertos

Se ha demostrado que en un espacio métrico (X, d) las bolas abiertas satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\bigcup_{x \in X, \epsilon > 0} B(x, \epsilon) = X$.

2. Si $a,\ b \in X$, si $\epsilon,\ \delta > 0$ y si $x \in B(a, \epsilon) \cap B(b, \delta)$ entonces existe $\gamma > 0$ tal que $B(x, \gamma) \subset B(a, \epsilon) \cap B(b, \delta)$.

En vista de estas propiedades y teniendo en cuenta que la colección de bolas abiertas en un espacio métrico da lugar a conceptos tan importantes como el concepto de vecindad y el de conjunto abierto, formulamos la siguiente definición:

2.1.1 Definición. *Sea X un conjunto. Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X es* una base para una topología sobre X *si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$.

2. *Si $B_1,\ B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C$ y $C \subset B_1 \cap B_2$.*

La primera condición nos dice que todo elemento de X debe pertenecer a un elemento de $\mathcal{B}$ y la segunda que la intersección de dos elementos de la colección $\mathcal{B}$ se puede expresar como una unión de elementos de la misma colección.

2.1.2 EJEMPLOS.

1. *La colección de todas las bolas abiertas en un espacio métrico X es una base para una topología sobre X.*

2. *La colección de todos los intervalos de la forma $[a, b)$ con a y b números reales y $a < b$ es una base para una topología sobre $\mathbb{R}$.*

Tal como sucede en los espacios métricos, el concepto de base para una topología da lugar al concepto de conjunto abierto.

2.1.3 Definición. *Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ una base para una topología sobre X. Un subconjunto A de X es un conjunto abierto en X si es unión de una familia de elementos de $\mathcal{B}$.*
La colección de todos los conjuntos abiertos en X es la topología sobre X generada por $\mathcal{B}$.

Esta última definición justifica la expresión "base para una topología" sobre X.

Nótese que, al igual que en los espacios métricos, la topología sobre X generada por $\mathcal{B}$ tiene las siguientes propiedades:

1. El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto X son conjuntos abiertos.

2. Si A y B son conjuntos abiertos en X entonces $A \cap B$ es un conjunto abierto en X.

3. La unión de cualquier familia de conjuntos abiertos en X es un conjunto abierto en X.

Ejercicios 2.1

1. Pruebe que la colección de todos los intervalos de la forma $[a, b)$ con a y b números reales y $a < b$ es una base para una topología sobre $\mathbb{R}$.

2. Pruebe que la colección de todos los rectángulos abiertos (es decir, sin sus bordes) es una base para una topología sobre el plano.

3. Para cada entero positivo n, sea $S_n = \{n,\ n+1, ...\}$. Muestre que la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que contienen a algún S_n es una base para una topología sobre $\mathbb{N}$.

4. Sean X un conjunto y $\mathcal{S}$ una colección de subconjuntos de X. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

   a) Demuestre que la unión de la colección $\mathcal{B}$ es X. (Sugerencia: Considere la intersección de una familia vacía de elementos de $\mathcal{S}$.)

   b) Pruebe que si A y B pertenecen a $\mathcal{B}$ y si $x \in A \cap B$, entonces existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C$ y $C \subset A \cap B$.

   Se ha demostrado que $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre X. La colección $\mathcal{S}$ es una *sub-base* para la topología, que genera la base $\mathcal{B}$. Los elementos de $\mathcal{S}$ se dicen ser *sub-básicos*.

5. Considere la colección $\mathcal{S}$ de conjuntos de la forma $(-\infty, a)$ junto con los conjuntos de la forma (b, ∞). Esta colección es una sub-base para una topología sobre $\mathbb{R}$.

   a) Describa la base $\mathcal{B}$ generada por $\mathcal{S}$.

   b) Describa los conjuntos abiertos generados por $\mathcal{B}$.

6. Considere la colección $\mathcal{S}$ de todas las lineas rectas en el plano.

   a) Describa la base $\mathcal{B}$ generada por $\mathcal{S}$.

b) Describa los conjuntos abiertos generados por $\mathcal{B}$.

7. Sea X un conjunto y $\mathcal{B}$ una base para una topología sobre X. Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones:

   a) El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto X son conjuntos abiertos.

   b) Si A y B son conjuntos abiertos en X entonces $A \cap B$ es un conjunto abierto en X.

   c) La unión de cualquier familia de conjuntos abiertos en X es un conjunto abierto en X.

2.2. Espacios topológicos

La colección de todos los conjuntos abiertos determinados por una base para una topología sobre un conjunto X, resulta ser la mayor base que genera la misma topología sobre X. En algunas ocasiones es conveniente tomar como punto de partida esta base particular.

Esta observación motiva la siguiente definición:

2.2.1 Definición. *Sea X un conjunto. Una colección τ de subconjuntos de X tal que*

1. *el conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto X pertenecen a τ,*
2. *si $A,\ B \in \tau$ entonces $A \cap B \in \tau$,*
3. *la unión de cualquier familia de elementos de τ pertenece a τ*

es una topología sobre X. Los elementos de la colección τ se llaman conjuntos abiertos *y la pareja (X, τ), o simplemente X si no cabe duda sobre cuál es la colección τ, se llama un* espacio topológico.

2.2.2 EJEMPLOS.

1. *Si X es un espacio métrico, la topología generada por la colección de todas las bolas abiertas es una topología sobre X que se llama la topología métrica o la topología generada por la métrica. Los espacios métricos son una importante clase de espacios topológicos.*

La topología usual sobre $\mathbb{R}$, y en general sobre $\mathbb{R}^n$, es la topología generada por la métrica usual.

Si la topología sobre un espacio X está generada por una métrica (esto es, si existe una métrica sobre X que genera la topología de X), decimos que X es un espacio metrizable.

2. *Sea X un conjunto cualquiera. La colección $\mathcal{P}(X)$ de todos los subconjuntos de X es una topología sobre X que recibe el nombre de* topología discreta. *El espacio $(X, \mathcal{P}(X))$ se llama* espacio discreto. *Nótese que esta topología está generada por la métrica discreta sobre X.*

3. *Sea X un conjunto cualquiera. La colección $\{\emptyset,\ X\}$ es una topología sobre X que se llama* topología trivial *o* topología grosera. *El espacio X con esta topología es un* espacio trivial *o* espacio grosero.

4. *La colección $\tau = \{\emptyset,\ \{0\},\ \{0,\ 1\}\}$ es la* topología de Sierpinski *sobre el conjunto $X = \{0,\ 1\}$. El espacio (X, τ) se llama el* espacio de Sierpinski.

5. *La colección $\{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$ es una topología sobre $\mathbb{R}$ que se acostumbra llamar la topología de las colas a derecha. Por su parte, la colección $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$ es también una topología sobre $\mathbb{R}$ que se llama la topología de las colas a izquierda.*

6. *Sea X un conjunto infinito. La colección $\{A \subset X : A^c$ es finito $\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología sobre X que recibe el nombre de* topología de los complementos finitos.

7. *Sea X un conjunto. La colección $\{A \subset X : A^c$ es enumerable$\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología sobre X que recibe el nombre de* topología de los complementos enumerables.

8. *Un subconjunto A del plano $\mathbb{R}^2$ se llama* radialmente abierto *si por cada uno de sus puntos existe un segmento abierto de linea recta en cada dirección, que contiene al punto y está contenido en el conjunto. Es inmediato que la colección de todos los conjuntos radialmente abiertos es una topología sobre $\mathbb{R}^2$ que se llama* topología radial. *El plano $\mathbb{R}^2$ junto con esta topología es el* plano radial.

9. *Sea X un conjunto totalmente ordenado por la relación $<$. Dos elementos $a,\ b \in X$ con $a < b$, determinan los siguientes intervalos:*

$$\begin{aligned} \textit{Intervalo abierto: } (a,b) &= \{x \in X : a < x < b\}, \\ (a,b] &= \{x \in X : a < x \leq b\}, \\ [a,b) &= \{x \in X : a \leq x < b\}, \\ \textit{Intervalo cerrado: } [a,b] &= \{x \in X : a \leq x \leq b\}. \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{B}$ la colección que consiste de los siguientes tipos de intervalos:

a) *Todos los intervalos abiertos (a,b) en X.*

b) *Todos los intervalos de la forma $[a_0,b)$ donde a_0 es el elemento mínimo de X (si lo hay).*

c) *Todos los intervalos de la forma $(a,b_0]$ donde b_0 es el elemento máximo de X (si lo hay).*

La colección $\mathcal{B}$ es una base que genera la así llamada topología del orden *sobre X. Un conjunto totalmente ordenado junto con la topología del orden se llama un* espacio ordenado.

Consideremos sobre el conjunto de los números reales la topología usual τ_{usual} y la topología de las colas a derecha τ_C. Nótese que cada conjunto abierto en el espacio $(\mathbb{R}, \tau_C)$ es un conjunto abierto en $(\mathbb{R}, \tau_{usual})$. Expresamos este hecho diciendo que τ_C es *menos fina que* τ_{usual} o que τ_{usual} es *más fina que* τ_C. En general tenemos la siguiente definición:

2.2.3 Definición. *Sean X un conjunto y τ_1, τ_2 topologías sobre X. Decimos que τ_1 es* menos fina *que τ_2 o que τ_2 es* más fina *que τ_1 si $\tau_1 \subset \tau_2$.*

Como es natural, si τ_1 es menos fina que τ_2 y τ_2 es menos fina que τ_1 entonces $\tau_1 = \tau_2$.

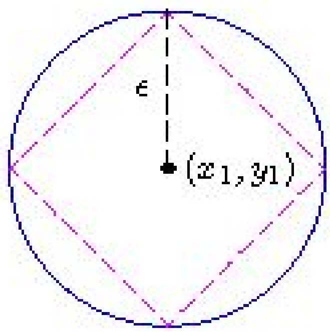
2.2.4 EJEMPLOS.

1. *Recordemos la métrica del taxista ρ_1 definida sobre $\mathbb{R}^2$ por*

$$\rho_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Si $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ *y* $\epsilon > 0$ *entonces*

$$\{(x,y) : |x - x_1| + |y - y_1| < \epsilon\}$$
$$\subset \{(x,y) : \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} < \epsilon\}.$$

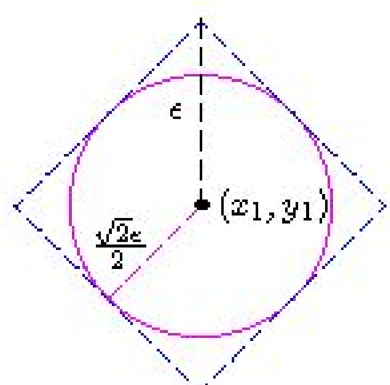


Esto implica que la topología usual sobre $\mathbb{R}^2$ *es menos fina que la topología generada por la métrica del taxista.*

Además se tiene que

$$\left\{(x,y) : \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} < \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2}\right\}$$
$$\subset \{(x,y) : |x - x_1| + |y - y_1| < \epsilon\}.$$

Entonces la topología usual sobre $\mathbb{R}^2$ *es más fina que la topología generada por la métrica del taxista.*



Aunque ya lo habíamos mencionado, las consideraciones anteriores implican que la métrica usual y la métrica del taxista generan la misma topología sobre $\mathbb{R}^2$.

2. *Si z es un punto en una bola abierta en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, para cada posible dirección existe un segmento abierto de linea en esta dirección, que contiene a z y que está contenido en la bola. Esto implica que la topología usual de $\mathbb{R}^2$ es menos fina que la topología radial.*

Ejercicios 2.2

1. Describa todas las topologías que existen sobre un conjunto de dos elementos y determine para cada par de ellas si una es más fina o menos fina que la otra.

2. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. En cada caso, justifique su respuesta con una demostración o un contraejemplo.

   a) La intersección de dos topologías sobre un conjunto X es una topología sobre X.

   b) La intersección de cualquier familia de topologías sobre un conjunto X es una topología sobre X.

   c) La unión de dos topologías sobre un conjunto X es una topología sobre X.

   d) La unión de cualquier familia de topologías sobre un conjunto X es una topología sobre X.

3. Demuestre que si $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre X, entonces la topología generada por $\mathcal{B}$ es igual a la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a $\mathcal{B}$.

4. Demuestre que si $\mathcal{S}$ es una sub-base para una topología sobre X, entonces la topología generada por $\mathcal{S}$ es igual a la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a $\mathcal{S}$.

5. Dé un ejemplo que muestre que la topología radial del plano no es menos fina que la topología usual.

6. Sea X un conjunto totalmente ordenado. Verifique que la colección $\mathcal{B}$ que consiste de los siguientes tipos de intervalos:

   a) todos los intervalos abiertos (a, b) en X, *b*) todos los intervalos de la forma $[a_0, b)$ donde a_0 es el elemento mínimo de X (si lo hay),

c) todos los intervalos de la forma $(a, b_0]$ donde b_0 es el elemento máximo de X (si lo hay),

es una base para una topología sobre X.

7. Considere la topología del orden lexicográfico sobre $\mathbb{R}^2$ (Ver Apéndice A7).

a) Haga un bosquejo que muestre los distintos tipos de intervalos que se pueden encontrar.

b) Muestre que la función $d* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d*((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} \text{mín}\{|y_1 - y_2|, 1\} & \text{si } x_1 = x_2 \\ 1 & \text{si } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

es una métrica sobre $\mathbb{R}^2$.

c) Compare la topología generada por la métrica $d*$ con la topología del orden lexicográfico sobre $\mathbb{R}^2$.

2.3. Vecindades

Ahora estamos en capacidad de definir el concepto de vecindad de un punto en un espacio topológico.

2.3.1 Definición. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Un subconjunto V de X es una vecindad de x si existe un conjunto abierto A tal que $x \in A$ y $A \subset V$. Denotamos por $\mathcal{V}(x)$ el conjunto de todas las vecindades de x.*

Nótese que un subconjunto A de un espacio topológico X es un conjunto abierto si y sólo si A es vecindad de cada uno de sus puntos.

El siguiente resultado resume las propiedades más importantes de las vecindades.

2.3.2 Proposición. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

1. $x \in V$ *para cada* $V \in \mathcal{V}(x)$.

2. *Si* $U,\ V \in \mathcal{V}(x)$ *entonces* $U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.

3. *Si* $U \in \mathcal{V}(x)$ *entonces existe* $V \in \mathcal{V}(x)$ *tal que* $U \in \mathcal{V}(y)$ *para cada* $y \in V$.

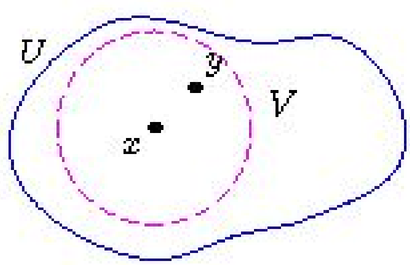
4. *Si* $U \in \mathcal{V}(x)$ *y* $U \subset V$ *entonces* $V \in \mathcal{V}(x)$.

Demostración.

1. La primera afirmación es consecuencia inmediata de la definición de vecindad.

2. Si $A,\ B \in \tau$, $x \in A$, $x \in B$, $A \subset U$ y $B \subset V$ entonces $A \cap B \in \tau$, $x \in A \cap B$ y $A \cap B \subset U \cap V$.

3.



Puesto que $U \in \mathcal{V}(x)$ existe $V \in \tau$ tal que $x \in V$ y $V \subset U$. Entonces para cada $y \in V$, $U \in \mathcal{V}(y)$.

4. Si $A \in \tau$ es tal que $x \in A$ y $A \subset U$ entonces también $A \subset V$ y así $V \in \mathcal{V}(x)$.

$\square$

En nuestra discusión incial de este capítulo vimos cómo generar una topología sobre un conjunto X partiendo de una colección de subconjuntos de X con las mismas propiedades de la colección de bolas abiertas en un espacio métrico. Esto es, partiendo de una base para una topología sobre X. Ahora veremos que si tomamos como punto de partida colecciones con las mismas propiedades de las vecindades de los puntos, también podemos generar una topología sobre el conjunto X.

2.3.3 Proposición. *Sea X un conjunto. Si para cada $x \in X$ se ha asignado una colección no vacía $\mathcal{V}(x)$ de subconjuntos de X tal que:*

1. *$x \in V$ para cada $V \in \mathcal{V}(x)$,*
2. *si $U,\ V \in \mathcal{V}(x)$ entonces $U \cap V \in \mathcal{V}(x)$,*
3. *si $U \in \mathcal{V}(x)$ entonces existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $U \in \mathcal{V}(y)$ para cada $y \in V$,*
4. *si $U \in \mathcal{V}(x)$ y $U \subset V$ entonces $V \in \mathcal{V}(x)$,*

entonces existe una topología sobre X tal que para cada $x \in X$ la colección $\mathcal{V}(x)$ es precisamente la colección de vecindades de x.

Demostración. Diremos que un conjunto $A \subset X$ es “abierto” si para cada $x \in A$ se tiene que $A \in \mathcal{V}(x)$. Demostraremos ahora que la colección de conjuntos “abiertos” es una topología sobre X y que la colección de vecindades de cada $x \in X$ es $\mathcal{V}(x)$.

1. Es inmediato que $\emptyset$ y X son conjuntos “abiertos”.
2. Si A y B son conjuntos “abiertos” y si $x \in A \cap B$, entonces $A,\ B \in \mathcal{V}(x)$. Por hipótesis $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$, luego $A \cap B$ es un conjunto “abierto” .
3. Si $\mathcal{A}$ es una familia de conjuntos “abiertos” y $x \in \bigcup \mathcal{A}$ entonces $x \in A$ para algún $A \in \mathcal{A}$. Se tiene que $A \in \mathcal{V}(x)$, así $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{V}(x)$ y se concluye que $\bigcup \mathcal{A}$ es un conjunto “abierto” .

Entonces la colección τ de conjuntos “abiertos” es una topología sobre X.

Veamos ahora que para cada $x \in X$, la colección de vecindades de x es precisamente $\mathcal{V}(x)$.

Si W es una vecindad de x existe $A \in \tau$ tal que $x \in A$ y $A \subset W$. Como $A \in \tau$, se tiene que $A \in \mathcal{V}(x)$, entonces $W \in \mathcal{V}(x)$.

De manera recíproca, si $V \in \mathcal{V}(x)$ y si además $U = \{y \in V : V \in \mathcal{V}(y)\}$, entonces U contiene a x, está contenido en V y es un conjunto abierto. En efecto, si $y \in U$, entonces $V \in \mathcal{V}(y)$. Por hipótesis, existe $W \in \mathcal{V}(y)$ tal que $V \in \mathcal{V}(w)$ para cada $w \in W$. Esto implica que $W \subset U$, de donde $U \in \mathcal{V}(y)$, lo cual permite concluir que U es abierto. Entonces V es una vecindad de x. $\square$

En $\mathbb{R}$ con la topología usual los intervalos abiertos centrados en un punto x dan lugar a todas las vecindades de x en el siguiente sentido: Toda vecindad de x contiene un intervalo abierto centrado en x. Diremos que los intervalos abiertos centrados en x son un *sistema fundamental de vecindades* del punto x. En general tenemos la siguiente definición:

2.3.4 Definición. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Un subconjunto $\mathcal{B}(x)$ de $\mathcal{V}(x)$ es un* sistema fundamental de vecindades *de x si para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $U \in \mathcal{B}(x)$ tal que $U \subset V$. Llamamos a los elementos de $\mathcal{B}(x)$* vecindades básicas *de x.*

2.3.5 EJEMPLOS.

1. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. La colección de todas las vecindades abiertas de x es un sistema fundamental de vecindades de x.*

2. *Si X es un espacio topológico discreto y $x \in X$ entonces el conjunto cuyo único elemento es $\{x\}$ es un sistema fundamental de vecindades de x.*

3. *Si X es un espacio métrico y $x \in X$, el conjunto de todas las bolas abiertas centradas en x es un sistema fundamental de vecindades de x. También lo es el conjunto de todas las bolas abiertas con radio racional, centradas en x.*

De la definición se infiere que si X es un espacio topológico y para cada $x \in X$ la colección $\mathcal{B}(x)$ es un sistema fundamental de vecindades de x, entonces:

1. Si $V \in \mathcal{B}(x)$, entonces $x \in V$.

2. Si $V_1,\ V_2 \in \mathcal{B}(x)$, entonces existe $V_3 \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.

3. Si $V \in \mathcal{B}(x)$, existe $U \in \mathcal{B}(x)$ tal que si $y \in U$, entonces $W \subset V$ para algún $W \in \mathcal{B}(y)$.

4. Un subconjunto A de X es abierto si y sólo si contiene una vecindad básica de cada uno de sus puntos.

Al igual que sucede con las bases para una topología y con las colecciones de vecindades, colecciones de subconjuntos de un conjunto X con las propiedades "adecuadas" para ser sistemas fundamentales de vecindades de los puntos de X, permiten generar una topología sobre X como lo muestra el siguiente resultado.

2.3.6 Proposición. *Sea X un conjunto. Si para cada $x \in X$ se ha asignado una colección $\mathcal{B}(x)$ de subconjuntos de X tal que:*

1. *$x \in V$ para cada $V \in \mathcal{B}(x)$,*

2. *si $U,\ V \in \mathcal{B}(x)$ entonces existe $W \in \mathcal{B}(x)$ tal que $W \subset U \cap V$,*

3. *si $U \in \mathcal{B}(x)$ entonces existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que para cada $y \in V$, existe $W \in \mathcal{B}(y)$ con $W \subset U$,*

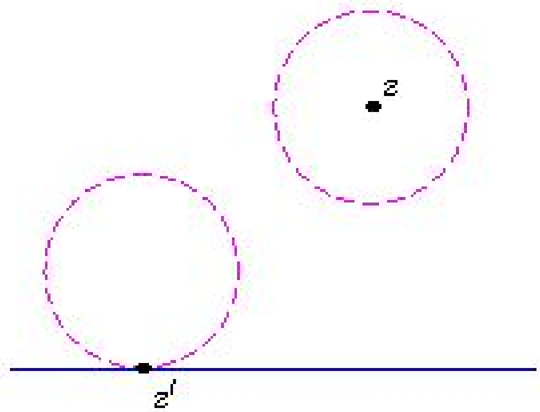
entonces existe una topología sobre X tal que para cada $x \in X$ la colección $\mathcal{B}(x)$ es un sistema fundamental de vecindades de x.

Demostración. Para cada $x \in X$ la colección $\mathcal{V}(x) = \{U \subset X : V \subset U \text{ para algún } V \in \mathcal{B}(x)\}$ satisface las hipótesis de la proposición 2.3.3, luego existe una topología sobre X tal que para cada $x \in X$ se tiene que $\mathcal{V}(x)$ es la colección de todas las vecindades de x. Resulta inmediato que $\mathcal{B}(x)$ es un sistema fundamental de vecindades de x para cada $x \in X$. □

2.3.7 EJEMPLOS.

1. *Los conjuntos de la forma $[x, y)$ con $x < y$ forman un sistema fundamental de vecindades de x para una topología sobre $\mathbb{R}$. En efecto, si $x < y$ entonces $x \in [x, y)$, si $x < y$ y $x < z$ y se tiene $x < w < \text{mín}\{y,\ z\}$ entonces $[x, w) \subset [x, y) \cap [x, z)$ y finalmente, si $x < y$ y $z \in [x, y)$ entonces $[z, y) \subset [x, y)$.*

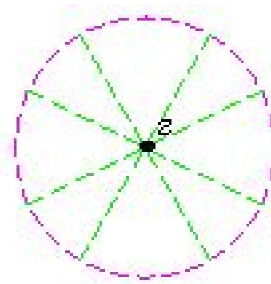
2.



Sea $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. *Si* $y > 0$ *las vecindades básicas de* $z = (x,y)$ *serán las bolas abiertas usuales centradas en* z *con radio menor o igual que* y *y si* $y' = 0$, *las vecindades básicas de* $z' = (x', y')$ *son los conjuntos de la forma* $\{z'\} \cup A$ *donde* A *es una bola abierta contenida en* Γ *tangente al eje real en* z'.

El espacio topológico que se obtiene recibe el nombre de Plano de Moore.

3. *Para cada punto* z *del plano definimos las vecindades básicas de* z *como los conjuntos de la forma* $\{z\} \cup A$ *donde* A *es una bola abierta usual, centrada en* z, *de la cual se ha removido un número finito de segmentos de línea que pasan por* z.



El espacio topológico que se obtiene se llama plano ranurado.

4. *Para cada número real* x *distinto de* 0 *definimos* $\mathcal{B}(x)$ *como los intervalos abiertos centrados en* x *mientras que los elementos de* $\mathcal{B}(0)$ *serán los conjuntos de la forma* $(-\infty, -n) \cup (-\epsilon, \epsilon) \cup (n, \infty)$ *donde* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\epsilon > 0$.

5. *Consideremos el conjunto* $\mathbb{R}^I$ *de todas las funciones definidas del intervalo* $I = [0,1]$ *en* $\mathbb{R}$. *Definimos las vecindades básicas de* $f \in \mathbb{R}^I$ *como los conjuntos de la forma* $U(f, F, \delta) = \{g \in \mathbb{R}^I : |g(x) - f(x)| < \delta,$ *para cada* $x \in F\}$ *donde* F *es un subconjunto finito de* I *y* $\delta > 0$.

Ejercicios 2.3

1. Suponga que X es un conjunto dotado con la topología discreta. Determine todas las vecindades de cada punto $x \in X$.

2. Sea X un conjunto dotado con la topología grosera y sea $x \in X$. Determine todas las vecindades de x.

3. Considere el conjunto de los números naturales con la topología de las colas a la derecha. Determine todas las vecindades de cada número natural.

4. Considere el conjunto de los números naturales con la topología de los complementos finitos. Determine todas las vecindades de cada número natural.

5. Suponga que τ_1 y τ_2 son dos topologías sobre el mismo conjunto X y que τ_1 es más fina que τ_2. Compare las colecciones de vecindades de un mismo punto en los dos espacios topológicos.

6. Sea X un espacio topológico y suponga que para cada $x \in X$ la colección $\mathcal{B}(x)$ es un sistema fundamental de vecindades de x. Pruebe los siguientes hechos:

   a) Si $V \in \mathcal{B}(x)$, entonces $x \in V$.

   b) Si $V_1,\ V_2 \in \mathcal{B}(x)$, entonces existe $V_3 \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.

   c) Si $V \in \mathcal{B}(x)$, existe $U \in \mathcal{B}(x)$ tal que si $y \in U$ entonces $W \subset V$ para algún $W \in \mathcal{B}(y)$.

   d) Un subconjunto A de X es abierto si y sólo si contiene una vecindad básica de cada uno de sus puntos.

7. Sea $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Para cada $z = (x, y) \in \Gamma$ considere la colección $\mathcal{B}(z)$ definida de la siguiente manera: Si $y > 0$ $\mathcal{B}(z)$ es la colección de todas las bolas abiertas usuales centradas en z con radio menor o igual que y y si $y' = 0$, $\mathcal{V}(z')$ es la colección de todos los conjuntos de la forma $\{z'\} \cup A$ donde A es una bola abierta contenida en Γ tangente al eje real en z'. Demuestre que estas colecciones satisfacen las hipótesis de la Proposición 2.3.6.

8. Para cada punto z del plano definimos $\mathcal{B}(z)$ como la colección de todos los conjuntos de la forma $\{z\} \cup A$ donde A es una bola abierta usual, centrada en z, de la cual se ha removido un número finito de segmentos de linea que pasan por z. Demuestre que estas colecciones satisfacen las hipótesis de la Proposición 2.3.6.

9. Para cada número real x distinto de 0 definimos $\mathcal{B}(x)$ como la colección de todos los intervalos abiertos centrados en x mientras que los elementos de $\mathcal{B}(0)$ serán los conjuntos de la forma $(-\infty, -n) \cup (-\epsilon, \epsilon) \cup (n, \infty)$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$. Demuestre que estas colecciones satisfacen las hipótesis de la Proposición 2.3.6.

10. Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^I$ de todas las funciones definidas del intervalo $I = [0, 1]$ en $\mathbb{R}$. Para cada $f \in \mathbb{R}^I$ definimos $\mathcal{B}(f)$ como la colección de todos los conjuntos de la forma $U(f, F, \delta) = \{g \in \mathbb{R}^I : |g(x) - f(x)| < \delta, \text{ para cada } x \in F\}$ donde F es un subconjunto finito de I y $\delta > 0$. Demuestre que estas colecciones satisfacen las hipótesis de la Proposición 2.3.6.

2.4. Conjuntos cerrados

En un espacio topológico el concepto de conjunto cerrado está estrechamente relacionado con el concepto de conjunto abierto.

2.4.1 Definición. *Sea X un espacio topológico. Un subconjunto F de X es un* conjunto cerrado *en X si su complemento, F^c, es un conjunto abierto.*

Hacemos notar que el conjunto vacío y el mismo conjunto X son a la vez abiertos y cerrados y que un subconjunto de X puede no ser abierto ni cerrado como sucede por ejemplo con $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ con la topología usual.

La siguiente proposición establece las propiedades fundamentales de los conjuntos cerrados.

2.4.2 Proposición. *Sea X un espacio topológico.*

1. *$\emptyset$ y X son conjuntos cerrados.*
2. *Si F y K son conjuntos cerrados entonces $F \cup K$ es un conjunto cerrado.*
3. *Si $\mathcal{C}$ es una familia de conjuntos cerrados entonces $\bigcap_{F\in\mathcal{C}} F$ es un conjunto cerrado.*

Demostración.

1. Que $\emptyset$ y X son conjuntos cerrados es una consecuencia inmediata de la definición.
2. Por las Leyes de De Morgan, $(F \cup K)^c = F^c \cap K^c$ que es un conjunto abierto porque así lo son F^c y K^c.
3. Nuevamente por las Leyes de De Morgan, $\left(\bigcap_{F\in\mathcal{C}} F\right)^c = \bigcup_{F\in\mathcal{C}} F^c$ que es también un conjunto abierto.

□

La unión arbitraria de conjuntos cerrados no siempre es un conjunto cerrado como lo muestra el siguiente ejemplo.

2.4.3 EJEMPLO.
Sea $\mathbb{R}$ el espacio de los números reales con la topología usual. La colección de conjuntos de la forma $\left[-1, 1-\dfrac{1}{n}\right]$ donde $n \in \mathbb{N}$, es una familia de conjuntos cerrados cuya unión es el intervalo $[-1, 1)$ que no es un conjunto cerrado.

Ejercicios 2.4

1. Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son cerrados justificando completamente su respuesta.

   a) $[-1, 1)$.

b) $[1, \infty)$.

c) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

d) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.

e) $\mathbb{Z}$.

f) $\mathbb{Q}$.

g) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

h) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. Pruebe que en cualquier espacio métrico (X, d), cada bola cerrada $B[x, \epsilon] = \{y \in X : d(x, y) \leq \epsilon\}$ es un conjunto cerrado.

3. Sean τ_1 y τ_2 dos topologías definidas sobre un mismo conjunto X. Si τ_1 es más fina que τ_2, ¿qué relación hay entre la colección de conjuntos cerrados de (X, τ_1) y la colección de conjuntos cerrados de (X, τ_2)? Como es natural, justifique cuidadosamente su respuesta.

4. Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es *cerrada* si aplica conjuntos cerrados en conjuntos cerrados. Esto es, si para cada K cerrado en X se tiene que $f(K)$ es cerrado en Y.

   a) Sean τ la topología usual sobre $\mathbb{R}$ y ρ la topología de complementos finitos sobre $\mathbb{Z}$. Dé un ejemplo de una función cerrada definida de $(\mathbb{R}, \tau)$ en $(\mathbb{Z}, \rho)$.

   b) Muestre con un ejemplo que no toda función cerrada definida de un espacio métrico en otro es continua.

   c) Muestre con un ejemplo que no toda función continua definida de un espacio métrico en otro es cerrada.

5. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{K}$ una familia de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:

   a) $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathcal{K}$.

   b) Si $F,\ K \in \mathcal{K}$ entonces $F \cup K \in \mathcal{K}$.

   c) Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}$, entonces $\bigcap_{F \in \mathcal{C}} F \in \mathcal{K}$.

Demuestre que la colección τ de todos los complementos de elementos de $\mathcal{K}$ es una topología sobre X y que $\mathcal{K}$ es la colección de conjuntos cerrados del espacio (X, τ).

6. Sea X un espacio topológico. Una familia $\mathcal{K}$ de subconjuntos cerrados de X es una *base para los conjuntos cerrados* en X si cualquier conjunto cerrado es intersección de elementos de $\mathcal{K}$.

    a) Demuestre que $\mathcal{K}$ es una base para los conjuntos cerrados en X si y sólo si la colección $\mathcal{B} = \{K^c : K \in \mathcal{K}\}$, de todos los complementos de elementos de $\mathcal{K}$ es una base para la topología de X.

    b) ¿Es la colección de todos los intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ una base para los conjuntos cerrados en $\mathbb{R}_{usual}$?

7. Sea $\mathcal{K}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X. Demuestre que $\mathcal{K}$ es una base para los conjuntos cerrados, para alguna topología sobre X, si y sólo si:

    a) Para cada par K_1, K_2 de elementos de $\mathcal{K}$ se tiene que $K_1 \cup K_2$ es una intersección de elementos de $\mathcal{K}$.

    b) $\bigcap_{K \in \mathcal{K}} K = \emptyset$.

2.5. Adherencia de un conjunto

En los conjuntos cerrados se nota un hecho particular. Si un punto está fuera de un conjunto cerrado, intuitivamente el punto está "realmente muy lejos" del conjunto, en virtud de que existe una vecindad del punto completamente contenida en el complemento del conjunto. En otras palabras, si un conjunto es cerrado, no hay puntos "adheridos" a él que se encuentren fuera de él. Acudiendo nuevamente a la intuición, decimos que un punto está "adherido" a un conjunto si siempre encontramos puntos del conjunto tan "cerca" como queramos del punto. Esta idea que surge de manera natural de la experiencia da lugar a la siguiente definición.

2.5.1 Definición. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Un punto $x \in X$ es* adherente *a A si toda vecindad de x contiene puntos de A. El conjunto de todos los puntos adherentes a A se denota por $\overline{A}$ y se llama la* adherencia *de A.*

2.5.2 EJEMPLOS.

1. *Consideremos* $A = \left\{ \dfrac{-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ *como subconjunto de* $\mathbb{R}$. *El número* 0 *es adherente a* A *si sobre* $\mathbb{R}$ *consideramos la topología usual, pero* 0 *NO es adherente a* A *si sobre* $\mathbb{R}$ *consideramos la topología discreta o la topología generada por los intervalos de la forma* $[a,b)$ *con* $a < b$. *Nótese que cada elemento de* A *es adherente a* A. *Dado* $n \in \mathbb{N}$, *cualquier vecindad de* $\dfrac{-1}{n}$ *contiene por lo menos a* $\dfrac{-1}{n}$.

2. *En el Plano de Moore, cada punto de la forma* $(a,0)$ *es adherente al conjunto* $\{(x,y) \in \Gamma : y > 0\}$.

3. *Si* $\mathbb{R}^2$ *tiene la topología de los complementos finitos, el punto* $(0,0)$ *es adherente al conjunto* $A = \{(x,y) : y > x^2 + 1\}$. *Este punto NO es adherente a* A *si estamos considerando la topología usual sobre* $\mathbb{R}^2$.

4. *En* $\mathbb{R}$ *con la topología usual la adherencia del intervalo* (a,b) *es el intervalo* $[a,b]$. *Sin embargo no en todo espacio métrico la adherencia de la bola abierta* $B(x,\epsilon)$ *es la bola cerrada* $B[x,\epsilon]$. *Si* X *es un conjunto con más de un punto y consideramos la métrica discreta sobre* X, *entonces para* $x \in X$, $\overline{B(x,1)} = \{x\}$ *y* $B[x,1] = X$.

5. *La adherencia del conjunto de los números racionales* $\mathbb{Q}$ *en* $\mathbb{R}$ *es* $\mathbb{R}$. *En este caso decimos que el conjunto* $\mathbb{Q}$ *es* denso *en* $\mathbb{R}$. *En general, decimos que un subconjunto* A *de un espacio topológico* X *es* denso *en* X *si* $\overline{A} = X$.

El comentario final del primer ejemplo nos hace reflexionar sobre un hecho completamente natural:

Si X *es un espacio topológico y* $A \subset X$, *entonces* $A \subset \overline{A}$.

Además resulta también inmediato que *si* $A \subset B$ *entonces* $\overline{A} \subset \overline{B}$.

El siguiente resultado nos permite hacer otra presentación de la adherencia de un conjunto.

2.5.3 Proposición. *Si* X *un espacio topológico y* $A \subset X$ *entonces* $\overline{A} = \bigcap\{K \subset X : K$ *es cerrado y* $A \subset K\}$.

Demostración.

1. Si $x \in \overline{A}$ y K es un subconjunto cerrado de X que contiene a A entonces $x \in K$, pues de lo contrario existiría una vecindad V de x con $V \subset K^c$, lo cual implicaría que V no contiene puntos de A. Entonces $x \in \bigcap\{K \subset X : K \text{ es cerrado y } A \subset K\}$.

2. Por otro lado, si $x \notin \overline{A}$ existe una vecindad abierta V de x sin puntos en común con A, entonces V^c es un conjunto cerrado tal que $A \subset V^c$ y $x \notin V^c$. Esto significa que $x \notin \bigcap\{K \subset X : K \text{ es cerrado y } A \subset K\}$.

□

Algunas de las más importantes propiedades de la adherencia se resumen en el siguiente resultado.

2.5.4 Proposición. *Sea X un espacio topológico.*

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ *para cada* $A \subset X$.

2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *para cada* $A,\ B \subset X$.

3. $A \subset X$ *es cerrado si y sólo si* $\overline{A} = A$.

Demostración.

1. Por ser intersección de conjuntos cerrados, $\overline{A}$ es un conjunto cerrado que contiene a $\overline{A}$. Entonces $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. La otra inclusión es inmediata.

2. El conjunto $\overline{A} \cup \overline{B}$ es cerrado y contiene a $A \cup B$, entonces contiene también a $\overline{A \cup B}$, entonces $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Por otro lado, puesto que $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$ se tiene que $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, entonces $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

3. Si A es cerrado, $\overline{A} \subset A$, lo que implica $A = \overline{A}$. Por otra parte, si $A = \overline{A}$ y $x \notin A$ existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V \cap A = \emptyset$. Entonces $V \subset A^c$, de donde A^c es abierto y A es cerrado.

□

Cuando se tiene un espacio topológico X automáticamente se tiene una función, que se llama *operación de adherencia de Kuratowski*, de $\mathcal{P}(X)$ en $\mathcal{P}(X)$ que asigna a cada subconjunto A de X su adherencia $\overline{A}$. De manera recíproca, dado un conjunto X y una función $A \longmapsto \overline{A} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ con las propiedades adecuadas, se puede encontrar una topología sobre X en la que la adherencia de cada subconjunto de X está dada por la función. Este es el resultado que se presenta en la siguiente proposición.

2.5.5 Proposición. *Sea X un conjunto y supongamos que se ha definido una operación $A \longmapsto \overline{A} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que*

1. $A \subset \overline{A}$ *para cada* $A \subset X$.
2. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ *para cada* $A \subset X$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *para cada* $A,\ B \subset X$.
4. $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Existe una topología sobre X cuya operación de adherencia es precisamente $A \longmapsto \overline{A}$.

Demostración. Como nuestro deseo es que la operación dada sea la operación de adherencia en el espacio topológico que formemos, comenzaremos por dar la colección de los que esperamos sean conjuntos cerrados.
Sea $\mathcal{F} = \{F \subset X : F = \overline{F}\}$. Veamos que la colección $\tau = \{A : A^c \in \mathcal{F}\}$ es la topología sobre X que estamos buscando.

1. Puesto que $\emptyset \in \mathcal{F}$, $X \in \tau$. Por otro lado, $X \subset \overline{X}$, luego $X = \overline{X}$, de donde $X \in \mathcal{F}$, por tanto $\emptyset \in \tau$.
2. Si $A,\ B \in \tau$ se tiene
$$\begin{aligned}(A \cap B)^c &= A^c \cup B^c\\ &= \overline{A^c} \cup \overline{B^c}\\ &= \overline{A^c \cup B^c}\\ &= \overline{(A \cap B)^c},\end{aligned}$$
entonces $(A \cap B)^c \in \mathcal{F}$ y $A \cap B \in \tau$.

