Ejemplo: Resuelva el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < 1$$

Solución:

Paso 1: Separación de variables: Suponemos una solución de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Derivamos y al sustituir en la ecuación (1) obtenemos la igualdad:

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t).$$

Como ni $X(x)$ ni $T(t)$ son 0, porque de serlo, también u lo sería, podemos dividir la última ecuación por $kX(x)T(x)$ para obtener:

$$\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Del lado izquierdo se tiene una función de t y del lado derecho una función de x, la única forma de que se cumpla la igualdad es que ambos sean iguales a la misma constante. Acordaremos escribir esa *constante de separación* como $-\lambda$, para utilizar los resultados de los problemas de Sturm-Liouville. Así:

$$\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \tag{2}$$

Entonces, las ecuaciones separadas son:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L, \tag{3}$$

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0, \quad t > 0. \tag{4}$$

Para completar la separación, acotamos las condiciones de frontera. Notemos que $u(0,t) = X(0)T(t) = 0$ para todo $t > 0$. Como $T \neq 0$, se sigue que $X(0) = 0$. Analogamente, $u(L,t) = 0$ lleva a la condición $X(L) = 0$.

Paso 2: Problema de Sturm-Liouville: Cuando sea el caso, podremos identificar algún problema de Strum-Liouville (recordar que la definición de estos problemas incluye dos condiciones de frontera).

En este ejemplo, la ecuación separada que es un problema S-L es:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

Este problema de S-L ya lo hemos resuelto y sabemos que sus valores propios y sus funciones propias tienen la forma:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin(\frac{n\pi x}{L}), \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{5}$$

Entonces, para cada λ_n, de la ecuación (4) encontramos una componente temporal de la solución. Es decir:

$$T_n(t) = e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{6}$$

Nota:

1. Aquí hemos tomado la constante de integración de la componente temporal igual a 1, porque se *incorporará* en en el siguiente paso.

2. Observar que las funciones propias del problema S-L se han escrito sin la constante que suele acompañarlas.

Paso 3: Series de Fourier: Combinamos las soluciones para escribir:

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \sin(\frac{n\pi x}{L})e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{7}$$

Ahora, por el *Principio de Superposición* sabemos que cualquier combinación lineal finita de estas soluciones de la ecuacion (1):

$$\sum_{n=1}^{N} b_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}, \tag{8}$$

con b_n arbitrarios, también será solución. Y para satisfacer la condición inicial ($u(x,0) = f(x)$) planteamos la igualdad:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}.$$

Si es imposible satisfacer esta igualdad, usamos una combinación infinita:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}, \quad 0 < x < L.$$

Pero esta serie ya la conocemos, es la serie de Fourier en senos, y sabemos que debemos calcular sus coeficentes por medio de la fórmula:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx \tag{9}$$

Así, la solución final será:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t},$$

con los coeficientes dados por la fórmula (9).

Notas:

1. En este paso, la fórmula (9) puede usarse directamente, sin hacer análisis sobre la paridad de la función f(x); ese análisis corresponde al siguiente paso.

2. Para otros problemas, la fórmula (9) podría corresponder a una serie generalizada de Fourier. Para calcular los coeficientes se usan las propiedades de ortogonalidad de las funciones propias.

3. Si $\lambda = 0$ también fuese una solución aceptable, verificamos que la solución final incluya el término correspondiente a $n = 0$.

Paso 4: Análisis de la Solución: Conviene graficar la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ junto con la solución obtenida para $t = 0$. En caso de que la solución esté en términos de una serie infinita, hacemos la grafica para alguna cantidad conveniente de armónicos. Para este paso utilizamos algún software conveniente.

Graficamos también la solución para diferentes valores de t, para ver cómo evoluciona la solución a lo largo del tiempo e intentamos identificar si existe un estado estacionario. Cuando sea posible, podemos analizar el límite $t \to \infty$ directamente de la solución.