Advanced Industrial Mathematics
Fall 2025

Ju Ming

jming@hust.edu.cn
Huazhong University of Science and Technology

September 8, 2025

第一章 1：线性空间和线性变换

1.1 线性空间

1.2 内积空间

1.3 线性变换

Chap 1：线性空间和线性变换

Example 1.0.1

1. (加法） If $x, y \in \mathcal{Z}$,then $x + y \in \mathcal{Z}$;
2. (数乘) If $c \in \mathcal{Z}$, then $cx \in \mathcal{Z}$;
3. If $c \notin \mathcal{Z}$, then in most case, $cx \notin \mathcal{Z}$;

Conclusion: 所有整数构成的集合$\mathcal{Z}$对于加法和(整数)数乘运算封闭

Example 1.0.2

1. (加法) If $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{R}^3$,then $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{R}^3$;
2. (数乘） If $c \in \mathcal{R}$, then $c\vec{x} \in \mathcal{R}^3$;
3. If $c \in \mathcal{C}$, then $c\vec{x} \in \mathcal{C}^3$; but in most case, $c\vec{x} \notin \mathcal{R}^3$

Conclusion: 即三维实向量空间$\mathcal{R}^3$关于加法和(实数)数乘运算封闭

1.1 线性空间

Definition 1.1.1

- V 是一个非空集合（如向量、函数集合等）
- F 是一个数域（常用实数域$\mathcal{R}$，或复数域$\mathcal{C}$）

对V 中任意两个元素α, β 定义如下运算：

- 加法运算：

$$\alpha + \beta \in V$$

($\alpha + \beta$称为 α与β的和)

- 数乘运算：

$$\lambda \in F, \lambda\alpha \in V$$

($\lambda\alpha$称为λ与α的数积)

线性运算满足的条件

- 加法交换律:$\forall \alpha, \beta \in V$, 有
$$\alpha+\beta=\beta+\alpha;$$
- 加法结合律：$\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$,有
$$(\alpha+\beta)+\gamma=\beta+(\alpha+\gamma);$$
- 加法零元：$\exists 0(\text{零元}) \in V$， $\forall \alpha \in V$, 都有
$$\alpha+0=\alpha$$
- 加法负元：$\forall \alpha \in V$, $\exists -\alpha \in V$, 使得
$$\alpha+(-\alpha)=0$$

线性运算满足的条件(cont'd)

- 乘法分配律 V:$\forall k \in F$ 和 $\forall \alpha, \beta \in V$，有

$$k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$$

- 乘法分配律F:$\forall k, l \in F$和 $\forall \alpha \in V$，有

$$(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$$

- 乘法结合律:$\forall k, l \in F$和 $\forall \alpha \in V$，有

$$(kl)\alpha = k(l\alpha)$$

- 乘法数1: F中的数1,使得$\forall \alpha \in V$, 有

$$1\alpha = \alpha$$

Summary:

1. 加法交换律
2. 加法结合律
3. 加法零元
4. 加法负元
5. 乘法分配律V
6. 乘法分配律F
7. 乘法结合律
8. 乘法数1

如果V关于"加法"，"数乘"两种运算（称为线性运算）封闭，称V为F上的线性空间（或向量空间），记为$V(F)$. 称V中的元素为向量. 容易证明，此时$V(F)$满足性质(1)-(8).

- 当F为实数域$\mathcal{R}$ 时，对应的空间$V(\mathcal{R})$称为实线性空间;
- 当F为复数域$\mathcal{C}$ 时，对应的空间$V(\mathcal{C})$称为 复线性空间;

显然，线性空间本质上也是集合，只不过里面的元素的（线性）运算具有封闭性。

Example 1.1.2

- $V = F = \mathcal{R}$, 运算取实数间的加法和乘法,$V(F)$是1维实数空间;
- $V = C(\mathcal{R})$($\mathcal{R}$上的连续函数所构成的集合),运算取一 般函数间的加法和数乘,则$V(F)$ 是连续函数空间
- 令 $V \in R^n$,$\forall k, l \in R$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^T$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)^T \in R^n$, 可以验证$R^n$满足向量空间的加法和乘法规律,(即线性代数中所谓的n维欧氏空间).并可验证满足线性空间性质1-8.

