Polynomielle Wegeungleichungen für ungerichtete Graphen

Bachelorarbeit

vorgelegt von

Nadja Willenborg

an der

Universität Konstanz

Mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion
Fachbereich Mathematik und Statistik

1. Gutachter: Prof. Dr. Sven Kosub
2. Gutachter: Prof. Dr. Markus Schweighofer

Konstanz, 2016

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Für das Streckennetz der deutschen Hauptbahnhöfe lässt sich folgendes feststellen: Multipliziert man die Anzahl der Bahnhöfe mit der Anzahl aller Verbindungen bei denen genau ein Bahnhof durchfahren wird, so ist diese Anzahl größer als die Anzahl aller Direktverbindungen im Quadrat. Diese Aussage lässt sich mit Hilfe einer Wegeungleichung feststellen. Allgemeiner formuliert stellt eine Wegeungleichung eine Aussage über die Anzahl von Wegen bestimmter Länge eines Graphen auf. Diese Arbeit beschäftigt sich mit Wegeungleichungen, die in jedem ungerichteten Graphen erfüllt sind und gleichzeitig der Struktur eines Polynoms ähneln. Damit ist es dann möglich, Resultate aus der reellen algebraischen Geometrie heranzuziehen, um Ungleichungen dieser Art näher zu studieren.

In dieser Arbeit sei die Menge aller natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ und die Menge aller positiven natürlichen Zahlen sei $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \dots\}$.

Ein *ungerichteter Graph* ist ein Tupel $G = (V, E)$. Dabei ist V eine endliche, nichtleere Menge, deren Elemente *Knoten* heißen. Die Menge E ist eine Teilmenge der zweielementigen Teilmengen von V, deren Elemente man als *Kanten* bezeichnet. Ein Graph kann veranschaulicht werden, indem man seine Knoten als Punkte darstellt und zwischen zwei Punkten genau dann eine Linie zeichnet, wenn die entsprechenden Knoten eine Kante darstellen. Wir sprechen von einem ungerichteten Graphen, weil die Kanten $e = \{u, v\} \in E$ keine Richtung haben (vgl. [Ste07], S.58). In dieser Arbeit bezeichnet $G = (V, E)$ stets einen ungerichteten Graphen.

Ein *Weg der Länge k* in einem Graphen G ist eine Folge

$$(v_0, e_1, v_1, ..., v_{k-1}, e_k, v_k)$$

mit $v_0, ..., v_k \in V, e_1, ..., e_k \in E$, sowie $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ für alle $i \in \{1, ..., k\}$. Für die Anzahl der Wege der Länge k in $G = (V, E)$ schreiben wir w_k (vgl. [Täu15], S.6). Da G im Folgenden ein fixierter Graph ist, referieren wir in dieser Schreibweise nicht auf G.

Weiter nennen wir eine nichtnegative Summe

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \geq 0$$

mit $c_\alpha \in \mathbb{R}$, $c_\alpha = 0$ für fast alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ eine *polynomielle Wegeungleichung für ungerichtete Graphen*, wenn sie von jedem ungerichteten Graphen erfüllt wird. Wir nennen n die *Länge* der Wegeungleichung und $|\alpha| = \max\{|\alpha||c_\alpha \neq 0\}$ den *Grad* der Wegeungleichung.

Polynomielle Wegeungleichungen führen auf Dichteungleichungen. Mit Hilfe von Dichteungleichungen lassen sich möglichst dichte Teilgraphen von Graphen ermitteln. Die *Dichte* von G wird beschrieben durch den Quotienten der Anzahl der Wege der Länge 1 in G und der maximal möglichen Anzahl von Wegen der Länge 1 in G. Die Dichte (der Ordnung 1) von G wird daher durch

$$d_1 := \frac{w_1}{|V| \cdot (|V| - 1)}$$

definiert. Auf ähnliche Art wird eine Dichte der Ordnung k als

$$d_k := \frac{w_k}{|V| \cdot (|V| - 1)^k}$$

definiert (vgl. [Kos05], S.17). Um die Korrespondenz zwischen Wege- und Dichteungleichungen geschickt auszunutzen und möglichst aussagekräftige Wegeungleichungen zu erhalten, sind vor allem Ungleichungen der Form $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$ interessant. Insbesondere sollte eine solche Ungleichung auch von jedem r-regulären Graphen erfüllt werden. In einem r-regulären Graphen gehen von jedem Knoten r Kanten weg. Die Anzahl der Wege der Länge k in einem r-regulären Graphen mit n Knoten beträgt also $n \cdot r^k$. Für die Gültigkeit der Ungleichung $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$ muss also $|\alpha| \leq |\beta|$ gelten. Um dann sogar auf die entsprechende Dichteungleichung $d_{\alpha_1} \cdots d_{\alpha_n} \leq d_{\beta_1} \cdots d_{\beta_n}$ schließen zu können, muss auch $|\alpha| = |\beta|$ gelten. Wir werden in dieser Arbeit daher nur Wegeungleichungen $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$ mit $|\alpha| = |\beta|$ behandeln. Eine Anwendung polynomieller Wegeungleichungen ist in dem Artikel [AF+95] zu finden. Um einen approximativen Algorithmus zum Ermitteln möglichst dichter Teilgraphen zu entwickeln, wurden in diesem Artikel die in [ES82] aufgestellten Wegeungleichungen herangezogen:

Theorem 1.0.1. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Dann erfüllt G die Ungleichung*

$$w_1^k \leq w_0^{k-1} \cdot w_k.$$

Diese Ungleichungen wurden 1982 durch Erdös und Simonovits aufgestellt und stellen historisch gesehen die ersten polynomiellen Wegeungleichungen für ungerichtete Graphen dar.

Ein Jahr später formulierten Lagarias, Mazo, Shepp und McKay die Frage, für welche $a, b \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $w_a \cdot w_b \leq w_0 \cdot w_{a+b}$ gültig ist, das heißt von allen ungerichteten Graphen erfüllt wird. 1984 haben sie in dem Artikel [LM+84] gezeigt, dass die Ungleichung genau dann gültig ist, wenn $a+b \equiv 0 \pmod 2$. Damit konnten weitere polynomielle Wegeungleichungen aufgestellt werden.

Theorem 1.0.2. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und seien $a, b \in \mathbb{N}$. Dann erfüllt G die Ungleichung*

$$w_{2a+b} \cdot w_b \leq w_0 \cdot w_{2(a+b)}.$$

Weitere polynomielle Wegeungleichungen entstanden 2003 durch Dress und Gutman (vgl. [DG03]).

Theorem 1.0.3. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und seien $a, b \in \mathbb{N}$. Dann erfüllt G die Ungleichung*

$$w_{a+b}^2 \leq w_{2a} \cdot w_{2b}.$$

In den letzten 5 Jahren wurden durch R. Hemmecke , S. Kosub, E.W. Mayr, H. Täubig und J. Weihmann weitere Ungleichungen aufgestellt. So haben sie in dem Artikel [HK+12] die folgenden Ungleichungen hergeleitet, die die Ungleichungen aus Theorem 1.0.2 und Theorem 1.0.3 verallgemeinern.

Theorem 1.0.4. *Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Dann erfüllt G die Ungleichung*

$$w_{2a+c} \cdot w_{2(a+b)+c} \leq w_{2a} \cdot w_{2(a+b+c)}.$$

Zu einer polynomiellen Wegeungleichung lässt sich stets ein Polynom angeben. Wir werden in Kapitel 2 den folgenden Zusammenhang zwischen Polynomen und polynomiellen Wegeungleichungen feststellen (vgl. [Kos08]):
Sei

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$$

mit $c_\alpha \in \mathbb{R}, c_\alpha = 0$ für fast alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und

$$f_{sym} := \sum_{\sigma \in S_n} f(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \quad (vgl.\text{[Haz90]},\ S.344)$$

die *Symmetrisierung* von f. Gilt $f_{sym} \geq 0$, so ist die zu f korrespondierende Wegeungleichung

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \geq 0$$

in jedem ungerichteten Graphen erfüllt.

Die Ungleichungen $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$ mit $|\alpha| = |\beta|$ korrespondieren also stets zu einer Form (auch homogenes Polynom genannt). Wir beschränken daher alle Betrachtungen und Aussagen in dieser Arbeit auf Formen. Eine Form $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ heißt positiv semidefinit, wenn $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist. Hinsichtlich der oben genannten Korrespondenz zwischen polynomiellen Wegeungleichungen und Polynomen stellt sich also die Frage, für welche Formen die Symmetrisierung positiv semidefinit ist. Diese Fragestellung führt auf die viel interessantere Frage:

> *„Ist es möglich mit Hilfe positiv semidefiniter Formen weitere Ungleichungen $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$ aufzustellen, die von allen ungerichteten Graphen erfüllt werden?“*

Wir werden diese Frage nicht vollständig beantworten können. Wohl aber werden wir Antworten auf die folgenden Fragen geben:

1. Wie lassen sich positiv semidefinite Formen bezüglich der Variablenanzahl und des Grades charakterisieren?

2. Wie müssen $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n$ aussehen, damit die Ungleichungen $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$ mit Hilfe positiv semidefiniter Formen hergeleitet werden können?

3. Welche in der Literatur bekannten polynomiellen Wegeungleichungen lassen sich auch mit Hilfe einer Form herleiten?

Um diese Fragen zu beantworten, werden wir Formen anhand ihrer Gradtupel charakterisieren. Darauf basierend werden wir sowohl mit hinreichenden, als auch mit notwendigen Bedingungen für die positive Semidefinitheit von Formen beliebigen Grades und beliebiger Variablenanzahl arbeiten. Ausgerüstet mit dieser Flexibilität ist es dann möglich, Wegeungleichungen beliebigen Grades und beliebiger Länge zu erhalten. Die wichtigsten Kriterien und ihr Nutzen für das Beantworten der zuvor gestellten Fragen werden nun kurz erläutert:

1. Jede Form definiert durch seine Gradtupel ein sogenanntes Newton-Polytop. Mit Hilfe des Newton-Polytops lässt sich eine notwendige Bedingung für die positive Semidefinitheit einer Form feststellen. Dieses Kriterium ist für das Ergründen der zuvor gestellten Fragen besonders interessant. So lässt sich einsehen, dass nur Wegeungleichungen $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$ mit $\beta_i \equiv 0 \pmod 2$ für $i = 1, \ldots, n$ auf positiv semidefinite Formen zurückgeführt werden können.

2. Bruce Reznick entwickelte ein Theorem, welches eine explizite Beschreibung einer Form angibt, die das Vorliegen der positiven Semidefinitheit dieser Form sichert. Dabei stehen die Koeffizienten und Gradtupel einer Form so im Zusammenhang, dass sich Ungleichungen $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$ ergeben. Wir werden sehen, dass sich spezielle Fälle bereits bekannter Ungleichungen mit diesem Theorem beweisen lassen.

Wir werden auch Formen, die zu bereits bekannten Wegeungleichungen korrespondieren, analysieren. Im Falle, dass die symmetrisierte Form positiv semidefinit ist, versuchen wir symmetrische Formen ähnlicher Struktur zu definieren. Dies führt auf die Ungleichungen

$$w_{2\alpha_1} \cdots w_{2\alpha_n} \geq w_{\alpha_1+\alpha_{\sigma(1)}} \cdots w_{\alpha_n+\alpha_{\sigma(n)}},$$

wobei σ eine Permutation der symmetrischen Gruppe ist. Anschließend stellt sich natürlich die Frage, ob sich die Gültigkeit dieser Ungleichungen nicht durch mehrfaches Anwenden bereits gültiger Wegeungleichungen folgern lässt. Dies wird sich für die gerade dargestellten Ungleichungen als schwierig herausstellen. Für bestimmte Permutationen können wir diese Ungleichungen aber auf bekannte Ungleichungen zurückführen.

Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich im Wesentlichen in drei Teile:

- Das zweite Kapitel dient dem Verständnis der späteren Kapitel und ist in drei Abschnitte unterteilt. Der erste Abschnitt erläutert die wichtigsten Begriffe und Aussagen über positiv semidefinite Formen. Auch das Theorem von Reznick wird hier genannt. Das Kriterium zur positiven Semidefinitheit einer Form anhand des Newton-Polytops ist in einem neuen Abschnitt beschrieben. Wir werden dort die nötige Theorie entwickeln, um eine bessere Fortsetzung des Themas zu ermöglichen. Der dritte Abschnitt widmet sich der Graphentheorie. Hier wird der Zusammenhang zwischen positiv semidefiniten Formen und polynomiellen Wegeungleichungen verdeutlicht.

- Im dritten Kapitel werden die in der Literatur bekannten Ungleichungen $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$ mit $|\alpha| = |\beta|$ behandelt. Ursprünglich ließen sich diese Ungleichungen ohne das Auffinden einer positiv semidefiniten Form beweisen. Ist es mit unseren Mitteln möglich, die Ungleichungen auch mit Hilfe einer Formen herzuleiten, so zeigen wir dies in einer Bemerkung.

- Im vierten Kapitel werden wir untersuchen, inwiefern die Kriterien zur positiven Semidefinitheit einer Form dabei helfen können, neue Wegeungleichungen zu finden. Es folgt eine Analyse der Formen, die zu gültigen Wegeungleichungen korrespondieren und das Aufstellen weiterer Wegeungleichungen. Danach prüfen wir jeweils in einer Bemerkung, ob sich diese Ungleichungen nicht auch durch die Ungleichungen aus Kapitel 3 folgern lassen. Ein kurzer Ausblick auf eine weitere Vorgehensweise wird die Arbeit abschließen.

Im Anhang befindet sich eine Liste, aus der Literatur entnommener, positiv semidefiniter Formen und die zu diesen Formen korrespondierenden Wegeungleichungen. Die Variablenanzahl oder der Grad dieser Formen ist jedoch fixiert und es ergeben sich keine neuen Erkenntnisse für Wegeungleichungen der Art $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$. Einige der dort vorgestellten Formen führen aber auf allgemeinere Wegeungleichungen, die neue Zusammenhänge für die Anzahl von Wegen bestimmter Länge aufzeigen.

Kapitel 2

Grundlagen

Die ersten beiden Abschnitte dieses Kapitels dienen dazu, alle relevanten Konzepte und Begriffe aus der reellen algebraischen Geometrie vorzustellen. Der dritte Abschnitt gibt einen Einblick in die Graphentheorie, insbesondere in Bezug auf Wegeungleichungen und zeigt schließlich einen Zusammenhang zwischen positiv semidefiniten, symmetrischen Formen und Wegeungleichungen auf.

2.1 Positiv semidefinite, symmetrische Formen

Wir beginnen mit grundlegenden Definitionen und Aussagen über positiv semidefinite Formen, die, wenn nicht anders gekennzeichnet, auch in [Go14] zu finden sind.

Definition 2.1.1. *Ein* multivariates Polynom *f aus dem Polynomring $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ hat die Darstellung*

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$$

mit $c_\alpha \in \mathbb{R}$ für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $c_\alpha = 0$ für fast alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Ein Polynom $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ bezeichnet man als Monom. *Falls $c_\alpha \neq 0$, so ist $c_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ ein* Term *von f. Weiter wird $deg(f) := max\{|\alpha| : c_\alpha \neq 0\}$ der* Grad *von f genannt. Der Grad der Nullform ist definiert als $deg(0) := -\infty$ (siehe [SS13], S.30).*

Definition 2.1.2. *Ein Polynom f heißt* homogenes Polynom *oder* Form*, falls alle in f vorkommenden Monome den gleichen Grad haben.*

Wir werden in dieser Arbeit stets Formen betrachten.

Notation 2.1.3. *Die Menge aller Formen in n Variablen vom Grad d mit reellen Koeffizienten bezeichnen wir mit*

$$\mathcal{F}_{n,d} := \{f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \mid f \textit{ ist eine Form mit } \deg(f) = d\}.$$

Bemerkung 2.1.4. *Eine Form $f \in \mathcal{F}_{n,d}$ erfüllt aufgrund der Homogenität für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung*

$$f(\lambda x) = \lambda^d f(x).$$

Definition 2.1.5.

1. *Eine Form $f \in \mathcal{F}_{n,d}$ heißt* positiv semidefinit *(psd) und wir schreiben $f \geq 0$, wenn alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung $f(x) \geq 0$ erfüllen.*

2. *Eine Form $f \in \mathcal{F}_{n,2d}$ ist eine Summe von Formenquadraten und wird kurz* sos-Form *(sums of squares form) genannt, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert und $p_i \in \mathcal{F}_{n,d}$, $i = 1, \dots, k$ existieren, sodass f die Darstellung*

$$f = \sum_{i=1}^{k} p_i^2$$

hat.

