

基于混合梯度最小化Mumford-Shah模型的高维滤波算法

李波^{1,2} 苏卓^{2,4} 冷成财¹ 王胜法³ 罗笑南²

摘要 为解决高维滤波中存在的边缘特征模糊和细节保持问题,本文创新性提出了一种基于混合梯度最小化Mumford-Shah模型的平滑算法。其通过最小化包含梯度的 L_0, L_1 范数的正则化函数,实现边缘保持、局部光滑的滤波分解效果。从二维图像来看,梯度的 L_0 范数刻画了图像中非光滑像素的个数,最小化梯度的 L_0 范数可以实现图像分片同质的效果,即可对应Mumford-Shah模型中要求的边缘内部尽量均匀;梯度的 L_1 范数,即全变差项,刻画了图像中所有水平集的长度,最小化梯度的 L_1 范数可以实现控制图像边缘锐利度的目的,即Mumford-Shah模型中关于图像边缘保持的约束。由于Mumford-Shah模型具有鲁棒的信号平滑和边缘特征描述能力,因此在进行高维信号分解等处理时可以取得良好分离效果。实验结果表明,本文提出的混合梯度Mumford-shah模型在滤波过程中可以实现边缘保持和纹理平滑相统一的特性,获得优异的图像结构纹理分解效果,对多个图像应用的处理效果有显著的提升;而在三维网格数据上也获得良好的去噪性能。

关键词 边缘保持, 纹理平滑, 梯度最小化, Mumford-Shah模型

DOI 10.3724/SP.J.1004.2008.xxxxx

Gradient Minimized Mumford-Shah Model for High-Dimensional Filtering

Bo Li^{1,2} Zhuo Su^{2,4} Chengcai Leng¹ Shengfa Wang³ Xiaonan Luo²

Abstract To address the problems of edge blurring and detail preservation in the filtering, a novel high-dimensional filtering using gradient minimized Mumford-Shah model is proposed, which applies the minimization of L_0 and L_1 regularization terms to achieve edge-preserving and texture-smoothing. For 2D images, the L_0 norm describes the number of non-smooth pixels in the image, which is minimized to obtain the local flat region, that is, to make the filtered output as smooth as possible in Mumford-Shah model. The L_1 norm (total variation term) describes the length of all level-sets in the image, which is minimized to control the sharpness of the edges, that is the length constraint in Mumford-Shah model. Due to the robustness of Mumford-Shah model in edge-preserving and texture-smoothing, a sound component separation would be obtained in high-dimensional signal decomposition. In the experiments, we demonstrate our proposed high-dimensional filter can achieve both properties of edge-preserving and texture-smoothing. The characteristic is helpful for obtaining the perfect structure-texture separation, and optimizing the results in some specific visual applications.

Key words Edge-preserving, Texture-smoothing, Gradient Minimization, Mumford-Shah Model

边缘保持的图像平滑滤波,与传统低通滤波方式的区别在于,在进行图像平滑的同时,实现了图像中显著边缘的最大程度保持。由于其能够较好地

识别和保持图像中的边缘信息,因此,在图像结构纹理分解^[1],图像分割^[2,3,4],高动态范围图像处理^[5],图像细节增强以及非真实感渲染^[6]等方面得到广泛的应用。近年来,边缘保持滤波的概念被进一步推广到高维数据上,实现三维网格去噪,视频风格化等的高维处理及应用。

然而,当前主流的边缘保持滤波方法,对于局部区域上存在多尺度纹理的情况,在边缘保持与非边缘区域平滑二者的平衡上,难以得到理想的滤波结果。观察图1所示,采用基于双边滤波框架的自适应流型滤波,在纹理强烈区域,滤波后出现平滑不彻底的问题;而在强烈的边缘附近,则产生明显的光晕渗透现象。上述现象中所包含的问题,本质上是怎样得到有效的图像分解问题。下文先简单回顾该问题的过去及当前的研究发展状况。

传统的线性滤波器在实现光滑操作的同时容易造成边缘的模糊,因此更多的研究集中在边缘保持的非线性滤波研究上,包括基于偏微分方程的各向异性扩散^[7,8,9]、双边滤波器^[10,11,12]等

收稿日期 XXXX-XX-XX 录用日期 XXXX-XX-XX
Manuscript received Month Date, Year; accepted Month Date, Year

国家自然科学基金(61262050,61300083,61363049),广东省科技计划项目(No. 2012B010900009),广州市科技计划项目(No.2013J4300059)。

Supported by the National Science Fund of China (61262050,61300083,61363049), Science and Technology Project of Guangdong Province(2012B010900009) and Guangzhou(2013J4300059).

1. 数学与信息科学学院,南昌航空大学,南昌,330063 2. 中山大学国家数字家庭工程技术研究中心,数字家庭互动应用国家地方共建工程实验室,中山大学信息科学与技术学院,广州 510006 3. 软件学院,大连理工大学,大连,116024 4. 东莞中山大学研究院,广东省东莞市,523808.

1. School of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang, 330063. 2. The National Engineering Research Center of Digital Life, State-Province Joint Laboratory of Digital Home Interactive Applications, School of Information Science & Technology, Sun Yat-sen University, Guangzhou, 510006. 3. School of Software Technology, Dalian University of Technology, Dalian, 116024. 4. Institute of Dongguan - Sun Yat-sen University, Dongguan, 523808



图 1 一般的边缘保持滤波操作容易导致光晕和纹理不完全平滑的问题。(a)原始图像。(b)基于双边滤波框架的自适应流形边缘保持滤波结果^[16], 通过局部放大观察, 强烈边缘附近的光晕现象, 和纹理复杂区域的不完全平滑现象很明显。

Fig. 1 Traditional edge-preserving filter usually cause glow effect and non-smooth effect of textures. (a) original image, (b) the result of bilateral filter^[16], glow effect can be observed around the edge by local amplification.

等。Perona和Malik^[8]首次提出了通过非线性的各向异性扩散方程达到边缘保持的概念, 并定义了与图像梯度相关的扩散率函数和给出了散度算子的简化“半点”离散化显式格式。随后, Tomasi和Manduchi^[10]提出了以高斯核函数为基础的双边滤波模型, 分别构造以像素间的欧式距离为基础的空间域高斯核函数, 和以像素亮度差为基础的亮度域高斯核函数, 并将二者相乘, 从而得到对图像边缘敏感的非线性自适应滤波操作。但由于双边滤波的非线性形式, 直接构造空间滤波模版需要较大的计算代价。因此, 出现了一系列的改进算法。Paris和Durand^[13, 14]以信号处理的理论为基础, 提出了基于空间卷积策略的加速方法, 将 N 维双边滤波操作推广为 $N+1$ 维线性卷积, 同时结合采样策略来实现加速。Adams等人^[15]基于高斯核函数的可分离性, 采用高斯KD-树算法和数据结构, 实现了具有线性时间复杂度的高维滤波形式。最近, Gastal等人^[16]采用自适应流形的方式加速双边滤波算法的实现, 从而实现了实时的高维滤波效果。

