Lemke Howson 算法

背景知识

双矩阵博弈：有两个参与者$\{1,2\}$的博弈，收益矩阵分别为$A_{m\times n}, B_{m\times n}$.

当参与者$1,2$分别采取纯策略i,j时，效用分别为$A_{i,j}$，$B_{i,j}$.

混合策略：纯策略的概率分布，为一向量。纯策略i可以看成混合策略$e_i=[0_1,\dots 0_{i-1},1,\dots,0]^\top$.

设参与人$1,2$的混合策略分别x,y，其收益分别为$x^\top Ay$，$x^\top By$.

混合策略的支撑集：混合策略x含有的系数非0的纯策略分量集合，即$Supp(x):=\{i:x_i>0\}$.

最优对策： 设参与者1的策略为x，参与者2的策略为y.

若$x^\top By\ge x^\top By'$ $(\forall y')$，则y是x的最优对策。

若$x^\top Ay\ge x'^\top Ay$ $(\forall x')$，则x是y的最优对策。

Nash均衡：若x,y互为最优对策，则(x,y)是博弈的Nash均衡。

无差异条件：若(x,y)是Nash均衡，则x支撑集中纯策略都是y的最优对策，反之亦然。

非退化的双矩阵博弈：对参与者1的任意策略x，若y是其最优对策，则$|Supp(y)|\le|Supp(x)|$. 反之亦然。

算法思想

1. 将博弈双方的策略空间表达为两个超多面体。
2. 考虑两个超多面体顶点构成的图，确定Nash均衡点在其中的分布方式。
3. 按照Nash均衡点在其中的分布方式，在超多面体顶点图上沿边追踪求解。

策略空间的超多面体表示

设非退化的双矩阵博弈为$(A_{m\times n},B_{m\times n})$. (x,y)是Nash均衡，(v,u)为此均衡的效用。

由非退化条件：$|Supp(x)|=|Supp(y)|$.

由无差异条件，$\forall i\in Supp(x),(Ay)_i=\max_k(Ay)_k$，
$\forall j\in Supp(y),(x^\top B)_j=max_k(x^\top B)_k$.

因此，可以分别构造$m+1,n+1$维超多面体P,Q，使得所有的Nash均衡及其效用都可表示为这两个多面体的顶点对。

$$P=\{(u,x):x_i\ge 0,\sum_i x_i=1,x^\top B\le u\mathbf{1}^\top\}$$
$$Q=\{(v,y):y_j\ge 0,\sum_j y_j=1,Ay\le v\mathbf{1}\}$$

映射：$(u,x)\mapsto\frac{1}{u}x$，$(v,y)\mapsto\frac{1}{v}y$ 分别将P,Q变换为$\bar P,\bar Q$，即：

$$P=\{x:x_i\ge 0,x^\top B\le\mathbf{1}\};\ Q=\{y:Ay\le\mathbf{1},y_j\ge 0\}$$

对P，为约束条件$x_i\ge 0$赋予标号i，为约束条件$(x^\top B)_j\le 1$赋予标号$m+j$.

对Q，为约束条件$(Ay)_i\le 1$赋予标号i，为约束条件$y_j\le 0$赋予标号$m+j$.

（每个标号都代表其对应的超平面约束）

若x具有标号k，则x使得标号为k的约束等号成立。记x具有的标号集为$L(x)$.

$$M := \{1,2,\dots,m\}, N := \{m+1, m+1, \dots, m+n\}.$$

Nash均衡具有全部标号

定理：若$(x,y) \neq (0,0)$，则(x,y)是Nash均衡当且仅当$L(x) \cup L(y) = M \cup N$.

证明：由非退化条件$|L(x)| = m, |L(y)| = n$.

$\Rightarrow$：若$i \in L(x) \cap M$，即$x_i = 0$，i不在x支撑集中，则不是y的最优对策，即$(Ay)_i < 1$，$i \notin L(y)$
.

若$i \in L(x) \cap N$，即$(x^\top B)_{i-m} = 1$，$i-m$是x的最优对策，故而在y支撑集中，$y_{i-m} > 0$，$i \notin L(y)$.

对$i \in L(y)$同理.

$\Leftarrow$：满足$L(x) \cup L(y) = M \cup N$时，使用无差异条件可得$(x,y)$为Nash均衡。$\square$

Nash均衡成对出现

设G_1, G_2分别是$\bar{P}, \bar{Q}$的顶点和边构成的图，$G := G_1 \times G_2$.

定义$U_k := \{v \in V(G) : (M \cup N) - \{k\} \subseteq L(v)\}$，$k \in M \cup N$.