Bemerkung 2.1.6. *Sei $f \in \mathcal{F}_{n,d}$, dann ist $d = 2d'$ mit $d' \in \mathbb{N}$ eine Notwendigkeit für die positive Semidefinitheit von f. Denn angenommen $d = 2d' + 1$ und f positiv semidefinit. Mit der Eigenschaft aus Bemerkung 2.1.4 folgt dann $f(-x) = (-1)^{2k+1} f(x)$ und wegen der positiven Semidefinitheit von f schließlich $f \equiv 0$. Der Grad der Nullform ist aber $-\infty$. Damit muss $d = 2d'$ sein.*

Notation 2.1.7. *Wir definieren*

1. $\mathcal{P}_{n,2d} := \{f \in \mathcal{F}_{n,2d} \,|\, f \geq 0\}$ *als die Menge aller positiv semidefiniten Formen in $\mathcal{F}_{n,2d}$.*

2. $\Sigma_{n,2d} := \{f \in \mathcal{F}_{n,2d} \,|\, f \text{ ist eine sos-Form}\}$ *als die Menge aller sos-Formen in $\mathcal{F}_{n,2d}$.*

Offensichtlich gilt $\Sigma_{n,2d} \subseteq \mathcal{P}_{n,2d}$. Die Frage, welche $(n, d) \in \mathbb{N}^2$ auch die umgekehrte Inklusion erfüllen, wurde 1888 von David Hilbert durch nachfolgendes Theorem beantwortet:

Theorem 2.1.8. *(Hilbert, 1888) Es gilt $\Sigma_{n,2d} \subseteq \mathcal{P}_{n,2d}$ und Gleichheit genau dann, wenn:*

1. $n \leq 2$ *oder*

2. $d = 1$ *oder*

3. $n = 3$ *und* $d = 4$

Beweis. Siehe [Ma08], Seite 7f und für den Fall $\mathcal{P}_{3,4} = \Sigma_{3,4}$ [BCR98] Proposition 6.4.4. □

Um die strikte Ungleichung $\Sigma_{n,2d} \subsetneq \mathcal{P}_{n,2d}$ für alle Paare $(n, 2d), n \geq 3, 2d \geq 4$ und $(n, 2d) \neq (3, 4)$ zu zeigen, bewies Hilbert zunächst die beiden Fälle $\Sigma_{3,6} \subsetneq \mathcal{P}_{3,6}$ und $\Sigma_{4,4} \subsetneq \mathcal{P}_{4,4}$. Anschließend führte er alle weiteren Fälle auf diese beiden Fälle zurück. Hilbert lieferte in seinem Beweis kein Verfahren positiv semidefinite Formen zu konstruieren, die sich nicht als Summe von Quadratformen schreiben lassen. Daher wurde das erste Gegenbeispiel erst 1967 von Theodore Samuel Motzkin veröffentlicht:

Satz 2.1.9. *(vgl. [Rez00]) Sei $f = X_1^4 X_2^2 + X_1^2 X_2^4 + X_3^6 - 3X_1^2 X_2^2 X_3^2$. Dann ist f positiv semidefinit und lässt sich nicht als Summe von Quadratformen schreiben.*

Beweis. Die positive Semidefinitheit von f folgt aus der arithmetisch-geometrischen-Ungleichung $\frac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{\frac{1}{3}}$ mit $(a, b, c) = (X_1^4 X_2^2, X_1^2 X_2^4, X_3^6)$. Um zu zeigen, dass f sich nicht als Summe von Quadratformen schreiben lässt vergleicht man die Koeffizienten von f mit den Koeffizienten einer möglichen sos-Darstellung. Angenommen f lässt sich als Summe von Quadratformen darstellen, das heißt $f = \sum_{k=1}^{m} p_k^2$ für geeignete $p_k \in \mathcal{F}_{3,3}$. Dann gilt

$$p_k = a_k X_1^3 + b_k X_1^2 X_2 + c_k X_1 X_2^2 + d_k X_2^3 + e_k X_1^2 X_3 + f_k X_1 X_2 X_3 + g_k X_2^2 X_3 + h_k X_1 X_3^2 + i_k X_2 X_3^2 + j_k X_3^3$$

mit $a_k, ..., j_k \in \mathbb{R}$. Da das Monom X_1^6 in f nicht erscheint, muss $\sum_{k=1}^m a_k^2 = 0$ gelten. Folglich ist $a_k = 0$ für $k = 1, ..., m$. Aus dem gleichen Grund folgt auch $d_k = 0$ für $k = 1, ..., m$. Der Koeffizient von $X_1^4 X_3^2$ in der Darstellung $\sum_{k=1}^m p_k^2$ ist $\sum_{k=1}^m (e_k^2 + 2a_k h_k)$. Da $a_k = 0$ und $X_1^4 X_3^2$ in f nicht vorkommt, ist auch $e_k = 0$ für $k = 1, ..., m$. Gleiches Vorgehen mit dem Koeffizienten von $X_2^4 X_3^2$ liefert $g_k = i_k = 0$ für $k = 1, ..., m$ und durch Koeffizientenvergleich von $X_3^4 X_1^2$ folgt auch $h_k = 0$ für $k = 1, \cdots, m$. Damit ist also $p_k = b_k X_1^2 X_2 + c_k X_1 X_2^2 + f_k X_1 X_2 X_3 + j_k X_3^3$ und man erhält einen Widerspruch durch Koeffizientenvergleich von $X_1^2 X_2^2 X_3^2$, denn $\sum_{k=1}^m f_k^2 \neq -3$. □

Das Beispiel von Motzkin lässt sich zwar nicht als Summe von Quadratformen schreiben, dafür aber als Summe von Quadraten rationaler Funktionen. Die Zerlegung von f sieht dann so aus:

$$\begin{aligned} f = &\left(\frac{\left(X_1^2 - X_2^2\right) X_3^3}{X_1^2 + X_2^2} \right)^2 + \left(\frac{X_1^2 X_2 \left(X_1^2 + X_2^2 - 2X_3^2\right)}{X_1^2 + X_2^2} \right)^2 \\ &+ \left(\frac{X_1 X_2^2 \left(X_1^2 + X_2^2 - 2X_3^2\right)}{X_1^2 + X_2^2} \right)^2 + \left(\frac{X_1 X_2 X_3 \left(X_1^2 + X_2^2 - 2X_3^2\right)}{X_1^2 + X_2^2} \right)^2 \quad (vgl.\text{[Da10]}). \end{aligned}$$

Somit formulierte Hilbert im Jahr 1900 die Frage, ob jede positiv semidefinite Form eine Darstellung als Summe von Quadraten rationaler Funktionen hat. Diese Frage ist auch als Hilberts 17. Problem bekannt und wurde im Jahr 1927 durch Emil Artin positiv beantwortet.

Theorem 2.1.10. *(Hilberts 17. Problem) Sei $f \in \mathcal{F}_{n,d}$. Genau dann gilt $f \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$, wenn $p_1, \ldots, p_l,\ h_1, \ldots, h_l \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ mit $h_i \neq 0$ existieren so, dass f die Darstellung*

$$f = \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{p_i}{h_i} \right)^2$$

besitzt.

Beweis. Siehe [Ma08], Seite 11ff. □

Die Äquivalenz dieses Theorems zu folgendem Korollar ist auch in [Rez00] erwähnt und kann durch Auflösen der Brüche eingesehen werden.

Korollar 2.1.11. *Sei $f \in \mathcal{P}_{n,2d}$. Dann existieren $g, p_1, \ldots, p_l \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ und $l \in \mathbb{N}$ so, dass die Darstellung*

$$g^2 f = \sum_{i=1}^{l} p_i^2$$

möglich ist.

Hurwitz [Hur91] gelang es 1891 zunächst die Formen $f = \sum\limits_{i=1}^{2d} X_i^{2d} - 2d \prod\limits_{i=1}^{2d} X_i$ explizit als Summe von Quadratformen darzustellen. Knapp 100 Jahre später, 1987, hat Reznick in [Rez87] und [Rez89] aus dieser Darstellung ein allgemeineres Resultat gefolgert:

Theorem 2.1.12. *(Reznick) Sei $f = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i X_i^{2d} \right) - 2d X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \in \mathcal{F}_{n,2d}$ mit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $|\alpha| = 2d$. Dann ist f eine sos-Form.*

Beweis. Siehe [Gha12], S.34. □

Wir beginnen nun die Gradtupel der Monome einer Form zu charakterisieren.

Definition 2.1.13. *Wir nennen das Tupel* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *mit* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = d$ *eine* n-Partition *der Zahl* d.

Damit können wir wie folgt eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Monome vom Grad d in höchstens n Variablen definieren.

Definition 2.1.14. *Seien* $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ *und* $X_1^{\beta_1} \cdots X_n^{\beta_n}$ *zwei Monome vom Grad* d. *Wir nennen* $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ *und* $X_1^{\beta_1} \cdots X_n^{\beta_n}$ äquivalent bezüglich der symmetrischen Gruppe S_n, *wenn ein* $\sigma \in S_n$ *existiert, sodass*
$$X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} = X_{\sigma(1)}^{\beta_1} \cdots X_{\sigma(n)}^{\beta_n}.$$
Die Gradtupel äquivalenter Monome beschreiben also bis auf Permutation die gleiche n-Partition der Zahl d.

Definition 2.1.15. *Eine Form* $f \in \mathcal{F}_{n,d}$ *heißt* symmetrische Form, *wenn* f *invariant bezüglich allen Permutationen bleibt, das heißt alle* $\sigma \in S_n$ *erfüllen*

$$f(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) = f(X_1, \ldots, X_n).$$

Eine Form f ist also genau dann symmetrisch, wenn alle äquivalenten Monome von f den gleichen Koeffizienten besitzen.

Definition 2.1.16. *(vgl. [Haz90], S.344) Wir definieren die* Symmetrisierung einer Form $f \in \mathcal{F}_{n,d}$ *durch*
$$f_{sym} := \sum_{\sigma \in S_n} f(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}).$$

Bemerkung 2.1.17. *Es ist leicht einzusehen, dass die positive Semidefinitheit einer Form unter Symmetrisierung erhalten bleibt. Der umgekehrte Fall gilt im Allgemeinen nicht. Für ein Beispiel betrachte man etwa die Form* $f = X_1^2 - X_1X_2$. *Diese ist offensichtlich nicht positiv semidefinit. Aber ihre Symmetrisierung* $f_{sym} = X_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_2$ *ist nach dem Theorem von Reznick positiv semidefinit.*

Notation 2.1.18. *Wir bezeichnen*

1. *die Menge der symmetrischen Formen in* $\mathcal{F}_{n,d}$ *als*

$$S\mathcal{F}_{n,d} := \{f \in \mathcal{F}_{n,d} \mid \textit{alle}\, \sigma \in S_n \textit{ erfüllen}\, f(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) = f(X_1, \ldots, X_n)\}.$$

2. *die Menge der positiv semidefiniten symmetrischen Formen in* $\mathcal{F}_{n,2d}$ *als*

$$S\mathcal{P}_{n,2d} := \{f \in S\mathcal{F}_{n,2d} \mid f \geq 0\}.$$

3. *die Menge der symmetrischen sos-Formen in* $\mathcal{F}_{n,2d}$ *als*

$$S\Sigma_{n,2d} := \{f \in S\mathcal{F}_{n,2d} \mid f \textit{ ist sos-Form}\}.$$

Die Gleichung $S\Sigma_{n,2d} = S\mathcal{P}_{n,2d}$ wird durch die gleichen Paare $(n,d) \in \mathbb{N}^2$ erfüllt, die auch $\mathcal{P}_{n,2d} = \Sigma_{n,2d}$ erfüllen.

Theorem 2.1.19. *Es gilt $S\Sigma_{n,2d} \subseteq S\mathcal{P}_{n,2d}$ und Gleichheit genau dann, wenn :*

1. $n \leq 2$ *oder*
2. $d = 1$ *oder*
3. $n = 3$ *und* $d = 4$.

Beweis. (siehe [Go14], S.73ff) □

Das Halber Grad Prinzip von Vlad Timofte (vgl. [Ti03]) liefert sowohl eine hinreichende, als auch notwendige Bedingung für die positive Semidefinitheit einer symmetrischen Form. Nach Timofte genügt es die positive Semidefinitheit einer symmetrischen Form auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ zu überprüfen.

Theorem 2.1.20. *(Halber Grad Prinzip) Sei $f \in S\mathcal{F}_{n,2d}$. Es ist $f \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $f \geq 0$ auf der Teilmenge*

$$\Lambda_{n,k} := \{x \in \mathbb{R}^n | \textit{die Anzahl der verschiedenen Komponenten von}\, x \textit{ ist} \leq k\}$$

gilt, wobei $k := max\{2, d\}$.

Beweis. Siehe [Ri15], S. 4 ff. □

Je kleiner der Grad einer Form im Vergleich zu den vorkommenden Variablen ist, desto kleiner ist die Teilmenge $\Lambda_{n,k}$ im Vergleich zum $\mathbb{R}^n$ und die positive Semidefinitheit der Form kann schneller bestimmt werden. Das Halber Grad Prinzip findet also insbesondere bei Formen Anwendung, deren halber Grad echt kleiner ist als die Variablenanzahl der Form.

2.2 Das Newton-Polytop

Durch die Gradtupel einer Form lässt sich ein Polytop definieren. Dieser geometrische Sachverhalt führt auf eine notwendige Bedingung für die positive Semidefinitheit einer Form. Die Inhalte dieses Abschnitts entstammen, wenn nicht anders gekennzeichnet, der Vorlesung [Sch12].

Definition 2.2.1. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt A* konvex, *wenn gilt $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$, wobei $x, y \in A$ und $\lambda \in [0,1]$. Die kleinste konvexe Obermenge von A ist*

$$conv(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i : \, m \in \mathbb{N}, \, \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \, x_i \in A, \, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}$$

und wird die konvexe Hülle *von A genannt. Konvexe Hüllen von endlichen Mengen bezeichnen wir als* Polytop. *Ein Polytop ist also von der Form*

$$conv\{x_1, ..., x_m\} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i : \, \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\} \quad mit\, m \in \mathbb{N}\, und\, x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}^n.$$

Ist A eine konvexe Menge und $x \in A$, so heißt der Punkt x Extremalpunkt *von A, wenn es keine $y, z \in A$ mit $y \neq z$ und $x = \frac{y+z}{2}$ gibt. Extremalpunkte von Polytopen nennt man auch die* Ecken *des Polytops.*

Proposition 2.2.2. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $x \in A$. Dann sind äquivalent:*

(i) x ist Extremalpunkt von A.

(ii) Es gibt keine $y, z \in A$ und $\lambda \in (0,1)$ mit $y \neq z$ und $x = \lambda y + (1-\lambda)z$.

Beweis. Die Richtung *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* ist nach Definition klar. Die Aussage *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* lässt sich durch Kontraposition zeigen. Angenommen es gäbe $y, z \in A$ und $\lambda \in (0,1)$ mit $y \neq z$ und $x = \lambda y + (1-\lambda)z$. Ohne Einschränkung sei $\lambda \geq \frac{1}{2}$. Wir erhalten dann

$$x = \frac{y + (x + (x - y))}{2} = \frac{y + ((2\lambda - 1)y + 2(1-\lambda)z)}{2},$$

dabei ist $(2\lambda - 1)y + 2(1-\lambda)z \in A$ verschieden von y, denn sonst wäre $2y = 2\lambda y + 2(1-\lambda)z$ und damit $(1-\lambda)y = (1-\lambda)z$. Also $y = z$ und dies steht im Widerspruch zur Annahme. □

Lemma 2.2.3. *Sei $m \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}^n$ und $P := conv\{x_1, ..., x_m\}$. Außerdem gelte $P \neq conv(\{x_1, ..., x_m\} \setminus \{x_i\})$ für alle $i \in \{1, ..., m\}$. Dann ist P ein Polytop und $x_1, ..., x_m$ dessen Ecken.*

Beweis. Zu zeigen ist:

(a) Jede Ecke von P ist ein x_i.

(b) Jedes x_i ist eine Ecke von P.

Zu (a): Sei $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, eine Ecke von P. Ohne Einschränkung sei $\lambda_1 \neq 0$. Dann ist $\lambda_1 = 1$, denn sonst wäre $\mu := \sum_{i=2}^{m} \lambda_i = 1 - \lambda_1 > 0$ und $x = \lambda_1 x_1 + \mu \left(\sum_{i=2}^{m} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i \right)$, wobei $\sum_{i=2}^{m} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i \in \mathrm{conv}\{x_2, ..., x_m\}$. Dies steht jedoch im Widerspruch zu Proposition 2.2.2 (ii).

Zu (b): Seien $y, z \in P$ mit $x_1 = \frac{y+z}{2}$. Zu zeigen ist $y = z$. Man kann $y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ und $z = \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i$ mit $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$ schreiben und damit auch $x_1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2} x_i$. Wir zeigen $\lambda_1 = \mu_1 = 1$. Dafür reicht es $\frac{\lambda_1 + \mu_1}{2} = 1$ zu zeigen. Angenommen es ist $\frac{\lambda_1 + \mu_1}{2} < 1$. Dann folgt aber aus $\left(1 - \frac{\lambda_1 + \mu_1}{2}\right) x_1 = \sum_{i=2}^{m} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2} x_i$, dass $x_1 \in \mathrm{conv}\{x_2, ..., x_m\}$ und schließlich $P = \mathrm{conv}\{x_1, ..., x_m\} = \mathrm{conv}\{x_2, ..., x_m\}$. Ein Widerspruch zur Voraussetzung.

□

Korollar 2.2.4. *Jedes Polytop ist die konvexe Hülle seiner endlich vielen Ecken.*

Definition 2.2.5. *Seien A und B Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Die Menge $A + B = \{x + y | x \in A, y \in B\}$ heißt die* Minkowski-Summe *von A und B.*

Proposition 2.2.6. *Seien A und B Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Es ist conv(A)+conv(B) = conv(A+B). Seien nun A und B konvex. Dann ist auch $A+B$ konvex. Ist weiter z ein Extremalpunkt von $A+B$, so gibt es eindeutig bestimmte $x \in A$ und $y \in B$ mit $z = x + y$ und es ist x ein Extremalpunkt von A und y einer von B.*

Beweis. Die Inklusion „ $\supseteq$ “ ist klar. Für die Inklusion „ $\subseteq$ “ seien $x_1, ..., x_m \in A$, $y_1, ..., y_n \in B$, $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für $n, m \in \mathbb{N}$ und $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j$. Dann ist auch

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j = \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

und

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j = \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j \right) \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i + \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \right) \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j (x_i + y_j).$$

Seien A und B konvex. Dann ist auch $A + B = \mathrm{conv}(A) + \mathrm{conv}(B) = \mathrm{conv}(A + B)$ konvex.

Sei nun z ein Extremalpunkt von $A + B$. Seien $x \in A$ und $y \in B$ mit $z = x + y$. Dann ist x ein Extremalpunkt von A, denn wäre $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ mit $x_1, x_2 \in A$ und $x_1 \neq x_2$, so wäre $z = \frac{(x_1+y)+(x_2+y)}{2}$ und $x_1 + y \neq x_2 + y$. Ein Widerspruch zu z Extremalpunkt von $A + B$. Mit gleicher Argumentation ist auch y ein Extremalpunkt von B. Seien weiter $x' \in A$ und $y' \in B$ mit $z = x' + y'$. Dann ist $z = \frac{x+x'}{2} + \frac{y+y'}{2}$ und $\frac{x+x'}{2}$ Extremalpunkt von A und $\frac{y+y'}{2}$ Extremalpunkt von B. Dies ist aber nur für $x = x'$ und $y = y'$ möglich. $\square$

Wir werden nun sehen, wie sich durch eine Form ein Polytop definieren lässt. Analoge Aussagen gelten für alle Polynome $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

Definition 2.2.7. *Sei $f \in \mathcal{F}_{n,d}$ mit der Darstellung $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ und $c_\alpha \in \mathbb{R}$. Dann heißt die endliche Menge supp(f) $:= \{\alpha \in \mathbb{N}^n | c_\alpha \neq 0\}$ der* Träger *von f. Ihre konvexe Hülle $N(f) :=$ conv(supp(f)) $\subseteq \mathbb{R}^n$ heißt das* Newton-Polytop *von f.*

Definition 2.2.8. *(vgl. [IlD15], S. 2) Wir nennen eine Ecke $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ von $N(f)$* gerade*, wenn all ihre Einträge gerade sind, das heißt $\alpha_i \equiv 0 \pmod 2$ für $i = 1, \ldots, n$.*

Definition 2.2.9. *Sei $f \in \mathcal{F}_{n,d}$. Wir nennen $c_\alpha \in \mathbb{R}$ einen* Eckkoeffizienten *von f, wenn es eine Ecke α von $N(f)$ gibt, sodass $c_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ ein Monom von f ist.*

Bemerkung 2.2.10. *Da jede Ecke des Newton-Polytops einer Form nach Lemma 2.2.3 im Träger dieser Form liegt, sind Eckkoeffizienten stets ungleich Null.*

Satz 2.2.11. *Seien $f, g \in \mathcal{F}_{n,d}$. Dann ist $N(fg) = N(f) + N(g)$ erfüllt und jeder Eckkoeffizient von fg ist das Produkt eines Eckkoeffizienten von f mit einem Eckkoeffizienten von g.*

Beweis.

