Nombre: ____________________

Escala ____________________

Ecuaciones Diferenciales Parciales I
Segundo Examen Parcial
Fecha:21 de diciembre de 2022
Tiempo: 90 minutos

Este examen contiene 3 ejercicios que corresponden a 70 puntos de la primera calificación parcial del curso. Para la calificación de cada ejercicio se consideran los siguientes valores: Planteamineto correcto: 25 %; Desarrollo correcto: 50 %; Solución correcta (incluye la daterminación de constantes y el uso correcto de valores de frontera): 25 %.

Tabla de calificación de uso exclusivo para el profesor.

Pregunta:	1	2	3	Total
Puntos:	20	25	25	70
Resultado:				

1. (20 puntos) Encuentre la solución general de la ecuación de segundo orden de dos variables con coeficientes constantes, reduciéndola primero a su forma canónica.

$$3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} = 0$$

2. (25 puntos) Resuelva el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = 2x + 1, \quad 0 < x < 1$$

3. (25 puntos) Resuelva el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < 1$$

Para:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & si \quad 0 < x \leq 1/2, \\ 0, & si \quad 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

Soluciones

Problema 1. Encuentre la solución general de la ecuación de segundo orden de dos variables con coeficientes constantes, reduciéndola primero a su forma canónica.

$$3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} = 0$$

Solución: Los parámetros de la ecuación son: $A = 3, B = 10, C = 3$. Por tanto, su discriminante es:

$$I = B^2 - 4AC = (10)^2 - 4(3)(3) = 100 - 36 = 64$$

Como $I > 0$, esta ecuación diferencial parcial es hiperbólica. Para llevarla a su forma canónica hacemos el cambio de coordenadas:

$$\xi = a_{11}x + a_{12}y = -(B + \sqrt{I})x + 2Ay = -(10 + \sqrt{64})x + 6y = -18x + 6y$$
$$\eta = a_{21}x + a_{22}y = -(B - \sqrt{I})x + 2Ay = -(10 - \sqrt{64})x + 6y = -2x + 6y$$

A partir de estas expresiones y las siguientes fórmulas:

$$u_{xx} = (a_{11})^2 u_{\xi\xi} + 2a_{11}a_{21}u_{\xi\eta} + (a_{21})^2 u_{\eta\eta}$$
$$u_{xy} = a_{11}a_{12}u_{\xi\xi} + \Big[a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}\Big]u_{\xi\eta} + a_{21}a_{22}u_{\eta\eta}$$
$$u_{yy} = (a_{12})^2 u_{\xi\xi} + 2a_{12}a_{22}u_{\xi\eta} + (a_{22})^2 u_{\eta\eta}$$

encontramos la transformación de las segundas derivadas de u en las nuevas variables:

$$u_{xx} = (-18)^2 u_{\xi\xi} + 2(-18)(-2)u_{\xi\eta} + (-2)^2 u_{\eta\eta} = 324u_{\xi\xi} + 72u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta}$$
$$u_{xy} = (-18)(6)u_{\xi\xi} + \Big[(-18)(6) + (6)(-2)\Big]u_{\xi\eta} + (-2)(6)u_{\eta\eta} = -108u_{\xi\xi} - 120u_{\xi\eta} - 12u_{\eta\eta}$$
$$u_{yy} = (6)^2 u_{\xi\xi} + 2(6)(6)u_{\xi\eta} + (6)^2 u_{\eta\eta} = 36u_{\xi\xi} + 72u_{\xi\eta} + 36u_{\eta\eta}$$

Sustituyendo éstas en la ecuación original y simplificando, tenemos:

$$3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} = 0$$

$$3\Big(324u_{\xi\xi}+72u_{\xi\eta}+4u_{\eta\eta}\Big)+10\Big(-108u_{\xi\xi}-120u_{\xi\eta}-12u_{\eta\eta}\Big)+3\Big(36u_{\xi\xi}+72u_{\xi\eta}+36u_{\eta\eta}\Big)=0$$

.

$$\Big(972-1080+108\Big)u_{\xi\xi}+\Big(216-1200+216\Big)u_{\xi\eta}+\Big(12-120+108\Big)u_{\xi\eta}=0$$

$$-768u_{\xi\eta}=0$$

$$u_{\xi\eta}=0$$

Para hallar la solución general integramos (en realidad, identificamos una antiderivada). Primero respecto a ξ:

$$u_\eta=f(\eta)$$

Y luego respecto a η:

$$u=\int f(\eta)d\eta=A(\eta)+B(\xi)$$

Note que, debido a que no podemos calcular la integral respecto a η, solamente la escribimos de manera general. Finalmente, regresamos a las variables originales para expresar la solución general como:

$$u=A(\eta)+B(\xi)=A(-2x+6y)+B(-18x+6y)\blacksquare$$

Problema 2 Resuelva el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=2x+1,\quad 0<x<1$$

