

笔记前言：

本笔记的内容是去掉步骤的概述后，视频的所有内容。

本猴觉得，自己的步骤概述写的太啰嗦，大家自己做笔记时，应该每个人都有自己的最舒服最简练的写法，所以没给大家写。再是本猴觉得，不给大家写这个概述的话，大家会记忆的更深，掌握的更好！

所以老铁！一定要过呀！不要辜负本猴的心意！~~~

【祝逢考必过，心想事成~~~~】

【一定能过！！！！】

求极限

例1. 试求 $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2+3)$

$$= 3^2+3$$
$$= 12$$

例2. 试求 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$

$$= \sin 0$$
$$= 0$$

求极限 —— $\frac{\infty}{\infty}$ 型

例3. 试求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100}+x}{x^{1000}+2x}$

$$= \frac{\infty^{100}+\infty}{\infty^{1000}+2 \cdot \infty}$$
$$= \frac{\infty}{\infty}$$

例4. 试求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x}$

$$= \frac{\ln (+\infty)}{2 \cdot (+\infty)}$$
$$= \frac{\infty}{\infty}$$

结果为 $\frac{\infty}{\infty}$ ， 则：

方法1：只保留分子和分母中含x的指数最大的项

方法2：分子分母同时求导(洛必达法则)

例3. 试求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100}+x}{x^{1000}+2x}$ (方法1)

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100}}{x^{1000}}$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{900}}$$
$$= \frac{1}{\infty^{900}}$$
$$= \frac{1}{\infty}$$
$$= 0$$

例4. 试求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x}$ (方法2)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(2x)'}$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2}$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2}$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x}$$
$$= \frac{1}{2 \cdot (+\infty)}$$
$$= \frac{1}{+\infty}$$
$$= 0$$

求导公式详见第3课导数的表格

求极限 —— $\frac{0}{0}$ 型

例5. 试求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

$$= \frac{\sin 2 \cdot 0}{0}$$
$$= \frac{0}{0}$$

例5. 试求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ (方法1)

$2x \rightarrow 0$ 时, $\sin 2x$ 可换成 $2x$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2$$
$$= 2$$

例5. 试求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ (方法2)

详见第3课导数的表格

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x)'}{x'}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \cdot (2x)'}{1}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} (2\cos 2x)$$
$$= 2\cos(2 \cdot 0)$$
$$= 2 \times 1$$
$$= 2$$

求极限 —— 1^∞ 型

例6. 试求 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+1}{3}\right)^{\frac{2x-1}{x-2}}$

$$= \left(\frac{2+1}{3}\right)^{\frac{2 \cdot 2-1}{2-2}}$$
$$= 1^{\frac{3}{0}}$$
$$= 1^\infty$$

例7. 试求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{x}}$

$$= (1 + 3 \cdot 0)^{\frac{2}{0}}$$
$$= 1^{\frac{2}{0}}$$
$$= 1^\infty$$

例6. 试求 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+1}{3}\right)^{\frac{2x-1}{x-2}}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{x-2} \cdot \left(\frac{x+1}{3} - 1\right)}$$
$$= e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{x-2} \cdot \frac{x-2}{3}}$$
$$= e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{3}}$$
$$= e^{\frac{2 \cdot 2-1}{3}}$$
$$= e^1$$
$$= e$$

例7. 试求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{x}}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \cdot (1+3x-1)}$$
$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \cdot 3x}$$
$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} 6}$$
$$= e^6$$

结果为 $\frac{0}{0}$ ，则：

方法1：根据下表，把复杂项简化后再算

	lim式子里的复杂项	可换成
$\Delta \rightarrow 0$ 时	$\sin \Delta, \tan \Delta, \arcsin \Delta,$ $\arctan \Delta, e^\Delta - 1, \ln(1 + \Delta)$	Δ
	$1 - \cos \Delta$	$\frac{1}{2} \Delta^2$
	$(1 + \Delta)^\alpha - 1$	$\alpha \cdot \Delta$
	$a^\Delta - 1$	$\Delta \cdot \ln a$

方法2：分子分母同时求导(洛必达法则)

求极限 —— 0·∞ 型

例8. 试求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x) \cdot \frac{1}{x}$

$$= \sin(2 \cdot 0) \cdot \frac{1}{0}$$
$$= (\sin 0) \cdot \infty$$
$$= 0 \cdot \infty$$

结果为 $0 \cdot \infty$ 型 (接近0的数 · ∞):
把式子变成 $\frac{?}{?}$ 的形式，它就变成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型了

例8. 试求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x) \cdot \frac{1}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

即 例5

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2$$
$$= 2$$

求极限 —— 左右极限

例9. 试证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 是否存在

① 左极限：

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^-} \\ &= \frac{1}{-0.000\cdots01} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

② 右极限：

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^+} \\ &= \frac{1}{0.000\cdots01} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 不存在

【 可能的同学有疑问： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 不等于∞么？大家记住，极限等于∞，
也属于极限不存在，极限等于不为∞的数才算极限存在 】

若 左极限 = 右极限 = 不为∞的数，
则 函数极限存在，且函数极限 = 左极限 = 右极限；
若为其他情况，
则 函数极限不存在/函数没有极限

求极限 —— 已知 $f'(x_0)=?$ ，求某极限

例10. 已知 $f'(x_0)=a$ ，求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h} &= f'(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (-2) \\ &= a \cdot (-2) \\ &= -2a\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\alpha\Delta)-f(x_0)}{\Delta} = f'(x_0) \cdot \lim_{\Delta \rightarrow 0} \alpha$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\alpha\Delta)-f(x_0+\beta\Delta)}{\Delta} = f'(x_0) \cdot \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \alpha - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \beta \right)$$

例11. 已知 $f'(1)=a$ ，求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h} &= f'(1) \cdot \left[\lim_{h \rightarrow 0} 3 - \lim_{h \rightarrow 0} (-2) \right] \\ &= a \cdot [3 - (-2)] \\ &= 5a\end{aligned}$$

1/3 分析 a_n 的取值范围 ($n \rightarrow \infty$ 时)

例1. 已知 $0 < a_1 < 2$, $a_{n+1} = \sqrt{\overset{\text{项1}}{a_n} \cdot \overset{\text{项2}}{(2 - a_n)}}$, 试分析 a_n 的取值范围 ($n \rightarrow \infty$ 时)

$$\boxed{\sqrt{a_n \cdot (2 - a_n)}} \leq \boxed{\frac{a_n + (2 - a_n)}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a_n \cdot (2 - a_n)} \leq 1$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \leq 1$$

$$\text{又} \because a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot (2 - a_n)} \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq a_{n+1} \leq 1$$

$$\therefore 0 \leq a_n \leq 1$$

倒数相加	相乘	本身相加	平方相加
$\frac{2}{(\text{项1})^{-1} + (\text{项2})^{-1}} \leq$	$\boxed{\sqrt{(\text{项1}) \cdot (\text{项2})}} \leq$	$\boxed{\frac{(\text{项1}) + (\text{项2})}{2}} \leq$	$\sqrt{\frac{(\text{项1})^2 + (\text{项2})^2}{2}}$
(仅当 项1=项2 时, 各式子才相等)			

2/3 证明 a_n 的极限存在

例2. 已知 $0 < a_1 < 2$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot (2 - a_n)}$, 试证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在

$0 \leq a_n \leq 1$ 例1结果

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n \cdot (2 - a_n)} - a_n$$

$$\because 0 \leq a_n \leq 1$$

$$\therefore \underline{2 - a_n} \geq 1 \geq \underline{a_n}$$

$$\therefore a_n \cdot \underline{(2 - a_n)} \geq a_n \cdot \underline{a_n} = a_n^2$$

$$\therefore \sqrt{a_n \cdot (2 - a_n)} \geq \sqrt{a_n^2} = a_n$$

$$\therefore \sqrt{a_n \cdot (2 - a_n)} \geq \sqrt{a_n^2} = a_n$$

$$\therefore \sqrt{a_n \cdot (2 - a_n)} - a_n \geq 0$$

即 $a_{n+1} - a_n \geq 0$

$$\therefore a_n \text{ 是递增的}$$

$$\because a_n \leq 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ 存在}$$

3/3 夹逼定理

例3. 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$
共 n 项

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \cdot n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型 ,
只保留分子和分母中含未知数的指数最大的项

【第一课 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的方法一有讲】

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \cdot n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型 ,
只保留分子和分母中含未知数的指数最大的项

【第一课 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的方法一有讲】

$\because \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \cdot n > \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \cdot n$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$

1/3 证明 $f(x)$ 在某点连续

例1. 试证明 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续

① $f(0)=1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1$$

$$= 1$$

$\frac{0}{0}$ 型,

\therefore 当 $\Delta \rightarrow 0$ 时,

$$\sin \Delta \rightarrow \Delta$$

\therefore 当 $x \rightarrow 0^+$, 即 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin x \rightarrow x$$

【第一课 $\frac{0}{0}$ 型的方法一有讲】

② $\because f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 成立

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

2/3 已知 $f(x)$ 在某点连续, 求未知数

例2. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{ax}, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 试求 a

① $f(0)=1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{ax}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{ax}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{a}$$

$$= \frac{1}{a}$$

$\frac{0}{0}$ 型,

\therefore 当 $\Delta \rightarrow 0$ 时,

$$\sin \Delta \rightarrow \Delta$$

\therefore 当 $x \rightarrow 0^+$, 即 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin x \rightarrow x$$