$\subseteq$: Es gilt $\mathrm{supp}(fg) \subseteq \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g) \subseteq N(f) + N(g)$ und daher $N(fg) = \mathrm{conv}(\mathrm{supp}(fg)) \subseteq N(f) + N(g)$, da $N(f) + N(g)$ nach Proposition 2.2.6 konvex ist.

$\supseteq$: Nach Proposition 2.2.6 ist $N(f) + N(g)$ ein Polytop. Aufgrund von Korollar 2.2.4 genügt es zu zeigen, dass dessen Ecken in $N(fg)$ liegen. Sei also γ eine Ecke von $N(f)+N(g)$. Wir zeigen sogar $\gamma \in \operatorname{supp}(fg)$. Nach Proposition 2.2.6 gibt es eindeutig bestimmte $\alpha \in N(f)$ und $\beta \in N(g)$ mit $\gamma = \alpha + \beta$, wobei α eine Ecke von $N(f)$ und β eine Ecke von $N(g)$ ist. Nach Bemerkung 2.2.10 folgt $\alpha \in \operatorname{supp}(f)$ und $\beta \in \operatorname{supp}(g)$. Wegen der Eindeutigkeit von α und β ist der Koeffizient von $X_1^{\gamma_1} \cdots X_n^{\gamma_n}$ in fg gleich dem Produkt der jeweiligen Koeffizienten von $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ und $X_1^{\beta_1} \cdots X_n^{\beta_n}$ in f und in g und damit insbesondere ungleich Null. Wir haben also $\gamma \in \operatorname{supp}(fg)$ gezeigt und somit auch $\gamma \in \operatorname{conv}(\operatorname{supp}(fg)) = N(fg)$.

Insgesamt haben wir nun $N(fg) = N(f)+N(g)$ und der Zusatz folgt aus dem gerade Gezeigten. $\square$

Proposition 2.2.12. *Seien $f, g \in \mathcal{F}_{n,d}$. Dann ist $N(f + g) \subseteq conv(N(f) \cup N(g))$.*

Beweis. Es gelten die Inklusionen $\operatorname{supp}(f+g) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g) \subseteq N(f) \cup N(g)$. Dies impliziert $N(f + g) = \operatorname{conv}(\operatorname{supp}(f + g)) \subseteq \operatorname{conv}(N(f) \cup N(g))$. $\square$

Satz 2.2.13. *Seien $f, g \in \mathcal{F}_{n,d}$ derart, dass alle Eckkoeffizienten von f und von g dasselbe Vorzeichen haben. Dann ist $N(f + g) = conv(N(f) \cup N(g))$ und alle Eckkoeffizienten von $f + g$ haben ebenfalls dieses Vorzeichen.*

Beweis. Die Inklusion „ $\subseteq$ “ ist gerade die Aussage von Proposition 2.2.12. Es bleibt die Inklusion „ $\supseteq$ “ zu zeigen. Es ist $\operatorname{conv}(N(f) \cup N(g)) = \operatorname{conv}(\operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g))$ ein Polytop. Sei α eine Ecke davon. Wenn man $\alpha \in N(f + g)$ zeigen kann, so folgt mit Korollar 2.2.4 die behauptete Inklusion. Wir zeigen sogar $\alpha \in \operatorname{supp}(f + g)$. Nach Lemma 2.2.3 liegt α in mindestens einer der beiden Mengen $\operatorname{supp}(f)$ oder $\operatorname{supp}(g)$. Liegt α nur in einer der beiden, so ist α also in genau einem der Träger enthalten und damit auch $\alpha \in \operatorname{supp}(f + g)$. Liegt α hingegen in beiden, so ist α eine Ecke sowohl von $\operatorname{conv}(\operatorname{supp}(f)) = N(f)$ als auch von $\operatorname{conv}(\operatorname{supp}(g)) = N(g)$. Die Koeffizienten von $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ in f und von $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ in g haben also nach Voraussetzung dasselbe Vorzeichen. Damit hat auch der Koeffizient von $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ in $f+g$ dieses Vorzeichen, woraus $\alpha \in \operatorname{supp}(f + g)$ folgt. Damit ist $N(f + g) = \operatorname{conv}(N(f) \cup N(g))$ gezeigt und der Zusatz folgt aus dem gerade Gezeigten. $\square$

Lemma 2.2.14. *Sei A eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann ist $A + A = 2A := \{2x \mid x \in A\}$.*

Beweis. Die Inklusion „ $\supseteq$ “ ist klar. Für die Inklusion „ $\subseteq$ “ seien $x, y \in A$. Dann folgt auch $x + y = 2\frac{x+y}{2} \in 2A$.

$\square$

Satz 2.2.15. *Sei $f \in \mathcal{F}_{n,d}$. Dann ist $N(f^2) = 2N(f)$ und alle Eckkoeffizienten von f^2 sind Quadrate der Eckkoeffizienten von f und damit positiv.*

Beweis. Die Gleichheit $N(f^2) = 2N(f)$ folgt aus Satz 2.2.11 und Lemma 2.2.14. Sei γ eine Ecke von $N(f^2) \overset{2.2.11}{=} N(f) + N(f)$. Nach Proposition 2.2.6 gibt es eindeutig bestimmte $\alpha, \beta \in N(f)$ mit $\gamma = \alpha + \beta$. Wegen $\gamma = \beta + \alpha = \alpha + \beta$ gilt dann $\alpha = \beta$. Es folgt, dass der Koeffizient von $X_1^{\gamma_1} \cdots X_n^{\gamma_n}$ in f^2 gerade das Quadrat des zu $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ gehörigen Koeffizienten von f ist.

$\square$

Satz 2.2.16. *Seien $l \in \mathbb{N}, p_1, ..., p_l \in \mathcal{F}_{n,d}$ und $f := \sum_{i=1}^{l} p_i^2$. Dann ist $N(f) = 2conv(N(p_1) \cup \cdots \cup N(p_l))$ und alle Eckkoeffizienten von f sind positiv.*

Beweis. Für jedes $i \in \{1, ..., l\}$ gilt nach Satz 2.2.15 $N(p_i^2) = 2N(p_i)$ und alle Eckkoeffizienten von p_i^2 sind positiv. Nach Satz 2.2.13 gilt

$$N(f) = \mathrm{conv}(N(p_1^2) \cup ... \cup N(p_l^2)) = \mathrm{conv}(2N(p_1) \cup ... \cup 2N(p_l)) = 2\mathrm{conv}(N(p_1) \cup ... \cup N(p_l))$$

und alle Eckkoeffizienten von f sind positiv. □

Mit dem vorherigen Satz lässt sich die folgende notwendige Bedingung einer sos-Form ableiten.

Korollar 2.2.17. *Seien $p_1, \ldots, p_l \in \mathcal{F}_{n,d}, l \in \mathbb{N}, f := \sum\limits_{i=1}^{l} p_i^2$ und $N(f)$, das Newton-Polytop von f. Dann sind alle Eckkoeffizienten von f positiv und die Ecken von $N(f)$ gerade sind.*

Unter Anwendung von Korollar 2.1.11 (Hilberts 17. Problem) ergibt sich die gleiche Aussage sogar für positiv semidefinite Formen:

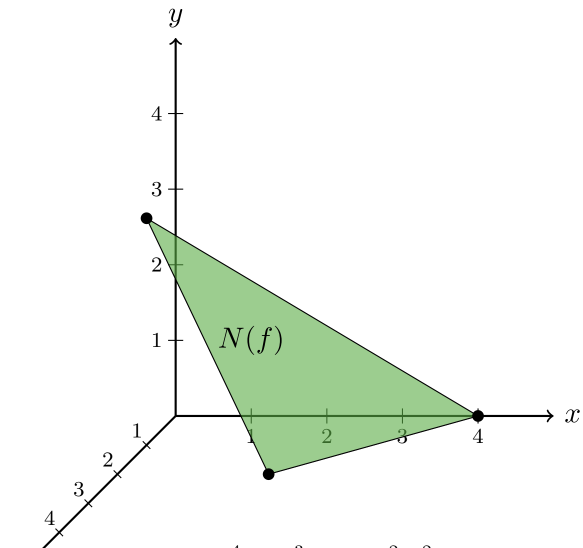
Satz 2.2.18. *(vgl. [Da10]) Sei $f \in \mathcal{P}_{n,2d}$ und $N(f)$, das Newton-Polytop von f. Dann sind alle Eckkoeffizienten von f positiv und die Ecken von $N(f)$ gerade.*

Beweis. Da $f \geq 0$ existieren nach Korollar 2.1.11 $g, p_1, \ldots, p_l \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ und $l \in \mathbb{N}$ so, dass die Darstellung $g^2 f = \sum_{i=1}^{l} p_i^2$ möglich ist. Mit Satz 2.2.11 folgt dann

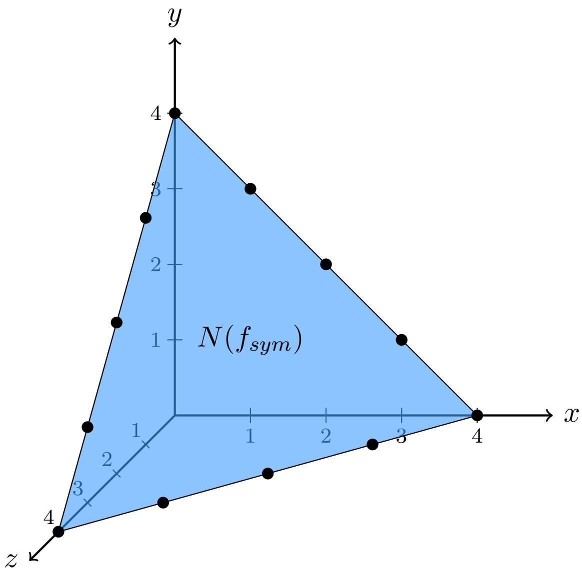
$$N(g^2 f) = N(g^2) + N(f) = N\left(\sum_{i=1}^{l} p_i^2\right).$$

Sei nun $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine Ecke von $N\left(\sum_{i=1}^{l} p_i^2\right)$. Nach Korollar 2.2.17 ist dann $\alpha_i \equiv 0 \pmod 2$ für $i = 1, \ldots, n$. Nach Proposition 2.2.6 existieren eindeutig bestimmte $\gamma_1 \in N(g^2)$ und $\gamma_2 \in N(f)$ mit $\alpha = \gamma_1 + \gamma_2$, wobei γ_1 eine Ecke von $N(g^2)$ und γ_2 eine Ecke von $N(f)$ ist. Nach Korollar 2.2.17 ist γ_1 gerade und damit auch γ_2. Wir folgern jetzt, dass die Eckkoeffizienten von f positiv sind: Nach Satz 2.2.15 sind die Eckkoeffizienten von g^2 positiv. Nach Satz 2.2.11 folgt, dass jeder Eckkoeffizient von $g^2 f$ das Produkt eines Eckkoeffizienten von f mit einem Eckkoeffizienten von g ist. Die Eckkoeffizienten von $g^2 f$ sind nach Korollar 2.2.17 positiv und damit auch die Eckkoeffizienten von f. □

Bemerkung 2.2.19. *Die Form $f = X_1^4 - X_2^3 X_3 + X_1^2 X_3^2$ ist eine quartische Form in 3 Variablen. Da das Newton-Polytop von f die Ecke $(0, 3, 1)$ besitzt, kann f nach Satz 2.2.18 nicht positiv semidefinit sein. Die symmetrisierte Form von $f_{sym} = \sum\limits_{i=1}^{3} X_i^4 - \sum\limits_{i \neq j} X_i^3 X_j + 2 \sum\limits_{i<j} X_i^2 X_j^2$ ist aber positiv semidefinit (siehe Anhang 5.1). Insbesondere sind auch die Ecken $(4, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, 4)$ von $N(f_{sym})$ gerade.*



$f = X_1^4 - X_2^3 X_3 + X_1^2 X_3^2$



$f_{sym} = \sum_{i=1}^{3} X_i^4 - \sum_{i \neq j} X_i^3 X_j + 2 \sum_{i<j} X_i^2 X_j^2$

2.3 Graphen und Wegeungleichungen

Wir geben nun einen Überblick über die für diese Arbeit wichtigsten Begriffe der Graphentheorie und werden anschließend aufzeigen in welchem Kontext Wegeungleichungen mit positiv semidefiniten Formen stehen.

Definition 2.3.1. *(vgl. [Ste07], S.58) Ein* ungerichteter Graph *ist ein Tupel $G = (V, E)$. Es ist V eine endliche, nichtleere Menge, deren Elemente* Knoten *(oder Ecken) heißen. Die Menge E ist eine Teilmenge der zweielementigen Teilmengen von V, also*

$$E \subseteq \mathcal{P}_2(V) := \{\{u, v\} \mid u, v \in V,\ u \neq v\}.$$

Die Elemente der Menge E bezeichnet man als Kanten. *Wir sprechen von einem ungerichteten Graphen, weil die Kanten $e = \{u, v\} \in E$ keine Richtung haben.*

Wenn nicht anders vermerkt, bezeichnen wir mit $G = (V, E)$ stets einen ungerichteten Graphen mit $|V| = n$.

Definition 2.3.2. *(vgl. [Ste07], S.58) Ein Graph $G = (V, E)$ heißt* vollständig *und wird mit K_n bezeichnet, wenn je zwei Knoten von G durch eine Kante verbunden sind.*

Definition 2.3.3. *(vgl. [Ste07], S.89) Ein Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ und $E = \{\{v_1, v_{n+1}\}, \{v_2, v_{n+1}\} \dots, \{v_n, v_{n+1}\}\}$ heißt* Stern *und wird mit S_{n+1} bezeichnet. Der Knoten v_{n+1} wird* Zentrum *des Sterns genannt.*

Definition 2.3.4. *(vgl. [Die00], S.3) Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ zwei Graphen mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dann heißt $G := (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ die* disjunkte Vereinigung *von G_1 und G_2.*

Die nun folgenden Resultate und Definitionen ab Definition 2.3.5 bis einschließlich Lemma 2.3.12 sind auch in [Täu15] zu finden.

Definition 2.3.5. *Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Dann ist die* Adjazenzmatrix *von G definiert als $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ mit*

$$a_{i,j} := \begin{cases} 1, & \textit{falls } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}.$$

Bemerkung 2.3.6. *Seien $\lambda_1 \ge \lambda_2 \cdots \ge \lambda_n$ die nach Größe und Vielfachheit geordneten Eigenwerte der Adjazenzmatrix A von G. Da A symmetrisch ist, sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reelle Zahlen und es existiert eine orthonormale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bestehend aus Eigenvektoren von A mit $A = UDU^T$. Dabei ist $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix.*

Definition 2.3.7. *Ein* Weg der Länge *$k \in \mathbb{N}$ in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein Folge*

$$(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$$

mit $v_0, \ldots, v_k \in V$, $e_1, \ldots, e_k \in E$ sowie $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ für alle $i = 1, \ldots, k$. Ein Weg, der mit dem Knoten $v_i \in V$ beginnt und mit dem Knoten $v_j \in V$ endet, heißt auch (v_i, v_j)-Weg.

Die Länge eines Weges ist durch die Anzahl der besuchten Kanten festgelegt, dabei dürfen Knoten und Kanten auch mehrmals besucht werden. Wege der Länge 0 bestehen nur aus genau einem Knoten.

Notation 2.3.8. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und seien $v_i, v_j \in V$.*

1. *Die Anzahl der (v_i, v_j)-Wege der Länge k in G bezeichnen wir als $w_k(v_i, v_j) := w_k^G(v_i, v_j)$.*
2. *Wir schreiben*
$$w_k := w_k^G = \sum_{v_i \in V} \sum_{v_j \in V} w_k(v_i, v_j)$$
für die Gesamtanzahl der Wege der Länge k in G.

Im Folgenden ist $G = (V, E)$ ein fixierter Graph, deshalb referieren wir in der Notation von 2.3.8 und der Definition 2.3.5, der Adjazenzmatrix eines Graphen, nicht auf G.

Satz 2.3.9. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, A die Adjazenzmatrix von G und seien $v_i, v_j \in V$. Dann erfüllt G die Gleichung $w_k(v_i, v_j) = \left(A^k\right)_{i,j}$.*

Beweis. Man führe Induktion über k, wobei die Fälle $k = 0$ und $k = 1$ klar sind. Sei $k \in \mathbb{N}$ und die Behauptung für $k - 1$ bereits bewiesen. Bezeichne $v_{j'}$ als den vorletzten Knoten eines (v_i, v_j)-Weges der Länge k in G. Man zerteile den (v_i, v_j)-Weg in einen Weg der Länge $k - 1$ von v_i zu $v_{j'}$ und einen Weg der Länge 1 von $v_{j'}$ zu v_j. Es ergibt sich:

$$w_k(v_i, v_j) = \sum_{v'_j \in V} w_{k-1}(v_i, v_{j'}) \cdot w_1(v_{j'}, v_j) \overset{\text{IV}}{=} \sum_{j'=1}^{n} (A^{k-1})_{i,j'} \cdot A_{j',j} = (A^k)_{i,j}.$$

□

Bemerkung 2.3.10. *Die Adjazenzmatrix eines Graphen ist symmetrisch. Somit ist auch $A(G)^k$ symmetrisch und damit $w_k(v_i, v_j) = w_k(v_j, v_i)$ für alle $v_i, v_j \in V$.*

Die Anzahl der Wege der Länge k in G ist also die Summe aller Einträge von A^k. Damit erhalten wir folgendes Korollar.

Korollar 2.3.11. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und A die Adjazenzmatrix von G. Dann ist $w_k = \mathbf{1}_n^T \cdot A^k \cdot \mathbf{1}_n$ für die Anzahl der Wege der Länge k in G.*

Korollar 2.3.12. *Seien $G = (V, E)$ ein Graph, seien $v_h, v_j \in V$ und $k, l \in \mathbb{N}$. Dann erfüllt G die Gleichung $w_{k+l}(v_h, v_j) = \sum\limits_{v_i \in V} w_k(v_h, v_i) \cdot w_l(v_i, v_j)$.*

Beweis. Sei A die Adjazenzmatrix von G. Dann gilt nach Definition der Matrixmultiplikation $(A^{k+l})_{h,j} = \sum\limits_{i=1}^{n} (A^k)_{h,i} \cdot (A^l)_{i,j}$ und die Behauptung folgt mit Satz 2.3.9. $\square$

Lemma 2.3.13. *Seien $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$ ein Graph, A die Adjazenzmatrix von G, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die nach Größe und Vielfachheit geordneten Eigenwerte von A und $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ die Koordinaten des Einsvektors $\mathbf{1}_n$ bezüglich einer zu A gehörigen Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$, das heißt es ist $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i x_i = \mathbf{1}_n$. Dabei sei x_i der Eigenvektor zum Eigenwert λ_i für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist die Gleichung*

$$w_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k \mu_j^2 \tag{2.1}$$

in G erfüllt.