Example 1.1.3

实数域R上次数不超过n次的关于变量$x \in R$的一切多项式和零多项式所构成的集合

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_i \in R \right\},$$

在通常多项式加法与数乘多项式运算下构成线性空间，称为多项式空间$P_n[x]$

注：次数等于n 的多项式集合$\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_i \in R, a_n \neq 0\}$不是线性空间

Theorem 1.1.1
线性空间V有如下性质：

1. V 中的零元素惟一；
2. V 中任一元素的负元素惟一；
3. 设0 为数零，$\vec{0}$ 为V中零向量，则
   (i). $0 \cdot \alpha = 0$
   (ii). $k \cdot \vec{0} = 0, k \in F$
   (iii). $k \cdot \alpha = 0$, 则$k = 0$或者$\alpha = \vec{0}$
   (iv). $(-1)\alpha = -\alpha$

线性组合

Definition 1.1.4
设$\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in V$，$k_1, k_2, \cdots, k_m \in F$， 若

$$\beta := k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_m\alpha_m = \sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i$$

是$V(F)$ 中的元素，β称为$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 的一个线性组合， 或称β可由$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$线性表示.

Example 1.1.5
$2t^2 + 3t + 4$是$t^2, t, 1$ 的线性组合,也是$t^2 + t, t + 4$的线性组合，但是不是$t, 1$的线性组合， 也不是t^2, t 的线性组合

线性相关与线性无关

Definition 1.1.6

V 中的向量组$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m, m \geq 1\}$ 称 为线性相关的，如果存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m \in F$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_m\alpha_m = 0.$$

反之，若上述等式只在$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$（系数全为零）时成立，则称向量组$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m, m \geq 1\}$ 是线性无关的.

Theorem 1.1.2

- 当 $m > 1$ 时，向量组$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$线性相关的充要条件是，其中至少有一个向量 $\alpha_j (1 \le j \le m)$ 可由组中其他向量线性表出. 即
$$\alpha_j = \sum k_i \alpha_i; 1 \le i \le m, i \ne j$$
- 若某向量组线性无关, 则它的任一子向量组必线性无关; 而若某向量组中有一个子向量组线性相关, 那么该向量组必线性相关. (整体线无，则局部线无；局部线相，则整体线相)
- 单个零向量组$\{0\}$是线性相关的, 但单个 非零向量组 $\{\alpha, \alpha \ne 0\}$ 是线性无关的.

线性空间的维数

Definition 1.1.7

线性空间V中，称最大线性无关向量的个 数为V的维数，记为$dim(V)$.

- 如果在V 中能找到无限多个线性无关的向 量，则称V是无限维的；
- 如果在V 中只能找到最多n 个(n 有限) 线 性无关的向量，则称V 是n 维的； 此时n 维线性空间V 记作V^n.

Example 1.1.8

3 维向量组成的线性空间R^3, 线性无关向量 $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1)^T$, 且任一向量 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T \in R^3$ 可由它们线性表出.

Example 1.1.9

$m \times n$矩阵组成的线性空间$F^{m\times n}$ 是$m \times n$ 维的，$F^{m\times n}$ 中的任一矩阵$A=[a_{ij}]$ 可表示为

$$A=[a_{ij}]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$$

其中E_{ij} 定义为第i行第j列元素为1，其余元素为0 的$m \times n$矩阵.
其中，$\{E_{ij}\}_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq n}$ 这mn 个矩阵是线性无关的.

Example 1.1.10

全体多项式组成的空间$P(t)$是无限维的，因为其中 $\{1, t, t^2, \cdots, t^m, \cdots\}$ 无限多个都是线性无关的

Example 1.1.11

多项式空间$P_n[t]$是$n+1$维的，因为其中 有$\{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$，这$n+1$ 个多项式是线性无 关的, 而且任一次数不大于n 的多项式都可 由这$n+1$个多项式线性表出

Theorem 1.1.3

- 若V 中能找到m 个线性无关的向量，则

$$dim(V) \geq m$$

- V 中任一向量都可以由m个向量线性表出，则

$$dim(V) \leq m$$

线性空间的基

Definition 1.1.12

V^n中给定顺序的n个线性无关的向量$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 所组成的向量组称为V^n的一组基(或基底)，记为$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$. $\mathcal{B}$ 中的向量 α_i $(1 \le i \le n)$ 称为第i个基向量.

Example 1.1.13

- R^3中的一组基为$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\}$
- $F^{m\times n}$中的一组基为

$$\mathcal{B} = \{E_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$$

- 考虑$V = C, F = C$, 则$\{1\}$ 是一组基, 1 维.
  如果$V = C, F = R$, 则$\{1, i\}$ 是一组基, 2 维.

Theorem 1.1.4

设$\mathcal{B}$ 是V^n 的一组基，则V中任一向量都 可以由$\mathcal{B}$唯一线性表出.

Theorem 1.1.5

- 由于基就是向量集合V的极大线性无关组，从而线性空间的基也不是惟一的.
- n维线性空间中任意n个线性无关的向量构成的向量组都是空间的基.