【第一课 $\frac{0}{0}$ 型的方法一有讲】

② $1 = 1 = \frac{1}{a} \Rightarrow a = 1$

3/3 间断点

例3. 试判断 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$ 的间断点类型

① 没有 \sin 、 \cos

② 分段点为 $x=1$

③ $f(1) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1^+ = 1$$

$\therefore x=1$ 是间断点

$\because \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, 且均不为 ∞

$\therefore x=1$ 是跳跃间断点

若 $f(\text{该点}) = \lim_{x \rightarrow \text{该点}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \text{该点}^+} f(x)$ 成立,

则该点不是间断点;

若 $f(\text{该点}) = \lim_{x \rightarrow \text{该点}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \text{该点}^+} f(x)$ 不成立,

则该点是间断点:

若 $\lim_{x \rightarrow \text{该点}^-} = \lim_{x \rightarrow \text{该点}^+} =$ 不为 ∞ 的数, 则为

可去间断点;

若 $\lim_{x \rightarrow \text{该点}^-} \neq \lim_{x \rightarrow \text{该点}^+}$, 且均不为 ∞ , 则为

跳跃间断点;

若 $\lim_{x \rightarrow \text{该点}^-}$ 与 $\lim_{x \rightarrow \text{该点}^+}$ 中有至少一个 ∞ , 则为

无穷间断点 或 第二类间断点(无穷)

1/5 照公式求导

f(x)	f'(x)	例子
C	0	(1)'=0
x ^a	a·x ^{a-1}	(x ²)'=2·x ²⁻¹ =2x
a ^x	a ^x ·lna	(3 ^x)'=3 ^x ·ln3
e ^x	e ^x	(e ^x)'=e ^x
log _a x	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	(log ₅ x)'= $\frac{1}{x \cdot \ln 5}$
lnx、ln x	$\frac{1}{x}$	(ln x)'= $\frac{1}{x}$
sinx	cosx	(sinx)'=cosx
cosx	-sinx	(cosx)'=-sinx
tanx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	(tanx)'= $\frac{1}{\cos^2 x}$
arcsinx	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(arcsinx)'= $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arccosx	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(arccosx)'= $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctanx	$\frac{1}{1+x^2}$	(arctanx)'= $\frac{1}{1+x^2}$
arccotx	$-\frac{1}{1+x^2}$	(arccotx)'= $-\frac{1}{1+x^2}$

常用组合公式：

① (u ± v)'=u' ± v' 如: (x ² + 3 ^x)'=(x ²)'+(3 ^x)'
② (Cu)'=Cu' 如: (3x ²)'=3·(x ²)'
③ (uv)'=u'v+uv' 如: (x ² · 3 ^x)'=(x ²)'·3 ^x + x ² ·(3 ^x)'
④ $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ 如: $\left(\frac{x^2}{3^x}\right)'=\frac{(x^2)' \cdot 3^x - x^2 \cdot (3^x)'}{(3^x)^2}$
⑤ 若已知 [a(x)]' = b(x) 则 {a[h(x)]}' = b[h(x)] · [h(x)]' 如: 已知 (sin x)'=cos x 则 [sin h(x)]'=cos h(x) · [h(x)]' 像 (sin e ^x)'=cos e ^x · (e ^x)' (sin x ²)'=cos x ² · (x ²)'

2/5 隐函数求导

例1. 若 y=y(x) 由 y³ - x² + y = 0 确定，则 y' = _____，y'' = _____。

$$y^3(x) - x^2 + y(x) = 0$$
$$[y^3(x) - x^2 + y(x)]' = 0'$$
$$[y^3(x)]' - (x^2)' + [y(x)]' = 0$$
$$3y^2(x) \cdot y'(x) - 2x + y'(x) = 0$$
$$3y^2 \cdot y' - 2x + y' = 0$$
$$(3y^2 + 1) \cdot y' - 2x = 0$$
$$(3y^2 + 1) \cdot y' = 2x$$
$$y' = \frac{2x}{3y^2 + 1}$$

$$(y')' = \left[\frac{2x}{3y^2(x)+1}\right]'$$
$$y'' = \frac{(2x)' \cdot [3y^2(x)+1] - 2x \cdot [3y^2(x)+1]'}{[3y^2(x)+1]^2}$$
$$y'' = \frac{2 \cdot [3y^2(x)+1] - 2x \cdot \{[3y^2(x)]' + 1'\}}{[3y^2(x)+1]^2}$$
$$y'' = \frac{2 \cdot [3y^2(x)+1] - 2x \cdot \{3[y^2(x)]' + 0\}}{[3y^2(x)+1]^2}$$
$$y'' = \frac{2 \cdot [3y^2(x)+1] - 2x \cdot 3 \cdot 2y(x) \cdot y'(x)}{[3y^2(x)+1]^2}$$
$$y'' = \frac{6y^2(x)+2-12x \cdot y(x) \cdot y'(x)}{[3y^2(x)+1]^2}$$
$$y'' = \frac{6y^2+2-12xyy'}{(3y^2+1)^2}$$
$$y'' = \frac{6y^2+2-12xy \cdot \frac{2x}{3y^2+1}}{(3y^2+1)^2}$$

$$\because C'=0 \text{ 【C 代表常数】}$$
$$\because 0'=0$$
$$\because (x^a)'=a \cdot x^{a-1}$$
$$\because (x^2)'=2 \cdot x^{2-1}=2x$$
$$[y^3(x)]'=?$$
$$\because (x^3)'=3 \cdot x^{3-1}=3x^2$$
$$\because [h^3(x)]'=3h^2(x) \cdot h'(x)$$
$$\therefore [y^3(x)]'=3y^2(x) \cdot y'(x)$$

$$\because \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$
$$\therefore \left[\frac{2x}{3y^2(x)+1}\right]'=\frac{(2x)' \cdot [3y^2(x)+1] - 2x \cdot [3y^2(x)+1]'}{[3y^2(x)+1]^2}$$

$$[y^2(x)]'=?$$
$$\because (x^2)'=2x$$
$$\because [h^2(x)]'=2h(x) \cdot h'(x)$$
$$\therefore [y^2(x)]'=2y(x) \cdot y'(x)$$

3/5 参数方程求导

例2. 设 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$, $y'' = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$y' = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$y'' = \frac{y' \text{对 } t \text{ 求导的结果}}{x'(t)}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y'(t)}{x'(t)} \\ &= \frac{(\cos t)'}{(1+t^2)'} \\ &= \frac{-\sin t}{2t} \end{aligned}$$

$$y'' = \frac{y' \text{对 } t \text{ 求导的结果}}{x'(t)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\left(\frac{-\sin t}{2t}\right)'}{(1+t^2)'} \\ &= \frac{\frac{(-\sin t)' \cdot 2t - (-\sin t) \cdot (2t)'}{(2t)^2}}{2t} \\ &= \frac{\frac{-2t \cdot \cos t + 2 \sin t}{4t^2}}{2t} \\ &= \frac{-t \cdot \cos t + \sin t}{4t^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ \therefore \left(\frac{-\sin t}{2t}\right)' &= \frac{(-\sin t)' \cdot 2t - (-\sin t) \cdot (2t)'}{(2t)^2} \end{aligned}$$

4/5 求极值、最值

例3. 若 $y=y(x)$ 由 $y^3 - x^2 + y = 0$ 确定, 试求其极值

① $y' = \frac{2x}{3y^2+1}$, $y'' = \frac{6y^2+2-12xyy'}{(3y^2+1)^2}$

例1求过

② $\frac{2x}{3y^2+1} = 0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$

③ 将 $x=0$ 代入 $y^3 - x^2 + y = 0$ 中,
可得: $y^3 - 0^2 + y = 0$
 $\Rightarrow y^3 + y = 0$
 $\Rightarrow y \cdot (y^2 + 1) = 0$
 $\Rightarrow y = 0$

\therefore 满足要求的点为 $(0,0)$

④ 将 $x=0$, $y=0$, $y'=0$

代入 $y'' = \frac{6y^2+2-12xyy'}{(3y^2+1)^2}$ 中,

可得: $y'' = \frac{6 \cdot 0^2 + 2 - 12 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{(3 \cdot 0^2 + 1)^2} = 2 > 0$

\therefore 极小值点为 $(0,0)$, 极小值为 0

5/5 求凹凸区间与拐点

例4. 求曲线 $y=\ln(x^2+1)$ 的凹凸区间和拐点

$$y' = [\ln(x^2+1)]' \\ = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} [\ln(x^2+1)]' &= ? \\ \because (\ln x)' &= \frac{1}{x} \\ \therefore [\ln h(x)]' &= \frac{1}{h(x)} \cdot h'(x) \\ \therefore [\ln(x^2+1)]' &= \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' \\ &= \frac{1}{x^2+1} \cdot [(x^2)' + 1'] \\ &= \frac{1}{x^2+1} \cdot (2x+0) \\ &= \frac{2x}{x^2+1} \end{aligned}$$

方法：求 y''

凸区间：满足 $y'' < 0$ 的区间

凹区间：满足 $y'' > 0$ 的区间

拐点：凹凸区间交界的点

$$y'' = (y')'$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{2x}{x^2+1} \right)' \\ &= \frac{(2x)' \cdot (x^2+1) - 2x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2 \cdot (x^2+1) - 2x \cdot [(x^2)' + 1']}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2 - 2x \cdot (2x+0)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{u}{v} \right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ \therefore \left(\frac{2x}{x^2+1} \right)' &= \frac{(2x)' \cdot (x^2+1) - 2x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