3. Veamos ahora que la unión de cualquier colección de elementos de τ pertenece a τ. En primer lugar, nótese que si $A \subset B$ entonces $B = A \cup B$, luego $\overline{B} = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, de donde $\overline{A} \subset \overline{B}$. Así se tiene que si $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ entonces $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \subset C$ para cada $C \in \mathcal{C}$, de donde $\overline{\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C} \subset \overline{C} = C$ para cada $C \in \mathcal{C}$, lo cual implica que $\overline{\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C} \subset \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$. Esto significa que $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathcal{F}$.

   Si $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de X contenida en τ se tiene

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right)^c &= \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^c \\ &= \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A^c} \\ &= \overline{\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^c} \\ &= \overline{\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right)^c},\end{aligned}$$

   entonces $\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right)^c \in \mathcal{F}$ y $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$.

Hasta aquí hemos demostrado que τ es una topología sobre X. Veamos que la operación de adherencia en este espacio topológico es precisamente la operación dada inicialmente.

Sea $A \subset X$. Puesto que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, se tiene que $\overline{A}$ es un conjunto cerrado. Si F es un conjunto cerrado tal que $A \subset F$, entonces

$$\begin{aligned}\overline{F} &= \overline{F \cup A} \\ &= \overline{F} \cup \overline{A},\end{aligned}$$

luego $\overline{A} \subset \overline{F} = F$. Esto implica que la adherencia de A en X es $\overline{A}$. $\square$

2.5.6 EJEMPLOS.

1. *Sea X cualquier conjunto. Diremos que para cada $A \subset X$, $\overline{A} = A$. En este caso cada subconjunto de X será un conjunto cerrado y la topología que se genera a partir de esta operación de adherencia es la topología discreta.*

2. *Sea X un conjunto cualquiera y definamos ahora $\overline{A} = X$ para todo $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ y $\overline{\emptyset} = \emptyset$. En este caso encontramos la topología trivial o grosera sobre X.*

3. *Si X es un conjunto infinito y para cada $A \subset X$ definimos*

$$\overline{A} = \begin{cases} A & \text{si } A \text{ es finito} \\ X & \text{si } A \text{ es infinito,} \end{cases}$$

obtenemos la topología de complementos finitos sobre X.

4. *Si para cada $A \subset \mathbb{R}$ definimos*

$$\overline{A} = \begin{cases} (-\infty, \sup A] & \text{si } A \text{ es no vacío y está acotado} \\ & \text{superiormente} \\ \mathbb{R} & \text{si } A \text{ es no vacío y no está acotado} \\ & \text{superiormente} \\ \emptyset & \text{si } A = \emptyset, \end{cases}$$

obtenemos la topología de colas a derecha sobre $\mathbb{R}$.

5. *Sean X un conjunto y B un subconjunto fijo de X. Para cada $A \subset X$ definimos*

$$\overline{A} = \begin{cases} A \cup B & \text{si } A \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{si } A = \emptyset. \end{cases}$$

La función $A \longmapsto \overline{A}$ es una operación de adherencia que da lugar a una topología sobre X para la cual los conjuntos cerrados son $\emptyset$ y los subconjuntos de X que contienen a B.

Ejercicios 2.5

1. Consideremos $A = \left\{ \dfrac{-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$. Pruebe que el número 0 es adherente a A si sobre $\mathbb{R}$ consideramos la topología usual, pero NO si sobre $\mathbb{R}$ consideramos la topología discreta o la topología generada por los intervalos de la forma $[a, b)$ con $a < b$.

2. Pruebe que en el Plano de Moore, cada punto de la forma $(a, 0)$ es adherente al conjunto $\{(x, y) : y > 0\}$.

3. Pruebe que si $\mathbb{R}^2$ tiene la topología de los complementos finitos, el punto $(0, 0)$ es adherente al conjunto $A = \{(x, y) : y > x^2 + 1\}$ y que este punto NO es adherente a A si estamos considerando la topología usual sobre $\mathbb{R}^2$.

4. Pruebe que en $\mathbb{R}$ con la topología usual la adherencia del intervalo (a, b) es el intervalo $[a, b]$.

5. Pruebe que la adherencia del conjunto de los números irracionales en $\mathbb{R}$ es $\mathbb{R}$.

6. ¿Es $\mathbb{Q}$ un conjunto denso en $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos finitos?

7. ¿Es $\mathbb{Q}$ un conjunto denso en $\mathbb{R}$ con la topología de las colas a la derecha?

8. Suponga que τ_1 y τ_2 son dos topologías sobre un mismo conjunto X y que τ_1 es más fina que τ_2. Compare la adherencia de un subconjunto A de X en (X, τ_1) con su adherencia en (X, τ_2).

9. Sea X cualquier conjunto. Diremos que para cada $A \subset X$, $\overline{A} = A$. Pruebe que la función $A \longmapsto \overline{A}$ es una operación de adherencia.

10. Sea X un conjunto cualquiera y definamos $\overline{A} = X$ para todo $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ y $\overline{\emptyset} = \emptyset$. Pruebe que la función $A \longmapsto \overline{A}$ es una operación de adherencia.

11. Si X es un conjunto infinito y para cada $A \subset X$ definimos

$$\overline{A} = \begin{cases} A & \text{si } A \text{ es finito} \\ X & \text{si } A \text{ es infinito,} \end{cases}$$

pruebe que la función $A \longmapsto \overline{A}$ es una operación de adherencia.

12. Si para cada $A \subset \mathbb{R}$ definimos

$$\overline{A} = \begin{cases} (-\infty, \sup A] & \text{si } A \text{ es no vacío y está acotado} \\ & \text{superiormente} \\ \mathbb{R} & \text{si } A \text{ es no vacío y no está acotado} \\ & \text{superiormente} \\ \emptyset & \text{si } A = \emptyset, \end{cases}$$

pruebe que la función $A \longmapsto \overline{A}$ es una operación de adherencia.

13. Sean X un conjunto y B un subconjunto fijo de X. Para cada $A \subset X$ definimos

$$\overline{A} = \begin{cases} A \cup B & \text{si } A \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{si } A = \emptyset. \end{cases}$$

Pruebe que la función $A \longmapsto \overline{A}$ es una operación de adherencia.

2.6. Puntos de acumulación

El concepto que estudiaremos ahora permite también caracterizar los conjuntos cerrados en un espacio topológico.

2.6.1 Definición. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Un punto $x \in X$ es un* punto de acumulación *de A si para cada vecindad V de x se tiene $V \cap (A \smallsetminus \{x\} \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos de acumulación de A se denota por A' y se llama el* derivado *de A.*

De la definición se tiene

$$A' \subset \overline{A}$$

así como también que

$$\overline{A} = A \cup A'$$

y de esta última igualdad se obtiene el siguiente resultado.

2.6.2 Proposición. *Sea X un espacio topológico. Un subconjunto A de X es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.*

2.6.3 EJEMPLOS.

1. *Consideremos* $\mathbb{R}$ *con la topología usual. Cada punto del conjunto* $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ *es adherente a* A *pero que ningún elemento de* A *es punto de acumulación de* A*. El único punto de acumulación de este conjunto es* 0.

2. *Si consideramos nuevamente* $\mathbb{R}$ *con la topología usual, entonces el conjunto de puntos de acumulación de* $\mathbb{Z}$ *es vacío, mientras que el conjunto de puntos de acumulación de* $\mathbb{Q}$ *es* $\mathbb{R}$.

3. *En el intervalo cerrado* $[0,1]$ *con la topología usual, todo conjunto infinito tiene un punto de acumulación. En efecto, sea* A *un subconjunto infinito de* $[0,1]$*. Si* $A \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$ *es un conjunto infinito, sean* $a_1 = 0$ *y* $b_1 = \frac{1}{2}$*, de lo contrario sean* $a_1 = \frac{1}{2}$ *y* $b_1 = 1$*. Note que en cualquier caso el intervalo* $[a_1, b_1]$ *contiene un número infinito de elementos de* A*. Ahora bien, si* $A \cap \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ *es un conjunto infinito, sean* $a_2 = a_1$ *y* $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$*, de lo contrario sean* $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ *y* $b_2 = b_1$*. Nuevamente tenemos que el intervalo* $[a_2, b_2]$ *contiene un número infinito de elementos de* A*. Además* $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ *y* $|b_2 - a_2| = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$*. Continuando este proceso de manera inductiva, supongamos que se ha construido el intervalo* $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]$*, que* $[a_k, b_k]$ *contiene un número infinito de elementos de* A *y que* $|b_k - a_k| = \frac{1}{2^k}$*. Si* $A \cap \left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right]$ *es un conjunto infinito, sean* $a_{k+1} = a_k$ *y* $b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$*, de lo contrario sean* $a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$ *y* $b_{k+1} = b_k$*. El intervalo* $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ *contiene un número infinito de elementos de* A*. Además* $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$ *y* $|b_{k+1} - a_{k+1}| = \frac{1}{2^{k+1}}$.

   Resumiendo, para cada $n \in \mathbb{N}$ *con* $n > 2$*, se ha construido el intervalo* $[a_n, b_n]$ *que contiene un número infinito de puntos de* A *y es tal que* $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ *y* $|b_n - a_n| = \frac{1}{2^n}$*. Note que* (a_n) *es una sucesión* *creciente, mientras que* (b_n) *es decreciente. Sea* $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. *Veamos que* α *es un punto de acumulación de* A. *Sea* $\epsilon > 0$. *Existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\left(\alpha - \frac{1}{2^N}, \alpha + \frac{1}{2^N}\right) \subset (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ *y existe* $n > N + 1$ *tal que* $|\alpha - a_n| < \frac{1}{2^{N+1}}$. *Se tiene que* $[a_n, b_n] \subset \left(\alpha - \frac{1}{2^N}, \alpha + \frac{1}{2^N}\right)$. *En efecto, si* $x \in [a_n, b_n]$ *entonces* $|a_n - x| \leq \frac{1}{2^n}$ *y se tiene:*

$$
\begin{aligned}
|x - \alpha| &\leq |x - a_n| + |a_n - \alpha| \\
&< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{N+1}} \\
&< \frac{1}{2^{N+1}} + \frac{1}{2^{N+1}} \\
&= \frac{1}{2^N}.
\end{aligned}
$$

Esto prueba que $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ *contiene un número infinito de puntos de* A *y por tanto que* α *es un punto de acumulación de* A.

Ejercicios 2.6

1. Explique claramente cuál es la diferencia entre punto de acumulación y punto adherente.

2. Determine los puntos de acumulación de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

   a) $\mathbb{Z}$.

   b) $\mathbb{Q}$.

   c) $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$.

   d) $(-1, 1]$.

   e) $[1, \infty)$.

   f) $\left\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

   g) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.

3. Demuestre o dé un contraejemplo que refute la siguiente afirmación: "Si X es un espacio topológico y $A \subset X$ es un conjunto unitario cerrado en X, entonces $A' = \emptyset$."

4. Dé un ejemplo de un espacio topológico X en el cual $\overline{A} = A'$ para todo subconjunto A de X con más de un punto.

5. Sea X es un espacio topológico. Demuestre o dé contraejemplos que refuten cada una de las siguientes afirmaciones:

   a) $(A')' = A'$ para cada $A \subset X$.

   b) $(A \cup B)' = A' \cup B'$ para cada A y cada B subconjuntos de X.

   c) $(A \cap B)' = A' \cap B'$ para cada A y cada B subconjuntos de X.

   d) $(A^c)' = (A')^c$ para cada $A \subset X$.

   e) A' es cerrado en X para cada $A \subset X$.

2.7. Interior, exterior y frontera de un conjunto

Estudiaremos ahora el concepto dual al concepto de punto adherente. Dual en el sentido de que se puede reducir un concepto al otro mediante un procedimiento bien establecido y bastante predecible. Ambos conceptos son, por ende, igualmente indidpensables.

2.7.1 Definición. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Un punto $x \in X$ es* interior *a A si existe una vecindad de x contenida en A. El conjunto de todos los puntos interiores a A se denota por A° y se llama el* interior *de A.*

De la definición anterior se concluye que $A^\circ \subset A$ para todo $A \subset X$ como también que si A y B son subconjuntos de X y $A \subset B$ entonces $A^\circ \subset B^\circ$.

El siguiente resultado caracteriza el interior de un conjunto y su demostración es inmediata.

2.7.2 Proposición. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Entonces*

$$A^\circ = \bigcup\{U \subset X : U \text{ es un conjunto abierto y } U \subset A\}.$$

En la siguiente proposición se resumen algunas de las más importantes propiedades de la operación interior $A \longmapsto A^\circ : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.

2.7.3 Proposición. *Sea X un espacio topológico.*

1. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ *para cada* $A \subset X$.

2. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ *para cada* $A,\ B \subset X$.

3. $A \subset X$ *es abierto si y sólo si* $A^\circ = A$.

Demostración. La demostración es consecuencia inmediata de la definición. □

Tal como sucede con las operaciones de adherencia, dado un conjunto X y una función $A \longmapsto A^\circ : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ con ciertas propiedades, se puede encontrar una topología sobre X en la que el interior de cada subconjunto de X está determinado por la función. Este es el resultado que se presenta en la siguiente proposición.

2.7.4 Proposición. *Sea X un conjunto y supongamos que se ha definido una operación $A \longmapsto A^\circ : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que*

1. $A^\circ \subset A$ *para cada* $A \subset X$.

2. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ *para cada* $A \subset X$.

3. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ *para cada* $A,\ B \subset X$.

4. $X^\circ = X$.

Existe una topología sobre X cuya operación de interior es precisamente $A \longmapsto A^\circ$.

En este caso se definen los conjuntos abiertos como aquellos conjuntos que son iguales a su interior. La prueba de que estos conjuntos forman la topología buscada es sencilla y la omitiremos aquí.

2.7.5 EJEMPLOS.

1. *En* $\mathbb{R}$ *con la topología usual, el interior del intervalo* $[a,b]$ *es el intervalo* (a,b) *pero NO siempre en un espacio métrico el interior de una bola cerrada* $B[x,\epsilon]$ *es la bola abierta* $B(x,\epsilon)$*. Nuevamente la métrica discreta sobre un conjunto con más de un punto nos ilustra este hecho.*

2. *Consideremos nuevamente* $\mathbb{R}$ *con la topología usual. Se tiene que* $\mathbb{Q}^\circ = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset$*. Nótese que* $(\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))^\circ = \mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$*. Este es un ejemplo que muestra que puede ocurrir* $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$*.*

Si A es un subconjunto de un espacio topológico X decimos que el *exterior* de A es el interior del complemento de A, esto es, $(X \setminus A)^\circ$. Los puntos de X que no están ni en interior ni en el exterior de A tienen una característica especial: cada vecindad de uno de estos puntos contiene tanto puntos de A como puntos de $X \setminus A$. Se tiene entonces la siguiente definición.

2.7.6 Definición. *Sean* X *un espacio topológico y* A *un subconjunto de* X*. Un punto* $x \in X$ *es un* punto frontera *de* A *si para cada vecindad* V *se tiene* $V \cap A \neq \emptyset$ *y* $V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$*. El conjunto de todos los puntos frontera de* A *se denota por* $Fr\, A$ *y se llama la* frontera *de* A*.*

Nótese que

$$\operatorname{Fr} A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$$

y que la frontera de A es siempre un conjunto cerrado.

El siguiente resultado muestra algunas relaciones entre la adherencia, el interior y la frontera.

2.7.7 Proposición. *Sean* X *un espacio topológico y* A *un subconjunto de* X*.*

1. $\overline{A} = A \cup \ Fr\, A$*.*

2. $A^\circ = A \setminus \ Fr\, A$*.*

3. $X = A^\circ \cup \ Fr\, A \cup (X \setminus A)^\circ$*.*

Demostración.

1. La inclusión $A \cup \operatorname{Fr} A \subset \overline{A}$ es inmediata. Sea $x \in \overline{A}$. Si $x \notin A$, toda vecindad de x tiene puntos de A y puntos de su complemento (por lo menos a x). Entonces $x \in A \cup \operatorname{Fr} A$, lo cual prueba que $\overline{A} \subset A \cup \operatorname{Fr} A$.
2. Si $x \in A^\circ$ entonces $x \in A$ y $x \notin \operatorname{Fr} A$. Por otro lado si $x \in A \setminus \operatorname{Fr} A$ entonces existe una vecindad de x contenida en A, de donde $x \in A^\circ$.
3. Si $x \notin A^\circ \cup \operatorname{Fr} A$, existe una vecindad de x contenida en $X \setminus A$, de donde $x \in A^\circ \cup \operatorname{Fr} A \cup (X \setminus A)^\circ$.

□

2.7.8 EJEMPLOS.

1. *En $\mathbb{R}$ con topología usual, la frontera del intervalo (a, b) (así como del intervalo $[a, b]$ o de cualquier otro intervalo con extremos a y b) es el conjunto $\{a,\ b\}$.*
2. *En $\mathbb{R}$ con topología usual, la frontera de $\mathbb{Q}$ (y también de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) es $\mathbb{R}$.*
3. *Si X es un espacio topológico, $Fr\, X = Fr\, \emptyset = \emptyset$.*
4. *Cada subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$ es la frontera de algún subconjunto de $\mathbb{R}^2$. En efecto, si K es cerrado y $K^\circ = \emptyset$ entonces $Fr\, K = K$. En caso contrario sea F el conjunto de puntos de K con coordenadas racionales unido con el conjunto de puntos aislados de K (x es un punto aislado de K si existe una vecindad V de x tal que $V \cap K = \{x\}$). Se tiene que $Fr\, F = K$.*

Ejercicios 2.7

1. Demuestre la Proposición 2.7.3.
2. Demuestre la Proposición 2.7.4.
3. Sea X es un espacio topológico. Demuestre o dé contraejemplos que refuten cada una de las siguientes afirmaciones:

a) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ para cada $A \subset X$.

b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ para cada A y cada B subconjuntos de X.

c) $(A^c)^\circ = (A^\circ)^c$ para cada $A \subset X$.

d) A° es abierto en X para cada $A \subset X$.

e) $\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\,A) = \mathrm{Fr}\,A$ para cada $A \subset X$.

f) $\mathrm{Fr}\,(A \cup B) = \mathrm{Fr}\;A \cup \mathrm{Fr}\,B$ para cada A y cada B subconjuntos de X.

g) $\mathrm{Fr}\,(A \cap B) = \mathrm{Fr}\,A \cap\ \mathrm{Fr}\,B$ para cada A y cada B subconjuntos de X.

h) $\mathrm{Fr}\,(A^c) = (\,\mathrm{Fr}\,A)^c$ para cada $A \subset X$.

i) $(\mathrm{Fr}\,A)^\circ = \emptyset$ para cada $A \subset X$.

4. Determine el interior, el exterior y la frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos en $\mathbb{R}$.

   a) $\mathbb{Z}$.

   b) $\mathbb{Q}$.

   c) $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$.

   d) $(-1, 1]$.

   e) $[1, \infty)$.

   f) $\left\{-\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

   g) $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.

5. Realice nuevamente el ejercicio anterior pero considerando la topología de los complementos finitos sobre $\mathbb{R}$.

6. Suponga que τ_1 y τ_2 son dos topologías sobre un mismo conjunto X y que τ_1 es más fina que τ_2. Compare el interior y la frontera de un subconjunto A de X en (X, τ_1) con su interior y su frontera en (X, τ_2).

2.8. Subespacios

En nuestro estudio de espacios métricos vimos que es posible convertir un subconjunto A de un espacio métrico (X, ρ) en un nuevo espacio métrico considerando la restricción de la función ρ al conjunto $A \times A$. Así por ejemplo, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales "hereda" la estructura de espacio métrico usual de los números reales restringiendo la métrica usual, originalmente definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, al conjunto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. En el nuevo espacio métrico la bola abierta de radio $\epsilon > 0$ centrada en un número racional x es el conjunto $\{y \in \mathbb{Q} : |x - y| < \epsilon\}$. Observando con un poco de atención, nos daremos cuenta de que este conjunto es precisamente la intersección de la bola abierta en $\mathbb{R}$ de radio ϵ y centrada en x, con el conjunto de los números racionales. En realidad cada conjunto abierto en $\mathbb{Q}$ resulta ser la intersección de un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ con los números racionales. En este sentido decimos que la topología usual de $\mathbb{Q}$ es la "topología heredada" por $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$.

En general tenemos el siguiente resultado.

2.8.1 Proposición. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. La colección $\tau' = \{O \cap A : O \in \tau\}$ es una topología sobre A.*

Demostración. La demostración de esta proposición se deduce de los siguientes hechos:

1. $\emptyset \cap A = \emptyset$.

2. $X \cap A = A$

3. $(O_1 \cap A) \cap (O_2 \cap A) = (O_1 \cap O_2) \cap A$.

4. Si $\{O_j\}_{j \in J}$ es una colección de subconjuntos abiertos de X entonces $\bigcup (O_j \cap A) = (\bigcup O_j) \cap A$.

$\square$

Estas observaciones dan lugar a la siguiente definición.

2.8.2 Definición. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. La colección $\{O \cap A : O \in \tau\}$ es la* topología heredada *por A de X o la* topología inducida *por X (o por la topología de X) sobre A. El espacio topológico formado se llama un* subespacio *de X.*

En adelante, a menos que se explicite lo contrario, consideraremos cada subconjunto de un espacio topológico X como un subespacio de X. Esto es, consideraremos siempre que tiene la topología heredada de X.

2.8.3 EJEMPLOS.

1. *La topología usual sobre cada subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es la topología inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^n$.*

2. *Si (X, ρ) es un espacio métrico y $A \subset X$, la topología inducida sobre A es la topología generada por la restricción de ρ al conjunto $A \times A$.*

3. *La topología usual de $\mathbb{R}$ induce la topología discreta sobre el conjunto $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$; pero NO sobre el conjunto $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$. La razón es que el conjunto $\{0\}$ no es abierto en el subespacio.*

4. *El eje x como subespacio del Plano de Moore tiene la topología discreta. En efecto, la intersección de un conjunto de la forma $A \cup \{z\}$, donde A es una bola abierta usual del plano, contenida en el semiplano superior y tangente al eje x en z, con el eje x es el conjunto $\{z\}$.*

5. *Cualquier subespacio de un espacio discreto es discreto y cualquier subespacio de un espacio trivial es trivial.*

Una base para una topología sobre un conjunto X también describe la topología de los subespacios de X como lo muestra el siguiente resultado.

2.8.4 Lema. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X entonces la colección $\mathcal{B}_A = \{O \cap A : O \in \mathcal{B}\}$ es una base para la topología inducida sobre A.*

Demostración. Es inmediato que cada elemento de $\mathcal{B}_A$ es abierto en A. Ahora bien, todo subconjunto abierto de A tiene la forma $C \cap A$ donde C es un subconjunto abierto de X. Si $a \in C \cap A$ y O es un abierto básico de X que contiene a a y está contenido en C, entonces $a \in O \cap A$ y $O \cap A \subset C \cap A$. $\square$

2.8.5 EJEMPLO.
La colección

$$\{\emptyset\} \cup \{[0,1]\} \cup \{[0,a) : 0 < a \leq 1\}$$
$$\cup \{(a,b) : 0 \leq a < b \leq 1\} \cup \{(a,1] : 0 \leq a < 1\}$$

es una base para la topología usual del intervalo $[0,1]$.

El siguiente resultado resume algunas de las más importantes propiedades de los subespacios.

2.8.6 Proposición. *Si A es un subespacio de un espacio topológico X entonces:*

1. *Un subconjunto F de A es cerrado en A si y sólo si existe un conjunto K cerrado en X tal que $F = K \cap A$.*

2. *Si $E \subset A$ y denotamos por $Adh_A E$ la adherencia de E en A y por $Adh_X E$ la adherencia de E en X, entonces $Adh_A E = Adh_X E \cap A$.*

3. *Si $a \in A$, entonces V es una vecindad de a en A si y sólo si existe una vecindad U de a en X tal que $V = U \cap A$.*

4. *Si $a \in A$ y si $\mathcal{B}(a)$ es un sistema fundamental de vecindades de a en X, entonces $\{U \cap A : U \in \mathcal{B}(a)\}$ es un sistema fundamental de vecindades de a en A.*

5. *Si $E \subset A$ y denotamos por $Int_A E$ el interior de E en A y por $Int_X E$ el interior de E en X, entonces $Int_A E \supset Int_X E \cap A$.*

6. *Si $E \subset A$ y denotamos por $Fr_A E$ la frontera de E en A y por $Fr_X E$ la frontera de E en X, entonces $Fr_A E \subset Fr_X E \cap A$.*

Ejercicios 2.8

1. Demuestre que cualquier subespacio de un espacio discreto es discreto y cualquier subespacio de un espacio trivial es trivial.

2. Sea A un subespacio de X. Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones:

a) Un subconjunto F de A es cerrado en A si y sólo si existe K cerrado en X tal que $F = K \cap A$.

b) Si $E \subset A$ y denotamos por $\mathrm{Adh}_A E$ la adherencia de E en A y por $\mathrm{Adh}_X E$ la adherencia de E en X, entonces $\mathrm{Adh}_A E = \mathrm{Adh}_X E \cap A$.

c) Si $a \in A$, entonces V es una vecindad de a en A si y sólo si existe una vecindad U de a en X tal que $V = U \cap A$.

d) Si $a \in A$ y si $\mathcal{B}(a)$ es un sistema fundamental de vecindades de a en X, entonces $\{U \cap A : U \in \mathcal{B}(a)\}$ es un sistema fundamental de vecindades de a en A.

e) Si $E \subset A$ y denotamos por $\mathrm{Int}_A E$ el interior de E en A y por $\mathrm{Int}_X E$ el interior de E en X, entonces $\mathrm{Int}_A E \supset \mathrm{Int}_X E \cap A$.

f) Si $E \subset A$ y denotamos por $\mathrm{Fr}_A E$ la frontera de E en A y por $\mathrm{Fr}_X E$ la frontera de E en X, entonces $\mathrm{Fr}_A E \subset \mathrm{Fr}_X E \cap A$.

g) Si Y es un subconjunto abierto de un espacio X y si A es abierto en Y, entonces A es abierto en X.

h) Si Y es un subconjunto cerrado de un espacio X y si K es cerrado en Y, entonces K también es cerrado en X.

Capítulo 3

Funciones continuas

En los capítulos anteriores se han hecho los preparativos necesarios para poder hablar de continuidad, cuyo estudio es el propósito fundamental de la topología general.

En este capítulo estudiaremos las funciones continuas definidas entre espacios topológicos, así como algunas de sus principales propiedades.

3.1. Funciones continuas

En el Capítulo 1 utilizamos la noción de continuidad de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ estudiada en Análisis Real para definir funciones continuas entre espacios métricos. Vimos que si (X, d) y (Y, m) son espacios métricos, una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua en un punto $x_1 \in X$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x_1, x_2) < \delta$ implica $m(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$. Se dice que f es continua si es continua en cada punto $x \in X$.

Una observación cuidadosa nos muestra que la función $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y sólo si para cada subconjunto abierto O de Y, el conjunto $f^{-1}(O)$ es abierto en X.

Utilizaremos esta última propiedad para definir lo que es una función continua entre dos espacios topológicos.

3.1.1 Definición. *Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es* continua *si $f^{-1}(O)$ es un conjunto abierto en X para cada conjunto abierto O de Y.*

Naturalmente también es posible definir lo que significa que la función $f : X \longrightarrow Y$ sea continua en un punto $x \in X$.

3.1.2 Definición. *Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es* continua en un punto $x \in X$ *si para cada vecindad V de $f(x)$ en Y existe una vecindad U de x en X tal que $f(U) \subset V$.*

De estas dos últimas definiciones se concluye de manera inmediata que una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y sólo si f es continua en x para cada $x \in X$.

3.1.3 EJEMPLOS.

1. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función constante de valor k, entonces f es continua. En efecto, si O es un subconjunto abierto de Y entonces $f^{-1}(O)$ es X o $\emptyset$, dependiendo de si k es o no un elemento de O. En cualquier caso $f^{-1}(O)$ es abierto en X.*

2. *Si τ_1 y τ_2 son topologías definidas sobre un conjunto X y si τ_1 es más fina que τ_2 (esto es $\tau_2 \subset \tau_1$), entonces la función idéntica $id_X : (X, \tau_1) \longrightarrow (X, \tau_2)$ es continua. En caso contrario, es decir si existe un subconjunto O de X que pertenece a τ_2 pero no a τ_1, entonces $id_X^{-1}(O)$ no es abierto en (X, τ_1). En este caso, aunque parezca sorprendente, la función idéntica no es continua.*

3. *Si X es un espacio discreto, cualquier función con dominio X es continua.*

4. *Si Y es un espacio grosero, es decir si los únicos subconjunto abiertos de Y son $\emptyset$ y el mismo Y, entonces toda función con codominio Y es continua.*

3.1.4 Observación. *Si* (X, τ) *y* (Y, μ) *son dos espacios topológicos, si* $f : X \longrightarrow Y$ *y si* $\mathcal{B}$ *es una base para la topología de* Y*, podemos hacer las siguientes observaciones:*

1. *Si* f *es continua entonces* $f^{-1}(B)$ *es abierto en* X *para cada* $B \in \mathcal{B}$.

2. *De manera recíproca, si* $f^{-1}(B)$ *es abierto en* X *para cada* $B \in \mathcal{B}$ *y* O *es un subconjunto abierto de* Y *entonces* $O = \bigcup_{i \in I} B_i$ *para alguna familia* $\{B_i\}_{i \in I}$ *de elementos de* $\mathcal{B}$*, luego*

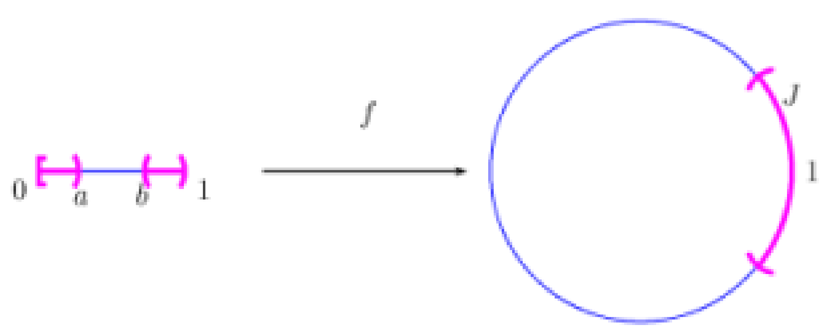
$$\begin{aligned} f^{-1}(O) &= f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) \\ &= \bigcup_{i \in I} (f^{-1} B_i) \end{aligned}$$

es abierto en X.

Las observaciones anteriores nos permiten concluir que una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y sólo si la aplicación imagen recíproca de f aplica elementos básicos de la topología de Y en subconjuntos abiertos de X.

3.1.5 EJEMPLO.

Consideremos el intervalo $[0, 1)$ *con la topología inducida de la topología usual de* $\mathbb{R}$ *y denotemos con* C *la circunferencia en el plano complejo, con centro en el origen y radio 1. Definamos la función* $f : [0, 1) \longrightarrow C$ *por* $f(x) = e^{2\pi i x}$.



Veamos que f *es una función continua.*

El conjunto formado por todos los segmentos abiertos de la circunferencia es una base para la topología de C. Si J es uno de tales segmentos y si J no contiene al número complejo 1, entonces $f^{-1}(J)$ es un intervalo abierto de la forma (a,b) donde $0 < a < b < 1$. Luego $f^{-1}(J)$ es abierto en $[0,1)$. Por otra parte, si $1 \in J$ entonces $f^{-1}(J)$ tiene la forma $[0,a) \cup (b,1)$ donde $0 < a < b < 1$ que también es un conjunto abierto en $[0,1)$. Se concluye que f es continua.

El siguiente resultado nos da algunos criterios que permiten decidir si una función entre dos espacios topológicos es o no una función continua.

3.1.6 Teorema. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es continua.*
2. *Si K es un subconjunto cerrado de Y, entonces $f^{-1}(K)$ es un subconjunto cerrado de X.*
3. *Si $A \subset X$, entonces $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

Demostración.

1. $\Longrightarrow$ 2. Nótese que $(f^{-1}(K))^c = f^{-1}(K^c)$. Así, si K es cerrado en Y, K^c es abierto; y como f es continua, $f^{-1}(K^c)$ es abierto en X, o lo que es lo mismo, $f^{-1}(K)$ es cerrado.

2. $\Longrightarrow$ 3. Sea $A \subset X$. Se tiene que $f^{-1}(\overline{f(A)})$ es un subconjunto cerrado de X y $A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, entonces $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ esto implica que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

3. $\Longrightarrow$ 1. Sea O un subconjunto abierto de Y. Nótese en primer lugar que

$$X \smallsetminus \overline{X \smallsetminus f^{-1}(O)} \subset f^{-1}(O).$$

Por otro lado, si $x \in \overline{X \smallsetminus f^{-1}(O)}$, entonces $f(x) \in f(\overline{X \smallsetminus f^{-1}(O)})$, luego $f(x) \in \overline{f(X \smallsetminus f^{-1}(O))}$ lo cual es imposible si $x \in f^{-1}(O)$; la razón de esta afirmación es que $x \in f^{-1}(O)$ implica que O es una vecindad de $f(x)$ que claramente no tiene puntos en común con $f(X \setminus f^{-1}(O))$.

Hemos demostrado que

$$f^{-1}(O) \subset X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(O)}.$$

Esto completa la prueba. $\square$

El siguiente resultado es supremamente importante; ya que no sólo facilita gran cantidad de cálculos, sino que, en estudios posteriores, permite presentar a los espacios topológicos con las funciones continuas como una categoría.

3.1.7 Teorema. *Si $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ son funciones continuas entonces la compuesta $g \circ f : X \longrightarrow Z$ también es una función continua.*

Demostración. Si O es un subconjunto abierto de Z, la continuidad de g implica que $g^{-1}(O)$ es abierto en Y; y como f es continua, $f^{-1}(g^{-1}(O)$ es un subconjunto abierto de X. La igualdad

$$(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O)$$

concluye la prueba del teorema. $\square$

3.1.8 Observación. *Observe que si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y si A es un subespacio de X, entonces la restricción $f\restriction_A$ de f a A también es una función continua. Además, si Y es un subespacio de Z entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y sólo si f es continua cuando se le considera definida de X en Z.*

Veamos ahora cómo es posible concluir que una función es continua si se sabe que sus restricciones a ciertos subespacios de su dominio son continuas.

3.1.9 Proposición. *Si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es cualquier familia de subconjuntos abiertos de X cuya unión es X, entonces una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y sólo si su restricción a cada A_α es continua.*

Demostración. Es inmediato que si f es continua, $f\restriction_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \Lambda$.
De manera recíproca, sea O un subconjunto abierto de Y. Para cada $\alpha \in \Lambda$ el conjunto $f\restriction_{A_\alpha}^{-1}(O) = f^{-1}(O) \cap A_\alpha$ es abierto en A_α; pero como A_α es abierto en X, entonces $f^{-1}(O) \cap A_\alpha$ también es abierto en X. Ahora bien, $f^{-1}(O) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(O) \cap A_\alpha$, luego $f^{-1}(O)$ es abierto y f es continua. $\square$

Si los elementos de la colección $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ no son conjuntos abiertos, es posible que no se pueda concluir la continuidad de la función f. Por ejemplo la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$ aunque su restricción a cada subconjunto unitario de $\mathbb{R}$ sí lo es.

La anterior observación muestra que f puede no ser continua aunque cada elemento de la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tenga la propiedad de ser un conjunto cerrado y $f\restriction_{A_\alpha}$ sea continua para cada $\alpha \in \Lambda$.

Un resultado análogo al presentado en la proposición 3.1.9 se tiene cuando $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una colección finita de subconjuntos cerrados de X.

3.1.10 Proposición. *Si $\{A_i\}_{i=1,\ldots,n}$ es una familia finita de subconjuntos cerrados de X cuya unión es X, entonces una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y sólo si su restricción a cada A_i es continua.*

Demostración. Nuevamente, si $f : X \longrightarrow Y$ es continua, entonces su restricción a cada A_i es continua.
Sea K un subconjunto cerrado de Y. Para cada $i = 1, ..., n$ el conjunto $f\restriction_{A_i}^{-1}(K) = f^{-1}(K) \cap A_i$ es cerrado en A_i; pero como A_i es cerrado en X, entonces $f^{-1}(K) \cap A_i$ también es cerrado en X. Ahora bien, $f^{-1}(K) = \bigcup_{i=1,\ldots,n} f^{-1}(K) \cap A_i$, luego $f^{-1}(K)$ es cerrado y f es continua. $\square$

La condición de finitud de la familia $\{A_i\}_{i=1,\ldots,n}$ dada en la proposición anterior se puede debilitar un poco si se tiene en cuenta la siguiente definición.

3.1.11 Definición. *Una familia de subconjuntos de un espacio topológico es* localmente finita *si cada punto del espacio tiene una vecindad que tiene puntos en común con sólo un número finito de elementos de la familia.*

3.1.12 EJEMPLO.
La colección de todos los intervalos de la forma $(n, n+1)$ *con* $n \in \mathbb{N}$ *es una familia localmente finita de subconjuntos de* $\mathbb{R}$*, mientras que la colección de todos los intervalos abiertos en* $\mathbb{R}$ *no lo es.*

Tenemos el siguiente resultado.

3.1.13 Proposición. *Si* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *es una familia localmente finita de subconjuntos cerrados de* X *cuya unión es* X*, entonces una función* $f : X \longrightarrow Y$ *es continua si y sólo si su restricción a cada* A_α *es continua.*

Demostración. Como en los casos anteriores, si f es continua, $f\restriction_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \Lambda$.
Recíprocamente, sea $x \in X$ y sean O una vecindad abierta de $f(x)$ y V una vecindad abierta de x que tiene puntos en común sólo con un número finito de elementos de la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Digamos que $V \cap A_{\alpha_i} \neq \emptyset$ para $i = 1, ..., n$ y que $V \cap A_\alpha = \emptyset$ si $\alpha \neq \alpha_i$ para cada $i = 1, ..., n$.
Dado $i \in \{1, ..., n\}$ consideremos $B_i = V \cap A_{\alpha_i}$. La colección $\{B_i\}_{i=1,...,n}$ es una familia finita de subconjuntos cerrados de V cuya unión es V y como la restricción de $f\restriction_V$ a B_i es continua para cada $i = 1, ..., n$, entonces la proposición 3.1.10 garantiza que la función $f\restriction_V$ es continua. Esto garantiza que existe una vecindad abierta W en V tal que $f\restriction_V(W) \subset O$. Esta contenencia implica que f es continua en x porque W es una vecindad de x en X, ya que V es abierto en X y además $f(W) = f\restriction_V(W)$.
Puesto que x fue escogido de manera arbitraria, se concluye que f es una función continua. □

Ejercicios 3.1

1. Demuestre que toda función definida de un espacio discreto X en cualquier espacio Y es continua y además que si cada función con dominio X es continua, entonces X tiene la topología discreta.

2. Demuestre que toda función definida de un X en un espacio Y con topología grosera es continua y que si cada función con codominio Y es continua, entonces Y tiene la topología grosera.

3. Sea A un subconjunto de un conjunto X. La función característica de A, $\delta_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$, se define por

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

   Demuestre que si X es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces la función característica de A es continua si y sólo si A es abierto y cerrado en X.

4. Determine todas las funciones continuas definidas de $\mathbb{R}$ en el espacio de Sierpinski.

5. Determine todas las funciones continuas definidas del espacio de Sierpinski en $\mathbb{R}$.

6. Demuestre que si f y g son funciones continuas definidas de un espacio X en $\mathbb{R}$, entonces el conjunto $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

7. Utilice el ejercicio anterior para justificar la siguiente afirmación: "Si dos funciones continuas definidas de un espacio X en $\mathbb{R}$ coinciden en un subconjunto denso de X, coinciden en todo X.

8. Demuestre que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y si $f(a) < f(b)$ entonces para cada $y \in [f(a), f(b)]$ existe x entre a y b tal que $f(x) = y$.

9. Utilice el ejercicio anterior para probar que toda función continua definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ aplica intervalos en intervalos.

10. Dé un ejemplo de una función definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que aplique intervalos en intervalos y no sea una función continua.

11. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas, justificando en cada caso su respuesta con una demostración o un contraejemplo.

    a) Si $A \subset X$ y $x \in \overline{A}$, entonces $f(x) \in \overline{f(A)}$.

b) Si $A \subset X$ y $x \in A^\circ$, entonces $f(x) \in f(A)^\circ$.

c) Si $A \subset X$ y $x \in A'$, entonces $f(x) \in (f(A))'$.

12. Sean X un espacio topológico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X (formalmente, una sucesión en X es una función de $\mathbb{N}$ en X). Decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión convergente* o que *converge* a un punto $x \in X$ si y sólo si para toda vecindad V de x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para cada $n \geq N$. Si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in X$, decimos que x es un *punto límite* de la sucesión.

    a) Demuestre que la sucesión $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1 en $\mathbb{R}$ con la topología usual; pero que no converge si sobre $\mathbb{R}$ consideramos la topología generada por los intervalos de la forma $[a, b)$.

    b) Demuestre que si X y Y son espacios métricos, entonces una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y sólo si para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $x \in X$, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ en Y.

    c) Sean X y Y espacios topológicos. Pruebe que si $f : X \longrightarrow Y$ es continua, entonces para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $x \in X$, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ en Y.

3.2. Homeomorfismos e inmersiones

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$. La función f es continua, uno a uno y sobreyectiva, además su inversa, definida por $f^{-1}(t) = \dfrac{t}{1 - t}$, también es una función continua. Esta función f con estas características nos permite pasar del espacio topológico $\mathbb{R}$ al espacio topológico $(-1, 1)$ sin perder información alguna. En otras palabras, gracias a la función f, conocemos la topología de uno de los espacios una vez conocemos la topología del otro.

En el fondo, aunque los dos espacios son en apariencia distintos, son el mismo espacio. Los conjuntos abiertos, cerrados, las adherencias, los interiores o los puntos de acumulación en uno de los espacios tienen su contraparte en el otro y la función f es el puente para pasar de uno de los espacios al otro.

Diremos que $\mathbb{R}$ y el intervalo $(-1, 1)$ son *homeomorfos* y que la función f es un *homeomorfismo*.

En general tenemos la siguiente definición.

3.2.1 Definición. *Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es un* homeomorfismo *si f es continua, uno a uno y sobreyectiva y si además f^{-1} también es una función continua.*
Si existe un homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ decimos que los espacios X y Y son homeomorfos*.*

3.2.2 EJEMPLO.
Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función sobreyectiva y estrictamente creciente (esto es, si $x < y$ implica $f(x) < f(y)$), entonces f es un homeomorfismo. En efecto, f es uno a uno por ser estrictamente creciente. Además, si $w < z$ se tiene que $f^{-1}(w) < f^{-1}(z)$. Sean $a < b$. Se tiene

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(a, b) &\iff f(x) \in (a, b) \\ &\iff a < f(x) < b \\ &\iff f^{-1}(a) < x < f^{-1}(b) \\ &\iff x \in (f^{-1}(a), f^{-1}(b)), \end{aligned}$$

luego $f^{-1}(a, b) = (f^{-1}(a), f^{-1}(b))$. Esto prueba que f es continua. De la misma forma se prueba que f^{-1} es una función continua.

Es inmediato que una función continua $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo si y sólo si existe una función continua $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ y $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, donde id_X y id_Y son las funciones identidad de X y Y, respectivamente.

Nótese que la condición de que f^{-1} sea continua es equivalente a afirmar que f es una función abierta, esto es, que aplica conjuntos abiertos en conjuntos abiertos, o a afirmar que f es una función cerrada, es decir, que aplica conjuntos cerrados en conjuntos cerrados.

En resumen, una función $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo si es uno a uno, sobre, continua y abierta (o cerrada).

Con esta observación en mente resulta ser un fácil ejercicio demostrar el siguiente resultado.

3.2.3 Proposición. *Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ es una función uno a uno y sobreyectiva, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es un homeomorfismo.*
2. *Si $A \subset X$, entonces $f(A)$ es abierto en Y si y sólo si A es abierto en X.*
3. *Si $K \subset X$, entonces $f(K)$ es cerrado en Y si y sólo si K es cerrado en X.*
4. *Si $M \subset X$, entonces $f(\overline{M}) = \overline{f(M)}$.*

3.2.4 Observación. *La relación $\sim$ definida en los espacios topológicos por $X \sim Y$ si y sólo si X y Y son homeomorfos es una relación de equivalencia. Esto justifica el hecho de que veamos dos espacios topológicos homeomorfos como el mismo espacio. La relación "ser homeomorfos" nos permite conocer un espacio topológico por sus características relevantes (aquellas que lo hacen único) y no por los nombres de sus elementos.*

Cuando en la observación anterior hablamos de "características relevantes" de un espacio nos estamos refiriendo a las *propiedades topológicas* del espacio. Decimos que una propiedad P es una *propiedad topológica* si cada vez que un espacio X satisface P, cualquier espacio homeomorfo a X también satisface P.

Que los conjuntos unitarios de un espacio topológico sean conjuntos cerrados es un ejemplo de una propiedad topológica.

3.2.5 Definición. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y uno a uno y si $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ también es continua entonces X y $f(X)$ son homeomorfos. En este caso decimos que la función f es una* inmersión *de X en Y o que X está* inmerso *en Y.*

En términos prácticos, podemos pensar que si X está inmerso en Y, entonces X es un subespacio de Y.

La inclusión de un subespacio en un espacio topológico es el ejemplo más inmediato que se puede presentar de una inmersión.

Ejercicios 3.2

1. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función uno a uno y sobreyectiva. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) f es un homeomorfismo.

   b) Si $A \subset X$, entonces $f(A)$ es abierto en Y si y sólo si A es abierto en X.

   c) Si $K \subset X$, entonces $f(K)$ es cerrado en Y si y sólo si K es cerrado en X.

   d) Si $M \subset X$, entonces $f(\overline{M}) = \overline{f(M)}$.

2. Pruebe que la relación $\sim$ definida en los espacios topológicos por $X \sim Y$ si y sólo si X y Y son homeomorfos es una relación de equivalencia.

3. Muestre que cada intervalo abierto (a, b) en $\mathbb{R}$, con $a < b$ es homeomorfo al intervalo $(0, 1)$.

4. Muestre que cada intervalo cerrado $[a, b]$ en $\mathbb{R}$, con $a < b$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

5. Defina un homeomorfismo de $\mathbb{N}$ con la topología discreta en $\mathbb{Z}$ también con la topología discreta.

6. Sean τ_1 y τ_2 dos topologías definidas sobre el mismo conjunto X. Pruebe que la función idéntica $\mathrm{Id}_X : (X, \tau_1) \longrightarrow (X, \tau_2)$ es un homeomorfismo si y sólo si $\tau_1 = \tau_2$.

7. Pruebe que la propiedad de que cada función continua de valor real sobre un conjunto X tome un valor máximo es una propiedad topológica.

8. Utilice el ejercicio anterior para probar que $[0, 1]$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos.

9. Muestre que la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x$ es una inmersión.

10. Llamaremos la *recta extendida* al conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, con la topología dada por la relación de orden $\preccurlyeq$ que se define de la siguiente manera:

I Si $x,\ y \in \mathbb{R}$ y si $x \leq y$, entonces $x \preccurlyeq y$.

II $-\infty \preccurlyeq x$ para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

III $x \preccurlyeq +\infty$ para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

a) Pruebe que la función $f : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1, 1]$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \text{ si } x \in \mathbb{R},\ f(-\infty) = -1 \text{ y } f(+\infty) = 1,$$

es estrictamente creciente y sobreyectiva y que por lo tanto es un homeomorfismo.

b) Pruebe que $\mathbb{R}$ es un subespacio denso de $\overline{\mathbb{R}}$.

Capítulo 4

Topologías iniciales y Topologías finales

En el producto conjuntista de espacios topológicos se puede definir una topología que resulta ser la menos fina que garantiza la continuidad de todas las proyecciones canónicas. En general, se puede construir la topología menos fina sobre un conjunto fijo, desde el cual se han definido funciones que toman valores en espacios topológicos de una familia dada, de manera tal que estas funciones resulten continuas.
De manera dual, se construye la topología más fina sobre un conjunto en el que toman valores funciones definidas en elementos de una familia de espacios topológicos, de tal manera que tales funciones resulten continuas.

En este capítulo, como caso particular de estructuras iniciales, estudiaremos los espacios producto y como caso particular de estructuras finales, los espacios cocientes. También estudiaremos propiedades características que establecen la universalidad, en el sentido categórico, de las construcciones hechas.

4.1. Estructuras iniciales - Topología inicial

Sean X un conjunto, $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ una función. Si consideramos la topología discreta sobre el conjunto X cada una de las funciones f_α resulta ser continua. Nuestro propósito ahora es dotar al conjunto X de la topología menos fina para la cual cada f_α es una función continua.

Si f_α es continua, entonces para cada subconjunto abierto O de X_α el conjunto $f_\alpha^{-1}(O)$ debe ser un subconjunto abierto de X. Entonces la colección

$$\mathcal{S} = \{f_\alpha^{-1}(O) : \alpha \in \Lambda \text{ y } O \text{ es abierto en } X_\alpha\}$$

debe estar contenida en la topología del espacio X.
La colección $\mathcal{B}$ de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ es una base para una topología sobre X y claramente si consideramos la topología generada por $\mathcal{B}$ sobre X, entonces f_α es una función continua para cada $\alpha \in \Lambda$.

4.1.1 Definición. *La topología generada por la base $\mathcal{B}$ es la* topología inicial *sobre X inducida por la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.*

El siguiente resultado caracteriza las funciones continuas que tienen como codominio un espacio con una topología inicial.

4.1.2 Teorema. *Si X tiene la topología inicial inducida por una familia de funciones $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, donde $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$, entonces una función $f : Y \longrightarrow X$ es continua si y sólo si $f_\alpha \circ f$ es continua para cada $\alpha \in \Lambda$.*

Demostración. Es inmediato que si f es continua, entonces $f_\alpha \circ f$ es continua para cada $\alpha \in \Lambda$.

Supongamos la continuidad de $f_\alpha \circ f$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Puesto que X tiene la topología inicial inducida por la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, un conjunto abierto subbásico de X tiene la forma $f_\alpha^{-1}(O)$ para algún $\alpha \in \Lambda$ y algún subconjunto abierto O de X_α. Se tiene que $f^{-1}(f_\alpha^{-1}(O)) = (f_\alpha \circ f)^{-1}(O)$ es abierto en Y, porque $f_\alpha \circ f$ es continua. □

4.1.3 Observación. *Sea τ una topología sobre X tal que cada f_α es continua y denotemos por X' el espacio (X, τ). Puesto que $f_\alpha \circ id_X : X' \longrightarrow X_\alpha$ es continua para cada $\alpha \in \Lambda$, se tiene que la aplicación idéntica $id_X : X' \longrightarrow X$ es continua y esto sólo se tiene si τ es más fina que la topología inicial sobre X inducida por la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. La topología inicial es entonces la topología menos fina con la que se puede dotar al conjunto X, de manera tal que cada función f_α resulte ser continua.*

4.1.4 EJEMPLOS.

1. *Si Y tiene la topología grosera entonces la topología inicial sobre un conjunto X inducida por una función $f : X \longrightarrow Y$ es la topología grosera.*

2. *Si Y tiene la topología discreta entonces la topología inicial sobre un conjunto X inducida por una función uno a uno $f : X \longrightarrow Y$ es la topología discreta.*

Ejercicios 4.1

1. Demuestre que si Y tiene la topología grosera entonces la topología inicial sobre un conjunto X inducida por una función $f : X \longrightarrow Y$ es la topología grosera.

2. Suponga que Y tiene la topología discreta.

   a) Pruebe que la topología inicial sobre un conjunto X inducida por una función uno a uno $f : X \longrightarrow Y$ es la topología discreta.

   b) ¿Qué ocurre si f no es uno a uno?

3. Considere la topología de los complementos enumerables definida sobre el conjunto de los números reales. ¿Cuál es la topología inicial sobre $\mathbb{Q}$ inducida por la inclusión de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$?

4. Resuelva el ejercicio anterior pero considerando $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en lugar de $\mathbb{Q}$.

5. Considere la topología de las colas a la derecha definida sobre el conjunto de los números enteros. ¿Cuál es la topología inicial sobre $\mathbb{R}$ inducida por la función parte entera, $x \longmapsto [x] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$?

6. Considere la topología usual sobre el conjunto de los números reales. ¿Cuál es la topología inicial sobre $\mathbb{R}^2$ inducida por la función que aplica a cada punto del plano en su distancia usual al origen?

7. Sean (Y, d) un espacio métrico y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Definimos la función $m : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $m(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2))$.

a) Demuestre que m es una métrica sobre X si y sólo si f es uno a uno; y que en caso de no serlo, m resulta ser una seudométrica sobre X.

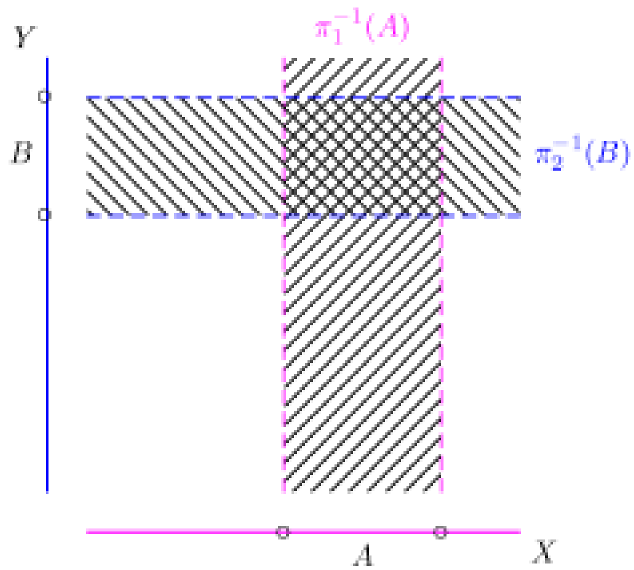
b) Compare la topología generada por m sobre X con la topología inicial inducida por f.

4.2. Topología Producto

La posibilidad de construir estructuras iniciales descrita en la sección anterior, nos permite dotar al producto cartesiano de una familia de espacios topológicos de una topología que resulta ser muy útil en distintos contextos.

4.2.1 Definición. *Sean X y Y dos espacios topológicos y consideremos la topología inicial sobre el producto cartesiano $X \times Y$ inducida por las proyecciones canónicas $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$. Llamamos a esta topología la* topología producto *sobre $X \times Y$.*

Los conjuntos de la forma $\pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B)$ donde A y B son subconjuntos abiertos de X y Y, respectivamente, forman una base para la topología definida sobre $X \times Y$.



Ahora bien, si A y B son subconjuntos abiertos de X y Y, respectivamente, entonces $\pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B) = A \times B$. Así, la topología producto sobre $X \times Y$ se puede describir como la topología generada por los conjuntos de la forma $A \times B$ donde A y B son subconjuntos abiertos de X y Y, respectivamente.

4.2.2 Observación. *En general, si* X_1, X_2,...,X_n *son espacios topológicos, la topología producto sobre* $X_1 \times X_2 \times, ..., \times X_n$ *es la topología inicial inducida por las funciones* $\pi_i : X_1 \times X_2 \times, ..., \times X_n \longrightarrow X_i$, $i = 1, ..., n$; *y una base para esta topología está dada por los conjuntos de la forma* $A_1 \times A_2 \times, ..., \times A_n$, *donde* A_i *es un subconjunto abierto de* X_i *para cada* $i = 1, ..., n$.

4.2.3 EJEMPLOS.

1. *La topología usual de* $\mathbb{R}^2$ *es la topología producto sobre* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2. *La topología usual de* $\mathbb{R}^n$ *es la topología producto sobre el producto cartesiano* $\mathbb{R}^n$.
3. *El producto de una familia finita de espacios métricos es un espacio métrico.*

Ejercicios 4.2

1. Considere X y Y dos espacios topológicos y sean $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ las proyecciones canónicas.
   a) Pruebe que π_1 y π_2 son funciones abiertas.
   b) Muestre con un ejemplo que π_1 y π_2 pueden no ser funciones cerradas.
2. Sean X y Y espacios topológicos, $A \subset X$ y $B \subset Y$.
   a) Demuestre que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.
   b) Demuestre que $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$.
3. Sean X un espacio topológico y $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ la diagonal de X. Demuestre que si Δ tiene la topología heredada de la topología producto, entonces X y Δ son homeomorfos.

4. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Demuestre que si el conjunto $G = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ tiene la topología heredada de la topología producto de $X \times Y$, entonces X y G son homeomorfos.

5. Sea X un espacio con un número finito de puntos y sea Y cualquier espacio topológico. Demuestre que la proyección $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ es una aplicación cerrada.

6. Sea X un espacio con la topología grosera y sea Y cualquier espacio topológico. Demuestre que la proyección $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ es una aplicación cerrada.

7. Considere los espacios topológicos (X_1, τ_1), $(X_2, \tau_2), ..., (X_n, \tau_n)$, $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, W un espacio topológico cualquiera y para cada $i = 1, ..., n$, sea $f_i : W \longrightarrow X_i$ una función continua. Pruebe que la función $f : W \longrightarrow X$ definida por $f(w) = (f_1(w), ..., f_n(w))$ es continua.

8. Considere los espacios métricos (X_1, m_1), $(X_2, m_2), ..., (X_n, m_n)$ y sea $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.

   a) Demuestre que la función $m : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

   $$m(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i, y_i)^2},$$

   donde $x = (x_1,\ x_2, ...,\ x_n)$ y $y = (y_1,\ y_2, ...,\ y_n)$, es una métrica sobre X.

   b) Demuestre que la topología producto sobre X es la misma topología inducida por la métrica m.

4.3. Productos arbitrarios

Consideremos ahora una familia arbitraria $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de espacios topológicos. Recordemos que un elemento x del producto cartesiano $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es una función $x : \Lambda \longrightarrow \dot{\bigcup} X_\alpha$ tal que $x(\alpha) = x_\alpha \in X_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda$.

Para cada $\alpha \in \Lambda$, la proyección canónica $\pi_\alpha : \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ está definida por $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$.

4.3.1 Definición. *Definimos la topología producto sobre $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ como la topología inicial inducida por la familia $\{\pi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de proyecciones canónicas.*

Consideremos la colección

$$\mathcal{S} = \{\pi_\alpha^{-1}(O) : \alpha \in \Lambda \text{ y } O \text{ es abierto en } X_\alpha\}$$

y recordemos que la familia $\mathcal{B}$ de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ es una base para la topología producto.
Entonces, un conjunto abierto básico tiene la forma

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1,\dots,n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(O_{\alpha_i}) &= \{x \in \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha : x_{\alpha_i} \in O_{\alpha_i} \text{ para todo } i = 1, ..., n\}\\ &= \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \text{ donde } A_\alpha \text{ es abierto en } X_\alpha \text{ para todo } \alpha \in \Lambda,\\ &\quad A_{\alpha_i} = O_{\alpha_i},\ i = 1, ..., n \text{ y } A_\alpha = X_\alpha \text{ si } \alpha \neq \alpha_i,\ i = 1, ..., n.\end{aligned}$$

Así, un conjunto abierto básico de la topología producto es un producto de subespacios abiertos de los espacios originales, en el cual cada factor es igual al espacio total, salvo para un número finito de índices.

4.3.2 Observación. *En este punto vale la pena hacer la siguiente observación. Puesto que la topología producto definida sobre el producto cartesiano de una familia $(X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de espacios topológicos es una topología inicial, es decir es la topología menos fina que se puede definir sobre $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ de manera tal que $\pi_\alpha : \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ sea continua para cada $\alpha \in \Lambda$, una función f definida de un espacio topológico X en $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es continua si y sólo si $\pi_\alpha \circ f$ es continua para cada $\alpha \in \Lambda$.*

Esta propiedad que caracteriza la topología producto se puede expresar en términos de la siguiente propiedad universal.

Sea $(X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos. Si X es un espacio topológico y si $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ es una función continua para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces existe una única función continua $f : X \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ tal que $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$.

Trabajaremos ahora con espacios topológicos que tienen una propiedad especial: Si x y y son puntos distintos del espacio, existe una vecindad V de x tal que $y \notin V$, o existe una vecindad W de y tal que $x \notin W$. En otras palabras, dados dos puntos distintos del espacio, existe una vecindad de alguno de los dos puntos, que no contiene al otro.

Hay una gran cantidad de ejemplos de espacios con esta propiedad: cualquier espacio métrico la tiene, así como cualquier conjunto con la topología de complementos finitos o cualquier conjunto totalmente ordenado con la topología de las colas a la derecha. Por supuesto también existe espacios sin esta propiedad, como los conjuntos con más de un punto y topología grosera.

Los espacios tales que dados dos puntos distintos del espacio, existe una vecindad de alguno de los dos puntos, que no contiene al otro, están inmersos en productos de espacios de Sierpinski como lo muestra el siguiente ejemplo.

4.3.3 EJEMPLO.
Sea $C = \{0,\ 1\}$ el espacio de Sierpinski. La topología sobre este espacio es $\{\emptyset,\ \{0\},\ \{0,\ 1\}\}$. Consideremos un espacio topológico (X, τ) tal que dados dos puntos distintos del espacio, existe una vecindad de alguno de los dos puntos que no contiene al otro y tomemos el espacio producto $\prod_{A\in\tau} X_A$, donde $X_A = C$ para cada $A \in \tau$.
Para cada $x \in X$ definimos la función $\alpha(x) = \widehat{x} : \tau \longrightarrow \dot{\bigcup}_{A\in\tau} X_A$ por

$$\widehat{x}(A) = \begin{cases} 0 & si\ x \in A \\ 1 & si\ x \notin A. \end{cases}$$

Veamos que la función $\alpha : X \longrightarrow \prod_{A\in\tau} X_A$ es una inmersión. Es decir que es una función continua, abierta sobre su imagen y uno a uno.

1. *Sea $A \in \tau$ y O un subconjunto abierto de X_A. Entonces*

$$\alpha^{-1}(\pi_A^{-1}(O)) = \begin{cases} A & si\ O = \{0\} \\ X & si\ O = \{0,\ 1\}. \end{cases}$$

   En cualquier caso, $\alpha^{-1}(\pi_A^{-1}(O))$ es un conjunto abierto en X, luego α es continua.

2. *Sea A un subconjunto abierto de X. Se tiene*
$$\begin{aligned}\widehat{A} &= \{\widehat{x} : x \in A\}\\ &= \pi_A^{-1}(\{0\}) \cap \widehat{X},\end{aligned}$$
entonces α es una función abierta sobre su imagen.

3. *Sean x y y elementos distintos de X. Por hipótesis, existe una vecindad abierta V de uno de los puntos, digamos de x, que no contiene al otro. Es decir $y \notin V$. Entonces $\widehat{y}(V) = 1$ y $\widehat{x}(V) = 0$. Se concluye que $\widehat{x} \neq \widehat{y}$ y que α es uno a uno.*

En el ejemplo anterior resultó indispensable que el espacio topológico X tuviera una propiedad especial para que fuera posible sumergirlo, por medio de la aplicación α, en un producto de espacios de Sierpinski. Esta es una operación que no se puede realizar con todo espacio topológico.

El siguiente ejemplo muestra cómo, sorprendentemente, todo espacio topológico es un subespacio de un producto de espacios de tres puntos.

4.3.4 EJEMPLO.
Consideremos el conjunto $C = \{0,\ 1,\ 2\}$ con la topología $\{\emptyset,\ \{0\},\ C\}$. Llamaremos al espacio topológico C el espacio de Sierpinski de tres puntos*.*

Sea (X, τ) un espacio topológico cualquiera y consideremos el espacio producto $\prod_{A \in \mathcal{P}(X)} C_A$, donde $C_A = C$ para cada $A \in \mathcal{P}(X)$.
Para cada $x \in X$ definimos la función $\sigma(x) = \widehat{x} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \dot{\bigcup}_{A \in \mathcal{P}(X)} C_A$ por
$$\widehat{x}(A) = \begin{cases} 0 & si\ x \in A^{\circ} \\ 1 & si\ x \in Fr A \cap A \\ 2 & si\ x \notin A. \end{cases}$$
Veamos que la función $\sigma : X \longrightarrow \prod_{A \in \mathcal{P}(X)} C_A$ es una inmersión. Con este fin veamos que σ es una función continua, abierta sobre su imagen y uno a uno.

1. *Sea $A \in \mathcal{P}(X)$ y O un subconjunto abierto de C_A. Entonces*
$$\sigma^{-1}(\pi_A^{-1}(O)) = \begin{cases} A^{\circ} & si\ O = \{0\} \\ X & si\ O = \{0,\ 1,\ 2\}, \end{cases}$$
luego σ es continua.

2. Sea A un subconjunto abierto de X. Se tiene

$$\begin{aligned}\widehat{A} &= \{\widehat{x} : x \in A\} \\ &= \pi_A^{-1}(\{0\}) \cap \widehat{X},\end{aligned}$$

entonces σ es una función abierta sobre su imagen.

3. Sean x y y elementos distintos de X. Como $y \notin A = \{x\}$ se tiene que $\widehat{y}(A) = 2$ y $\widehat{x}(A) = 0$ o $\widehat{x}(A) = 1$ dependiendo de si A es o no abierto en X. Entonces $\widehat{x} \neq \widehat{y}$ y σ es uno a uno.

Ejercicios 4.3

1. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \prod_{i\in I} X_i$. Demuestre que la proyección $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ es una aplicación abierta para cada $i \in I$.

2. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y para cada $i \in I$ sea $A_i \subset X_i$. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas justificando cada respuesta con una demostración o con un contraejemplo.

   a) $\overline{\prod_{i\in I} A_i} \subset \prod_{i\in I} \overline{A_i}$.
   b) $\prod_{i\in I} \overline{A_i} \subset \overline{\prod_{i\in I} A_i}$.
   c) $\left(\prod_{i\in I} A_i\right)^\circ \subset \prod_{i\in I} (A_i)^\circ$.
   d) $\prod_{i\in I} (A_i)^\circ \subset \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^\circ$.

3. Sean $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, $X = \prod_{i\in I} X_i$, W un espacio topológico arbitrario y para cada $i \in I$ sea $f_i : W \longrightarrow X_i$ una función continua. Demuestre que la función $f : W \longrightarrow X$ definida por $f(w) = (f_i(w))_{i\in I}$ es continua.

4. Sean $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, $X = \prod_{i\in I} X_i$, $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ la proyección canónica para cada $i \in I$ y consideremos Y un subespacio de X. Para cada $i \in I$, denotemos por p_i la restricción de pi_i al conjunto Y. Demuestre que la topología de subespacio sobre Y es la topología inicial inducida por la familia de funciones $(p_i)_{i\in I}$.

5. Sea $(X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos. Demuestre que la propiedad: "Una función f definida de un espacio topológico X en $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es continua si y sólo si $\pi_\alpha \circ f$ es continua, para cada $\alpha \in \Lambda$" es equivalente a la propiedad: "Si X es un espacio topológico y si $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ es una función continua, para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces existe una única función continua $f : X \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ tal que $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda$".

6. Sean $(X_i, m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una familia enumerable de espacios métricos y sea $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$.

   a) Para cada $i \in I$, sea m_i^* la métrica sobre X_i definida por $m_i^*(a,b) = \text{mín}\{1, m_i(a,b))$. Demuestre que la función $m : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
   $$m(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_i^*(x_i,y_i)}{2^i},$$
   donde $x = (x_i)$ y $y = (y_i)$, es una métrica sobre X.

   b) Demuestre que la topología producto sobre X es la misma topología inducida por la métrica m.

4.4. Estructuras finales - Topología final

Sean Y un conjunto, $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea $f_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y$ una función. Si consideramos la topología grosera sobre el conjunto Y cada una de las funciones f_α resulta ser continua.

Ahora deseamos encontrar la topología más fina que se puede definir sobre el conjunto Y, de tal manera que f_α sea continua para cada $\alpha \in \Lambda$.

Definamos tentativamente la colección τ como la colección de todos los subconjuntos A de Y tales que $f_\alpha^{-1}(A)$ es abierto en X_α para cada $\alpha \in \Lambda$. Esto es

$$\tau = \{A \subset Y : f_\alpha^{-1}(A) \in \tau_\alpha \text{ para cada } \alpha \in \Lambda\}.$$

Es un ejercicio sencillo demostrar que τ es una topología sobre Y y que f_α es continua para cada $\alpha \in \Lambda$.

4.4.1 Definición. *Llamaremos a τ la topología final sobre Y inducida por la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.*

4.4.2 EJEMPLO.
Sean $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos disjuntos dos a dos, $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ y $j_i\, X_i \longrightarrow X$ la inyección canónica de X_i en X. La colección $\mathcal{A}$ constituida por los conjuntos $A \subset X$ tales que para cada $i \in I$, $A \cap X_i$ es un conjunto abierto en X_i, es una topología sobre X. Teniendo en cuenta que $j_i^{-1}(A) = A \cap X_i$, $\mathcal{A}$ resulta ser la topología más fina sobre X tal que para cada $i \in I$, las inyecciones canónicas son continuas. Esta topología es conocida con el nombre de topología suma *sobre X.*

Supongamos que X tiene la topología suma. Una condición necesaria y suficiente para que una función $f : X \longrightarrow Y$ sea continua es que la función compuesta $f \circ j_i$ sea continua para cada $i \in I$. En efecto, dado B subconjunto subconjunto abierto de Y, $f^{-1}(B)$ es abierto en X, si y solamente si, $f^{-1}(B)\cap X_i = j_i^{-1}(f^{-1}(B)) = (f\circ j_i)^{-1}(B)$ es abierto en X_i, para cada $i \in I$, es decir, $f \circ j_i$ es continua para cada $i \in I$.

En particular, si $(Y_i)_{i\in I}$ es otra familia de espacios topológicos disjuntos dos a dos cuya unión es Y, y si para cada $i \in I$, la aplicación $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ es continua, entonces la aplicación $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(x) = f_i(x)$ si $x \in X_i$ es también continua. En efecto, para cada $i \in I$, $f \circ j_i = k_i \circ f_i$, donde k_i es la aplicación canónica de Y_i en Y. Se obtiene así la continuidad de las $f \circ j_i$ y por ende la de f. Si los f_i son homeomorfismos se concluye que f es un homeomorfismo de X sobre Y.

El siguiente resultado muestra una característica muy importante de los espacios dotados de una topología final, que ya hicimos notar en el ejemplo anterior.

4.4.3 Teorema. *Supongamos que Y tiene la topología final inducida por la familia de funciones $\{f_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y\}_{\alpha\in\Lambda}$. Una función $f : Y \longrightarrow Z$ es continua si y sólo si $f \circ f_\alpha$ es continua para cada $\alpha \in \Lambda$.*

Demostración. Es inmediato que si f es continua, entonces $f \circ f_\alpha$ es continua para cada $\alpha \in \Lambda$.
De manera recíproca, Si O es un subconjunto abierto de Z, entonces $f^{-1}(O)$ es abierto en Y, porque $f_\alpha^{-1}(f^{-1}(O))$ es abierto en X_α para cada $\alpha \in \Lambda$. $\square$

4.4.4 Observación. *Si τ' es una topología sobre Y tal que f_α es continua para cada $\alpha \in \Lambda$ y si denotamos por Y' al espacio formado por el conjunto Y junto con la topología τ', entonces el teorema anterior garantiza que la aplicación idéntica de Y en Y' es continua. Esto significa que τ' es menos fina que la topología final sobre Y.*

Ejercicios 4.4

1. Demuestre que si X tiene la topología grosera entonces la topología final sobre un conjunto Y inducida por una función $f : X \longrightarrow Y$ no es necesariamente la topología grosera.

2. Suponga que X tiene la topología discreta. Pruebe que la topología final sobre un conjunto Y inducida por una función $f : X \longrightarrow Y$ es la topología discreta.

3. Considere la topología de los complementos finitos definida sobre el conjunto de los números racionales. ¿Cuál es la topología final sobre $\mathbb{R}$ inducida por la inclusión de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$?

4. Resuelva el ejercicio anterior pero considerando $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en lugar de $\mathbb{Q}$ y la topología de los complementos enumerables sobre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5. Considere la topología de las colas a la derecha definida sobre el conjunto de los números reales. ¿Cuál es la topología final sobre $\mathbb{Z}$ inducida por la función parte entera, $x \longmapsto [x] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$?

6. Considere la topología usual sobre $\mathbb{R}^2$. ¿Cuál es la topología final sobre $\mathbb{R}$ inducida por la función que aplica a cada punto del plano en su distancia usual al origen?

4.5. Topología cociente

Consideremos un espacio topológico X y una relación de equivalencia $\sim$ definida sobre X. Como es costumbre, denotaremos por $[x]$ la clase de equivalencia de un elemento $x \in X$ y por $X/\sim$ el conjunto de todas las clases de equivalencia. Esto es,

$$X/\sim = \{[x] : x \in X\}.$$

La función canónica $q : X \longrightarrow X/\sim$ definida por $q(x) = [x]$ induce la topología final sobre el cociente $X/\sim$. El espacio así definido recibe el nombre de *espacio cociente* y la topología final se llama también *topología cociente*.

4.5.1 EJEMPLOS.

1. *Sea* $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1$ *y* $0 \leq y \leq 1\}$ *considerado como subespacio del plano. Definimos la relación de equivalencia* $\sim$ *sobre* X *de la siguiente manera:*

   $$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \text{ si y sólo si}$$

   a) $x_0 = x_1$ *y* $y_0 = y_1$, *o*

   b) $x_0 = \pm 1$, $x_1 = -x_0$ *y* $y_1 = 1 - y_0$.

   El espacio topológico que se obtiene al dotar al conjunto $X/\sim$ *de la topología cociente se conoce como* cinta de Moëbius.

2. *Consideremos la relación de equivalencia* $\sim$ *sobre el plano* $\mathbb{R}^2$ *definida por*

   $$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \text{ si y sólo si } x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

   Observando con un poco de atención notaremos que dos puntos del plano están relacionados mediante $\sim$, *si y sólo si se encuentran a la misma distancia del origen. Entonces, la clase de equivalencia de un* *punto (x_0, y_0) está formada por los puntos de la circunferencia centrada en el origen y que pasa por el punto (x_0, y_0). Sean $X = \mathbb{R}^2/\sim$, $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow X$ la aplicación canónica y consideremos la topología cociente sobre X.*

Veamos que la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f[(x_0, y_0)] = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ es una inmersión.

i. *En primer lugar, nótese que la manera como está definida la relación $\sim$ implica, no sólo que f está bien definida, sino que es uno a uno.*

ii. *Ahora veamos que f es continua. Para esto consideremos un intervalo abierto $(a,\ b)$ en $\mathbb{R}$. Para verificar que $f^{-1}(a,\ b)$ es un conjunto abierto en X, debemos comprobar que $\pi^{-1}(f^{-1}(a,\ b))$ es abierto en $\mathbb{R}^2$. Analizaremos tres casos:*

a. *si $a < b \leq 0$, entonces $\pi^{-1}(f^{-1}(a,\ b)) = \emptyset$,*

b. *si $a < 0 < b$, entonces $\pi^{-1}(f^{-1}(a,\ b))$ es el interior del círculo de radio b centrado en el origen y*

c. *si $a \leq 0 < b$, entonces $\pi^{-1}(f^{-1}(a,\ b))$ es la corona abierta limitada por las circunferencias centradas en el origen, de radios a y b.*

Este análisis permite concluir que f es una función continua.

iii. *Ahora consideremos un conjunto A abierto en X. Por la definición de la topología cociente $\pi^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en el plano. Si $a \in f(A)$, existe un punto z en el plano tal que $[z] \in A$ y $f[z] = a$. Como $z \in \pi^{-1}(A)$, existe $\epsilon > 0$ tal que la bola de radio ϵ centrada en z está contenida en $\pi^{-1}(A)$. Se tiene que $(a - \epsilon,\ a + \epsilon) \subset f(A)$. Concluimos que f es una función abierta.*

4.5.2 Observación. *Consideremos una función $f : X \longrightarrow Y$. La relación R_f definida sobre X por $x\, R_f\, y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$ es una relación de equivalencia. En efecto,*

1. *$f(x) = f(x)$ para cada $x \in X$, luego R_f es reflexiva.*

2. *Si $f(x) = f(y)$ entonces $f(y) = f(x)$, de donde R_f es simétrica.*

3. Si $f(x) = f(y)$ y $f(y) = f(z)$ entonces $f(x) = f(z)$, por tanto R_f es transitiva.

4.5.3 Definición. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función sobreyectiva. Si Y tiene la topología final inducida por f entonces f se llama una* aplicación cociente.

El término "aplicación cociente" queda ampliamente justificado con el siguiente resultado.

4.5.4 Proposición. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación cociente, entonces Y y X/R_f son homeomorfos.*

Demostración. Consideremos la función $\varphi : X/R_f \longrightarrow Y$ definida por $\varphi([x]) = f(x)$.

1. Si $[x] = [y]$ entonces $f(x) = f(y)$, luego φ es una función bien definida.

2. Si $\varphi([x]) = \varphi([y])$, entonces $f(x) = f(y)$, de donde $[x] = [y]$, por lo tanto φ es uno a uno.

3. Puesto que f es sobreyectiva, dado $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Entonces $\varphi([x]) = y$ y φ es sobreyectiva.

4. Si q es la aplicación canónica definida de X en X/R_f entonces $\varphi \circ q = f$ y como f es continua y X/R_f tiene la topología final inducida por q, se concluye que φ es una función continua.

5. Nótese que $A = \varphi^{-1}(\varphi(A))$ para cada $A \subset X/R_f$. Así, si A es abierto en X/R_f, entonces $\varphi(A)$ es abierto en Y. Se concluye que φ es una función abierta.

Se ha demostrado que φ es un homeomorfismo. $\square$

Ejercicios 4.5

1. Demuestre que si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y sobreyectiva que es además abierta o cerrada, entonces f es una aplicación cociente.

2. Sean X y Y espacios topológicos y consideremos el espacio producto $X \times Y$. ¿Son las proyecciones canónicas, $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$, aplicaciones cociente?

3. Suponga que $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si X tiene la topología inicial inducida por f, ¿se puede asegurar que f es una aplicación cociente? Justifique su respuesta con una demostración o un contraejemplo.

4. Dé un ejemplo de una aplicación cociente que no sea ni abierta ni cerrada.

5. Definimos la relación $\sim$ en el plano por $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1)$ si y sólo si $y_0 = y_1$.

   a) Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

   b) Determine la clase de equivalencia de un punto (x, y) del plano.

   c) Pruebe que el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

6. Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un espacio topológico X.

   a) Demuestre que si $X/\sim$ es un espacio de Hausdorff, entonces $\sim$ es un subconjunto cerrado de $X \times X$.

   b) Demuestre que si la aplicación canónica $q : X \longrightarrow X/\sim$ es abierta y si $\sim$ es cerrado en $X \times X$, entonces $X/\sim$ es un espacio de Hausdorff.

7. Dé un ejemplo de una función continua y sobreyectiva que no sea una aplicación cociente.

Capítulo 5

Propiedades de Separación y de enumerabilidad

Este capítulo versa sobre propiedades de los espacios topológicos que permiten establecer distintos grados de separación bien sea entre pares de puntos del espacio, entre subconjuntos cerrados y puntos fuera del subconjunto o entre pares de subconjuntos cerrados del espacio, en términos de vecindades o de funciones numéricas continuas.

Las propiedades de enumerabilidad es otro de los temas tratados: enumerabilidad de sistemas fundamentales de vecindades de los puntos (espacios 1-enumerables, tan cercanos a los espacios métricos en muchos sentidos), enumerabilidad de la base (espacios 2-enumerables) y enumerabilidad de subconjuntos densos (espacios separables).

5.1. Espacios $\mathbf{T}_0$ y espacios $\mathbf{T}_1$

En el capítulo anterior vimos cómo los espacios topológicos con cierta propiedad especial podían sumergirse en un producto de espacios de Sierpinski. La propiedad que se pedía era que dados dos puntos distintos del espacio, existiera una vecindad de alguno de los puntos que no contuviera al otro. Los espacios con esta propiedad serán nuestro primer objeto de estudio en este capítulo.