虽然双边滤波框架下的方法具有几何结构简明的特点, 但由于高斯函数自身难以精确逼近锐利边缘的性质, 因此往往在锐利的边缘附近产生光晕渗透的现象, 如图1所示。为了克服该问题, Farbman等人^[17]提出了基于加权最小二乘法和多尺度层次分解的边缘保持平滑方法, 避免了双边滤波方法在多尺度分解处理时所出现的光晕问题。Subr等人^[18]将图像细节定义为局部极大值和极小值之间的振荡, 并在Farbman等人方法的基础上, 提出了在局部极值处理上的改进方法。Bhat等人^[19]将边缘保持平滑问题转变为在变分法框架下求解Screened Poisson方程问题, 提出基于FFT的方法进行直接求解。随后, 又进一步提

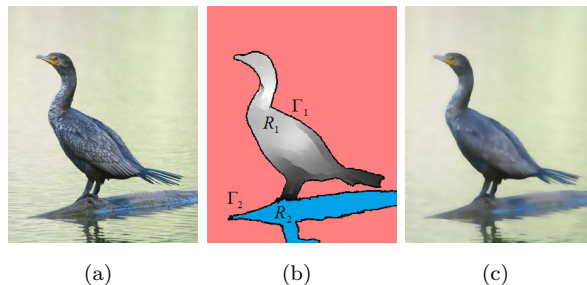


图 2 梯度混合最小化Mumford-Shah模型示意图。(a) 原始图像。(b) Mumford-Shah的区域分割示意图。(c) 基于梯度混合最小化Mumford-Shah模型的低频图像分解效果。如何获得理想的纹理平滑和边缘保持相统一的图像分解结果是本文的关键。

Fig. 2 Illustration of proposed Mumford-Shah model under the minimization of hybrid gradient. (a) original image, (b) the illustration of Mumford-Shah segmentation, (c) the result of proposed method based on hybrid gradient.

出了以梯度域处理为基础的最小二乘优化计算框架GradientShop^[20], 为处理图像和视频流提供了统一的方法。最近, Xu等人^[21]提出基于 L_0 范数的梯度最小化方法, 通过对边缘计数的方式, 达到边缘保持和区域分块平滑的效果。此外, Xu等人^[1]还采用了相对全变差模型, Su等人^[22, 23]采用联合滤波模式和局部全变差模型, 均利用边缘保持平滑的特性, 实现了图像结构和纹理的有效分解。

本文试图从区域分割的角度来研究高维数据的边缘保持平滑滤波。事实上, 在二维图像或三维模型情况下, 平滑滤波与基于区域的分割有着密切的联系, 著名的Mumford-Shah模型^[24]就是利用了图像结构的光滑性, 一是图像目标表面的平整性, 理想的情况下可以是单色或单灰度的; 二是目标轮廓的平滑, 即使目标形状复杂, 也可以用简单的外形来逼真表现, 通过构造包括图像平整性、轮廓光滑性的正则化能量函数, 最终实现图像的区域分割(如图2)。

借鉴Mumford-Shah模型的思想, 结合稀疏正则化梯度范数, 本文提出了一种新的边缘保持高维滤波算法, 通过最小化包含梯度的 L_0, L_1 范数的正则化函数, 从而实现边缘保持、局部平滑的滤波分解效果。本文算法的主要创新点和贡献如下:

(1) 提出了一种基于混合梯度最小化Mumford-Shah模型的边缘保持高维滤波算法, 该算法可以实现边缘保持与纹理平滑二者相统一的效果;

(2) 在Mumford-Shah模型框架的基础上引入最小化梯度的 L_0 和 L_1 范数约束项, 其中 L_0 范数可以实现图像分片平滑的效果, 而 L_1 范数可以实现控制图像边缘锐度的效果;

(3) 通过多个实验分析和主客观效果评价, 验

证本文提出的高维滤波算法在二维图像和三维几何模型处理和应用上的有效性。

文章结构：第一部分简要回顾了Mumford-Shah能量泛函模型；第二部分是本文的主要工作，提出了一种基于混合梯度最小化Mumford-Shah模型的高维滤波模型；第三部分对本文的非凸泛函模型给出了一种凸逼近的最优化求解算法；第四部分对本文提出的模型进行了实验分析和应用推广，并与现有主流滤波算法进行了比较。第五部分是对本文工作的总结和优缺点分析。

1 Mumford-Shah能量泛函模型

Mumford-Shah泛函模型^[24]是二十世纪80年代由D.Mumford和J.Shah提出的，在理论上是一类具有体积能量和低维测度的新的变分问题。假设记 Ω 为 R^2 的一个开集， $u_0(x, y)$ 为定义在 Ω 上的给定图像， Γ 为 $u_0(x, y)$ 在 Ω 上的不连续集合(即图像的边缘部分)；变量函数 $u(x, y)$ 为定义在 $\Omega \setminus S_u$ 上的图像。Mumford-Shah泛函可以通过以下最小化方程进行描述：

$$\min G(u) = \beta \int_{\Omega} |u(x, y) - u_0(x, y)|^2 dx dy + \alpha \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u(x, y)|^2 dx dy + \gamma H^1(S_u), \quad (1)$$

其中第一项为保真项，用来控制分割后图像的相似性；第二项为正则化项，保障分割后的图像在边缘内部应该具有一定的光滑性；第三项 $H^1(S_u)$ 表示一维的Hausdorff测度，描述了边缘的长度，长度项控制图像边缘的分数维粗糙度； $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ 。可以发现，Mumford-Shah模型前两项在保证相似性的前提下通过光滑正则化项一定程度上克服了噪声的影响，而同时长度项控制了边缘曲线的光顺程度，从而将图像的分割和去噪统一于模型之中，提高了分割的鲁棒性。

但由于Mumford-Shah模型中对图像中边缘等跳跃部分通过几何测度(Hausdorff测度)项来控制，这一要求本质上是现代数学中的一种典型的自由不连续问题，使得求取该数值逼近或数值解成为十分棘手的问题，也限制了该模型的推广应用^[25]。近年来，国外对基于Mumford-Shah模型的图像恢复和图像分割的研究，取得了不少的突破性成果，提出了许多简化模型及其快速数值解法^[26, 27]。2000年，Chan和Vese等人^[28]对Mumford-Shah泛函提出了更为简化的方法，即认为 u 可以由分片常数进行划分，从而提出了分片常数形式的Mumford-Shah泛函模型。该模型可形式化表达为，设 Γ 表示图像的边缘曲