凸区间：满足 $\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} < 0$ 的区间

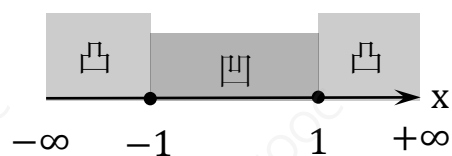
$$\Rightarrow 2 - 2x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ 或 } x < -1$$

凸区间为 $(1, +\infty)$ 和 $(-\infty, -1)$

凹区间：满足 $\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} > 0$ 的区间

$$\Rightarrow 2 - 2x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

凹区间为 $(-1, 1)$



拐点： $x=-1$ 和 $x=1$ 所对应的点

$$\because y = \ln(x^2+1)$$

$$\therefore x=-1 \text{ 时, } y = \ln[(-1)^2+1] = \ln 2$$

对应的点为 $(-1, \ln 2)$

$$x=1 \text{ 时, } y = \ln(1^2+1) = \ln 2$$

对应的点为 $(1, \ln 2)$

$$\therefore \text{拐点为 } (-1, \ln 2) \text{、} (1, \ln 2)$$

不定积分——猜

若 $a' = b$
则 $\int b = a+C$

比如：
 $(x^2)' = 2x$
 $\int 2x \, dx = x^2+C$
 $(\sin x)' = \cos x$
 $\int \cos x \, dx = \sin x+C$
 $(e^x)' = e^x$
 $\int e^x \, dx = e^x+C$

$\int x^3 \, dx = \frac{1}{4}x^4+C$
 $(x^4)' = 4 \cdot x^3$
 $\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot x^3 = x^3$

不定积分 —— 套公式法

f(x)	$\int f(x) \, dx$	f(x)	$\int f(x) \, dx$
k	$kx+C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x+C$
$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$x^{\alpha}+C$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\cos x}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x +C$	$\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{\sin x}+C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} \cdot \arctan \frac{x}{a}+C$
e^x	e^x+C	$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2a} \cdot \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right +C$
$\cos x$	$\sin x+C$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a}+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln \left x + \sqrt{x^2+a^2} \right +C$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$-\ln \cos x +C$		
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln \left \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} \right +C$		
$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\ln \sin x +C$		
$\frac{1}{\sin x}$	$-\ln \left \frac{1+\cos x}{\sin x} \right +C$		
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+C$		

常用公式①： $\int k \cdot U = k \cdot \int U$
如： $\int 3 \cdot e^x dx = 3 \cdot \int e^x dx$

常用公式②： $\int (U \pm V) = \int U \pm \int V$
如： $\int (a^x + e^x) \, dx = \int a^x dx + \int e^x dx$

求多个sin、cos相乘式子的积分时，常用的小技巧：

A、 $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
如： $\int \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \cdot \left[\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} \right) + \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2} \right) \right] \, dx$
 $= \int \frac{1}{2} \cdot \sin x \, dx$

B、 $\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$
如： $\int \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} \, dx = \int -\frac{1}{2} \cdot \left[\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} \right) - \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2} \right) \right] \, dx$
 $= \int -\frac{1}{2} \cdot (\cos x - 1) \, dx$

C、 $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
如： $\int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \cdot \left[\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} \right) + \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2} \right) \right] \, dx$
 $= \int \frac{1}{2} \cdot (\cos x + 1) \, dx$

不定积分 —— 第一类换元法

复杂部分
例1. 计算 $\int 2x \cdot e^{x^2} dx$

① 设 $u = x^2$

$u' = (x^2)'$
 $= 2x$

② $\frac{1}{u'} du = \frac{1}{2x} du$

$\int 2x \cdot e^{x^2} dx = \int 2x \cdot e^{x^2} \cdot \frac{1}{2x} du$
 $= \int e^{x^2} du$
 $= \int e^u du$
 $= e^u + C$
 $= e^{x^2} + C$

不定积分 —— 第二类换元法

例2. 计算 $\int \frac{dx}{(x-1) \cdot \sqrt{(x-1)^2 - 1^2}}$

原式 = $\int \frac{\frac{a \cdot \sin t}{\cos^2 t} dt}{(\frac{a}{\cos t} - c - 1) \cdot \sqrt{(\frac{a}{\cos t} - c - 1)^2 - 1}}$

$= \int \frac{\frac{1 \cdot \sin t}{\cos^2 t} dt}{(\frac{1}{\cos t} - (-1) - 1) \cdot \sqrt{(\frac{1}{\cos t} - (-1) - 1)^2 - 1}}$

$= \int \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t} dt}{\frac{1}{\cos t} \cdot \sqrt{(\frac{1}{\cos t})^2 - 1}}$

$= \int \frac{\cos^2 t \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt}{\cos^2 t \cdot \frac{1}{\cos t} \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}}$

$= \int \frac{\sin t dt}{\cos t \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}}}$

$= \int \frac{\sin t dt}{\cos t \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}}$

$= \int \frac{\sin t dt}{\cos t \cdot \frac{\sin t}{\cos t}}$

$= \int \frac{\sin t dt}{\sin t}$

$= \int 1 dt$

$= t + C$

$\because x = \frac{1}{\cos t} - (-1)$

$\Rightarrow x = \frac{1}{\cos t} + 1$

$\Rightarrow \cos t \cdot x = 1 + \cos t$

$\Rightarrow \cos t \cdot x - \cos t = 1$

$\Rightarrow \cos t \cdot (x - 1) = 1$

$\Rightarrow \cos t = \frac{1}{x-1}$

$\Rightarrow t = \arccos \frac{1}{x-1}$

\therefore 原式 = $t + C = \arccos \frac{1}{x-1} + C$

式子中 $(x + c)^2 + a^2$ 、 $(x + c)^2 - a^2$ 、 $a^2 - (x + c)^2$ 时，
用第二类换元法可能会简单

被积分的式子中有	方法
$(x + c)^2 + a^2$	令 $x = a \cdot \tan t - c$ $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$
$(x + c)^2 - a^2$	令 $x = \frac{a}{\cos t} - c$ $dx = \frac{a \cdot \sin t}{\cos^2 t} dt$
$a^2 - (x + c)^2$	令 $x = a \cdot \sin t - c$ $dx = a \cdot \cos t dt$

$a = 1$
 $c = -1$

考试时题干可能先转化一下才能看出来

比如：计算 $\int \frac{dx}{(x-1) \cdot \sqrt{x^2 - 2x}}$

$\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2 - 1^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2 - 1^2}$

$\therefore \int \frac{dx}{(x-1) \cdot \sqrt{x^2 - 2x}} = \int \frac{dx}{(x-1) \cdot \sqrt{(x-1)^2 - 1^2}}$ (即 例2式子)

不定积分 —— 分部积分法

例3. 计算 $\int e^x \cdot x \, dx$

① 设 $U' = e^x$, $V = x$

② $V' = x' = 1$

$$U = \int e^x \, dx = e^x$$

$$\begin{aligned}\textcircled{3} \int e^x \cdot x \, dx &= e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 \, dx \\ &= e^x \cdot x - \int e^x \, dx \\ &= e^x \cdot x - (e^x + C) \\ &= e^x \cdot x - e^x - C \\ &= e^x \cdot x - e^x + C\end{aligned}$$

设 U' 的顺序: a^x 、 \sin/\cos 、 x^a

$$\int U' \cdot V = U \cdot V - \int U \cdot V'$$

例4. 计算 $\int \ln x \, dx$

① $\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx$

$$= \int x^0 \cdot \ln x \, dx$$

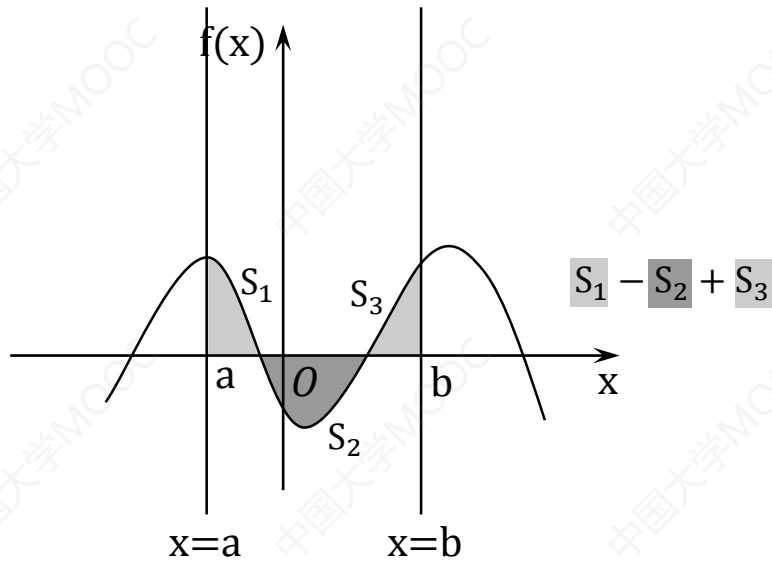
设 $U' = x^0 = 1$, $V = \ln x$

② $V' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, $U = \int U' \, dx = \int 1 \, dx = x$