Solución: Suponemos una solución de la forma $u(x,t)=X(x)T(t)$. Al derivar y sustituir, obtenemos:

$$X(x)T'(t)=X''(x)T(t).$$

Dividimos por $X(x)T(t)$, que no es 0, para obtener:

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

Hacemos la separación de variables igualando cada término a la constante $-\lambda$:

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda,$$

Las ecuaciones separadas son:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad 0<x<1,$$

$$T'(t)+\lambda T(t)=0,\quad t>0.$$

De las condiciones de frontera: $u(0,t)=X(0)T(t)=0$ para todo $t>0$. Esto implica que $X(0)=0$. Análogamente, $u(1,t)=0$ implica $X(1)=0$. Así que para $X(x)$ tenemos el problema de Sturm-Liouville (con $L=1$):

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad X(0)=0,\quad X(1)=0$$

que ya hemos resuelto y sabemos que sus valores propios y sus funciones propias son:

$$\lambda_n=(n\pi)^2,\quad X_n(x)=\sin(n\pi x),\quad n=1,2,3,...$$

Luego, para cada λ_n, la componente temporal de la solución es:

$$T_n(t)=e^{-(n\pi)^2t},\quad n=1,2,3,...$$

Combinamos las soluciones para escribir:

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=\sin(n\pi x)e^{-(n\pi)^2t},\quad n=1,2,3,...$$

Y usamos el *Principio de Superposición* para satisfacer la condición inicial (cuando $t=0$):

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\pi x),\quad 0<x<1.$$

Esta es la serie de Fourier en senos, y sabemos que debemos calcular sus coeficentes con la fórmula:

$$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx$$

Así, sustituyendo $f(x)=2x+1$ y usando la fórmula de Kronecker:

$$b_n=2\int_0^1(2x+1)\sin(n\pi x)dx=2[(2x+1)(-\frac{1}{n\pi}cos(n\pi x))+2(\frac{1}{n^2\pi^2})\sin(n\pi x)]\Big|_0^1=[1-(-1)^n3](\frac{2}{n\pi})$$

la solución final es:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-1)^n3](\frac{2}{n\pi})\sin(n\pi x)e^{-(n\pi)^2t}\blacksquare$$

Problema 3: Resuelva el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < 1$$

Para:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & si \quad 0 < x \leq 1/2, \\ 0, & si \quad 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

Solución: Suponemos una solución de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Al derivar y sustituir, obtenemos:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t).$$

Dividimos por $X(x)T(t)$, que no es 0, para obtener:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Hacemos la separación de variables igualando cada término a la constante $-\lambda$:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

Las ecuaciones separadas son:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0, \quad t > 0.$$

De las condiciones de frontera: $\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = X'(0)T(t) = 0$ para todo $t > 0$. Esto implica que $X'(0) = 0$. Análogamente, $\frac{\partial u(1,t)}{\partial t} = 0$ implica $X'(1) = 0$. Así que para $X(x)$ tenemos el problema de Sturm-Liouville (con $L = 1$):

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(1) = 0$$

que ya hemos resuelto y sabemos que sus valores propios y sus funciones propias son:

$$\lambda_n = (n\pi)^2, \quad X_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Luego, para cada λ_n, la componente temporal de la solución es:

$$T_n(t) = e^{-(n\pi)^2 t}, \quad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Combinamos las soluciones para escribir:

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \cos(n\pi x)e^{-(n\pi)^2 t}, \quad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Y usamos el *Principio de Superposición* para satisfacer la condición inicial (cuando $t = 0$):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi x), \quad 0 < x < 1.$$

Y sabemos que debemos calcular sus coeficentes con las fórmulas:

$$A_0 = \int_0^1 f(x)dx$$

$$A_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)dx$$

Así, sustituyendo

$$f(x) = \begin{cases} -2, & si \quad 0 < x \leq 1/2, \\ 0, & si \quad 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

$$A_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} (-2)dx = -1$$

$$A_n = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (-2)\cos(n\pi x)dx = -4\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{-4}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2})$$

la solución final es:

$$u(x,t) = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{4}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2})]\cos(n\pi x)e^{-(n\pi)^2 t} \blacksquare$$