Beweis. Mit Korollar 2.3.11 und der Orthonormalität der x_i ergibt sich:

$$w_k = \mathbf{1}_n^T \cdot A^k \cdot \mathbf{1}_n = \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \right)^T \cdot A^k \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j^T \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \mu_i x_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k \mu_j^2.$$

Insbesondere gilt $n = w_0 = \mathbf{1}_n^T A^0 \mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n^T \mathbf{1}_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j^2$. $\square$

Definition 2.3.14. *Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Dann nennen wir $\sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \geq 0$ mit $c_\alpha \in \mathbb{R}$ und $c_\alpha = 0$ für fast alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ eine* polynomielle Wegeungleichung für ungerichtete Graphen, *wenn die Ungleichung in G erfüllt ist. Des Weiteren bezeichnen wir $d := \max \left\{ |\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mid c_\alpha \neq 0 \right\}$ als den* Grad der Wegeungleichung *und n als die* Länge der Wegeungleichung.

Wir werden manchmal auch nur Ungleichung oder Wegeungleichung sagen und meinen damit eine polynomielle Wegeungleichung.

Bemerkung 2.3.15. *Die Darstellung einer Wegeungleichung ist nicht eindeutig. Betrachte beispielsweise die Ungleichung $w_8 \cdot w_0 - w_4 \cdot w_4 \geq 0$. Die Gültigkeit dieser Ungleichung werden wir in Theorem 3.2.1 feststellen. Wir können diese Ungleichung auch als $w_8 \cdot w_0 \cdot w_1 - w_4 \cdot w_4 \cdot w_1 \geq 0$ schreiben oder sogar als $2w_8 \cdot w_0 \cdot w_1 - w_8 \cdot w_0 \cdot w_1 - w_4 \cdot w_4 \cdot w_1 \geq 0$ schreiben. Es existieren unendlich viele weitere Möglichkeiten die Ungleichung $w_8 \cdot w_0 - w_4 \cdot w_4 \geq 0$ durch Definition 2.3.14 darzustellen.*

Folgender Satz ist eine private Notiz von Sven Kosub ([Kos08]), der die Aussage ursprünglich für alle Polynome aus dem Polynomring $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ gemacht hat. Da wir jedoch nur Wegeungleichungen betrachten werden, zu denen eine Form korrespondiert, beschränken wir uns auf Formen und erhalten folgenden Zusammenhang:

Satz 2.3.16. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = m$ und Adjazenzmatrix A. Weiter seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ die nach Größe und Vielfachheit geordneten Eigenwerte von A und $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}$ die Koordinaten des Einsvektors $\mathbf{1}_m$ bezüglich einer zu A gehörigen Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^m$, das heißt es ist $\sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i = \mathbf{1}_m$. Dabei sei x_i der Eigenvektor zum Eigenwert λ_i für $i = 1, \ldots, m$. Sei nun $f \in \mathcal{F}_{n,d}$ mit der Darstellung $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ wobei $c_\alpha \in \mathbb{R}$, $c_\alpha = 0$ für fast alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Es ist $f_{sym} = \sum_{\sigma \in S_n} f(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$ die Symmetrisierung von f. Weiter seien $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, m\}$. Dann ist*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} = \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_n} f_{sym}(\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n}) \mu_{i_1}^2 \cdots \mu_{i_n}^2.$$

Beweis. Indem wir die Gleichung (2.1) für $w_{\alpha_1}, \ldots, w_{\alpha_n}$ einsetzen und die Indices sortieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{\alpha_1} \mu_j^2 \right) \cdots \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{\alpha_n} \mu_j^2 \right) \\
&= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha \cdot \left(\sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_n} \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_{\sigma(i_1)}^{\alpha_1} \cdots \lambda_{\sigma(i_n)}^{\alpha_n} \right) \mu_{i_1}^2 \cdots \mu_{i_n}^2 \\
&= \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_n} \left(\sum_{\sigma \in S_n} \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha \lambda_{\sigma(i_1)}^{\alpha_1} \cdots \lambda_{\sigma(i_n)}^{\alpha_n} \right) \right) \mu_{i_1}^2 \cdots \mu_{i_n}^2 \\
&= \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_n} \left(\sum_{\sigma \in S_n} f(\lambda_{\sigma(i_1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(i_n)}) \right) \mu_{i_1}^2 \cdots \mu_{i_n}^2 \\
&= \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_n} f_{sym}(\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n}) \mu_{i_1}^2 \cdots \mu_{i_n}^2.
\end{aligned}$$

□

Da die Menge der Eigenwerte aller ungerichteter Graphen sehr groß ist und wir diese nicht weiter studieren werden, verallgemeinern wir Satz 2.3.16 auf positiv semidefinite Formen und erhalten folgendes Resultat:

Korollar 2.3.17. *Sei $G = (V, E)$ und $f \in \mathcal{F}_{n,d}$ mit der Darstellung $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$, wobei $c_\alpha \in \mathbb{R}$ und $c_\alpha = 0$ für fast alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Gilt $f_{sym} \geq 0$, so erfüllt G die Ungleichung*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \geq 0.$$

Definition 2.3.18. *Sei* $\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha w_{\alpha_1}\cdots w_{\alpha_n} \geq 0$ *eine Wegeungleichung. Dann sagen wir, dass die Form* $f = \sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$ *zu dieser Ungleichung korrespondiert.*

Da eine Wegeungleichung mehrere Darstellungen besitzt, ist die Form, die zu einer Wegeungleichung korrespondiert nicht eindeutig. Dies wird auch durch Satz 2.3.19 noch einmal deutlich.

Satz 2.3.19. *Sei* $f \in \mathcal{F}_{n,d}$ *und* $f_{sym} = \sum\limits_{\sigma\in S_n} f(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)})$ *die Symmetrisierung von* f *mit* $f_{sym} \geq 0$*. Dann korrespondieren* f *und* f_{sym} *zu der gleichen Wegeungleichung.*

Beweis. Wir schreiben $f = \sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$ und erhalten mit Korollar 2.3.17

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha w_{\alpha_1}\cdots w_{\alpha_n} \geq 0.$$

Da jede Äquivalenzklasse der in f vorkommenden Monome in eindeutiger Weise genau einen Summanden der Wegeungleichung festlegt, führt $f_{sym} = \sum\limits_{\sigma\in S_n}\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha X_{\sigma(1)}^{\alpha_1}\cdots X_{\sigma(n)}^{\alpha_n}$ folglich auf die Ungleichung

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} n!\, c_\alpha w_{\alpha_1}\cdots w_{\alpha_n} \geq 0.$$

Division durch $n!$ liefert die Behauptung. $\square$

Kapitel 3

Gültige Wegeungleichungen

Dieses Kapitel stellt im Wesentlichen drei Klassen polynomieller Wegeungleichungen vor. Wir werden zunächst die zuerst entdeckten Ungleichungen der einzelnen Klassen mit ihren ursprünglichen Beweisen darstellen und anschließend die von Hemmecke, Kosub, Mayr, Täubig und Weihmann aufgestellten Verallgemeinerungen dieser Ungleichungen betrachten. Lassen sich spezielle Wegeungleichungen auf positiv semidefinite Formen zurückführen, so werden wir dies nachfolgend in einer Bemerkung zeigen.

Wir werden hier stets Ungleichungen $w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n} - w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \geq 0$ mit $|\alpha| = |\beta|$ betrachten und daher von der in Definition 2.3.14 eingeführten Schreibweise abweichen und stattdessen die Darstellung $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$ verwenden.

$G = (V, E)$ bezeichne weiterhin einen ungerichteten Graphen mit $|V| = n$.

3.1 Die Ungleichungen von Lagarias, Mazo, Shepp und Mac Kay

Lagarias, Mazo, Shepp und Mac Kay formulierten die Frage, für welche $a, b \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$w_a \cdot w_b \leq w_0 \cdot w_{a+b}$$

von allen ungerichteten Graphen erfüllt wird. In [LM+84] haben sie gezeigt, dass $w_a \cdot w_b \leq w_0 \cdot w_{a+b}$ genau dann gültig ist, wenn $a + b$ gerade ist. Des Weiteren haben sie auch für jedes Paar $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ mit $a + b \equiv 1 \pmod 2$ ein Gegenbeispiel angegeben. Lagarias, Mazo, Shepp und Mac Kay benötigten in ihrem Beweis eine Aussage aus der Wahrscheinlichkeitstheorie, die in [LM+84] ebenfalls bewiesen wurde.

Satz 3.1.1. *Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathbb{P})$ und $E[X]$ der Erwartungswert von X. Weiter seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a + b \equiv 0 \pmod 2$. Dann ist $E[X^a] \cdot E[X^b] \leq E[X^{a+b}]$.*

Beweis. Seien X und Y unabhängige, gleichverteilte Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathbb{P})$. Für alle Realisierungen von X, Y und $a + b \equiv 0 \pmod 2$ ist

$$(X^a - Y^a)(X^b - Y^b) \geq 0, \tag{3.1}$$

denn ist $a \equiv b \equiv 1 \pmod 2$, so sei ohne Einschränkung $X \geq Y$. Damit ist dann $X^a \geq Y^a$ und $X^b \geq Y^b$. In diesem Fall haben also beide Faktoren gleiches Vorzeichen. Im Fall $a \equiv b \equiv 0 \pmod 2$ sei ohne Einschränkung $|X| \geq |Y|$. Dann ist aber auch $(X^a - Y^a) \geq 0$ und $(X^b - Y^b) \geq 0$.

Bildet man nun den Erwartungswert von (3.1), so ergibt sich mit der Unabhängigkeit und der Gleichverteilung von X und Y:

$$\begin{aligned} E[(X^a - Y^a)(X^b - Y^b)] &= E[X^{a+b}] + E[Y^{a+b}] - E[X^a Y^b] - E[X^b Y^a] \\ &= 2E[X^{a+b}] - 2E[X^a]E[X^b] \geq 0. \end{aligned}$$

□

Theorem 3.1.2. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und seien $a, b \in \mathbb{N}$. Dann erfüllt G die Ungleichung*

$$w_{2a+b} \cdot w_b \leq w_0 \cdot w_{2(a+b)}.$$

Beweis. Sei A die Adjazenzmatrix von G. Weiter seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A, $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ die Koordinaten des Einsvektors bezüglich einer zu A gehörigen Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Dabei sei x_i der Eigenvektor zum Eigenwert λ_i für $i = 1, \dots, n$. Für $l \in \mathbb{N}$ ist dann nach Lemma 2.3.13 $w_l = \sum_{j=1}^n \lambda_j^l \mu_j^2$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Definiere damit eine diskrete Zufallsvariable $X \colon \Omega \to \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ auf $(\Omega, \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}(\{X = \lambda_i\}) := \frac{\mu_i^2 \lambda_i^{2k}}{w_{2k}} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Da $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i^{2k} \mu_i^2 = w_{2k}$ und die Exponenten der λ_i gerade sind, ist die Zufallsvariable wohldefiniert. Der Erwartungswert der Zufallsvariable X^b ist nun:

$$E[X^b] = \frac{1}{w_{2k}} \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \lambda_i^{2k} \lambda_i^b = \frac{w_{2k+b}}{w_{2k}}.$$

Nach Satz 3.1.1 ist

$$E[X^{2a+b}] \cdot E[X^b] \leq E[X^{2(a+b)}].$$

Es folgt

$$w_{2(k+a)+b} \cdot w_{2k+b} \leq w_{2k} \cdot w_{2k+2(a+b)}$$

und mit $k = 0$ die behauptete Ungleichung. □

Theorem 3.1.3. *Sei $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ mit $a + b \equiv 1 \pmod 2$. Dann existiert ein Graph G, der die Ungleichung*

$$w_a \cdot w_b > w_0 \cdot w_{a+b}$$

erfüllt.

Beweis. Schreibe $a = 2k - 1$ und $b = 2l$ mit $k, l \in \mathbb{N}_+$. Seien $m, p \in \mathbb{N}$, K_{m+1} bezeichne den vollständigen Graphen mit $m+1$ Knoten und S_{m^2+t+1} den Sterngraphen mit m^2+t+1 Knoten. Sei weiter $G := G_{m+1, m^2+t+1}$ die disjunkte Vereinigung der Graphen K_{m+1} und S_{m^2+t+1}. Die Anzahl der Wege der Länge r in G ist dann

$$w_r(G) = w_r(K_{m+1}) + w_r(S_{m^2+t+1}). \tag{3.2}$$

Es ist leicht einzusehen, dass der vollständige Graph K_{m+1} die Gleichung

$$w_r(K_{m+1}) = m^r(m+1) \tag{3.3}$$

erfüllt. Der Sterngraph S_{m^2+t+1} erfüllt die beiden Gleichungen

$$w_{2r-1}(S_{m^2+t+1}) = 2(m^2+t)^r \quad \text{und} \quad w_{2r}(S_{p+1}) = (m^2+t)^r(m^2+t+1). \tag{3.4}$$

Sei $t \geq 1$ fixiert, dann ergibt sich durch Anwenden der Gleichungen (3.2), (3.3), (3.4) und Sortieren der Potenzen von m:

$$\begin{aligned}
w_{2k-1}(G) \cdot w_{2l}(G) &= (w_{2k-1}(K_{m+1}) + w_{2k-1}(S_{m^2+t+1})) \cdot (w_{2l}(K_{m+1}) + w_{2l}(S_{m^2+t+1})) \\
&= \Big((m+1)m^{2k-1} + 2(m^2+t)^k\Big) \\
&\qquad\qquad\qquad \cdot \Big((m+1)m^{2l} + (m^2+t)^l(m^2+t+1)\Big) \\
&= 3m^{2k+2l+2} + 4m^{2k+2l+1} + ((2k+3l+3)t+7)\, m^{2k+2l} \\
&\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}\Big(m^{2k+2l-1}\Big)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
w_0(G) \cdot w_{2k+2l-1}(G) &= w_0(G) \cdot (w_{2k+2l-1}(K_{m+1}) + w_{2k+2l-1}(S_{m^2+t+1})) \\
&= \Big(m^2+m+t+2\Big)\Big((m+1)m^{2k+2l-1} + 2(m^2+t)^{k+l}\Big) \\
&= 3m^{2k+2l+2} + 4m^{2k+2l+1} + ((2k+2l+3)t+7)\, m^{2k+2l} \\
&\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}\Big(m^{2k+2l-1}\Big).
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass für genügend großes m in dem Graphen G die Ungleichung

$$w_{2k-1} \cdot w_{2l} > w_0 \cdot w_{2k+2l-1}$$

erfüllt ist und demnach der Graph G_{m+1,m^2+t+1} das gewünschte Gegenbeispiel ist.

□

Bemerkung 3.1.4. *Wir leiten die Ungleichung nun mit Hilfe einer positiv semidefiniten Form her. Sei* $f = X_1^{2(a+b)} - X_1^{2a+b}X_2^b$. *Dann ist* f *eine zur Ungleichung korrespondierende Form und ihre Symmetrisierung ist*

$$f_{sym} = X_1^{2(a+b)} + X_2^{2(a+b)} - X_1^{2a+b}X_2^b - X_1^bX_2^{2a+b} = (X_1^b - X_2^b)(X_1^{2a+b} - X_2^{2a+b}).$$

Es ist $f_{sym} \geq 0$, *denn ist* $b \equiv 1 \pmod 2$, *so sei ohne Einschränkung* $X_1 \geq X_2$. *Dann gilt aber auch* $X_1^b \geq X_2^b$ *und* $X_1^{2a+b} \geq X_2^{2a+b}$. *In diesem Fall haben also beide Faktoren gleiches Vorzeichen. Für den Fall* $b \equiv 0 \pmod 2$ *sei ohne Einschränkung* $|X_1| \geq |X_2|$ *und somit* $(X_1^b - X_2^b) \geq 0$ *und* $(X_1^{2a+b} - X_2^{2a+b}) \geq 0$.

3.2 Die Ungleichungen von Dress und Gutman

Zu der ersten Klasse von Ungleichungen zählen wir auch die Ungleichungen von Dress und Gutman.

Theorem 3.2.1. *(vgl. [DG03]) Sei $G = (V, E)$ ein Graph und seien $a, b \in \mathbb{N}$. Dann erfüllt G die Ungleichung*

$$w_{a+b}^2 \leq w_{2a} \cdot w_{2b}.$$

Beweis. Definiere für $a \in \mathbb{N}$ die Abbildung $L_a := L_a^G \colon V \to \mathbb{R}$ durch $v \mapsto L_a(v) := \sum\limits_{u \in V} w_a(v, u)$. Weiter definiere man ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{|V|}$ durch $\langle L_a, L_b \rangle := \sum_{v \in V} L_a(v) L_b(v)$. Nach Korollar 2.3.12 und Bemerkung 2.3.10 ist dann

$$\begin{aligned}\langle L_a, L_b \rangle &= \sum_{v \in V} \sum_{u \in V} w_a(v, u) \cdot \sum_{w \in V} w_b(v, w) \overset{2.3.10}{=} \sum_{v \in V} \sum_{u \in V} \sum_{w \in V} w_a(u, v) \cdot w_b(v, w) \\ &\overset{2.3.12}{=} \sum_{u \in V} \sum_{w \in V} w_{a+b}(u, w) = w_{a+b}.\end{aligned}$$

Anwenden der Cauchy-Schwarz Ungleichung ergibt schließlich

$$w_{a+b}^2 = \langle L_a, L_b \rangle^2 \leq \langle L_a, L_a \rangle \cdot \langle L_b, L_b \rangle = w_{2a} \cdot w_{2b}.$$

□

Bemerkung 3.2.2. *Wir können die Ungleichungen aus Theorem 3.2.1 auch mit einer positiv semidefiniten Form herleiten. Es ist $f = X_1^{2a} X_2^{2b} - X_1^{a+b} X_2^{a+b}$, eine zur Ungleichung korrespondierende Form mit*

$$f_{sym} = X_1^{2a} X_2^{2b} - 2X_1^{a+b} X_2^{a+b} + X_1^{2b} X_2^{2a} = (X_1^a X_2^b - X_1^b X_2^a)^2.$$

Offensichtlich gilt $f_{sym} \geq 0$ und damit ist die behauptete Ungleichung nach Korollar 2.3.17 in jedem ungerichteten Graphen erfüllt.