线，令 $Length(\Gamma)$ 和 $Areainside(\Gamma)$ 分别表示边缘曲线 Γ 的长度以及边缘内部区域的面积，假设边缘内部和外部区域都是同质的，不妨再假设内部灰度值都为 c_1 ，外部灰度值为 c_2 ，那么简化的分片常数的Mumford-Shah模型可以表示为

$$\min_{c_1, c_2, \Gamma} F(c_1, c_2, \Gamma) = \alpha Length(\Gamma) + \beta Areainside(\Gamma) + \gamma_1 \int_{inside(\Gamma)} |u_0(x, y) - c_1|^2 dx dy + \gamma_2 \int_{outside(\Gamma)} |u_0(x, y) - c_2|^2 dx dy,$$

该简化模型将原始的Mumford-Shah模型限制在分片常值的区域上。在每一个连通区域上，最终图像的灰度值应接近每个连通区域像素的平均灰度值，因此，该模型也被称为最小划分问题(见图2)。

事实上，通过Mumford-Shah模型得到的图像 u 可以近似看作结构图像，即图像中景物表面的平滑性及边缘轮廓的锐利性，理想情况下，结构图像可以利用清晰锐利的边缘轮廓及其包围内的同质区域组成(如图2)；而残差图像 $u_0 - u$ 则可以看作是纹理图像，如周期性震荡特征。本文正是在Mumford-Shah模型的这种特性上，提出了一种基于梯度最小化Mumford-Shah模型的边缘保持高维滤波算法。

2 混合梯度最小化的Mumford-Shah模型

Mumford-Shah模型(1)从本质上来讲就是要寻找一条曲线 Γ ，使得位于曲线内部的区域尽量光滑，同时边缘曲线 Γ 尽量来的短。但由于M-S模型既包含了二维的面积约束，又有一维的长度(Hausdorff测度)约束，使得求解变得非常困难。本文从另外一个角度来考虑，不再引入一维的Hausdorff测度，而是直接利用二维图像的某种度量来对图像的边缘加以约束。如何选取适当的度量来描述M-S模型中的边缘光滑性及内部平坦性是本文的主要研究内容。

首先，关于图像边缘的光滑性，本文利用图像的全变差来度量。图像的全变差(Total Variation)定义为

$$TV(u) = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \phi dx : \phi \in C^1(\Omega), |\phi| < 1 \right\}. \quad (2)$$

全变差度量了图像信号振荡的整体幅度，既依赖于图像的变差幅度，也依赖于图像水平集(level set)的围线长度。设图像的边缘集合为 Γ ，假定 $\Gamma \in R^2$ 是一个Lebesgue可测集，并具

有Lipschitz边界,那么图像的边缘(围线)长度可以表示为 $P(\Gamma) = H^1(\partial\Gamma)$,其中 $\partial\Gamma$ 表示 Γ 的特征函数, H^1 为Hausdorff测度。根据联合面积公式,

$$TV(u) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X_\lambda u) d\lambda,$$

其中 X_λ 为图像的 λ 水平集,也就是说图像 u 的全变差等价于它的所有水平线的长度之和。从这个意义上说,约束图像的TV,就隐含了力求每个水平集的边界光滑。因此,我们利用全变差项来近似M-S模型中关于边界光滑的约束是合理的。

但又存在一个问题,由于没有引入一维的边界,如何来度量“边界内部的光滑性”? Xu等人^[21]在2011年提出了一种基于梯度 L_0 范数的图像编辑方法,通过极小化图像的梯度 L_0 范数可以实现图像的局部平滑,甚至局部同质(常值)的表示(如图3)。梯度的 L_0 范数定义如下:

$$|\nabla u|_0 = \#\{p | |\partial_x u_p| + |\partial_y u_p| \neq 0\}, \quad (3)$$

即图像中所有满足两个方向梯度中至少有一个不为零的像素的个数。经离散化后,即对于任意像素,如果它跟邻域像素灰度值如果相同,那么这一点的梯度 L_0 范数就为0,反之为1。最小化梯度的 L_0 范数一个最直观的作用就是将图像分解成局部同质(即像素值相同)的区域(见图3)。从这个意义上讲,利用梯度的 L_0 范数来度量图像边界内部的光滑性应该是合理的。

因此,综上所述,本文提出如下基于混合梯度最小化Mumford-Shah模型的滤波模型

$$\min |u - u_0|^2 + \lambda |\nabla u|_1 + \mu |\nabla u|_0, \quad (4)$$

其中 $|u - u_0|^2$ 刻画了相似性; $|\nabla u|_1$ 刻画了图像边界的光滑性; $|\nabla u|_0$ 刻画了图像边界内部的光滑性,可以将图像尽量分成分片常值区域。与Xu等人^[21]的方法相比,从公式上来看,我们仅仅增加了一项全变差正则项,但思考的角度不同。本文算法通过加入全变差正则化项,既保证了图像边界的光滑性,同时由于全变差的大尺度性,对于受到噪声干扰的图像,光滑的效果基本可以克服噪声的干扰取得鲁棒的效果。所以,与Xu等人^[21]的方法相比,本文算法更加鲁棒,而且边界和细节保持效果更好,详见第四部分实验结果。

3 数值算法

通过梯度 L_0 范数的定义(3),我们可以看到 $|\nabla u|_0$ 是一个非凸的泛函,而且没有一个显式的表达式,直接优化非常困难。因此,本文拟提出一种 $|\nabla u|_0$ 的 L_1 范数凸逼近。令 $g(\nabla u) = u_x^2 + u_y^2$,那



(a) (b)

么根据 $|\nabla u|_0$ 的定义(3),有

$$|\nabla u|_0 \simeq |g(\nabla u)|_1 = |u_x^2 + u_y^2|_1.$$

从而问题(4)就转化为

$$\min_u |u - u_0|^2 + \lambda |\nabla u|_1 + \mu |g(\nabla u)|_1. \quad (5)$$

优化问题(5)是一个凸问题,解的存在性是可以保证的。具体来说,本文采用Split Bregman算法^[29]来解决此问题。

对于全变差项,采用各向异性差分,

$$\min_u |u - u_0|^2 + \lambda |\nabla_x u|_1 + \lambda |\nabla_y u|_1 + \mu |g(\nabla u)|_1,$$

令 $dx = \nabla_x u, dy = \nabla_y u, dz = g(\nabla u)$,利用Split Bregman算法可得

$$\begin{aligned} \min_{u, dx, dy, dz} & |u - u_0|^2 + \lambda(|dx| + |dy|) + \mu|dz|_0 \\ & + \frac{\lambda_1}{2} |dx - \nabla_x u - bx|^2 + \frac{\lambda_1}{2} |dy - \nabla_y u - by|^2 \\ & + \frac{\mu_1}{2} |dz - g(\nabla u) - bz|^2. \end{aligned}$$

由于 u, dx, dy, dz 是可分离的,因此可以采用交替最小化算法进行求解,即:

$$\begin{aligned} u^* &= \min_u |u - u_0|^2 + \frac{\lambda_1}{2} |dx - \nabla_x u - bx|^2 \\ & + \frac{\lambda_1}{2} |dy - \nabla_y u - by|^2 + \frac{\mu_1}{2} |dz - g(\nabla u) - bz|^2, \end{aligned} \quad (6)$$

