机器学习
Machine learning

第七章 降维与特征选择
Feature Reduction & Selection

授课人：周晓飞
zhouxiaofei@iie.ac.cn
2021-11-19

第七章 降维与特征选择

7.1 概述

7.2 特征选择

7.3 特征提取

特征提取

特征提取问题

特征变换：

$$y=W(x)$$

x: D维→y: d维；　　$D>>d$

优点：

- 数据更紧致的压缩
- 优化预测性能
- 加快学习速度

应用领域广：模式识别、图像处理、信号处理、数据压缩、微波、雷达、…

特征提取

特征提取问题

不同的应用问题会有不同的特征提取研究问题：

例如：

图像：SIFT 特征、纹理特征

微波：频段、多普勒

文本：情感极性特征、依存关系

语音：音色、饱和度、爆破音

…

本讲从数据压缩表示和机器学习数据处理的角度

特征提取

特征提取问题

本章讲授的特征提取方法

- **线性变换**

  方法 1：主成分分析（PCA）

  方法 2：线性鉴别分析（LDA）

- **非线性变换**

  方法 3：核方法的特征提取 KPCA、KFDA

  方法 4：流行学习

  方法 5：非负矩阵分解

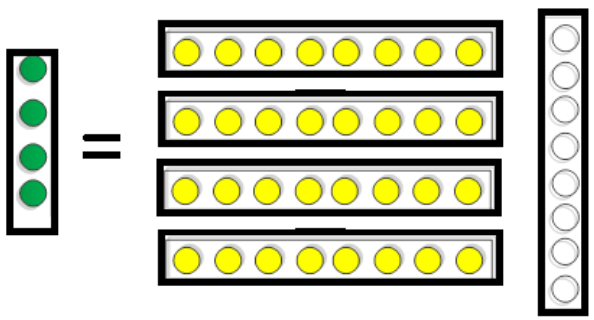
特征提取

线性变换

线性变换的直观表示：

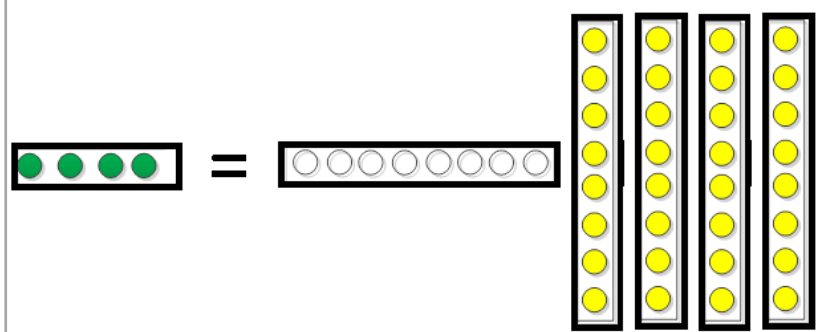
$(x, y, w$ 为列向量$)$，W是$D\times d$维 $W=(w_1,w_2,...,w_d)$

$$y=W^T x$$



或者

$$y^T=x^T W$$



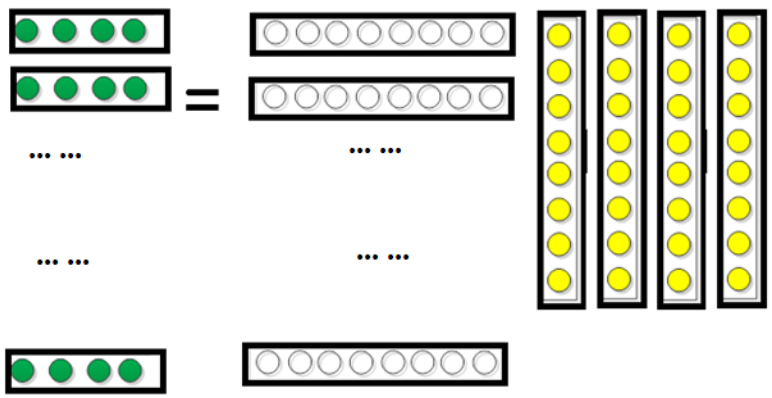
特征提取

线性变换

特征提取目标：学习变换矩阵

给定 $X=(x_1,x_2,...,x_n)^T$，通过某种降维准则，学习变换矩阵 $W=(w_1,w_2,...,w_d)$。

$L=XW$



维度：$(N\times d)=(N\times D)\cdot(D\times d)$

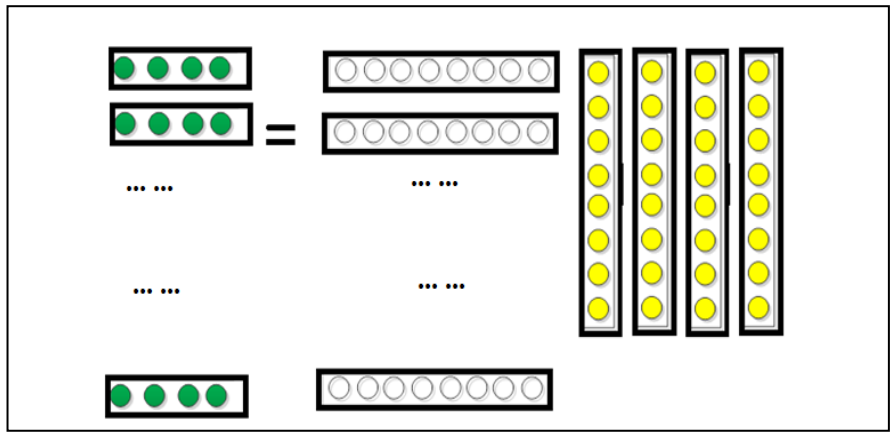
W 是 d 个基向量，向量 x 被映射到基向量线性张成的子空间内。

特征提取

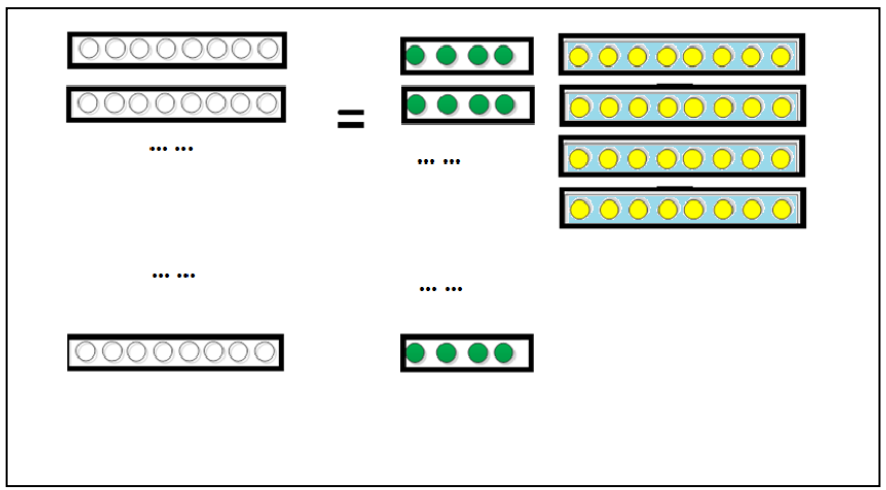
线性变换

常见的两种降维表示途径：

- 投影： $L=XW$



- 矩阵分解：低秩表示 $X=LR$



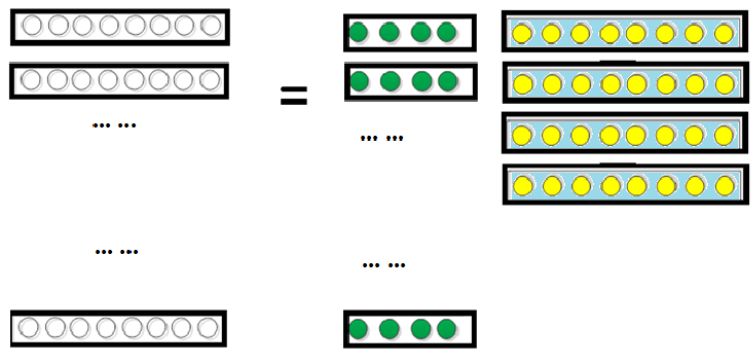
思考 1：矩阵分解 $X=LR$ 的等号一定存在吗？

特征提取

线性变换

思考 1：矩阵分解 $X = LR$ 的等号一定存在吗？

至少要 rank(X)=rank(L)=rank(R)