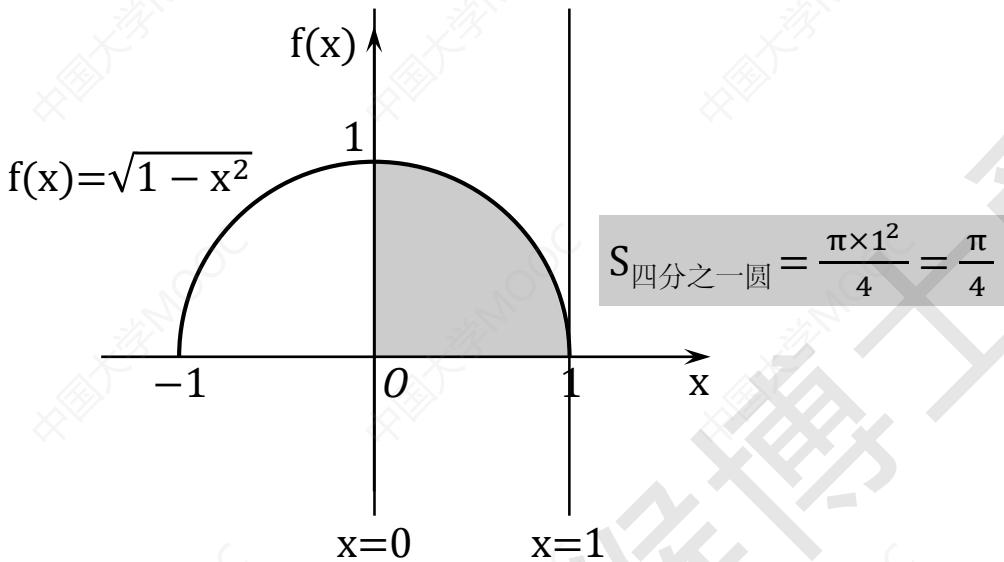
$$\begin{aligned}\textcircled{3} \int 1 \cdot \ln x \, dx &= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx \\ &= x \cdot \ln x - (x + C) \\ &= x \cdot \ln x - x - C \\ &= x \cdot \ln x - x + C\end{aligned}$$

计算定积分 —— 普通定积分

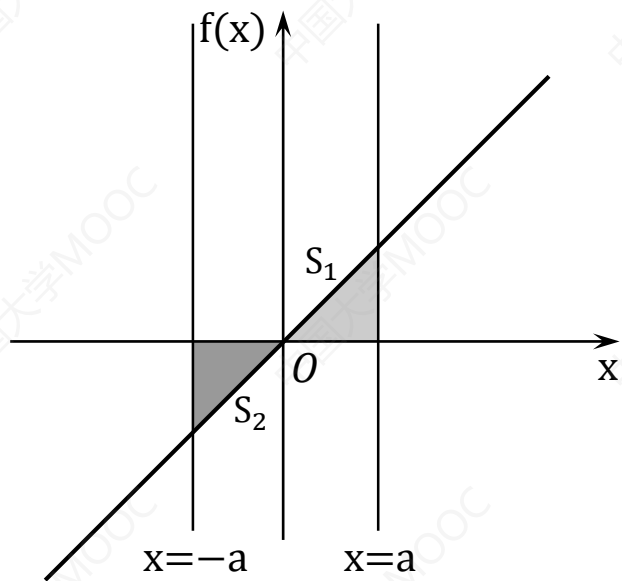
$$\int 2x \, dx = x^2 + C$$
$$\Rightarrow \int_2^3 2x \, dx = x^2|_{x=3} - x^2|_{x=2} = 3^2 - 2^2 = 5$$
$$\int e^x \, dx = e^x + C$$
$$\Rightarrow \int_2^3 e^x \, dx = e^x|_{x=3} - e^x|_{x=2} = e^3 - e^2$$



$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \text{x=0、x=1之间 } f(x) \text{ 同 x轴 之间图像的面积}$$



$$f(x) = b + \sqrt{a^2 - (x - c)^2} : \text{圆心为 } (c, b) \text{、半径为 } a \text{ 的上半圆}$$
$$f(x) = b - \sqrt{a^2 - (x - c)^2} : \text{圆心为 } (c, b) \text{、半径为 } a \text{ 的下半圆}$$



性质1：
若 $\int f(x) \, dx = F(x) + C$ ，
则 $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$

性质2：
 $\int_a^b f(x) \, dx = \text{x=a、x=b之间 } f(x) \text{ 同 x轴 间图像的面积}$

性质2：
 $\int_a^b f(x) \, dx = \text{x=a、x=b之间 } f(x) \text{ 同 x轴 间图像的面积}$
① $f(x)$ 为奇函数时， $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$

奇函数：满足 $f(-x) = -f(x)$ 的函数

$$f(x) = xe^{-|x|}$$
$$f(-x) = -xe^{-|-x|}$$
$$= -xe^{-|x|}$$

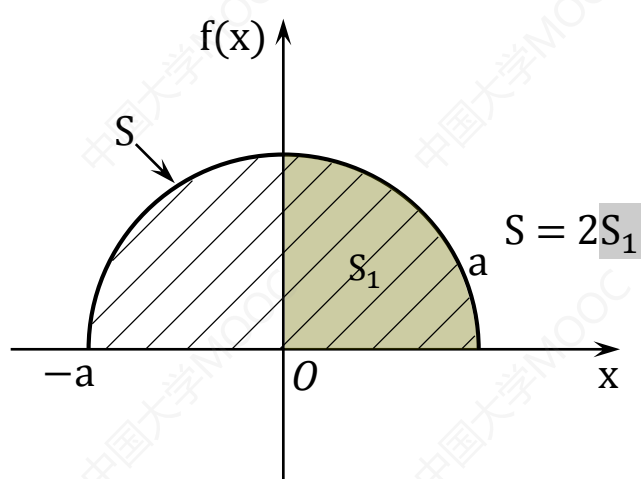
$$f(-x) = -f(x)$$

$xe^{-|x|}$ 是个奇函数

$$\int_{-2}^2 xe^{-|x|} \, dx = 0$$

$$\int_{-3}^3 xe^{-|x|} \, dx = 0$$

$$\int_{-10086}^{10086} xe^{-|x|} \, dx = 0$$



性质2：

$\int_a^b f(x) dx$ = x=a、x=b之间 f(x) 同 x轴 间图像的面积

② f(x) 为偶函数时， $\int_{-a}^a f(x) dx = 2\int_0^a f(x) dx$

偶函数：满足 $f(-x) = f(x)$ 的函数

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| \\ f(-x) &= |-x| \\ &= |x| \end{aligned}$$

|x|是个偶函数

$$\int_{-2}^2 |x| dx = 2\int_0^2 |x| dx$$

|x|有时为 x，有时为 -x

$$= 2\int_0^2 x dx$$

③ $\int_a^{a+b+c} f(x) dx = \int_a^{a+b} f(x) dx + \int_{a+b}^{a+b+c} f(x) dx$

【如： $\int_2^5 f(x) dx = \int_2^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx$ 】

④ 若 f(x) 是以 T 为周期的周期函数，

$$\text{则 } \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

【如： $\int_{1\text{亿}}^{1\text{亿}+2\pi} \sin x dx = \int_0^{2\pi} \sin x dx$ 】

【注意： $\sin ax / \cos ax$ 的周期为 $\frac{2\pi}{a}$ 】

计算定积分 —— 变限积分

例1. 试求 $[\int_x^{e^{-x}} f(t) dt]'$

$$\begin{aligned} [\int_x^{e^{-x}} f(t) dt]' &= f(e^{-x}) \cdot (e^{-x})' - f(x) \cdot x' \\ &= f(e^{-x}) \cdot e^{-x} \cdot (-1) - f(x) \cdot 1 \\ &= -f(e^{-x}) \cdot e^{-x} - f(x) \end{aligned}$$

$$\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt \right)' = f[g(x)] \cdot g'(x) - f[h(x)] \cdot h'(x)$$

$$\begin{aligned} \left(\int_{h(x)}^{g(x)} k(x) \cdot f(t) dt \right)' &= \left(k(x) \cdot \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt \right)' \\ &= k'(x) \cdot \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt + k(x) \cdot \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt \right)' \end{aligned}$$

