第一章、集合、映射和函数

一、集合的概念

集合的定义

- 具有某一个特定属性的，确定的，有区别的事物（不论是抽象的还是具体的）的全体称为集合，集合中的事物称为元素
- 若a是集合A中的元素，记作$a \in A$

集合的性质

- 确定性
- 互异性
- 无序性

数集与点集

- 集合中的元素是数，整数，自然数，正数，有理数。无理数
- 集合中的元素是坐标系中的点，$\{\{x, y\}|x + y < 3\}$、$\{\{x, y\}|x^2 + y^2 = 3\}$

集合之间的包含关系

- 两个集合A、B，若存在$x \in A$，都有$x \in B$，则称A是B的子集，记$A \subset B$

二、映射的概念

映射的定义

- 设A, B是两个非空集合，如果，存在一个法则f，使得对A中的每一个元素a，按法则f，在B中有唯一确定的元素b与之对应，那么称f为从A到B的映射，记作$f : A \to B$
- b称为元素a在映射f下的像，记为$b = f(a)$
- A称为映射f的定义域，记作D_f
- A中所有元素的像所组成的集合称为映射f的值域，记为R_f

- $$R_f = f(A) = \{f(a)|a \in A\} \tag{1}$$
- 映射三要素：定义域，值域，对应法则
- 定义域$D_f = A$
- 值域$R_f \subset B$
- 对于每一个$a \in A$，元素a的像b唯一
- 对于每一个$b \subset R_f$，元素b的原像不一定唯一

满射

- 设f是集合A到集合B的映射，满足$R_f = B$

单射

- 单射 — —对于A中的任意两个不同的元素，若$a_1 \neq a_2$，则$f(a_1) \neq f(a_2)$

一 一映射

- 一 一映射--f即是单射，又是满射

逆映射

集合元素的个数

- 如果存在一种映射关系，即使A、B两个集合一一映射，则称A、B元素个数相同。

三、函数的概念

函数定义

- 设数集$D \subset R$，则称映射$f : D \to R$为定义在D上的汉化，记为$y = f(x)$，$x \in D$，x称为自变量，y称为因变量，D称为定义域，$D_f = D$
- 函数是实数集到实数集的映射
- 函数的构成要素--定义域及对应法则

定义域

- 实际背景确定定义
- 自然定义域- -使算式有意义的集合

反函数

函数的表示方法

- 解析法
- 表格法
- 图形法

四、函数特征

函数单调性

- 单调递增
- 单调递减

极值点

- 极大值
- 极小值

奇偶性

- 奇函数
- 偶函数

周期性

$f(x+t)=f(t)$

函数的关键点

- 四个值：最大、最小、极大、极小
- 单调区间：增区间、减区间
- 对称性：原点对称、轴对称

五、常见函数

基本初等函数

- 幂函数：$y=x^{\alpha}(\alpha \in R，常数)$
- 指数函数：$y=a^{x}(a>0，且 a \neq 1)$
- 对数函数：$y=log_{a}x(a>0，且 a \neq 1)$
- 三角函数：$y=sin(x)$、$y=cos(x)$、$y=tan(x)$
- 反三角函数

初等函数

- 由常数和基本初等函数经过 **有限次的四则运算** 和 **有限次的复合步骤** 构成并可用一个式子表示的函数

一次函数

$y=ax+b$

二次函数

$y=ax^{2}+bx+c$

$y = a(x-m)^2 + c$

> 幂函数

> 指数函数

$y = a^x$

> 对数函数

$y = log_a x(a > 0，a \neq 1)$

$log_a x_1 \pm log_a x_2 = log_a(x_1 * // x_2)$

$log_{a^m} x^n = \frac{n}{n} log_a x$

$log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}$

> 对数函数

$y = log_a x(a > 0，且 a \neq 1)$

> 三角函数

$y = asin(wx+\psi)、y = acos(wx+\psi)、y = atan(wx+\psi)$

与傅里叶级数有关

$T = \frac{2\pi}{w}$

六、方程与函数

> 函数一定时方程，方程不一定是函数

> 参数方程

$$\begin{cases} x = a(t) \\ y = b(t) \end{cases} \tag{2}$$

> 极坐标系

> 椭圆方程

> 爱心方程

$$x^2 + (y - x^{\frac{2}{3}})^2 = 9 \tag{3}$$

七、函数应用举例

无