3.3 Eine Verallgemeinerung der Ungleichungen von Lagarias, Mazo, Shepp und McKay

Hemmecke, Kosub, Mayr, Täubig und Weihmann haben in [HK+12] die Ungleichungen aus Theorem 3.1.2 und Theorem 3.2.1 zu nachfolgenden Ungleichungen verallgemeinert.

Theorem 3.3.1. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Dann erfüllt G die Ungleichung*

$$w_{2a+c} \cdot w_{2a+2b+c} \leq w_{2a} \cdot w_{2(a+b+c)}.$$

Beweis. Sei A die Adjazenzmatrix von G. Weiter seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die nach Größe und Vielfachheit geordneten Eigenwerte von A, $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ die Koordinaten des Einsvektors bezüglich einer zu A gehörigen Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Dabei sei

x_i der Eigenvektor zum Eigenwert λ_i für $i = 1, \ldots, n$. Indem man die Gleichung $w_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k \mu_j^2$ aus Lemma 2.3.13 heranzieht, lässt sich die Wegeungleichung herleiten.

$$
\begin{aligned}
& w_{2a} \cdot w_{2(a+b+c)} - w_{2a+c} \cdot w_{2(a+b)} \\
=& \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 \lambda_i^{2a} \sum_{j=1}^{n} \mu_j^2 \lambda_j^{2(a+b+c)} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 \lambda_i^{2a+c} \sum_{j=1}^{n} \mu_j^2 \lambda_j^{2(a+b)+c} \\
=& \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_i^2 \mu_j^2 \left(\lambda_i^{2a} \lambda_j^{2(a+b+c)} - \lambda_i^{2a+c} \lambda_j^{2(a+b)+c} \right) \\
=& \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mu_i^2 \mu_j^2 \left(\lambda_i^{2a} \lambda_j^{2(a+b+c)} - \lambda_i^{2a+c} \lambda_j^{2(a+b)+c} + \lambda_j^{2a} \lambda_i^{2(a+b+c)} - \lambda_j^{2a+c} \lambda_i^{2(a+b)+c} \right) \\
=& \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mu_i^2 \mu_j^2 \lambda_i^{2a} \lambda_j^{2a} \left(\lambda_j^{2(b+c)} - \lambda_i^{c} \lambda_j^{2b+c} + \lambda_i^{2(b+c)} - \lambda_j^{c} \lambda_i^{2b+c} \right) \\
=& \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mu_i^2 \mu_j^2 \lambda_i^{2a} \lambda_j^{2a} \left(\lambda_j^{2b+c} - \lambda_i^{2b+c} \right) \left(\lambda_j^{c} - \lambda_i^{c} \right).
\end{aligned}
$$

Für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ist $\left(\lambda_j^{2b+c} - \lambda_i^{2b+c}\right)\left(\lambda_j^c - \lambda_i^c\right) \geq 0$, denn ist $c \equiv 1 \pmod 2$, so sei ohne Einschränkung $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Dann ist aber auch $\lambda_j^{2b+c} \geq \lambda_i^{2b+c}$ und $\lambda_j^c \geq \lambda_i^c$ für $j \leq i$. Für den Fall $c \equiv 0 \pmod 2$ sei ohne Einschränkung $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Damit ist dann $(\lambda_j^{2b+c} - \lambda_i^{2b+c}) \geq 0$ und $(\lambda_j^c - \lambda_i^c) \geq 0$ für $j \leq i$. In beiden Fällen haben die Faktoren also gleiches Vorzeichen. Damit ist also die zuletzt aufgestellte Summe stets nichtnegativ und die Gültigkeit der Wegeungleichung folgt. □

Bemerkung 3.3.2. *Wir können die Ungleichungen dieses Abschnitts auch mit Hilfe einer positiv semidefiniten Form herleiten. Es ist $f = X_1^{2a} X_2^{2(a+b+c)} - X_1^{2a+c} X_2^{2(a+b)+c}$ eine zur Wegeungleichung korrespondierende Form. Die Symmetrisierung von f ist*

$$f_{sym} = X_1^{2a} X_2^{2a} (X_2^{2b+c} - X_1^{2b+c})(X_2^c - X_1^c).$$

Es ist $f_{sym} \geq 0$. Das Monom $X_1^{2a} X_2^{2a}$ ist positiv semidefinit und es ist $(X_1^c - X_2^c)(X_1^{2b+c} - X_2^{2b+c}) \geq 0$. Denn ist $c \equiv 1 \pmod 2$, so sei ohne Einschränkung $X_2 \geq X_1$. Dann gilt aber auch $X_2^c \geq X_1^c$ und $X_2^{2b+c} \geq X_1^{2b+c}$. In diesem Fall haben also beide Faktoren gleiches Vorzeichen. Für den Fall $c \equiv 0 \pmod 2$ sei ohne Einschränkung $|X_2| \geq |X_1|$ und somit $(X_2^c - X_1^c) \geq 0$ und $(X_2^{2b+c} - X_1^{2b+c}) \geq 0$. Es folgt $f_{sym} \geq 0$ und wir erhalten die Ungleichung $w_{2a+c} \cdot w_{2a+2b+c} \leq w_{2a} \cdot w_{2(a+b+c)}$.

3.4 Die Ungleichungen von Godsil

Die zuvor aufgezeigten Wegeungleichungen waren alle von Länge 2. Wir lernen nun eine Klasse von Wegeungleichungen kennen, deren Länge im Allgemeinen größer als 2 ist.

Theorem 3.4.1. *(vgl. [ES82]) Sei $G = (V, E)$ und seien $k, t \in \mathbb{N}$ mit $2k \geq t$. Dann erfüllt G die Ungleichung*

$$w_t^{2k} \leq w_0^{2k-t} \cdot w_{2k}^t.$$

Beweis. Sei A die Adjazenzmatrix von G. Weiter seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die nach Größe und Vielfachheit geordneten Eigenwerte von A, $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ die Koordinaten des Einsvektors bezüglich einer zu A gehörigen Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Dabei sei x_i der Eigenvektor zum Eigenwert λ_i für $i = 1, \dots, n$. Nach Lemma 2.3.13 ist $w_0 = n$, $w_{2k} = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^{2k} \mu_j^2$ und $w_1 = 2n$. Durch setzen von $r := \frac{2k}{t}$ ergibt sich

$$w_{2k} \cdot w_0^{r-1} = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{2k} \frac{\mu_j^2}{n} \right) \cdot n^r = \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j^t|^r \frac{\mu_j^2}{n} \right) \cdot n^r \geq \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j^t| \frac{\mu_j^2}{n} \right)^r \cdot n^r = \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j^t| \mu_j^2 \right)^r \geq w_t^r.$$

Da die Funktion $f(x) := x^r$ auf $\mathbb{R}_+$ konvex ist und $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\mu_j^2}{n} = 1$ ist, konnte mit der Jensen-Ungleichung abschätzt werden. Potenzieren mit t ergibt die behauptete Wegeungleichung. □

3.5 Eine Verallgemeinerung der Ungleichungen von Godsil

Hemmecke, Kosub, Mayr, Täubig und Weihmann haben die Ungleichungen von Godsil zu folgenden Ungleichungen verallgemeinert (vgl. [Täu15], S. 58):

Theorem 3.5.1. *Sei $G = (V, E)$ und seien $a, b, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq a \leq 2b$. Dann erfüllt G die Ungleichung*

$$w_{2k+a}^{2b} \leq w_{2k}^{2b-a} \cdot w_{2k+2b}^a.$$

Beweis. Sei A die Adjazenzmatrix von G. Weiter seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A und $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ die Koordinaten des Einsvektors bezüglich einer zu A gehörigen Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Dabei sei x_i der Eigenvektor zum Eigenwert λ_i für $i = 1, \dots, n$. Für $l \in \mathbb{N}$ ist nach Lemma 2.3.13 $w_l = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^l \mu_j^2$. Definiere für $k \in \mathbb{N}$ eine diskrete Zufallsvariable $X \colon \Omega \to \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ auf $(\Omega, \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}(\{X = \lambda_i\}) := \frac{\mu_i^2 \lambda_i^{2k}}{w_{2k}} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Da $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^{2k} \mu_i^2 = w_{2k}$ und die Exponenten der λ_i gerade sind, ist die Zufallsvariable wohldefiniert. Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq a \leq 2b$. Mit der Lyapunov-Ungleichung für den Erwartungswert ist

$$(E[|X|^a])^{\frac{1}{a}} \leq (E[|X|^{2b}])^{\frac{1}{2b}}$$

und weiter

$$(E[X^a])^{\frac{1}{a}} \leq (E[|X|^a])^{\frac{1}{a}} \leq (E[X^{2b}])^{\frac{1}{2b}}. \tag{3.5}$$

Dabei ist $E[X^a] = \frac{1}{w_{2k}} \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 \lambda_i^{2k} \lambda_i^a = \frac{w_{2k+a}}{w_{2k}}$ und somit lässt sich die Ungleichung (3.5) auch als

$$\left(\frac{w_{2k+a}}{w_{2k}}\right)^{\frac{1}{a}} \leq \left(\frac{w_{2k+2b}}{w_{2k}}\right)^{\frac{1}{2b}} \tag{3.6}$$

schreiben. Durch Potenzieren mit $2b$ und a auf beiden Seiten und Auflösen der Brüche folgt die Gültigkeit der behaupteten Ungleichung. □

Bemerkung 3.5.2. *Ist $a = 1$, so führt dies auf die Ungleichungen $w_{2k+1}^{2b} \leq w_{2k}^{2b-1} \cdot w_{2k+2b}$. Die zu diesen Ungleichungen korrespondierenden Formen sind*

$$f = X_1^{2k} \cdots X_{2b-1}^{2k} \cdot X_{2b}^{2k+2b} - X_1^{2k+1} \cdots X_{2b}^{2k+1}$$

und und ihre Symmetrisierungen

$$\begin{aligned} f_{sym} &= \sum_{i=1}^{2b} (2b-1)!(X_1 \cdots X_{2b})^{2k} \cdot X_i^{2b} - 2b!(X_1 \cdots X_{2b})^{2k+1} \\ &= (2b-1)!(X_1 \cdots X_{2b})^{2k} \left(\sum_{i=1}^{2b} X_i^{2b} - 2b(X_1 \cdots X_{2b}) \right). \end{aligned}$$

Es gilt $f_{sym} \in S\mathcal{P}_{2b,(2k+1)2b}$, denn offensichtlich ist $f' = (2b-1)!(X_1 \cdots X_{2b})^{2k} \in S\mathcal{P}_{2b,4bk}$ und mit dem Theorem von Reznick 2.1.12 ist auch $f'' = \sum_{i=1}^{2b} X_i^{2b} - 2bX_1 \cdots X_{2b} \in S\mathcal{P}_{2b,2b}$. Da also $f_{sym} \geq 0$ können wir die in Theorem 3.5.1 aufgestellten Ungleichungen zumindest für den Fall $a = 1$ auch über Formen herleiten.

3.6 Die Ungleichungen von Erdös, Simonovits und Godsil

Polynomielle Wegeungleichungen haben nicht immer geraden Grad. Wir werden nun eine Klasse von Wegeungleichungen kennen lernen, bei denen Ungleichungen ungeraden Grades möglich sind. Im letzten Abschnitt sehen wir dann, wie sich diese Ungleichungen verallgemeinern lassen.

Theorem 3.6.1. *(vgl. [ES82]) Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Dann erfüllt G die Ungleichung*

$$w_1^k \leq w_0^{k-1} \cdot w_k.$$

Die Gültigkeit dieser Ungleichungen kann man mit Hilfe der von Blakley und Roy in [BR65] aufgestellten Hölder-Ungleichung für symmetrische Matrizen mit nichtnegativen Einträgen zeigen. Dafür werden aber einige Notationen und eine Aussage über die spektralen Eigenschaften nichtnegativer Matrizen benötigt.

Definition 3.6.2. *Ein Element $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt* nichtnegativ*, wenn $0 \leq x_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Eine Matrix $S := (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit $s_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ heißt* nichtnegativ*, falls $0 \leq s_{i,j}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Notationen 3.6.3. *Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

1. *Wir definieren $x(k) = (x(k)_1, x(k)_2, \ldots, x(k)_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$, wobei $x(k)_i = x_i$ für $1 \leq i < k$ und $x(k)_i = x_{i+1}$ für $k \leq i < n$.*

2. *Sei $S(k) \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1}$ für $k \in \{1, .., n\}$ die Matrix, die durch entfernen der k-ten Zeile und k-ten Spalte aus S entsteht.*

3. *$K_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i \geq 0 \, für \, i = 1, .., n\}$ bezeichne den positiven Orthant.*

4. *$\partial K_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i \geq 0 \, für \, i = 1, .., n \, und \, \exists j \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit } x_j = 0\}$ bezeichne den Rand von ∂K_+*

5. *$U_n = \{u \in \mathbb{R}^n | \langle u, u\rangle = 1\}$ beschreibe die Einheitssphäre.*

Theorem 3.6.4. *(Perron-Frobenius) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine nichtnegative Matrix. Dann existiert ein nichtnegativer Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ zu A so, dass kein weiterer Eigenwert von A im Betrag größer als λ ist. Weiter existiert zu diesem dominierenden Eigenwert ein nichtnegativer Eigenvektor $y \in \mathbb{R}^n$ mit $Ay = \lambda y$.*

Beweis. Siehe [Gant59], S. 80f. □

Theorem 3.6.5. *(Blakley und Roy) Sei $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine nichtnegative, symmetrische Matrix, $x \in U_n$ nichtnegativ und $k \in \mathbb{N}_+$. Dann ist*

$$\langle x, Sx\rangle^k \leq \left\langle x, S^k x\right\rangle.$$

Für $k > 1$ gilt Gleichheit genau dann, wenn x ein Eigenvektor von S ist oder $\left\langle x, S^k x\right\rangle = 0$.

Beweis. Sei $S' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine nichtnegative, symmetrische Matrix und seien $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda'_1| \geq |\lambda'_2| \geq \cdots \geq |\lambda'_n|$ die Eigenwerte von S'. Die Fälle $k = 1$ oder $n = 1$ sind klar. Ohne Einschränkung betrachte man die normalisierte Matrix $\frac{1}{|\lambda'_1|}S' =: S$ und kann dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n, k > 1$, $|\lambda_i| \leq 1$ für $i = 1, \ldots, n$ und $|\lambda_1| = 1$ annehmen. Dabei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von S. Nach Theorem 3.6.4 gibt es einen nichtnegativen Eigenvektor $v \in U_n$ von S, dessen zugehöriger Eigenwert 1 ist.

Per Induktion nach n zeigt man die Gültigkeit der Ungleichung zunächst für Vektoren $x \in \partial K_+$. Sei also $x \in \partial K_+ \cap U_n$, dann existiert ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x_j = 0$ und damit $x(j) \in U_{n-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\langle x(j), S(j)x(j)\rangle^k \leq \left\langle x(j), S(j)^k x(j)\right\rangle$ und man erhält im Falle, dass $x(j)$ kein Eigenvektor von $S(j)$ ist

$$\langle x, Sx\rangle^k = \langle x(j), S(j)x(j)\rangle^k < \left\langle x(j), S(j)^k x(j)\right\rangle \leq \left\langle x, S^k x\right\rangle.$$

Ist $x(j) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ ein Eigenvektor von $S(j)$, so gibt es einen zu $x(j)$ gehörigen Eigenwert $\lambda > 0$ mit $S(j)x(j) = \lambda x(j)$. Dann ist mit einem zu x orthogonalen Vektor $p \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ auch die Darstellung

$Sx = \lambda x + p$ möglich. Sei nun x kein Eigenvektor von S, dann ist $\langle p, p \rangle > 0$ und mit der Symmetrie von S folgt:

$$\begin{aligned}
\left\langle x, S^k x \right\rangle &= \left\langle x, \lambda^k x + \lambda^{k-1} p + \lambda^{k-2} p + \cdots + \lambda p + p \right\rangle \\
&\geq \lambda^k + \lambda^{k-2} \langle x, Sp \rangle = \lambda^k + \lambda^{k-2} \langle Sx, p \rangle \\
&= \lambda^k + \lambda^{k-2} (\langle \lambda x, p \rangle + \langle p, p \rangle) = \lambda^k + \lambda^{k-2} \langle p, p \rangle \\
&> \lambda^k = (\langle x, \lambda x \rangle + \langle x, p \rangle)^k = \langle x, Sx \rangle^k .
\end{aligned}$$

Die Aussage für $x \in \partial K_+$ ist somit gezeigt.