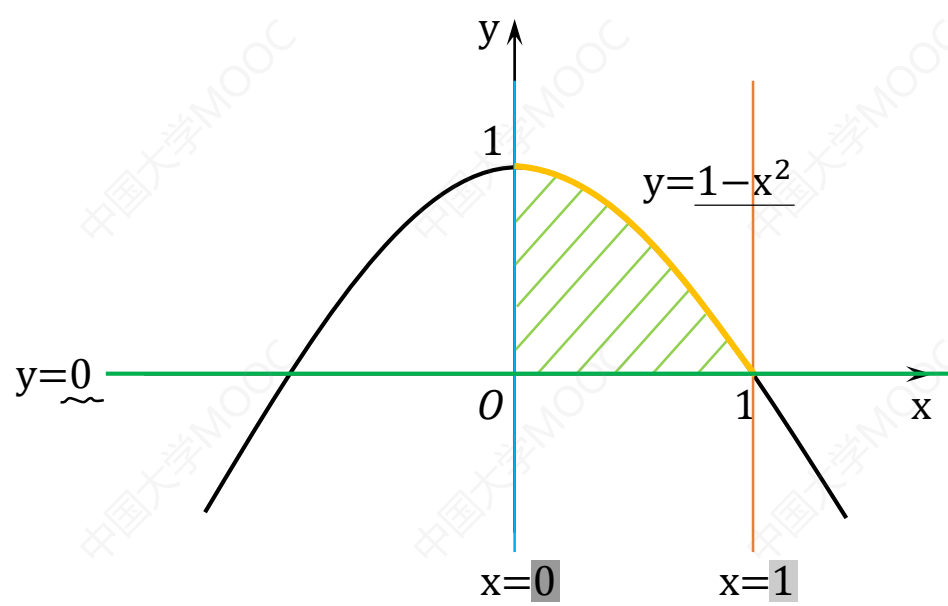
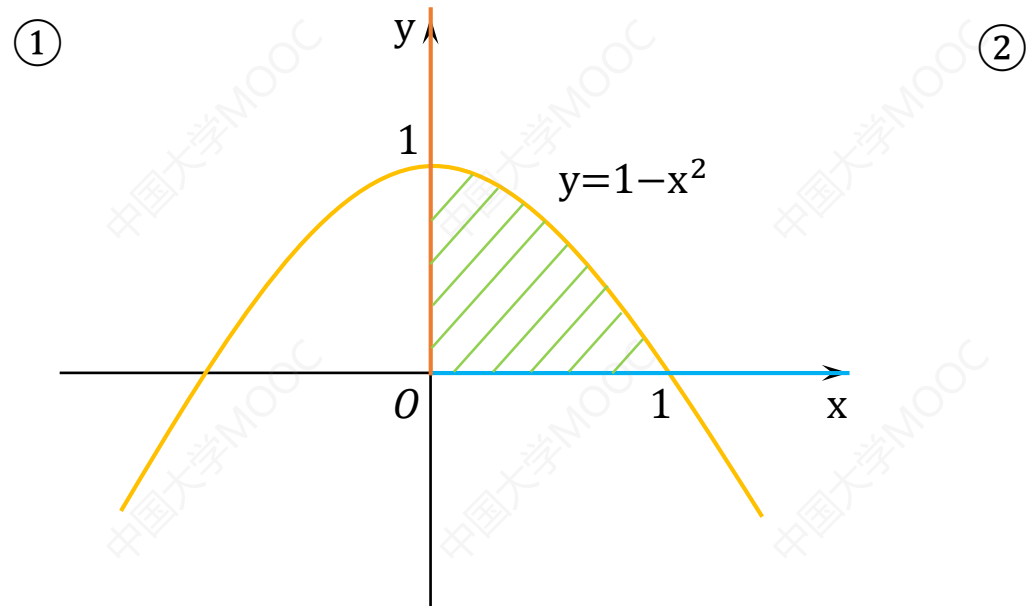
例2. 试求 $[\int_x^{e^{-x}} x \cdot f(t) dt]'$

$$\begin{aligned} [\int_x^{e^{-x}} x \cdot f(t) dt]' &= \left(x \cdot \int_x^{e^{-x}} f(t) dt \right)' \\ &= x' \cdot \int_x^{e^{-x}} f(t) dt + x \cdot \left(\int_x^{e^{-x}} f(t) dt \right)' \\ &= x' \cdot \int_x^{e^{-x}} f(t) dt + x \cdot [-f(e^{-x}) \cdot e^{-x} - f(x)] \\ &= \int_x^{e^{-x}} f(t) dt - x \cdot f(e^{-x}) \cdot e^{-x} - xf(x) \end{aligned}$$

计算定积分 —— 利用定积分求面积

例3. 求 $y=1-x^2$ 与 x 轴正半轴、 y 轴正半轴围成区域的面积

$$\text{所求面积} = \int_{x_{\text{小}}}^{x_{\text{大}}} (y_{\text{上}} - y_{\text{下}}) dx$$

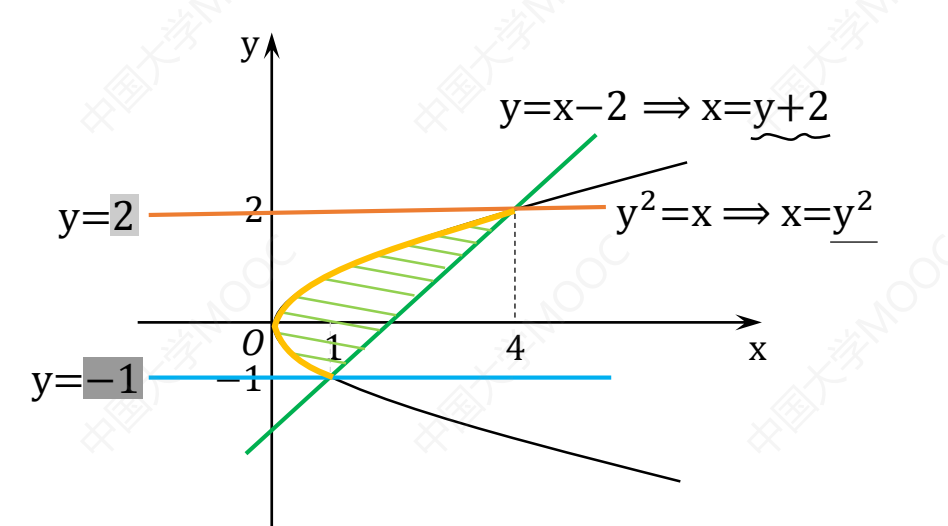
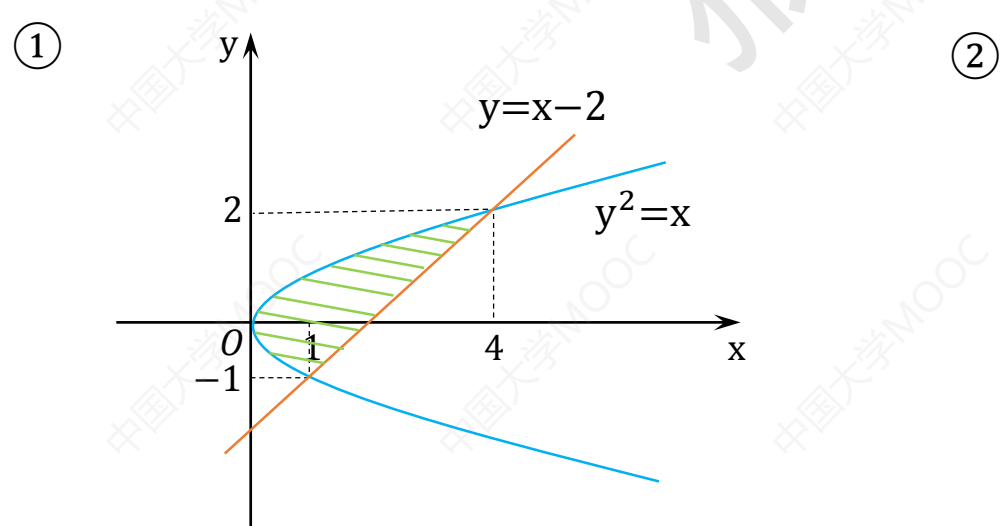


$$x_{\text{大}}=1, x_{\text{小}}=0 \quad y_{\text{上}}=1-x^2, y_{\text{下}}=0$$

$$\begin{aligned} \text{所求面积} &= \int_0^1 (1-x^2-0) dx \\ &= \int_0^1 (1-x^2) dx \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= 1 - \frac{1^3}{3} - \left(0 - \frac{0^3}{3} \right) \\ &= \frac{2}{3} - 0 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

例4. 求 $y^2=x$ 与 $y=x-2$ 围成区域的面积

$$\text{所求面积} = \int_{y_{\text{小}}}^{y_{\text{大}}} (x_{\text{右}} - x_{\text{左}}) dy$$



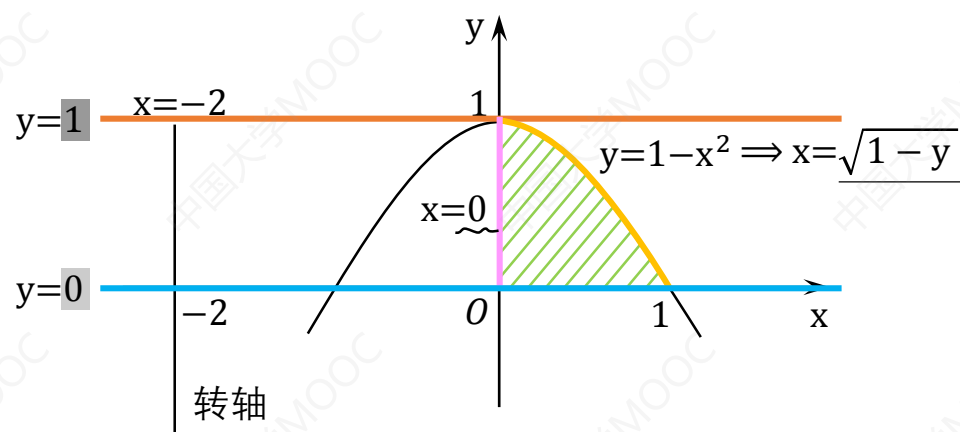
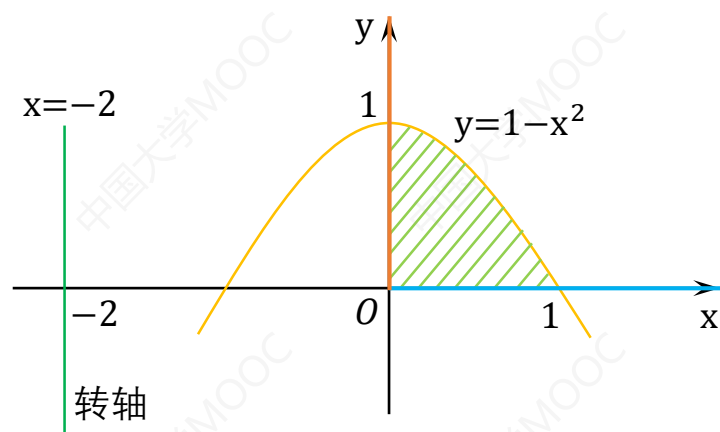
$$y_{\text{大}}=2, y_{\text{小}}=-1 \quad x_{\text{左}}=y^2, x_{\text{右}}=y+2$$

$$\begin{aligned} \text{所求面积} &= \int_{-1}^2 (y+2-y^2) dy \\ &= \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{2^2}{2} + 2 \times 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left[\frac{(-1)^2}{2} + 2 \times (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right] \\ &= \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6} \right) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

