Escuela Superior de Física y Matemáticas
Ecuaciones Diferenciales Parciales I
Problemario 2022

Intrucciones: Resuelva los ejercicios de la manera más detallada, completa y clara posible.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones, para $u(x,y)$.
   (a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
   (b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
2. Resuelva las ecuaciones de primer orden.
   (a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0$
   (b) $u_{xy} + u_x = 0$
   (c) $x\frac{\partial u}{\partial x} + 3u = x^2$
3. La ecuación $u_t + cu_x + \lambda u = f(x,t)$ puede resolverse introduciendo las variables $\zeta = x - ct$, $\tau = t$.
   (a) Use la regla de la cadena para demostrar que $u_\tau + \lambda u = f(\zeta + c\tau, \tau)$, la cual es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en la variable τ y donde ζ es un parámetro.
   (b) Resuelva la ecuación $u_t + u_x - u = t$ utilizando la técnica descrita.
4. Resuelva las ecuaciones de primer orden para $u(x,y)$ con las condiciones de frontera dadas.
   (a) $x\frac{\partial u}{\partial x} + xy = u$, $u = 2y$ sobre la línea $x = 1$.
   (b) $1 + x\frac{\partial u}{\partial x} = xu$, $u(x,0) = x$.
   (c) $\frac{\partial U}{\partial x} = \sin y$, $\quad U(0,y) = 0$
   (d) $u_y - u_x = 0$, con $u(x,0) = e^{-3x^2}$
5. Use el método de separación de variables para resolver las ecuaciones de primer orden para $U(x,y)$ con las condiciones de frontera dadas.
   (a) $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = U$, para $U(0,y) = 2e^{-y} + 3e^{-2y}$.
   (b) $4\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x} = 3Y$, para $Y(x,0) = 4e^{-x} - e^{-5x}$.
6. Clasifique las ecuaciones de segundo orden de dos variables con coeficientes constantes y redúzcalas a su forma canónica.
   (a) $u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} = 0$
   (b) $9u_{xx} + 10u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u_y + xy = 0$
   (c) $2u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} - u = 0$
7. Encuentre la solución general de las ecuaciones de segundo orden de dos variables con coeficientes constantes, reduciéndolas primero a su forma canónica.
   (a) $2u_{xx} + 6u_{xy} - 5u_{yy} = 1$

8. Use el método de separación de variables para resolver los siguientes problemas con valores de frontera.
   (a) $2\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad U(0,t) = 0, \quad U(\pi,t) = 0, \quad U(x,0) = 2\sin(3x) - 5\sin(4x)$
   (b) $\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad U(0,t) = 0, \quad U(\pi,t) = 0$ para $t > 0$, $\qquad U(x,0) = 5x(\pi - x)$
   (c) $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad Y(0,t) = 0, \quad Y(20,t) = 0, \quad Y_t(x,0) = 0, \quad Y(x,0) = 10\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$
   (d) $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \ Y(0,t) = 0, \ Y(10,t) = 0, Y_t(x,0) = 0, \ Y(x,0) = 3\sin 2\pi x - 4\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)$
   (e) $9\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \ Y(0,t) = 0, \ Y(\pi,t) = 0, Y_t(x,0) = 2\sin x - 3\sin(2x), \ Y(x,0) = 0$
   (f) $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U, \ U(0,t) = 0, \ U(10,t) = 0, \ U(x,0) = 5\sin(2\pi x) - \sin(4\pi x)$

9. Encuentre la serie de Fourier en el intervalo. Dibuje la gráfica de la función.
   (a) $f(x) = -x$ para $-1 \leq x \leq 1$
   (b) $f(x) = 1 - |x|$ para $-2 \leq x \leq 2$
   (c) $f(x) = \cosh(\pi x)$, $-1 \leq x \leq 1$
   (d) $f(x) = \sin(2x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$
   (e) $f(x) = x^2 - x + 3$, $-\pi \leq x \leq \pi$
   (f) $f(x) = \cos(x)$, $-3 \leq x \leq 3$
   (g) $f(x) = e^{2x}$, $0 \leq x \leq 3$

10. Encuentre la serie de Fourier en senos y la serie de Fourier en cosenos. Dibuje la gráfica de la función.
    (a) $f(x) = \exp(2x)$, $0 \leq x \leq 3$
    (b) $f(x) = \cos(x)$, $0 \leq x \leq 3$