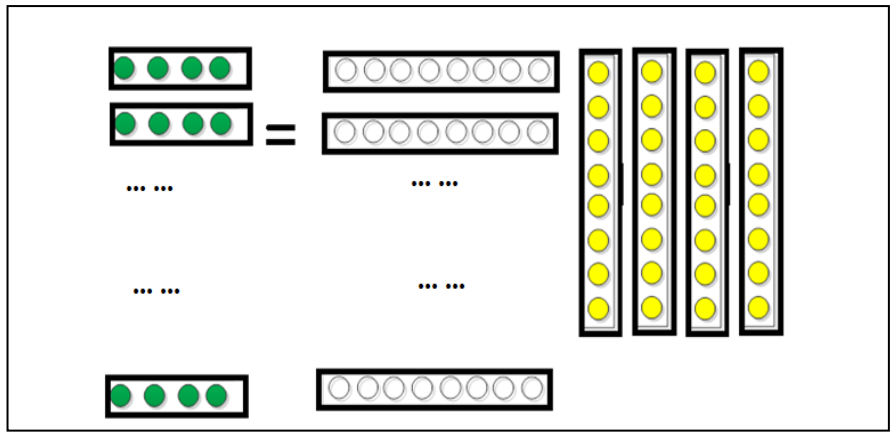
特征提取

线性变换

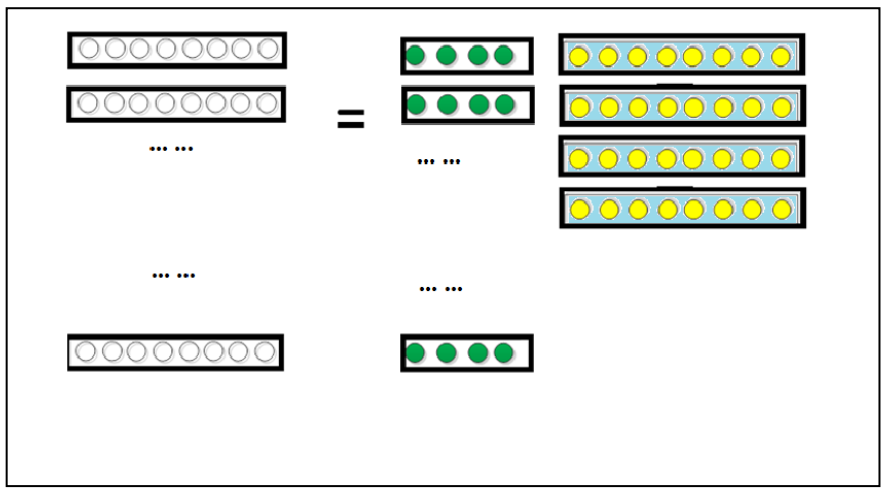
思考 2：如果 $X = LR$ 成立，

两种低维表示 L 什么情况等价？

$L = XW$



$X = LR$

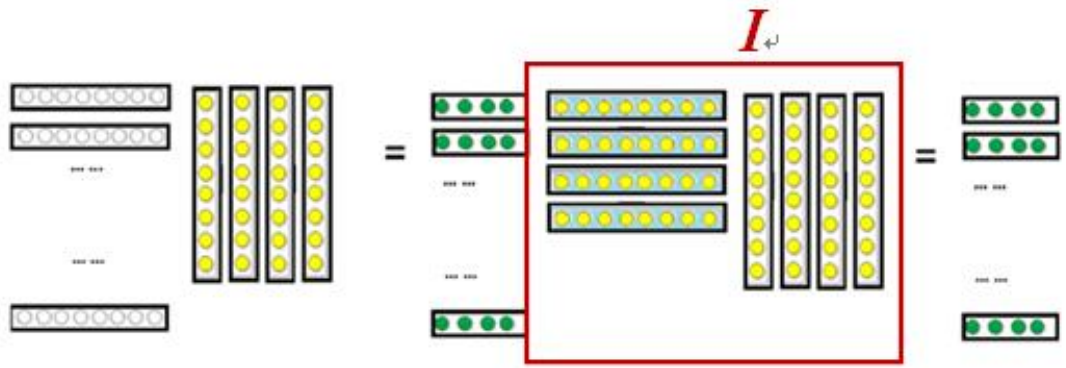


特征提取

线性变换

如果 $X=LR$ 成立，式子两边同时右乘 W： $XW=LRW$

当 R 行满秩、W 列满秩，且当 $RW=I$ (即 $W=R^{-1}$)时，$L=XW$.

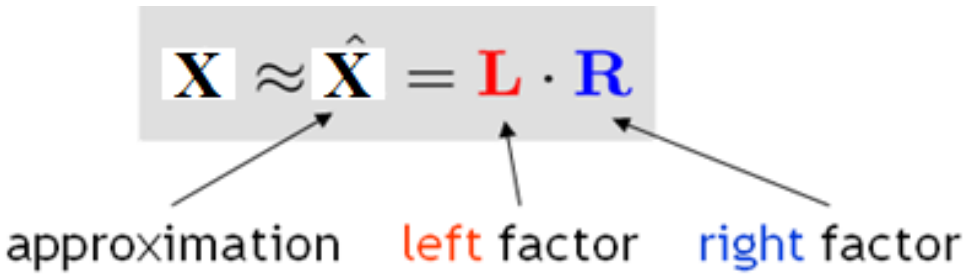


此时，两个式子的低维表示 L 等价。

特征提取

线性变换

无损压缩时为等号；通常会有损降维：

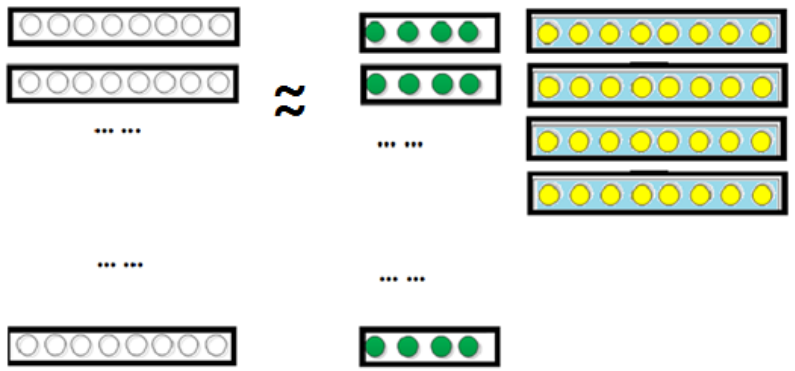


特征提取

主分量分析(PCA)

PCA 降维表示：

Pattern ≈ low-dimensional representation * **eigen patterns**



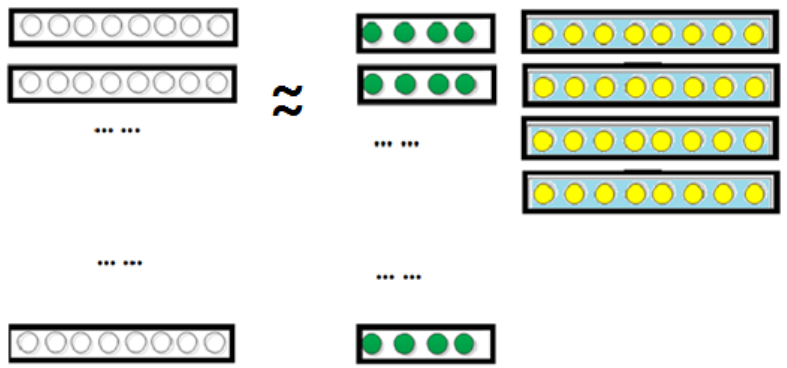
目标：学习 eigen pattern

特征提取

主分量分析(PCA)

目标函数：均方误差最小原则（求最优重构子空间）

$$\min_{L,R}\left\|X-LR\right\|^2 \qquad \text{s.t.}\ \ RR^T=I$$



特征提取

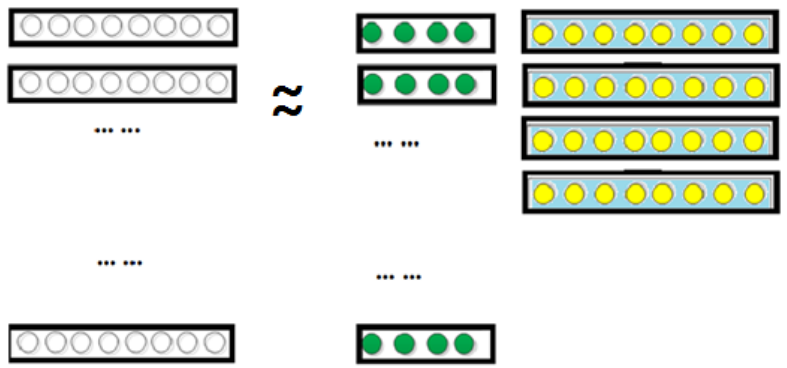
主分量分析(PCA)