Nun sei $x \in U_n \setminus \partial K_+$ nichtnegativ und kein Eigenvektor von S. Weiter sei $m \in U_n$ ein nichtnegativer Eigenvektor von S mit Eigenwert 1 und $q \in U_n$ der eindeutige zu m orthogonale Vektor so, dass x zwischen q und m liegt. Es existiert also ein $\eta_0 \in (0, 1)$, sodass x die Darstellung $x = \sqrt{(1 - \eta_0^2)} m + \eta_0 q$ hat. Definiere $\alpha := \left\langle q, S^k q \right\rangle - 1$ und $\beta := \langle q, Sq \rangle - 1$. Dann ist $\beta < 0$, denn sonst folgt aus der normalisierten Matrix S, dass auch q ein Eigenvektor von S mit Eigenwert 1 ist und da auch m ein Eigenvektor von S mit Eigenwert 1 ist, ergibt sich $Sx = x$. Ein Widerspruch zur Annahme. Sei weiter $w \in U_n \cap \partial K_+$ so, dass w zwischen x und q liegt. Dann existiert ein $\eta_1 \in (\eta_0, 1]$, sodass w die Darstellung $w = \sqrt{(1 - \eta_1^2)} m + \eta_1 q$ besitzt. Nun definiere

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f \colon \lambda \mapsto \lambda^k - \lambda \frac{\alpha}{\beta} - 1 + \frac{\alpha}{\beta}.$$

Es ergibt sich:

$$f(1) = \langle m, Sm \rangle^k - \left\langle m, S^k m \right\rangle = 0,$$

$$\begin{aligned}
f\left(1 + \eta_0^2 \beta\right) &= \left(1 + \eta_0^2 \beta\right)^k - \eta_0^2 \alpha - 1 \\
&= \left(1 + \eta_0^2 \langle q, Sq \rangle - \eta_0^2\right)^k - \eta_0^2 \left\langle q, S^k q \right\rangle + \eta_0^2 - 1 \\
&= \left(\left(1 - \eta_0^2\right) \langle m, Sm \rangle + \eta_0^2 \langle q, Sq \rangle\right)^k - \left(\left(1 - \eta_0^2\right) \left\langle m, S^k m \right\rangle + \eta_0^2 \left\langle q, S^k q \right\rangle\right) \\
&= \langle x, Sx \rangle^k - \left\langle x, S^k x \right\rangle, \text{ und}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f\left(1 + \eta_1^2 \beta\right) &= \left(1 + \eta_1^2 \beta\right)^k - \eta_1^2 \alpha - 1 \\
&= \left(1 + \eta_1^2 \langle q, Sq \rangle - \eta_1^2\right)^k - \eta_1^2 \left\langle q, S^k q \right\rangle + \eta_1^2 - 1 \\
&= \left(\left(1 - \eta_1^2\right) \langle m, Sm \rangle + \eta_1^2 \langle q, Sq \rangle\right)^k - \left(\left(1 - \eta_1^2\right) \left\langle m, S^k m \right\rangle + \eta_1^2 \left\langle q, S^k q \right\rangle\right) \\
&= \langle w, Sw \rangle^k - \left\langle w, S^k w \right\rangle .
\end{aligned}$$

Für $w \in \partial K_+$ haben wir die Aussage bereits gezeigt. Es folgt also $f(1 + \eta_1^2 \beta) \leq 0$. Die erste Ableitung von f ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}_+$. Damit ist f strikt konvex auf $\mathbb{R}_+$. Da $0 < 1 + \eta_1^2 \beta < 1 + \eta_0^2 \beta < 1$, ist die strikte Ungleichung also auch für x erfüllt. Das Gleichheit vorliegt, wenn u ein Eigenvektor auf der Einheitssphäre ist, ist klar. $\square$

Beweis von Theorem 3.6.1. Sei A die Adjazenzmatrix von G und $v := \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_n \in U_n$. A und v erfüllen also die Voraussetzungen aus Theorem 3.6.5 und es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
w_1^k &\overset{2.3.11}{=} \langle \mathbf{1}_n, A\mathbf{1}_n\rangle^k = \left\langle \sqrt{n}v, A\sqrt{n}v\right\rangle^k = n^k \langle v, Av\rangle^k \\
&\overset{3.6.5}{\leq} n^k \left\langle v, A^k v\right\rangle = n^{k-1}\left\langle v\sqrt{n}, A^k v\sqrt{n}\right\rangle = n^{k-1}\left\langle \mathbf{1}_n, A^k\mathbf{1}_n\right\rangle \\
&\overset{2.3.11}{=} n^{k-1}w_k \overset{2.3.13}{=} w_0^{k-1}w_k.
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 3.6.6. *Eine zur Ungleichung $w_1^k \leq w_0^{k-1}\cdot w_k$ korrespondierende Form ist $f = X_1^k - X_1\cdots X_k$. Die Symmetrisierung von f ist*

$$f_{sym} = \left(\sum_{i=1}^{k}(k-1)!\cdot X_i^k\right) - k!\cdot X_1\cdots X_k = (k-1)!\cdot(X_1^k+\cdots+X_k^k - k\cdot X_1\cdots X_k).$$

Für $k \equiv 0 \pmod 2$ ist f_{sym} nach dem Theorem von Reznick 2.1.12 eine Summe von Quadratformen und damit positiv semidefinit. Für $k \equiv 1 \pmod 2$ kann f_{sym} nach Bemerkung 2.1.6 keine positiv semidefinite Form sein.

3.7 Eine Verallgemeinerung der Ungleichungen von Erdös und Simonovits

Die folgenden Ungleichungen wurden in [Täu15] aufgestellt und bewiesen.

Theorem 3.7.1. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und seien $k, l, p \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ oder $w_{2l} > 0$. Dann erfüllt G die Ungleichung*

$$w_{2l+p}^k \leq w_{2l}^{k-1}\cdot w_{2l+pk}.$$

Beweis. Sei A die Adjazenzmatrix von G und $v := \frac{A^l\mathbf{1}_n}{\|A^l\mathbf{1}_n\|}$. Da A nichtnegativ und symmetrisch ist, erfüllen v und A^p die Voraussetzungen aus Theorem 3.6.5. Für den transponierten Vektor v^T ergibt sich $v^T = \frac{\mathbf{1}_1^T(A^l)^T}{\|A^l\mathbf{1}_n\|} = \frac{\mathbf{1}_n^T A^l}{\|A^l\mathbf{1}_n\|}$. Einsetzen von v und A^p in die Ungleichung aus Theorem 3.6.5 liefert die Ungleichung

$$\left\langle \frac{A^l\mathbf{1}_n}{\|A^l\mathbf{1}_n\|}, A^p\frac{A^l\mathbf{1}_n}{\|A^l\mathbf{1}_n\|}\right\rangle^k \leq \left\langle \frac{A^l\mathbf{1}_n}{\|A^l\mathbf{1}_n\|}, A^{pk}\frac{A^l\mathbf{1}_n}{\|A^l\mathbf{1}_n\|}\right\rangle,$$

die äquivalent ist zu

$$\left(\frac{\mathbf{1}_n^T\cdot A^{p+2l}\cdot\mathbf{1}_n}{\langle A^l\mathbf{1}_n, A^l\mathbf{1}_n\rangle}\right)^k \leq \left(\frac{\mathbf{1}_n^T\cdot A^{pk+2l}\cdot\mathbf{1}_n}{\langle A^l\mathbf{1}_n, A^l\mathbf{1}_n\rangle}\right)$$

und schließlich

$$\left(\mathbf{1}_n^T A^{p+2l}\mathbf{1}_n\right)^k \leq \left(\mathbf{1}_n^T A^{pk+2l}\mathbf{1}_n\right)\cdot\left(\mathbf{1}_n^T A^{2l}\mathbf{1}_n\right)^{k-1}$$

ergibt. Mit Korollar 2.3.11 folgt nun die Behauptung. □

Bemerkungen 3.7.2.

1. *Ist* $l = 0$ *und* $p = 1$ *so führt dies auf die Ungleichungen* $w_1^k \leq w_k \cdot w_0^{k-1}$ *aus Theorem 3.6.1*

2. *Ist* $k = 2$ *so ergeben sich die Ungleichungen* $w_{2l+p}^2 \leq w_{2l+2p} \cdot w_{2l}$ *von Dress und Gutman .*

3. *Ist* $l = 0$*, so ist* $w_p^k \leq w_0^{k-1} \cdot w_{pk}$*. Ist weiter* $p \cdot k \equiv 0 \pmod 2$*, so können wir die Ungleichung unter Anwendung von Reznicks Theorem 2.1.12 herleiten. Nach Theorem 2.1.12 ist* $f = p \sum_{i=1}^{k} X_i^{p \cdot k} - pkX_1^p \cdots X_k^p$ *mit* $p \cdot k \equiv 0 \pmod 2$ *eine sos-Form. Die zugehörige Wegeungleichung ist wiederum* $w_p^k \leq w_0^{k-1} \cdot w_{pk}$*.*

Kapitel 4

Erkenntnisse für weitere Wegeungleichungen

Dieses Kapitel zeigt unter Anwendung positiv semidefiniter Formen Resultate auf, die zum Erhalt weiterer Wegeungleichungen führen können. Zunächst werden einige der in Kapitel 2 vorgestellten Kriterien zur positiven Semidefinitheit einer Form untersucht. Danach folgt eine Analyse der Formen, die zu den Ungleichungen aus Kapitel 3 korresponieren. Wir werden dann Ungleichungen aufstellen, die zu psd-Formen ähnlicher Struktur korrespondieren. Anschließend stellt sich die Frage, ob sich diese Ungleichungen aus bereits bekannten Ungleichungen folgern lassen. Für bestimmte Ungleichungen werden wir dies nicht beantworten können.

Wir werden in diesem Kapitel stets Wegeungleichungen der Form $w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n} - w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \geq 0$ mit $|\alpha| = |\beta|$ betrachten und daher von der in Definition 2.3.14 eingeführten Schreibweise abweichen und stattdessen die Darstellung $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$ verwenden.

$G = (V, E)$ bezeichne weiterhin einen ungerichteten Graphen.

4.1 Untersuchungen der Kriterien zur positiven Semidefinitheit

Insgesamt haben wir vier Kriterien zur positiven Semidefinitheit einer Form kennen gelernt. Das Halber Grad Prinzip nennt weder eine Beschreibung positiv semidefiniter Formen noch ein konstruktives Verfahren solche zu erhalten. Auch das Korollar 2.1.11 zu Hilberts 17. Problem liefert keine Beschreibung der Gradtupel einer positiv semidefiniten Form. Diese Kriterien werden wir hier nicht weiter analysieren.

4.1.1 Wegeungleichungen und das Newton-Polytop

Anhand des Newton-Polytops lassen sich zunächst noch keine Wegeungleichungen aufstellen. Wir können aber interessante Aussagen über weitere Ungleichungen geben.

Satz 4.1.1. *Sei $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$ eine polynomielle Wegeungleichung, die in allen ungerichteten Graphen erfüllt ist. Existiert eine positiv semidefinite, zur Ungleichung korrespondierende Form, so ist $\beta_i \equiv 0 \pmod 2$ für alle $i = 1, \ldots, n$.*

Beweis. Sei also f eine zur Ungleichung korrespondierende Formen mit $f \geq 0$. Nach Satz 2.2.18 sind die Eckkoeffizienten von f positiv. Somit sind $\beta_1, \ldots, \beta_n$ Einträge einer Ecke des Newton-Polytops $N(f)$. Nach Satz 2.2.18 sind die Ecken von $N(f)$ gerade, also ist $\beta_i \equiv 0 \pmod 2$ für $i = 1, \ldots, n$. □

Das heißt, Wegeungleichungen $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$ mit $\beta_i \equiv 1 \pmod 2$ für ein $i = 1, \ldots, n$ brauchen wir nicht weiter über positiv semidefinite Formen zu untersuchen.

Korollar 4.1.2. *Sei $w_{\alpha_1} \cdot w_{\alpha_2} \leq w_{\beta_1} \cdot w_{\beta_2}$ eine polynomielle Wegeungleichung, die von allen ungerichteten Graphen erfüllt wird. Existiert eine positiv semidefinite, zur Ungleichung korrespondierende Form, so existieren $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit*

$$\alpha_1 = 2a + c, \quad \alpha_2 = 2(a+b) + c, \quad \beta_1 = 2a, \quad \beta_2 = 2(a+b+c).$$

Beweis. Nach Satz 4.1.1 wissen wir bereits, dass $\beta_i \equiv 0 \pmod 2$ für $i = 1, 2$ gelten muss. Da β eine Ecke von $N(f)$ ist, können wir ohne Einschränkung $\beta_1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \beta_2$ annehmen, wobei $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod 2$ gilt. Jetzt setzen wir $\beta_1 = 2a$, $\alpha_1 = 2a + c$ und $\alpha_2 = 2(a+b) + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{N}$. Da $|\alpha| = |\beta|$ ist dann schließlich $\beta_2 = 2(a+b+c)$ und die Behauptung folgt. □

Insbesondere werden also alle Wegeungleichungen mit Länge 2, zu denen eine positiv semidefinite Form korrespondiert, vollständig durch die Ungleichungen $w_{2a+c} \cdot w_{2(a+b)+c} \leq w_{2a} \cdot w_{2(a+b+c)}$ charakterisiert.

4.1.2 Das Theorem von Reznick

Wir betrachten nun die durch das Theorem von Reznick 2.1.12 klassifizierten positiv semidefiniten Formen. Sei also

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i^{2d} - 2d X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \in \mathcal{F}_{n,2d}$$

mit $|\alpha| = 2d$. Nach Reznick besitzt f eine Darstellung als Summe von Formenquadraten und ist insbesondere positiv semidefinit. Es lassen sich durch diese Formen die folgenden Wegeungleichungen aufstellen:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_{2d} \cdot w_0^{n-1} - 2d w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{2d} \cdot w_0^{n-1}.$$

Satz 4.1.3. *Sei $G = (V, E)$ und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = 2d$. Dann erfüllt G die Ungleichung*

$$w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{2d} \cdot w_0^{n-1}.$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach n. Für $n = 1$ ist die Ungleichung trivial. Für $n = 2$ erhalten wir die Ungleichung $w_{\alpha_1} \cdot w_{\alpha_2} \leq w_{2d} \cdot w_0$, deren Gültigkeit in Satz 3.1.2 gezeigt wurde. Sei nun $n \geq 3$, dann existieren $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$ mit $\alpha_i \equiv \alpha_j \pmod 2$. Wir wenden die Ungleichung $w_{2a+b} \cdot w_b \leq w_0 \cdot w_{2(a+b)}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ aus Theorem 3.1.2 an und erhalten

$$w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \overset{3.1.2}{\leq} w_0 \cdot w_{\alpha_i + \alpha_j} \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} w_k \overset{\text{IV}}{\leq} w_0 \cdot w_{2d} \cdot w_0^{n-2} = w_0^{n-1} \cdot w_{2d}.$$

□

Wir schlussfolgern, dass sich unter Verwendung von Reznicks Theorem keine neuen Wegeungleichungen finden lassen.

4.2 Analyse der Formen gültiger Ungleichungen

Wir untersuchen nun die korrespondierenden Formen der Ungleichungen aus Kapitel 3. Wie wir mit Hilfe des Newton-Polytops festgestellt haben, genügt es Ungleichungen $w_{\alpha_1}\cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1}\cdots w_{\beta_n}$ mit $\beta_i \equiv 0 \pmod 2$ für $i = 1,\dots,n$ zu betrachten. Daher werden wir die in Abschnitt 3.6 behandelten Ungleichungen und ihre verallgemeinerten Ungleichungen aus Abschnitt 3.7 hier nicht weiter betrachten. Ausgehend von den Formen gültiger Wegeungleichungen werden wir versuchen, positiv semidefinite Formen zu finden, die auf interessante Ungleichungen $w_{\alpha_1}\cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1}\cdots w_{\beta_n}$ führen. Dafür ist es wichtig, dass die in einer Form vorkommenden Monome in genau zwei Äquivalenzklassen liegen.

4.2.1 Formen der Ungleichungen $w_{2(a+b)+c}\cdot w_{2a+c} \leq w_{2a}\cdot w_{2(a+b+c)}$

Wir haben in Bemerkung 3.1.4 gesehen, dass die Ungleichungen $w_{2(a+b)+c}\cdot w_{2a+c} \leq w_0\cdot w_{2(a+b+c)}$ zu den Formen

$$f = X_1^{2a}X_2^{2a}(X_1^{2b+c} - X_2^{2b+c})(X_1^c - X_2^c) \in \mathcal{P}S_{2,2(a+b+c)}$$

korrespondieren. Dieser Abschnitt widmet sich der Herleitung von Wegeungleichungen, die zu Formen ähnlicher Struktur korrespondieren.

Satz 4.2.1. *Sei $G = (V,E)$ ein Graph und seien $a,b,c,m \in \mathbb{N}$. Dann erfüllt G die Ungleichung*

$$w^m_{2(a+b)+c}\cdot w^m_{2a+c} \leq w^m_0 \cdot w^m_{2(a+b+c)}.$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage mit Hilfe der Formen:

$$f = (X_1\cdots X_{2m})^{2a}\Big((X_1\cdots X_m)^{2b+c} - (X_{m+1}\cdots X_{2m})^{2b+c}\Big)\Big((X_1\cdots X_m)^c - (X_{m+1}\cdots X_{2m})^c\Big).$$

Es ist $f \geq 0$, denn ist $c \equiv 1 \pmod 2$, so sei ohne Einschränkung $X_1\cdots X_m \geq X_{m+1}\cdots X_{2m}$. Dann gilt aber auch $X_1^{2b+c}\cdots X_m^{2b+c} \geq X_{m+1}^{2b+c}\cdots X_{2m}^{2b+c}$ und $X_1^c\cdots X_m^c \geq X_{m+1}^c\cdots X_{2m}^c$. In diesem Fall haben also beide Faktoren gleiches Vorzeichen. Für den Fall $c \equiv 0 \pmod 2$ sei ohne Einschränkung $|X_1\cdots X_m| \geq |X_{m+1}\cdots X_{2m}|$ und somit $\left(X_1^{2b+c}\cdots X_m^{2b+c} - X_{m+1}^{2b+c}\cdots X_{2m}^{2b+c}\right) \geq 0$ und $\left(X_1^c\cdots X_m^c - X_{m+1}^c\cdots X_{2m}^c\right) \geq 0$. Durch Ausfaktorisieren von f lässt sich die Korrespondenz zu den aufgestellten Ungleichungen feststellen. Da $f \geq 0$ ist auch $f_{sym} \geq 0$ und mit Korollar 2.3.17 folgt die Behauptung. □

Bemerkung 4.2.2. *Natürlich lassen sich die Ungleichungen aus Satz 4.2.1 durch Potenzieren der Ungleichungen $w_{2a+c}\cdot w_{2(a+b)+c} \leq w_{2a}\cdot w_{2(a+b+c)}$ auch direkt folgern.*

Allgemein lässt sich anhand der Ungleichungen $w_{2(a+b)+c}\cdot w_{2a+c} \leq w_{2a}\cdot w_{2(a+b+c)}$ und $w_{2b+c}\cdot w_c \leq w_0\cdot w_{2(b+c)}$ feststellen: Wenn zu der Ungleichung $w_{\alpha_1}\cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1}\cdots w_{\beta_n}$ eine positiv semidefinite Form

$$f = \sum_{\sigma\in S_n}\left(X^{\beta_1}_{\sigma(1)}\cdots X^{\beta_n}_{\sigma(n)} - X^{\alpha_1}_{\sigma(1)}\cdots X^{\alpha_n}_{\sigma(n)}\right)$$

korrespondiert, so korrespondiert zu der Ungleichung $w_{\alpha_1+2a}\cdots w_{\alpha_n+2a} \leq w_{\beta_1+2a}\cdots w_{\beta_n+2a}$ eine positiv semidefiniten Form

$$f = (X_1\cdots X_n)^{2a}\cdot\left(\sum_{\sigma\in S_n} X^{\beta_1}_{\sigma(1)}\cdots X^{\beta_n}_{\sigma(n)} - \sum_{\sigma\in S_n} X^{\alpha_1}_{\sigma(1)}\cdots X^{\alpha_n}_{\sigma(n)}\right).$$

4.2.2 Formen der Ungleichungen $w_{a+b}^2 \leq w_{2a} \cdot w_{2b}$

Wie in Bemerkung 2.2.2 zu sehen war, führten die Ungleichungen $w_{a+b}^2 \leq w_{2a} \cdot w_{2b}$ auf die Formen $f = (X_1^a X_2^b - X_1^b X_2^a)^2$. Wir konstruieren nun Formen in n Variablen, die eine ähnliche Struktur wie f aufweisen und erhalten die folgenden Wegeungleichungen:

Theorem 4.2.3. *Sei $G = (V, E)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $\sigma \in S_n$. Dann erfüllt G die Ungleichung*

$$w_{2\alpha_1} \cdots w_{2\alpha_n} \geq w_{\alpha_1+\alpha_{\sigma(1)}} \cdots w_{\alpha_n+\alpha_{\sigma(n)}}. \tag{4.1}$$

Beweis. Sei $\sigma \in S_n$ und $f = (X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} - X_{\sigma(1)}^{\alpha_1} \cdots X_{\sigma(n)}^{\alpha_n})^2$. Da $f \geq 0$ ist auch $f_{sym} \geq 0$ und wir erhalten durch

$$f = X_1^{2\alpha_1} \cdots X_n^{2\alpha_n} + X_{\sigma(1)}^{2\alpha_1} \cdots X_{\sigma(n)}^{2\alpha_n} - 2X_1^{\alpha_1+\alpha_{\sigma(1)}} \cdots X_n^{\alpha_n+\alpha_{\sigma(n)}}$$

die Wegeungleichung

$$w_{2\alpha_1} \cdots w_{2\alpha_n} + w_{2\alpha_{\sigma(1)}} \cdots w_{2\alpha_{\sigma(n)}} \geq 2w_{\alpha_1+\alpha_{\sigma(1)}} \cdots w_{\alpha_n+\alpha_{\sigma(n)}}$$

also

$$w_{2\alpha_1} \cdots w_{2\alpha_n} \geq w_{\alpha_1+\alpha_{\sigma(1)}} \cdots w_{\alpha_n+\alpha_{\sigma(n)}}.$$

□

Bemerkung 4.2.4. *Wir untersuchen nun, ob sich die Ungleichungen aus (4.1) aus den in Kapitel 3 vorgestellten Ungleichungen folgern lassen und führen Induktion über n. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist klar. Der Fall $n = 2$ führt auf die Ungleichung von Dress und Gutman. Sei nun $n \geq 3$ fixiert und angenommen es ist möglich die Ungleichungen aus (4.1) für alle kleineren n aus den Ungleichungen aus Kapitel 3 zu folgern. Für $\sigma \in S_n$ sei $\sigma = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \cdots \circ \rho_d$ mit $ord(\rho_i) = r_i$ für $i = 1, \ldots, d$ die eindeutige, disjunkte Zykelzerlegung von σ. Dann ist $n = r_1 + \cdots + r_d + |fix(\sigma)|$. Wobei $fix(\sigma) = \{i \in \{1, \ldots, n\} | \sigma(i) = i\}$. Ist $d > 1$ so ist $r_i < n$ für alle $i = 1, \ldots, d$ und die Behauptung folgt nach Kürzen der Fixpunkte und d-facher Anwendung der Induktionsvoraussetzung. Sei also $d = 1$ und $|fix(\sigma)| = \emptyset$, denn sonst folgt die Behauptung auch. Wir betrachten im Folgenden also nur die n-Zykel von S_n und zwar in eine Richtung des Uhrzeigersinns. Ist nämlich $\pi \in S_n$ die Umkehrfunktion von σ, dann gilt für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\sigma(i) = j$, dass*

$$i + \sigma(i) = i + j = j + \pi(j).$$

Damit folgt dann

$$w_{2\alpha_1} \cdots w_{2\alpha_n} \geq w_{\alpha_1+\alpha_{\sigma(1)}} \cdots w_{\alpha_n+\alpha_{\sigma(n)}} \Leftrightarrow w_{2\alpha_1} \cdots w_{2\alpha_n} \geq w_{\alpha_1+\alpha_{\pi(1)}} \cdots w_{\alpha_n+\alpha_{\pi(n)}}.$$

Ohne Einschränkung können wir $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_n$ annehmen und setzen $\alpha_i = a + b_i$ für $i = 1, \ldots, n$ mit $a, b_i \in \mathbb{N}$, $b_1 = 0$ und $b_i \leq b_j$ für $i < j$. Da $n \geq 3$, sind zwei der n Zahlen $\alpha_i + \alpha_{\sigma(i)}$, $i = 1, \ldots, n$ entweder beide gerade oder beide ungerade. Ohne Einschränkung sei also $2a + b_l + b_{\sigma(l)} \equiv 2a + b_k + b_{\sigma(k)} \pmod 2$ für $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ und $k \neq l$. Wir zeigen nun, dass sich für bestimmte Permutationen die Induktionsvoraussetzung anwenden lässt:

- *Der Fall $\sigma(k) = 1$ und $l = 1$. Wir setzen dann $a' := a$, $2b' := b_{\sigma(1)} - b_k$, $c' := b_k$ und erhalten:*

$$\begin{aligned} w_{\alpha_1+\alpha_{\sigma(1)}} \cdot w_{\alpha_k+\alpha_{\sigma(k)}} &= w_{2a+b_{\sigma(1)}} \cdot w_{2a+b_k} = w_{2(a'+b')+c'} \cdot w_{2a'+c'} \\ &\leq w_{2a'} \cdot w_{2(a'+b'+c')} = w_{2a} \cdot w_{(a+b_{\sigma(1)})+(a+b_k)} \\ &= w_{2\alpha_1} \cdot w_{\alpha_{\sigma(1)}+\alpha_k} = w_{2\alpha_1} \cdot w_{\alpha_k+\alpha_{\tilde{\sigma}(k)}} \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\sigma}(i) = \begin{cases} \sigma(1) & \text{falls } i = k \\ \sigma_{|\{2,\ldots,n\}}(i) & \text{für } i \in \{2,\ldots,n\} \setminus \{k\}. \end{cases}$$

Da $\tilde{\sigma} \in S_{n-1}$ ein $n-1$-Zykel ist, erhalten wir mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung:

$$w_{2\alpha_1} \cdots w_{2\alpha_n} \geq w_{2\alpha_1} \cdot w_{\alpha_2+\alpha_{\tilde{\sigma}(2)}} \cdots w_{\alpha_n+\alpha_{\tilde{\sigma}(n)}} \geq w_{\alpha_1+\alpha_{\sigma(1)}} \cdots w_{\alpha_n+\alpha_{\sigma(n)}}.$$

Auch in allen weiteren Fällen sollte es das Ziel sein, die Zahlen $\alpha_i + \alpha_{\sigma(i)}$ so zu verschieben, dass sich eine Permutation definieren lässt, deren Zykelzerlegung mindestens Länge 2 hat. Erst dann lässt sich die Induktionsvoraussetzung anwenden.

Wir stellen als Beispiel den Fall $n = 3$ vor und prüfen anschließend in einer Bemerkung, inwieweit sich die ergebene Ungleichung $w_{2a+b}w_{2a+b+c}w_{2a+2b+c} \leq w_{2a}w_{2(a+b)}w_{2(a+b+c)}$ aus den Ungleichungen aus Kapitel 3 ableiten lässt. Ohne Einschränkung betrachten wir den 3-Zykel (1 2 3) und erhalten unter Verwendung von Theorem 4.2.3 das folgende Korollar.

Beispiel 4.2.5. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Dann erfüllt G die Ungleichung*

$$w_{2a+b} \cdot w_{2a+b+c} \cdot w_{2(a+b)+c} \leq w_{2a} \cdot w_{2(a+b)} \cdot w_{2(a+b+c)}.$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$. Wir setzen dann $\alpha_1 := a$, $\alpha_2 := a + b$, $\alpha_3 := a + b + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{N}$ und erhalten mit $\sigma = (1\,2\,3)$ und Theorem 4.2.3

$$\begin{aligned} w_{2a+b} \cdot w_{2(a+b)+c} \cdot w_{2a+b+c} &= w_{\alpha_1+\alpha_{\sigma(1)}} \cdot w_{\alpha_2+\alpha_{\sigma(2)}} \cdot w_{\alpha_3+\alpha_{\sigma(3)}} \\ &\leq w_{2\alpha-1} \cdot w_{2\alpha_2} \cdot w_{2\alpha_3} \\ &= w_{2a} \cdot w_{2(a+b)} \cdot w_{2(a+b+c)}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.2.6. *Die Ungleichungen $w_{2a+b} \cdot w_{2a+b+c} \cdot w_{2(a+b)+c} \leq w_{2a} \cdot w_{2(a+b)} \cdot w_{2(a+b+c)}$ lassen sich durch die Ungleichungen aus den Abschnitten 3.2 und 3.3 herleiten, denn zwei der drei Zahlen $2(a + b) + c$, $2a + b$, $2a + b + c$ sind entweder beide gerade oder beide ungerade.*

- *Der Fall $2a+b \equiv 2a+2b+c \pmod 2$. Wir setzen $c' := c, 2a' := 2a+(b-c)$ und $2b' := (b+c)$ und erhalten*

$$\begin{aligned} w_{2a+b} \cdot w_{2(a+b)+c} \cdot w_{2a+b+c} &= w_{2a'+c'} \cdot w_{2(a'+b')+c'} \cdot w_{2(a'+c')} \\ &\overset{3.3}{\leq} w_{2a'} \cdot w_{2(a'+b'+c')} \cdot w_{2(a'+c')} \\ &= w_{2a+b-c} \cdot w_{2(a+b+c)} \cdot w_{2a+b+c} \\ &\overset{3.3}{\leq} w_{2a} \cdot w_{2(a+b+c)} \cdot w_{2(a+b)}. \end{aligned}$$

- *Der Fall* $2a + b + c \equiv 2a + 2b + c \pmod 2$. *Wir setzen* $2a' := 2a + b$ *und* $2b' := b$ *und erhalten:*

$$\begin{aligned} w_{2a+b} \cdot w_{2a+b+c} \cdot w_{2a+2b+c} &= w_{2a'} \cdot w_{2a'+c} \cdot w_{2a'+2b'+c} \\ &\overset{3.3}{\leq} w_{2a'}^2 \cdot w_{2(a'+b'+c)} \\ &= w_{2a+b}^2 \cdot w_{2(a+b+c)} \\ &\overset{3.2}{\leq} w_{2a} \cdot w_{2(a+b)} \cdot w_{2(a+b+c)}. \end{aligned}$$

- *Der Fall* $2a + b \equiv 2a + b + c \pmod 2$. *Wir setzen* $a' := a$, $2b' := c$, $c' := b$ *und erhalten*

$$\begin{aligned} w_{2a+b} \cdot w_{2a+b+c} \cdot w_{2a+2b+c} &= w_{2a'+c'} \cdot w_{2(a'+b')+c'} \cdot w_{2(a'+b'+c')} \\ &\overset{3.3}{\leq} w_{2a'} \cdot w_{2(a'+b'+c')}^2 \\ &= w_{2a} \cdot w_{(a'+c')+(a'+2b'+c')}^2 \\ &\overset{3.2}{\leq} w_{2a'} \cdot w_{2(a'+c')} \cdot w_{2(a'+2b'+c')} \\ &= w_{2a} \cdot w_{2(a+b)} \cdot w_{2(a+b+c)}. \end{aligned}$$

4.2.3 Formen der Ungleichungen $w_{2k+a}^{2b} \leq w_{2k}^{2b-a} \cdot w_{2k+2b}^a$

Die zu den Wegeungleichungen $w_{2k+a}^{2b} \leq w_{2k}^{2b-a} \cdot w_{2(k+b)}^a$ mit $a, b, k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq a \leq 2b$ korrespondierenden Formen sind:

$$\begin{aligned} f &= (X_1 \cdots X_{2b-a})^{2k} \cdot (X_{2b-a+1} \cdots X_{2b})^{2(k+b)} - (X_1 \cdots X_{2b})^{2k+a} \\ &= (X_1 \cdots X_{2b})^{2k} \cdot (X_{2b-a+1}^{2b} \cdots X_{2b}^{2b} - X_1^a \cdots X_{2b}^a) \in \mathcal{F}_{2b,2b(2k+a)}. \end{aligned}$$

Falls $a = 2b$ ergibt sich $f \equiv 0$. In allen anderen Fällen sehen wir, dass f nicht positiv semidefinit sein kann, denn setzen wir $X_{2b-a+1} = \cdots = X_{2b} = 1$ und $X_1, \ldots, X_{2b-a} > 1$, so ist $(X_1 \cdots X_{2b})^{2k} \geq 0$ und $(X_{2b-a+1}^{2b} \cdots X_{2b}^{2b} - X_1^a \cdots X_{2b}^a) < 0$. Wir untersuchen im Weiteren noch die positive Semidefinitheit von f_{sym}.

$$f_{sym} = \sum_{i_1 < i_2 \cdots < i_a} a!(2b-a)!(X_1 \cdots X_{2b})^{2k} \cdot ((X_{i_1} \cdots X_{i_a})^{2b} - (X_1 \cdots X_{2b})^a) \in \mathcal{FS}_{2b,2b(2k+a)},$$

wobei $i_1, \ldots, i_a \in \{1, \ldots, 2b\}$. Das Überprüfen der positiven Semidefinitheit solcher Formen ist im Allgemeinen nicht einfach. Die Ecken des Newton-Polytops $N(f_{sym})$ sind

$$(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(2b)}) \text{ mit } \alpha_i := \begin{cases} 2(k+b) & \text{für } i = 1, \ldots, a \\ 2k & \text{sonst} \end{cases} \text{ und } \sigma \in S_{2b}$$

und somit gerade. Damit ist aber nur eine notwendige Bedingung der positiven Semidefinitheit einer Form erfüllt. Timoftes Halber Grad Prinzip 2.1.20 liefert auch eine hinreichende Bedingung. Um dieses Prinzip anwenden zu können, sollte die Anzahl der in f_{sym} vorkommenden Variablen größer sein als der halbe Grad von f_{sym}, das heißt es sollte $\frac{2b \cdot (2k+a)}{2} < 2b$ gelten. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn $k = 0$ und entweder $a = 1$ oder $a = 0$ ist. Für $k = 0$ und $a = 1$ ergibt sich

$$f_{sym} = (2b-1)! \sum_{i=1}^{2b} \left(X_i^{2b} - X_1 \cdots X_{2b} \right) \in \mathcal{F}S_{2b,2b}.$$

Diese Formen lassen sich nach Theorem 2.1.12 als Summe von Quadratformen schreiben und korrespondieren zu den Ungleichungen $w_1^{2b} \leq w_0^{2b-1} \cdot w_{2b}$. Für $k = 0$ und $a = 0$ erhalten wir die Ungleichungen $w_0^{2b} \leq w_0^{2b}$. Mit Hilfe des Halber Grad Prinzips lassen sich diese Formen also nicht näher studieren.

Kapitel 5

Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es mit Hilfe positiv semidefiniter Formen neue Erkenntnisse über Wegeungleichungen $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$ mit $|\alpha| = |\beta|$ zu erhalten, die von einem beliebigen, ungerichteten Graphen erfüllt werden. Wir beschließen diese Arbeit nun mit einigen offenen Problemen und Fragen, die an eine weitere Untersuchung des Themas anknüpfen können. Wir stellen diese und weitere Schwerpunkte nun im Kontext unserer Methoden und Erkenntnisse vor.

1. Wir haben im dritten und vierten Kapitel versucht mit positiv semidefiniten Formen alternative Beweise für die Gültigkeit bereits bekannter Ungleichungen aufzuzeigen. Dabei mussten wir feststellen, dass das Überprüfen der positiven Semidefinitheit für bestimmte Formen mit unseren Kriterien nicht möglich ist. Weitere Untersuchungen könnten aber beispielsweise mit Hilfe der semidefiniten Optimierung durchgeführt werden. Dann lässt sich allerdings nur Testen, ob sich eine Form als Summe von Formenquadraten schreiben lässt.

2. Ausgehend von den positiv semidefiniten Formen bekannter Ungleichungen haben wir auch versucht neue Ungleichungen aufzustellen. Mit Hilfe von Permutationen ließen sich tatsächlich interessante Ungleichungen beliebiger Länge finden. Durch die Struktur dieser Ungleichungen war es nicht möglich, die Gültigkeit direkt aus bekannten Ungleichungen einzusehen. Wir haben dann versucht, dies mit Induktion über die Länge der Ungleichung weiter zu überprüfen. Für einige Permutationen ist es uns gelungen, diese Ungleichungen auf bekannte Ungleichungen zurückzuführen. Für alle weiteren Permutationen stellte es sich als schwierig heraus, die Ungleichungen so umzuformen, dass sich eine Permutation definieren lässt, deren Zykeldarstellung mindestens einen Zykel der Länge kleiner oder gleich n besitzt. Erst dann lässt sich die Induktionsvoraussetzung anwenden. Dieser Fall bedarf also noch weiterer Überlegungen. Möglicherweise lassen sich für spezielle Permutationen und n-Tupel der Ungleichungen aus Theorem 4.2.3 aber auch neue Beispiele von Wegeungleichungen finden.

3. Das Newton-Polytop einer Form stellt in dieser Arbeit eine wichtige Methode dar, um eine positiv semidefinite Form zu charakterisieren. So konnten wir mit dessen Anwendung zu der Erkenntnis kommen, dass für Wegeungleichungen $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$, zu denen eine positiv semidefinte Form korrespondiert, stets $\beta_i \equiv 0 \pmod 2$ für $i = 1, \ldots, n$ gelten muss. Wir haben dieses Resultat jedoch nicht weiter untersucht und auch nicht versucht, konkrete Beispiele von Wegeungleichungen zu finden. Da eine Form die gleiche Wegeungleichung beschreibt wie ihre Symmetrisierung und $N(f) \subseteq N(f_{sym})$ gilt, könnte es interessant sein, Permutationspolytope näher zu betrachten. Das Permutationspolytop

für $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ ist definiert als $P(\beta) := \text{conv}((\beta_{\sigma(1)}, \ldots, \beta_{\sigma(n)})|\sigma \in S_n)$ (vgl. [Bar02], S.59) und ist daher das maximal mögliche Newton-Polytop einer positiv semidefiniten Form, welche auf die Wegeungleichung $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$ mit $\beta_i \equiv 0 \pmod 2$ für alle $i = 1, \ldots, n$ führen kann. Es stellt sich also für ein gegebenes $\beta \in \mathbb{N}^n$ die Frage, für welche $\alpha \in P(\beta)$ mit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ die Formen $\sum\limits_{\sigma \in S_n} X_{\sigma(1)}^{\beta_1} \cdots X_{\sigma(n)}^{\beta_n} - \sum\limits_{\sigma \in S_n} X_{\sigma(1)}^{\alpha_1} \cdots X_{\sigma(n)}^{\alpha_n}$ positiv semidefinit sind.

