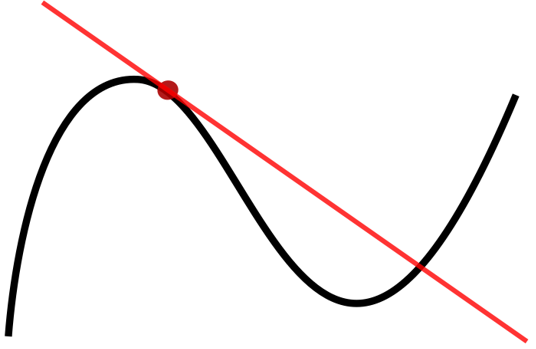
尚硅谷大模型技术之数学基础

（作者：尚硅谷研究院）

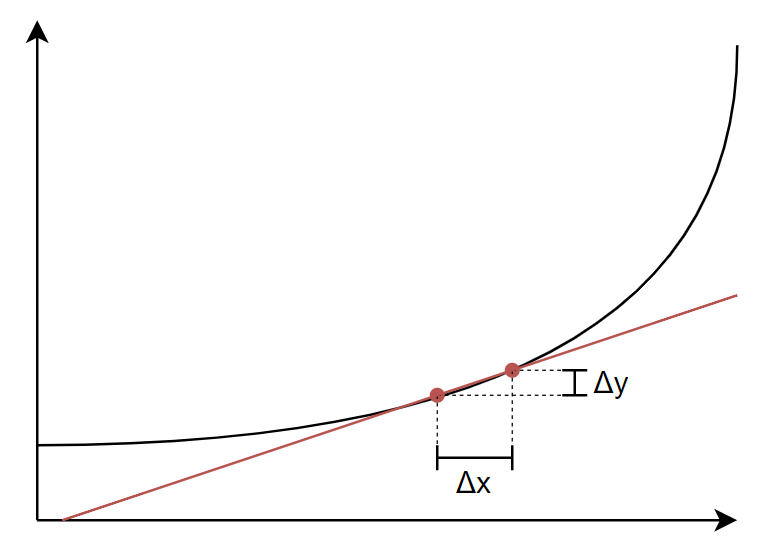
版本：V0.9.1

1. 导数
   1. 概念

导数（derivative）是微积分中的一个概念。函数在某一点的导数是指这个函数在这一点附近的变化率（即函数在这一点的切线斜率）。导数的本质是通过极限的概念对函数进行局部的线性逼近。



当函数的自变量在一点上产生一个增量时，函数输出值的增量与自变量增量的比值在趋于0时的极限如果存在，即为在处的导数，记作、或。



例如在运动学中，物体的位移对于时间的导数就是物体的瞬时速度。

* 1. 基本函数的导数

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **说明** | **公式** | **例子** |
| **常数的导数** |  |  |
| **幂函数的导数** |  |  |
| **指数函数的导数** |  |  |
|  | — |
| **对数函数的导数** |  |  |
|  | — |
| **三角函数的导数** |  | — |
|  | — |
|  | — |
|  | — |

