

Ecuaciones Diferenciales Parciales I
Tema: Método de Separación de variables I

Notación: $D_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$, $D_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}$

Una EDP en dos variables, x y y , es **lineal** si tiene la forma:

$$\phi(D_x, D_y)U = F(x, y) \quad (1)$$

donde el operador $\phi(D_x, D_y)$ es un polinomio en los dos operadores D_x y D_y .

Ejemplo 1: Si $\phi = D_x^2 + 4D_x D_y - 2D_y^2 - 3D_x + 5$, $F(x, y) = x^3 - e^y$, la ecuación (1) es:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 3 \frac{\partial U}{\partial x} + 5U = x^3 - e^y$$

, y es lineal.

Ejemplo 2: La ecuación:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = 3x - 2y$$

, no es lineal.

Teorema 1: La solución general de la ecuación lineal:

$$\phi(D_x, D_y, \dots)U = F(x, y, \dots) \quad (2)$$

donde x, y, \dots son variables independientes y $\phi(D_x, D_y, \dots)$ es un operador polinómico en D_x, D_y, \dots es la suma de la solución general U_c de la *ecuación complementaria*

$$\phi(D_x, D_y, \dots)U = 0 \quad (3)$$

y cualquier solución particular U_p de la ecuación (2), esto es,

$$U = U_c + U_p \quad (4)$$

Teorema 2 (Principio de Superposición): Sean U_1, U_2, \dots soluciones de la ecuación

$$\phi(D_x, D_y, \dots)U = 0$$

Entonces si a_1, a_2, \dots son constantes cualesquiera

$$U = a_1 U_1 + a_2 U_2 + \dots \quad (5)$$

también es una solución.

Método de separación de variables: Para hallar una solución particular de la ecuación (1) suponemos una solución de la forma

$$U(x, y) = X(x)Y(y) = XY \quad (6)$$

Nota: Este método a veces funciona y a veces no.