4. Wir haben Theorem 2.3.16 verallgemeinert und Wegeungleichungen anhand von Formen untersucht, deren positive Semidefinitheit auf ganz $\mathbb{R}^n$ gesichert ist. Nach Satz 2.3.16 genügt es aber, Formen zu finden, die auf Tupeln von Eigenwerten aller ungerichteten Graphen positiv semidefinit sind. Man könnte nun weitere Betrachtungen für bestimmte Klassen von Graphen durchführen. Dann müssen anschließend Formen gefunden werden, die auf allen Tupeln aus Eigenwerten dieser Graphen positiv semidefinit sind.

Anhang

Hier werden verschiedene polynomielle Wegeungleichungen vorgestellt, die man durch bekannte positiv semidefinite Formen unterschiedlichster Struktur erhält. Die Wegeungleichungen hier sind bereits in ihrer vollständig gekürzten Form angegeben. Wir werden auch hier keine Ungleichungen $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$ angeben können, die nicht schon aus den Ungleichungen aus Kapitel 3 gefolgert werden können. Man erhält aber mit Hilfe der Robinson Form (siehe Punkt 7) oder der Schur Formen mit geradem Grad (siehe Punkt 18) neue Zusammenhänge für die Anzahl von Wegen bestimmter Länge. Alle hier genannten Formen sind positiv semidefinit. Dies lässt sich in der Literatur nachlesen. Es gibt in der Literatur noch viele weitere positiv semidefinite Formen. Im Allgemeinen besitzen diese Formen jedoch Monome aus mehr als 2 Äquivalenzklassen oder die Gradtupel sind so vorgegeben, dass es unwahrscheinlich ist, Ungleichungen $w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n} \leq w_{\beta_1} \cdots w_{\beta_n}$ zu erhalten.

1. (siehe [Go14], S.56) Sei $f \in S\mathcal{F}_{n,2}$ mit der Darstellung $f = a \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + 2b \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j$. Dann ist f eine sos-Form genau dann, wenn $(a + (k-1)b)\,(a-b)^{k-1} \geq 0$ für alle $1 \leq k \leq n$. Die zu f gehörige Wegeungleichung lautet
$$n \cdot a \cdot w_2 \cdot w_0^{n-1} + b \cdot (n-1) \cdot n \cdot w_1^2 \cdot w_0^{n-2} \geq 0.$$

2. (siehe [Go14], S.82) Sei $f = \sum\limits_{i=1}^{3} \prod\limits_{i \neq j} (X_i - X_j)$. Dann ist $f \in \mathcal{P}_{3,2}$ und korrespondiert zu der Wegeungleichung
$$w_2 \cdot w_0 \geq w_1^2.$$

3. (siehe [Go14], S. 60) Sei $f \in S\mathcal{F}_{3,4}$ mit der Darstellung
$$\begin{aligned} f = \alpha \left(\sum_{i=1}^{3} X_i^4 \right) + \beta \left(\sum_{1 \leq i \neq j \leq 3} X_i^3 X_j \right) + \gamma \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 3} X_i^2 X_j^2 \right) \\ + \delta \left(\sum_{1 \leq i \neq j \neq k \leq 3} X_i^2 X_j X_k \right) \end{aligned} \tag{5.1}$$
Dann ist f eine Summe von Quadratformen, wenn
   a) $\alpha \geq 0$
   b) $\alpha^3 \gamma - \frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 \geq 0$
   c) $\alpha^3 \gamma^2 - \frac{1}{4} \alpha^3 \delta^2 - \alpha^2 \beta^2 \gamma + \frac{1}{4} \alpha^2 \beta^2 \delta + \frac{3}{16} \alpha \beta^4 \geq 0$

d) $\alpha^3\gamma^3 - \frac{3}{4}\alpha^3\gamma\delta^2 + \frac{1}{4}\alpha^3\delta^3 + \frac{3}{4}\alpha^2\beta^2\gamma\delta - \frac{3}{2}\alpha^2\beta^2\gamma^2 - \frac{3}{16}\alpha\beta^4\delta + \frac{9}{16}\alpha\beta^4\gamma - \frac{1}{16}\beta^6 \geq 0$

und führt auf die Wegeungleichung

$$\alpha w_4 \cdot w_0^2 + 2\beta w_0 \cdot w_3 \cdot w_1 + \gamma w_0 \cdot w_2^2 + \delta w_2 \cdot w_1^2 \geq 0.$$

4. (siehe [Go14], S.35) Sei $f = X_4^4 + X_1^2X_2^2 + X_2^2X_3^2 + X_3^2X_1^2 - 4X_1X_2X_3X_4$. Dann ist $f \in \mathcal{P}_{4,4}$ und führt auf die Wegeungleichung

$$w_4 \cdot w_0^3 + 3w_2^2 \cdot w_0^2 - 4w_1^4 \geq 0.$$

5. (siehe [Go14], S.82) Sei $f = \sum_{i=1}^{5} \prod_{j\neq i}(X_i - X_j)$. Dann ist $f \in \mathcal{P}_{5,4}$ und korrespondiert zu der Wegeungleichung

$$w_4 \cdot w_0^3 - 4w_3 \cdot w_1 \cdot w_0^2 + 6w_2 \cdot w_1^2 \cdot w_0 - 3w_1^4 \geq 0.$$

6. (siehe [Go14], S.35) Sei $f = X_1^4X_2^2 + X_2^4X_3^2 + X_3^4X_1^2 - 3X_1^2X_2^2X_3^2$. Dann ist $f \in \mathcal{P}_{3,6}$ und führt auf die Wegeungleichung

$$w_4 \cdot w_0 - w_2^2 \geq 0.$$

7. (siehe [Go14], S.35) Sei $f = X_1^6 + X_2^6 + X_3^6 - (X_1^4X_2^2 + X_2^4X_3^2 + X_3^4X_1^2 + X_1^2X_2^4 + X_2^2X_3^4 + X_3^2X_1^4) + 3X_1^2X_2^2X_3^2$, die Robinson Form. Dann ist $f \in \mathcal{P}_{3,6}$ und führt auf die Wegeungleichung

$$w_0 \underbrace{(w_0 \cdot w_6 - w_4 \cdot w_2)}_{\geq 0} + w_2 \underbrace{(w_2^2 - w_0 \cdot w_4)}_{\leq 0} \geq 0.$$

Diese Wegeungleichung kann also nicht direkt aus schon bekannten Ungleichungen eingesehen werden.

8. (siehe [Go14], S.35) Die Motzkin Form ist $f = X_3^6 + X_1^4X_2^2 + X_1^2X_2^4 - 3X_1^2X_2^2X_3^2$. Es ist $f \in \mathcal{P}_{3,6}$ und f führt auf die Wegeungleichung

$$w_6 \cdot w_0^2 + 2w_4 \cdot w_2 \cdot w_0 - 3w_2^3 \geq 0.$$

9. (siehe [CLR87]) Sei $f = (n-2)\sum_{i\neq j} X_i^4X_j^2 - 6 \sum_{i<j<k} X_i^2X_j^2X_k^2$ eine Form in n Variablen. Dabei wird jeweils über alle Möglichkeiten summiert aus den n Variablen zwei bzw. drei Variablen auszuwählen. Dann ist $\in \mathcal{P}_{n,6}$ und führt auf die Ungleichung

$$w_4 \cdot w_0 \geq w_2^2.$$

10. (siehe [CLR87]) Seien $f_k = (k^2 - k)\sum_{i=1}^{n} X_i^6 - 2(k-1)\sum_{i\neq j} X_i^4X_j^2 + 6\sum_{i<j<k} X_i^2X_j^2X_k^2$ für $k \in \{1, ..., n-1\}$. Wobei auch hier jeweils über alle Möglichkeiten summiert wird aus den n Variablen zwei bzw. drei Variablen auszuwählen. Dann ist $f_k \in \mathcal{P}_{n,6}$. Diese Formen korrespondieren zu den Ungleichungen

$$w_0^2(k^2 - k)w_6 - 2(k-1)(n-1)w_0 \cdot w_4 \cdot w_2 + (n-1)(n-2)w_2^3 \geq 0 \qquad k \in \{1, ..., n-1\}.$$

11. (siehe [CLR87]) Seien $g_\lambda = (\lambda-1)^2 \sum_{i=1}^n X_i^6 + (3-2\lambda)\sum_{i\neq j} X_i^4 X_j^2 + 6\sum_{i<j<k} X_i^2 X_j^2 X_k^2, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $g_\lambda \in \mathcal{P}_{n,6}$ und führt auf die Ungleichung

$$(\lambda-1)^2 w_6 \cdot w_0^2 + (n-1)(3-2\lambda) w_4 \cdot w_2 \cdot w_0 + (n-1)(n-2) w_2^3 \geq 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

12. (siehe [Har99]) Sei $f = X_1^6 X_2^2 + X_1^6 X_3^2 + X_2^6 X_3^2 + X_1^2 X_2^6 + X_1^2 X_3^6 + X_2^2 X_3^6 - 2(X_1^4 X_2^4 - X_1^4 X_3^4 - X_2^4 X_3^4$. Dann ist $f \in \mathcal{P}_{3,8}$ und führt auf die Ungleichung

$$w_4^2 \leq w_6 \cdot w_2.$$

13. (siehe [Har99]) Sei $f = X_1^4 X_2^4 + X_1^4 X_3^4 + X_2^4 X_3^4 - X_1^4 X_2^2 X_3^2 - X_2^4 X_1^2 X_3^2 - X_3^4 X_1^2 X_2^2$. Dann ist $f \in \mathcal{P}_{3,8}$ und führt auf die Ungleichung

$$w_2^2 \leq w_0 \cdot w_4.$$

14. (siehe [Har99]) Sei $f = X_1^4 X_2^2 X_3^2 + X_2^4 X_1^2 X_3^2 + X_3^4 X_1^2 X_2^2$. Dann ist $f \in \mathcal{P}_{3,8}$ und führt auf die triviale Ungleichung

$$w_4 \cdot w_2^2 \geq 0.$$

15. (siehe [Har99]) Sei $f_t = (X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + t(X_1^2 X_2^2 + X_1^2 X_3^2 + X_2^2 X_3^2))^2$, $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $f_t \in \mathcal{P}_{3,8}$ und führt auf die Ungleichung

$$w_0^2 \cdot w_8 + 4t w_0 \cdot w_2 \cdot w_6 + (t^2+2) w_0 \cdot w_4^2 + 2t(t+1) w_4 \cdot w_2^2 \geq 0.$$

16. (siehe [Har99])Sei

$$\begin{aligned} f_u = &(2X_1^4 - X_2^4 - X_3^4 - (u+1)(X_1^2 X_2^2 + X_1^2 X_3^2 - 2X_2^2 X_3^2))^2 \\ &+ (2X_2^4 - X_3^4 - X_1^4 - (u+1)(X_2^2 X_3^2 + X_2^2 X_1^2 - 2X_3^2 X_1^2))^2 \\ &+ (2X_3^4 - X_2^4 - X_1^4 - (u+1)(X_3^2 X_2^2 + X_3^2 X_1^2 - 2X_2^2 X_1^2))^2, \ u \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dann ist $f_u \in \mathcal{P}_{3,8}$ und führt auf die Ungleichung

$$w_0^2 \cdot w_8 - (u+1) 2 w_0 \cdot w_6 \cdot w_2 + (u^2+2u) w_0 \cdot w_4^2 + (1-u^2) 2 w_4 \cdot w_2^2 \geq 0.$$

17. (siehe [Go14], S.90) Sei

$$\begin{aligned} f_v = &\sum_{i=1}^4 X_i^8 - \frac{2}{3}(v+1)\sum_{i\neq j} X_i^6 X_j^2 + \frac{2}{3}(2v-1)\sum_{1\leq i<j\leq 4} X_i^4 X_j^4 \\ &+ \left(\frac{1}{3}v^2+1\right) \sum_{1\leq i\neq j\neq k\leq 4} X_i^4 X_j^2 X_k^2 - 4(v^2+1) X_i^2 X_j^2 X_k^2 X_l^2, \ v = 0,2,3,4,5. \end{aligned}$$

Dann ist $f_v \in \mathcal{P}_{4,8}$ und korrespondiert zu der Ungleichung

$$w_8 \cdot w_0^3 - 2(v+1) w_6 \cdot w_2 \cdot w_0^2 + (2v-1) w_4^2 \cdot w_0^2 + (v^2+3) w_4 \cdot w_2^2 \cdot w_0 - (v^2+1) w_2^4 \geq 0, v = 0,2,3,4,5.$$

18. (siehe [CLR91], S.40) Die Formen $\Gamma_d = X_1^{d-2}(X_1 - X_2)(X_1 - X_3) + X_2^{d-2}(X_2 - X_1)(X_2 - X_3) + X_3^{d-2}(X_3 - X_1)(X_3 - X_2)$ heißen Schurformen. Für $d \equiv 0 \pmod 2$ ist $\Gamma_d \in \mathcal{P}_{3,d}$ und Γ_d führt auf die Ungleichung

$$w_0^2 \cdot w_d + w_{d-2} \cdot w_1^2 \geq 2 w_{d-1} \cdot w_1 \cdot w_0 \Leftrightarrow w_0 \underbrace{(w_0 \cdot w_d - w_{d-1} \cdot w_1)}_{\geq 0} + w_1 (w_{d-2} \cdot w_1 - w_{d-1} \cdot w_0) \geq 0.$$

Hier ergeben sich neue Zusammenhänge. Es ist nicht klar, dass der zweite Summand der rechten Ungleichung nichtnegativ ist.

Literaturverzeichnis

[AF+95] Alon, Noga; Feige, Uriel; Wigderson, Avi; Zuckerman, David: *Derandomized graph products.* Computional Complexity, 5(1): S. 60–75, 1995

[Bar02] Barvinok, Alexander: *A course in convexity.* volume 54. AMS Bookstore, 2002

[BR65] Blakley, George R.; Roy, Prabir: *A Hölder type inequality for symmetric matrices with nonnegative entries.* Proceedings of the American Mathematical Society, 16(6): S. 1244–1245, 1965

[BCR98] Bochnak, Jacek; Coste, Michel; Roy, Marie-Pranroise: *Real algebraic geometry.* Ergeb.Math. 36, Springer, 1998

[CLR87] Choi, Man-Duen; Lam, Tsit Yuen; Reznick, Bruce: *Even symmetric sextics.* Math. Z. 195, S. 559-580, 1987

[CLR91] Choi, Man-Duen; Lam, Tsit Yuen; Reznick, Bruce: *Positive sextics and Schur's inequalities.* Journal of Algebra, Volume 141, Issue 1, 1991

[Da10] Davidek, Ondrej: *One example of application of sum of squares problem in geometry.* South Bohemia Mathematical Letters Volume 18, No. 1, 1-16, 2010

[Die00] Diestel, Reinhard: *Graphentheorie.* Elektronische Ausgabe, 2000

[DG03] Dress, Andreas ; Gutman, Ivan: *The number of walks in a graph.* Applied Mathematics Letters, 16(3): S. 389–393, 2003

[ES82] Erdös, Paul; Simonovits, Miklós: *Compactness results in extremal graph theory.* Combinatorica, 2(3): S. 275–288, 1982

[FKP01] Feige, Uriel; Kortsarz, Guy; Peleg, David: *The dense k-subgraph problem.* Algorithmica, 29(3): S. 410–421, 2001

[Gant59] Gantmacher, Felix R.: *Applications of the theory of matrices.* Interscience, New York, 1959

[Gha12] Ghasemi, Mehdi: *Polynomial optimization and the moment problem.* Thesis, University of Saskatchewan, 2012

[Go14] Goel, Charu. *Extension of Hilbert's 1888 theorem to even symmetric forms.* Dissertation, Universität Konstanz, 2014

[Har99] Harris, William R.: *Real even symmetric ternary forms.* Journal of Algebra 222, Nr.1, 1999

[Haz90] Hazewinkel, Michiel: *Encyclopedia of mathematics. Band 6.* 1. Aufl. Springer Verlag, Seiten: X, 546, 1990

[HK+12] Hemmecke, Raymond; Kosub, Sven; Mayr, Ernst W.; Täubig, Hanjo; Weihmann, Jeremias: *Inequalities for the number of walks in graphs.* In Proceedings of the 9th Meeting on Analytic Algorithmics and Combinatorics (ANALCO'12). SIAM, S. 26–39, 2012

[Hur91] Hurwitz, Adolf: *Über den Vergleich des arithmetischen und des geometrischen Mittels.* J. Reine Angew. Math., 108:266268, 1891

[IlD15] Iliman, Sadik; De Wolff, Timo: *Amoebas, nonnegative polynomials and sums of squares supported on circuits.* arXiv:1402.0462v3 [math.AG], 2015

[Kos05] Kosub, Sven: *Local Density. In: Ulrik Brandes, Thomas Erlebach.* Network analysis-methodological foundations, Band 3418 der Lecture Notes in Computer Science, Kap. 6, S. 112-142. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[Kos08] Kosub, Sven: *persönliche Notizen.* 2008

[LM+84] Lagarias, Jeffrey C. ; Mazo, James E. ; Shepp, Lawrence A. ; McKay, Brendan D.: *An inequality for walks in a graph.* SIAM Review, 26(4): S. 580– 582, 1984

[Ma08] Marshall, Murray: *Positive polynomials and sums of squares.* AMS Math. Surveys and Monographs, Vol.146(American Mathematical Society, Providence, RI), 2008

[Rez87] Reznick, Bruce: *A quantitative version of Hurwitz' theorem on the arithmetic-geometric inequality.* J. Reine Angew. Math., 377, S. 108-112, 1987

[Rez89] Reznick, Bruce: *Forms derived from the arithmetic-geometric inequality.* Math.Ann. 283, S. 431-464, 1989

[Rez00] Reznick,Bruce: *Some concrete aspects of Hilbert's 17th problem.* Contemp. Math., vol. 253, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000

[Ri15] Riener, Cordian: *Symmetric semi-algebraic sets and non-negativity of symmetric polynomials* . arXiv:1409.0699v2, 2015

[SS13] Scheja, Günter; Storch, Uwe *Lehrbuch der Algebra, Teil 2.* Springer Verlag, 2013

[Sch12] Schweighofer, Markus: *Reelle algebraische Geometrie 1.* Vorlesung, WS12/13, Universität Konstanz

[Ste07] Steger, Angelika: *Diskrete Strukturen. Band 1. Kombinatorik-Graphentheorie-Algebra.* 2. Aufl. Springer Verlag, 2007

[Ti03] Timofte, Vlad: *On the positivity of symmetric polynomial functions. Part 1: General results.* J.Math Anal.Appl. 284, 174-190, 2003

[Täu15] Täubig, Hanjo: *Inequalities for matrix powers and the number of walks in graphs.* Habilitationsschrift, Institut für Informatik, TU München, 2015

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Es wurden keine anderen als die angegebenen Quellen und Hinweise verwendet.

Die vorliegende Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Konstanz, der 18.04.2016

Nadja Willenborg