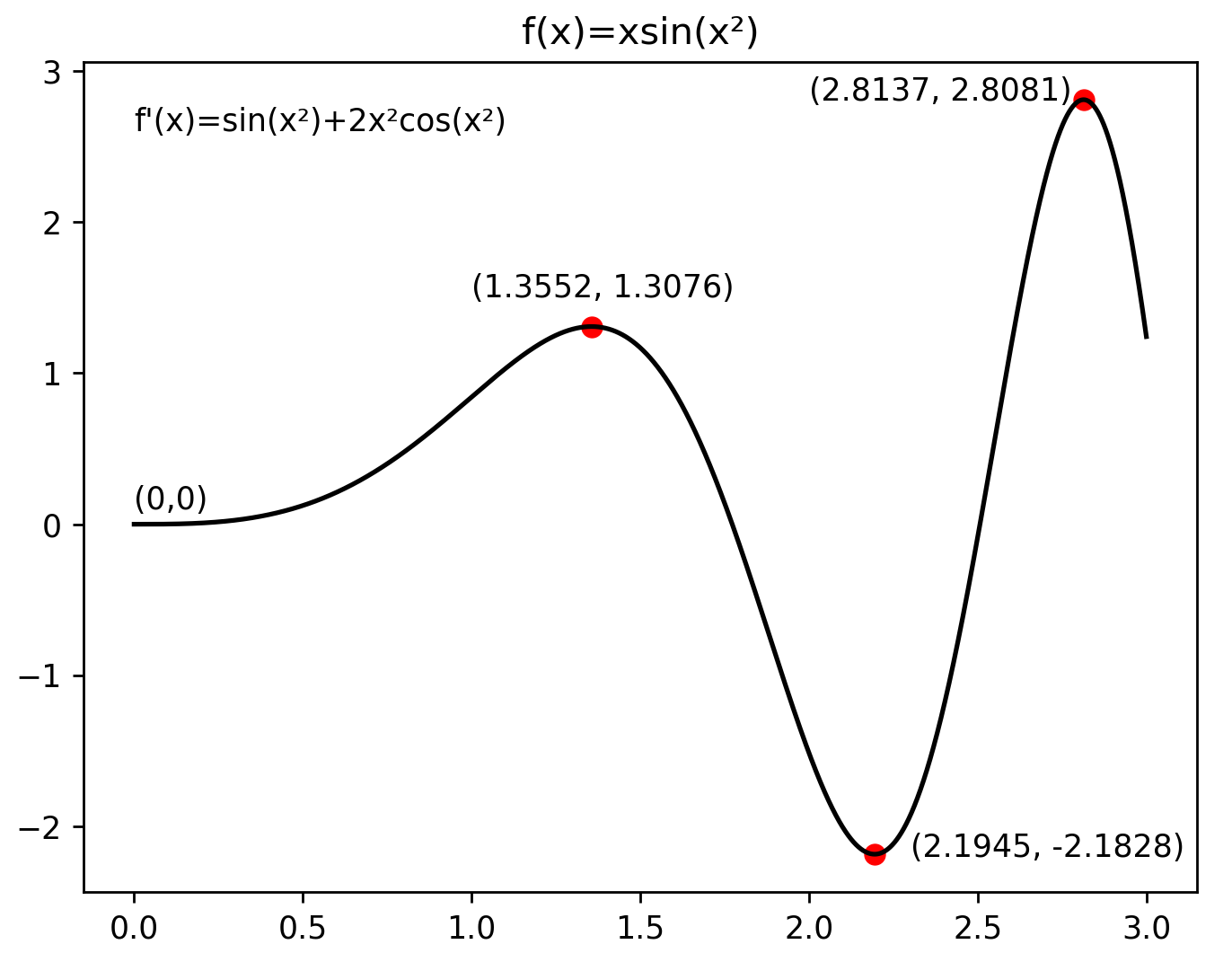
* 1. 导数的求导法则

|  |  |
| --- | --- |
| **说明** | **公式** |
| **两函数之和求导** |  |
| **两函数之积求导** |  |
| **两函数之商求导** |  |
| **复合函数的导数** |  |