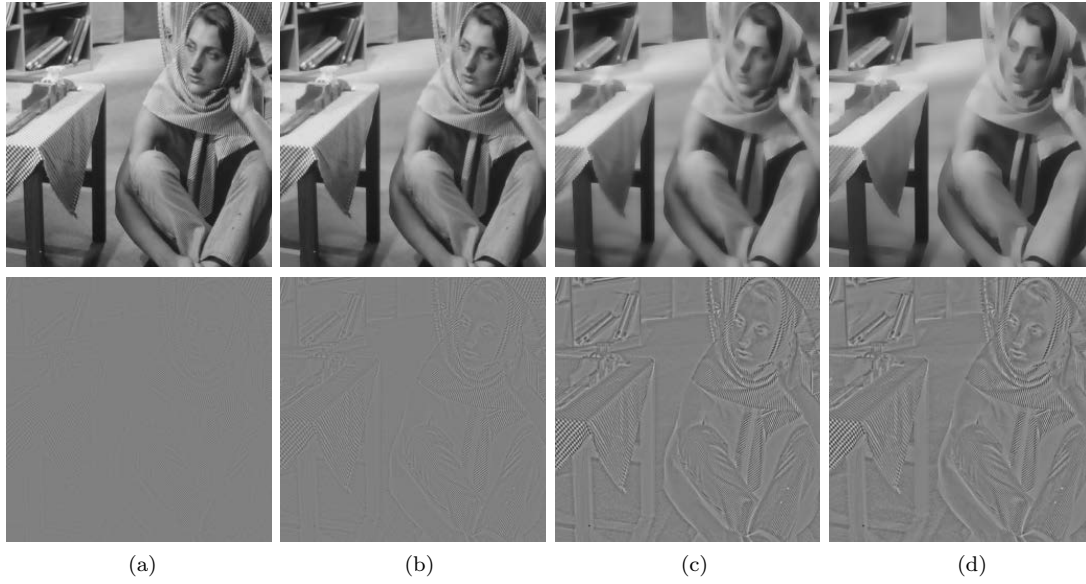


图 4 不同参数设置下的图像分解效果对比, 第一行的是滤波结果, 第二行的是分解所得的纹理。算法参数设置为: (a) $\omega = 5e - 1, \lambda = 2e - 2, \mu = 1e - 2$, (b) $\omega = 2e - 1, \lambda = 2e - 2, \mu = 1e - 2$, (c) $\omega = 5e - 2, \lambda = 2e - 2, \mu = 1e - 2$, (d) $\omega = 5e - 2, \lambda = 5e - 2, \mu = 1e - 2$ 。

Fig. 4 The comparison of experiment results under different parameters, the first row is the filter result, the second row is the texture. The chosen of parameters: (a) $\omega = 5e - 1, \lambda = 2e - 2, \mu = 1e - 2$, (b) $\omega = 2e - 1, \lambda = 2e - 2, \mu = 1e - 2$, (c) $\omega = 5e - 2, \lambda = 2e - 2, \mu = 1e - 2$, (d) $\omega = 5e - 2, \lambda = 5e - 2, \mu = 1e - 2$ 。

其中 dx^*, dy^*, dz^* 和 bx^*, by^*, bz^* 分别为

$$\begin{aligned} dx^* &= \min_{dx} \lambda |dx| + \frac{\lambda_1}{2} |dx - \nabla_x u - bx|^2, \\ dy^* &= \min_{dy} \lambda |dy| + \frac{\lambda_1}{2} |dy - \nabla_y u - by|^2, \\ dz^* &= \min_{dz} \mu |dz|_0 + \frac{\mu_1}{2} |dz - g(\nabla u) - bz|^2, \quad (7) \\ bx^* &= bx + \nabla_x u - dx, \\ by^* &= by + \nabla_y u - dy, \\ bz^* &= bz + g(\nabla u) - dz. \end{aligned}$$

关于 u 的优化问题是一个光滑非线性优化, 可以利用拟牛顿法来求解, 本文利用有限内存拟牛顿法L-BFGS来求解。而关于 dx, dy, dz 的优化问题, 可以看作是标准的LASSO问题, 则可利用软阈值算法来求解。算法1给出了该算法的伪代码实现。

4 实验结果

在本节, 我们将从算法参数设置, 滤波信号响应分析, 收敛效率分析和主观视觉效果等4个方面, 对本文所提出的算法进行分析, 以证明本文方法的有效性。本文的实验条件为Intel I5-2450M 2.5GHz CPU, NVIDIA 610M显卡, 4GB DDR3内存, 以及MATLAB 2012a。

Algorithm 1 基于简化Mumford-Shah模型的图像光滑算法

```
1 初始化,  $dx, dy, dz, bx, by, bz = \mathbf{0}$ ,  $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1$ 
2 Iteration
(1) 根据(7)式计算更新  $u^{k+1} = L - BFGS(u^k)$ 
(2) 利用软阈值算法求解  $dx, dy, dz$ ,
 $dx^* = Soft_{Thresholding}(dx)$ 
 $dy^* = Soft_{Thresholding}(dy)$ 
 $dz^* = Soft_{Thresholding}(dz)$ 
(3) 更新  $bx, by, bz$ ;
(4) 如果  $|u^* - u| < tolerance$ , stop;
(5) 否则, 令  $u = u^*$ , goto (1).
```

4.1 算法参数设置

根据上文公式5, 本文算法需要调节的参数主要是用于刻画了图像中非光滑像素的个数的权重 λ , 和实现图像分片同质化的效果的权重 μ 。然而, 在本文实验过程中, 我们发现, 对公式5中的数据保真项 $|u - u_0|^2$ 加入调节权重, 可以获得更好的图像平滑效果, 并且可以进一步平衡边缘保持与纹理平滑之间的相互作用。因此, 在实验过程中, 引入权重 ω 以约束滤波平滑的效果。