目标函数：均方误差最小原则（求最优重构子空间）

$$\min_{L,R}\left\|X-LR\right\|^2 \qquad \text{s.t.}\ \ RR^T=I$$

如果将因子 R 由投影 W 表示，

$$RW=I,\quad RR^T=I \quad\Longrightarrow\quad R=W^T$$

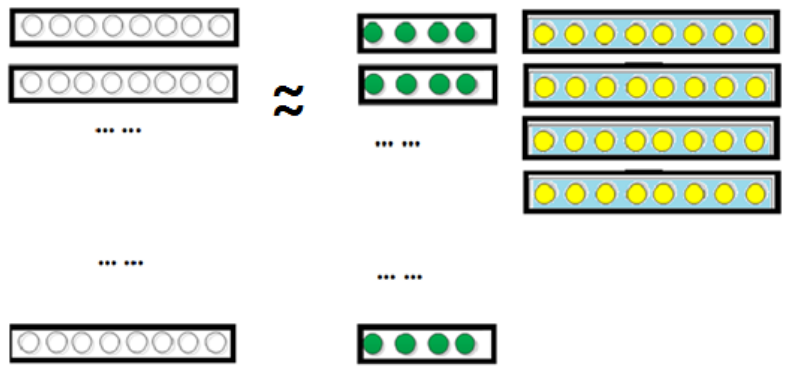


特征提取

主分量分析(PCA)

目标函数：均方误差最小原则（求最优重构子空间）

$$\min_{L,R}\|X-LR\|^2 \qquad \text{s.t. } RR^T=I$$



如果将因子 R 由投影 W 表示，

$$RW=I,\ RR^T=I \Longrightarrow R=W^T$$

推导 $RW=I$，

$$W=R^*(\text{右伪逆})=R^T(RR^T)^{-1}$$

$$W=R^T$$

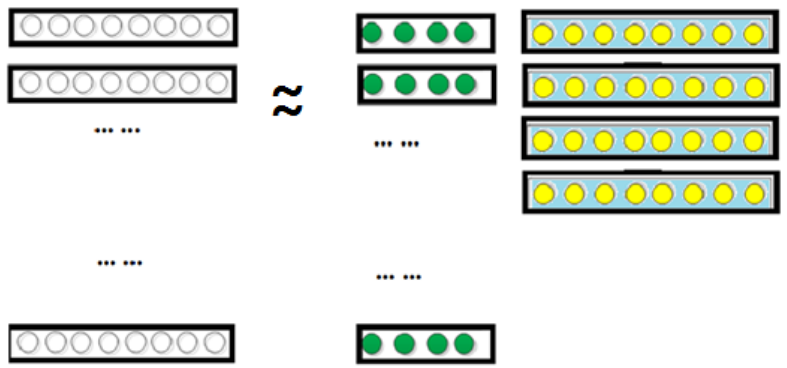
投影向量关系：$RR^T=I$，则 $W^TW=I$，$R=W^T$

主分量分析(PCA)

重写目标函数

$$\min_{L,W} \left\| X - LW^T \right\|^2 \qquad \text{s.t. } W^T W = I$$

$$\left\| X - LW^T \right\|^2 = \sum_i \left\| x_i^T - l_i^T W^T \right\|^2$$



求解该优化问题，可以先固定 W，

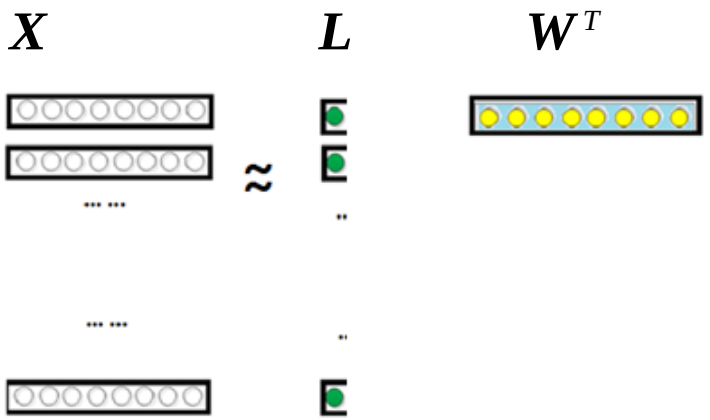
求出 L 关于 W 和 X 的表示，将该问题转化为只与 W 相关的优化问题。

特征提取

主分量分析(PCA)

如何理解重构?

一个投影方向情况:



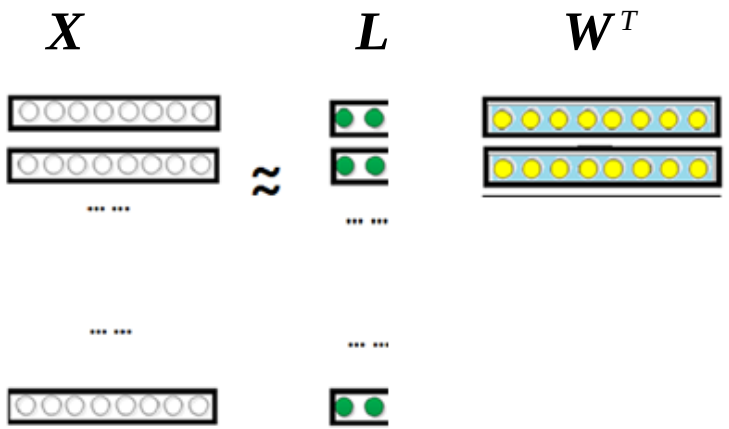
$$\left\| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{W}^T \right\|^2 = \sum_i \left\| \boldsymbol{x}_i^T - \boldsymbol{l}_i^T \boldsymbol{W}^T \right\|^2$$

特征提取

主分量分析(PCA)

如何理解重构?

2 个投影方向情况:



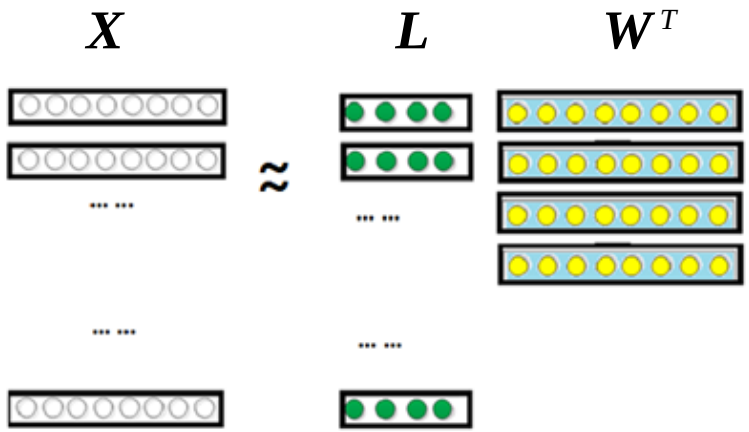
$$\left\| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{W}^T \right\|^2 = \sum_i \left\| \boldsymbol{x}_i^T - \boldsymbol{l}_i^T \boldsymbol{W}^T \right\|^2$$

特征提取

主分量分析(PCA)

如何理解重构?

