

Escuela Superior de Física y Matemáticas
Ecuaciones Diferenciales Parciales I
Problemario 2022

Instrucciones: Resuelva los ejercicios de la manera más detallada, completa y clara posible.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones, para $u(x, y)$.

(a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

(b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

2. Resuelva las ecuaciones de primer orden.

(a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0$

(b) $u_{xy} + u_x = 0$

(c) $x \frac{\partial u}{\partial x} + 3u = x^2$

3. La ecuación $u_t + cu_x + \lambda u = f(x, t)$ puede resolverse introduciendo las variables $\zeta = x - ct, \tau = t$.

(a) Use la regla de la cadena para demostrar que $u_\tau + \lambda u = f(\zeta + c\tau, \tau)$, la cual es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en la variable τ y donde ζ es un parámetro.

(b) Resuelva la ecuación $u_t + u_x - u = t$ utilizando la técnica descrita.

4. Resuelva las ecuaciones de primer orden para $u(x, y)$ con las condiciones de frontera dadas.

(a) $x \frac{\partial u}{\partial x} + xy = u, u = 2y$ sobre la línea $x = 1$.

(b) $1 + x \frac{\partial u}{\partial x} = xu, u(x, 0) = x$.

(c) $\frac{\partial U}{\partial x} = \sin y, U(0, y) = 0$

(d) $u_y - u_x = 0, \quad \text{con} \quad u(x, 0) = e^{-3x^2}$

5. Use el método de separación de variables para resolver las ecuaciones de primer orden para $U(x, y)$ con las condiciones de frontera dadas.

(a) $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = U, \quad \text{para} \quad U(0, y) = 2e^{-y} + 3e^{-2y}.$

(b) $4 \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x} = 3Y, \quad \text{para} \quad Y(x, 0) = 4e^{-x} - e^{-5x}.$

6. Clasifique las ecuaciones de segundo orden de dos variables con coeficientes constantes y redúzcalas a su forma canónica.

(a) $u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} = 0$

(b) $9u_{xx} + 10u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u_y + xy = 0$

(c) $2u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} - u = 0$

7. Encuentre la solución general de las ecuaciones de segundo orden de dos variables con coeficientes constantes, reduciéndolas primero a su forma canónica.

(a) $2u_{xx} + 6u_{xy} - 5u_{yy} = 1$

8. Use el método de separación de variables para resolver los siguientes problemas con valores de frontera.

(a) $2 \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ $U(0, t) = 0$, $U(\pi, t) = 0$, $U(x, 0) = 2 \sin(3x) - 5 \sin(4x)$

(b) $\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ $U(0, t) = 0$, $U(\pi, t) = 0$ para $t > 0$, $U(x, 0) = 5x(\pi - x)$

(c) $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ $Y(0, t) = 0$, $Y(20, t) = 0$, $Y_t(x, 0) = 0$, $Y(x, 0) = 10 \sin(\frac{\pi x}{2})$

(d) $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, $Y(0, t) = 0$, $Y(10, t) = 0$, $Y_t(x, 0) = 0$, $Y(x, 0) = 3 \sin 2\pi x - 4 \sin(\frac{5\pi x}{2})$

(e) $9 \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, $Y(0, t) = 0$, $Y(\pi, t) = 0$, $Y_t(x, 0) = 2 \sin x - 3 \sin(2x)$, $Y(x, 0) = 0$

(f) $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U$, $U(0, t) = 0$, $U(10, t) = 0$, $U(x, 0) = 5 \sin(2\pi x) - \sin(4\pi x)$

9. Encuentre la serie de Fourier en el intervalo. Dibuje la gráfica de la función.

(a) $f(x) = -x$ para $-1 \leq x \leq 1$

(b) $f(x) = 1 - |x|$ para $-2 \leq x \leq 2$

(c) $f(x) = \cosh(\pi x)$, $-1 \leq x \leq 1$

(d) $f(x) = \sin(2x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$

(e) $f(x) = x^2 - x + 3$, $-\pi \leq x \leq \pi$

(f) $f(x) = \cos(x)$, $-3 \leq x \leq 3$

(g) $f(x) = e^{2x}$, $0 \leq x \leq 3$

10. Encuentre la serie de Fourier en senos y la serie de Fourier en cosenos. Dibuje la gráfica de la función.

(a) $f(x) = \exp(2x)$, $0 \leq x \leq 3$

(b) $f(x) = \cos(x)$, $0 \leq x \leq 3$

11. Resuelva el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1$$

Para:

(a) $f(x) = -2$

(b) $f(x) = 2x + 1$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 < x \leq 1/2, \\ 0, & \text{si } 1/2 < x < 1 \end{cases} \quad (1)$$

12. Resuelva el problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 < x < 1\end{aligned}$$

Para:

(a) $f(x) = 3 - 2 \cos(4\pi x)$

(b) $f(x) = 2 - 3x$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } 0 < x \leq 1/2, \\ 0, & \text{si } 1/2 < x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < x \leq 1/2, \\ 2x, & \text{si } 1/2 < x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

13. Resuelva el problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(-1,t) &= u(1,t), \quad \frac{\partial u(-1,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \quad -1 < x < 1\end{aligned}$$

Para:

(a) $f(x) = 2 \sin(2\pi x) - 5 \cos(5\pi x)$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } -1 < x \leq 0, \\ 0, & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases} \quad (4)$$

14. Resuelva el problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) &= 0 \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(t), \quad 0 < x < 1\end{aligned}$$

Para:

(a) $f(x) = -3 \sin(2\pi x) + 4 \sin(7\pi x), \quad g(x) = \sin(3\pi x)$

(b) $f(x) = 2 \sin(3\pi x), \quad g(x) = 2$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x \leq 1/2, \\ 2, & \text{si } 1/2 < x < 1 \end{cases} \quad (5)$$
$$g(x) = 3 \sin(2\pi x)$$