Resolver $f''(x) + \lambda f(x) = 0 \quad 0 < x < L$,

$$f'(0) = 0, \quad f'(L) = 0.$$

Analicemos los posibles valores para λ:

Caso I: $\lambda = 0$.
Se tiene la ecuación $f''(x) = 0$ cuya solución es $f(x) = c_1 x + c_2$.

Para aplicar las condiciones de frontera, hay que observar que al derivar la solución anterior se tiene $f'(x) = c_1$ y, por tanto, de la primera condición de frontera: $c_1 = f'(0) = 0$. Entonces $f(x) = c_2$.
Ahora, nótese que esta solución es consistente con la segunda condición de frontera $f'(L) = 0$. ¿Qué significa esto?
Buscamos soluciones distintas de 0, así que podemos aceptar esta solución, siempre que $c_2 \neq 0$, por ejemplo:

$$\lambda = 0, \quad f_0(x) = \frac{1}{2}$$

Caso II: $\lambda < 0$. Por conveniencia, hacemos $\lambda = -\mu^2$.
Se tiene la ecuación diferencial $f''(x) - \mu^2 f(x) = 0$, cuya ecuación característica es $m^2 - \mu^2 = 0$, con raices es $m = \pm\mu$ Entonces la solución de la ecuación diferencial es:

$$f(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}$$

Para aplicar las condiciones de frontera, derivamos la solución:

$$f'(x) = \mu c_1 e^{\mu x} - \mu c_2 e^{-\mu x}$$

Ahora, de la primera condición de frontera:

$$f'(0) = \mu c_1 - \mu c_2 = 0$$

Que lleva a la igualdad: $c_1 = c_2$.
Luego, de la segunda condición de frontera:

$$f'(L) = \mu c_1 e^{\mu L} - \mu c_2 e^{-\mu L} = 2\mu c_1 \Big(\frac{e^{\mu L} - e^{-\mu L}}{2}\Big) = 2\mu c_1 \sinh{(\mu L)} = 0$$

Que implica que $c_1 = 0$. Por tanto, no hay soluciones con valores propios negativos.

Caso III: $\lambda > 0$.
Se tiene la ecuación $f''(x) + \lambda f(x) = 0$, cuya ecuación característica es $m^2 + \lambda = 0$, y cuya solución es $m = \pm\sqrt{\lambda} i$. Entonces la solución de la ecuación diferencial es:

$$f(x) = c_1 \cos{(\sqrt{\lambda} x)} + c_2 \sin{(\sqrt{\lambda} x)}$$

Para aplicar las condiciones de frontera, derivamos la solución:

$$f'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

De la primera condición de frontera:

$$f'(0) = c_2\sqrt{\lambda} = 0$$

Por tanto: $c_2 = 0$. De modo que la solución debe tener la forma: $f(x) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}x)$. Y la derivamos para sustituir la segunda condición de frontera:

$$f'(L) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

Esperamos que $c_1 \neq 0$ para no tener una solución trivial, entonces:

$$\sqrt{\lambda_n}L = n\pi,$$

para n entero positivo. Por tanto, la solución es:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad c_1\cos(\frac{n\pi x}{L})$$

Finalmente, obsérvese que si se permite que $n = 0, 1, 2, 3, ...$ esta última solución contiene al valor y función propia correspondiente a $n = 0$.