例如：求函数在x=3处的导数。

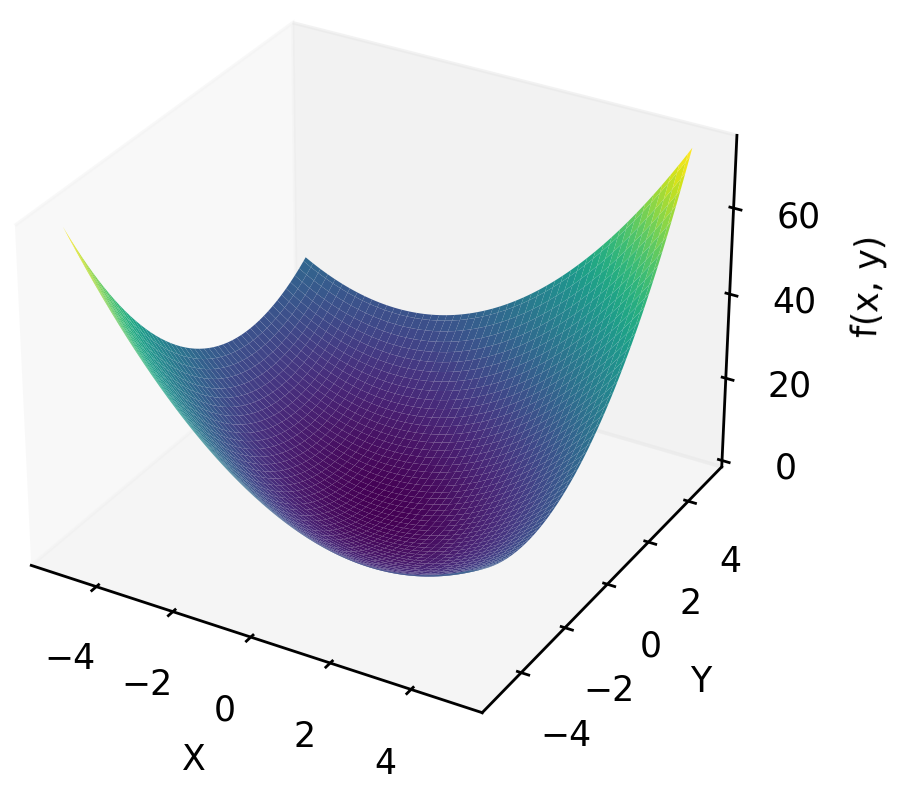
* 1. 利用导数求极值

导函数等于零的点称为函数的驻点（或极值可疑点），在这类点上函数可能会取得极大值或极小值。进一步判断则需要知道导函数在附近的符号。



1. 偏导与梯度
   1. 偏导数

如果函数的自变量并非单个元素，而是多个元素，例如：



可将其中一个元素看作参数，此时可看作关于另一元素的函数。

在固定的情况下，可计算关于的导数。

这种导数称为偏导数，一般记作：

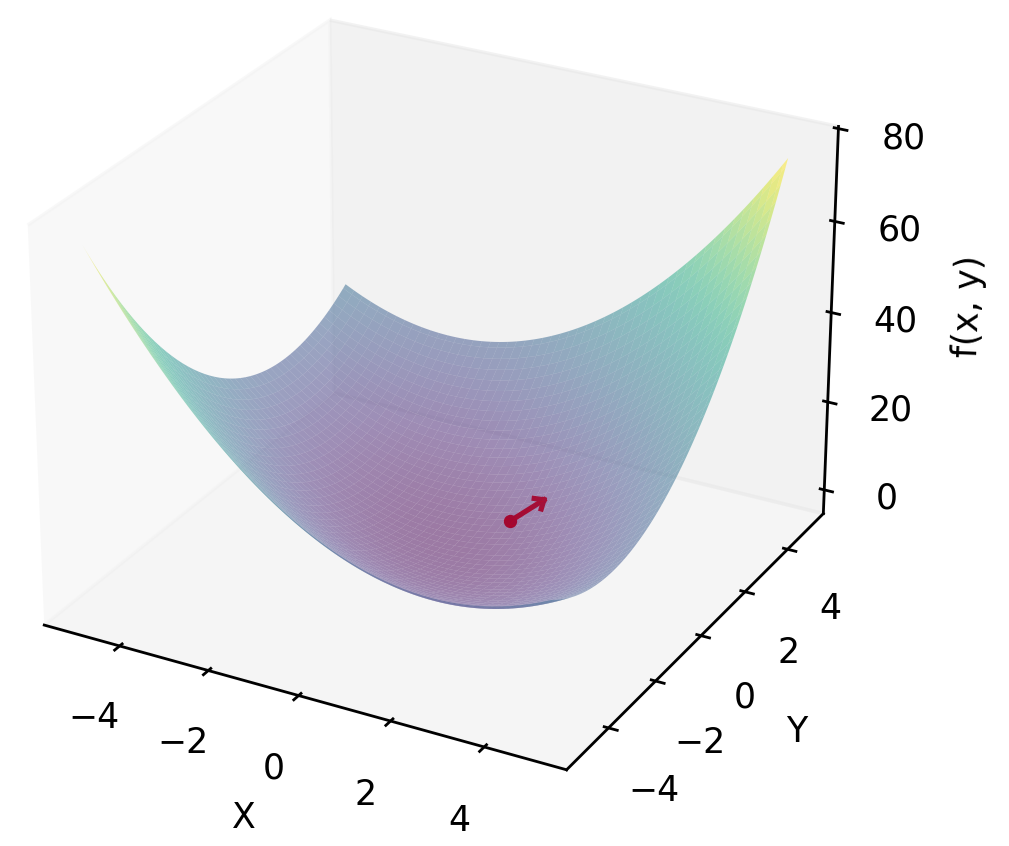
更一般地来说，一个多元函数在点处对的偏导数定义为：

* 1. 梯度

多元函数关于每个变量都有偏导数，在点处，这些偏导数定义了一个向量。

这个向量称为在点的梯度。

例如：在处的梯度为。



1. 标量与向量
   1. 概念
      * + 1. 标量（scalar）

一个单独的数，只有大小。

* + - * 1. 向量（vector）

由标量组成，有大小有方向。

行向量：

列向量：

* 1. 向量运算
     + - 1. 向量转置：列向量转置结果为行向量
         2. 向量相加：对应位置上的元素相加
         3. 向量与标量相乘：标量与向量每个元素相乘
  2. 向量范数