5.1.1 Definición. *Un espacio topológico X es T_0 si dados x y y puntos distintos del espacio, existe una vecindad V de x tal que $y \notin V$, o existe una vecindad W de y tal que $x \notin W$.*

5.1.2 EJEMPLOS.

1. *El espacio de Sierpinski, $X = \{0,\ 1\}$ con la topología $\{\emptyset,\ \{0\},\ \{0,\ 1\}\}$, es un espacio T_0. Los únicos puntos distintos entre sí son 0 y 1; y $\{0\}$ es una vecindad de 0 que no contiene a 1.*

2. *Sea d una seudométrica sobre un conjunto X. La función d es una métrica si y sólo si el espacio topológico generado es T_0. En efecto, si d es una métrica y x, y son puntos distintos de X, entonces $d(x, y) > 0$, luego la bola abierta $B\left(x, d(x, y)\right)$ es una vecindad de x que no contiene a y. De manera recíproca, si X es T_0 y x, y son puntos distintos de X, entonces existe una vecindad de uno de los puntos, digamos de x, que no contiene al otro. Esto significa que existe $\epsilon > 0$ tal que $y \notin B(x, \epsilon)$, lo cual a su vez implica que $d(x, y) \geq \epsilon > 0$.*

3. *Cualquier conjunto X con la topología de complementos finitos es un espacio T_0.*

4. *Cualquier conjunto X totalmente ordenado, con la topología de las colas a la derecha es un espacio T_0.*

5. *Si X es un conjunto con más de un punto y topología grosera, entonces X no es un espacio T_0.*

6. *Si Y es un subespacio de un espacio T_0, entonces Y también es un espacio T_0. En efecto, si x y y son puntos distintos de Y, existe una vecindad V de uno de los puntos, digamos de x, en X, tal que $y \notin V$. Se tiene que $V \cap Y$ es una vecindad de x en Y y $y \notin V \cap Y$.*

7. *Sea $(X_i)_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. El producto $X = \prod_{i \in I} X_i$ es un espacio T_0 si y sólo si X_i es un espacio T_0 para cada $i \in I$. En efecto, si X es T_0, si $j \in I$ y si a y b son puntos distintos de X_j, escogemos x y y en X de tal manera que $x_i = y_i$ para cada $i \neq j$, $x_j = a$ y $y_j = b$. Entonces x y y son puntos distintos de*

X y por ser X un espacio T_0, existe una vecindad básica V de uno de los puntos, digamos de x, en X, tal que $y \notin V$. Entonces V tiene la forma $V = \bigcap_{\alpha=1,...,n} \pi_{i_\alpha}^{-1}(O_{i_\alpha})$, donde O_{i_α} es una vecindad de x_{i_α} para cada $\alpha = 1, ..., n$. Puesto que x y y difieren únicamente en la j-ésima coordenada, $j = i_\alpha$ para algún $\alpha \in \{1, ..., n\}$. Entonces O_{i_α} es una vecindad de $x_{i_\alpha} = a$ en X_j, que no contiene a b. De manera recíproca, si X_i es un espacio T_0 para dada $i \in I$ y si x y y son puntos distintos del producto $\prod_{i\in I} X_i$, existe $j \in I$ tal que $x_j \neq y_j$. Puesto que X_j es un espacio T_0, existe una vecindad O_j de uno de los puntos, digamos de x_j, en X_j, tal que $y_j \notin O_j$. Entonces $\pi_j^{-1}(O_j)$ es una vecindad de x que no contiene a y. De esta manera queda demostrado que X es un espacio T_0.

Supongamos que (X, d) es un espacio métrico. Puesto que X con la topología generada por la métrica es un espacio T_0, dados dos puntos distintos x y y de X, existe una vecindad de uno de los puntos, que no contiene al otro. En un ejemplo anterior mostramos que $y \notin B(x, d(x, y))$. Pero podemos afirmar aún más: existe también una vecindad de y que no contiene a x. En efecto, $x \notin B(y, d(x, y))$. Estudiaremos ahora los espacios topológicos que tienen esta propiedad.

5.1.3 Definición. *Un espacio topológico X es un espacio T_1 si para cada par x, y de puntos distintos de X existen una vecindad V de x y una vecindad W de y, tales que $y \notin V$ y $x \notin W$.*

5.1.4 EJEMPLOS.

1. *Todo espacio métrico es un espacio T_1.*
2. *Cualquier conjunto con la topología de los complementos finitos (resp. enumerables) es un espacio T_1.*
3. *Todo espacio discreto es T_1.*
4. *El plano de Moore es un espacio T_1.*
5. *El plano ranurado es un espacio T_1.*

Es inmediato que todo espacio T_1 es también un espacio T_0. Existen, no obstante, espacios T_0 que no son T_1, como por ejemplo el espacio de Sierpinski.

La mayor importancia de los espacios T_1 radica en que ellos caracterizan a los espacios en los cuales los conjuntos unitarios son conjuntos cerrados, como lo muestra parte del siguiente resultado.

5.1.5 Proposición. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es T_1.*
2. *Para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado.*
3. *Cada subconjunto de X es la intersección de los conjuntos abiertos que lo contienen.*

Demostración.

1. $\Longrightarrow$ 2. Si X es T_1, si $x \in X$ y si $y \neq x$, existe una vecindad V de y que no contiene a x. Esto demuestra que $X \smallsetminus \{x\}$ es abierto y, por lo tanto, que $\{x\}$ es cerrado.

2. $\Longrightarrow$ 3. Si $A \subset X$, se tiene que $A = \bigcap_{x \in X \smallsetminus A} X \smallsetminus \{x\}$.

3. $\Longrightarrow$ 1. Sean x y y puntos distintos de X. Como $\{x\}$ es la intersección de los conjuntos abiertos que contienen a x, existe un conjunto abierto que contiene a x y no contiene a y. De la misma forma, existe un conjunto abierto que contiene a y y no contiene a x.

$\square$

Ejercicios 5.1

1. Demuestre que cualquier conjunto X con la topología de complementos finitos (resp. enumerables) es un espacio T_0.
2. Demuestre que cualquier conjunto X totalmente ordenado, con la topología de las colas a la derecha es un espacio T_0.

3. Pruebe que el espacio de Sierpinski de tres puntos, $C = \{0,\ 1,\ 2\}$ con la topología $\{\emptyset,\ \{0\},\ C\}$, no es un espacio T_0.

4. Sea X un espacio topológico cualquiera y sea $\sim$ la relación definida sobre X por $x \sim y$ si y sólo si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Demuestre los siguientes hechos:

    a) $\sim$ es una relación de equivalencia sobre X.

    b) El espacio cociente $X/\sim$ es un espacio T_0.

5. Demuestre que los siguientes espacios son T_1.

    a) Cualquier conjunto con la topología de los complementos finitos (resp. enumerables).

    b) Todo espacio discreto.

    c) El plano de Moore.

    d) El plano ranurado.

    e) Los números reales con la topología para la cual cada número real x distinto de 0 tiene como sistema fundamental de vecindades los intervalos abiertos centrados en x, mientras que las vecindades fundamentales de 0 son los conjuntos de la forma $(-\infty, -n) \cup (-\epsilon, \epsilon) \cup (n, \infty)$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$.

6. Pruebe que el espacio de Sierpinski no es un espacio T_1.

7. Sea X un conjunto ordenado y considere la topología de las colas a derecha definida sobre X. Demuestre que X no es un espacio T_1.

8. Demuestre que todo subespacio de un espacio T_1 es un espacio T_1.

9. Demuestre que un producto arbitrario de espacios no vacíos es un espacio T_1 si y sólo si cada uno de los factores lo es.

5.2. Espacios de Hausdorff - T_2

Hemos visto que si (X, d) es un espacio métrico y si x y y son puntos distintos de X, entonces $B(x, d(x, y))$ es una vecindad de x que no contiene a

y y $B(y, d(x, y))$ es una vecindad de y que no contiene a x. En ambos casos hemos considerado $d(x, y)$ como el radio de las vecindades escogidas, en realidad esta distancia es el mayor radio posible para construir vecindades de cada uno de los puntos que no contengan al otro. Sinembargo, cualquier número real positivo menor que $d(x, y)$ serviría para nuestros propósitos. Si en particular consideramos un número positivo $r \leq \dfrac{d(x, y)}{2}$ entonces $B(x, r)$ es una vecindad de x que no contiene a y, $B(y, r)$ es una vecindad de y que no contiene a x y además estas vecindades tienen la propiedad adicional de no contener puntos en común. En otras palabras, dos puntos distintos de un espacio métrico se pueden "separar" con vecindades abiertas disyuntas. En esta sección estudiaremos los espacios que tienen esta misma propiedad.

5.2.1 Definición. *Un espacio topológico X es un espacio* de Hausdorff, *o T_2, si para cada x y cada y en X, con $x \neq y$, existen V y W vecindades de x y y respectivamente, de tal manera que $V \cap W = \emptyset$.*

Los espacios de Hausdorff se acostumbran también a llamar *espacios separados.*

5.2.2 EJEMPLOS.

1. *Todos los espacios métricos son espacios de Hausdorff.*

2. *Cualquier subespacio de un espacio de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.*

3. *Dada una familia $(X_i)_{i \in I}$ de espacios topológicos no vacíos, el producto $\prod_{i \in I} X_i$ es un espacio de Hausdorff si y sólo si X_i es un espacio de Hausdorff para cada $i \in I$.*

Es inmediato que todo espacio de Hausdorff es también un espacio T_1. Sin embargo, no todo espacio T_1 es un espacio de Hausdorff. Por ejemplo, si τ es la topología de los complementos finitos sobre un conjunto infinito X, entonces X es un espacio T_1 que no es un espacio de Hausdorff, puesto que en este espacio no existen dos conjuntos abiertos no vacíos que sean disyuntos.

Las funciones continuas no preservan la propiedad de ser un espacio de Hausdorff. Es decir, existen funciones continuas definidas de un espacio de Hausdorff en un espacio que no lo es. Si X tiene más de un punto, la aplicación idéntica definida de X, con la topología discreta, en X, con la topología grosera, es un ejemplo que ilustra esta situación.

Aún así, las funciones continuas satisfacen propiedades importantes en presencia de espacios de Hausdorff. Una de ellas se muestra en la siguiente proposición.

5.2.3 Proposición. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y Y es un espacio de Hausdorff, entonces el conjunto $K = \{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $X \times X$.*

Demostración. Si $(x_1, x_2) \notin K$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. Como Y es un espacio de Hausdorff, existen vecindades abiertas U y V de $f(x_1)$ y $f(x_2)$ respectivamente, de tal manera que $U \cap V = \emptyset$. La continuidad de f garantiza que $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son vecindades abiertas de x_1 y x_2 respectivamente; y se tiene que $f^{-1}(U) \times f^{-1}(V)$ es una vecindad abierta de (x_1, x_2) en $X \times X$, contenida en el complemento de K. $\square$

La recíproca de la proposición anterior no es siempre cierta. Si por ejemplo, $f : X \longrightarrow Y$ es una función constante entonces se tiene que el conjunto $K = \{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\} = X \times X$ es cerrado, independientemente de si Y es o no un espacio de Hausdorff. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado.

5.2.4 Proposición. *Si f es una función abierta de X sobre Y y si el conjunto $K = \{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $X \times X$, entonces Y es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Sean y_1 y y_2 puntos distintos de Y. Puesto que f es sobreyectiva, existen x_1 y x_2 en X tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Claramente $(x_1, x_2) \notin K$, luego existen vecindades abiertas U y V de x_1 y x_2 respectivamente, de tal manera que $U \times V \subset (X \times X) \smallsetminus K$. Como f es abierta, $f(U)$ y $f(V)$ son vecindades abiertas de y_1 y y_2 respectivamente, y se tiene $f(U) \cap f(V) = \emptyset$. $\square$

Las dos proposiciones anteriores dan una demostración inmediata del siguiente resultado, el cual es una caracterización de los espacios de Hausdorff.

5.2.5 Proposición. *El espacio topológico X es un espacio de Hausdorff si y sólo si la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$.*

Ejercicios 5.2

1. Determine cuáles de los siguientes espacios son de Hausdorff. En cada caso justifique plenamente su respuesta.

    a) El plano de Moore.

    b) El plano ranurado.

    c) Los números reales con la topología para la cual cada número real x distinto de 0 tiene como sistema fundamental de vecindades los intervalos abiertos centrados en x, mientras que las vecindades fundamentales de 0 son los conjuntos de la forma $(-\infty, -n) \cup (-\epsilon, \epsilon) \cup (n, \infty)$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$.

2. Sea X un espacio de Hausdorff. Determine todas las funciones continuas definidas del espacio de Sierpinski en X.

3. Demuestre que todo subespacio de un espacio de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.

4. Demuestre que un producto arbitrario de espacios de Hausdorff no vacíos es un espacio de Hausdorff si y sólo si cada uno de los factores lo es.

5. Recuerde que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio topológico X converge a un punto $x \in X$ si y sólo si para cada vecindad V de x existe $N \in \mathbb{N}$ de tal manera que $x_n \in V$ para cada $n \geq N$.

    a) Demuestre que si X es un espacio de Hausdorff entonces cada sucesión en X converge a lo más a un punto de X.

    b) Considere $X = \mathbb{R}$ con la topología de los complementos finitos. Demuestre que existen sucesiones en X que convergen a más de un punto simultáneamente.

6. Demuestre que el espacio topológico X es un espacio de Hausdorff si y sólo si la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$. (Una demostración elegante se obtiene considerando la función idéntica de X en X y utilizando los resultados de las proposiciones 5.2.3 y 5.2.4.)

7. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función abierta y sobreyectiva. Si la imagen inversa con respecto a $f \times f$ de la diagonal de Y es cerrada en $X \times X$, entonces Y es un espacio de Hausdorff.

8. Demuestre que si f es una función continua de X en Y, y si Y es un espacio de Hausdorff, entonces el grafo de f, $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$.

9. Demuestre que si f es una función continua y abierta del espacio X sobre el espacio Y, entonces Y es un espacio de Hausdorff si y sólo si $\{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $X \times X$.

10. Demuestre que si f y g son funciones continuas definidas de X en Y y si Y es un espacio de Hausdorff, entonces el conjunto $\{x : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

11. Demuestre que si f y g son funciones continuas definidas de X en Y, si Y es un espacio de Hausdorff, y si f y g coinciden en un subconjunto denso de X, entonces $f = g$.

5.3. Espacios regulares y Espacios T_3

En esta sección estudiaremos espacios topológicos en los que la topología del espacio permite separar conjuntos cerrados de puntos fuera de ellos.

5.3.1 Definición. *Un espacio topológico X es un espacio* regular *si para cada K subconjunto cerrado de X y cada $x \in X \setminus K$, existen conjuntos U y V abiertos en X, tales que $K \subset U$, $x \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

5.3.2 EJEMPLO.
Consideremos sobre $\mathbb{R}$ la topología τ para la cual las vecindades básicas de x son los intervalos de la forma $[x, y)$ con $y > x$. Si K es cerrado en $(\mathbb{R}, \tau)$ y $x \notin K$, existe $y > x$ tal que $U = [x, y) \subset \mathbb{R} \setminus K$. Para cada $z \in K$, con $z < x$, sea $V_z = [z, x)$ y para cada $z \in K$, con $z \geq y$, sea $V_z = [z, z + 1)$. El conjunto $V = \bigcup_{z \in K} V_z$ es abierto, contiene a K y $U \cap V = \emptyset$. Entonces $(\mathbb{R}, \tau)$ es regular.

Nótese que el hecho de que sea posible separar con conjuntos abiertos, puntos de conjuntos cerrados, no implica que se puedan separar dos puntos distintos del espacio, utilizando conjuntos abiertos disyuntos. Es decir, un espacio regular no siempre es un espacio de Hausdorff, como lo muestran los siguientes ejemplos.

5.3.3 EJEMPLOS.

1. *Sea X un conjunto dotado con la topología grosera. Entonces X es un espacio regular, puesto que no existen un conjunto cerrado K en X y un punto de X fuera de K que no se puedan separar con conjuntos abiertos disyuntos. Por otro lado, a menos que X no tenga más de un punto, X no es un espacio de Hausdorff.*

2. *Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$. Entonces $(\mathbb{R}, \tau)$ es un espacio regular que no es un espacio de Hausdorff.*

Para que un espacio regular X sea un espacio de Hausdorff es necesario y suficiente que los subconjuntos unitarios del espacio sean conjuntos cerrados. En otras palabras, un espacio regular es un espacio de Hausdorff si y sólo si es T_1. Los espacios que son simultáneamente regulares y T_1 reciben un tratamiento especial.

5.3.4 Definición. *Un espacio topológico es T_3 si es regular y T_1.*

Ahora tenemos que todo espacio T_3 es también un espacio T_2. Sin embargo, existen espacios de Hausdorff que no son espacios regulares y por lo tanto, que no son T_3.

5.3.5 EJEMPLO.
Sea τ la topología usual sobre el conjunto de los números reales y $\tau* = \tau \cup \{\mathbb{Q} \cap U : U \in \tau\}$. Se tiene que $\tau*$ es una topología sobre $\mathbb{R}$ y que $(\mathbb{R}, \tau*)$ es un espacio de Hausdorff que no es regular.

La siguiente proposición nos provee de dos caracterizaciones de los espacios regulares.

5.3.6 Proposición. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *X es un espacio regular.*
2. *Si U es un subconjunto abierto de X y $x \in U$, entonces existe un subconjunto abierto V de X tal que $x \in V$ y $\overline{V} \subset U$.*
3. *Cada punto de X posee un sistema fundamental de vecindades cerradas.*

Demostración.

1. $\Longrightarrow$ *2.* Si X es regular, si $U \subset X$ es abierto y si $x \in U$, entonces existen subconjuntos abiertos V y W de X, de tal manera que $V \cap W = \emptyset$, $x \in V$ y $X \smallsetminus U \subset W$. Sea $y \in \overline{V}$. Se tiene que $y \notin W$; de lo contrario W sería una vecindad de y sin puntos en común con V. Entonces $y \notin X \smallsetminus U$, luego $y \in U$. Se concluye que $\overline{V} \subset U$.

2. $\Longrightarrow$ *3.* Si $x \in X$ y O es una vecindad abierta de x, existe un subconjunto abierto V de X tal que $x \in V$ y $\overline{V} \subset O$. El conjunto $\overline{V}$ es una vecindad cerrada de x contenida en O.

3. $\Longrightarrow$ *1.* Si K es cerrado en X y $x \notin K$, entonces existe una vecindad cerrada M de x tal que $M \subset X \smallsetminus K$. Sean U una vecindad abierta de x contenida en M y $V = X \smallsetminus M$. Se tiene que $x \in U$, $K \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Esto prueba que X es un espacio regular.

□

Ejercicios 5.3

1. Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$. Pruebe que $(\mathbb{R}, \tau)$ es un espacio regular que no es un espacio de Hausdorff.
2. Pruebe que un espacio regular es un espacio de Hausdorff si y sólo si es T_1.
3. Determine si el plano de Moore es o no un espacio regular.

4. Sea τ la topología usual sobre el conjunto de los números reales y $\tau * = \tau \cup \{\mathbb{Q} \cap U : U \in \tau\}$.

   a) Pruebe que $\tau *$ es una topología sobre $\mathbb{R}$.

   b) Demuestre que $(\mathbb{R}, \tau *)$ es un espacio de Hausdorff.

   c) Demuestre que $(\mathbb{R}, \tau *)$ no es regular. (Sugerencia: observe que Q es abierto en $(\mathbb{R}, \tau *)$ y que ningún punto de Q se puede separar de $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ con conjuntos abiertos disyuntos.)

5. Demuestre que todo espacio métrico es T_3.

6. Demuestre que todo subespacio de un espacio regular (resp. T_3) es un espacio regular (resp. T_3).

7. Demuestre que un producto arbitrario de espacios regulares (resp. T_3) no vacíos es un espacio regular (resp. T_3), si y sólo si cada uno de los factores lo es.

8. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función abierta, cerrada, continua y sobreyectiva. Demuestre que si X es regulae, entonces Y también es regular.

5.4. Espacios completamente regulares y Espacios de Tychonoff

Hasta ahora hemos estudiado la posibilidad de que dos puntos distintos de un espacio topológico, o un conjunto cerrado y un punto fuera del conjunto, se puedan separar utilizando conjuntos abiertos disyuntos. En esta sección veremos que hay espacios topológicos en los que un conjunto cerrado y un punto fuera del conjunto se pueden separar utilizando una función continua definida del espacio en un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$.

5.4.1 EJEMPLO.
Sea (X, m) *un espacio métrico,* K *un subconjunto cerrado de* X *y* $x \in X \smallsetminus K$*. Hemos definido la distancia* $m(y, K)$ *de un punto* $y \in X$ *al conjunto* K *como el ínfimo de las distancias de* y *a los puntos de* K*, en otras palabras* $m(y, K) = \inf\{m(y, k) : k \in K\}$*.*

Consideremos la métrica d definida en X por

$$d(y,z) = \text{mín}\{m(y,z), m(x,K)\}.$$

La función d es una métrica sobre el conjunto X equivalente a m (nótese que $m(x,K) > 0$); y en la Proposición 1.2.3 se demostró la continuidad de la función $y \longmapsto d(y,K) : X \longrightarrow \mathbb{R}$, luego la correstricción f de esta función al intervalo $[0, m(x,K)]$ también es continua. Además, $f(k) = 0$ para todo $k \in K$ y $f(x) = m(x,K) > 0$.

En este sentido, la función continua f nos permitió separar el punto x del conjunto cerrado K.

La siguiente definición caracteriza los espacios topológicos que tienen esta propiedad de separación.

5.4.2 Definición. *Un espacio topológico X es* completamente regular *si para cada conjunto K cerrado en X y cada $x \in X \smallsetminus K$, existe una función continua f definida de X en el intervalo $[0,1]$ de $\mathbb{R}$, tal que $f(K) = 0$ y $f(x) = 1$.*

Es de anotar que el intervalo $[0,1]$ se puede reemplazar por cualquier intervalo cerrado $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. En este caso se pedirán las condiciones $f(K) = a$ y $f(x) = b$.

De manera inmediata aparece el siguiente resultado.

5.4.3 Proposición. *Si X es un espacio completamente regular, entonces X es regular.*

Demostración. Sean K cerrado en X y $x \in X \smallsetminus K$. Existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(K) = 0$ y $f(x) = 1$. Los conjuntos $f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$ y $f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ son abiertos en X, son disyuntos y además $K \subset f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$ y $x \in f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$. $\square$

La recíproca de esta proposición no es cierta. Existen espacios regulares que no son completamente regulares. Además, al igual que sucede con los espacios regulares, los espacios completamente regulares no necesariamente son espacios de Hausdorff, a menos que cada conjunto unitario en el espacio sea un conjunto cerrado. Esto es, a menos que además, el espacio sea T_1.

5.4.4 Definición. *Un espacio topológico X es un espacio* de Tychonoff *o $T_{3\frac{1}{2}}$ si es completamente regular y T_1.*

5.4.5 EJEMPLOS.

1. *Todo espacio métrico es un espacio de Tychonoff.*
2. *Sea τ la topología sobre $\mathbb{R}$ en la cual las vecindades básicas de cada número real $x \neq 0$ son los intervalos abiertos usuales centrados en x mientras que las vecindades básicas de 0 son los conjuntos de la forma $(-\epsilon, \epsilon) \cup (-\infty, -n) \cup (n, \infty)$, donde $\epsilon > 0$ y n es un entero positivo. El espacio $(\mathbb{R}, \tau)$ es un espacio de Tychonoff.*
3. *El plano de Moore es un espacio de Tychonoff.*

Algunas de las más notables propiedades de los espacios completamente regulares y de los espacios de Tychonoff se resumen en la siguiente proposición.

5.4.6 Proposición.

1. *Cada subespacio de un espacio completamente regular (resp. de un espacio de Tychonoff) es completamente regular. (resp. de Tychonoff).*
2. *Un producto no vacío de espacios topológicos es completamente regular (resp. de Tychonoff) si y sólo si cada factor es un espacio completamente regular (resp. un espacio de Tychonoff).*

Ejercicios 5.4

1. Demuestre o dé un contraejemplo que refute la siguiente afirmación: “todo espacio seudométrico es completamente regular”.
2. Demuestre que todo espacio métrico es un espacio de Tychonoff.

3. Sea τ la topología sobre $\mathbb{R}$ en la cual las vecindades básicas de cada número real $x \neq 0$ son los intervalos abiertos usuales centrados en x mientras que las vecindades básicas de 0 son los conjuntos de la forma $(-\epsilon, \epsilon) \cup (-\infty, -n) \cup (n, \infty)$, donde $\epsilon > 0$ y n es un entero positivo. Muestre que el espacio $(\mathbb{R}, \tau)$ es un espacio de Tychonoff.

4. Demuestre que el plano de Moore es un espacio de Tychonoff.

5. Demuestre que cada subespacio de un espacio completamente regular (resp. de un espacio de Tychonoff) es completamente regular. (resp. de Tychonoff).

6. Demuestre que un producto no vacío de espacios topológicos es completamente regular (resp. de Tychonoff) si y sólo si cada factor es un espacio completamente regular (resp. un espacio de Tychonoff).

7. Pruebe que un espacio topológico X es completamente regular si y sólo si tiene la topología inicial inducida por la familia $C^*(X)$ de funciones continuas y acotadas definidas de X en $\mathbb{R}$.

8. Cualquier producto de intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$ recibe el nombre de *cubo*. Pruebe que un espacio topológico X es un espacio de Tychonoff si y sólo si es homeomorfo a un subespacio de algún cubo. (Sugerencia: Si X es un espacio de Tychonoff, utilice el ejercicio anterior. Observe que cada función $f \in C^*(X)$ tiene como rango un subconjunto de un intervalo cerrado y acotado I_f y considere la función evaluación $e : X \longrightarrow \prod I_f$ definida por $[e(x)]_f = f(x)$).

5.5. Espacios normales

En las secciones anteriores estudiamos espacios topológicos en los que se pueden separar puntos distintos o puntos de conjuntos cerrados, utilizando conjuntos abiertos o funciones continuas. En los espacios topológicos que estudiaremos ahora, es posible separar dos conjuntos cerrados disyuntos.

5.5.1 Definición. *Un espacio topológico X es un espacio* normal *si dados F y K subconjuntos de X cerrados y disyuntos, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $F \subset U$, $K \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Un espacio es T_4 si es normal y T_1.*

Veamos algunos ejemplos.

5.5.2 EJEMPLOS.

1. *Todo espacio seudométrico es normal. En efecto, si* (X, d) *es un espacio seudométrico y* A *y* B *son subconjuntos cerrados y disyuntos de* X*, entonces para cada* $a \in A$ *existe* $\epsilon_a > 0$ *tal que* $B(a, \epsilon_a) \cap B = \emptyset$ *y para cada* $b \in B$ *existe* $\delta_b > 0$ *tal que* $B(b, \delta_b) \cap A = \emptyset$*. El conjunto* $U = \bigcup_{a \in A} B(a, \frac{\epsilon_a}{3})$ *es abierto y contiene a* A *y el conjunto* $V = \bigcup_{b \in B} B(b, \frac{\delta_b}{3})$ *es abierto y contiene a* B*. Ahora bien, si* $z \in U \cap V$ *entonces existen* $a \in A$ *y* $b \in B$ *de tal manera que* $d(a, z) < \frac{\epsilon_a}{3}$ *y* $d(z, b) < \frac{\delta_b}{3}$*. Supongamos que* $\epsilon_a \geq \delta_b$ *(en caso contrario, el razonamiento es análogo). Se tiene que* $d(a, b) \leq \frac{\epsilon_a}{3} + \frac{\delta_b}{3} < \epsilon_a$*. Entonces* $b \in B(a, \epsilon_a) \cap B$*, lo cual es imposible. Se concluye que* $U \cap V = \emptyset$ *y de aquí, que* X *es normal.*

2. *De las consideraciones anteriores se obtiene que todo espacio métrico es* T_4*.*

3. *Consideremos* $\mathbb{R}$ *con la topología de colas a derecha. Puesto que en este espacio no hay dos conjuntos no vacíos que sean cerrados y disyuntos, el espacio es normal; pero no es* T_4 *porque no es un espacio* T_1*.*

4. *Consideremos sobre* $\mathbb{R}$ *la topología* τ *para la cual las vecindades básicas de* x *son los intervalos de la forma* $[x, y)$ *con* $y > x$*. El espacio* $(\mathbb{R}, \tau)$ *es normal.*

5. *Recordemos que cualquier producto de intervalos cerrados y acotados en* $\mathbb{R}$ *es un cubo. En un capítulo posterior veremos que todo cubo es un espacio normal.*

Si un espacio normal no es T_1, es posible que no se puedan separar puntos de conjuntos cerrados. En otras palabras, un espacio normal puede no ser un espacio regular.

5.5.3 EJEMPLO.
Vimos que $\mathbb{R}$ con la topología de colas a derecha es un espacio normal. Por otro lado, si $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces todo conjunto abierto que contenga al conjunto cerrado $(-\infty, x_0 - 1]$ contiene también a x_0. Esto muestra que el espacio no es regular.

El siguiente lema debido a F. B. Jones permite determinar que ciertos espacios carecen de la propiedad de normalidad.

5.5.4 Lema. *(Jones) Si X contiene un subconjunto denso D y un subespacio cerrado y relativamente discreto S tal que $|S| \geq 2^{|D|}$, entonces X no es normal.*

Demostración. Supongamos que X es normal. Para cada subconjunto T de S, se tiene que T y $S \setminus T$ son subconjuntos cerrados en X y disyuntos, así, existen conjuntos $U(T)$ y $V(T)$ abiertos en X y disyuntos tales que $T \subset U(T)$ y $S \setminus T \subset V(T)$.
Si T_1 y T_2 son subconjuntos de S tales que $T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset$, entonces $U(T_1) \cap V(T_2)$ es un subconjunto no vacío y abierto de X, luego $U(T_1) \cap V(T_2) \cap D \neq \emptyset$. Se tiene que $U(T_1) \cap D$ y $U(T_2) \cap D$ son conjuntos distintos, puesto que $U(T_1) \cap V(T_2) \cap D \subset U(T_1) \cap D$, pero $(U(T_1) \cap V(T_2) \cap D) \cap (U(T_2) \cap D) = \emptyset$. Esto significa que si T_1 y T_2 son subconjuntos distintos de S, $U(T_1) \cap D$ y $U(T_2) \cap D$ son subconjuntos distintos de D, luego $|\mathcal{P}(S)| \leq |\mathcal{P}(D)|$. Esto contradice que $|S| \geq 2^{|D|}$. □

5.5.5 Observación.

1. *Un subespacio S de X es* relativamente discreto *si la topología que hereda de X es la topología discreta.*

2. *Si A es un conjunto, denotamos con $|A|$ el cardinal de A.*

5.5.6 EJEMPLO.
El Plano de Moore, Γ, no es un espacio normal. En efecto, consideremos $D = \{(x, y) \in \Gamma : x,\ y \in \mathbb{Q}\}$ y S el eje x. Se tiene que D es denso en Γ, S es cerrado y relativamente discreto, $|S| = \mathfrak{c}$ y D es un conjunto enumerable. Entonces $|S| \geq 2^{|D|}$.

Los espacios normales no poseen, en general, las propiedades que mencionamos para espacios con otras propiedades de separación, como lo muestran los siguientes ejemplos.

5.5.7 EJEMPLOS.

1. *El Plano de Moore no es un espacio normal, sin embargo, por ser un espacio de Tychonoff, es un subespacio de un cubo (ver ejercicio 8 de la sección 5.4), que sí es un espacio normal. Entonces, NO todo subespacio de un espacio normal es normal.*

2. *Sea X el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales con la topología τ para la cual las vecindades básicas de x son los intervalos de la forma $[x, y)$ con $y > x$. Hemos dicho que X es un espacio normal. Sin embargo, $X \times X$ no es normal. Es decir, el producto de espacios normales NO siempre es un espacio normal.*

Ejercicios 5.5

1. Demuestre que un espacio topológico X es normal si y sólo si para cada K subconjunto cerrado de X y cada subconjunto abierto U de X tal que $K \subset U$, existe un conjunto abierto V en X tal que $K \subset V$ y $\overline{V} \subset U$.

2. Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado y supongamos que $\leq$ no es la relación de igualdad. Recuerde que los conjuntos de la forma $\{x \in X : x < a\}$, donde $a \in X$, junto con los conjuntos de la forma $\{x \in X : a > x\}$, con $a \in X$, forman una subbase para una topología sobre X con la cual X es un espacio ordenado. Demuestre que todo espacio ordenado es T_4.

3. Consideremos sobre $X = \mathbb{R}$ la topología τ para la cual las vecindades básicas de x son los intervalos de la forma $[x, y)$ con $y > x$. Pruebe que el espacio (X, τ) es normal. ¿Es éste un espacio T_4?

4. Pruebe que si X es el espacio del ejercicio anterior, entonces $X \times X$ no es normal. (Sugerencia: Utilice el Lema de Jones.)

5. Demuestre que todo subespacio cerrado de un espacio normal (resp. de un espacio T_4) es normal (resp. T_4).

6. Suponga que X y Y son espacios topológicos y que $X \times Y$ es un espacio normal. ¿Son X y Y espacios normales? Justifique su respuesta con una demostración o con un contraejemplo.

5.6. El Lema de Urysohn y el Teorema de Extensión de Tietze

Entre los espacios regulares y los espacios completamente regulares hay una diferencia. En los espacios regulares un conjunto cerrado y un punto fuera del conjunto, se pueden separar utilizando conjuntos abiertos disyuntos, mientras que en los espacios completamente regulares, esta separación se puede hacer por medio de una función continua definida del espacio en el intervalo cerrado $[0,1]$. En esta sección veremos la relación entre la normalidad del espacio X y la existencia de funciones $f : X \longrightarrow [0,1]$ continuas que separen conjuntos no vacíos, cerrados y disyuntos.

En los espacios métricos tenemos el siguiente resultado:

5.6.1 Proposición. *Sea (X,d) un espacio métrico y sean A y B dos subconjuntos de X no vacíos, cerrados y disyuntos. Existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(A) = 0$, $f(B) = 1$.*

Demostración. La función $f : X \longrightarrow [0,1]$ definida por

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

es continua y además para cada $x \in A$ se tiene que

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)} = \frac{0}{0 + d(x,B)}$$

y para cada $x \in B$, se tiene que

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)} = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + 0} = 1.$$

□

Nuestros estudios previos, junto con el resultado anterior muestran que en los espacios métricos los conjuntos no vacíos, cerrados y disyuntos se pueden separar utilizando tanto conjuntos abiertos disyuntos, como funciones continuas. El siguiente lema caracteriza los espacios que gozan de la misma propiedad.

5.6.2 Lema. Lema de Urysohn. *Un espacio topológico* (X, τ) *es normal si y sólo si para cada par* A *y* B *de subconjuntos de* X *no vacíos, cerrados y disyuntos, existe una función continua* $f : X \longrightarrow [0,1]$ *tal que* $f(A) = 0$ *y* $f(B) = 1$.

Demostración. Supongamos inicialmente que X es normal y que A y B son subconjuntos de X no vacíos, cerrados y disyuntos. Para cada número racional en $[0,1]$ de la forma $\dfrac{p}{2^n}$, donde p y n son números naturales y $0 < p < 2^n$, construimos el conjunto $U_{\frac{p}{2^n}}$ de la siguiente manera:

1. El conjunto $U_{\frac{1}{2}}$ es un conjunto abierto en X tal que $A \subset U_{\frac{1}{2}}$ y $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \cap B = \emptyset$. Tal conjunto existe por la normalidad de X.

2. Puesto que A y $X \setminus U_{\frac{1}{2}}$ son conjuntos no vacíos, cerrados y disyuntos y además $\overline{U_{\frac{1}{2}}}$ y B son también no vacíos, cerrados y disyuntos, existen conjuntos abiertos $U_{\frac{1}{4}}$ y $U_{\frac{3}{4}}$ tales que
$$A \subset U_{\frac{1}{4}},\ \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{1}{2}},\ \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_{\frac{3}{4}},\ \text{ y }\ \overline{U_{\frac{3}{4}}} \cap B = \emptyset.$$

3. Ahora supongamos que se han definido conjuntos $U_{\frac{k}{2^n}}$, $k = 1, ..., 2^n - 1$ de tal manera que
$$A \subset U_{\frac{1}{2^n}}, ..., \overline{U_{\frac{k-1}{2^n}}} \subset U_{\frac{k}{2^n}}, ..., \overline{U_{\frac{2^n-1}{2^n}}} \cap B = \emptyset.$$
La normalidad de X garantiza que se puede continuar con el proceso y encontrar conjuntos $U_{\frac{k}{2^{n+1}}}$, para $k = 1, ..., 2^{n+1} - 1$ con las mismas propiedades. De manera inductiva, se tiene que para cada número racional r de la forma $r = \dfrac{k}{2^n}$, para algún $n > 0$ y $k = 1, ..., 2^n - 1$ (un número racional de esta forma se llama *racional diádico*), se puede construir un conjunto abierto U_r de tal manera que:
   a) $A \subset U_r$ y $\overline{U_r} \cap B = \emptyset$ para cada racional diádico r,
   b) $\overline{U_r} \subset U_s$ siempre que $r < s$.

4. Definimos la función $f : X \longrightarrow [0,1]$ de la siguiente manera:
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin U_r \text{ para cada racional diádico } r, \\ \inf\{r : x \in U_r\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

5. Veamos que f es una función continua. Sea $x \in X$.

   a) Si $f(x) = 1$, entonces $x \notin \overline{U_r}$ para cada racional diádico r. Sea $\epsilon > 0$ y r un racional diádico tal que $1 - \epsilon < r < 1$ (tal r existe porque el conjunto de números racionales diádicos es denso en $[0, 1]$). Si $y \in X \setminus \overline{U_r}$, entonces se tiene $1-\epsilon < r \leq f(y) \leq 1$. Esto demuestra la continuidad de f en x.

   b) Si $f(x) = 0$, si $\epsilon > 0$ y si r es un racional diádico tal que $0 < r < \epsilon$, entonces $x \in U_r$ y para cada $y \in U_r$ se tiene que $0 \leq f(y) \leq r < \epsilon$. Entonces f es continua en x.

   c) Si $0 < f(x) < 1$ y si $\epsilon > 0$, existen racionales diádicos $r < s$, tales que $f(x) - \epsilon < r < f(x) < s < f(x) + \epsilon$ y $x \in U_s \setminus \overline{U_r}$. Si $y \in U_s \setminus \overline{U_r}$, entonces $f(x) - \epsilon < r < f(y) \leq s < f(x) + \epsilon$. Esto prueba la continuidad de f en x.

6. Las construcciones hechas garantizan, de manera inmediata, que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.

Ahora supongamos que para cada A y B subconjuntos de X, no vacíos, cerrados y disyuntos, existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(A) = 0$, $f(B) = 1$. Se tiene que $U = f^{-1}\left[0, \frac{1}{2}\right)$ y $V = f^{-1}\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ son conjuntos abiertos disyuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Entonces X es un espacio normal. $\square$

Nótese que en el resultado anterior, se puede reemplazar el intervalo $[0, 1]$ por cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ con $a < b$.

El siguiente resultado es una nueva caracterización de los espacios normales e involucra la noción de *extensión* de una función continua. Comenzaremos entonces con una definición.

5.6.3 Definición. *Sean $A \subset X$ y $f : A \longrightarrow Y$ una función. La función $F : X \longrightarrow Y$ es una* extensiónn *de f si y sólo si $f(a) = F(a)$, para cada $a \in A$.*

No siempre es posible encontrar extensiones de funciones continuas. Por ejemplo la función $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ es una función continua que no se puede extender al intervalo $[0, 1]$.

El siguiente teorema caracteriza los espacios en los que siempre es posible extender a todo el espacio, funciones continuas definidas en un subespacio cerrado.

5.6.4 Teorema. Extensión de Tietze. *Un espacio topológico X es un espacio normal si y sólo si para cada subespacio cerrado L de X y cada función continua $f : L \longrightarrow [a,b]$, existe una extensión continua $F : X \longrightarrow [a,b]$ de f.*

Aquí, nuevamente en el lugar del intervalo cerrado $[a,b]$ se puede utilizar cualquier intervalo cerrado. En la prueba del Teorema utilizaremos el intervalo $[-1,1]$.

