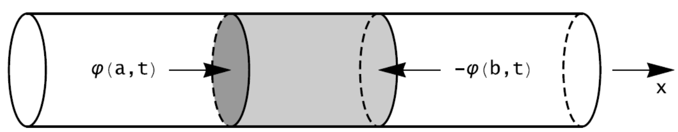
Modelos basados en leyes de conservación
Actividad

Nombre: ______________________________

Intrucciones: Resuelva los ejercicios de la manera más detallada, completa y clara posible. Favor de agregar dudas, comentarios o sugerencias al final del ejercicio.

1. Considere una varilla conductora *unidimensional* y la siguiente notación: L : longitud; A : área de la sección transversal; $E(x,t)$: densidad de energía calorífica (energía calorífica por unidad de volumen). $\varphi(x,t)$: flujo de calor (calor fluyendo a la derecha por unidad de tiempo); $q(x,t)$: fuentes o sumideros de calor (calor generado o perdido por unidad de volumen dentro de la varilla). Suponemos la superficie de la varilla aislada.



   (a) Según la ley de la conservación de la energía: $\Big\{$ Razón de cambio de calor en el cuerpo $\Big\}$ = $\Big\{$ Flujo de calor a través de sus fronteras por unidad de tiempo $\Big\}$ + $\Big\{$ Calor generado o perdido por unidad de tiempo $\Big\}$
   Deduzca la ecuación:
   $$E_t(x,t) = -\varphi_x(x,t) + q(x,t), \quad 0 < x < L, t > 0 \tag{1}$$

   (b) Los parámetros físicos de la varilla son: $u(x,t)$: temperatura: $c(x)$: calor específico (energía que eleva la temperatura de una unidad de masa en una unidad), por simplicidad, se supone independiente de la temperatura; $K_0(x)$: conductividad térmica, se supone también independiente de la temperatura; $\rho(x)$: densidad de masa.
   Deduzca:
   $$E(x,t) = c(x)\rho(x)u(x,t), 0 < x < L, t > 0 \tag{2}$$

   (c) Según la ley de conducción de calor de Fourier:
   $$\varphi(x,t) = -K_0(x)u_x(x,t), 0 < x < L, t > 0 \tag{3}$$
   Use las ecuaciones (2) y (3), suponga que la varilla es uniforme y que no hay fuentes ni sumideros de calor dentro de la varilla para deducir la ecuación de difusión del calor:
   $$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L, t > 0, \tag{4}$$
   donde $k = \frac{K_0}{c\rho}$

   (d) Escriba las condiciones iniciales y de frontera para la ecuación deducida. Comente su significado físico.