多个投影方向情况:

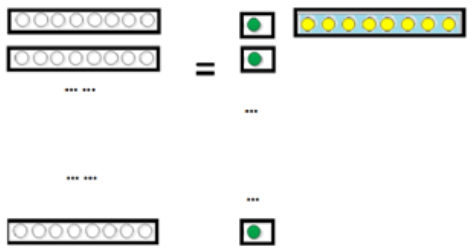


$$\left\| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{W}^T \right\|^2 = \sum_i \left\| \boldsymbol{x}_i^T - \boldsymbol{l}_i{}^T \boldsymbol{W}^T \right\|^2$$

特征提取

主分量分析(PCA)

一般性讨论一个投影方向情况：

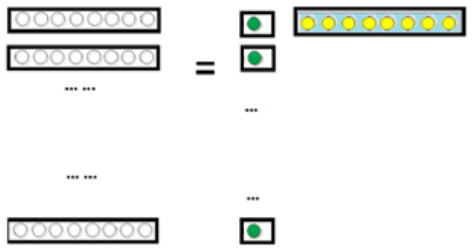


$$\sum_i \left\| \boldsymbol{x}_i^T - \boldsymbol{l}_i^T \boldsymbol{W}^T \right\|^2$$

特征提取

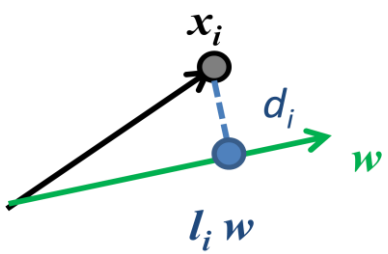
主分量分析(PCA)

一般性讨论一个投影方向情况：



$$\sum_i \left\| \boldsymbol{x}_i^T - \boldsymbol{l}_i^T \boldsymbol{W}^T \right\|^2$$

当固定 w 时，每个样本 $l_i = x_i^T w$ 时，重构误差 $\left\| x_i^T - l_i w^T \right\|^2$ 最小，



（几何比较直观，该结论也可以通过求解 $\min_{l_i} \left\| x_i^T - l_i w^T \right\|^2$ ）

特征提取

主分量分析(PCA)

目标函数的等价形式：

$$\min_{L,w}\sum_i\left\|\boldsymbol{x}_i^T-l_i\boldsymbol{w}^T\right\|^2=\min_{\boldsymbol{w}}\sum_i d_i^2$$

$$=\min_{\boldsymbol{w}}\sum_i\left(\left\|\boldsymbol{x}\right\|^2-\left\|l_i\boldsymbol{w}^T\right\|^2\right)=\max_{\boldsymbol{w}}\sum_i\left\|l_i\boldsymbol{w}^T\right\|^2$$

$$=\max_{\boldsymbol{w}}\sum_i l^2\left\|\boldsymbol{w}\right\|^2$$

$$=\max_{\boldsymbol{w}}\sum_i l^2$$

$$=\max_{\boldsymbol{w}}\sum_i\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{w} \quad\Rightarrow\quad \max_{\boldsymbol{w}}\sum_i\left\|\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x}_i\right\|^2$$

$$=\max_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{w}^T\left(\sum_i\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T\right)\boldsymbol{w}$$

特征提取

主分量分析(PCA)

目标函数的等价形式：

$$\min_{L,w}\sum_i \left\| x_i^T - l_i w^T \right\|^2 = \min_w \sum_i d_i^2$$

$$= \min_w \sum_i \left(\|x\|^2 - \|l_i w^T\|^2 \right) = \max_w \sum_i \|l_i w^T\|^2$$

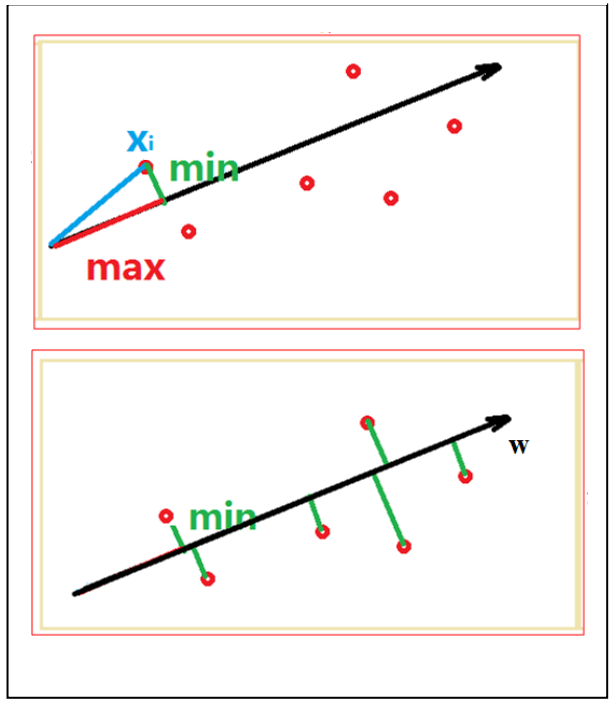
$$= \max_w \sum_i l^2 \|w\|^2$$

$$= \max_w \sum_i l^2$$

$$= \max_w \sum_i w^T x_i x_i^T w \quad \Rightarrow \quad \max_w \sum_i \|w^T x_i\|^2$$

$$= \max_w w^T \left(\sum_i x_i x_i^T \right) w$$

最小误差 等价于 最大投影



特征提取

主分量分析(PCA)

求解目标函数：

$$\max_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{S} \boldsymbol{w}$$

其中，$\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{w}=1$，$\boldsymbol{S}=E[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T] \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T = \frac{1}{n}\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X}$

- **Lagrange 函数：**

$$L=-\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{S} \boldsymbol{w}+\lambda(\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{w}-1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}}=0 \quad \Longrightarrow \quad (\boldsymbol{S}-\lambda I)\boldsymbol{w}=0$$

- **等价于求 $\boldsymbol{S}$ 的特征值和对应的特征向量：**

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{w}=\lambda \boldsymbol{w}$$

特征提取

主分量分析(PCA)

特征值对应目标函数值，最大特征值对应特征向量为最优方向：

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{w}=\lambda\boldsymbol{w} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{w}=\lambda$$

目标函数

$$\max_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{w}$$

特征提取

主分量分析(PCA)

S的特征值分解

$Sw_j = \lambda w_j,\ j=1,2,\ldots,m$，

相应的特征值：$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_j > \ldots > \lambda_m$，特征向量：$W = [w_1, w_2, \ldots w_j, \ldots w_m]$

- $SW = W\Lambda$，其中 $\Lambda = diag[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_m]$，

$$W^T W = I,\quad w_i^T w_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases},\quad W^T = W^{-1}$$

特征提取

主分量分析(PCA)

S的特征值分解

$Sw_j = \lambda w_j,\ j=1,2,...,m$，

相应的特征值：$\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_j > ... > \lambda_m$，特征向量：$W = [w_1, w_2, ... w_j, ... w_m]$

- $SW = W\Lambda$，其中 $\Lambda = diag[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_j, ..., \lambda_m]$，

$$W^T W = I,\quad w_i^T w_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases},\quad W^T = W^{-1}$$

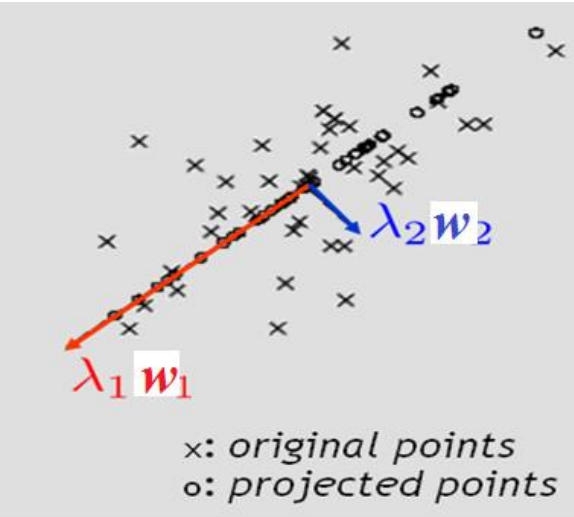
- $W^T SW = \Lambda$，$w_i^T S w_j = \begin{cases} \lambda_j, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

特征提取

主分量分析(PCA)

注意问题

- $\boldsymbol{S}=(1/N)\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$，（$1/N$）可以省略
- 特征值的意义：样本在 w 方向的投影平均值（或和）最大.