Demostración. Supongamos que X es normal, que L es un subespacio cerrado de X y que $f : L \longrightarrow [-1,1]$ es una función continua.
Consideremos los conjuntos cerrados y disyuntos

$$A_0 = f^{-1}\left(\left[-1,-\frac{1}{3}\right]\right)$$

y

$$B_0 = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{3},1\right]\right).$$

Por el lema de Urysohn existe una función continua $f_1 : X \longrightarrow [-1/3, 1/3]$ tal que $f_1(A_0) = -\frac{1}{3}$ y $f_1(B_0) = \frac{1}{3}$, luego para cada $x \in L$, $|f(x) - f_1(x)| \leq \frac{2}{3}$.
Definimos la función continua $g_1 : L \longrightarrow \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$ por $g_1 := f - f_1$.

Ahora consideremos los conjuntos cerrados y disyuntos $A_1 = g_1^{-1}\left(\left[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{9}\right]\right)$ y $B_1 = g_1^{-1}\left(\left[\frac{2}{9}, \frac{2}{3}\right]\right)$. Nuevamente el Lema de Urysohn garantiza que existe una función continua $f_2 : X \longrightarrow \left[-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right]$, tal que $f_2(A_1) = -\frac{2}{9}$ y $f_2(B_1) = \frac{2}{9}$ y además $|g_1(x) - f_2(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$, para $x \in L$; esto es, $|f(x) - (f_1(x) + f_2(x))| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

Continuando con este proceso, se obtiene una sucesión $f_1, f_2, ...$ de funciones continuas en L de tal manera que

$$\left| f - \sum_{i=1}^{n} f_i \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Definimos $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$.
Es inmediato que $F(x) = f(x)$ para cada $x \in L$. Veamos que F es una función continua. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Escogemos $N > 0$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{\epsilon}{2}$. Como f_i es continua para cada $i = 1, ..., N$, escogemos una vecindad abierta U_i de x, para cada $i = 1, ..., N$, tal que si $y \in U_i$, entonces $|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\epsilon}{2N}$. Se tiene que $U = U_1 \cap ... \cap U_N$ es una vecindad abierta de x en X y que si $y \in U$, entonces

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(y)| &\leq \sum_{i=1}^{N} |f_i(x) - f_i(y)| + \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\
&< N\frac{\epsilon}{2N} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Esto demuestra la continuidad de F.

De manera recíproca, si A y B son subconjuntos de X cerrados y disyuntos, $A \cup B$ es cerrado en X. La función $f : A \cup B \longrightarrow [0, 1]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

es continua. La extensión F de f a todo el espacio X es una función continua que satisface que $F(A) = 0$ y $F(B) = 1$. El Lema de Urysohn implica que X es un espacio normal. $\square$

Ejercicios 5.6

1. Suponga que A es un subconjunto cerrado de un espacio topológico X. Muestre que cualquier función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se puede extender a todo X.

2. Suponga que A es un subconjunto cerrado de un espacio métrico X. Muestre que cualquier función continua $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se puede extender a todo X. ¿Qué sucede si X no es un espacio métrico?

3. Encuentre una función continua definida de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en $[-1,1]$ que no se pueda extender a todo el plano $\mathbb{R}^2$.

5.7. Propiedades de enumerabilidad

En esta sección estudiaremos espacios topológicos en los que, gracias a propiedades de enumerabilidad, se pueden generalizar resultados propios de los espacios métricos. Comenzaremos con el Primer Axioma de Enumerabilidad.

5.7.1 Definición. *Un espacio topológico X es* 1-enumerable *si cada punto $x \in X$ tiene un sistema fundamental de vecindades enumerable.*

5.7.2 EJEMPLOS.

1. *Todo espacio métrico (X,d) es 1-enumerable. En efecto, para cada $x \in X$ la colección de bolas abiertas de la forma $B(x,r)$, donde r es un número racional positivo, es un sistema fundamental de x enumerable.*

2. *El Plano de Moore es un espacio 1-enumerable.*

3. *El conjunto de los números reales con la topología generada por los intervalos de la forma $(a,b]$ es un espacio 1-enumerable.*

4. *Cualquier subespacio de un espacio 1-enumerable es 1-enumerable.*

5. *El producto de cualquier colección enumerable de espacios 1-enumerables es 1-enumerable.*

5.7.3 Observación. *Nótese que si X es 1-enumerable, si $x \in X$, si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema fundamental de vecindades de x enumerable, y si consideramos $V_1 = B_1$, $V_2 = V_1 \cap B_1$, $V_3 = V_2 \cap B_2$ y de manera inductiva tomamos $V_{n+1} = V_n \cap B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema fundamental de vecindades de x enumerable que satisface que $V_{n+1} \subset V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

En los espacios 1-enumerables, las sucesiones permiten caracterizar la adherencia de un conjunto, así como las funciones continuas que tienen como dominio uno de estos espacios.

5.7.4 Proposición. *Sea X un espacio 1-enumerable.*

1. *Si $A \subset X$ entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión de elementos de A que converge a x.*

2. *Una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y sólo si para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a un punto x la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ en Y.*

Demostración.

1. Supongamos que $x \in \overline{A}$ y sea $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema fundamental de vecindades de x enumerable que satisface que $V_{n+1} \subset V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in A \cap V_n$. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene todos sus términos en A y converge a x.

   Recíprocamente, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en A que converge a x, entonces dada V una vecindad cualquiera de x, existe $N > 0$ tal que si $n > N$, $a_n \in V$. Entonces $A \cap V \neq \emptyset$ y $x \in \overline{A}$.

2. Supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a un punto $x \in X$ y sea V una vecindad de $f(x)$. La continuidad de f garantiza que $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x, luego existe $N > 0$ tal que para cada $n > N$, $x_n \in f^{-1}(V)$. Esto es, para cada $n > N$, $f(x_n) \in V$. Entonces, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.

   De manera recíproca, supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es una función tal que para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a un punto x, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ en Y y sea $x \in X$. Sea $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema fundamental de vecindades de x enumerable que satisface que $V_{n+1} \subset V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si f no es continua en x, existe una vecindad W de $f(x)$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \notin W$ para algún $a_n \in V_n$. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, pero $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(x)$. Esto contradice la hipótesis, luego f es continua en x para todo $x \in X$. $\square$

El segundo axioma de enumerabilidad que estudiaremos a continuación, se refiere a la cardinalidad de las bases de un espacio topológico.

5.7.5 Definición. *Un espacio topológico X es* 2-enumerable *si existe una base enumerable para la topología de X.*

Es inmediato que todo espacio 2-enumerable es 1-enumerable. Pero no todo espacio 1-enumerable es 2-enumerable, aún en el caso de los espacios métricos.

Veamos algunos ejemplos.

5.7.6 EJEMPLOS.

1. *El Plano de Moore no es un espacio 2-enumerable.*
2. *El conjunto de los números reales con la topología usual es un espacio 2-enumerable.*
3. *Cualquier subespacio de un espacio 2-enumerable es 2-enumerable.*
4. *El producto de cualquier colección enumerable de espacios 2-enumerables es 2-enumerable.*

Terminamos esta sección estudiando los espacios separables.
Antes de abordar la definición, recordemos que un subconjunto A de un espacio topológico X es denso en X si $\overline{A} = X$.

5.7.7 Definición. *Un espacio topológico X es* separable *si contiene un subconjunto denso enumerable.*

Los números reales con la topología usual son un ejemplo de un espacio separable, pero no todo espacio métrico tiene esta propiedad.

De la definición se obtiene que todo espacio X que sea 2-enumerable es separable. En efecto, si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base para la topología de X y si $b_n \in B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X; porque si $x \in X$ y V es una vecindad de x, existe $n \in N$ tal que $x \in B_n$ y $B_n \subset V$. Entonces $b_n \in V$.

Ejercicios 5.7

1. Pruebe que el Plano de Moore es un espacio 1-enumerable pero que no es 2-enumerable. ¿Es este espacio separable?

2. Pruebe que el conjunto de los números reales con la topología generada por los intervalos de la forma $(a, b]$ es un espacio 1-enumerable. ¿Es este espacio 2-enumerable? ¿Es separable?

3. Dé un ejemplo de un espacio métrico 1-enumerable que no sea 2-enumerable.

4. Pruebe que los números irracionales, con la topología heredada de $\mathbb{R}$, es un espacio separable (encuentre un subconjunto denso enumerable).

5. Dé un ejemplo de un espacio métrico que no sea separable.

6. Pruebe que cualquier subespacio de un espacio 1-enumerable (resp. 2-enumerable) es 1-enumerable (resp. 2-enumerable).

7. Pruebe que el producto de cualquier colección enumerable de espacios 1-enumerables (resp. 2-enumerable) es 1-enumerable (resp. 2-enumerable). ¿Qué ocurre si la colección no es enumerable?

8. ¿Es cada subespacio de un espacio separable también separable?

9. ¿Es el producto de una colección de espacios separables también separable?

10. Muestre que si X es 2-enumerable, entonces cualquier colección de subconjuntos abiertos y disyuntos de x es enumerable.

11. Sea X un espacio 2-enumerable. Pruebe que si $A \subset X$ es no enumerable, entonces la topología de subespacio de A no es la topología discreta.

12. Muestre que si X es un espacio métrico separable, entonces X es 2-enumerable.

Capítulo 6

Convergencia - Filtros

En este capítulo estudiaremos el concepto de *filtro*, que es más general que el concepto de sucesión y que permite formular una teoría de la convergencia mediante la cual es posible caracterizar todas las funciones continuas definidas en un espacio no necesariamente 1-enumerable.

Los filtros son además una herramienta muy eficaz en el tratamiento de diversos conceptos topológicos como la compacidad.

6.1. Filtros sobre un conjunto

6.1.1 Definición. *Un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(X)$ es un* filtro *sobre X, si cumple las siguientes propiedades:*

(F1) Todo subconjunto de X que contiene a un elemento de $\mathcal{F}$ pertenece a $\mathcal{F}$.

(F2) La intersección de dos elementos de $\mathcal{F}$ pertenece a $\mathcal{F}$.

(F3) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Nótese que por (F1) todo filtro sobre X contiene a X. En particular no existen filtros sobre el conjunto vacío $\emptyset$.

6.1.2 EJEMPLOS.

1. *Sea X un espacio topológico. El conjunto $\mathcal{V}(x)$ de todas las vecindades de un punto $x \in X$, es un filtro sobre X.*

2. *Si A es un subconjunto no vacío de un conjunto X, entonces $\mathcal{F} = \{F \subset X : A \subset F\}$ es un filtro sobre X.*

3. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un conjunto X. El conjunto $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X que contienen una cola de la sucesión es un filtro sobre X que se llama* el filtro elemental asociado a la sucesión. *Se tiene que $F \in \mathcal{F}$ si y sólo si, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in F$, para cada $n \geq p$.*

4. *$\mathcal{F} = \{F \subset \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus F$ es finito$\}$, es el filtro de Fréchet.*

5. *Si X es un conjunto infinito, $\mathcal{F} = \{F \subset X : X \setminus F$ es finito$\}$ es el* filtro de complementarios finitos *sobre X.*

6. *Si X es un espacio topológico, A es un subconjunto de X y a es adherente a A, entonces $\mathcal{F} = \{V \cap A : V \in \mathcal{V}(a)\}$ es un filtro sobre A.*

6.1.3 Definición. *Dados dos filtros $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ sobre el mismo conjunto X, se dice que $\mathcal{F}_1$ es* más fino *que $\mathcal{F}_2$ (o que $\mathcal{F}_2$ es* menos fino *que $\mathcal{F}_1$) si $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$.*

6.1.4 EJEMPLOS.

1. *Si τ_1 y τ_2 son dos topologías sobre X y τ_1 es más fina que τ_2, entonces para cada $x \in X$, el filtro $\mathcal{V}_1(x)$ de vecindades de x en la topología τ_1 es más fino que el filtro $\mathcal{V}_2(x)$ de vecindades de x en la topología τ_2.*

2. *Dada una familia de filtros $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ sobre un conjunto X, la intersección $\mathcal{F}$ de esta familia es también un filtro sobre X, menos fino que cada $\mathcal{F}_i$.*

3. *Si (y_n) es una subsucesión de una sucesión (x_n), el filtro elemental asociado a la subsucesión (y_n) es más fino que el filtro elemental asociado a (x_n).*

EJERCICIOS 6.1

1. Sea A un subconjunto no vacío de un conjunto X, pruebe que $\mathcal{F} = \{F \subset X : A \subset F\}$ es un filtro sobre X.

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un conjunto X. Pruebe que el conjunto

$$\mathcal{F} = \{F \subset X : \text{ existe } p \in \mathbb{N} \text{ con } a_n \in F, \text{ para cada } n \geq p\}$$

es un filtro sobre X.

3. Pruebe que el filtro de Fréchet es el filtro elemental asociado a una sucesión.

4. Sea X un conjunto infinito. Pruebe que

$$\mathcal{F} = \{F \subset X : X \smallsetminus F \text{ es finito}\}$$

es un filtro sobre X.

5. Sean X un espacio topológico, $A \subset X$ y $a \in \overline{A}$. Pruebe que

$$\mathcal{F} = \{V \cap A : V \in \mathcal{V}(a)\}$$

es un filtro sobre A.

6. Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto X. Pruebe que la colección $\tau = \mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$ es una topología sobre X. ¿Qué topología se obtiene si $\mathcal{F}$ es el filtro de complementarios finitos sobre $\mathbb{R}$?

7. Una topología τ sobre un conjunto X se dice *filtrosa* si $\tau \smallsetminus \{\emptyset\}$ es un filtro sobre X. ¿Cuáles de las siguientes topologías sobre $\mathbb{R}$ son filtrosas?

   a) La topología usual.

   b) La topología discreta.

   c) La topología grosera.

   d) La topología de los complementos finitos.

8. Sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre X tales que $\tau_2 \subset \tau_1$. Pruebe que para cada $x \in X$, el filtro $\mathcal{V}_1(x)$ de vecindades de x en la topología τ_1 es más fino que el filtro $\mathcal{V}_2(x)$ de vecindades de x en la topología τ_2.

9. Sea $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ una familia de filtros sobre un conjunto X. Pruebe que la intersección $\mathcal{F}$ de esta familia es también un filtro sobre X, menos fino que $\mathcal{F}_i$, para cada $i \in I$.

10. Pruebe que si (y_n) es una subsucesión de una sucesión (x_n), el filtro elemental asociado a la subsucesión (y_n) es más fino que el filtro elemental asociado a (x_n).

11. Sea X un espacio topológico. Diremos que un subconjunto A de X es un *cero-conjunto* si $A = f^{-1}(0)$ para alguna función continua f definida de X en $\mathbb{R}$. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, donotamos por $Z(f)$ al cero-conjunto $f^{-1}(0)$. Por $Z[X]$ denotamos la colección de todos los subconjuntos de X que son cero-conjuntos.

    a) Pruebe que tanto las uniones finitas, como las intersecciones finitas de cero-conjuntos son cero-conjuntos.

    b) Demuestre que si $A = f^{-1}(0)$ y $B = g^{-1}(0)$ son cero-conjuntos disyuntos, entonces existen cero-conjuntos C y D con $A \subset C^c$, $B \subset D^c$ y tales que $C^c \cap D^c = \emptyset$.

    (Sugerencia: Considere las funciones

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{si } f(x) \geq g(x) \\ 0 & \text{si } g(x) < f(x) \end{cases}$$

    y

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x) - f(x) & \text{si } g(x) \geq f(x) \\ 0 & \text{si } f(x) < g(x) \end{cases}$$

    y los cero-conjuntos $C = Z(f_1)$ y $D = Z(g_1)$.)

12. Un *z-filtro* sobre un espacio topológico X es un subconjunto no vacío $\mathcal{F}$ de $Z[X]$ que satisface las siguientes condiciones:

    i $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

    ii si $A,\ B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$,

    iii si $A \in \mathcal{F}$ y si B es un cero-conjunto tal que $A \subset B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

a) Demuestre con un ejemplo que que no todo z-filtro sobre un espacio X es un filtro sobre X.

b) Demuestre con un ejemplo que que no todo filtro sobre un espacio X es un z-filtro sobre X.

c) Demuestre que si X es un espacio discreto, entonces un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ es un filtro sobre X si y sólo si es un z-filtro.

d) Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un espacio X. Demuestre que $\mathcal{F}_Z = \mathcal{F} \cap Z[X] = \{F \in Z[X] : F \in \mathcal{F}\}$ es un z-filtro sobre X. Diremos que $\mathcal{F}_Z$ es el *z-filtro generado por* $\mathcal{F}$.

6.2. Bases y sub-bases para un filtro

Tal como sucede con una topología sobre un conjunto X, es posible generar un filtro sobre X si se conoce una base.

6.2.1 Definición. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre un conjunto X y $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, se dice que $\mathcal{B}$ es una* base *de $\mathcal{F}$, si para cada $F \in \mathcal{F}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset F$.*

6.2.2 EJEMPLOS.

1. *Si $\mathcal{V}(x)$ es el filtro de vecindades de un punto x en un espacio topológico X, todo sistema fundamental de vecindades de x constituye una base de $\mathcal{V}(x)$.*

2. *Si A es un subconjunto no vacío de un conjunto X, entonces $\mathcal{B} = \{A\}$ es una base del filtro $\mathcal{F} = \{F \subset X : A \subset F\}$.*

3. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un conjunto X. Para cada $p \in \mathbb{N}$, sea $A_p = \{a_n : n \geq p\}$, entonces $\mathcal{B} = \{A_p : p \in \mathbb{N}\}$ es una base del filtro elemental asociado a la sucesión.*

6.2.3 Observación. *Una base $\mathcal{B}$ de un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X satisface las siguientes propiedades:*

(BF1) *La intersección de dos elementos de $\mathcal{B}$ contiene un elemento de $\mathcal{B}$.*

(BF2) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ *y* $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

Recíprocamente, tenemos la siguiente proposición.

6.2.4 Proposición. *Si $\mathcal{B}$ es una colección de subconjuntos de X que satisface (BF1) y (BF2) entonces*

$$[\mathcal{B}] = \{F \subset X : B \subset F \text{ para algún } B \in \mathcal{B}\}$$

es un filtro sobre X y $\mathcal{B}$ es una base de $[\mathcal{B}]$.

6.2.5 Observación. *Una colección de subconjuntos $\mathcal{B}$ que satisface las dos condiciones (BF1) y (BF2) de la proposición anterior se llama* base de filtro, *el filtro $[\mathcal{B}]$ definido en la proposición anterior a partir de la colección $\mathcal{B}$ se llama el* filtro generado por la base de filtro $\mathcal{B}$.

6.2.6 Definición. *Un subconjunto $\mathcal{S}$ de un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X, se dice* sub-base *de $\mathcal{F}$ si el conjunto $\mathcal{S}'$ de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ (incluyendo a X) es una base de $\mathcal{F}$.*

6.2.7 EJEMPLOS.

1. *$\mathcal{S} = \{\mathbb{N} \setminus \{p\} : p = 1, 2, \ldots\}$ es una sub-base del filtro de Fréchet.*
2. *Sea $(a_n)_n$ una sucesión de elementos de X y $S_p = \{a_n : n \neq p\}$. Entonces $\mathcal{S} = \{S_p : p = 1, 2, \ldots\}$ es una sub-base del filtro elemental asociado a la sucesión.*
3. *Todo filtro es base de filtro y toda base de filtro es también sub-base de filtro.*

La siguiente proposición caracteriza las sub-bases de filtros sobre un conjunto X.

6.2.8 Proposición. *Si $X \neq \emptyset$, un subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}(X)$ es una sub-base de un filtro sobre X, si y solamente si, cada intersección finita de elementos de $\mathcal{S}$ es no vacía.*

Demostración. Como $\mathcal{S}' \neq \emptyset$, el conjunto $\mathcal{S}'$ satisface (BF1) y (BF2). $\square$

6.2.9 Definición. *Si $\mathcal{S}$ es una sub-base de un filtro sobre un conjunto X, el filtro $\mathcal{S}''$ constituido por los subconjuntos F de X que contienen a algún elemento de $\mathcal{S}'$ se llama el* filtro generado por $\mathcal{S}$.

Supongamos que $\mathcal{B}$ es una base de filtro sobre un conjunto X y que $f : X \longrightarrow Y$ es una función. Tenemos que $f(\mathcal{B})$ satisface (BF1) ya que $f(B_3) \subset f(B_1 \cap B_2) \subset f(B_1) \cap f(B_2)$ si $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ y satisface (BF2) ya que $f(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ y $f(B) \neq \emptyset$ si $B \neq \emptyset$.
Esto demuestra el siguiente resultado.

6.2.10 Proposición. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función y $\mathcal{B}$ una base de filtro sobre X entonces $f(\mathcal{B}) = \{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es una base de filtro sobre Y.*

6.2.11 EJEMPLO. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función constante de valor c, entonces $f(\mathcal{B}) = \{\{c\}\}$, para cada base de filtro $\mathcal{B}$ sobre X.*

6.2.12 Proposición. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función y $\mathcal{B}$ una base de filtro sobre Y de tal manera que, para cada $B \in \mathcal{B}$, $B \cap f(X) \neq \emptyset$, entonces $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es una base de filtro sobre X.*

Demostración. $f^{-1}(B_3) \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$, si $B_3 \subset B_1 \cap B_2$, entonces $f^{-1}(\mathcal{B})$ satisface (BF1). La hipótesis $B \cap f(X) \neq \emptyset$, asegura que $f^{-1}(B) \neq \emptyset$, luego $f^{-1}(\mathcal{B})$ también satisface (BF2). □

Ejercicios 6.2

1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un conjunto X y para cada $p \in \mathbb{N}$, sea $A_p = \{a_n : n \geq p\}$. Pruebe que $\mathcal{B} = \{A_p : p \in \mathbb{N}\}$ es una base del filtro elemental asociado a la sucesión.

2. Pruebe que si $\mathcal{B}$ es una colección de subconjuntos de X que satisface las condiciones

(BF1) la intersección de dos elementos de $\mathcal{B}$ contiene un elemento de $\mathcal{B}$;

(BF2) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{B}$, entonces $[\mathcal{B}] = \{F \subset X : B \subset F \text{ para algún } B \in \mathcal{B}\}$ es un filtro sobre X y $\mathcal{B}$ es una base de $[\mathcal{B}]$.

3. Pruebe que $\mathcal{S} = \{\mathbb{N} \setminus \{p\} : p = 1, 2, \dots\}$ es una sub-base del filtro de Fréchet.

4. Sea $(a_n)_n$ una sucesión de elementos de X y $S_p = \{a_n : n \neq p\}$ para cada $p = 1, 2, \dots$. Pruebe que $\mathcal{S} = \{S_p : p = 1, 2, \dots\}$ es una sub-base del filtro elemental asociado a la sucesión.

5. Sean $\mathcal{B}$ una base de filtro sobre un conjunto X, $f : X \longrightarrow Y$ una función. Pruebe que si se consideran X con la topología $[\mathcal{B}] \cup \{\emptyset\}$ y Y con la topología $[f(\mathcal{B})] \cup \{\emptyset\}$, entonces f es una función continua.

6.
   a) Pruebe que todo z-filtro $\mathcal{F}$ sobre un espacio X es base para un filtro $\mathcal{G}$ sobre X y que además $\mathcal{G}_Z = \mathcal{G} \cap Z[X] = \mathcal{F}$.

   b) Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un espacio X. Pruebe que el filtro generado sobre X por el z-filtro $\mathcal{F}_Z$ es menos fino que $\mathcal{F}$.

6.3. Convergencia de filtros

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio topológico X, convergente a un punto $a \in X$. Dada una vecindad V de a en X, existe $N > 0$ tal que $a_n \in V$ para cada $n \geq N$. Esto significa que cada vecindad de a contiene una cola de la sucesión. En otras palabras, cada vecindad de a pertenece al filtro elemental asociado a la sucesión, o lo que es lo mismo, el filtro elemental asociado a la sucesión es más fino que el filtro de vecindades de a. Diremos que el filtro elemental asociado a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto a.

6.3.1 Definición. *Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X converge a un punto $x \in X$ (o x es un* punto límite *de $\mathcal{F}$) si $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro de vecindades de x.*
Se dice que una base de filtro $\mathcal{B}$ converge *al punto x, si el filtro $[\mathcal{B}]$ generado por $\mathcal{B}$ converge a x.*

El siguiente resultado da un criterio para determinar cuándo una base de filtro converge a un punto.

6.3.2 Proposición. *En un espacio topológico X, una base de filtro $\mathcal{B}$ converge a un punto x, si y sólo si, toda vecindad fundamental de x contiene a un elemento de $\mathcal{B}$.*

6.3.3 EJEMPLO.
Sean $X = \mathbb{R}$, $x_n = 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{F}$ el filtro asociado a la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. *Si consideramos la topología usual sobre $\mathbb{R}$, 0 es el único punto límite del filtro $\mathcal{F}$.*

2. *Para la topología de complementarios finitos sobre X, todo elemento de X es punto límite de $\mathcal{F}$.*

3. *Para la topología de las colas a la derecha, $(-\infty, 0]$ es el conjunto de los puntos límites de $\mathcal{F}$.*

4. *Para la topología discreta $\mathcal{F}$ no tiene puntos límites.*

El siguiente resultado caracteriza los espacios de Hausdorff en términos de la convergencia de filtros.

6.3.4 Proposición. *Un espacio topológico X es un espacio de Hausdorff, si y sólo si todo filtro $\mathcal{F}$ sobre X converge a lo más a un punto.*

Demostración. Supongamos que el filtro $\mathcal{F}$ converge a dos puntos distintos x y y en X. Si V y W son vecindades de x y y respectivamente, entonces, puesto que V y W son elementos de $\mathcal{F}$, $V \cap W \neq \emptyset$. Esto significa que X no es un espacio de Hausdorff.
De manera recíproca, si x y y son puntos de distintos de X tales que $V \cap W \neq \emptyset$ para cada par V, W de vecindades de x y y respectivamente, entonces $\mathcal{F} = \{V \cap W : V \in \mathcal{V}(x) \text{ y } W \in \mathcal{V}(y)\}$ es una base de filtro sobre X que converge simultáneamente a x y a y.
Esto completa la demostración. □

Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología usual y consideremos la sucesión $x_n = (-1)^n + 1/n$. Aunque esta sucesión no converge en $\mathbb{R}$ existen dos números reales, -1 y 1 con una característica especial: cada uno de ellos es un punto adherente a cada elemento del filtro elemental asociado a la sucesión.

6.3.5 Definición. *Sea X un espacio topológico. Un punto $x \in X$ es* adherente *a una base de filtro $\mathcal{B}$, si x es adherente a cada elemento de $\mathcal{B}$.*

6.3.6 Observación. *Un punto x de un espacio topológico X, es adherente a una base de filtro $\mathcal{B}$ si y sólo si, la intersección de cada vecindad fundamental de x con cada elemento de $\mathcal{B}$ es no vacía.*

6.3.7 EJEMPLOS.

1. *Todo punto límite de un filtro $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X es también un punto adherente.*

2. *Sean $X = \mathbb{R}$, $x_n = (-1)^n + 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{F}$ el filtro elemental asociado a la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

   a) *Para la topología usual sobre X los puntos adherentes a $\mathcal{F}$ son -1 y 1, pero no hay ningún punto límite.*

   b) *Con la topología de complementarios finitos, todo punto es un punto límite y por consiguiente también un punto adherente.*

   c) *Con la topología de las colas a la derecha, el conjunto de los puntos adherentes es $(-\infty, 1]$ y el conjunto de los puntos límites es $(-\infty, -1]$.*

   d) *Para la topología discreta sobre X no hay ningún punto adherente.*

3. *En un espacio 1-enumerable X, un punto $x \in X$ es adherente al filtro elemental asociado a una sucesión si y sólo si la sucesión tiene una subsucesión que converge a x (Recuerde que si $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow X$ es una sucesión en X y $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente, entonces $\alpha \circ \beta : \mathbb{N} \longrightarrow X$ es una subsucesión de α).*

6.3.8 Proposición. *En un espacio topológico X, un punto $x \in X$ es adherente a un filtro $\mathcal{F}$ si y sólo si, existe sobre X un filtro más fino que $\mathcal{F}$ que converge a x.*

Demostración. Si x es un punto adherente al filtro $\mathcal{F}$, entonces el conjunto $\mathcal{G} = \{F \cap V : F \in \mathcal{F} \text{ y } V \in \mathcal{V}(x)\}$ genera un filtro sobre X más fino que $\mathcal{F}$ y que $\mathcal{V}(x)$.
Recíprocamente, si $\mathcal{G}$ es un filtro más fino que $\mathcal{F}$ convergente a x, entonces para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ y para cada cada $F \in \mathcal{F}$, $V \cap F \in \mathcal{G}$, en particular $V \cap F \neq \emptyset$, entonces x es adherente a $\mathcal{F}$. □

6.3.9 Definición. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función de un conjunto X en un espacio topológico Y y sea $\mathcal{B}$ una base de filtro sobre X. Se dice que $y \in Y$ es un* punto límite *de f con respecto a la base de filtro $\mathcal{B}$ si y sólo si, y es un punto límite de la base de filtro $f(\mathcal{B})$. En este caso se escribe* $\text{lím}_{\mathcal{B}} f = y$.

6.3.10 Proposición. *Un punto $y \in Y$ es límite de f con respecto a la base de filtro $\mathcal{B}$ si y sólo si, para cada vecindad V de y en Y, existe $F \in \mathcal{B}$ tal que $f(F) \subset V$, esto es, $f^{-1}(V)$ pertenece al filtro generado por $\mathcal{B}$, para cada vecindad V de y.*

6.3.11 Observación. *Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \longrightarrow Y$ una función de X en Y, $\mathcal{V}(c)$ el filtro de vecindades en X de un punto $c \in X$. En lugar de decir que $y \in Y$ es límite de f con respecto al filtro $\mathcal{V}(c)$, diremos que y es límite de f en el punto c, o bien que $f(x)$ tiende a y, cuando x tiende c y escribimos* $\text{lím}_{x \to c} f(x) = y$. *Si $\{c\}$ no es un conjunto abierto de X, i.e., si c no es un punto aislado de X, $\mathcal{B} = \{V \smallsetminus \{c\} : V \in \mathcal{V}(c)\}$ es una base de filtro sobre X. Si y es límite de f con respecto a $\mathcal{B}$, escribimos en este caso* $\text{lím}_{x \to c, x \neq c} f(x) = y$.

6.3.12 Proposición. *Una función $f : X \longrightarrow Y$, de un espacio topológico X en un espacio topológico Y, es continua en un punto $a \in X$, si y sólo si* $\text{lím}_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Demostración. Nótese que $\text{lím}_{x \to a} f(x) = f(a)$, si y sólo si, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$ para cada vecindad $V \in \mathcal{V}(f(a))$ en Y, si y sólo si, f es continua en a. □

6.3.13 EJEMPLO.
Sean X un conjunto no enumerable y X', X'' los espacios topológicos obtenidos al dotar a X con las topologías discreta y de complementos enumerables respectivamente. La aplicación idéntica $f : X'' \longrightarrow X'$ que no es continua, sí es secuencialmente continua para cada $x \in X$, es decir, si una sucesión de elementos de X converge a x en X', la sucesión de sus imágenes converge a $f(x)$ en X''.
En efecto, si $(x_n)_n$ tiende a x (cuando $n \to \infty$) en X'', existe $p \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq p$ entonces $x_n \in X \setminus \{x_k : x_k \neq x\}$, es decir, $n \geq p \implies x_n = x$. Pero esta sucesión también converge a x en X'.

Ejercicios 6.3

1. Determine los filtros que convergen a un punto x en un espacio discreto.
2. Determine los filtros que convergen a un punto x en un espacio con topología grosera.
3. Pruebe que si la topología de un espacio X es filtrosa, entonces X no es metrizable. Esto es, ninguna métrica definida sobre X genera su topología.
4. En un espacio topológico X, una base de filtro $\mathcal{B}$ converge a un punto x, si y sólo si, toda vecindad fundamental de x contiene a un elemento de $\mathcal{B}$.
5. Demuestre que un filtro $\mathcal{F}$ tiene un punto adherente x, si y sólo si existe un filtro $\mathcal{G}$ más fino que $\mathcal{F}$, que converge a x.
6. Demuestre que un espacio topológico X es un espacio de Hausdorff si y sólo si todo filtro sobre X convergente, tiene un único punto adherente.
7. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Demuestre que $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe un filtro $\mathcal{F}$ en X tal que $A \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ converge a x.
8. Pruebe que en un espacio 1-enumerable X, un punto $x \in X$ es adherente al filtro elemental asociado a una sucesión si y sólo si, existe una subsucesión (de la sucesión dada) que converge a x. ¿Qué ocurre si el espacio no es 1-enumerable?

9. Sean X y Y espacios topológicos, $\mathcal{B}$ una base de filtro sobre X y $f : X \longrightarrow Y$. Demuestre que un punto $y \in Y$ es límite de f con respecto a la base de filtro $\mathcal{B}$ si y sólo si, para cada vecindad V de y en Y, existe $F \in B$ tal que $f(F) \subset V$, esto es, $f^{-1}(V)$ pertenece al filtro generado por $\mathcal{B}$, para cada vecindad V de y.

10. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Demuestre que f es continua en un punto $a \in X$, si y sólo si para cada base de filtro $\mathcal{B}$ sobre X que converge a a, se tiene que la base de filtro $f(\mathcal{B})$ converge a $f(a)$ en Y.

11. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Pruebe que una base de filtro $\mathcal{B}$ converge a un punto $x = (x_i) \in \prod_{i\in I} X_i$, si y sólo si la base de filtro $\pi_i(\mathcal{B})$ converge a x_i en X_i, para cada $i \in I$.

12.

    Un z-filtro $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X *converge a un punto* $x \in X$ (o x es un *punto límite* de $\mathcal{F}$) si cada vecindad de x contiene a un elemento de $\mathcal{F}$. Un punto x es *adherente* al z-filtro $\mathcal{F}$ si es adherente a cada elemento de $\mathcal{F}$.

    a) Demuestre que si X es un espacio de Hausdorff, entonces un z-filtro converge a lo más a un punto de X.

    b) Demuestre que un z-filtro tiene puntos adherentes, si y sólo si la intesección de sus elementos es no vacía.

6.4. Ultrafiltros

Los filtros maximales juegan un papel fundamental en nuestros estudios posteriores. Con el fin de probar la existencia de filtros maximales utilizaremos en esta sección el conocido Lema de Zorn, equivalente al Axioma de Elección.

6.4.1 Lema. (Zorn). *Si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada subconjunto de X totalmente ordenado por la relación $\leq$ tiene una cota superior en X, entonces X tiene un elemento maximal.*

La colección de todos los filtros definidos sobre un conjunto no vacío X es un conjunto parcialmente ordenado por la relación de inclusión. Los filtros maximales sobre un conjunto X reciben el nombre de *ultrafiltros*.

6.4.2 Definición. *Un* ultrafiltro *sobre un conjunto X, es un filtro $\mathcal{U}$ sobre X tal que no existe ningún filtro sobre X estrictamente más fino que $\mathcal{U}$.*

6.4.3 EJEMPLO.
Si X es un conjunto no vacío y $a \in X$, $\mathcal{F} = \{F \subset X : a \in F\}$ es un ultrafiltro sobre X llamado ultrafiltro principal.

6.4.4 Lema. *Si $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ es una familia totalmente ordenada de filtros sobre un conjunto X, entonces la unión $\mathcal{F}$ de la familia es también un filtro sobre X.*

6.4.5 Proposición. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro X, el conjunto $\mathbf{\Phi}$ constituido por todos los filtros $\mathcal{G}$ sobre X más finos que $\mathcal{F}$ satisface que todo subconjunto totalmente ordenado tiene una cota superior.*

Demostración. Todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathbf{\Phi}$ tiene como extremo superior en $\mathbf{\Phi}$ a la unión de todos los filtros que pertenecen al subconjunto en cuestión. $\square$

Aplicando el Lema de Zorn al conjunto ordenado $\mathbf{\Phi}$ de todos los filtros ordenados sobre X que contienen a $\mathcal{F}$ obtenemos el siguiente resultado.

6.4.6 Proposición. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X más fino que $\mathcal{F}$.*

Las siguientes proposiciones muestran la propiedades más relevantes de los ultrafiltros.

6.4.7 Proposición. *Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X y $K,\ L \subset X$ tales que $K \cup L \in \mathcal{U}$, entonces $K \in \mathcal{U}$, o $L \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Supongamos que $K \notin \mathcal{U}$ y $L \notin \mathcal{U}$. Se tiene que $\mathcal{G} = \{G \subset X : K \cup G \in \mathcal{U}\}$ es un filtro sobre X estrictamente más fino que $\mathcal{U}$ porque $L \in \mathcal{G}$, lo cual contradice la maximalidad de $\mathcal{U}$. $\square$

6.4.8 Proposición. *Si la unión $K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_p$ de un número finito de subconjuntos de X pertenece a un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X, entonces por lo menos uno de los K_i pertenece a $\mathcal{U}$.*

6.4.9 Proposición. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto X, tal que para todo subconjunto K de X, $K \in \mathcal{F}$ o $X \setminus K \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre X.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un filtro que contiene a $\mathcal{F}$. Veamos que $\mathcal{U} = \mathcal{F}$. Si $F \in \mathcal{U}$ entonces $X \setminus F \notin \mathcal{U}$, luego $X \setminus F \notin \mathcal{F}$ y por lo tanto $F \in \mathcal{F}$. $\square$

Las demostraciones de los dos siguientes resultados se proponen como ejercicio.

6.4.10 Proposición. *Todo filtro sobre X es la intersección de todos los ultrafiltros sobre X más finos que $\mathcal{F}$.*

6.4.11 Proposición. *Para que un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre un conjunto X induzca un filtro sobre un subconjunto A de X, es necesario y suficiente que $A \in \mathcal{U}$; si se cumple esta condición, el filtro inducido $\mathcal{U}_A$ es un ultrafiltro sobre A.*

6.4.12 Proposición. *Si $\mathcal{B}$ es una base de ultrafiltro sobre un conjunto X y f es una aplicación de X en Y, entonces $f(\mathcal{B})$ es una base de ultrafiltro sobre Y.*

Demostración. Sea $K \subset Y$. Consideremos $f^{-1}(K)$ y su complemento $X \setminus f^{-1}(K)$. Necesariamente uno de estos dos conjuntos pertenece al ultrafiltro $\mathcal{U}$ generado por $\mathcal{B}$. En consecuencia existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset f^{-1}(K)$ o bien existe $B' \in \mathcal{B}$ tal que $B' \subset X \setminus f^{-1}(K)$. En el primer caso $f(B) \subset K$, en el segundo caso $f(B') \subset f(X \setminus f^{-1}(K)) = f(f^{-1}(Y \setminus K)) \subset Y \setminus K$. Por lo tanto, o bien K pertenece al filtro generado por $f(\mathcal{B})$, o bien $Y \setminus K$ pertenece al filtro generado por $f(\mathcal{B})$. Entonces este filtro es un ultrafiltro. $\square$

EJERCICIOS 6.4

1. Pruebe que si X es un conjunto no vacío y $a \in X$, entonces $\mathcal{F} = \{F \subset X : a \in F\}$ es un ultrafiltro sobre X.

2. Pruebe que todo ultrafiltro sobre un espacio topológico finito es convergente.

3. Pruebe que si la unión $K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_p$ de un número finito de subconjuntos de X pertenece a un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X, entonces por lo menos uno de los K_i pertenece a $\mathcal{U}$ (Sugerencia: utilice inducción sobre p).

4. Pruebe que todo filtro sobre X es la intersección de todos los ultrafiltros sobre X mas finos que $\mathcal{F}$.

5. Pruebe que para que un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre un conjunto X induzca un filtro sobre un subconjunto A de X, es necesario y suficiente que $A \in \mathcal{U}$ y que si se cumple esta condición, el filtro inducido $\mathcal{U}_A$ es un ultrafiltro sobre A.

6. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos z-filtros sobre un espacio topológico X. Decimos que $\mathcal{F}$ es *más fino* que $\mathcal{G}$ (o que $\mathcal{G}$ es *menos fino* que $\mathcal{F}$) si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. "Ser más fino que" determina una relación de orden en la clase de z-filtros sobre X. Los z-filtros maximales reciben el nombre de *z-ultrafiltros*.

   a) Pruebe que todo z-filtro está contenido en un z-ultrafiltro.

   b) Demuestre que para cada $x \in X$, el z-filtro principal $\langle x \rangle_Z = \{F \in Z[X] : x \in F\}$ es un z-ultrafiltro.

   c) Demuestre que un z-filtro sobre X es un z-ultrafiltro, si y sólo si, para cada cero-conjunto A que satisface que $A \cap B \neq \emptyset$, para cada $B \in \mathcal{F}$, se tiene que $A \in \mathcal{F}$.

   d) Demuestre que si X es un espacio completamente regular, entonces el z-ultrafitro principal $\langle x \rangle_Z$ converge a x.

   e) Un z-filtro $\mathcal{F}$ sobre X es *primo* si para cada par A, B de cero-conjuntos que satisface que $A \cup B \in \mathcal{F}$, se tiene que $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$. Demuestre que todo z-ultrafiltro es primo, pero que no todo z-filtro primo es un z-ultrafiltro.

f) Demuestre que todo z-filtro primo está contenido en un único z-ultrafiltro. (Sugerencia: Suponga que un z-filtro primo está contenido en dos z-ultrafiltros distintos. Considere cero conjuntos disyuntos, uno en cada z-ultrafiltro y aplique el numeral 11b de los ejercicios 6.1.)

Capítulo 7

Espacios compactos

Los espacios compactos son los espacios topológicos más accesibles, manejables y útiles, porque sin ser necesariamente finitos son una generalización de ellos y comparten su simplicidad, comportamiento predecible y belleza, no obstante, son lo suficientemente generales para soportar importantes desarrollos teóricos y aplicados.

En este capítulo estudiaremos los espacios compactos desde un punto de vista diferente al de la mayoría de los autores. Aunque definiremos los espacios compactos en términos de cubrimientos, demostraremos varias de sus propiedades utilizado una caracterización esencialmente categórica de compacidad debida a Kuratowski-Mrówka.

7.1. Espacios Compactos

Para comenzar consideremos como ejemplo el conjunto de los números reales y la colección $\mathcal{C}$ de todos los intervalos de la forma $(x-1, x+1)$ con x un número racional. Cada número real pertenece por lo menos a uno de estos intervalos. Decimos que esta colección es un cubrimiento de $\mathbb{R}$.

7.1.1 Definición. *Una colección* $\mathcal{C}$ *de subconjuntos de un espacio topológico* X *es un* cubrimiento *de* X*, si* $\bigcup \mathcal{C} = X$*. Si cada elemento de* $\mathcal{C}$ *es un conjunto abierto en* X *decimos que* $\mathcal{C}$ *es un* cubrimiento abierto *de* X*.*
Si $\mathcal{C}$ *es un cubrimiento de* X*, un subcubrimiento es una subcolección* $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ *tal que* $\bigcup \mathcal{A} = X$*. De manera natural diremos que un subcubrimiento* $\mathcal{A}$ *es finito si tiene un número finito de elementos.*

La colección $\mathcal{A}$ de todos los intervalos de la forma $(n-1, n+1)$, donde $n \in \mathbb{N}$, es un subcubrimiento del cubrimiento abierto $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}$, dado al comienzo de esta sección.

La siguiente definición es el eje central de nuestro actual estudio.

7.1.2 Definición. *Un espacio topológico* X *es* compacto *si todo cubrimiento abierto de* X *tiene un subcubrimiento finito.*

7.1.3 Observación. *Nótese que si* X *es un espacio topológico y* $\mathcal{B}$ *es una base para la topología de* X*, entonces* X *es compacto si y sólo si todo cubrimiento de* X *por elementos de* $\mathcal{B}$ *tiene un subcubrimiento finito.*

7.1.4 EJEMPLOS.

1. *El conjunto de los números reales* $\mathbb{R}$ *con la topología usual, no es un espacio compacto. No es posible cubrir a* $\mathbb{R}$ *con un número finito de intervalos de la forma* $(x-1, x+1)$*. Tampoco es posible cubrir el intervalo* $(0,1)$ *con un número finito de intervalos de la forma* $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$*, lo cual significa que el intervalo* $(0,1)$*, con la topología heredada de* $\mathbb{R}$*, no es compacto.*

2. *Todo espacio finito* X *es compacto. En este caso existe sólo un número finito de conjuntos abiertos, entonces todo cubrimiento abierto es finito.*

3. *Sea* X *un conjunto infinito y* τ *la topología de complementos finitos sobre* X*. El espacio* (X, τ) *es compacto.*

4. *Si* X *es un conjunto cualquiera y* τ *es una topología menos fina que la topología de complementos finitos, entonces* (X, τ) *es compacto. En particular, todo espacio grosero es compacto.*

Estudiaremos ahora algunas caracterizaciones de la compacidad.

7.1.5 Teorema. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es compacto.*
2. *Todo filtro sobre X tiene un punto adherente.*
3. *Todo ultrafiltro sobre X es convergente.*

Demostración.

1. $\Longrightarrow$ *2.* Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X sin puntos adherentes. Para cada $x \in X$ existen una vecindad abierta V_x de x y un elemento $F_x \in \mathcal{F}$ de tal manera que $V_x \cap F_x = \emptyset$. La colección $\{V_x : x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de X que no tiene ningún subcubrimiento finito, ya que si $x_1, x_2, ..., x_n$ son elementos de X tales que $\{V_{x_i} : i \in \{1, ..., n\}\}$ es un cubrimiento de X, entonces $F = F_{x_1} \cap ... \cap F_{x_n}$ pertenece a $\mathcal{F}$ y un elemento $x \in F$, pertenece a V_{x_i} para algún $i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces $V_{x_i} \cap F_{x_i} \neq \emptyset$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

2. $\Longrightarrow$ *3.* Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X. Por hipótesis $\mathcal{U}$ tiene un punto adherente x_0. La colección $\{U \cap V : U \in \mathcal{U}$ y $V \in \mathcal{V}(x_0)\}$ es una base para un filtro sobre X que, si $\mathcal{U}$ no converge a x_0, es estrictamente más fino que $\mathcal{U}$. Puesto que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, se concluye que toda vecindad de x_0 pertenece a $\mathcal{U}$ y así, que $\mathcal{U}$ converge a x_0.

3. $\Longrightarrow$ *1.* Supongamos que $\mathcal{C}$ es un cubrimiento abierto de X que no tiene ningún subcubrimiento finito. Para cada colección finita $\{C_1, C_2, ..., C_n\}$ de elementos de $\mathcal{C}$, se tiene que $X \setminus (C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n) \neq \emptyset$, luego los conjuntos de la forma $X \setminus (C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n)$ son una base para un filtro $\mathcal{F}$ que está contenido en un ultrafiltro $\mathcal{U}$, el cual, por hipótesis, converge a un punto $x_0 \in X$. Ahora bien, $x_0 \in C$ para algún $C \in \mathcal{C}$, luego $C \in \mathcal{U}$, pero también $X \setminus C \in \mathcal{U}$. Esto es absurdo, luego $\mathcal{C}$ sí tiene un subcubrimiento finito.

$\square$

La prueba del siguiente resultado conocido como *Teorema de Alexander* es una bonita aplicación del literal 3. del teorema anterior (cf. [14]).

7.1.6 Teorema (Alexander)**.** *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{S}$ una sub-base para la topología de X. El espacio X es compacto si y sólo si todo cubrimiento de X por elementos de $\mathcal{S}$ tiene un subcubrimiento finito.*

Demostración. Si X es compacto entonces todo cubrimiento de X por elementos de $\mathcal{S}$ tiene un subcubrimiento finito.
De manera recíproca, supongamos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X que no es convergente. Para cada $x \in X$ existe $S_x \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{U}$, tal que $x \in S_x$. Por hipótesis existen $x_1, ..., x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1,...,n} S_{x_i}$. Entonces $\emptyset = \bigcap_{i=1,...,n} S_{x_i}^c$, lo cual es absurdo, porque $S_{x_i}^c \in \mathcal{U}$, para cada $i = 1, ..., n$. $\square$

Ejercicios 7.1

1. Sea X un conjunto infinito y τ la topología de complementos finitos sobre X. Pruebe que el espacio (X, τ) es compacto.

2. Si X es un conjunto cualquiera y τ es una topología menos fina que la topología de complementos finitos, pruebe que (X, τ) es compacto.

3. Sea X un espacio infinito y discreto. Determine todos los subconjuntos compactos de X.

4. Determine los subconjuntos compactos del Plano de Moore.

5. Defina una métrica d sobre el conjunto de los números reales, tal que $(\mathbb{R}, d)$ sea un espacio compacto.

6. Se dice que una familia $\mathcal{E}$ de subconjuntos de X tiene la *propiedad de la intersección finita* si cada subcolección finita de $\mathcal{E}$ tiene intersección no vacía. Demuestre que X es un espacio compacto si y sólo si toda colección de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

7. Demuestre que todo espacio finito X es compacto mostrando que todo filtro sobre X tiene un punto adherente.

8. Demuestre que todo espacio finito X es compacto mostrando que todo ultrafiltro sobre X converge.

9. Demuestre que $\mathbb{R}$ con la topología usual no es compacto exhibiendo un filtro sobre $\mathbb{R}$ sin puntos adherentes.

10. Demuestre que si un filtro $\mathcal{F}$ sobre un espacio compacto X tiene un único punto adherente entonces es convergente.

11. Demuestre que si X es un espacio completamente regular, entonces las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

    a) X es compacto.

    b) Todo z-filtro sobre X tiene un punto adherente.

    c) Todo z-ultrafiltro sobre X converge.

7.2. La Caracterización de Kuratowski-Mrówka

Comenzamos el estudio de la Caracterización de Kuratowski-Mrówka de los espacios compactos haciendo la siguiente observación.

7.2.1 Observación. *Cada filtro $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X determina una topología $\tau_{\mathcal{F}}$ sobre el conjunto $X\bigcup\{\omega\}$, donde $\omega \notin X$, de la siguiente manera: si $x \neq \omega$, el filtro de vecindades de x es $\mathcal{V}(x) = \{V \subset X\bigcup\{\omega\} : x \in V\}$ y el filtro de vecindades de ω es $\mathcal{V}(\omega) = \{F\bigcup\{\omega\} : F \in \mathcal{F}\}$. Denotaremos por $X_{\mathcal{F}}$ al espacio topológico $(X\bigcup\{\omega\}, \tau_{\mathcal{F}})$.*

7.2.2 Teorema. *El espacio topológico X es compacto si y sólo si la aplicación $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ es cerrada para todo espacio topológico Y.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio topológico compacto, que Y es un espacio arbitrario y que K es un conjunto cerrado en $X \times Y$. Si $a \in \complement(\pi_2(K))$ entonces $(x, a) \in \complement(K)$ para cada $x \in X$, luego para cada $x \in X$ existen vecindades abiertas V_x y W_x de x y a respectivamente tales que $V_x \times W_x \subset \complement(K)$. La familia $\{V_x : x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de X y puesto que X es compacto existen $x_1, ..., x_n \in X$ tales que $X \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. El conjunto $W = \bigcap_{i=1}^n W_{x_i}$ es una vecindad abierta de a contenida en $\complement(\pi_2(K))$.

Recíprocamente, si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X sin puntos adherentes, entonces para cada $x \in X$ existen una vecindad abierta V_x de x y un elemento

$F_x \in \mathcal{F}$ tales que $V_x \bigcap F_x = \emptyset$. Consideremos el espacio $X_{\mathcal{F}}$ y el conjunto $\Delta_0 = \{(x,x) \in X \times X_{\mathcal{F}} : \ x \in X\}$. Para cada $x \in X$ se tiene que el conjunto $V_x \times (F_x \bigcup \{\omega\})$ es una vecindad de (x,ω) en $X \times X_{\mathcal{F}}$ tal que $V_x \times (F_x \bigcup \{\omega\}) \bigcap \Delta_0 = \emptyset$, entonces $(x,\omega) \notin \overline{\Delta_0}$ para cada $x \in X$. Esto implica que $\pi_2(\overline{\Delta_0}) = X$ y puesto que X no es un conjunto cerrado en $X_{\mathcal{F}}$, porque $\omega \in \overline{X}$, se concluye que $\pi_2 : X \times X_{\mathcal{F}} \longrightarrow X_{\mathcal{F}}$ no es una aplicación cerrada. □

La segunda parte de la demostración anterior implica el siguiente resultado.

7.2.3 Corolario. *Si X es un espacio topológico tal que la aplicación $\pi_2 : X \times X_{\mathcal{F}} \longrightarrow X_{\mathcal{F}}$ es cerrada para todo filtro $\mathcal{F}$ sobre X, entonces X es un espacio compacto.*

7.2.4 Observación. *Si X es un espacio topológico y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X que no es convergente, entonces $\mathcal{U}$ no tiene puntos adherentes. De igual manera, de la segunda parte de la demostración del teorema anterior, se puede concluir que $\pi_2 : X \times X_{\mathcal{U}} \longrightarrow X_{\mathcal{U}}$ no es una aplicación cerrada.*

La última observación implica el siguiente corolario.

7.2.5 Corolario. *Si X es un espacio topológico tal que la aplicación $\pi_2 : X \times X_{\mathcal{U}} \longrightarrow X_{\mathcal{U}}$ es cerrada para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X, entonces X es un espacio compacto.*

El siguiente resultado muestra que si X es un espacio no vacío, siempre existen ultrafiltros $\mathcal{U}$ sobre X tales que la aplicación $\pi_2 : X \times X_{\mathcal{U}} \longrightarrow X_{\mathcal{U}}$ es cerrada.

7.2.6 Proposición. *Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro principal sobre un espacio topológico X entonces la aplicación $\pi_2 : X \times X_{\mathcal{U}} \longrightarrow X_{\mathcal{U}}$ es cerrada.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro principal sobre un espacio topológico X. Esto es, existe $x_0 \in X$ tal que $\mathcal{U} = \{U \subset X : x_0 \in U\}$. Se tiene que cada vecindad de ω en el espacio topológico $X_{\mathcal{U}}$ contiene la vecindad abierta $\{x_0, \omega\}$ de ω. Si K es un subconjunto cerrado de $X \times X_{\mathcal{U}}$ y si $y \notin \pi_2(K)$ existen dos posibilidades: $y \neq \omega$ o bien $y = \omega$. En el primer caso el conjunto

$\{y\}$ es una vecindad abierta de y contenida en $\complement(\pi_2(K))$. En el segundo caso se tiene que $\omega \notin \pi_2(K)$, luego para cada $x \in X$ existe una vecindad V_x de x en X tal que $V_x \times \{x_0, \omega\} \subset \complement K$. En particular $\{x\} \times \{x_0, \omega\} \subset \complement K$ para cada x en X, lo cual permite concluir que $\{x_0, \omega\}$ es una vecindad abierta de ω contenida en $\complement(\pi_2(K))$. □

7.2.7 EJEMPLO.
Nótese que un conjunto X es finito si y sólamente si todo ultrafiltro sobre X es principal. Tenemos entonces una nueva argumentación que muestra que todo espacio topológico finito $X = \{x_1, ..., x_n\}$ es compacto.

7.2.8 EJEMPLO.
Sean a y b números reales tales que $a \leqslant b$. El intervalo cerrado $J = [a, b]$ como subespacio de la recta numérica es compacto.

En efecto, sean Y un espacio topológico, K un subconjunto cerrado de $J \times Y$ y $y \in \overline{\pi_2(K)}$. Para cada $W \in \mathcal{V}(y)$, sea

$$A_W = \{x \in J : (x, w) \in K \text{ para algún } w \in W\}.$$

*El conjunto A_W está acotado superiormente y $A_W \neq \emptyset$ puesto que $y \in \overline{\pi_2(K)}$.
Sea $a_W = \sup A_W$.
Nótese que si $W_1 \subset W_2$, entonces $A_{W_1} \subset A_{W_2}$ y $a_{W_1} \leqslant a_{W_2}$.
Sea $\alpha = \inf_{W \in \mathcal{V}(y)} a_W$. Es inmediato que $\alpha \in J$.
Sea W una vecindad de y. Si $V = (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon) \cap J$ es una vecindad abierta de α en J, existe $W_1 \in \mathcal{V}(y)$ tal que $\alpha \leqslant a_{W_1} \in V$. Se tiene que $a_{W_1 \bigcap W} \leqslant a_{W_1}$, luego $a_{W_1 \bigcap W} \in V$, esto significa que existen $x \in V$ y $w \in W_1 \bigcap W \subset W$ tales que $(x, w) \in K$, entonces $(\alpha, y) \in \overline{K}$ y como K es cerrado, $(\alpha, y) \in K$ y $y \in \pi_2(K)$. Esto implica que $\pi_2(K)$ es cerrado de lo cual se concluye que J es compacto.*

Ejercicios 7.2

1. Utilice la Caracterización de Kuratowski-Mrówka de los espacios compactos para probar que un espacio infinito y discreto no es compacto.

2. Utilice la Caracterización de Kuratowski-Mrówka de los espacios compactos para probar que todo conjunto infinito con la topología de los complementos finitos es compacto.

3. Utilice la Caracterización de Kuratowski-Mrówka de los espacios compactos para probar que el intervalo $(0,1)$ con la topología usual no es compacto.

4. Utilice la Caracterización de Kuratowski-Mrówka de los espacios compactos para probar que si X es compacto, si Y es un espacio de Hausdorff y si $f : X \longrightarrow Y$ es continua, entonces f es una aplicación cerrada. (Sugerencia: Demuestre que si K es cerrado en X, entonces $\{(x, f(x)) : x \in K\}$ es cerrado en $X \times Y$.)

7.3. Algunos resultados sobre compacidad

Estudiaremos ahora importantes resultados que se refieren a la compacidad en espacios topológicos.

7.3.1 Proposición. *Si X es un espacio de Hausdorff y $K \subset X$ es compacto entonces K es cerrado en X.*

Demostración. Puesto que X es un espacio de Hausdorff, el conjunto $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times X$, luego el conjunto $\Delta_K = \Delta_X \bigcap (K \times X) = \{(x,x) : x \in K\}$ es cerrado en $K \times X$, entonces $K = \pi_2(\Delta_K)$ es cerrado en X. $\square$

De manera alternativa: Sea $x_0 \in X \setminus K$. Para cada $x \in K$ existen V_x y W_x vecindades abiertas de x y x_0 respectivamente, tales que $V_x \cap W_x = \emptyset$. La colección $\{V_x : x \in K\}$ es un cubrimiento abierto de K y puesto que K es compacto, existen $x_1, ..., x_n \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. El conjunto $W = \bigcap_{i=1}^n W_{x_i}$ es una vecindad abierta de x_0 contenida en $X \setminus K$. Esto prueba que K es cerrado en X. $\square$

7.3.2 Proposición. *Si X es un espacio compacto y $K \subset X$ es cerrado entonces K es compacto.*

Demostración. Sea Y un espacio topológico y consideremos las proyecciones $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ y $\pi_2 : K \times Y \longrightarrow Y$. Cada conjunto T cerrado en $K \times Y$ es cerrado en $X \times Y$, luego $\pi_2(T) = p_2(T)$ es cerrado en Y con lo cual resulta que K es compacto. $\square$

De manera alternativa: Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos abiertos de X tal que $K \subset \bigcup \mathcal{A}$. La colección $\mathcal{A} \cup \{X \setminus K\}$ es un cubrimiento abierto de X que, gracias a la compacidad de X, posee un subcubrimiento finito $\mathcal{C}$. Se tiene que $\mathcal{C} \setminus \{X \setminus K\}$ es una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre a K. Entonces K es compacto. $\square$

7.3.3 Proposición. *Si el espacio topológico X es compacto y si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua entonces $f(X)$ es un subespacio compacto de Y.*

Demostración. Si Z es un espacio topológico, si consideramos las proyecciones $p_2 : X \times Z \longrightarrow Z$ y $\pi_2 : f(X) \times Z \longrightarrow Z$ y si T es un subconjunto cerrado de $f(X) \times Z$ entonces el conjunto $R = (f \times \mathrm{Id}_Z)^{-1}(T) = \{(x, z) \in X \times Z : \ (f(x), z) \in T\}$ es cerrado en $X \times Z$. Se tiene que $\pi_2(T) = p_2(R)$ es cerrado en Z de donde $f(X)$ es compacto. $\square$

De manera alternativa: Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos abiertos de Y tal que $f(X) \subset \bigcup \mathcal{A}$. La colección $\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ es un cubrimiento abierto de X que, gracias a la compacidad de X, posee un subcubrimiento finito, digamos $\{f^{-1}(A_1), ..., f^{-1}(A_n)\}$. Se tiene que $\{A_1, ..., A_n\}$ es una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre a $f(X)$. Entonces $f(X)$ es compacto. $\square$

7.3.4 Proposición. *Si $(X_i)_{i=1,...,n}$ es una familia finita de subconjuntos compactos de X entonces $\bigcup_{i=1}^n X_i$ es un subconjuto compacto de X.*

Demostración. Cada cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de $\bigcup_{i=1}^n X_i$ es también un cubrimiento abierto de X_i, para cada $i = 1, ..., n$. Para cada $i = 1, ..., n$, sea $\mathcal{A}_i$ un subcubrimiento finito de X_i. Entonces $\bigcup_{i=1,...,n} \mathcal{A}_i$ es una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre a $\bigcup_{i=1}^n X_i$. Se concluye que $\bigcup_{i=1}^n X_i$ es compacto. $\square$

Las proposiciones 7.3.1 y 7.3.2 garantizan el siguiente resultado.

7.3.5 Proposición. *Si X es un espacio de Hausdorff y si $(X_i)_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos compactos de X, entonces $\bigcap_{i\in I} X_i$ es compacto.*

En la demostración del siguiente resultado se utilizará la caracterización de los espacios regulares probada en 5.3.6:

> *Un espacio X es regular si y sólo si para cada $x \in X$ y cada vecindad abierta U de x, existe una vecindad V de x tal que $\overline{V} \subset U$.*

7.3.6 Proposición. *Si X es un espacio de Hausdorff compacto, entonces X es regular.*

Demostración. Supongamos que X no es regular. Existen $x_0 \in X$ y una vecindad abierta U de x_0, de tal manera que $\overline{V} \setminus U \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{V}(x_0)$. Puesto que para cada V y cada W vecindades de x_0 se tiene que $\overline{V \cap W} \setminus U \subset (\overline{V} \setminus U) \cap (\overline{W} \setminus U)$, los conjuntos de la forma $\overline{V} \setminus U$, con $V \in \mathcal{V}(x_0)$ son una base para un filtro $\mathcal{F}$ sobre X. Consideremos el espacio $X_{\mathcal{F}} = X \cup \{\omega\}$. Si $x \in X$ y $x \neq x_0$, existen $V \in \mathcal{V}(x_0)$ y una vecindad abierta O de x tales que $V \cap O = \emptyset$. Esta última igualdad implica que $O \cap \overline{V} = \emptyset$; porque O es un conjunto abierto, entonces $O \cap (\overline{V} \setminus U) = \emptyset$, lo cual a su vez indica que $O \times ((\overline{V} \setminus U) \cup \{\omega\})$ es una vecindad de (x, ω) en $X \times X_{\mathcal{F}}$, sin puntos en común con $\Delta_X = \{(y, y) : y \in X\}$.

Por su parte, $U \times ((\overline{U} \setminus U) \cup \{\omega\})$ es una vecindad de (x_0, ω), cuya intesección con Δ_X es vacía. Entonces $\pi_2(\overline{\Delta_X}) = X$ que no es un subconjunto cerrado de $X_{\mathcal{F}}$. Esto implica que X no es compacto. Esta contradicción nos lleva a concluir que X es regular. $\square$

La siguiente demostración alternativa de este último resultado es mucho más conocida y también más sencilla. Además utiliza argumentos discutidos anteriormente.

De manera alternativa: Sean K un subconjunto cerrado de X y $x_0 \in X \setminus K$. En primer lugar nótese que K es compacto, por ser un subconjunto cerrado de un espacio compacto. Para cada $x \in K$ existen vecindades abiertas V_x y W_x de x y x_0, respectivamente, tales que $V_x \cap W_x = \emptyset$. La colección $\{V_x : x \in K\}$ es un cubrimiento abierto de K, luego existen $x_1, ..., x_n \in K$ tales que $K \subset V = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Sea $W = \bigcap_{i=1}^n W_{x_i}$. Se tiene que V y W son conjuntos abiertos, $K \subset V$, $x_0 \in W$ y $V \cap W = \emptyset$. Esto demuestra que X es un espacio regular. $\square$

El siguiente resultado se conoce como *Lema del Tubo*.

7.3.7 Lema. *Sean X un espacio compacto, Y un espacio topológico arbitrario, $y_0 \in Y$ y N un subconjunto abierto de $X \times Y$ tal que $X \times \{y_0\} \subset N$. Existe una vecindad W de y_0 en Y tal que $X \times W \subset N$.*

Demostración. Sea $K = (X \times Y) \setminus N$. La compacidad de X implica que $\pi_2(K)$ es un subconjunto cerrado de Y. El conjunto $W = Y \setminus \pi_2(K)$ es una vecindad abierta de y_0 en Y y si $(x, y) \in X \times W$ entonces $(x, y) \notin K$, de donde $(x, y) \in N$. Se concluye que $X \times W \subset N$. $\square$

Ejercicios 7.3

1. Pruebe que toda función continua definida de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff es cerrada.

2. Muestre con un ejemplo que un subconjunto compacto de un espacio que no sea de Hausdorff, no necesariamente es cerrado.

3. Pruebe que en un espacio de Hausdorff dos conjuntos compactos disyuntos se pueden separar con conjuntos abiertos disyuntos.

4. Sean Y un espacio compacto y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Pruebe que si el grafo de f, $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$, entonces f es continua. Sugerencia: Si K es cerrado en Y, entonces $f^{-1}(K) = \pi_1((X \times K) \cap G_f)$.

5. Demuestre que si X es un espacio de Hausdorff, $f : X \longrightarrow Y$ es una función y el grafo $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es compacto, entonces f es continua. Sugerencia: La misma del ejercicio anterior.

6. Sean X un espacio regular, K un subconjunto compacto de X y F un subconjunto cerrado de X sin puntos en común con K. Demuestre que K y F se pueden separar con conjuntos abiertos disyuntos.

7. Demuestre que todo espacio compacto de Hausdorff es normal y que por lo tanto, también es completamente regular.

7.4. El Teorema de Tychonoff

El Teorema de Tychonoff es, sin lugar a duda, el resultado más importante de la Topología general.

Por la simplicidad de la demostración presentaremos inicialmente el Teorema de Tychonoff para el caso de dos espacios topológicos.

7.4.1 Teorema (Tychonoff). *Si X_1 y X_2 son espacios compactos entonces $X_1 \times X_2$ es compacto.*

Demostración. Sean Y un espacio topológico arbitrario y K un subconjunto cerrado de $(X_1 \times X_2) \times Y$. Nótese que $(X_1 \times X_2) \times Y$ es homeomorfo a $X_1 \times (X_2 \times Y)$; así el conjunto $\tilde{K} = \{(x_1, (x_2, y)) : ((x_1, x_2), y) \in K\}$ es cerrado en $X_1 \times (X_2 \times Y)$. La compacidad de X_1 implica que el conjunto $\{(x_2, y) : (x_1, (x_2, y)) \in \tilde{K}$ para algún $x_1 \in X_1\}$ es cerrado en $X_2 \times Y$ y la compacidad de X_2 implica que el conjunto $\pi_2(K) = \{y : (x_1, (x_2, y)) \in \tilde{K}$ para algún $x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}$ es cerrado en Y. Esto demuestra que $X_1 \times X_2$ es compacto. $\square$

Utilizando un argumento de inducción matemática se muestra que el producto de un número finito de espacios topológicos es compacto si y sólo si cada uno de los factores lo es.

7.4.2 EJEMPLO.
El conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si A es cerrado y acotado.
En efecto, si A es cerrado y acotado se tiene que A es un subespacio cerrado de un producto finito de intervalos cerrados de la recta real. Por lo tanto A

es compacto.
De manera recíproca supongamos que A es compacto. Puesto que $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hausdorff, A es cerrado en $\mathbb{R}^n$. Por otra parte, supongamos que A no está acotado. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A$ tal que $||x_n|| > n$. Para cada $a \in A$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k-1 \leq ||a|| < k$. Esto implica que a no es adherente al conjunto $\{x_n : n > k\}$, porque $B(0,k) \cap \{x_n : n > k\} = \emptyset$. Entonces el filtro elemental asociado a la sucesión $(x_n)_n$ no tiene puntos adherentes. Esto contradice la compacidad de A.

7.4.3 Observación. *Nótese que del ejemplo anterior se concluye que todo cubo es un espacio compacto y como también es un espacio de Hausdorff, todo cubo es normal..*

Consideremos una familia $(X_i)_{i\in I}$ de espacios topológicos. Denotamos por X_I al producto $\prod_{i\in I} X_i$ y para cada $F \subset I$ sean $X_F = \prod_{i\in F} X_i$ y $\pi_F : X_I \longrightarrow X_F$ la proyección natural. Se tiene el siguiente resultado.

7.4.4 Proposición. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Si M, $A \subset X_I$ y si $\pi_F(A) \subset \overline{\pi_F(M)}$, para cada subconjunto finito F de I, entonces $A \subset \overline{M}$.*

Demostración. Sean $x \in A$ y $V = \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(O_{i_k})$ una vecindad básica de x en X_I. Se tiene que O_{i_k} es abierto en X_{i_k} para $k = 1, ..., n$ y que $F = \{i_1, ..., i_n\}$ es un subconjunto finito de I. Puesto que $\pi_F(A) \subset \overline{\pi_F(M)}$ se tiene que $(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) \in \overline{\pi_F(M)}$, luego existe $m \in M$ tal que $(m_{i_1}, ..., m_{i_n}) \in \pi_F(M) \bigcap \prod_{k=1}^{n} O_{i_k}$. Esto significa que $m \in V$, luego $x \in \overline{M}$ y $A \subset \overline{M}$. □

Ahora estudiaremos el Teorema de Tychonoff en el caso en que se cuente con una familia arbitraria de espacios topológicos. Para la demostración de este teorema utilizaremos la caracterización de los espacios compactos en términos de ultrafiltros, dada en 7.1.3.

7.4.5 Teorema (Tychonoff en general). *Si $(X_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos compactos, entonces el producto $X = \prod_{i\in I} X_i$ también es un espacio compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X. Para cada $i \in I$ denotemos por $\mathcal{U}_i$ el ultrafiltro sobre X_i generado por $\pi_i(\mathcal{U})$. Puesto que cada X_i es compacto, $\mathcal{U}_i$ converge a un punto $x_i \in X_i$, para cada $i \in I$. Se tiene que $\mathcal{U}$ converge al punto $x = (x_i)_{i\in I}$. En efecto, una vecindad fundamental V de x tiene la forma $V = \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(W_j)$, donde W_j es una vecindad abierta de x_j en X_j y $J \subset I$ es un conjunto finito. Para cada $j \in J$, existe $F_j \in \mathcal{U}$ tal que $\pi_j(F_j) \subset W_j$. Sea $F = \bigcap_{j\in J} F_j$, entonces $F \subset \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(W_j) = V$, por consiguiente $V \in \mathcal{U}$. Se concluye que $\mathcal{U}$ converge al punto x. □

Ejercicios 7.4

1. Muestre con un ejemplo que si X y Y son espacios topológicos y si X no es un espacio compacto, entonces el producto $X \times Y$ no es compacto.

2. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia arbitraria de espacios topológicos. Demuestre que si el producto $\prod_{i\in I} X_i$ es un espacio compacto, entoncesX_i es compacto para cada $i \in I$.

3. Dé una demostración alternativa del Teorema de Tychonoff para dos espacios compactos X y Y, mostrando que todo cubrimiento por abiertos sub-básicos de $X \times Y$ tiene un subcubrimiento finito.

4. Demuestre que en un espacio métrico todo espacio compacto es cerrado y acotado.

5. Dé un ejemplo de un espacio métrico en el que no todo subconjunto cerrado y acotado sea compacto.

7.5. Compacidad local - Compactificación de Alexandroff

Hemos visto ya que $\mathbb{R}$ con la topología usual no es un espacio compacto. Aún así, se tiene que cada $x \in \mathbb{R}$ tiene infinidad de vecindades compactas. En efecto, cualquier intervalo cerrado y acotado que contenga a x en su interior es una vecindad compacta de x.

7.5.1 Definición. *Un espacio topológico X es* localmente compacto *si cada punto de X tiene un sistema fundamental de vecindades compactas.*

Puesto que cada intervalo abierto en $\mathbb{R}$ que contenga a un punto dado x, contiene un intervalo cerrado y acotado que a su vez contiene a x, $\mathbb{R}$ es un espacio localmente compacto.

En el caso de los espacios de Hausdorff es posible definir la compacidad local mediante una condición menos exigente que la existencia de sistemas fundamentales de vecindades compactas.

7.5.2 Proposición. *Un espacio topológico de Hausdorff es localmente compacto si y sólo si cada punto tiene una vecindad compacta.*

Demostración. Es claro que si un espacio es localmente compacto, entonces cada punto tiene una vecindad compacta.
La afirmación recíproca se deja como ejercicio. □

Los espacios de Hausdorff localmente compactos tienen la propiedad de ser subespacios densos de espacios compactos de Hausdorff. Más formalmente, de cada espacio compacto de Hausdorff se puede hallar una compactificación.

7.5.3 Definición. *Sea X un espacio topológico. Un espacio topológico compacto Y es una* compactificación *de X si X es homeomorfo a un sub-espacio denso de Y.*

Consideremos un espacio X de Hausdorff, no compacto y localmente compacto, $\omega \notin X$ y sea $X^* = X \cup \{\omega\}$ el espacio cuyos conjuntos abiertos son todos los subconjuntos abiertos de X junto con todos los conjuntos de la forma $A \cup \{\omega\}$, donde A es un subconjunto abierto de X con complemento compacto.

Veamos en primer lugar que X^* es compacto.

Un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X^* contiene entre sus elementos un conjunto de la forma $A \cup \{\omega\}$, donde A es un subconjunto abierto de X con complemento compacto. El complemento de A se puede cubrir con un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. Esto garantiza la compacidad de X^*.

Ahora bien, puesto que los conjuntos abiertos de X son también abiertos en X^* y X es un espacio de Hausdorff, dos puntos distintos de X se pueden separar con abiertos disyuntos en X^*. Ahora bien, si $x \in X$ y K es una vecindad compacta de x, entonces K y $X \setminus K \cup \{\omega\}$ son vecindades disyuntas de x y ω, respectivamente, en X^*. Esto prueba que X^* es un espacio de Hausdorff.

Como toda vecindad de ω en X^* contiene puntos de X, se tiene que $\overline{X} = X^*$. Esto garantiza que X es un sub-espacio denso de X^*.

Las consideraciones hechas hasta aquí, indican que X^* es un compactado de X.

El espacio X^* se conoce como la *Compactificación de Alexandroff* o *compactificación por un punto* de X.

Ejercicios 7.5

1. Demuestre que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

2. Demuestre que el Plano de Moore no es localmente compacto.

3. Demuestre con un ejemplo que la imagen por una función continua de un espacio localmente compacto no ncesariamente es un espacio localmente compacto.

4. Demuestre que si X es localmente compacto, si $f : X \longrightarrow Y$ es continua, cerrada y sobreyectiva y si $f^{-1}(y)$ es compacto para cada $y \in Y$, entonces Y es localmente compacto.

5. Verifique que la construcción de la compactificación de Alexandroff hecha para un espacio no compacto y localmente compacto, se puede realizar para cualquier espacio topológico X. ¿Qué sucede si X es compacto?

6. Pruebe que la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}$ es homeomorfa a $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

7. Pruebe que la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{N}$ es homeomorfa al sub-espacio $\{0\} \bigcup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ de $\mathbb{R}$.

7.6. La compactificación de Stone-Čech

En esta sección concentraremos nuestra atención en espacios completamente regulares.
Sean X un espacio completamente regular y T_1 y $\{f_i\}_{i\in I}$ la colección de todas las funciones continuas y acotadas definidas de X en los números reales. Para cada $i \in I$, el rango de la función f_i se encuentra contenido en un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. En particular, se encuentra contenido en el intervalo $J_i = [\inf f_i(X), \sup f_i(X)]$. Por el Teorema de Tychonoff, el producto $\prod_{i\in I} J_i$ es un espacio compacto y por tratarse de un producto de espacios de Hausdorff, también es un espacio de Hausdorff.

Consideremos la aplicación $e : X \longrightarrow \prod_{i\in I} J_i$ definida por $e(x) = (f_i(x))_i$.

Veamos que X es homeomorfo a $e(X)$.

1. Para cada $i \in I$, se tiene que $\pi_i \circ e = f_i$, lo cual implica que e es una función continua.

2. Sea A un subconjunto abierto de X. Veamos que $e(A)$ es abierto en $e(X)$. Un elemento de $e(A)$ tiene la forma $(f_i(a))_{i\in I}$ para algún $a \in A$. Escogemos $j \in I$ tal que $f_j(a) = 1$ y $f_j(X \setminus A) = \{0\}$. El conjunto $\pi_j^{-1}(0, +\infty) \cap e(X)$ es una vecindad de $(f_i(a))_{i\in I}$ en $e(X)$. En efecto, $\pi_j((f_i(a))_{i\in I}) = f_j(a) = 1$. Además, si $b \in \pi_j^{-1}(0, +\infty) \cap e(X)$, entonces $\pi_j(b) = f_j(b) > 0$, lo cual implica que $b \in A$. Entonces $\pi_j^{-1}(0, +\infty) \cap e(X) \subset A$. Se concluye que la aplicación e es abierta sobre $e(X)$.

3. Si x y y son puntos distintos de X, existe $i \in I$ tal que $f_i(x) = 0$ y $f_i(y) = 1$. Entonces $e(x) \neq e(y)$. Esto prueba que e es una función uno a uno.

Las consideraciones anteriores muestran que X es homeomorfo a $e(X)$.

Por su parte, $\overline{e(X)}$ es un subespacio cerrado de un espacio de Hausdorff compacto, luego también es un espacio de Hausdorff compacto. Puesto que X es homeomorfo a un subespacio denso de $\overline{e(X)}$, este espacio es una compactificación de X.

El espacio $\overline{e(X)}$ se denota por $\beta(X)$ y se llama la *Compactificación de Stone-Čech* de X.

Las siguientes consideraciones sobre los espacios completamente regulares nos permitirán presentar la propiedad más relevante de la compactificación de Stone-Čech.

7.6.1 Observación. *Sea X un espacio completamente regular y T_1. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y acotada y si O es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$, entonces $f^{-1}(O)$ es abierto en X. Por otra parte, si A es un subconjunto abierto no vacío de X y si $a \in A$, existe una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 0$ y $f(X \setminus A) = 1$. Entonces $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \subset A$. Esto significa que los conjuntos de la forma $f^{-1}(O)$, donde f es una función continua y acotada de X en $\mathbb{R}$ y O es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$, forman una base para la topología de X. En otras palabras, X tiene la topología inicial inducida por la familia de funciones continuas y acotadas de X en $\mathbb{R}$.*

Ahora bien, cada función continua y acotada f definida de X en $\mathbb{R}$ tiene como rango un subconjunto de algún intervalo cerrado I_f en $\mathbb{R}$, así, f puede ser vista como una función definida de X en I_f. Se tiene que la función evaluación $e : X \longrightarrow \prod I_f$ definida por $[e(x)]_f = f(x)$ es una inmersión. Entonces X es homeomorfo a un subespacio del cubo $\prod I_f$.

Finalmente, recuérdese que todo espacio compacto de Hausdorff es completamente regular.

Con las anteriores observaciones en mente, estamos en capacidad de demostrar el siguiente resultado.