坐标

Definition 1.1.14
设在V^n中取一组基$\mathcal{B}$，则V^n中任 一向量ξ, 都存在唯一的一组数$x_1; x_2, \cdots, x_n$, 使得

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$$

写成矩阵形式

$$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

- 矩阵$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$仍然记为$\mathcal{B}$
- $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$称为$\xi$在$\mathcal{B}$下的坐标向量（坐标），$x_i$称为$\xi$在$\mathcal{B}$下的第$i$个坐标

Example 1.1.15

在$P_2(t)$中取$\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$和$\{t+1, t+2, t^2\}$,求$\xi = 2t^2 - t + 1$的坐标

Example 1.1.16

$R^{n\times n}$ 中的任一可逆矩阵P, 其n个列向量 $P_1, P_2, \cdots, P_n \in R^n$ 构成R^n 的基.

- $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 线性无关;
- $\forall y \in R^n$, 则

$$y = P(P^{-1}y) = Px = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$$

即y 能被P 的列向量线性表出, 其中这里的坐标x 满足$x = P^{-1}y$.

注: 由R^n(或C^n) 的一组基作为列向量排列成的n阶方阵是可逆的.

- 引入坐标的原因：在V^n中取定一组基$\mathcal{B}$, 则存在一一对应：V^n 中任一元素$\alpha \Leftrightarrow \alpha$ 在$\mathcal{B}$ 下的坐标$x \in F^n$, 关于V^n 的问题可以转化为关于F^n 的问题,

Example 1.1.17

考虑$P_2(t)$ 的基$\mathcal{B} = \{t+1; t+2; t^2\}$.$p_1(t) = 2t^2 - t + 1$, $p_2(t) = t^2 - t + 1$, 求$3p_1 + 2p_2$的坐标

Theorem 1.1.6

设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$是$n$维线性空间 $V^n(F$ 的一组基， $V^n(F)$中向量 β_i 在该基下坐标为 $X_i, i = 1, 2, 3, \cdots, m$，则$V^n(F)$中向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ 线性相关的充分必要条件是其坐标向量组 $\{X_1, X_2, \cdots, X_m\}$是 F^n 中的线性相关组.

该定理说明在相同基之下，向量的线性相关性等价于坐标的线性相关性

两组基的变换关系

设$\mathcal{B}_\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$和$\mathcal{B}_\beta = \{\beta, \beta, \cdots, \beta_n\}$是 $V_n(F)$的两组基, 则由基的定义（空间中的任意向量可以由基底线性表出）,$\exists C_i \in R^n$, 使得

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\alpha_k = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)C_i$$

$i = 1, 2, \cdots, n$. 考虑矩阵的分块计算，事实上有：

$$\beta = \alpha C,$$

这里 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$,
$C = (C_1, C_2, \cdots, C_n)$

Definition 1.1.18

设$\mathcal{B}_\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$和$\mathcal{B}_\beta = \{\beta, \beta, \cdots, \beta_n\}$是 $V_n(F)$的两组基,若存在 $C \in F^{n\times n}$, 使得

$$\beta = \alpha C$$

, 则称 C是从基底$\mathcal{B}_\alpha$到基底$\mathcal{B}_\beta$的过渡矩阵（基变换矩阵）

Theorem 1.1.7

过渡矩阵是满秩矩阵，故 $\forall \xi \in V_n$, 设 $\xi = \mathcal{B}_\alpha x = \mathcal{B}_\beta y$, 其中$x$和$y$分别是$\xi$在两个基下面的坐标，则有

$$x = Cy，\text{或者 } y = C^{-1}x$$

Example 1.1.19

设R^3 的两组基为$\alpha_1 = (1, 0, -1)^T, \alpha_2 = (2, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 1, 1)^T$
和 $\beta_1 = (0, 1, 1)^T, \beta_2 = (-1, 1, 0)^T, \beta_3 = (1, 2, 1)^T$

- 求从基$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 到基$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$的过渡矩阵$C$
- 求向量$\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3$ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 下的坐标.

Example 1.1.20

设R^3 的两组基为$\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1)^T$
和 $\beta_1 = (-3, -7, 1)^T, \beta_2 = (3, 6, 1)^T, \beta_3 = (-2, -3, 2)^T$ 求在这两组基下坐标相同的所有向量.