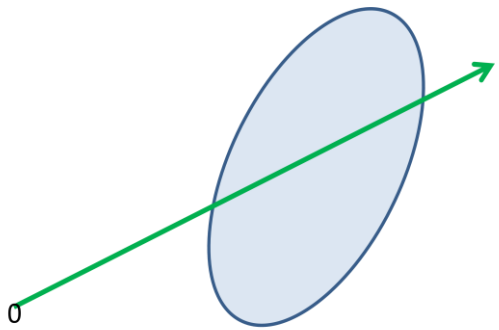


特征提取

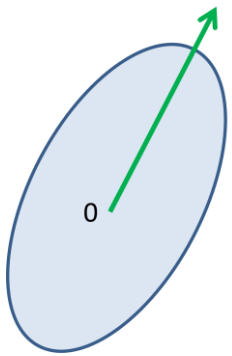
主分量分析(PCA)

标准化样本

$$x_i = x_i - \bar{x}, \qquad \bar{x} = (1/n)\sum_i x_i$$



未标准化



标准化

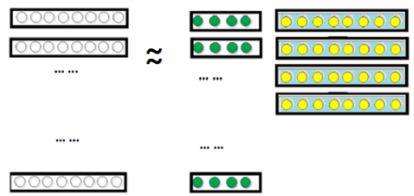
特征提取

主分量分析(PCA)

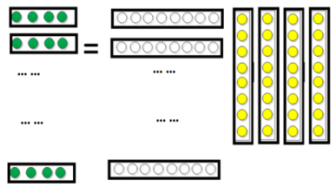
注意：特征方向也是特征模式（特征因子 R)

Pattern ≈ low-dimensional representation * **eigen patterns**

- 矩阵分解： $X = LR$



- 投影： $L = XW$



⇨

特征因子 R 就是 投影方向的转置

$$R = W^T$$

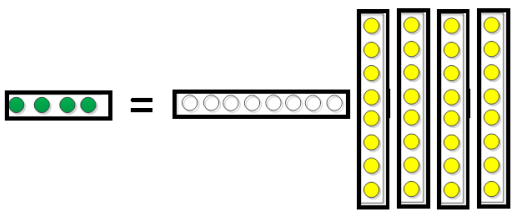
特征提取

主分量分析(PCA)

数据的变换、降维、主成分：

分解出 m 个特征方向

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^T &= [y_1, y_2, \ldots, y_m] \\ &= [\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{w}_m]^T, \\ &= \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{W} \end{aligned}$$



特征提取

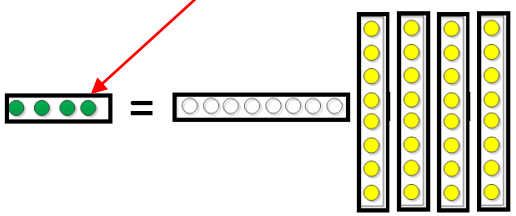
主分量分析(PCA)

数据的变换、降维、主成分：

分解出 m 个特征方向

$$\boldsymbol{y}^T = [y_1, y_2, \ldots, y_m] = [\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{w}_m]^T, = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{W}$$

主成分



特征提取

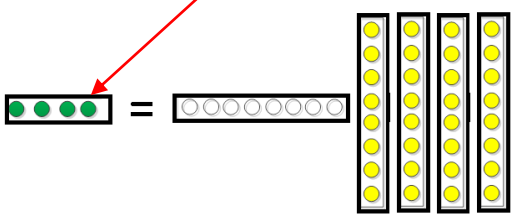
主分量分析(PCA)

数据的变换、降维、主成分：

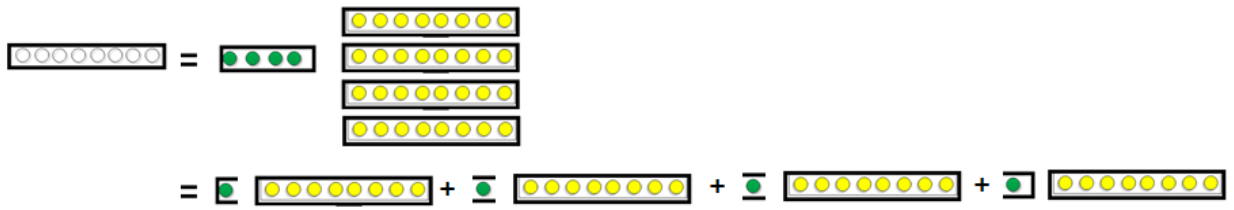
分解出 m 个特征方向

$$\boldsymbol{y}^T = [y_1, y_2, \ldots, y_m]$$
$$= [\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{w}_m]^T,$$
$$= \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{W}$$

主成分



$$\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{W}^T$$



特征提取

主分量分析(PCA)

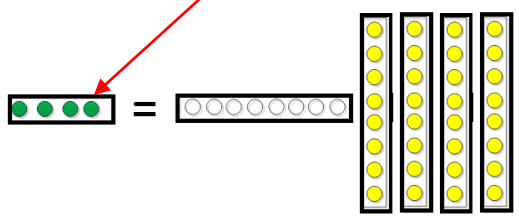
数据的变换、降维、主成分：

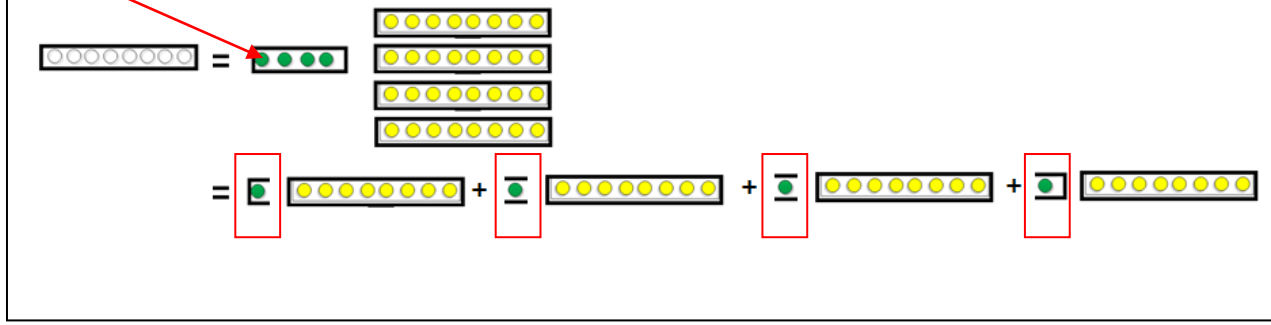
分解出 m 个特征方向

$$\boldsymbol{y}^T = [y_1, y_2, \ldots, y_m]$$
$$= [\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{w}_m]^T,$$
$$= \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{W}$$

主成分

$$\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{W}^T$$





特征提取

主分量分析(PCA)

PCA 算法流程

（1）标准化样本

$$x_i = x_i - \bar{x}, \qquad \bar{x} = (1/n)\sum_i x_i$$

（2）求样本的协方差矩阵 XX^T 特征值，并降排序 $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_m$，

对应非零特征向量： $w_1, w_2, \ldots, w_m$，

（4）变换矩阵

Case 1: 无损压缩 $W = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$

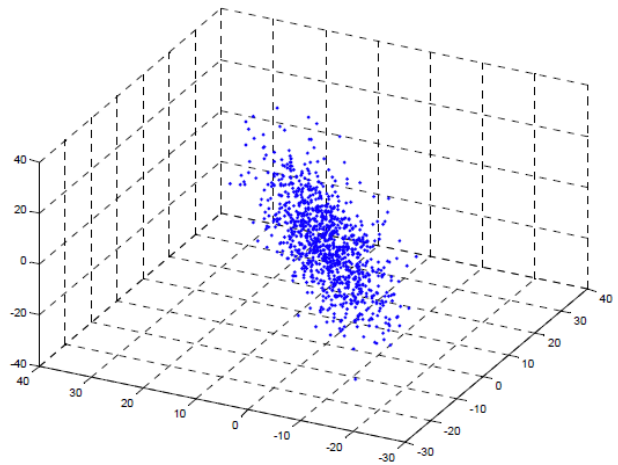
Case 2: 有损压缩 $W = (w_1, w_2, \ldots, w_l),\ l < m$