图4中采用了Barbara图像来测试不同参数设置下, 本文算法所得到的图像滤波效果。其中, 第一

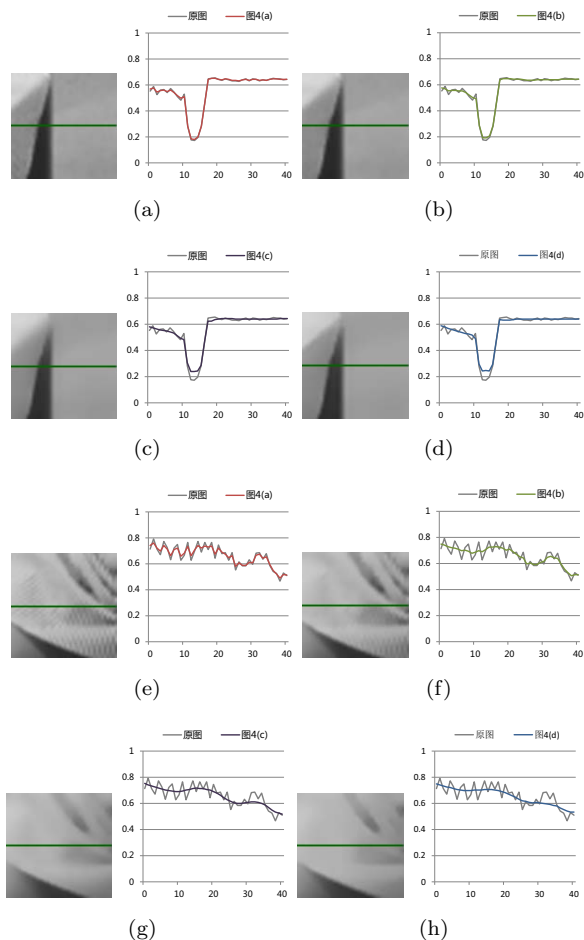


图 5 边缘区域与纹理区域的一维信号分析。各个子图中的右侧曲线图是左侧图像绿线标记位置上的像素亮度值，左侧图像对应图4中的不同参数条件下的滤波结果。

Fig. 5 The analysis of one dimensional signal at edge and textural region. The left image is the corresponding results of Fig. 4, and the right curve illustrate the intensity of pixels on green line at left image.

行的是图像滤波后得到的结构图像；第二行的是分解所得的纹理细节信息。为了方便突出本文算法的效果，我们要求所有测试实例中， L_0 项的约束权重设为 $\mu=1e-2$ 。而图4(a)–(d)中，测试了 ω 和 λ 变化时的滤波效果。对比图4(a)和(b)，可以看到随着权重 ω 变小，图像的保真项权重降低，随着算法的运行，在梯度的 L_0 及 L_1 范数的共同影响下，图像整体上逐渐趋向于平滑。而对比图4(c)和(d)，则可发现，随着 L_1 项权重 λ 的增大，在能量达到最小时，图像的梯度 L_1 模即全变差项越趋小，边界更加光滑，图像中的细小边界慢慢消失，图像中的显著边缘得到较好的保持，即边缘显得锐利。

4.2 滤波信号响应分析

由于边缘保持滤波方法中，并没有确定性的客观质量评价方法，因此，在本文中，我们采用一维

信号分析的方式，来对本文算法的滤波响应性能进行分析。我们从图4的4组子图中，分别截取两个具有代表性的局部区域，即显著边缘区域和纹理变化区域。然后，取该局部区域分块的水平中心线上的亮度值，通过一维信号的方式进行表示（见图5）。图5的每组子图中，左侧的是带标记的局部区域分块，右侧的是信号曲线。其中，灰色曲线表示的是未经滤波的原始图像信号。观察图5(a)–(d)，可以发现在保真项权重 ω 较大时，滤波结果更贴近于原始信号；而随着权重 λ 的增大，边缘锐化程度得到增强。而在图5(e)–(h)中，则可以有效观察到滤波响应信号在纹理区域的显著变化。

由于本文引入了 L_0 项来实现图像局部区域平坦的效果，因此在纹理区域能够得到更好的平滑性能。但权重之间的相互约束，又可以避免了过度“生硬”的分块出现。本文的观点认为，将部分纹理误作不完整的边缘信息，从而产生不确定的半保持效果，是边缘保持滤波中应该避免的。同时，过于“生硬”的分块区域出现，也不是期望的滤波效果。最佳的滤波效果应该是，能够遵循纹理的变化趋势，平滑后的信号能够准确穿越纹理振荡的中心，即图5(g)和(h)所示的效果。

4.3 收敛效率分析

本文算法中使用了 L_0 范数和 L_1 范数进行约束，导致方程为非凸的泛函。在第3节，提出了采用近似算法来迭代求解非凸泛函方程（公式3）。一般而言，迭代求解方法的困难之处在于迭代次数的控制，往往必须针对输入数据手工调节迭代次数以获得良好的收敛效果。

在实验中，通过观察输出结果，可以发现本文提出的求解方法具有快速收敛的特性。如图6(b)–(d)所示，本文的数值求解方法在3–5次迭代后，已经能够获得理想的边缘保持效果（鸚鵡嘴部的锐利边缘）和纹理平滑效果（鸚鵡身上的羽毛）。根据大量的实验和分析，采用迭代5次能获得稳定的算法收敛效果。因此，在本文的所有实验中，均固定迭代次数为5次，从而避免了繁琐的手工参数调节过程。

4.4 主观视觉效果

主观视觉效果是直接判断边缘保持滤波质量的重要手段，同时结合具体的图像应用，可以验证滤波算法的有效性。在本节中，通过与主流的边缘保持滤波方法相比较，以及在精细纹理与图像结构分离，高动态范围色调映射，彩色图像去噪等处理效果上的比较，进一步验证本文算法的有效性。

图7展示了加权最小二乘滤波^[17]、高斯KD-树滤波^[15]、 L_0 梯度最小化滤波^[21]和自适应流形滤



图 6 迭代求解与收敛性分析。(a) 原始图像。(b) 迭代1次。(c) 迭代3次。(d) 迭代5次。实验测试采用的参数设置为 $\omega = 5e - 2, \lambda = 5e - 2, \mu = 1e - 2$ 。

Fig. 6 The analysis of iteration and convergence. (a) original image, (b) result with 1 iteration, (c) result with 3 iteration, (d) result with 5 iteration. The parameter of this experiment is $\omega = 5e - 2, \lambda = 5e - 2, \mu = 1e - 2$.

波方法^[16]与本文算法在Cat图像上的效果对比。从图7(b)可发现加权最小二乘滤波方法来带来明显的亮度偏差, 图7(c)中高斯KD-树滤波方法存在纹理半平滑半保持的问题, 图7(d)中 L_0 梯度最小化滤波具有显著的过硬分块现象, 而图7(e)的结果则出现平滑雾化的效果。本文算法在边缘保持与纹理平滑之间, 能够达到一个较为理想的平衡。

图7各种算法的运行时间如表1所示, 可以看出与其他算法相比, 本文算法为实现纹理平滑时对边缘的保持和锐化, 需要对图像梯度的 L_0 及 L_1 范数进行同时优化, 与WLS及 L_0 平滑方法相比, 无法找到一个简单的近似线性的解法, 因此在计算时间上略占劣势, 但综合考虑效果及运行时间, 本文算法仍有较大应用价值。

表1 各种算法运行时间比较

Table 1 The comparison of running time of different algorithms

WLS ^[17]	KD-Tree ^[15]	L_0 ^[21]	Manifold filter ^[16]	本文方法
0.294 s	3.741 s	1.329 s	1.928s	2.967 s