计算定积分 —— 利用定积分求体积

例5. 由 $y=1-x^2$ 与 x 轴正半轴、 y 轴正半轴所围成区域的图形，绕 $x=-2$ 旋转一周生成一个旋转体，求其体积

$$V = \int_c^d \pi[f(y) - a]^2 dy - \int_c^d \pi[g(y) - a]^2 dy$$

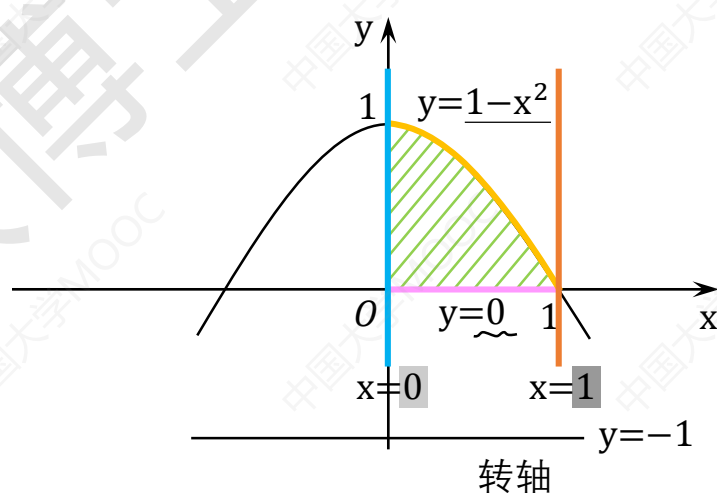
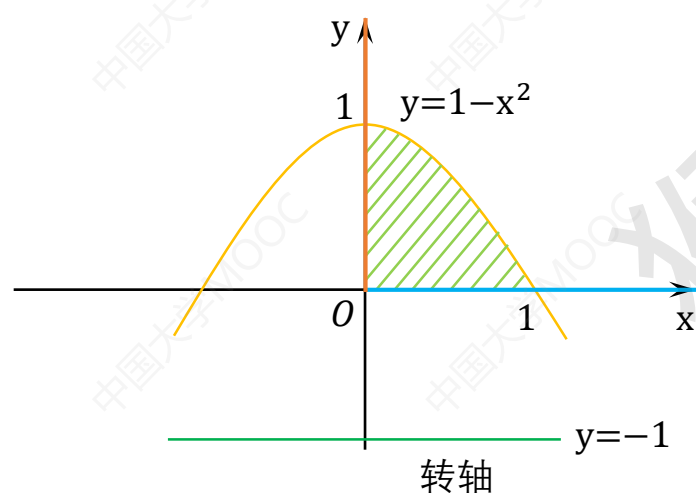


$$c=0 \quad d=1 \quad f(y)=\sqrt{1-y} \quad g(y)=0 \quad a=-2 \text{ (由转轴可得)}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi[\sqrt{1-y} - (-2)]^2 dy - \int_0^1 \pi[0 - (-2)]^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 (1-y+4\sqrt{1-y}+4) dy - 4\pi \int_0^1 1 dy \\ &= \pi \cdot \left(\int_0^1 5 dy - \int_0^1 y dy + 4 \int_0^1 \sqrt{1-y} dy \right) - 4\pi \int_0^1 1 dy \\ &= \pi \cdot \left(5 - \frac{1}{2} + \frac{8}{3} \right) - 4\pi \\ &= \frac{19}{6} \pi \end{aligned}$$

例6. 由 $y=1-x^2$ 与 x 轴正半轴、 y 轴正半轴所围成区域的图形，绕 $y=-1$ 旋转一周生成一个旋转体，求其体积

$$V = \int_c^d \pi[f(x) - a]^2 dx - \int_c^d \pi[g(x) - a]^2 dx$$



$$c=0 \quad d=1 \quad f(x)=1-x^2 \quad g(x)=0 \quad a=-1 \text{ (由转轴可得)}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi[1-x^2 - (-1)]^2 dx - \int_0^1 \pi[0 - (-1)]^2 dx \\ &= \int_0^1 \pi(2-x^2)^2 dx - \int_0^1 \pi \cdot 1^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 (4-4x^2+x^4) dx - \pi \int_0^1 1 dx \\ &= \pi \left(\int_0^1 4 dx - \int_0^1 4x^2 dx + \int_0^1 x^4 dx \right) - \pi \cdot 1 \\ &= \pi \cdot \left(4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5} \right) - \pi \\ &= \frac{28}{15} \pi \end{aligned}$$

微分方程——一阶(只有y')

例1. 试求 $x \cdot y' - \frac{1}{\sin y} = 0$ 的通解

$$x \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{\sin y} = 0$$

$$\frac{x dy}{dx} = \frac{1}{\sin y}$$

$$x \sin y dy = \frac{1}{x} dx$$

$$\sin y dy = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \sin y dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$-\cos y + C_1 = \ln|x| + C_2$$

$$\cos y = -\ln|x| + C_1 - C_2$$

$$\cos y = -\ln|x| + C$$

例2. 试求 $x \cdot y' + y = 0$ 的通解

$$x \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{x dy}{dx} = -y$$

$$x dy = -y dx$$

$$\frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \left(-\frac{1}{x}\right) dx$$

$$\ln|y| + C_1 = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|y| + C_1 = -(\ln|x| + C_2)$$

$$\ln|y| = (-C_2 - C_1) - \ln|x|$$

$$\ln|y| = C_3 - \ln|x|$$

$$\text{【} \because \ln e^a = a \text{】}$$

$$\therefore \ln|y| = \ln e^{C_3} - \ln|x|$$

$$\text{【} \because \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \text{】}$$

$$\therefore \ln|y| = \ln \frac{e^{C_3}}{|x|}$$

$$\ln|y| = \ln \left| \frac{e^{C_3}}{x} \right|$$

$$\text{【} \because \ln a = \ln b \Rightarrow a = b \text{】}$$

$$\therefore |y| = \left| \frac{e^{C_3}}{x} \right|$$

$$y = \pm \frac{e^{C_3}}{x}$$

$$y = \frac{\pm e^{C_3}}{x}$$

$$\text{【} \because \pm e^{C_3} \text{ 结果是一个常数, 可用 } C \text{ 表示 } \text{】}$$

$$\therefore y = \frac{C}{x}$$

例3. 试求 $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\sin \frac{y}{x}}$ 的通解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{1}{\sin \frac{y}{x}} \quad \text{令 } \frac{y}{x} = Y, \frac{dy}{dx} = Y + x \frac{dY}{dx}$$

$$Y + x \frac{dY}{dx} = Y + \frac{1}{\sin Y}$$

$$x \frac{dY}{dx} = \frac{1}{\sin Y} \quad (\text{例1做过})$$

$$\cos Y = -\ln|x| + C \Rightarrow \cos \frac{y}{x} = -\ln|x| + C$$

例4. 试求 $y' + y = x$ 的通解

$$\frac{dy}{dx} + y = x$$

$$\frac{dy}{dx} = x - 1 \cdot y \quad Q(x)=x, \quad P(x)=1$$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

$$= e^{-\int 1dx} \left(\int x e^{\int 1dx} dx + C \right)$$

$$= e^{-x} \left(\int x e^x dx + C \right)$$

$$= e^{-x} \left(\int x \cdot (e^x)' dx + C \right)$$

$$= e^{-x} \left(x e^x - \int x' \cdot e^x dx + C \right)$$

$$= e^{-x} \left(x e^x - \int e^x dx + C \right)$$

$$= e^{-x} \left(x e^x - e^x + C \right)$$

$$= e^{-x} \cdot x e^x - e^{-x} \cdot e^x + C e^{-x}$$

$$= x - 1 + C e^{-x}$$

$$\because \int a \cdot b' = a \cdot b - \int a' \cdot b$$

$$\therefore \int x \cdot (e^x)' dx = x e^x - \int x' \cdot e^x dx$$

微分方程 —— 可降阶的高阶

例5. 试求 $y'' + y' = x$ 的通解

$$\text{令 } y' = Y, \quad y'' = Y'$$

$$y'' + y' = x \Rightarrow Y' + Y = x \quad (\text{例4做过})$$

$$Y = x - 1 + C e^{-x}$$

$$y = \int (x - 1 + C e^{-x}) dx$$

$$= \int x dx - \int 1 dx + \int C e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + C_1 - (x + C_2) + C_3 \cdot \int e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - x + (C_1 - C_2) + C_3 \cdot (-e^{-x} + C_4)$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - x - C_3 \cdot e^{-x} + (C_1 - C_2 + C_3 C_4)$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - x - C_3 \cdot e^{-x} + C_5$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - x + C_1 \cdot e^{-x} + C_2$$