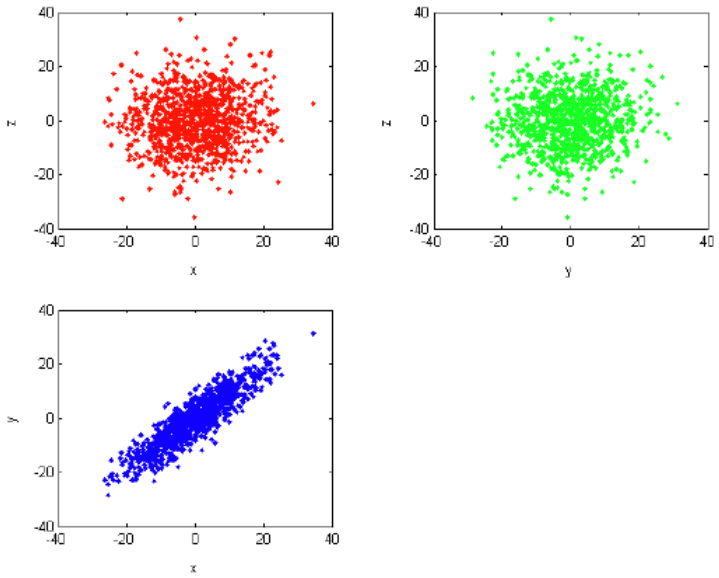
（5）降维表示

训练样本： $L = XW$　　新样本标准化后，降维表示： $y^T = x^T W$

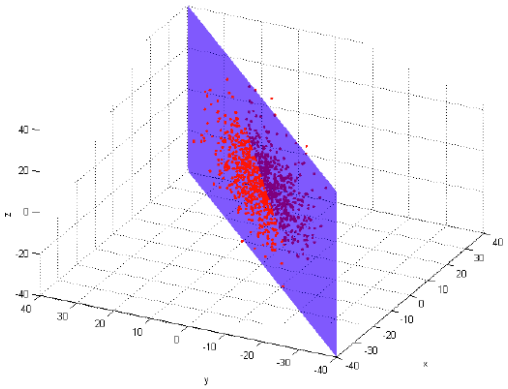
特征提取

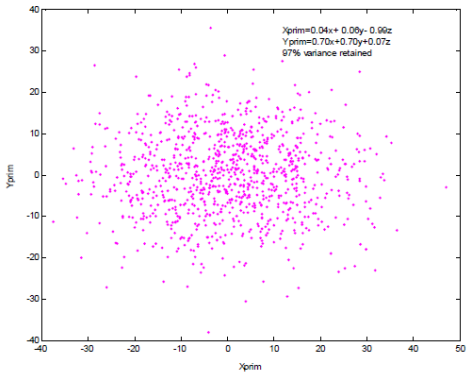
主分量分析(PCA)





特征选择



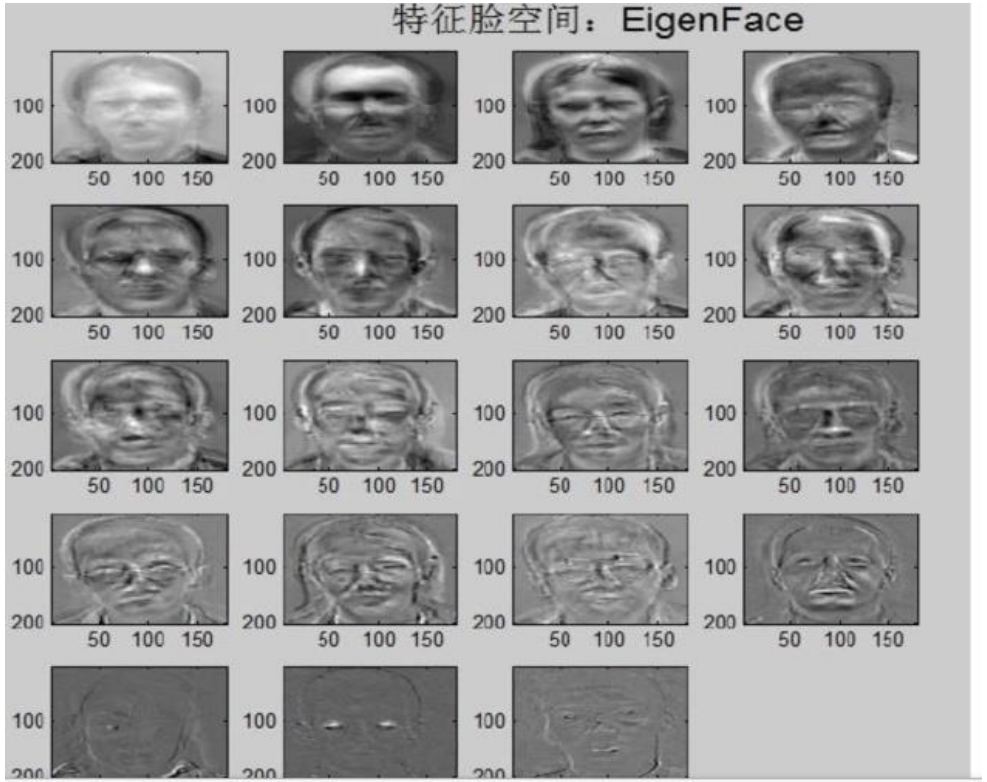


PCA

特征提取

主分量分析(PCA)

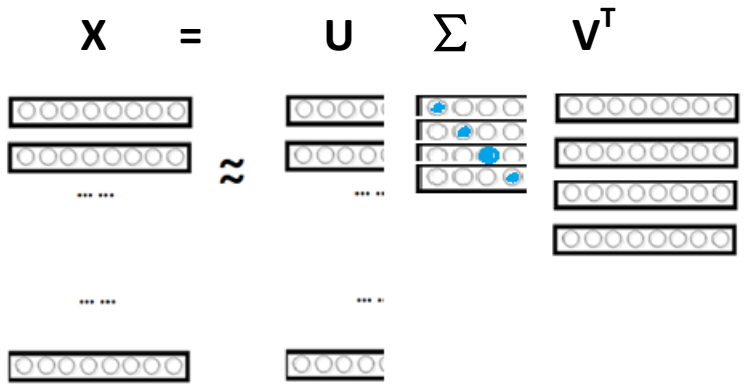
人脸识别例子



特征提取

主分量分析(PCA)

SVD 角度的 PCA：



X^TX 与 XX^T 特征值分解，具有相同的非零特征值 $\{\lambda_i\}$，

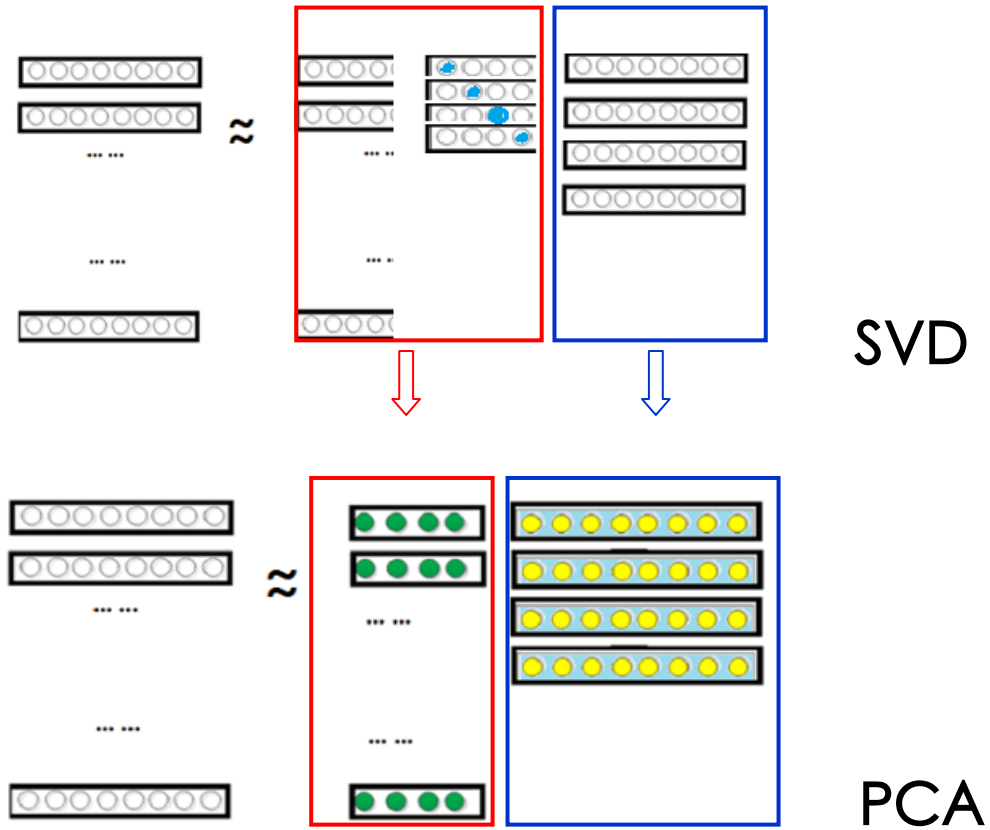
X^TX 的特征向量构成矩阵 V^T，XX^T 的特征向量构成矩阵 U

Σ仅在对角线上有奇异值，奇异值与特征值的关系：$\sqrt{\lambda_i}$

特征提取

主分量分析(PCA)