图像结构和纹理分离是多种图像应用的基础^[30], 结构分量可以用于提取图像的主要特征或图像内容的轮廓信息; 而纹理分量则是细节增强或图像编辑所必须的信息。精细粒度的图像结构与纹理分离一直是挑战性难题。本文算法以 L_1 范数约束控制图像边缘的锐利程度, 以 L_0 范数约束控制纹理细节区域的平坦程度, 因此可以有效地分离图像中的结构分量和纹理分量。图8展示了本文算法作用于彩色图像的结构与纹理分离的效果。图8(a)中各个子图左上方的局部放大图, 显示了精细的纹理信息。观察图8(b)可知, 分离所得的结构信息能够有效地保持图像主题信息和边缘锐利; 而图8(c)则展示了分离所得的精细粒度的纹理信息。

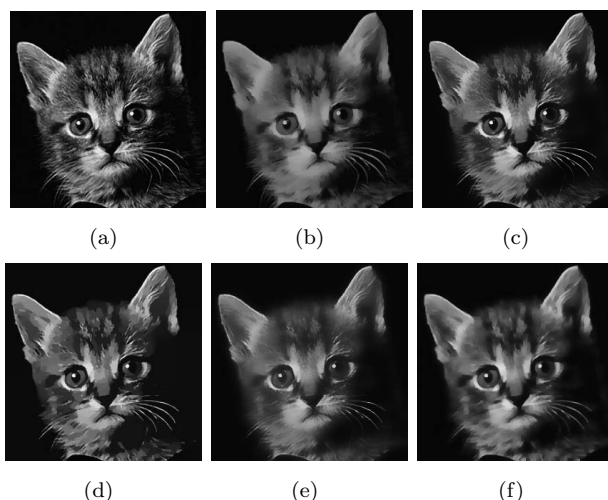


图 7 边缘保持图像平滑方法的效果对比。(a) 原图。(b) WLS ($\alpha = 1.5, \lambda = 0.8$)。 (c) Gauss KD-tree ($\sigma_s = 8, \sigma_r = 0.2$)。 (d) L_0 GM ($\lambda = 0.2, \kappa = 2$)。 (e) Adaptive Manifold ($\sigma_s = 8, \sigma_r = 0.2$)。 (f) 本文方法($\omega = 0.05, \lambda = 0.05, \mu = 0.01$)。

Fig. 7 The comparison of results of different edge-preserving filter. (a) original image, (b) WLS ($\alpha = 1.5, \lambda = 0.8$), (c) Gauss KD-tree ($\sigma_s = 8, \sigma_r = 0.2$), (d) L_0 GM ($\lambda = 0.2, \kappa = 2$), (e) Adaptive Manifold ($\sigma_s = 8, \sigma_r = 0.2$), (f) proposed method ($\omega = 0.05, \lambda = 0.05, \mu = 0.01$).

边缘保持滤波方法是解决高动态范围 (High-Dynamic-Range, HDR) 图像的色调映射问题的重要途径, 在从高动态范围到低动态范围的转变过程中, 保持亮度图像中边缘信息的锐利, 可以有效避免出现光晕、梯度反转等严重影响视觉效果的问题。图9中, 对比了基于加权最小二乘滤波^[17]、局部拉普拉斯(Laplacian)滤波^[31]两种主流的色调映射方法。从图9(a)和(b)对应的局部放大子图中, 可以清楚地发现, 对于高强度的图像区域(窗口玻璃), 对比度抑制效果并不理想。而基于本文算法的结果中(c), 则可以清晰地表现出窗口玻璃上的细节信

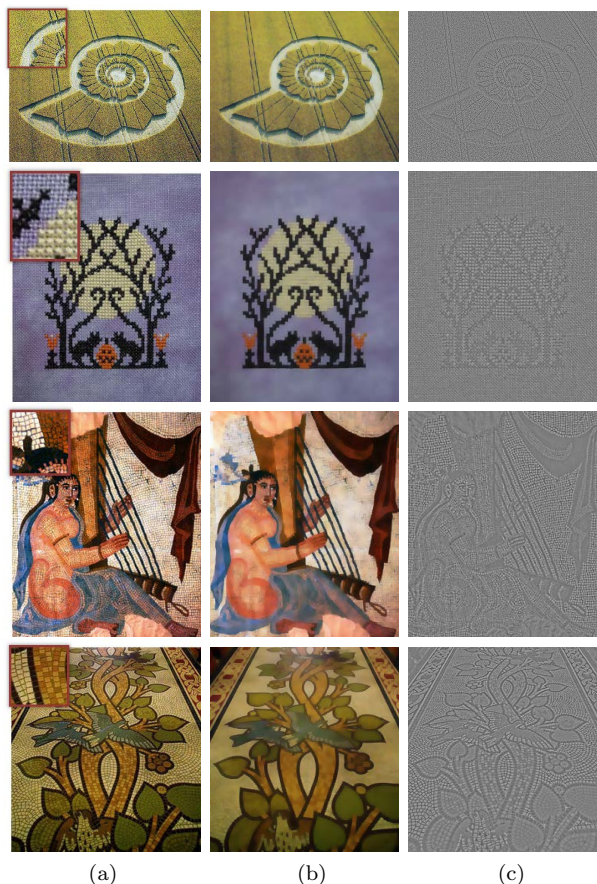


图 8 图像中的结构与精细纹理分解。(a) 原始图像。(b) 结构分量。(c) 纹理分量。在本例子中, 参数设置为 $\omega = 0.05, \lambda = 0.05, \mu = 0.01$ 。测试图像来源于Xu等人的论文, 建议观看论文的电子版。

Fig. 8 The experiment results of cartoon-texture decomposition. (a) original image, (b) cartoon component, (c) texture component. In this experiment, the parameters are set as $\omega = 0.05, \lambda = 0.05, \mu = 0.01$.

息, 即亮度取值得到较好的控制。

本文算法在解决彩色图像去噪问题上, 同样可以获得较为优异的性能表现。图10中, 分别对比了自适应流形滤波方法^[16]和 L_0 梯度最小化滤波方法^[21]。图10(a)是添加了高斯随机噪声($\sigma=20$)的彩色图像。由于自适应流形滤波继承了双边滤波的特性, 其近似高斯滤波的性质导致滤波结果中出现轻微的雾化现象, 见图10(b)。而 L_0 梯度最小化滤波则由于仅有 L_0 项的约束, 导致出现明显的分块现象, 见图10(c)。而本文方法则可以得到在去除噪声与图像信息保持两方面上相互平衡的效果表现。

可扩展到三维几何模型上是本文算法的一个重要特点。图11中, 对比了经典的基于双边滤波的网格去噪方法^[32]和双边法线滤波方法^[33]。从边界特征的保持情况来看, 三种方法都能够获得较为锐利的保持效果。但从图11(c)中观察可知, 本文算法对