7.6.2 Proposición. *Sean X un espacio completamente regular y T_1 y $\beta(X)$ su compactificación de Stone-Čech. Si K es un espacio compacto de Hausdorff y si $f : X \longrightarrow K$ es una función continua, entonces existe una función continua $F : \beta(X) \longrightarrow K$ tal que $F \circ e = f$.*

Demostración. Puesto que K es un espacio completamente regular y T_1, existe una inmersión e' de K en un cubo

$$\prod \{I_g | g : K \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es continua y acotada }\}.$$

Definimos la función $H : \prod I_\ell \longrightarrow \prod I_g$ por $[H(t)]_g = t_{g\circ f}$. La función H es continua porque $\pi_g \circ H = \pi_{g\circ f}$ para cada proyección π_g. Ahora bien, puesto que $H(e(X)) \subset e'(K)$ y $e(X)$ es denso en $\beta(X)$, se tiene que $H(e(X))$ es denso en $H(\beta(X))$. Nótese que $e'(K)$ es un conjunto cerrado, porque es un subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff, y que $H(e(X)) \subset e'(K)$. Entonces $H(\beta(X)) \subset e'(K)$. La función $F = e'^{-1} \circ H \restriction_{\beta(X)}: \beta(X) \longrightarrow K$ es continua y $F \circ e = f$. Esto completa la demostración. $\square$

La función F definida en la demostración anterior, se dice ser una extensión continua de f a $\beta(X)$. El resultado anterior nos asegura que cualquier función continua f definida de un espacio completamente regular y T_1 en un espacio compacto de Hausdorff, se puede extender a $\beta(X)$.

Esta proposición caracteriza la compactificación de Stone-Čech de un espacio completamente regular y T_1.

Ejercicios 7.6

1. Sea X un espacio completamente regular y T_1 y sea $\beta(X)$ su compactificación de Stone-Čech. Demuestre que cada función continua y acotada de X en $\mathbb{R}$ se puede extender de manera única a una función continua definida de $\beta(X)$ en $\mathbb{R}$.

2. ¿Qué ocurre si en la construcción de la compactificación de Stone-Čech eliminamos la hipótesis según la cual X es completamente regular? ¿Qué ocurre si no pedimos que X sea T_1?

3. Demuestre que el intervalo $[0, 1]$ NO es la compactificación de Stone-Čech del intervalo $(0, 1)$.

4. Considere una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ sobreyectiva. Note que f es continua y considérela como una función definida de $\mathbb{N}$ en $\beta(\mathbb{Q})$. Demuestre que la extensión F de f a $\beta(\mathbb{N})$ es sobreyectiva. Concluya que $|\beta(\mathbb{Q})| \leq |\beta(\mathbb{N})|$.

5. Considere la inclusión de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y utilícela para concluir que $|\beta(\mathbb{R})| \leq |\beta(\mathbb{Q})|$.

6. Sea X un espacio topológico completamente regular y de Hausdorff y consideremos βX la colección de todos los z-ultrafiltros sobre X. Para cada cero-conjunto F de X, sea $\widehat{F} = \{\mathcal{U} \in \beta X : F \in \mathcal{U}\}$.

   a) Sean F y G dos cero-conjuntos. Demuestre que $\widehat{F \cup G} = \widehat{F} \cup \widehat{G}$ y que $\widehat{F \cap G} = \widehat{F} \cap \widehat{G}$

b) Demuestre que la colección $\{\widehat{F} : F \in Z[X]\}$ es una base para los conjuntos cerrados para una topología τ sobre βX. (Sugerencia: Recuerde el ejercicio 7 de la sección 2.4.)

c) Demuestre que el espacio topológico $(\beta X, \tau)$ es de Hausdorff y compacto. (Sugerencia: Para probar que el espacio es de Hausdorff, tenga en cuenta el numeral 11*b* de los ejercicios 6.1. Para probar que βX es compacto, demuestre que toda familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía. Puede considerar cerrados básicos. ¿Por qué?)

d) Demuestre que la función $i : X \longrightarrow \beta X$ definida por $i(x) = \langle x \rangle_Z$ es una inmersión y que $i(X)$ es denso en βX. (Sugerencia:

1) Si F es un cero-conjunto, entonces $i^{-1}(\widehat{F}) = F$.
2) Si G es cerrado en X, entonces $i(G) = \bigcap_{\substack{F \in Z[X] \\ G \subset F}} \widehat{F} \bigcap i(X)$.
3) Para probar que i es uno a uno, recuerde que X es un espacio de Tychonoff.
4) Utilice conjuntos abiertos básicos para probar que $\overline{i(X)} = \beta X$.

)

e) Demuestre que si K es un espacio compacto de Hausdorff y $h : X \longrightarrow K$ es una función continua, entonces existe una única función continua $\widehat{h} : \beta X \longrightarrow K$, tal que $\widehat{h} \circ i = h$. Concluya que βX es la compactificación de Stone-Čech de X.

(Sugerencia:

1) Dado un z-ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X, demuestre que el conjunto $\{F \subset Z[Y] : h^{-1}(F) \in \mathcal{U}\}$ es un z-filtro primo sobre Y que tiene un único punto adherente $y_{\mathcal{U}} \in Y$.
2) Demuestre que la función $\widehat{h} : \beta X \longrightarrow Y$ definida por $\widehat{h}(\mathcal{U}) = y_{\mathcal{U}}$ es la única función continua que satisface que $\widehat{h} \circ i = h$.

)

7.7. Compacidad en espacios métricos

Si X es un espacio topológico compacto y 1-enumerable, toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente. En efecto, el filtro elemental $\mathcal{F}$ asociado a la sucesión tiene un punto adherente x. Sea $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema fundamental de vecindades de x tal que $V_{n+1} \subset V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Escojamos $x_{n_1} \in V_1 \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $x_{n_2} \in V_2 \cap \{x_n : n > n_1\}$ y de manera inductiva, para cada $k \geq 2$ escojamos $x_{n_{k+1}} \in V_{k+1} \cap \{x_n : n > n_k\}$. La subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

Un espacio topológico con la propiedad que acabamos de verificar para los espacios compactos 1-enumerables, se llama *secuencialmente compacto*. Formalmente se tiene la siguiente definición.

7.7.1 Definición. *Un espacio topológico X es* secuencialmente compacto *si cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tiene una subsucesión convergente.*

Entonces, todo espacio compacto y 1-enumerable es secuencialmente compacto.

En los espacios métricos, que en particular son espacios 1-enumerables, las sucesiones permiten caracterizar completamente la compacidad. Encontrar esta caracterización es el objetivo principal de esta sección. Comenzaremos con algunos conceptos preliminares.

La siguiente definición caracteriza los espacios que se pueden cubrir con un número finito de bolas de un radio previamente convenido.

7.7.2 Definición. *Sea (X, d) un espacio métrico. Si para cada $\epsilon > 0$ existe un subconjunto finito F_ϵ de X tal que la colección $\{B(x, \epsilon) : x \in F_\epsilon\}$ es un cubrimiento de X, entonces se dice que X es un espacio* totalmente acotado.
Un conjunto finito F_ϵ tal que la colección $\{B(x, \epsilon) : x \in F_\epsilon\}$ es un cubrimiento de X, se denomina una ϵ-red.

Supongamos que (X, d) es un espacio métrico secuencialmente compacto y sea $\epsilon > 0$. La colección $\mathcal{O} = \{B(x, \epsilon) : x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de X. Supongamos que este cubrimiento no tiene ningún subcubrimiento finito. Sea x_1 un punto arbitrario pero fijo de X. Puesto que $X \neq B(x_1, \epsilon)$, existe $x_2 \in X$ tal que $d(x_2, x_1) \geq \epsilon$. Nuevamente, puesto que $X \neq B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon)$, existe $x_3 \in X$ tal que $d(x_1, x_3) \geq \epsilon$ y $d(x_2, x_3) \geq \epsilon$. De manera inductiva, es posible construir una sucesión (x_n) en X tal que $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$ siempre que

$n \neq m$. Claramente esta sucesión no tiene una subsucesión convergente, lo cual implica que X no es secuencialmente compacto.

Hemos demostrado así que todo espacio métrico secuencialmente compacto es totalmente acotado.

7.7.3 Definición. *Sean (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{O}$ un cubrimiento abierto de X. Si $\delta > 0$ es un número real tal que cada subconjunto A de X con diámetro menor que δ está contenido en un elemento de $\mathcal{O}$, entonces se dice que δ es un* número de Lebesgue *de $\mathcal{O}$.*

7.7.4 EJEMPLOS.

1. *Consideremos $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual que denotaremos aquí por d. Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $x,\ y \in \mathbb{Q}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ sea $B_{\frac{1}{n}}(x, y)$ la bola abierta centrada en (x, y), con radio $\dfrac{1}{n}$.*

   La colección
   $$\mathcal{O} = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x, y) : x,\ y \in \mathbb{Q} \text{ y } n \in \mathbb{N} \right\}$$
   es un cubrimiento abierto de $\mathbb{R}^2$.

   Ahora bien, consideremos un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ con diámetro menor que $\dfrac{1}{2}$, esto es, $\sup\{d(P, Q) : P,\ Q \in A\} < \dfrac{1}{2}$. Dado $(a, b) \in A$, existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x,\ y \in \mathbb{Q}$ y $d((a, b), (x, y)) < \dfrac{1}{2}$. Se tiene que $A \subset B_1(x, y)$. En efecto, si $(c, d) \in A$, entonces
   $$\begin{aligned} d((c, d), (x, y)) &\leq d((c, d), (a, b)) + d((a, b), (x, y)) \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

   Se tiene así que cada conjunto con diámetro menor que $\dfrac{1}{2}$ está contenido en un elemento de $\mathcal{O}$. Entonces $\dfrac{1}{2}$ es un número de Lebesgue de $\mathcal{O}$.

2. *Consideremos la colección*

$$\mathcal{O} = \left\{ \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

La colección $\mathcal{O}$ *es un cubrimiento abierto del intervalo* $(0,1)$*. Sin embargo, dado* $0 < \delta < 1$*, se tiene que* $(0,\delta)$ *es un subconjunto de* $(0,1)$*, con diámetro* δ*, que no está contenido en ningún elemento de* $\mathcal{O}$*. Entonces* $\mathcal{O}$ *no tiene ningún número de Lebesgue.*

7.7.5 Proposición. *Si* (X,d) *es un espacio métrico secuencialmente compacto, entonces todo cubrimiento abierto de* X *tiene un número de Lebesgue.*

Demostración. Sean X un espacio métrico secuencialmente compacto y $\mathcal{O}$ un cubrimiento abierto de X. Supongamos que $\mathcal{O}$ no tiene un número de Lebesgue. Esto es, supongamos que para cada $\delta > 0$, existe $A_\delta \subset X$ tal que *diam* $A_\delta < \delta$ y $A_\delta \setminus O \neq \emptyset$, para cada $O \in \mathcal{O}$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $A_{\frac{1}{n}} \subset X$ tal que *diam* $A_{\frac{1}{n}} < \dfrac{1}{n}$ y $A_{\frac{1}{n}} \setminus O \neq \emptyset$ para cada $O \in \mathcal{O}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escogemos $x_n \in A_{\frac{1}{n}}$. Por hipótesis la sucesión $(x_n)_n$ tiene una subsucesión $(x_{n_i})_i$ que converge digamos a x. Sea $O \in \mathcal{O}$ tal que $x \in O$. Puesto que O es un conjunto abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x,\epsilon) \subset O$. Sea $i \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_i}, x) < \dfrac{\epsilon}{2}$ y $\dfrac{1}{n_i} < \dfrac{\epsilon}{2}$. Como *diam* $A_{\frac{1}{n_i}} < \dfrac{1}{n_i} < \dfrac{\epsilon}{2}$, entonces para cada $a \in A_{\frac{1}{n_i}}$ se tiene

$$\begin{aligned} d(a,x) &\leq d(a, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Entonces $A_{\frac{1}{n_i}} \subset B(x,\epsilon) \subset O$. Esto contradice la suposición hecha, luego $\mathcal{O}$ sí tiene un número de Lebesgue. □

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado central de esta sección.

7.7.6 Proposición. *Sea* (X,d) *un espacio métrico. Si* X *es secuencialmente compacto, entonces* X *es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{O}$ un cubrimiento abierto de X y sean δ un número de Lebesgue de $\mathcal{O}$ y $\epsilon = \dfrac{\delta}{3}$. Puesto que X es totalmente acotado, existe un subconjunto finito $\{x_1, ..., x_n\}$ de X tal que $X = B(x_1, \epsilon) \cup ... \cup B(x_n, \epsilon)$. Ahora bien, para cada $i = 1, ..., n$, se tiene que el conjunto $B(x_i, \epsilon)$ tiene diámetro a lo más $2\epsilon = \dfrac{2\delta}{3} < \delta$, luego para cada $i = 1, ..., n$ existe $O_i \in \mathcal{O}$ tal que $B(x_i, \epsilon) \subset O_i$. Entonces $\{O_i : i = 1, ..., n\}$ es un subcubrimiento finito de $\mathcal{O}$, luego X es compacto. □

Ejercicios 7.7

1. Considere el espacio l^2 de todas las sucesiones reales (x_n) que satisfacen que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ converge, con la métrica definida por $d((x_n), (y_n)) = (\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2)^{\frac{1}{2}}$. Muestre que la bola cerrada centrada en la sucesión constante de valor 0 y radio 1 no es compacta. (Sugerencia: Muestre que existe una sucesión en la bola sin subsucesiones convergentes.)

2. Se dice que un espacio topológico X tiene la *Propiedad de Bolzano Weierstrass* si cada subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación. Demuestre que todo espacio compacto tiene la Propiedad de Bolzano Weierstrass.

3. Pruebe que $\mathbb{R}$ con la topología de las colas a la derecha es un espacio que tiene la Propiedad de Bolzano Weierstrass pero que no es compacto.

4. Pruebe que un espacio métrico X es compacto si y sólo si tiene la Propiedad de Bolzano Weierstrass. ¿Es este resultado cierto si X es 1-enumerable?

Capítulo 8

Espacios Conexos

Entre las muchas diferencias que podemos encontrar entre la topología discreta y la topología usual sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, con $a < b$, está el hecho de que $[a, b]$ con la topología discreta parece ser un espacio formado por un gran número de piezas, el espacio parece estar "fracturado", mientras que si consideramos la topología usual sobre $[a, b]$, el espacio que obtenemos nos da la apariencia de "no poderse romper".

Esta propiedad de $[a, b]$ con la topología usual se pone de manifiesto, por ejemplo cuando observamos que toda función continua f definida de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ necesariamente toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. No ocurre lo mismo si $[a, b]$ tiene la topología discreta, en este caso cualquier función de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ es continua, independientemente de los valores que tome.

En este capítulo se estudian los espacios que, como $[a, b]$ con la topología usual, tienen la propiedad de estar constituidos por "una sola pieza".

8.1. Espacios Conexos

8.1.1 Definición. *Sea X un espacio topológico. Una pareja A, B de subconjuntos no vacíos, abiertos y disyuntos de X es una* disconexión *de X, si $A \cup B = X$.*

Si a y b son números reales tales que $a < b$ y si $[a, b]$ tiene la topología discreta, entonces para cada $a < r < b$ se tiene que $[a, r)$ y $[r, b]$ determinan

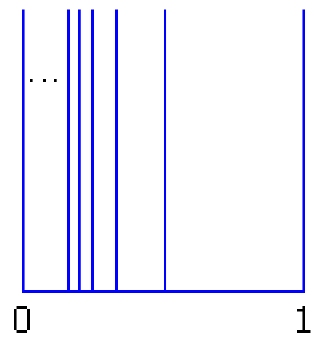
una disconexión de $[a, b]$.
Por el contrario, si $[a, b]$ tiene la topología usual, *no existe* disconexión alguna de $[a, b]$ como veremos un poco más adelante..

8.1.2 Definición. *Un espacio topológico X es* conexo *si no existen disconexiones de X.*
Un subconjunto A de un espacio topológico X es conexo si A con la topología heredada de X es un espacio conexo.
Si un espacio X es no conexo, se dice que es disconexo.

8.1.3 EJEMPLOS.

1. *Todo espacio X con topología grosera es un espacio conexo.*
2. *Todo espacio X con más de un punto y topología discreta es disconexo.*
3. *Todo espacio infinito X con la topología de complementos finitos es un espacio conexo.*
4. *El espacio $\mathbb{R}$ con la topología de las colas a derecha es conexo.*
5. *El espacio $\mathbb{R}^n$ con la topología usual es conexo.*
6. *El espacio $\mathbb{Q}$ con la topología heredada de $\mathbb{R}$ es disconexo.*
7. *En $\mathbb{R}$ con la topología usual, los conjuntos conexos son los intervalos.*
8. *El espacio $\mathbb{R}$ con la topología generada por los intervalos de la forma $[a, b)$ es disconexo.*
9. *El Plano de Moore es un espacio conexo.*
10. *El subespacio de $\mathbb{R}^2$,*

$$X = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \ y \ y = 0\} \cup \left(\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \times [0, 1]\right) \cup \{(x, y) : x = 0 \ y \ 0 \leq y \leq 1\}$$



se conoce con el nombre de espacio peine *y es un espacio conexo.*

La siguiente proposición presenta distintas caracterizaciones de los espacios conexos.

8.1.4 Proposición. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es conexo.*
2. *Los únicos subconjuntos de X que son simultáneamente abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X.*
3. *Toda aplicación continua de X en un espacio discreto Y es constante.*
4. *Toda aplicación continua de X en el espacio discreto $\{0, 1\}$ es constante.*
5. *(*Teorema de Bolzano.*) Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y si x y y son puntos de X tales que $f(x) < f(y)$, entonces $[f(x), f(y)] \subset f(X)$.*

Demostración.

1 $\Longrightarrow$ *2* Si X es conexo y $A \subset X$ es simultáneamente abierto y cerrado, distinto de $\emptyset$ y de X, entonces A y $X \smallsetminus A$ determinan una disconexión de X.

2 $\Longrightarrow$ *3* Si $f(x)$ y $f(y)$ son puntos distintos de Y, entonces $f^{-1}(f(x))$ (y también $f^{-1}(f(y))$) es un conjunto distinto de $\emptyset$ y de X, simultáneamente abierto y cerrado.

3 $\Longrightarrow$ *4* Es inmediato.

4 $\Longrightarrow$ *5* Supongamos que $f(x) < t_0 < f(y)$ y que $t_0 \notin f(X)$. La función g de $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ en el espacio discreto $\{0, 1\}$ definida por $f(t) = 0$ si $t < t_0$ y $f(t) = 1$ si $t > t_0$ es continua, luego $g \circ f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ es una función continua que no es constante.

5 $\Longrightarrow$ *1* Si A y B determinan una disconexión de X, la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ si $x \in A$ y $f(x) = 1$ si $x \in B$, es continua. Entonces, $\{0, 1\} \subset f(X)$ y claramente $[0, 1] \not\subset f(X)$.

$\square$

8.1.5 EJEMPLO.
Si a y b son números reales y $a < b$, entonces el intervalo $[a, b]$ es conexo. En efecto, sea f una función continua del intervalo $[a, b]$ en el espacio discreto $\{0, 1\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f(a) = 0$. Si f no es una función constante, entonces $M = \{x \in [a, b] : f(x) = 1\} \neq \emptyset$, en este caso consideremos $\alpha = \inf M$. Nótese que si $\alpha = b$ y $f(\alpha) = 0$, entonces $M = \emptyset$. Ahora bien, si $f(\alpha) = 1$, entonces $\alpha > a$ y la continuidad de f en α implica que existe $\epsilon > 0$, tal que si $x \in (\alpha - \epsilon, \alpha)$, entonces $f(x) = 1$, luego $\alpha \neq \inf M$. Entonces $f(\alpha) = 0$ y $\alpha < b$, pero ahora la continuidad de f en α implica que existe $\epsilon > 0$, tal que $f(x) = 0$, para cada $x \in (\alpha, \alpha + \epsilon)$, nuevamente se tiene que $\alpha \neq \inf M$.
Concluimos que f es constante, luego $[a, b]$ es conexo.

Ejercicios 8.1

1. Muestre que si (X, τ) es un espacio conexo y si τ_1 es una topología sobre X menos fina que τ, entonces (X, τ_1) también es un espacio conexo.

2. Demuestre que un espacio topológico X es conexo si y sólo si no existen dos subconjuntos A y B de X, no vacíos, tales que $A \cup B = X$ y $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$.

3. Pruebe cada una de las siguientes afirmaciones.

   a) Todo espacio X con topología grosera es un espacio conexo.

b) Todo espacio X con más de un punto y topología discreta es disconexo.

c) Todo espacio infinito X con la topología de complementos finitos es un espacio conexo.

d) El espacio $\mathbb{R}$ con la topología de las colas a derecha es un conexo.

e) El espacio $\mathbb{R}^n$ con la topología usual es conexo.

f) El espacio $\mathbb{Q}$ con la topología heredada de $\mathbb{R}$ es disconexo.

g) En $\mathbb{R}$ con la topología usual, los conjuntos conexos son los intervalos.

h) El espacio $\mathbb{R}$ con la topología generada por los intervalos de la forma $[a, b)$ es disconexo.

i) Sea $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. Pruebe que S^2 es un espacio conexo y que $\mathbb{R}^3 \setminus S^2$ es disconexo.

j) El Plano de Moore es un espacio conexo.

k) El espacio peine es un espacio conexo.

4. Dé una topología sobre $\mathbb{R}$ más fina que la usual, con la que $\mathbb{R}$ continúe siendo un espacio conexo.

5. Sean X un espacio conexo, Y un subespacio conexo de X y A y B una disconexión de $X \setminus Y$. Pruebe que $Y \cup A$ y $Y \cup B$ son conexos.

6. Sea X un espacio conexo. Pruebe que la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es un subespacio conexo de $X \times X$.

7. Demuestre que un espacio topológico X es conexo si y sólo si para todo subconjunto A de X no vacío y tal que $A \neq X$, se tiene que $\mathrm{Fr}A \neq \emptyset$.

8. Sean X un espacio topológico, $A \subset X$ y Y un subespacio conexo de X tal que $Y \cap A \neq \emptyset$ y $Y \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Pruebe que la intersección de Y con la frontera de A es no vacía.

8.2. Propiedades de los espacios conexos

En esta sección estudiaremos las más relevantes propiedades de los espacios conexos.

8.2.1 Proposición. *Si A y B conforman una disconexión de un espacio X y si $Y \subset X$ es conexo, entonces $Y \subset A$ o $Y \subset B$.*

Demostración. Si $Y \cap A \neq \emptyset$ y $Y \cap B \neq \emptyset$, entonces $Y \cap A$ y $Y \cap B$ constituyen una disconexión de Y. □

En el siguiente resultado veremos el efecto de una función continua sobre un conjunto conexo.

8.2.2 Proposición. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y si A es un subconjunto conexo de X, entonces $f(A)$ es un subconjunto conexo de Y.*

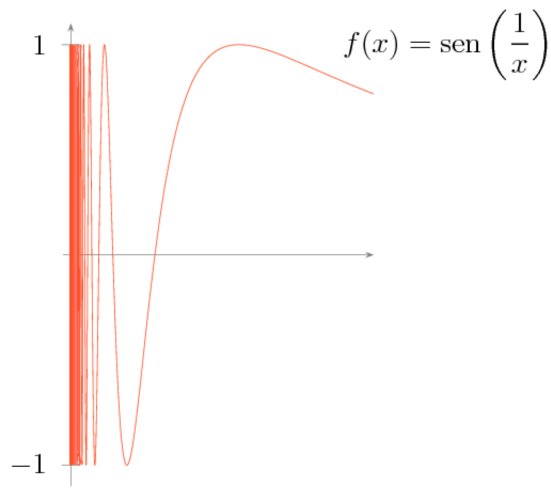
Demostración. Si f es constante en A, $f(A)$ es un conjunto unitario y por tanto es conexo. Si f no es constante en A, consideremos el espacio discreto $\{0,\, 1\}$ y sea $g : f(A) \longrightarrow \{0,\, 1\}$ una función continua. Si g no es una función constante, $g \circ f \restriction_A : A \longrightarrow \{0,\, 1\}$ tampoco lo es. □

En la siguiente proposición estudiaremos un resultado que es intuitivamente claro. Si un conjunto está formado por una sola pieza, su adherencia también debe estarlo.

8.2.3 Proposición. *Sea X un espacio topológico. Si $A \subset X$ es un conjunto conexo y si $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B también es un conjunto conexo.*

Demostración. Consideremos el espacio discreto $\{0,\, 1\}$ y una función continua $f : B \longrightarrow \{0,\, 1\}$. Puesto que A es conexo, la restricción $f \restriction_A$ debe ser constante. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f(A) = 0$. Si $f(b) = 1$ para algún $b \in B$, la continuidad de f implica que existe una vecindad V de b tal que $f(V) = 1$. Esto implica que $V \cap A = \emptyset$ y por lo tanto que $b \notin \overline{A}$. □

8.2.4 EJEMPLO.
El subespacio del plano $X = \left\{\left(x, sen\,\frac{1}{x}\right) : 0 < x \leq 1\right\}$ es conexo porque es la imagen del subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ bajo una función continua.
La adherencia de este conjunto, $X \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$, es también un conjunto conexo que se conoce como la curva del topólogo.



El resultado de la Proposición 8.2.3 permite garantizar la conexidad de algunos conjuntos (los que están entre A y $\overline{A}$) cuando se sabe que A es conexo. El siguiente resultado permite, bajo cierta condición, generar conjuntos conexos a partir de otros que ya se sabe que lo son.

8.2.5 Proposición. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de subconjuntos conexos de un espacio X con intersección no vacía. El conjunto $\bigcup_{i\in I} X_i$ es conexo.*

Demostración. Consideremos el espacio discreto $\{0,1\}$, $x_0 \in \bigcap_{i\in I} X_i$ y $f : \bigcup_{i\in I} X_i \longrightarrow \{0,1\}$ una función continua. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f(x_0) = 0$. Dado $i \in I$ se tiene que la restricción $f \restriction_{X_i}: X_i \longrightarrow \{0,1\}$ es una función continua y por lo tanto constante. Entonces $f \restriction_{X_i} (x) = 0$ para todo $x \in X_i$. Esto implica que $f(x) = 0$ para todo $x \in \bigcup_{i\in I} X_i$, de donde $\bigcup_{i\in I} X_i$ es un conjunto conexo. □

8.2.6 EJEMPLO.
Si $a < b$, entonces el intervalo abierto (a,b) de $\mathbb{R}$ con la topología usual es conexo, puesto que $(a,b) = \bigcup_{0<\epsilon<\frac{b-a}{2}} [\frac{b-a}{2} - \epsilon, \frac{b-a}{2} + \epsilon]$.
En realidad todo intervalo no vacío de números reales se puede expresar como la unión de una familia de intervalos cerrados con intersección no vacía, queda entonces demostrado que los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ con la topología usual son los intervalos.

8.2.7 Proposición. *Si X y Y son espacios conexos, entonces $X \times Y$ es un espacio conexo.*

Demostración. Sean f una función continua de $X \times Y$ en el espacio discreto $\{0,1\}$, (x_1, y_1) y (x_2, y_2) puntos distintos de $X \times Y$. Puesto que los conjuntos $\{(x_1, y) : y \in Y\}$ y $\{(x, y_2) : x \in X\}$ son conexos y $(x_1, y_2) \in \{(x_1, y) : y \in Y\} \cap \{(x, y_2) : x \in X\}$, entonces $M = \{(x_1, y) : y \in Y\} \cup \{(x, y_2) : x \in X\}$ es conexo, luego la restricción de f a M es una función constante y puesto que $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in M$, se concluye que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Entonces f es una función constante, luego $X \times Y$ es conexo. $\square$

8.2.8 Observación. *Nótese que utilizando un proceso de inducción, se obtiene que el producto de cualquier familia finita de espacios conexos es un espacio conexo.*

8.2.9 Proposición. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. El producto $\prod_{i\in I} X_i$ es un espacio conexo si y sólo si X_i es conexo para cada $i \in I$.*

Demostración. Si $\prod_{i\in I} X_i$ es un espacio conexo, entonces cada X_i es conexo, porque $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ es una función continua, para cada $i \in I$.

De manera recíproca, sea $a = (a_i)_{i\in I}$ un punto fijo de $\prod_{i\in I} X_i$ y consideremos S la unión de todos los subconjuntos conexos de $\prod_{i\in I} X_i$ que contienen al punto a. El conjunto S es conexo, pues es la unión de una familia de conjuntos conexos con intersección no vacía. Además, S es denso en $\prod_{i\in I} X_i$. En efecto, si $U = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap ... \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$ es un conjunto abierto básico de $\prod_{i\in I} X_i$, y si $x_{\alpha_j} \in x_{\alpha_j}$, para cada $j = 1, ..., n$, entonces el punto b, donde $b_i = a_i$ si $i \neq \alpha_j$, para cada $j = 1, ..., n$ y $b_{\alpha_j} = x_{\alpha_j}$, para cada $j = 1, ..., n$, pertenece a S, porque el conjunto $\{x \in \prod_{i\in I} X_i : x_i = a_i$, siempre que $i \neq \alpha_j$, para cada $j = 1, ..., n\}$ es conexo por ser homeomorfo a un producto finito de espacios conexos y contiene tanto a a como a b. Entonces S es denso en $\prod_{i\in I} X_i$, de donde $\prod_{i\in I} X_i$ es conexo. $\square$

Ejercicios 8.2

1. Dé una demostración o un contraejemplo que pruebe o refute cada una de las siguientes afirmaciones.

   a) Todo subconjunto denso de un espacio conexo es conexo.

   b) La intersección de subconjuntos conexos de un espacio topológico es un conjunto conexo.

   c) La unión arbitraria de subconjuntos conexos de un espacio topológico es un conjunto conexo.

2. Demuestre las Proposiciones 8.2.2, 8.2.3 y 8.2.5 utilizando la definición 8.1.2.

3. Sean X un espacio topológico y A y B dos subconjuntos conexos de X tales que $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Demuestre que $A \cup B$ es conexo.

4. Sean X un espacio topológico y $(X_i)_{i=1}^n$ una familia finita de subconjuntos conexos de X tal que $X_i \cap X_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $i = 1, ..., n-1$. Pruebe que $\bigcup_{i=1}^n X_i$ es un subconjunto conexo de X.

5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una función. Demuestre que f es continua si y sólo si es constante.

6. Demuestre que si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es una función continua, entonces f tiene un punto fijo, esto es, existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

7. Demuestre que toda aplicación continua y abierta de un espacio compacto X en un espacio de Hausdorff y conexo Y es sobreyectiva.

8.3. Componentes conexas

Consideremos el espacio $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ como subespacio de $\mathbb{R}$. Es claro que X no es un espacio conexo; por ejemplo $X = ((-\infty, 0) \cap X) \cup ((0, \infty) \cap X)$; y nuestra intuición nos permite afirmar que los subconjuntos conexos de X más grandes que podemos encontrar son los intervalos de la forma $(n, n+1)$ con $n \in \mathbb{Z}$. Más aún, dado un elemento $x \in X$ existe uno y sólo un intervalo de la forma $(n, n+1)$ que contiene a x, es decir, cada elemento de X pertenece exactamente a un subconjunto conexo maximal de X. Estos conjuntos conexos maximales reciben el nombre de *componentes conexas de* X y si $n < x < n+1$, entonces el intervalo $(n, n+1)$ se llama *la componente conexa* de x en X. Intuitivamente, lo que hemos hecho es partir el espacio X en piezas lo más grandes posible, de manera tal que cada una de estas piezas resulta ser un conjunto conexo.

La siguiente definición precisa estos conceptos.

8.3.1 Definición. *Sea X un espacio topológico. La relación $\sim$ definida sobre X por $x \sim y$ si y sólo si existe un subconjunto conexo de X que contiene a x y a y es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia según $\sim$ son las* componentes conexas *de X y la clase de equivalencia a la cual pertenece un punto $x \in X$, se llama la* componente conexa *de x en X.*

8.3.2 Observación. *Aunque aparentemente sea un hecho completamente natural, es importante hacer notar que para cada $x \in X$, la componente conexa de x es precisamente la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x. Así, las componentes conexas de un espacio topológico son conjuntos conexos.*

8.3.3 EJEMPLOS.

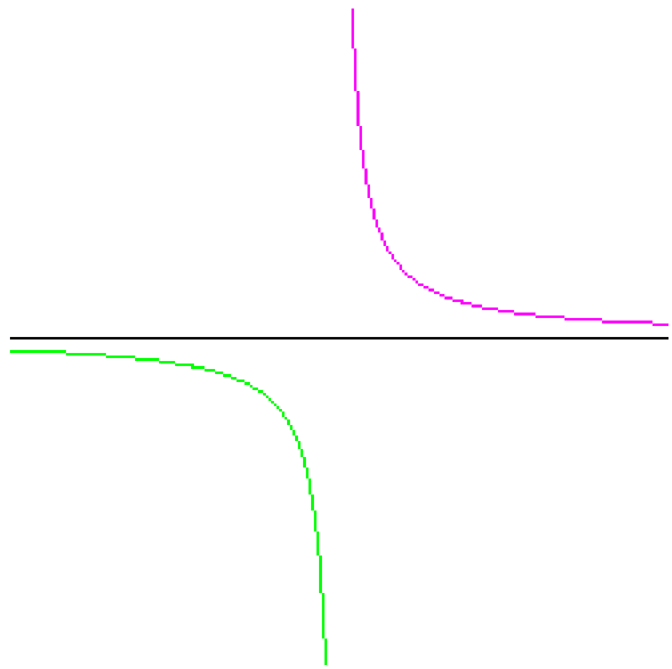
1. *Si X es un espacio discreto y $x \in X$, entonces la componente conexa de x en X es $\{x\}$.*

2. *Si X es un espacio conexo y $x \in X$, entonces la componente conexa de x en X es todo el espacio X.*

3. *Si $\mathbb{Q}$ tiene la topología heredada de $\mathbb{R}$ y si $x \in \mathbb{Q}$, entonces la componente conexa de x es $\{x\}$.*

4. *Si $\mathbb{R}$ tiene la topología generada por los intervalos de la forma $[a, b)$ y si $x \in \mathbb{R}$, entonces la componente conexa de x es $\{x\}$.*

5. *Sea X el subespacio del plano $X = \{(x, y) : y = 0\} \bigcup \left\{ \left(x, \frac{1}{x}\right) : x \neq 0 \right\}$.*



La componente conexa de un punto $(a,b) \in X$ *es* $\{(x,y) : y = 0\}$ *si* $b = 0$, $\left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x < 0\right\}$ *si* $a < 0$ *y* $b \neq 0$ *y es* $\left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x < 0\right\}$ *en el caso en que* $a > 0$ *y* $b \neq 0$.

En los espacios dados en los dos últimos ejemplos, los únicos subespacios del espacio dado, no vacíos y conexos son los que se reducen a un punto. Estos espacios merecen un tratamiento especial.

8.3.4 Definición. *Un espacio topológico* X *es* totalmente disconexo *si la componente conexa de cada punto* $x \in X$ *es el conjunto* $\{x\}$.

Por ejemplo, todo espacio discreto es totalmente disconexo. En efecto, si A es la componente conexa de un punto $x \in X$ y si A no se reduce a $\{x\}$, entonces $\{x\}$ y $A \setminus \{x\}$ constituyen una disconexión de A.

Ejercicios 8.3

1. Sea X un espacio topológico. Pruebe que la relación $\sim$ definida sobre X

por $x \sim y$ si y sólo si existe un subconjunto conexo de X que contiene a x y a y es una relación de equivalencia.

2. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Pruebe que la componente conexa de x es la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x.

3. Sea X un espacio topológico. Pruebe que toda componente conexa es un conjunto cerrado.

4. Si X es un espacio discreto y $x \in X$, pruebe que la componente conexa de x en X es $\{x\}$.

5. Sean X un espacio conexo y $x \in X$. Pruebe que la componente conexa de x en X es todo el espacio X.

6. Si $\mathbb{Q}$ tiene la topología heredada de $\mathbb{R}$ y si $x \in \mathbb{Q}$, pruebe que la componente conexa de x es $\{x\}$.

7. Si $\mathbb{R}$ tiene la topología generada por los intervalos de la forma $[a, b)$ y si $x \in \mathbb{R}$, pruebe que la componente conexa de x es $\{x\}$.

8. Defina una topología sobre $\mathbb{R}$ tal que la componente conexa de 0 sea $\mathbb{Q}$.

9. Sean X y Y espacios topológicos, $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y A la componente conexa de un punto $a \in X$. ¿Es $f(A)$ la componente conexa de $f(a)$ en Y? Justifique completamente su respuesta.

10. Pruebe que todo espacio finito de Hausdorff es totalmente disconexo.

11. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X totalmente disconexo. ¿Es $\overline{Y}$ totalmente disconexo?

8.4. Conexidad por arcos

El espacio topológico que hemos llamado la curva del topólogo es un ejemplo de un espacio en el que, aunque sabemos que es conexo, tenemos la impresión de que en cierto sentido no nos es posible movernos libremente por todo el espacio. Si estamos ubicados en un punto del espacio como $\left(\frac{1}{10\pi}, 0\right)$ y queremos caminar hasta el punto $(0,0)$ no podemos hacerlo moviéndonos en el espacio sin necesidad de dar un salto.

En esta sección estudiaremos espacios en los que es posible pasar de un punto cualquiera a otro a través de un "arco" contenido en el espacio.

Comenzaremos con algunas definiciones que precisen nuestras ideas.

8.4.1 Definición. *Sean X un espacio topológico y x y y puntos de X. Un* arco *en X de x a y es una función continua $f : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Se dice también que el arco f conecta a x con y.*

Si X es la curva del topólogo, la función $f : [0,1] \longrightarrow X$ definida por $f(x) = \left(\dfrac{x+2}{6\pi}, \operatorname{sen}\dfrac{6\pi}{x+2}\right)$ es un ejemplo de un arco de $\left(\dfrac{1}{3\pi}, 0\right)$ a $\left(\dfrac{1}{2\pi}, 0\right)$.

8.4.2 Definición. *Un espacio topológico X es* arcoconexo *si para cada x y cada y puntos de X existe un arco en X de x a y.*

La curva del topólogo no es un espacio arcoconexo porque no existe un arco que conecte un punto de la forma $(0,a)$ con un punto de la forma $\left(x, \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)$.

La siguiente proposición es una consecuencia directa de las definiciones y de la conexidad del intervalo $[0,1]$. Su demostración se deja como ejercicio.

8.4.3 Proposición. *Todo espacio arcoconexo es conexo.*

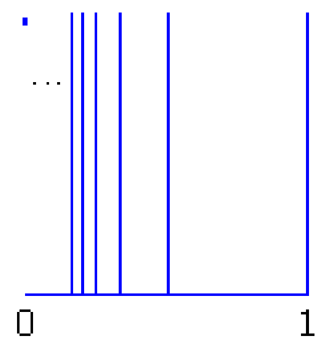
Tal como sucede con la conexidad, las funciones continuas preservan la arcoconexidad.

8.4.4 Proposición. *Sean X un espacio arcoconexo y f una función continua de X en un un espacio topológico Y. Entonces $f(X)$ es un subespacio arcoconexo de Y.*

Demostración. Sean $f(x_1)$ y $f(x_2)$ puntos de $f(X)$. Puesto que X es arcoconexo, existe un arco $g : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $g(0) = x_1$ y $g(1) = x_2$. La función $f \circ g$ es un arco en Y que conecta a $f(x_1)$ con $f(x_2)$. $\square$

Dado un espacio topológico X la relación $\equiv$ definida por $x \equiv y$ si y sólo si existe un arco que conecta a x con y es una relación de equivalencia sobre X. Las clases de equivalencia determinadas por la relación $\equiv$ se llaman *componentes arcoconexas* de X y son subconjuntos de X no vacíos, disyuntos y arcoconexos cuya unión es todo X. Además, si A es un subconjunto arcoconexo de X, entonces A está contenido en una y sólamente una componente arcoconexa de X.

Sean X el espacio peine y $Y = X \setminus \{(0, y) : 0 < y < 1\}$.



Se tiene que Y es un espacio conexo, por lo cual Y tiene una sola componente conexa, y tiene dos componentes arcoconexas que son $\{(0,1)\}$ y $Y \setminus \{(0,1)\}$. Así, Y no es arcoconexo.

Ejercicios 8.4

1. Pruebe que la curva del topólogo no es un espacio arcoconexo mostrando que no existe un arco que conecte un punto de la forma $(0, a)$ con un punto de la forma $\left(x, \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)$.

2. Pruebe que si del espacio peine se quita el segmento $\{(0, y) : 0 < y < 1\}$, el espacio resultante no es arcoconexo.

3. Determine si el subespacio de $\mathbb{R}^2$,
$$C = \left\{(x, y) : x \geq 0,\ y = \frac{x}{n} \text{ donde } n \in \mathbb{N},\ \text{y } x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$
es arcoconexo.

