Escuela Superior de Física y Matemáticas
Ecuaciones Diferenciales Parciales I
Problemario 2022

Intrucciones: Resuelva los ejercicios de la manera más detallada, completa y clara posible.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones, para $u(x,y)$.
   (a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
   (b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

2. Resuelva las ecuaciones de primer orden.
   (a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0$
   (b) $u_{xy} + u_x = 0$
   (c) $x\frac{\partial u}{\partial x} + 3u = x^2$

3. La ecuación $u_t + cu_x + \lambda u = f(x,t)$ puede resolverse introduciendo las variables $\zeta = x - ct$, $\tau = t$.
   (a) Use la regla de la cadena para demostrar que $u_\tau + \lambda u = f(\zeta + c\tau, \tau)$, la cual es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en la variable τ y donde ζ es un parámetro.
   (b) Resuelva la ecuación $u_t + u_x - u = t$ utilizando la técnica descrita.

4. Resuelva las ecuaciones de primer orden para $u(x,y)$ con las condiciones de frontera dadas.
   (a) $x\frac{\partial u}{\partial x} + xy = u$, $u = 2y$ sobre la línea $x = 1$.
   (b) $1 + x\frac{\partial u}{\partial x} = xu$, $u(x,0) = x$.
   (c) $\frac{\partial U}{\partial x} = \sin y$, $\quad U(0,y) = 0$
   (d) $u_y - u_x = 0$, $\quad$ con $\quad u(x,0) = e^{-3x^2}$

5. Use el método de separación de variables para resolver las ecuaciones de primer orden para $U(x,y)$ con las condiciones de frontera dadas.
   (a) $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = U$, $\quad$ para $\quad U(0,y) = 2e^{-y} + 3e^{-2y}$.
   (b) $4\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x} = 3Y$, $\quad$ para $\quad Y(x,0) = 4e^{-x} - e^{-5x}$.

6. Clasifique las ecuaciones de segundo orden de dos variables con coeficientes constantes y redúzcalas a su forma canónica.
   (a) $u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} = 0$
   (b) $9u_{xx} + 10u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u_y + xy = 0$
   (c) $2u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} - u = 0$

7. Encuentre la solución general de las ecuaciones de segundo orden de dos variables con coeficientes constantes, reduciéndolas primero a su forma canónica.
   (a) $2u_{xx} + 6u_{xy} - 5u_{yy} = 1$

8. Use el método de separación de variables para resolver los siguientes problemas con valores de frontera.
   (a) $2\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad U(0,t)=0, \quad U(\pi,t)=0, \quad U(x,0)=2\sin(3x)-5\sin(4x)$
   (b) $\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad U(0,t)=0, \quad U(\pi,t)=0$ para $t>0$, $\qquad U(x,0)=5x(\pi-x)$
   (c) $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad Y(0,t)=0, \quad Y(20,t)=0, \quad Y_t(x,0)=0, \quad Y(x,0)=10\sin(\frac{\pi x}{2})$
   (d) $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \ Y(0,t)=0, \ Y(10,t)=0, Y_t(x,0)=0, \ Y(x,0)=3\sin 2\pi x-4\sin(\frac{5\pi x}{2})$
   (e) $9\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \ Y(0,t)=0, \ Y(\pi,t)=0, Y_t(x,0)=2\sin x-3\sin(2x), \ Y(x,0)=0$
   (f) $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+U, \ U(0,t)=0, \ U(10,t)=0, \ U(x,0)=5\sin(2\pi x)-\sin(4\pi x)$

9. Encuentre la serie de Fourier en el intervalo. Dibuje la gráfica de la función.
   (a) $f(x)=-x$ para $-1\le x\le 1$
   (b) $f(x)=1-|x|$ para $-2\le x\le 2$
   (c) $f(x)=\cosh(\pi x)$, $-1\le x\le 1$
   (d) $f(x)=\sin(2x)$, $-\pi\le x\le \pi$
   (e) $f(x)=x^2-x+3$, $-\pi\le x\le\pi$
   (f) $f(x)=\cos(x)$, $-3\le x\le 3$
   (g) $f(x)=e^{2x}$, $0\le x\le 3$

10. Encuentre la serie de Fourier en senos y la serie de Fourier en cosenos. Dibuje la gráfica de la función.
   (a) $f(x)=\exp(2x)$, $0\le x\le 3$
   (b) $f(x)=\cos(x)$, $0\le x\le 3$

11. Resuelva el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$u(0,t)=u(1,t)=0, \quad t>0$$
$$u(x,0)=f(x), \quad 0<x<1$$

   Para:
   (a) $f(x)=-2$
   (b) $f(x)=2x+1$
   (c)

$$f(x)=\begin{cases} x, & si \quad 0<x\le 1/2, \\ 0, & si \quad 1/2<x<1 \end{cases} \tag{1}$$

12. Resuelva el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < 1$$

Para:

(a) $f(x) = 3 - 2\cos(4\pi x)$

(b) $f(x) = 2 - 3x$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} -2, & si \quad 0 < x \leq 1/2, \\ 0, & si \quad 1/2 < x < 1 \end{cases} \tag{2}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si \quad 0 < x \leq 1/2, \\ 2x, & si \quad 1/2 < x < 1 \end{cases} \tag{3}$$

13. Resuelva el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$u(-1,t) = u(1,t), \qquad \frac{\partial u(-1,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} \quad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad -1 < x < 1$$

Para:

(a) $f(x) = 2\sin(2\pi x) - 5\cos(5\pi x)$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 3, & si \quad -1 < x \leq 0, \\ 0, & si \quad 0 < x < 1 \end{cases} \tag{4}$$

14. Resuelva el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0 \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(t), \quad 0 < x < 1$$

Para:

(a) $f(x) = -3\sin(2\pi x) + 4\sin(7\pi x), \quad g(x) = \sin(3\pi x)$

(b) $f(x) = 2\sin(3\pi x), \quad g(x) = 2$

(c)
$$f(x) = \begin{cases} 1, & si \quad 0 < x \leq 1/2, \\ \\ 2, & si \quad 1/2 < x < 1 \end{cases} \tag{5}$$
$$g(x) = 3\sin(2\pi x)$$

15. Encuentre la solución general de las ecuaciones de segundo orden de dos variables con coeficientes constantes, reduciéndolas primero a su forma canónica.
    (a) $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = e^y$
    (b) $4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2$
    (c) $3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} = 0$