定理：U_k包括所有Nash均衡点和$(0,0)$，并且在U_k导出子图中

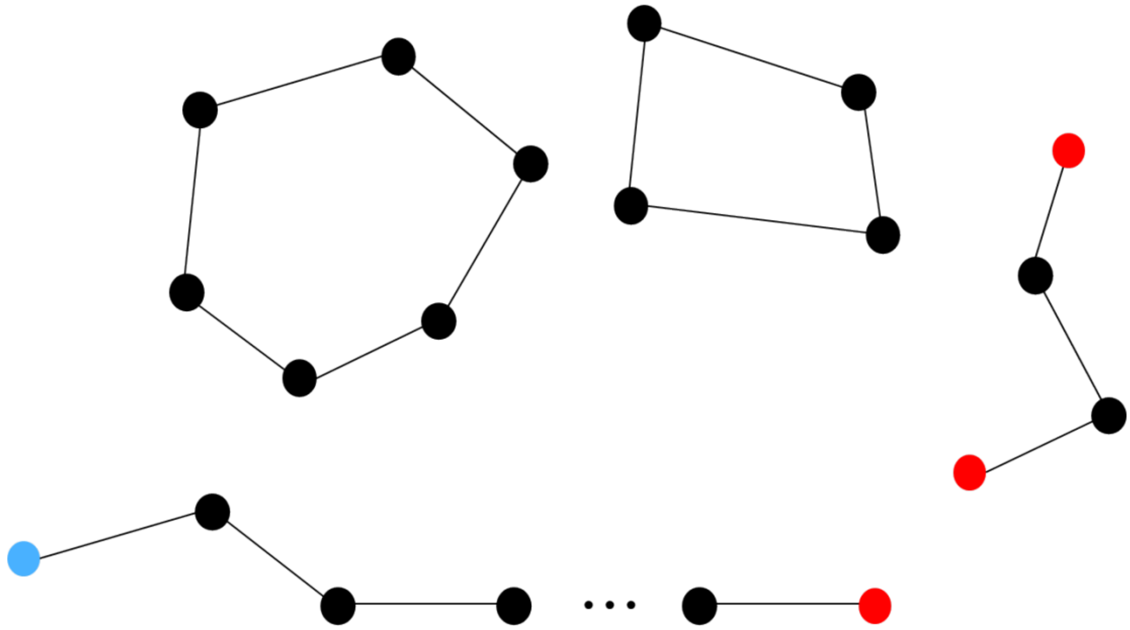
1. $(0,0)$和Nash均衡点的度数为1
2. 非$(0,0)$或Nash均衡点的度数为2

证明：1. Nash均衡(x,y)具有的标号满足$L(x) \cup L(y) = M \cup N$，且$x, y$标号不重复。则$k \in L(x), k \in L(y)$有且仅有一种情况成立。

不妨设$k \in L(x)$，则在$\bar{P}$中，仅有1条边在放弃k对应的超平面约束的同时保留其余约束。（非退化条件、简单超多面体）

2. 非Nash均衡(x,y)因在U_k中，则二者标号不含k，且必有一重复$l \in L(x) \cap L(y)$. 则在U_k导出子图中，有在$\bar{P}, \bar{Q}$中两种方式放弃l对应的超平面约束。$\square$

奇数定理：非退化双矩阵博弈的$Nash$均衡有奇数个。



算法描述

```
procedure Lemke_Howson(A,B,k):
    x, y := 0, 0;
    initial_k := k;
    Construct Polytope P,Q with A,B;
    while
        In P, drop label k, Pick up label k1;
        update x;
        if k1 = initial_k:
            break;
        In Q, drop label k1, Pick up label k2;
        update y;
        if k2 = initial_k:
            break;
        k := k2;
    end while
    Print x/sum(x), y/sum(y);
```

计算示例

类似单纯形法，使用Minimum test保证在超多面体上。

实质上是交替决策，逐步达到均衡。

$$Ay + r = \mathbf{1}, B^\top x + s = \mathbf{1}, \text{ and } x, y, r, s \text{ are nonnegative.}$$

$p1\backslash p2$	4	5	6
1	1,2	3,1	0,0
2	0,1	0,3	2,1
3	2,0	1,0	1,3

The initial tableaux are $r = \mathbf{1} - Ay$,

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 \quad -y_4 \quad -3y_5 && \text{[A1]} \\ r_2 &= 1 \quad\quad\quad\quad\quad -2y_6 && \text{[A2]} \\ r_3 &= 1 \quad -2y_4 \quad -y_5 \quad -y_6 && \text{[A3]} \end{aligned}$$

and $s = \mathbf{1} - B^\top x$,

$$\begin{aligned} s_4 &= 1 \quad -2x_1 \quad -x_2 && \text{[B1]} \\ s_5 &= 1 \quad -x_1 \quad -3x_2 && \text{[B2]} \\ s_6 &= 1 \quad\quad\quad -x_2 \quad -3x_3 && \text{[B3]} \end{aligned}$$

开源工具

```
> pip install nashpy
```

```python
import nashpy
game = nashpy.Game([[1,2],[2,1]], [[0,3],[4,5]])
game.lemke_howson(initial_dropped_label=0)
```