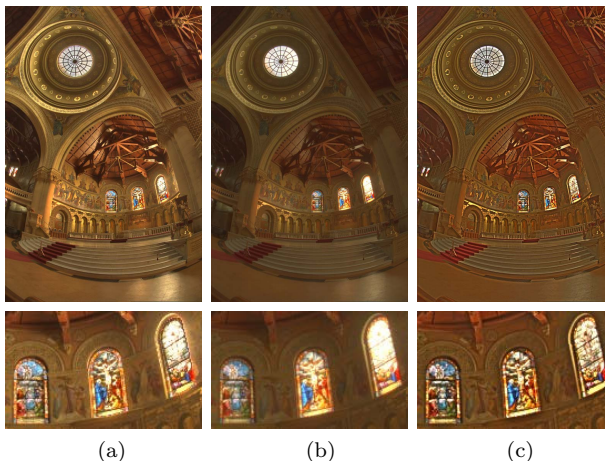


图 9 高动态图像色调映射处理效果对比。(a) 基于加权最小二乘滤波的色调映射^[17]。(b) 基于局部拉普拉斯滤波的色调映射^[31]。(c) 本文方法。

Fig. 9 The comparison of effect of high dynamic contrast image tone mapping. (a) WLS^[17], (b) local laplace filter^[31], (c) result of proposed method

于曲面表面上的噪声有最佳的抑制效果, 因此对比前两种方法, 所得结果更为平滑。

5 结论

本文提出了一种基于混合梯度最小化Mumford-Shah模型的高维滤波算法, 通过在Mumford-Shah模型基础上加入 L_0 和 L_1 范数约束, 从而构造了边缘保持和局部纹理平滑的滤波效果。其中 L_0 范数刻画了图像中非光滑像素的数量, 从而在最小化方程求解时, 达到包含纹理的局部区域上平滑的效果; 而 L_1 范数则刻画了图像中边界复杂程度, 即边缘锐利程度, 从而在最小化方程求解时, 获得边缘保持的效果。在本文的实验部分, 通过从参数设置分析、滤波信号响应分析、收敛效率分析和主观视觉效果评价4个方面, 对本文所提出的算法的有效性进行了验证。从实验结果表明, 本文算法在滤波性能上能够达到期望的边缘保持和纹理平滑相平衡的效果, 其获得有效的结构和纹理分离对图像中的精细化纹理提取、色调映射以及高维去噪等图像应用具有显著的效果提升。

对比主流的边缘保持滤波方法, 本文算法的优势在于能够统一边缘保持和纹理平滑这两个特性, 从而获得更佳的图像结构和纹理分离效果。然而, 本文算法存在一定的局限性。体现在, 当前的算法实现中, 虽然能够在极少次迭代中(≤ 5)获得算法收敛的效果, 但单次求解的时间效率仍未能达到实时处理的性能。当前对于 L_0 和 L_1 范数混合的方程, 如何提高方程求解效率仍是世界性的难题, 需

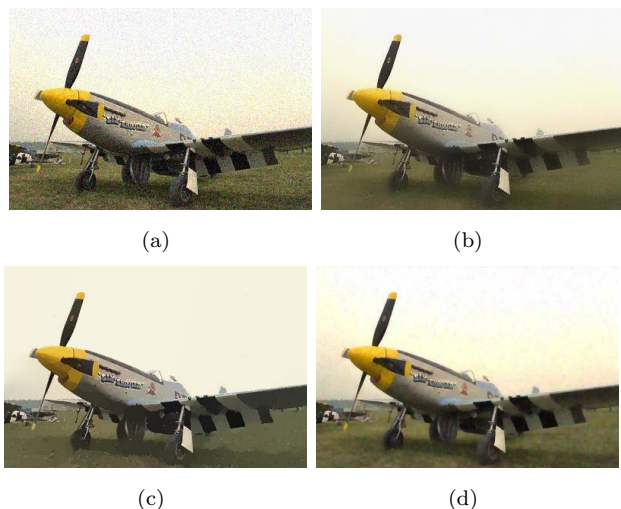


图 10 图像去噪。(a) 带随机噪声的图像, 噪声服从高斯分布($\sigma=20$)。(b) 自适应流形滤波^[16] ($\sigma_s=12$, $\sigma_r=0.25$)。(c) L_0 梯度最小化滤波^[21] ($\lambda=0.02$, $\kappa=2$) (d)本文方法($\omega=0.075$, $\lambda=0.03$, $\mu=0.01$)。

Fig. 10 The results of image denoising. (a) image contaminated by gaussian noise with $\sigma=20$, (b) adaptive manifold filter^[16] ($\sigma_s=12$, $\sigma_r=0.25$), (c) L_0 filter^[21] ($\lambda=0.02$, $\kappa=2$), (d) proposed method ($\omega=0.075$, $\lambda=0.03$, $\mu=0.01$).

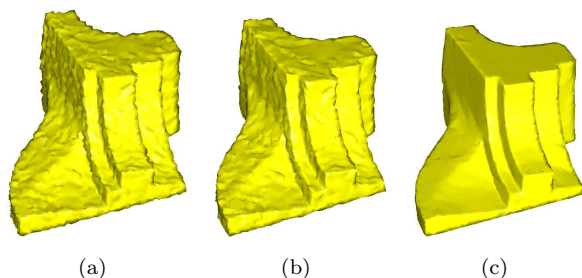


图 11 三维网格去噪。(a) 基于双边滤波的网格去噪方法^[32]。(b) 双边法线滤波方法^[33]。(c)本文方法。

Fig. 11 Experiment for 3D mesh denoising. (a) bilateral filter^[32], (b)bilateral normal filter^[33], (c)proposed method.

要进一步对数值求解算法进行优化。

在下一步工作中, 将会继续对本文算法的适用性进行研究, 特别是在视频处理和复杂三维图形处理等应用上, 以及对算法进行深入的优化以提高其有效性和计算效率。

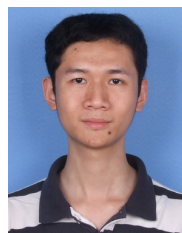


李波 南昌航空大学数学与信息科学学院, 副教授。主要研究方向为计算机图形学及图像处理。

E-mail: libo@nchu.edu.cn

(**Li Bo** Associate professor at school of mathematics and information science, Nanchang Hangkong University.

His research interests include computer graphics and image processing.)



苏卓 中山大学信息科学与技术学院在读博士生。主要研究方向为数字图像处理与计算机图形学。本文通信作者。

E-mail: suzhuoi@gmail.com

(**Su Zhuo** Ph.D. candidate at School of Information Science and Technology, Sun Yat-sen University. His research interests include image processing and computer graphics. Corresponding author of this paper.)



冷成财 南昌航空大学数学与信息科学学院讲师。2012年获西北工业大学理学院博士学位。主要研究方向为图像处理, 计算机视觉与模式识别。

E-mail: lcc1632000@163.com

(**Leng Chengcai** Lecturer at the School of Mathematics and Information Sciences, Nanchang Hangkong University. His research interest covers image processing, and computer vision and pattern recognition.)