SVD 角度的 PCA：



特征提取

线性鉴别分析(LDA)

线性鉴别分析的意义：

PCA 不能保证类别区分的有效性，**LDA** 特征的优点：类内最小、类间最大。

线性鉴别准则（回顾第三章）：

$$J_F(w) = \frac{w^T S_b w}{w^T S_w w}$$

注：向量 ***w, x, m, y*** 都为列向量

特征提取

线性鉴别分析(LDA)

特征方向的提取：

$$S_w^{-1}S_b\boldsymbol{w}=\lambda\boldsymbol{w}$$

$\boldsymbol{w}$ 是 $S_w^{-1}S_b$ 的特征向量

设矩阵 $S_w^{-1}S_b$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_D$

且 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq...\geq\lambda_D$

选前 d 个特征值对应的特征向量 $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_d$

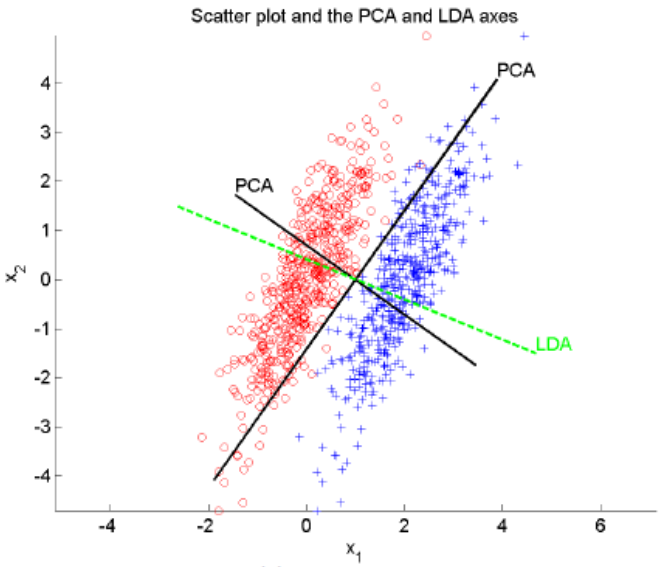
组成矩阵 $W=[\mu_1\ \mu_2\cdots\mu_d]$

（对于多类可以提取多个特征，如果只有两类，S_b 的秩为 1，每次只能提取一维特征）

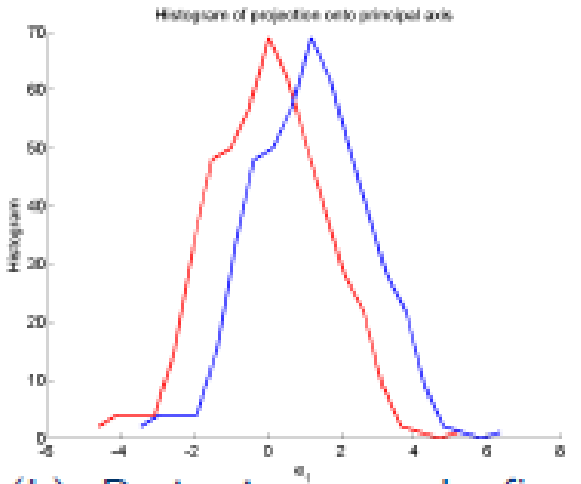
特征提取

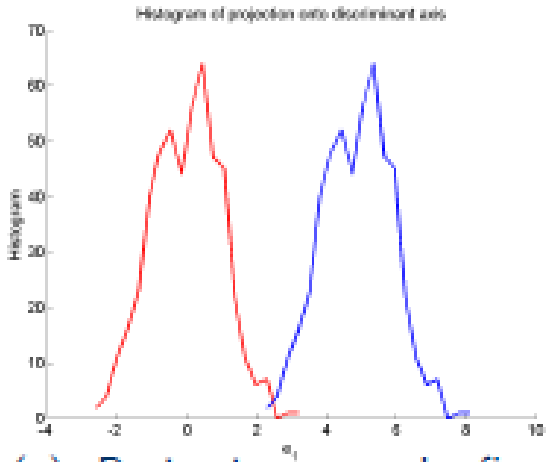
线性鉴别分析(LDA)

LDA 与 PCA 的比较



(a) Scatter plot.


(b) Projection onto the first PCA axis.


(c) Projection onto the first LDA axis.

特征提取

核主成分分析（KPCA）

高维映射后的线性变换

高维映射：$x \in X \quad \mapsto \quad \phi(x) \in H$，$\phi(x)$为列向量

变换矩阵：$\Phi = (\phi(x_1), \phi(x_2), ..., \phi(x_n))$

线性变换：$L = W^T \Phi$，$W = (w_1, w_2, ..., w_d)$

高维映射$\phi(x)$？线性变换W^T？

特征提取

核主成分分析（KPCA）

高维空间的主成分分析

$$Sw=\lambda w \quad \Rightarrow \quad \Phi\Phi^{\mathrm{T}}\Phi\alpha=\lambda\Phi\alpha$$

其中，$S=\sum_i \phi(x_i)\phi^T(x_i)=\Phi\Phi^{\mathrm{T}}$，$w=\sum_i \alpha_i\phi(x_i)=\Phi\alpha$，$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n)^T$

如何可以引入核函数?

$$\kappa(x_i,x_j)=\langle\phi(x_i),\phi(x_j)\rangle$$

核主成分分析（KPCA）

核函数引入到主成分分析

两边左乘Φ：

$$\Phi^T\Phi\Phi^T\Phi\alpha=\lambda\Phi^T\Phi\alpha$$

K K K

$$\Longrightarrow \quad K\alpha=\lambda\alpha$$

其中

$$K=\begin{pmatrix} k(x_1,x_1)k(x_1,x_2) & \cdots & k(x_1,x_n) \\ k(x_2,x_1)k(x_2,x_2) & \cdots & k(x_2,x_n) \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ k(x_n,x_1)k(x_n,x_2) & \cdots & k(x_n,x_n) \end{pmatrix}$$

核主成分分析（KPCA）

核主成分分析 KPCA 流程

(1) 求核矩阵 K 的特征值，对应特征向量 α 的问题：$K\alpha=\lambda\alpha$

(2) 核矩阵 K 的特征值降排序 $\lambda_1>\lambda_2>...>\lambda_m$，前 d 个特征值对应特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_d$

(3) 高维空间中的投影方向 $w_i=\Phi\alpha_i$ $\Lambda=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_d)$，投影矩阵 $W=\Phi\Lambda$

(4) 降维表示

训练集低维表示：

$$L=\Phi^T W=\Phi^T\Phi\Lambda=K\Lambda$$

新样本 x 的低维表示：

$$y=\phi(x)^T\Phi\Lambda=K(x,X)\Lambda,$$

其中 $K(x,X)=(k(x,x_1),k(x,x_2),...,k(x,x_n))$

特征提取

局部线性变换（LLE)

基本思想：LLE 方法是一种流形学习[Saul 01]，保持样本间的局部线性关系，整体实现非线性映射。

局部线性结构：

每一个样本与近邻 k 个样本的局部线性关系

$$\underset{w}{\arg\min}\ E_w=\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{x}_i-\sum_{j=1}^{k}w(i,j)\boldsymbol{x}_{ij}\right\|^2,\quad \sum_{j=1}^{k}w(i,j)=1$$

计算降维数据

$$\underset{Y}{\arg\min}E_Y=\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{y}_i-\sum_{j=1}^{n}w(i,j)\,\boldsymbol{y}_j\right\|^2$$

特征提取

局部线性变换（LLE)

算法流程:

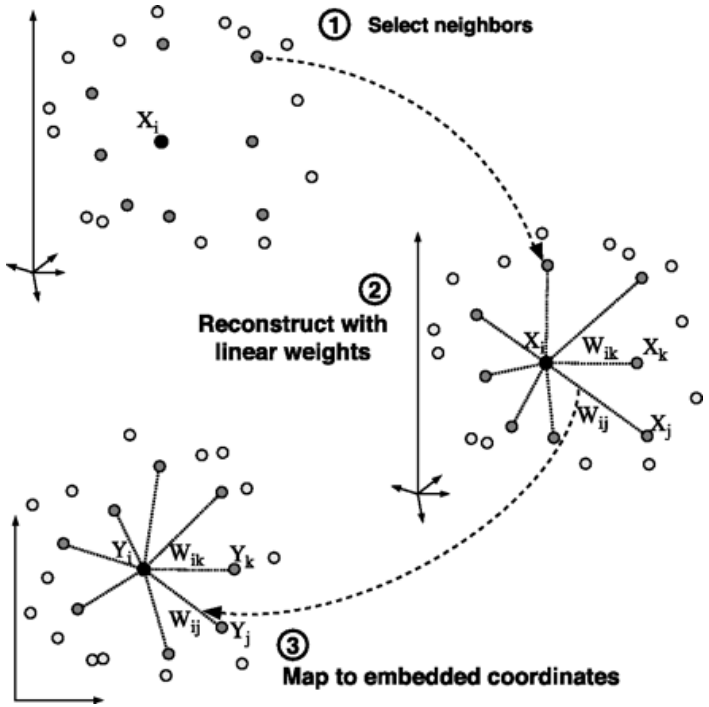
(1) 对每个点 x_i，收集它的最近邻 m 个实例；

(2) 求局部线性的权值 $W(i,j)$

$$\arg\min_{w} E_w = \sum_{i=1}^{n} \left\| \boldsymbol{x}_i - \sum_{j=1}^{k} w(i,j)\boldsymbol{x}_{ij} \right\|^2, \quad \sum_{j=1}^{k} w(i,j) = 1$$

(3) 根据求得的权值，计算更新的实例

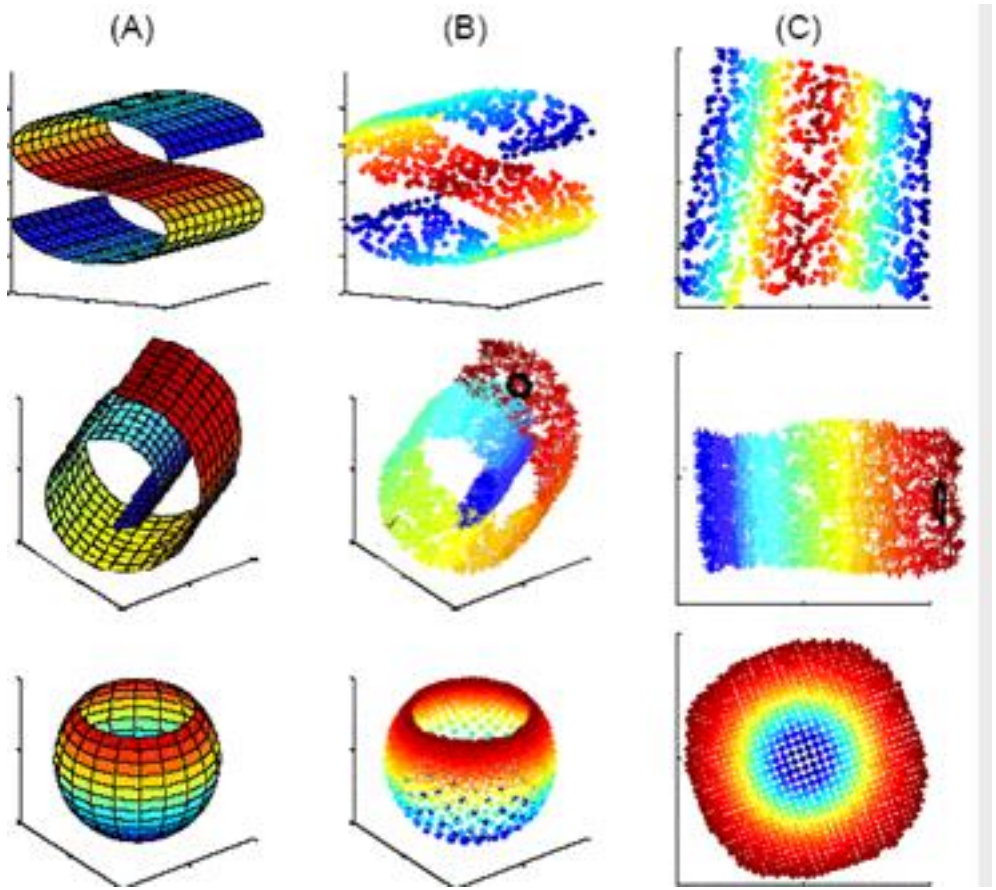
$$\arg\min_{Y} E_Y = \sum_{i=1}^{n} \left\| \boldsymbol{y}_i - \sum_{j=1} w(i,j)\boldsymbol{y}_j \right\|^2$$



- Performing an eigendecomposition of the matrix $(I - W)^T(I - W)$.
- Discarding the eigenvector that corresponds to the smallest eigenvalue.
- Taking the eigenvectors that correspond to the next (lower) eigenvalues. These yield the low-dimensional outputs $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

特征提取

局部线性变换（LLE）

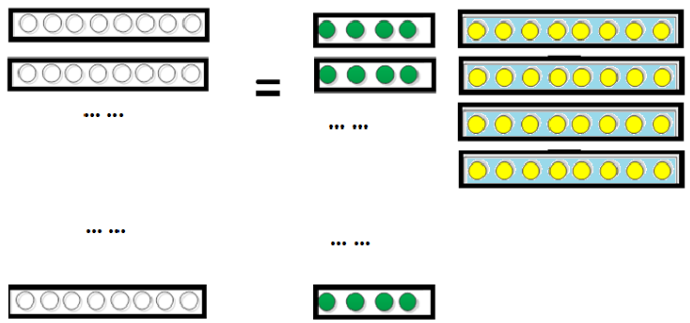


特征提取

非负矩阵分解

基本思想：通过矩阵分解，进行数据降维；分解后的矩阵为非负矩阵

非负矩阵分解： $X = L \cdot R$



特征提取

非负矩阵分解

不同的目标函数情况

（1）范数误差最小

$$\text{minimize} \quad \|V-WH\|_F \equiv \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}(V(i,j)+[WH](i,j))^2$$

$$subject\ to\ W(i,k)\geq 0, H(k,j)\geq 0 \quad \forall i,k,j$$

迭代规则

$$H_{au} \leftarrow H_{au}\frac{(W^TV)_{au}}{(W^TWH)_{au}}$$

$$W_{ia} \leftarrow W_{ia}\frac{(VH^T)_{ia}}{(WHH^T)_{ia}}$$

特征提取

非负矩阵分解

不同的目标函数情况

(2) K-L 误差

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\left(V(i,j)\ln\frac{V(i,j)}{[WH](i,j)} - V(i,j) + [WH](i,j)\right)$$

$$subject\ to\ W(i,k) \geq 0, H(k,j) \geq 0 \quad \forall i,k,j$$

迭代规则

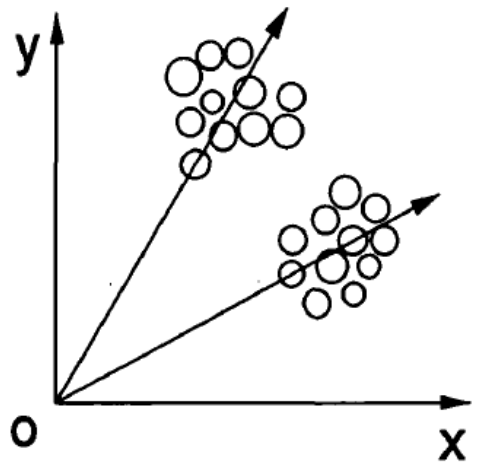
$$H_{au} \leftarrow H_{au}\frac{\sum_i W_{ia}V_{iu}/(WH)_{iu}}{\sum_k W_{ka}}$$

$$W_{ia} \leftarrow W_{ia}\frac{\sum_u W_{au}V_{iu}/(WH)_{iu}}{\sum_l H_{al}}$$

非负矩阵分解

几何直观

由非负矩阵分解得到的基向量：



小 结

1. 掌握特征选择的基本框架
2. 掌握三种特征选择方法

   Filer，Wrapper，Embedded
3. 掌握经典的 PCA 特征提取方法；

参考文献

1. 周志华，机器学习，清华大学出版社，2016.
2. Duda, R.O. et al. Pattern classification. 2nd, 2003.
3. 边肇祺，张学工等编著，模式识别(第二版)，清华大学，1999。
4. Chris Bishop. Pattern recognition and Machine Learning. Springer, 2006.（PR&ML）