例6. 试求 $yy'' + (y')^2 = 0$ 的通解

$$\text{令 } y=X, \quad y'=Y, \quad y''=Y \frac{dY}{dX}$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \Rightarrow XY \frac{dY}{dX} + Y^2 = 0$$

$$X \frac{dY}{dX} + Y = 0 \quad (\text{例2做过})$$

$$Y = \frac{C}{X}$$

$$Y = \frac{C}{y}$$

$$y' = \frac{C}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C}{y}$$

$$y \, dy = C \, dx$$

$$\int y \, dy = \int C \, dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 + C_1 = Cx + C_2$$

$$y^2 = 2Cx + 2(C_2 - C_1)$$

$$y^2 = C_3x + C_4$$

$$y^2 = C_1x + C_2$$

例. 试求 $x \cdot y' + y = 0$ 的通解, 并求其满足 $y(1)=1$ 的特解

$$x \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{x \, dy}{dx} = -y$$

$$x \, dy = -y \, dx$$

$$\frac{1}{y} \, dy = -\frac{1}{x} \, dx$$

$$\int \frac{1}{y} \, dy = \int \left(-\frac{1}{x}\right) \, dx$$

$$\ln|y| + C_1 = -\int \frac{1}{x} \, dx$$

$$\ln|y| + C_1 = -(\ln|x| + C_2)$$

$$\ln|y| = (-C_2 - C_1) - \ln|x|$$

$$\ln|y| = C_3 - \ln|x|$$

$$\text{【} \because \ln e^a = a \text{】}$$

$$\therefore \ln|y| = \ln e^{C_3} - \ln|x|$$

$$\text{【} \because \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \text{】}$$

$$\therefore \ln|y| = \ln \frac{e^{C_3}}{|x|}$$

$$\ln|y| = \ln \left| \frac{e^{C_3}}{x} \right|$$

$$\text{【} \because \ln a = \ln b \Rightarrow a = b \text{】}$$

$$\therefore |y| = \left| \frac{e^{C_3}}{x} \right|$$

$$y = \pm \frac{e^{C_3}}{x}$$

$$y = \frac{\pm e^{C_3}}{x}$$

$$\text{【} \because \pm e^{C_3} \text{ 结果是一个常数, 可用 } C \text{ 表示 } \text{】}$$

$$\therefore y = \frac{C}{x}$$

$$y(1) = \frac{C}{1} = C$$

$$C = 1$$

$$\text{特解为 } y = \frac{1}{x}$$

微分方程 —— 常系数齐次

求 $y'' - 5y' + 6y = 0$ 的通解

- ①

$$\begin{matrix} y^{(2)} & y^{(1)} & y^{(0)} \\ r^2 & r^1 & r^0 \\ r^2 - 5r^1 + 6r^0 = 0 \end{matrix}$$
- ②

$$\begin{aligned} \Rightarrow r^2 - 5r + 6 &= 0 \\ \Rightarrow (r-2)(r-3) &= 0 \\ \text{解得: } r_1 &= 2, r_2 = 3 \end{aligned}$$
- ③

单实根 2, 单实根 3
 $C_1 \cdot e^{2x} \quad C_2 \cdot e^{3x}$
- ④

通解: $y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x}$

特点	称为	对应的式子
$r_n = \alpha$	单实根 α	$C \cdot e^{\alpha x}$
$\begin{cases} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_k \end{cases} = \alpha$	k重实根 α	$e^{\alpha x} \cdot (C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1})$
$\begin{matrix} r_a = \alpha + \beta i \\ r_b = \alpha - \beta i \end{matrix}$	一对复根 $\alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
$\begin{cases} r_{a1} \\ r_{a2} \\ \dots \\ r_{ak} \end{cases} = \alpha + \beta i$ $\begin{cases} r_{b1} \\ r_{b2} \\ \dots \\ r_{bk} \end{cases} = \alpha - \beta i$	一对 k 重 复根 $\alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x} \cdot [(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \dots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$

微分方程 —— 常系数非齐次

例1. 求 $y'' - 5y' + 6y = e^x$ 的通解

- ①

$y'' - 5y' + 6y = 0$
特征方程的单实根 2, 单实根 3
齐次方程的通解 $\bar{y} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x}$
- ②

$f(x) = e^x = 1 \cdot e^{1 \cdot x}$
 $\lambda = 1, \quad m = 0, \quad k = 0$
- ③

$$\begin{aligned} y^* &= x^k (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m x^0) e^{\lambda x} \\ &= x^0 \cdot b_0 x^0 \cdot e^{1 \cdot x} \\ &= b_0 \cdot e^x \\ (b_0 \cdot e^x)'' - 5 \cdot (b_0 \cdot e^x)' + 6 \cdot (b_0 \cdot e^x) &= e^x \\ (b_0 \cdot e^x)' - 5b_0 e^x + 6b_0 e^x &= e^x \\ b_0 e^x - 5b_0 e^x + 6b_0 e^x &= e^x \\ 2b_0 &= 1 \\ b_0 &= \frac{1}{2} \\ y^* &= \frac{1}{2} e^x \end{aligned}$$
- ④

通解 $= C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x} + \frac{1}{2} e^x$

例2. 求 $y'' - 5y' + 6y = \cos x + \sin x$ 的通解

① $y'' - 5y' + 6y = 0$

特征方程的单实根 2，单实根 3 常系数齐次的题目做过
齐次方程的通解 $\bar{y} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x}$

② $f(x) = \cos x + \sin x = e^{0 \cdot x} [1 \cdot \cos(1 \cdot x) + 1 \cdot \sin(1 \cdot x)]$
 $\lambda = 0, \beta = 1, n = 0, t = 0, k = 0, m = 0$

$\lambda + \beta i = 0 + 1 \cdot i = i$ ， i 不是特征方程的根， $\therefore k = 0$

③ $y^* = x^k [(a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m x^0) \cos \beta x + (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m x^0) \sin \beta x] e^{\lambda x}$
 $= x^0 [a_0 x^0 \cos(1 \cdot x) + b_0 x^0 \sin(1 \cdot x)] e^{0 \cdot x}$
 $= a_0 \cos x + b_0 \sin x$

$(a_0 \cos x + b_0 \sin x)'' - 5(a_0 \cos x + b_0 \sin x)' + 6(a_0 \cos x + b_0 \sin x) = \cos x + \sin x$
 $-a_0 \cos x - b_0 \sin x + 5a_0 \sin x - 5b_0 \cos x + 6a_0 \cos x + 6b_0 \sin x = \cos x + \sin x$
 $(5a_0 + 5b_0 - 1) \sin x + (5a_0 - 5b_0 - 1) \cos x = 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} 5a_0 + 5b_0 - 1 = 0 \\ 5a_0 - 5b_0 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{5} \\ b_0 = 0 \end{cases}$

$y^* = \frac{1}{5} \cos x + 0 \cdot \sin x = \frac{1}{5} \cos x$

④ 通解 $= C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x} + \frac{1}{5} \cos x$

微分方程 —— 需要用知识点快速做的小题

例3 . 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$
是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，
则该方程的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

找非齐次方程的通解 \Rightarrow 找 $\begin{cases} \text{齐次方程的通解} & C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^x \\ \text{非齐次方程的特解} & y_3 = -xe^{2x} \end{cases}$
找齐次方程的通解 \Rightarrow 找齐次方程的两个特解且 $\frac{\text{齐次特解}_1}{\text{齐次特解}_2} \neq C$
齐次特解1: $y_1 - y_3 = (e^{3x} - xe^{2x}) - (-xe^{2x}) = e^{3x}$
齐次特解2: $y_2 - y_3 = (e^x - xe^{2x}) - (-xe^{2x}) = e^x$
 $\therefore \frac{\text{齐次特解}_1}{\text{齐次特解}_2} = \frac{e^{3x}}{e^x} = e^{2x} \neq C$
 \therefore 齐次方程的通解为 $C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^x$
 \therefore 非齐次方程的通解为 $C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^x - xe^{2x}$

找啥	需要有啥	能得到啥
非齐次的通解	齐次的通解 \bar{y} , 非齐次的特解 y^*	非齐次的通解 为 $\bar{y} + y^*$
齐次的特解	非齐次的特解 y_1^*, y_2^*	齐次的特解为 $y_1^* - y_2^*$
齐次的通解	齐次的特解 y_1, y_2 且 $\frac{y_1}{y_2} \neq C$	齐次的通解为 $C_1 y_1 + C_2 y_2$
	齐次的特解 y_1, y_2	齐次的特解为 $C_1 y_1 + C_2 y_2$
	? = $f_1(x)$ 的特解 y_a^* ? = $f_2(x)$ 的特解 y_b^*	? = $f_1(x) + f_2(x)$ 的 特解为 $y_a^* + y_b^*$

证明题

不等式	只含 x		单调性
	含 x_1, x_2	能一边只有 x_1 , 一边只有 x_2	单调性
		有 $f(x_2) - f(x_1)$ 形式的式子	拉格朗日中值定理
等式	不含 f'	已知两点的 f 值	零点定理
		已知范围内几个点加减后的值	介值定理推论
	含 f'	证明范围中存在 ξ 满足要求	罗尔中值定理
		证明范围中存在 ξ, η 满足要求	柯西定理

证明题 —— 利用单调性证明不等式

例1. 设 $x>0$, 常数 $a>e$, 证明 $(a+x)\cdot\ln a>a\cdot\ln(a+x)$

① $(a+x)\cdot\ln a>a\cdot\ln(a+x)$

$\Rightarrow (a+x)\cdot\ln a - a\cdot\ln(a+x)>0$

$f(x)=(a+x)\cdot\ln a - a\cdot\ln(a+x)$

② $f(0)=0$

③ $f'(x)=[(a+x)\cdot\ln a - a\cdot\ln(a+x)]'$
 $=[(a+x)\cdot\ln a]' - [a\cdot\ln(a+x)]'$
 $=(a+x)'\cdot\ln a - a\cdot[\ln(a+x)]'$
 $=1\cdot\ln a - a\cdot\frac{1}{a+x}$
 $=\ln a - \frac{a}{a+x} > 0$

