1. Problemas de valores propios

Definición: Sea χ un espacio de funciones definidas sobre el mismo intervalo I. Un operador diferencial lineal L sobre χ se llama **simétrico** si:

$$\int_I [f_1(x)(Lf_2)(x) - f_2(x)(Lf_1)(x)]dx = 0$$

para cualesquiera funciones f_1 y f_2 en χ.

Definición: Sea σ una función definida sobre I con la propiedad de que $\sigma > 0$ para toda x en I. Dos funciones, f_1 y f_2, también definidas sobre I, se llaman **ortogonales con peso** σ sobre I si:

$$\int_I f_1(x)f_2(x)\sigma(x)dx = 0$$

Si $\sigma(x) = 1$, entonces f_1 y f_2 simplemente se llaman **ortogonales**. Un conjunto de funciones que son ortogonales a pares, se llama un **conjunto ortogonal**.

Definición: Sea un operador diferencial sobre un espacio χ de funciones definidas sobre (a, b). Una ecuación de la forma

$$(Lf)(x) + \lambda\sigma(x)f(x) = 0, \quad a < x < b \tag{1}$$

donde λ es un parámetro y σ es una función dada tal que $\sigma(x) > 0$ para todo x en (a, b) se llama un **problema de valores propios**. Los números λ para los que existe solución distinta de 0 en χ se llaman **valores propios** y sus correspondientes soluciones se llaman **funciones propias**.

Teorema: Si el operador L del problema de valores propios (1) es simétrico, entonces:

1. Todos los valores propios λ son reales;
2. Los valores propios forman una secuencia infinita $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ...$ tal que $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$;
3. Funciones propias asociadas con distintos valores propios son ortogonales con peso σ en (a, b).

2. Problemas de Sturm-Liouville

Definición: Sea $[a, b]$ un intervalo finito, sean p, q y σ funciones de valores reales, y sean $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ y κ_4 números reales tales que:

1. La función p es continuamente diferenciable en $[a, b]$ y $p(x) > 0$ para todo x en $[a, b]$;
2. Las funciones q y σ son continuas en $[a, b]$ y $\sigma(x) > 0$ para todo x en $[a, b]$;
3. Los parámetros κ_1 y κ_2 no son ambos cero y κ_3 y κ_4 no son abos cero.

Un problema de valores propios de la forma

$$[p(x)f'(x)]' + q(x)f(x) + \lambda\sigma(x)f(x) = 0, \quad a < x < b, \tag{2}$$

con las condiciones de frontera:

$$\kappa_1 f(a) + \kappa_2 f'(a) = 0$$

$$\kappa_2 f(b) + \kappa_3 f'(b) = 0$$

se llama un **problema regular de Surm-Liouville** (S-L).

Teorema: El operador

$$Lf = (pf')' + qf$$

definido en el lado izquierdo de la ecuación (2) es simétrico.

Corolario: Los valores propios y las funciones propias de un problema S-L tienen las propiedades descritas por el Teorema de la sección anterior.