高数数学（第2版）

1 集合的基本概念和运算

- 集合的定义
  - 集合（set）：$A=\{x\mid P(x)\}$
  - 元素（element）：$a\in A$，$a\notin A$
  - 空集（empty set）：$\varnothing$
- 常用数集
  - 自然数集（natural number）：$\mathbb{N}$
  - 整数集（integer）：$\mathbb{Z}$
  - 有理数集（rational number）：$\mathbb{Q}$
  - 实数集（real number）：$\mathbb{R}$
  - 复数集（complex number）：$\mathbb{C}$
- 集合的表示
  - 列举法：$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$
  - 描述法：$A=\{x\mid P(x)\}$
  - 区间：(a,b)，$[a,b]$，$(a,b]$，$[a,b)$，$(-\infty,b]$，$[a,+\infty)$
- 集合的运算
  - 并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$
  - 交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$
  - 差集：$A\setminus B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$
  - 补集：$\complement_U A=U\setminus A$
  - 笛卡尔积：$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$
  - 幂集：$2^A=\{B\mid B\subseteq A\}$，$|2^A|=2^{|A|}$

2 几何基本概念

- 点
  - 坐标（coordinate）：(x,y)，(x,y,z)
  - 距离（distance）：$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
  - 中点（midpoint）：$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+x_2}{2}\right)$
  - 分点（division point）：$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$
- 线
  - 直线（straight line）：$Ax+By+C=0$
  - 线段（segment）：$\{(x,y)\mid x=x_1+t(x_2-x_1),y=y_1+t(y_2-y_1),0\le t\le 1\}$
  - 射线（ray）：$\{(x,y)\mid x=x_1+t(x_2-x_1),y=y_1+t(y_2-y_1),t\ge 0\}$
  - 曲线（curve）：$\{(x,y)\mid F(x,y)=0\}$
- 面
  - 平面（plane）：$Ax+By+Cz+D=0$
  - 曲面（surface）：$\{(x,y,z)\mid F(x,y,z)=0\}$
- 角
  - 夹角（angle）：$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
  - 直线夹角（angle between two lines）：$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
  - 平面夹角（angle between two planes）：$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

3 函数的基本概念

- 1 函数的定义、性质、反函数
  - 函数的定义
    - 定义：$y=f(x)$，$x\in D$，$y\in R$
    - 函数的三要素：定义域（domain）、对应法则（rule）、值域（range）
    - 函数的表示：解析式、图像、表格
    - 分段函数（piecewise function）：$f(x)=\begin{cases}g(x), & x\in D_1\\ h(x), & x\in D_2\end{cases}$
    - 隐函数（implicit function）：$F(x,y)=0$
    - 参数方程（parametric equation）：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，$t\in I$
    - 反函数（inverse function）：$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$
  - 函数的性质
    - 奇偶性（parity）
      - 定义：$f(-x)=f(x)$（偶函数）；$f(-x)=-f(x)$（奇函数）
      - 奇函数的图形关于原点对称
      - 偶函数的图形关于纵轴对称
      - 奇函数在对称区间上的积分为零
      - 偶函数在对称区间上的积分是半区间上的积分的两倍
      - 奇函数的导数是偶函数
      - 偶函数的导数是奇函数
      - 奇函数的原函数中，只有偶函数是奇函数
      - 偶函数的原函数中，只有奇函数是偶函数
      - 奇函数的反函数是奇函数
      - 偶函数的反函数不存在
      - 奇函数的复合函数是奇函数
      - 偶函数的复合函数是偶函数
      - 奇函数与偶函数的乘积是奇函数
      - 奇函数的和是奇函数
      - 偶函数的和是偶函数
      - 奇函数的差是奇函数
      - 偶函数的差是偶函数
      - 奇函数的商是偶函数
      - 偶函数的商是偶函数
      - 奇函数的倒数是奇函数
      - 偶函数的倒数是偶函数
    - 单调性（monotonicity）
      - 定义：$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$（单调增）；$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$（单调减）
      - 单调增函数的反函数也是单调增函数
      - 单调减函数的反函数也是单调减函数
      - 单调增函数的导数大于零
      - 单调减函数的导数小于零
      - 单调增函数的复合函数是单调增函数
      - 单调减函数的复合函数是单调减函数
      - 单调增函数与单调减函数的复合函数是单调减函数
      - 单调增函数与单调增函数的复合函数是单调增函数
      - 单调减函数与单调减函数的复合函数是单调增函数
    - 周期性（periodicity）
      - 定义：$f(x+T)=f(x)$，T 为周期
      - 周期函数的导数是周期函数
      - 周期函数的原函数不一定是周期函数
      - 周期函数的原函数是周期函数的充分必要条件是 $\int_0^T f(x)\,dx=0$
      - 周期函数的复合函数是周期函数
    - 有界性（boundedness）
      - 定义：$|f(x)|\le M$
      - 有界函数的复合函数是有界函数
      - 有界函数的和是有界函数
      - 有界函数的差是有界函数
      - 有界函数的乘积是有界函数
      - 有界函数的商是有界函数
      - 有界函数的倒数是有界函数
      - 有界函数的反函数是有界函数
      - 有界函数的原函数是有界函数
      - 有界函数的导数是有界函数
      - 有界函数的复合函数是有界函数
      - 有界函数与无界函数的乘积是无界函数
      - 有界函数与无界函数的和是无界函数
      - 有界函数与无界函数的差是无界函数
      - 有界函数与无界函数的商是无界函数
      - 有界函数与无界函数的倒数是无界函数
      - 有界函数与无界函数的反函数是无界函数
      - 有界函数与无界函数的原函数是无界函数
      - 有界函数与无界函数的导数是无界函数
      - 有界函数与无界函数的复合函数是无界函数
  - 反函数的定义
    - 定义：$y=f(x)$，$x\in D$，$y\in R$，$x=f^{-1}(y)$
    - 反函数的性质
      - 反函数的定义域是原函数的值域
      - 反函数的值域是原函数的定义域
      - 反函数的图形关于直线 $y=x$ 对称
      - 反函数的导数是原函数的导数的倒数
      - 反函数的反函数是原函数
      - 反函数的复合函数是恒等函数
      - 反函数的原函数是原函数的反函数
      - 反函数的原函数的导数是原函数的导数的倒数
      - 反函数的原函数的反函数是原函数
      - 反函数的原函数的复合函数是恒等函数
      - 反函数的原函数的原函数是原函数
      - 反函数的原函数的导数是原函数的导数的倒数
      - 反函数的原函数的复合函数是恒等函数
      - 反函数的原函数的反函数是原函数
      - 反函数的原函数的原函数是原函数
      - 反函数的原函数的导数是原函数的导数的倒数
      - 反函数的原函数的复合函数是恒等函数
- 2 函数的极限、连续性、间断点
  - 数列极限
    - 定义：$\lim_{n\to\infty}x_n=a$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon$
    - 数列极限的唯一性
    - 数列的有界性
    - 数列的保号性
    - 数列的收敛性
    - 数列的单调性
    - 数列的极限
    - 数列的