

Escuela Superior de Física y Matemáticas  
Ecuaciones Diferenciales Parciales I  
Problemario 2022

---

Instrucciones: Resuelva los ejercicios de la manera más detallada, completa y clara posible.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones, para  $u(x, y)$ .

(a)  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

(b)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

2. Resuelva las ecuaciones de primer orden.

(a)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0$

(b)  $u_{xy} + u_x = 0$

(c)  $x \frac{\partial u}{\partial x} + 3u = x^2$

3. La ecuación  $u_t + cu_x + \lambda u = f(x, t)$  puede resolverse introduciendo las variables  $\zeta = x - ct, \tau = t$ .

(a) Use la regla de la cadena para demostrar que  $u_\tau + \lambda u = f(\zeta + c\tau, \tau)$ , la cual es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en la variable  $\tau$  y donde  $\zeta$  es un parámetro.

(b) Resuelva la ecuación  $u_t + u_x - u = t$  utilizando la técnica descrita.

4. Resuelva las ecuaciones de primer orden para  $u(x, y)$  con las condiciones de frontera dadas.

(a)  $x \frac{\partial u}{\partial x} + xy = u, u = 2y$  sobre la línea  $x = 1$ .

(b)  $1 + x \frac{\partial u}{\partial x} = xu, u(x, 0) = x$ .

(c)  $\frac{\partial U}{\partial x} = \sin y, U(0, y) = 0$

(d)  $u_y - u_x = 0, \quad \text{con} \quad u(x, 0) = e^{-3x^2}$

5. Use el método de separación de variables para resolver las ecuaciones de primer orden para  $U(x, y)$  con las condiciones de frontera dadas.

(a)  $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = U, \quad \text{para} \quad U(0, y) = 2e^{-y} + 3e^{-2y}.$

(b)  $4 \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x} = 3Y, \quad \text{para} \quad Y(x, 0) = 4e^{-x} - e^{-5x}.$

6. Clasifique las ecuaciones de segundo orden de dos variables con coeficientes constantes y redúzcalas a su forma canónica.

(a)  $u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} = 0$

(b)  $9u_{xx} + 10u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u_y + xy = 0$

(c)  $2u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} - u = 0$

7. Encuentre la solución general de las ecuaciones de segundo orden de dos variables con coeficientes constantes, reduciéndolas primero a su forma canónica.

(a)  $2u_{xx} + 6u_{xy} - 5u_{yy} = 1$

8. Use el método de separación de variables para resolver los siguientes problemas con valores de frontera.

(a)  $2 \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$   $U(0, t) = 0$ ,  $U(\pi, t) = 0$ ,  $U(x, 0) = 2 \sin(3x) - 5 \sin(4x)$

(b)  $\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$   $U(0, t) = 0$ ,  $U(\pi, t) = 0$  para  $t > 0$ ,  $U(x, 0) = 5x(\pi - x)$

(c)  $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$   $Y(0, t) = 0$ ,  $Y(20, t) = 0$ ,  $Y_t(x, 0) = 0$ ,  $Y(x, 0) = 10 \sin(\frac{\pi x}{2})$

(d)  $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ ,  $Y(0, t) = 0$ ,  $Y(10, t) = 0$ ,  $Y_t(x, 0) = 0$ ,  $Y(x, 0) = 3 \sin 2\pi x - 4 \sin(\frac{5\pi x}{2})$

(e)  $9 \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ ,  $Y(0, t) = 0$ ,  $Y(\pi, t) = 0$ ,  $Y_t(x, 0) = 2 \sin x - 3 \sin(2x)$ ,  $Y(x, 0) = 0$

(f)  $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U$ ,  $U(0, t) = 0$ ,  $U(10, t) = 0$ ,  $U(x, 0) = 5 \sin(2\pi x) - \sin(4\pi x)$

9. Encuentre la serie de Fourier en el intervalo. Dibuje la gráfica de la función.

(a)  $f(x) = -x$  para  $-1 \leq x \leq 1$

(b)  $f(x) = 1 - |x|$  para  $-2 \leq x \leq 2$

(c)  $f(x) = \cosh(\pi x)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$

(d)  $f(x) = \sin(2x)$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$

(e)  $f(x) = x^2 - x + 3$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$

(f)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $-3 \leq x \leq 3$

(g)  $f(x) = e^{2x}$ ,  $0 \leq x \leq 3$

10. Encuentre la serie de Fourier en senos y la serie de Fourier en cosenos. Dibuje la gráfica de la función.

(a)  $f(x) = \exp(2x)$ ,  $0 \leq x \leq 3$

(b)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $-3 \leq x \leq 3$