王胜法 大连理工大学软件学院讲师。目前研究方向包括: 计算机图形学, 扩散几何, 微分几何分析和处理。

E-mail: shengfawang@gmail.com

(**Wang Shengfa** Lecturer at the School of Software Technology at Dalian University of Technology. His research interests include computer graphics, diffusion geometry and differential geometry processing and analysis.)



罗笑南 中山大学信息与技术科学学院教授。目前研究方向包括: 计算机图形学, 数字家庭关键技术。

E-mail: lnslyx@sysu.edu.cn

(**Luo Xiaonan** Professor at the School of Information Science and Technology, Sun Yat-sen University. His research interests include computer graphics and key problems in digital life.)

References

- 1 Xu L, Yan Q, Xia Y, Jia J. Structure extraction from texture via relative total variation. *ACM Transactions on Graphics*, 2012, **31**(6): 1–10
- 2 Spratling M. Image segmentation using a sparse coding model of cortical area V1. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2013, **22**(4): 1631–1643.

- 3 Tan L, Wang S. A Fast Image Segmentation Based on Path-based Similarity and Dual Super-pixel Sets. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(10): 1653–1664
(谭乐怡,王守觉. 基于双重超像素集的快速路径相似度图像分割算法. *自动化学报*, 2013, **39**(10):1653-1664)
- 4 Yao T, Xie Z. Top-down Inference with Relabeling and Mapping Rules in Hierarchical MRF for Image Segmentation. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(10): 1581–1593
(姚婷婷,谢昭.多层次MRF重标记及映射法则下的图像分割. *自动化学报*, 2013,**39**(10):1581-1593.)
- 5 Kim T. Wide Dynamic Range Technologies: For mobile imaging sensor systems. *Consumer Electronics Magazine*,2014, **3**(2): 30–35.
- 6 Yang Q. Recursive bilateral filtering, *12th European Conference on Computer Vision*. 2012, **7572**(1): 399–413
- 7 Zheng Y, Zhang J, Chen Y, Sun Q. Weighted curvature-preserving PDE based image regularization method. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(10): 1175–1182
(郑钰辉, 张建伟, 陈允杰, 孙权森. 加权型曲率保持PDE图像滤波方法. *自动化学报*, 2011, **37**(10): 1175–1182)
- 8 Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, **12**(7): 629–639.
- 9 Bo Li, Zhixun Su, Xiuping Liu. An Adaptive PDE Image Processing Method Based on Lp Norm. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(8): 849–853
(李波,苏志勋,刘秀平. 基于Lp范数的局部自适应偏微分方程图像恢复. *自动化学报*, 2008, **34**(8): 849–853)
- 10 Tomasi C, Manduchi R. Bilateral filtering for gray and color images. *The sixth International Conference on Computer Vision*, 1998, 839–846
- 11 He K, Sun J, and Tang X. Guided image filtering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*,2013, **35**(6): 1397–1409.
- 12 Azetsu T, Noriaki S, and Eiji U. Robust Bilateral Filter Using Switching Median Filter. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2013, **96**(11): 2185–2186.
- 13 Paris S, Durand F. A fast approximation of the bilateral filter using a signal processing approach. *9th European Conference on Computer Vision*, 2006, **3954**: 568–580
- 14 Paris S, Durand F. A fast approximation of the bilateral filter using a signal processing approach. *International Journal of Computer Vision*, 2009, **81**(1): 24–52
- 15 Adams A, Gelfand N, Dolson J, Levoy M. Gaussian kd-trees for fast high-dimensional filtering. *ACM Transactions on Graphics*, 2009, **28**(3): 21:1–12
- 16 Gastal E S L, Oliveira M M. Adaptive manifolds for real-time high-dimensional filtering. *ACM Transactions on Graphics*, 2012, **31**(4): 1–13
- 17 Farbman Z, Fattal R, Lischinski D, Szeliski R. Edge-preserving decompositions for multiscale tone and detail manipulation. *ACM Transactions on Graphics*, 2008, **27**(3): 22:1–10
- 18 Subr K, Soler C, Durand F. Edge-preserving multiscale image decomposition based on local extrema. *ACM Transactions on Graphics*, 2009, **28**(5): 147:1–9
- 19 Forsyth D, Torr P, Zisserman A, et al. Fourier Analysis of the 2D Screened Poisson Equation for Gradient Domain Problems. *European Conference on Computer Vision*, 2008, **5303**: 114–128
- 20 Bhat P, Zitnick C L, Cohen M, Curless B. GradientShop: A gradient-domain optimization framework for image and video filtering. *ACM Transactions on Graphics*, 2010, **29**(2): 10:1–14

- 21 Xu L, Lu C, Xu Y, Jia J. Image smoothing via l0 gradient minimization. *ACM Transactions on Graphics*, 2011, **30**(6): 1–12
- 22 Su Z, Luo X, Deng Z, Liang Y, Ji Z. Edge-preserving Texture Suppression Filter Based on Joint Filtering Schemes. *IEEE Transactions on Multimedia*, 2013, **15**(3): 535–548
- 23 Su Z, Luo X, Artusi A. A Novel Image Decomposition Approach and Its Applications. *The Visual Computer*, 2013, **29**(10):1011–1023
- 24 Mumford D, Shah J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1989, **42**(5): 577–685
- 25 Chan T F, Vese L A. An efficient variational multiphase motion for the Mumford-Shah segmentation model. *34th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 2000, **1**: 490–494
- 26 Pock T, Cremers D, Bischof H, et al. An algorithm for minimizing the Mumford-Shah functional. *IEEE 12th International Conference on Computer Vision*, 2009, 1133–1140
- 27 El-Zehiry N Y, Grady L. Combinatorial Optimization of the Discretized Multiphase Mumford-Shah Functional. *International Journal of Computer Vision*, 2013, **104**(3): 270–285
- 28 Chan T F, Vese L A. A level set algorithm for minimizing the Mumford-Shah functional in image processing. *IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision*, 2001, 161–168
- 29 Goldstein T, Osher S. The Split Bregman Method for L1-Regularized Problems. *SIAM J. Imaging Sci.*, 2009, **2**(2), 323–343
- 30 Su Z, Luo X, Zeng K, Liu L. Corruptive Artifacts Suppression for Example-based Color Transfer. to appear in *IEEE Transactions on Multimedia*, Online Published, 2014
- 31 Paris S, Hasinoff S W, Kautz J. Local Laplacian filters: edge-aware image processing with a Laplacian pyramid. *ACM Transactions on Graphics*, 2011, **30**(4): 68:1–12
- 32 Fleishman S, Drori I, Cohen-Or D. Bilateral mesh denoising. *ACM Transactions on Graphics*, 2003, **22**(3): 950–953
- 33 Zheng Y, Fu H, Au O K C, Tai C. Bilateral Normal Filtering for Mesh Denoising. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2011, **17**(10): 1521–1530.