范数（norm）是具有“长度”概念的函数。

* + - * 1. L0范数（也称0范数）

例如：

* + - * 1. L1范数（也称和范数或1范数）

例如：

* + - * 1. L2范数（也称欧几里得范数或2范数）

例如：

* + - * 1. Lp范数

1. 矩阵与张量
   1. 矩阵的概念

一个m×n的矩阵（matrix）是一个有m行n列元素的矩形阵列。用表示所有m×n实数矩阵的向量空间。

* + - * 1. 方阵：行数等于列数的矩阵
        2. 对角矩阵：主对角线以外元素全为0的方阵
        3. 单位矩阵：主对角线元素全为1的对角矩阵
  1. 矩阵运算
     + - 1. 矩阵转置

m×n矩阵的转置是一个n×m的矩阵，记为。其中的第i个行向量是原矩阵的第i个列向量；或者说，转置矩阵第i行第j列的元素是原矩阵第j行第i列的元素。

* + - * 1. 矩阵加法：对应位置上的元素相加

例如：

* + - * 1. 矩阵乘法

两个矩阵的乘法仅当第一个矩阵的列数和另一个矩阵的行数相等时才能定义。如是m×n矩阵和是n×p矩阵，它们的乘积是一个m×p矩阵，它的一个元素

例如：

特别地，矩阵与单位矩阵相乘等于矩阵本身。

或

例如：

* 1. 矩阵乘法的性质

矩阵乘法满足结合律、左分配律和右分配律。

矩阵乘法不满足交换律，即。

* + - * 1. 结合律：若，则
        2. 左分配律：若，则
        3. 右分配律：若，则
  1. 矩阵转置的性质
  2. 矩阵的逆

对于方阵，如果存在另一个方阵，使得成立，此时也同样成立。称为的逆矩阵。

例如：

* 1. 张量

张量（tensor）可视为多维数组，是标量，1维向量和2维矩阵的n维推广。

1. 概率
   1. 概念

概率是对事件发生的可能性的度量。通常将事件A的概率写作。

* 1. 概率的计算

|  |  |
| --- | --- |
| **事件** | **概率** |
| **A** |  |
| **非A** |  |
| **A和B**  **（联合概率）** |  |
| **A或B** |  |
| **B的情况下A的概率**  **（条件概率）** |  |

例如：现有一个装有10个球的袋子，其中有6个红球和4个蓝球。从中随机抽取两个球。我们定义以下事件：

事件A：第一个抽到的是红球。

事件B：两个抽到的球都是红球。

* + - * 1. 计算联合概率

第一个球是红球的概率：

在第一个球是红球的情况下，两个球都是红球的概率：

联合概率：

* + - * 1. 计算条件概率

条件概率表示在已知两个球都是红球的情况下，第一个球是红球的概率。

两个球都是红球的概率：

在两个球都是红球的情况下，第一个球是红球的概率：

1. 似然函数
   1. 概念

概率用于在已知一些参数的情况下，预测接下来在观测上所得到的结果。似然性则是用于在已知某些观测所得到的结果时，对有关事物之性质的参数进行估值。

似然函数是对参数的函数，其定义为在给定参数值的条件下，观察到某个特定数据的概率。换句话说，似然函数是一个关于参数的函数，而不是关于数据的函数。

如果我们有一个参数化的概率模型，其中是观测数据，是模型参数，似然函数定义为：

这里，表示在参数为的情况下，观察到数据的概率。

假设我们有一组独立同分布的观测数据，并且这些数据服从某个分布（例如正态分布、二项分布等）。若我们假设这些数据服从参数为的某个分布，那么似然函数可以写作：

针对其中存在的乘法，可以使对数函数将其转化为加法：

* 1. 极大似然估计

似然函数常用于极大似然估计。我们希望找到使似然函数最大化的参数。这意味着在给定观测数据的情况下，选择最可能生成这些数据的参数值。

例如，掷硬币3次，2次正面1次背面，能否依据此结果逆推出正面的概率；正面概率为0.5的概率为多少、正面概率为0.6的概率为多少；最有可能的正面概率是多少？

我们用代表硬币正面朝上的概率，用代表2次正面1次背面的结果

当正面概率为0.5时：

当正面概率为0.6时：

为了找出极大似然估计，对似然函数取对数并求导，使其等于0

解得，意味着当掷硬币3次，出现2次正面1次背面的结果时，硬币正面朝上的概率最有可能为。

1. 正态分布

正态分布（normal distribution），也称高斯分布，是一个非常常见的连续概率分布。正态分布在统计学上十分重要，经常用在自然和社会科学来代表一个不明的随机变量。

若随机变量服从一个平均数为、标准差为（）的正态分布，则记为，其概率密度为

也写作

正态分布的期望可解释为位置参数，决定了分布的位置；其方差可解释尺度参数，决定了分布的幅度。

中心极限定理指出，在特定条件下，一个具有有限均值和方差的随机变量的多个样本的平均值本身就是一个随机变量，其分布随着样本数量的增加而收敛于正态分布。因此，许多与独立过程总和有关的物理量，例如测量误差，通常可被近似为正态分布。

正态分布的概率密度函数曲线呈钟形，因此人们又经常称之为钟形曲线。我们通常所说的标准正态分布是位置参数，尺度参数的正态分布。