4. ¿Es todo subconjunto conexo de un espacio arcoconexo también arcoconexo?

5. Pruebe que todo espacio arcoconexo es conexo.

6. Pruebe que la relación $\equiv$ definida por $x \equiv y$ si y sólo si existe un arco que conecta a x con y es una relación de equivalencia sobre X.

7. Pruebe que si A es un subconjunto arcoconexo de un espacio X, entonces A intersecta a una y sólamente una componente arcoconexa de X.

8. Pruebe que un espacio topológico X es arcoconexo si y sólo si tiene sólamente una componente arcoconexa.

8.5. Espacios localmente conexos

En esta sección estudiaremos una propiedad que se refiere a la conexidad de las vecindades de un punto de un espacio topológico, pero que no guarda relación alguna con la conexidad del espacio.

8.5.1 Definición. *Un espacio topológico X es* localmente conexo *si cada punto $x \in X$ tiene un sistema fundamental de vecindades conexas.*

8.5.2 EJEMPLOS.

1. *Todo espacio discreto X es localmente conexo. En efecto, si $x \in X$, entonces $\{\{x\}\}$ es un sistema fundamental de vecindades de x conexas. Nótese que X no es conexo si tiene más de un punto. Esto muestra que existen espacios localmente conexos que no son conexos.*

2. *Todo conjunto infinito con la topología de complementos finitos es localmente conexo.*

3. *El Plano de Moore es localmente conexo.*

4. *El espacio $\mathbb{R}$ con la topología de colas a derecha es localmente conexo.*

5. *El espacio peine no es localmente conexo. Un punto de la forma $(0, y)$, con $0 < y \leq 1$ no tiene un sistema fundamental de vecindades conexas. Este es un ejemplo de un espacio conexo que no es localmente conexo.*

La siguiente proposición establece una condición necesaria para que un espacio sea localmente conexo.

8.5.3 Proposición. *Si X es un espacio localmente conexo, entonces las componentes conexas de X son conjuntos abiertos.*

Demostración. Si A es una componente conexa de X, si $x \in A$ y si V es una vecindad conexa de x, entonces $V \subset A$. □

La proposición recíproca no es siempre cierta, en el espacio peine X por ejemplo, las componentes conexas son conjuntos abiertos.

8.5.4 Observación. *Si se supone que para cada subconjunto abierto U de X las componentes conexas de U son abiertas en X, entonces X es un espacio localmente conexo. En efecto, si $x \in X$ y U es una vecindad abierta de x, entonces la componente conexa de x en U es una vecindad abierta y conexa de x en X.*

Ejercicios 8.5

1. Demuestre que $\mathbb{R}$ es un espacio localmente conexo.

2. Demuestre que el espacio de Sierpinski es localmente conexo.

3. Pruebe que todo conjunto infinito con la topología de complementos finitos es localmente conexo.

4. Pruebe que el Plano de Moore es localmente conexo.

5. Pruebe que $\mathbb{R}$ con la topología de colas a derecha es localmente conexo.

6. Dé un ejemplo de una función continua y sobreyectiva definida de un espacio localmente conexo en uno que no lo sea.

7. Sean X y Y espacios homeomorfos. Demuestre que si X es localmente conexo, entonces Y también lo es.

8. Muestre con un ejemplo que la unión finita de subconjuntos localmente conexos de un espacio topológico no es, en general, localmente conexa.

9. Demuestre que la unión finita de subconjuntos localmente conexos y cerrados de un espacio topológico es localmente conexa.

10. Muestre con un ejemplo que la unión de un número infinito de subconjuntos localmente conexos y cerrados de un espacio topológico no es, en general, localmente conexa.

11. Demuestre que la intersección finita de subconjuntos localmente conexos de un espacio topológico es localmente conexa.

Apéndice A

Teoría de Conjuntos

En esta sección se presentan muy brevemente conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos, así como la notación que se utiliza en estas notas. Suponemos que el lector está familiarizado con estas definiciones y resultados por lo cual no incluimos demostraciones.

A.1. Definiciones básicas

Asumimos que el significado de la palabra "conjunto" es intuitivamente claro y, como es costumbre, utilizamos preferiblemente letras mayúsculas $A,\ B, ...$ para denotar los conjuntos y letras minúsculas $a,\ b, ...$ para denotar los elementos de un conjunto.
Si a y b son elementos distintos, escribimos $a \neq b$ y con $A \neq B$ estamos indicando que A y B son conjuntos distintos.
Si un elemento a pertenece al conjunto A utilizaremos la notación $a \in A$ y si deseamos expresar que a no es un elemento del conjunto A escribiremos $a \notin A$. Para indicar que todos los elementos del conjunto A pertenecen también al conjunto B, esto es que que A es un subconjunto de B o que el conjunto A está contenido en B, escribiremos $A \subset B$ y si deseamos especificar que, aunque A es un subconjunto de B, existen elementos de B que no pertenecen a A, escribiremos $A \subsetneq B$. En este caso diremos que A es un *subconjunto propio* de B. Como es natural, si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces A y B tienen los mismos elementos, en este caso escribimos $A = B$.
Para describir un conjunto podemos listar de manera explícita sus elementos

como cuando escribimos $A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, o indicar una propiedad que los caracterice, como cuando utilizamos la notación

$$A = \{x : x \text{ es un número primo menor que } 10\},$$

o equivalentemente

$$A = \{x \,|\, x \text{ es un número primo menor que } 10\}.$$

Denotamos con el símbolo $\emptyset$ al conjunto vacío y afirmamos que $\emptyset \subset X$ para todo conjunto X.
Si X es un conjunto cualquiera, la colección de todos los subconjuntos de X es un conjunto que denotamos con el símbolo $\mathcal{P}(X)$ y llamamos el conjunto "partes de X", o conjunto "potencia de X".
Por ejemplo, si $X = \{0,\, 1,\, 2\}$, entonces

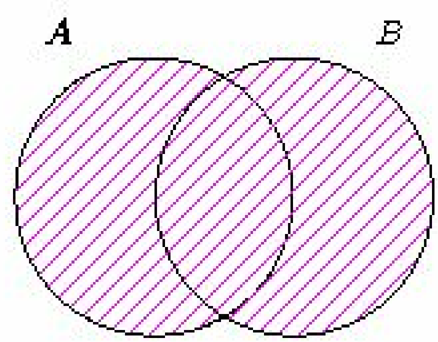
$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset,\, \{0\},\, \{1\},\ \{2\},\, \{0,\, 1\},\, \{0,\, 2\},\, \{1,\, 2\}, \{0,\, 1,\, 2\}\}.$$

Observamos que si X es un conjunto finito con n elementos, entonces $\mathcal{P}(X)$ contiene 2^n elementos.

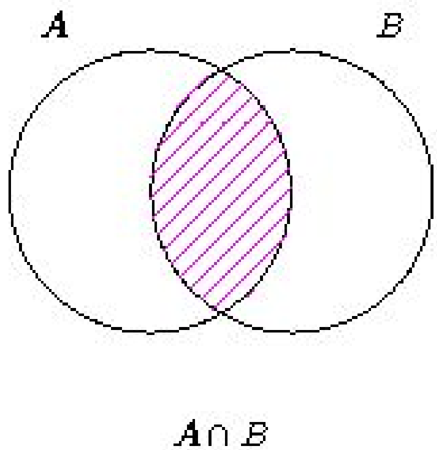
A.2. Unión, intersección y diferencia - Diferencia simétrica

Si A y B son conjuntos entonces la *unión* de A y B, que denotamos $A \cup B$, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o pertenecen a B. Es decir

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$



$A \cup B$



Si A y B son conjuntos entonces la *intersección* de A y B, que denotamos $A \cap B$, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y simultáneamente pertenecen a B. Es decir

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Si $A \cap B = \emptyset$, decimos que los conjuntos A y B son disyuntos.
De las definiciones se concluye que $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$.
Además se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$ para cada conjunto A.

2. $A \cup \emptyset = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$ para cada conjunto A.

3. $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$ para todo conjunto A y todo conjunto B.

4. $A \cup B = A$ si y sólo si $B \subset A$.

5. $A \cap B = A$ si y sólo si $A \subset B$.

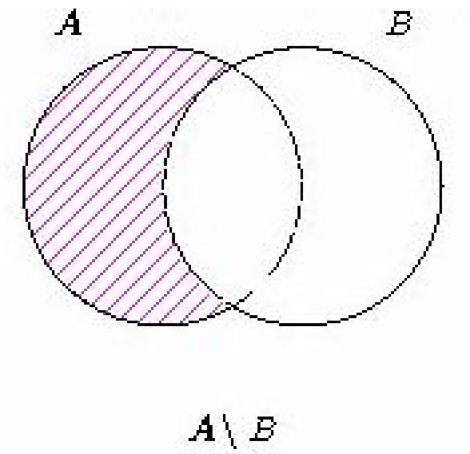
6. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ para A, B y C conjuntos arbitrarios.

7. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ para A, B y C conjuntos arbitrarios.

8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ para A, B y C conjuntos arbitrarios.

9. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para A, B y C conjuntos arbitrarios.

Además de la unión y la intersección, la *diferencia de conjuntos* es una operación interesante y muy útil.



Si A y B son conjuntos entonces la *diferencia* $A \setminus B$ es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. Es decir

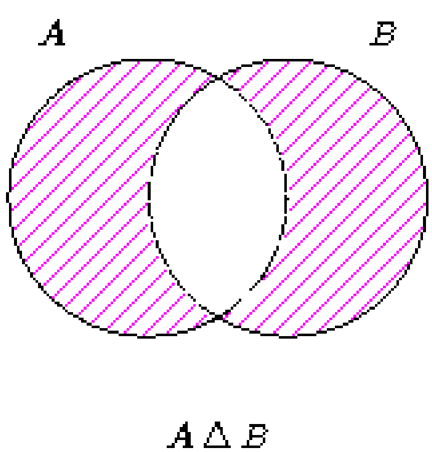
$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Si estamos trabajando con subconjuntos de un conjunto fijo X y $A \subset X$ nos referiremos a $X \setminus A$ como el complemento de A en X y lo denotaremos también con A^c o con $\complement A$.
Las siguientes propiedades se conocen con el nombre de *Leyes de De Morgan* y resultan de gran utilidad en el trabajo con conjuntos.

1. Si A y B son subconjuntos de X entonces $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

2. Si A y B son subconjuntos de X entonces $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Relacionada con la operación diferencia de conjuntos está la *diferencia simétrica*.



Si A y B son conjuntos entonces la *diferencia simétrica* entre A y B, $A\Delta B$, es el conjunto $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Expresado de otra forma, $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Ejercicios A.1-2

1. Demuestre con todo detalle cada una de las siguientes afirmaciones:

    a) $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$ para cada conjunto A.

    b) $A \cup \emptyset = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$ para cada conjunto A.

    c) $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$ para todo conjunto A y todo conjunto B.

    d) $A \cup B = A$ si y sólo si $B \subset A$.

    e) $A \cap B = A$ si y sólo si $A \subset B$.

    f) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ para A, B y C conjuntos arbitrarios.

    g) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ para A, B y C conjuntos arbitrarios.

    h) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ para A, B y C conjuntos arbitrarios.

    i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para A, B y C conjuntos arbitrarios.

    j) Si A y B son subconjuntos de X entonces $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

    k) Si A y B son subconjuntos de X entonces $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

    l) Si X es un conjunto con n elementos, entonces $\mathcal{P}(X)$ contiene exactamente 2^n elementos.

2. Escriba los siguientes conjuntos en términos de uniones e intersecciones de los conjuntos A, B y C.

    a) $\{x : x \in A \text{ y } (x \in B \text{ o } x \in C)\}$.

    b) $\{x : x \in A \text{ o } (x \in B \text{ y } x \in C)\}$.

    c) $\{x : (x \in A \text{ y } x \in B) \text{ o } x \in C\}$.

    d) $\{x : (x \in A \text{ o } x \in B) \text{ y } x \in C\}$.

3. En los siguientes literales dé una demostración de las afirmaciones que considere verdaderas o ejemplos que muestren que determinadas afirmaciones son falsas. En caso de que una igualdad no se satisfaga verifique si por lo menos una de las contenencias es cierta.

    a) $A \setminus (A \setminus B) = B$.

b) $A \setminus (B \setminus A) = A \setminus B$.

c) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

d) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

e) $A\Delta A = A$ para cada conjunto A.

f) $A\Delta\emptyset = A$ para cada conjunto A.

g) $A\Delta B = B\Delta A$ para todo conjunto A y todo conjunto B.

h) $A\Delta B = A$ si y sólo si $B = \emptyset$.

i) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ para A, B y C conjuntos arbitrarios.

j) Si A y B son subconjuntos de X entonces $(A\Delta B)^c = A^c\Delta B^c$.

A.3. Uniones e intersecciones arbitrarias

Así como es posible conseguir un nuevo conjunto uniendo o intersectando dos conjuntos dados, es posible formar nuevos conjuntos construyendo la unión o la intersección de una colección arbitraria de conjuntos, o dicho de otra manera, de una *familia* arbitraria de conjuntos.

Dada una colección $\mathcal{A}$ de conjuntos definimos la unión de la colección como el conjunto

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \{x : x \in A \text{ para algún } A \in \mathcal{A}\}$$

y la intersección de la colección como el conjunto

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \{x : x \in A \text{ para cada } A \in \mathcal{A}\}.$$

Si la colección $\mathcal{A}$ es vacía, ningún elemento x satisface la condición necesaria para poder afirmar que pertenece a $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$. Entonces $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \emptyset$. Pero la expresión $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$ sólo tiene sentido si estamos pensando en un conjunto X que sea todo nuestro "universo". De ser así, cada elemento $x \in X$ pertenece a $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$ porque de lo contrario existiría $A \in \mathcal{A} = \emptyset$ tal que $x \notin A$, lo cual es absurdo. Entonces $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = X$.

Si $\mathcal{A}$ es una colección de subconjuntos de un conjunto X entonces las Leyes de De Morgan tienen la siguiente presentación:

1. $\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^c = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^c$.

2. $\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^c = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^c$.

Ejercicios A.3

1. Demuestre las leyes de De Morgan:
   a) $\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^c = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^c$.
   b) $\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^c = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^c$.
2. Justifique cuidadosamente cada una de las siguientes afirmaciones:
   a) Si $\mathcal{A}$ es una familia vacía de conjuntos entonces $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \emptyset$.
   b) Si $\mathcal{A}$ es una familia vacía de subconjuntos de X entonces $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = X$.
3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = [-n, n]$. Calcule $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
4. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = [-n, n]$. Calcule $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = (-n, n)$. Calcule $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
6. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = (-n, n)$. Calcule $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
7. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \left[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right]$. Calcule $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
8. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \left[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right]$. Calcule $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
9. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \{x \in \mathbb{R} : \frac{-1}{n} < x < \frac{1}{n}\}$. Calcule $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
10. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \{x \in \mathbb{R} : \frac{-1}{n} < x < \frac{1}{n}\}$. Calcule $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
11. En los siguientes literales dé una demostración de las afirmaciones que considere verdaderas o ejemplos que muestren que determinadas afirmaciones son falsas.
    a) Si $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}}$ entonces $x \in A$ para al menos un elemento $A \in \mathcal{A}$.

b) Si $x \in A$ para al menos un elemento $A \in \mathcal{A}$ entonces $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}}$.

c) Si $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}}$ entonces $x \in A$ para cada elemento $A \in \mathcal{A}$.

d) Si $x \in A$ para cada elemento $A \in \mathcal{A}$ entonces $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}}$.

e) Si $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}}$ entonces $x \in A$ para al menos un elemento $A \in \mathcal{A}$.

f) Si $x \in A$ para al menos un elemento $A \in \mathcal{A}$ entonces $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}}$.

g) Si $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}}$ entonces $x \in A$ para cada elemento $A \in \mathcal{A}$.

h) Si $x \in A$ para cada elemento $A \in \mathcal{A}$ entonces $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}}$.

A.4. Producto cartesiano

Antes de dar la definición precisa del producto cartesiano de dos conjuntos nos referiremos brevemente al concepto de pareja ordenada. Rigurosamente hablando la pareja ordenada (a, b) es el conjunto $\{\{a\}, \{a,\ b\}\}$. La primera coordenada de la pareja es el elemento que aparece en los dos conjuntos que la definen y la segunda coordenada es el elemento que aparece sólo en uno de los conjuntos. Si $a = b$ entonces la pareja (a, b) se reduce al conjunto $\{\{a\}\}$ y en este caso la primera coordenada es igual a la segunda.
Sean X y Y dos conjuntos. El producto cartesiano $X \times Y$ es el conjunto de parejas ordenadas que tienen como primera coordenada un elemento de X y como segunda coordenada un elemento de Y. Esto es:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ y } y \in Y\}.$$

De la definición se tiene que si X y Y son conjuntos entonces $X \times \emptyset = \emptyset \times Y = \emptyset$ y que, en general, $X \times Y \neq Y \times X$.

Ejercicios A.4

1. Muestre con un ejemplo que si A y B son conjuntos arbitrarios entonces no es siempre cierto que $A \times B = B \times A$. ¿Bajo qué condiciones es cierta esta igualdad?

2. Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ se pueden expresar como el producto cartesiano de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$.

   a) $\{(x, y) : y \text{ es un entero }\}$.

b) $\{(x, y) : x$ es un natural par y $y \in \mathbb{Q}\}$.

c) $\{(x, y) : y < x\}$.

d) $\{(x, y) : x$ es un múltiplo entero de $\pi\}$.

e) $\{(x, y) : x^2 - y^2 < 1\}$.

3. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. En cada caso dé una demostración o un contraejemplo indicando además si por lo menos es cierta una contenencia.

   a) $A \times (A \setminus B) = (A \times A) \setminus (A \times B)$.

   b) $A \times (B \setminus A) = (A \times B) \setminus (A \times A)$.

   c) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

   d) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

   e) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

   f) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$.

   g) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

   h) $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus (B \times D)$.

A.5. Funciones

Sean X y Y conjuntos. Una función (o aplicación) f de X en Y, que denotamos por $f : X \longrightarrow Y$, es un subconjunto de $X \times Y$ tal que:

1. Para cada $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$.

2. Si $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in f$ entonces $y = z$.

La relación $(x, y) \in f$ se suele simbolizar por $y = f(x)$ y $f(x)$ se acostumbra llamar la *imagen* de x por la función f. También utilizaremos la notación $x \longmapsto f(x)$ para indicar que $(x, f(x)) \in f$. Informalmente hablando, una función de un conjunto X en un conjunto Y se puede describir dando una regla que permita calcular $f(x)$ para cada $x \in X$, como cuando se estudia cálculo y se describe una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ por medio de la expresión $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$.

A.5.1 EJEMPLO.
Sean X un conjunto y $A \subset X$. La función $\lambda_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$ definida por

$$\lambda_A(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \notin A \\ 1 & si\ x \in A \end{cases}$$

es la función característica de A. Nótese que esta función caracteriza y está completamente caracterizada por el conjunto A.

Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función entonces el conjunto X se llama el *dominio* de f, el conjunto Y es el *codominio* de f y el subconjunto de Y cuyos elementos son las imágenes de los elementos de X, esto es el conjunto $\{f(x) : x \in X\}$, es el rango de f. Denotamos por $\operatorname{Dom} f$ el dominio de f, por $\operatorname{Cod} f$ el codominio de f y por $\operatorname{Ran} f$ el rango de la función f.
Dos funciones f y g son iguales si tienen el mismo dominio, el mismo codominio y si actúan de la misma manera sobre cada elemeno del dominio. Esto es, si $f(x) = g(x)$ para cada $x \in \operatorname{Dom} f$.

A.5.2 EJEMPLO.
Si X es un conjunto y $A,\ B \subset X$, entonces $A = B$ si y sólo si las funciones características λ_A y λ_B son iguales.
En efecto, Si A y B son subconjuntos de X, λ_A y λ_B tienen el mismo dominio y el mismo codominio y si $A = B$, entonces para cada $x \in X$, $\lambda_A(x) = \lambda_B(x)$. De manera recíproca, si $\lambda_A = \lambda_B$, entonces dado $a \in A$, se tiene que $\lambda_A(a) = 1 = \lambda_B(a)$, de donde $a \in B$. De la misma forma se obtiene que cada elemento de B también es elemento de A, lo que prueba que $A = B$.

Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función y $A \subset X$, existe una función con dominio A, que llamamos la restricción de f al conjunto A y denotamos $f\restriction_A$, definida por $f\restriction_A(a) = f(a)$ para cada $a \in A$. De manera análoga, si $f(X) \subset B \subset Y$, entonces podemos considerar la co-restricción de f a B que es una función que actúa de la misma forma que f sobre los elementos de X, pero tiene como codominio el conjunto B. No utilizaremos una notación especial para la co-restricción de una función.
Una función f definida de un conjunto X en un conjunto Y determina de manera natural dos aplicaciones. La primera, que se acostumbra denotar por el mismo símbolo f, con dominio $\mathcal{P}(X)$ y codominio $\mathcal{P}(Y)$, se denomina *imagen directa* y aplica al subconjunto A de X en el subconjunto de Y $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. La segunda aplicación, que se denomina *imagen*

recíproca y se denota por f^{-1}, está definida de $\mathcal{P}(Y)$ en $\mathcal{P}(X)$ por $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$. Por simplicidad, para $y \in Y$ escribimos $f^{-1}(y)$ en lugar de $f^{-1}(\{y\})$.

Decimos que una función $f : X \longrightarrow Y$ es *uno a uno o inyectiva* si $f(x) \neq f(y)$ siempre que x sea diferente de y, *sobreyectiva* (o simplemente sobre) si $f(X) = Y$ y *biyectiva* si es uno a uno y sobre.

Nótese que una función $f : X \longrightarrow Y$ es uno a uno si y sólo si $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subset X$ y que f es sobreyectiva si y sólo si $f(f^{-1}(B)) = B$ para todo $B \subset Y$.

Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función biyectiva, existe una función de Y en X que se llama la *inversa* de f y se denota por f^{-1} definida por $f^{-1}(y) = x$ si y sólo si $f(x) = y$. El hecho de que f sea sobreyectiva garantiza la existencia de $x = f^{-1}(y)$ para cada $y \in Y$ y el que f sea uno a uno garantiza que tal x es único.

Si $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ son funciones entonces la función compuesta $g \circ f : X \longrightarrow Z$ está definida por $g \circ f(x) = g(f(x))$. Formalmente hablando, $(x, z) \in g \circ f$ si y sólo si existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$ y $(y, z) \in g$.

Ejercicios A.5

1. Dé un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ uno a uno pero no sobreyectiva.

2. Dé un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ sobreyectiva pero no uno a uno.

3. Dé un ejemplo de una función biyectiva de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}$.

4. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Si A y B son subconjuntos de X y $A \subset B$ pruebe que $f(A) \subset f(B)$.

5. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Si C y D son subconjuntos de Y y $C \subset D$ pruebe que $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

6. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Si A y B son subconjuntos de X pruebe que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Si $\mathcal{A}$ es una familia cualquiera de subconjuntos de X, ¿se puede afirmar que $f(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} f(A)$? Justifique completamente su respuesta.

7. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Si A y B son subconjuntos de X muestre con un contraejemplo que no siempre se satisface la igualdad $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

8. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Si C y D son subconjuntos de Y pruebe que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ y que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$. Más aún, pruebe que si $\mathcal{C}$ es una familia cualquiera de subconjuntos de Y entonces $f^{-1}(\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C) = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C) = \bigcap_{C\in\mathcal{C}} f^{-1}(C)$.

9. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, en cuáles se satisface sólo una inclusión y en cuáles las dos inclusiones resultan ser falsas. En cada caso justifique completamente su respuesta con una demostración o con un contraejemplo.

   a) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Si A y B son subconjuntos de X entonces $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

   b) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Si A y B son subconjuntos de X entonces $f((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = (f(A) \setminus f(B)) \cup (f(B) \setminus f(A))$.

   c) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Si C y D son subconjuntos de Y entonces $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

10. Consideremos $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ y $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ dos funciones y definamos la función $g : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ por $g(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$. Pruebe o refute cada una de las siguientes afirmaciones:

    a) g es uno a uno si y sólo si f_1 y f_2 lo son.

    b) g es sobreyectiva si y sólo si f_1 y f_2 lo son.

11. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función, $A \subset X$ y $B \subset Y$.

    a) Demuestre que $A \subset f^{-1}(f(A))$.

    b) Dé un contraejemplo que muestre que no siempre se tiene que $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

    c) ¿Bajo qué condiciones es cierta la igualdad $f^{-1}(f(A)) = A$?

    d) Demuestre que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

    e) Dé un contraejemplo que muestre que no siempre se tiene que $B \subset f(f^{-1}(B))$.

    f) ¿Bajo qué condiciones es cierta la igualdad $B = f(f^{-1}(B))$?

12. Consideremos $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ dos funciones. Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $M \subset Z$,entonces $(g \circ f)^{-1}(M) = f^{-1}(g^{-1}(M))$.

b) Si f y g son uno a uno, también lo es $g \circ f$.

c) Si f y g son sobreyectivas, también lo es $g \circ f$.

d) Si $g \circ f$ es uno a uno, entonces f es uno a uno pero g podría no serlo.

e) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva pero f podría no serlo.

13. Demuestre que $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ para A, B y C conjuntos arbitrarios, probando que las funciones características de $A\Delta(B\Delta C)$ y $(A\Delta B)\Delta C$ son iguales. (Sugerencia: Considere $X = A \cup B \cup C$.)

A.6. Productos arbitrarios

Hasta ahora nos hemos referido únicamente al producto cartesiano de dos conjuntos. En realidad estudiar este producto nos permite de manera inmediata definir el producto cartesiano de una colección finita de conjuntos. En efecto, si $X_1,\ X_2, ...,\ X_n$ es una colección de conjuntos entonces el producto cartesiano $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, que también denotaremos por $\prod_{i=1,...,n} X_i$, se define como el conjunto de n-tuplas

$$\{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in X_i \text{ para cada } i = 1, ..., n\}.$$

El ejemplo más inmediato y seguramente conocido por todos es el conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$. En este caso todos los factores del producto son iguales al conjunto de los números reales.
Un análisis un poco más detallado nos muestra que en realidad cada elemento $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ del producto cartesiano $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ es una función del conjunto $\{1,\ 2, ...,\ n\}$ en el conjunto $\bigcup_{i=1,...,n} X_i$, definida por $x(i) = x_i$ para cada $i = 1, ..., n$.
Este hecho, que podría parecer una complicación innecesaria, permite generalizar la noción de producto cartesiano a familias arbitrarias de conjuntos como lo muestra la siguiente definición.

A.6.1 Definición. *Sea $\{X_j\}_{j\in J}$ una familia de conjuntos. El producto cartesiano de esta familia se denota por $\prod_{j\in J} X_j$ y es el conjunto de todas las funciones $x : J \longrightarrow \bigcup_{j\in J} X_j$ tales que $x(j) \in X_j$ para cada $j \in J$.*

Con frecuencia utilizamos x_j para denotar a $x(j)$ y denotamos al elemento $x \in \prod_{j\in J} X_j$ por (x_j).

A.6.2 EJEMPLOS.

1. *Si $J = \mathbb{N}$ entonces cada elemento del producto $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ se puede escribir como una sucesión $(x_1, x_2, ...)$ donde $x_n \in X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Si $X_j = X$ para cada $j \in J$, entonces $\prod_{j\in J} X_j$ es el conjunto de todas las funciones definidas de J en X. Denotamos por X^J a este conjunto.*

3. *Si $X_j \subset Y_j$ para cada $j \in J$ entonces $\prod_{j\in J} X_j \subset \prod_{j\in J} Y_j$.*

Ejercicios A.6

1. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Muestre que si $X_i = \emptyset$ para algún $i \in I$ entonces $\prod_{i\in I} X_i = \emptyset$.

2. Muestre que si $n > 1$ y $X_1, ..., X_n$ son conjuntos, entonces existe una función biyectiva definida del conjunto $X_1 \times ... \times X_n$ en el conjunto $(X_1 \times ... \times X_{n-1}) \times X_n$.

3. Muestre que si $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos y si J y K son subconjuntos de I no vacíos y disyuntos, tales que $I = J \cup K$, entonces existe una función biyectiva definida del producto $\prod_{i\in I} X_i$ en el conjunto $(\prod_{j\in J} X_j) \times (\prod_{k\in K} X_k)$.

4. Con frecuencia se denota al conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con el símbolo $\mathbb{R}^\omega$. Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^\omega$ se pueden expresar como producto cartesiano de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

   a) $\{\mathbf{x} : x_n \in \mathbb{Z}$ para todo $n\}$.
   b) $\{\mathbf{x} : x_n \geq n$ para todo $n\}$.
   c) $\{\mathbf{x} : x_n = x_{n+1}$ para todo n primo$\}$.
   d) $\{\mathbf{x} : x_n \in \mathbb{Z}$ para todo $n \geq 1000\}$.

5. Sean $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_i)_{i\in I}$ dos familias de conjuntos. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. En cada caso dé una demostración o un contraejemplo indicando además si por lo menos es cierta una contenencia.

a) $\prod_{i\in I}(X_i \setminus Y_i) = \prod_{i\in I} X_i \setminus \prod_{i\in I} Y_i$.

b) $\prod_{i\in I}(X_i \cup Y_i) = \prod_{i\in I} X_i \cup \prod_{i\in I} Y_i$.

c) $\prod_{i\in I}(X_i \cap Y_i) = \prod_{i\in I} X_i \cap \prod_{i\in I} Y_i$.

A.7. Relaciones

Una relación sobre un conjunto X (o en un conjunto X) es un subconjunto R del producto cartesiano $X \times X$. Si $(x, y) \in R$ escribimos $x\,R\,y$. Nótese que una función definida de un conjunto X en sí mismo es una relación f en X en la que cada elemento de X aparece como la primera coordenada de un elemento de f exactamente una vez. En este sentido las relaciones son una generalización de las funciones.
Una *relación de equivalencia* sobre un conjunto X es una relación $\sim$ en X que satisface las siguientes propiedades:

1. (Reflexividad) $x \sim x$ para todo $x \in X$.

2. (Simetría) Si $x \sim y$, entonces $y \sim x$.

3. (Transitividad) Si $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces $x \sim z$.

Dada una relación de equivalencia $\sim$ sobre un conjunto X y un elemento $x \in X$ definimos la *clase de equivalencia* de x como el conjunto $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$. De la definición se obtiene que $x \in [x]$ para cada $x \in X$ lo cual significa que $\bigcup_{x\in X}[x] = X$ y también que dadas dos clases de equivalencia $[x]$ y $[y]$, se tiene que $[x] = [y]$ o $[x] \cap [y] = \emptyset$. Expresamos estos dos hechos diciendo que la relación $\sim$ induce una *partición* de X.
Formalmente, una *partición* de un conjunto X es una colección de subconjuntos disyuntos de X cuya unión es X.
Una *relación de orden parcial* sobre un conjunto X es una relación $\leq$ en X que satisface las siguientes propiedades:

1. (Reflexividad) $x \leq x$ para todo $x \in X$.

2. (Antisimetría) Si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$.

3. (Transitividad) Si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

Si $\leq$ es una relación de orden parcial sobre un conjunto X existe una relación $<$ sobre X definida por $x < y$ si $x \leq y$ y $x \neq y$. La relación $<$ no es reflexiva pero sí transitiva. Una relación transitiva $<$ sobre un conjunto X que además tenga la propiedad de que si $x < y$ entonces $x \neq y$ se llama un *orden estricto*. Entonces cada relación de orden parcial determina un orden estricto y, recíprocamente, un orden estricto $<$ determina un orden parcial $\leq$ definido por $x \leq y$ si $x < y$ o $x = y$.
Una relación de orden parcial $\leq$ sobre un conjunto X es un *orden total* si para cada par $x,\ y$ de elementos de X se tiene exactamente una de las situaciones $x = y$, $x < y$ o $y < x$. En este caso decimos que el conjunto X está *totalmente ordenado*.

Ejercicios A.7

1. Determine cuáles de las siguientes relaciones definidas sobre $\mathbb{R}$ son relaciones de equivalencia. Para cada relación de equivalencia que encuentre determine las clase de equivalencia de cada $x \in \mathbb{R}$.

   a) $x \sim y$ sii $x - y \in \mathbb{Z}$.
   b) $x \sim y$ sii $x - y \in \mathbb{Q}$.
   c) $x \sim y$ sii $x - y \in \mathbb{R}$.
   d) $x \sim y$ sii $xy \in \mathbb{Z}$.
   e) $x \sim y$ sii $xy \in \mathbb{Q}$.
   f) $x \sim y$ sii $x \leq y$.
   g) $x \sim y$ sii $|x| = |y|$.
   h) $x \sim y$ sii $x = 2y$.

2. Determine cuáles de las siguientes relaciones definidas sobre $\mathbb{R}^2$ son relaciones de equivalencia. Para cada relación de equivalencia que encuentre determine las clase de equivalencia de cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   a) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ sii $x_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$.
   b) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ sii $x_2 - y_1 \in \mathbb{Q}$.
   c) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ sii $x_1 - y_2 \in \mathbb{R}$.
   d) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ sii $x_1 y_2 \in \mathbb{Z}$.

e) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ sii $x_1 y_2 \in \mathbb{Q}$.

f) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ sii $y_1 \leq x_2$.

g) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ sii $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$.

h) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ sii $x_1 = x_2$.

3. Consideremos $f : X \longrightarrow Y$ una función y definamos la relación $\sim$ sobre X por $a \sim b$ sii $f(a) = f(b)$.

   a) Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

   b) Demuestre que si f es sobreyectiva y si $X/\!\sim$ es el conjunto de clases de equvalencia, entonces existe una correspondencia biyectiva entre $X/\!\sim$ y el conjunto Y.

   c) Si $X = Y = \mathbb{R}$ describa un método geométrico que permita visualizar la clase de equivalencia de un número real.

4. Demuestre que dada una colección de relaciones de equivalencia sobre un conjunto X, la intersección de la colección también es una relación de equivalencia sobre X.

5. ¿Es la unión de relaciones de equivalencia sobre un conjunto X una relación de equivalencia sobre X?

6. Demuestre que la relación $\leq$ definida en $\mathbb{R}^2$ por:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \text{ sii } ((x_1, y_1) = (x_2, y_2)) \text{ o } (x_1 < x_2 \text{ o } (x_1 = x_2 \text{ y } y_1 < y_2))$$

   es una relación de orden.

   Esta relación recibe el nombre de *orden lexicográfico.*

7. Determine cuáles de las siguientes relaciones definidas sobre $\mathbb{R}^2$ son relaciones de orden.

   a) $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ sii $((x_1, y_1) = (x_2, y_2))$ o $(x_1 - y_2 \in \mathbb{N})$.

   b) $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ sii $((x_1, y_1) = (x_2, y_2))$ o $(x_2 \leq y_2)$.

   c) $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ sii $((x_1, y_1) = (x_2, y_2))$ o $(x_1 - y_2 \in \mathbb{Z})$.

   d) $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ sii $((x_1, y_1) = (x_2, y_2))$ o $(x_1 y_2 \in \mathbb{Z})$.

   e) $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ sii $((x_1, y_1) = (x_2, y_2))$ o $(x_1 y_1 \in \mathbb{Q})$.

f) $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ sii $((x_1, y_1) = (x_2, y_2))$ o $(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} < \sqrt{x_2^2 + y_2^2})$.

g) $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ sii $((x_1, y_1) = (x_2, y_2))$ o $(x_1 < x_2$ y $y_1 < y_2)$.

8. Demuestre que un elemento en un conjunto totalmente ordenado tiene a lo más un predecesor inmediato y a lo más un sucesor inmediato.

A.8. Cardinalidad

Decimos que dos conjuntos X y Y son *equipotentes* si existe una función biyectiva de X en Y. Afirmamos que existen conjuntos que se llaman *números cardinales*, de tal manera que cada conjunto X es equipotente con exactamente un número cardinal que se denota por $|X|$ y recibe el nombre de *cardinal* de X.
Si A y B son números cardinales, decimos que $A \leq B$ si y sólo si existe una función uno a uno definida de X en Y. La relación $\leq$ es un orden parcial sobre el conjunto de números cardinales. Los siguientes hechos son evidentes:

1. $|X| = |Y|$ si y sólo si X y Y son equipotentes.

2. $|X| \leq |Y|$ si y sólo si X es equipotente con algún subconjunto de Y.

Veamos ahora algunos números cardinales. El conjunto vacío es el cardinal 0 y el conjunto $\{0, ..., n-1\}$ es el cardinal n. Un conjunto X es *enumerable* si y sólo si X es finito o si es equipotente con el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. En este caso escribimos $|X| = \aleph_0$. Si X es equipotente con el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, escribimos $|X| = \mathfrak{c}$.
Con frecuencia utilizaremos los siguientes hechos:

1. $n < \aleph_0 < \mathfrak{c}$ para todo $n = 0, 1, ...$

2. La unión de cualquier colección enumerable de conjuntos enumerables es enumerable.

3. El producto de dos conjuntos enumerables es un conjunto enumerable.

4. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es enumerable.

Finalizamos esta breve introducción a la teoría de conjuntos enunciando un axioma aceptado por la gran mayoría de matemáticos.
Axioma de Elección. Dada una colección $\mathcal{A}$ de conjuntos no vacíos disyuntos dos a dos, existe un conjunto C que tiene exactamente un elemento en común con cada elemento de $\mathcal{A}$.
El Axioma de Elección afirma que cuando tenemos una colección de conjuntos no vacíos, es posible construir un nuevo conjunto escogiendo un elemento de cada conjunto de la colección.

Ejercicios A.8

1. Demuestre que $\mathbb{Q}$ es un conjunto enumerable.

2. Demuestre que una unión enumerable de conjuntos enumerables es enumerable. ¿Qué ocurre con la unión no enumerable de conjuntos enumerables?

3. Demuestre que un producto finito de conjuntos enumerables es enumerable. ¿Qué ocurre con el producto infinito de conjuntos enumerables?

4. Muestre que el Axioma de Elección es equivalente a la siguiente afirmación: *Para cualquier familia $(A_i)_{i\in I}$ de conjuntos no vacíos, con $I \neq \emptyset$, el producto cartesiano $\prod_{i\in I} A_i$ es no vacío.*

Referencias

[1] M. A. Armstrong, *Basic Topology*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[2] R. Ayala, E. Domínguez y A. Quintero, *Elementos de la Topología General*, Addison-Wesley Iberoamericana, Madrid, 1997.

[3] S. Barr, *Experiments in Topology*, Dover Publications, Inc., New York, 1964.

[4] N. Bourbaki, *General Topology*, Addison-Wesley, 1966.

[5] H. Brandsma, *Topology Explained,* http://uob-community.ballarat.edu.au/ smorris/topbookchaps1-8.pdf

[6] J. Dugundgi, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[7] J. G. Hocking y G. S. Young, *Topología*, Editorial Reverté, S. A., Provenza, 1966.

[8] J. L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1955.

[9] E. L. Lima, *Elementos de Topologia Geral*, Livros Técnicos e Científicos, Río de Janeiro, 1976.

[10] A. McCluskey y B. McMaster, *Topology Course Lecture Notes*, http://at.yorku.ca/i/a/a/b/23.htm

[11] J. Margalef, E. Outerelo y J. L. Pinilla, *Topología*, Alhambra, Madrid, España, 1979.

[12] S. A. Morris, *Topology without tears*, http://uob-community.ballarat.edu.au/ smorris/topbookchaps1-8.pdf

[13] J. R. Munkres, *Topology a first course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[14] M. G. Murdeshwar, *General Topology*, John Wiley & sons, New Delhi, India, 1983.

[15] J. M. Muñoz, *Introducción a la Teoría de Conjuntos*, Cuarta Edición, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Bogotá, 2002.

[16] G. N. Rubiano, *Topología General*, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, 2002.

[17] G. Salicrup, *Introducción a la Topología*, Segunda Edición, Sociedad Matemática Mexicana, México, 1997.

[18] L. A. Steen and J. A. Seebach, Jr., *Counterexamples in Topology*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., New York, 1970.

[19] J. Varela, *Topología punto-conjuntista, apuntes de clase*, http://www.matematicas.unal.edu.co/ jvarela/otraspublicaciones.htm

[20] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1970.

Índice alfabético