$\because a>e$
 $\therefore \ln a>\ln e = 1$
 $\because x>0, a>0$
 $\therefore 0<\frac{a}{a+x}<1$
 $\therefore \ln a - \frac{a}{a+x} > 0$

\therefore 范围内 $f(x)$ 递增

$\therefore f(x)>f(0)$

$\Rightarrow f(x)>0$

$\Rightarrow (a+x)\cdot\ln a - a\cdot\ln(a+x) > 0$

$\Rightarrow (a+x)\cdot\ln a > a\cdot\ln(a+x)$

【 题难一点可能要用的公式：

$a^b=e^{b\cdot\ln a}, e^\alpha>e^\beta \Rightarrow \alpha>\beta$ 】

$a^{a+x}=e^{(a+x)\cdot\ln a}$

$(a+x)^a=e^{a\cdot\ln(a+x)}$

$e^{(a+x)\cdot\ln a}>e^{a\cdot\ln(a+x)} \Rightarrow (a+x)\cdot\ln a>a\cdot\ln(a+x)$

例2. 设 $x_1 > x_2 > e$, 证明 $x_1 \cdot \ln x_2 > x_2 \cdot \ln x_1$

$$\textcircled{1} \quad x_1 \cdot \ln x_2 > x_2 \cdot \ln x_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ln x_2}{x_2} > \frac{\ln x_1}{x_1}$$

$$f(x_1) = \frac{\ln x_1}{x_1}, \quad f(x_2) = \frac{\ln x_2}{x_2}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad f'(x) &= \left(\frac{\ln x}{x} \right)' \\ &= \frac{(\ln x)' \cdot x - (\ln x) \cdot x'}{x^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x) \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

$$\because x_1 > x_2 > e$$

$$\therefore x > e \text{ 时, } x^2 > 0$$

$$\ln x > \ln e = 1$$

$$\therefore \text{范围内 } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$$

\therefore 范围内 $f(x)$ 单调递减

$$\textcircled{4} \quad \because x_1 > x_2$$

$$\therefore f(x_1) < f(x_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ln x_1}{x_1} < \frac{\ln x_2}{x_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ln x_1}{x_1} \cdot x_1 x_2 < \frac{\ln x_2}{x_2} \cdot x_1 x_2$$

$$\Rightarrow \quad x_2 \cdot \ln x_1 < x_1 \cdot \ln x_2$$

证明题 —— 利用拉格朗日中值定理证明不等式

例3. 设 $f''(x) < 0$, 证明: 对任何的 $x_1 \geq x_2 > 0$, 有 $f(x_1 + x_2) - f(x_1) < f(x_2) - f(0)$ 方法:

令 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$, $\xi \in (x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) - f(x_1) &= f'(\xi_1) \cdot (x_1 + x_2 - x_1), \quad \xi_1 \in (x_1, x_1 + x_2) \\ &= f'(\xi_1) \cdot x_2, \quad \xi_1 \in (x_1, x_1 + x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(0) &= f'(\xi_2) \cdot (x_2 - 0), \quad \xi_2 \in (0, x_2) \\ &= f'(\xi_2) \cdot x_2, \quad \xi_2 \in (0, x_2) \end{aligned}$$

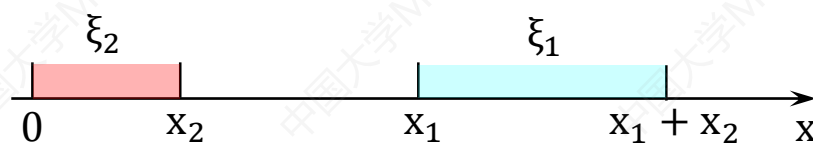
$$\because f''(x) < 0$$

$\therefore f'(x)$ 单调递减

$$\because x_1 \geq x_2 > 0, \quad \xi_1 \in (x_1, x_1 + x_2), \quad \xi_2 \in (0, x_2)$$

$$\therefore \xi_1 > \xi_2$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(\xi_1) < f'(\xi_2) &\Rightarrow f'(\xi_1) \cdot x_2 < f'(\xi_2) \cdot x_2 \\ &\Rightarrow f(x_1 + x_2) - f(x_1) < f(x_2) - f(0) \end{aligned}$$



证明题 —— 利用零点定理证明等式

例4. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=0, f(1)=1,$
证明: 存在 $x_0 \in (0,1),$ 使得 $f(x_0)=1-x_0$

① $f(x_0)=1-x_0 \Rightarrow f(x_0)+x_0 -1=0$
 $\Rightarrow F(x_0) = f(x_0)+x_0 -1$
 $\Rightarrow F(x) = f(x)+x -1$

② $F(0) = f(0)+0 -1 \qquad F(1) = f(1)+1 -1$
 $= 0 +0 -1 \qquad = 1 +1 -1$
 $= -1 \qquad = 1$

③ $\because F(0) \cdot F(1) = -1 \times 1 = -1 < 0$
 $\therefore (0,1)$ 内必有一点 $x_0,$ 可使 $F(x_0)=0$
即 $f(x_0)+x_0 -1=0$
即 $f(x_0)=1-x_0$

证明题 —— 利用介值定理推论证明等式

例5. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 且 $f(0)+2f(1)=12,$
证明: 存在 $x_0 \in [0,2],$ 使得 $f(x_0)=4$

① 设在 $[0,2]$ 内, $f(x)$ 最大值为 $M,$
最小值为 m

② $m+2m \leq 12 \Rightarrow 3m \leq 12 \Rightarrow m \leq 4$
 $M+2M \geq 12 \Rightarrow 3M \geq 12 \Rightarrow M \geq 4$
 $\Rightarrow m \leq 4 \leq M$
 $\Rightarrow [0,2]$ 必有一点 $x_0,$ 可使 $f(x_0)=4$

证明题 —— 利用罗尔中值定理证明等式

例6. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有二阶导数, 且 $f(0)=0, f(1)=1,$
证明: 存在 $\xi \in (0,1),$ 使得 $f'(\xi)=1$

① $f'(\xi)=1 \Rightarrow f'(\xi) -1=0$

② $F(x) = f(x)+(-1) \cdot x = f(x)-x$
 $F'(x) = [f(x) - x]'$
 $= f'(x) - x'$
 $= f'(x) - 1$

③ $F(0) = f(0)-0 \qquad F(1) = f(1)-1$
 $= 0 -0 \qquad = 1 -1$
 $= 0 \qquad = 0$
 $\therefore a=0, b=1$ 时, 可使 $F(a)=F(b)$
即 $F(0)=F(1)$

④ $(0,1)$ 内存在 $\xi,$ 可使 $F'(\xi)=0$
即 $f'(\xi) - 1=0$
即 $f'(\xi)=1$

对照下表设 $F(x)$

标准格式	$F(x)$
$f'(\xi)+C=0$	$f(x)+Cx$
$f'(\xi)+\lambda f(\xi)+C=0$	$e^{\lambda x}f(x)+\frac{C}{\lambda}e^{\lambda x}$
$f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$	$e^{g(x)}f(x)$
$\xi f'(\xi)+\lambda f(\xi)+C=0$	$x^\lambda f(x)+\frac{C}{\lambda}x^\lambda$

证明题 —— 利用柯西定理证明等式

例7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且 $f'(x) \neq 0$,

证明: 存在 $\xi, \eta \in (a,b)$, 可使 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b-a} \cdot e^{-\eta}$

$$\textcircled{1} \quad \frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b-a} \cdot e^{-\eta} \Rightarrow \underbrace{f'(\xi)}_{\text{含 } \xi \text{ 的项}} = \frac{e^b - e^a}{b-a} \cdot \underbrace{e^{-\eta} \cdot f'(\eta)}_{\text{含 } \eta \text{ 的项}}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{令 } \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = f'(\xi) \Rightarrow g'(\xi) = 1$$

$$g(\xi) = \int 1 \, d\xi = \xi$$

$$\therefore (a,b) \text{ 内必有一点 } \xi, \text{ 可使 } f'(\xi) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{令 } \frac{f'(\eta)}{h'(\eta)} = e^{-\eta} \cdot f'(\eta) \Rightarrow h'(\eta) = \frac{f'(\eta)}{e^{-\eta} \cdot f'(\eta)} = \frac{1}{e^{-\eta}} = e^{\eta}$$

$$h(\eta) = \int e^{\eta} \, d\eta = e^{\eta}$$

$$\therefore (a,b) \text{ 内必有一点 } \eta, \text{ 可使 } e^{-\eta} \cdot f'(\eta) = \frac{f'(\eta)}{h'(\eta)} = \frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a}$$

$$\textcircled{4} \quad \because f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$e^{-\eta} \cdot f'(\eta) = \frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a}$$

$$\therefore \frac{f'(\xi)}{e^{-\eta} \cdot f'(\eta)} = \frac{\frac{f(b) - f(a)}{b-a}}{\frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a}} = \frac{e^b - e^a}{b-a}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b-a} \cdot e^{-\eta}$$

$$\therefore (a,b) \text{ 内必有一点 } \xi, \eta, \text{ 可使 } \frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b-a} \cdot e^{-\eta}$$