

Definición: Una función f definida sobre \mathbf{R} se llama *periódica* si existe un número $T > 0$ tal que: $f(x + T) = f(x)$ para toda $x \in \mathbf{R}$.

El número T más pequeño con esta propiedad se llama *periodo fundamental*.

Lema 3: Se cumplen las siguientes igualdades para $n, m = 1, 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= 0, & \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= 0, \\ \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ L, & \text{si } n = m \end{cases} \\ \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ L, & \text{si } n = m \end{cases} \\ \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Definición: La expansión en serie de Fourier de la función $f(x)$ es:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \tag{2}$$

donde L es un número positivo y a_0, a_n, b_n son constantes determinadas por las siguientes fórmulas, para $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \tag{3}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{4}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{5}$$