Example 1.1.21

设$f_1 = 1+2x+4x^3, f_2 = x+x^2+4x^3, f_3 = 1+x-3x^2, f_4 = -2x^2+x^3$

- 求证：$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$是线性空间$P_4[x]$的一组基
- 求空间的基$\{1, x, x^2, x^3\}$到基$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$的过渡矩阵C,并求向量 $f = 1 + x + x^2 + x^3$在基$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$下的坐标Y

Example 1.1.22

已知$P_2(x)$的两个基是 $\mathcal{B}_\alpha = \{2x + 1, x + 3, x^2 + x\}$ 和 $\mathcal{B}_\beta = \{x + 1, x + 2, x^2\}$, 求$\mathcal{B}_\alpha$到$\mathcal{B}_\beta$的变换阵

子空间

Definition 1.1.23

设$V_n(F)$为线性空间，W是V的非空子集合．若W元素关于V中加法与数乘向量法运算也构成线性空间，则称W是V的一个子空间．也记作 $W \subset V$

注意子空间需要两点条件

- 集合$W \subset V$
- 运算对W而言也具有封闭性

Definition 1.1.24

- V和$\{0\}$都是V的子空间, 称为平凡子空间
- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, $1 \leq r \leq n$, 是V的r个线性无关向量，则集合

$$span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\} := \{\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i, k_i \in F\}$$

是V的一个子空间，称为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$张成的空间

Example 1.1.25

给定$A \in R^{m \times n}$, 则

$$N(A) := \{x \in R^n : Ax = 0\}$$
$$R(A) := \{y \in R^m : y = Ax, x \in R^n\}$$

分别是R^n和R^m的子空间，分别称为A的零空 间和列空间.(注: 验证子空间主要是证明线性运算的封闭性)

Example 1.1.26

$R^{n \times n}$中所有对称矩阵组成的集合

$$F := \{A \in R^{n \times n} : A^T = A\}$$

是$R^{n \times n}$的一个子空间,

Example 1.1.27

对于$C^{n\times n}$中矩阵A, 定义$A^H=\overline{A^T}=(\bar{A})^T$为$A$的共轭转置. 若在$C^{n\times n}$ 中$A=A^H$, 则称A为Hermite 矩阵, $C^{n\times n}$中所有Hermite 矩阵组成的集合

$$\{A\in C^{n\times n}: A^H=A\}$$

是$C^{n\times n}$的一个子空间. (类似$R^{n\times n}$中对称矩阵)

Theorem 1.1.8

设W是V^n的一个r维子空间, $\mathcal{B}_W = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$是$W$的一组基，则$\mathcal{B}_W$可以扩充为$V^n$的基，即在$V^n$中一定可以找到 $n-r$个向量$\{\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n\}$, 使 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$是$V^n$的一组基.

子空间的运算:交 与 和

回忆集合的运算，考虑与子空间的运算的异同

Definition 1.1.28
设空间W_1和W_2是空间V的子空间，则W_1与W_2的“交”与“和”分别定义为:

$$W_1 \cap W_2 := \{x : x \in W_1 \text{ 并且 } x \in W_2\}$$

$$W_1 + W_2 := \{\xi_1 + \xi_2 : \text{ 其中 } \xi_i \in W_i, i = 1, 2\}$$

Theorem 1.1.9
设空间$W_i \subset V, i = 1, 2$,则 $W_1 \cap W_2$ 和 $W_1 + W_2$都是V的子空间

Theorem 1.1.10
设空间$W_i \subset V, i = 1, 2$,则

$$dim(W_1 + W_2) + dim(W_1 \cap W_2) = dim(W_1) + dim(W_2).$$

Example 1.1.29
设$\alpha_1 = (1,1,0,0)^T, \alpha_2 = (0,1,1,0)^T, \alpha_3 = (0,0,1,1)^T, \alpha_4 = (1,0,0,1)^T$, R^4的两个子空间分别是

$$W_1 = span\{\alpha_1, \alpha_2\}, W_2 = span\{\alpha_3, \alpha_4\},$$

求$W_1 + W_2$及$W_1 \cap W_2$的基和维数.

子空间的运算：和空间与直和

Definition 1.1.30
若$W_1 + W_2$ 中任一向量只能唯一的分解为 W_1中的一个向量与W_2中的一个向量之和, 则 $W_1 + W_2$ 称为W_1 与W_2 的直和, 记为$W_1 \oplus W_2$.

- 根据定义, W_1与W_2的直和是W_1 与 W_2的一个特殊和空间, 但和空间不一定是直和.
- 两个线性子空间的交、和与直和，可以推广 到多个子空间的交、和与直和.即

$$\cap_{i=1}^{n} W_i := W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = W_1 + \cdots + W_n$$

$$\oplus_{i=1}^{n} W_i = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$$

Theorem 1.1.11

设W_1 与W_2 是V 的子空间，$W = W_1 + W_2$，则成立以下等价条件

- $W = W_1 \oplus W_2$
- $W_1 \cap W_2 = \{0\}$（W的和表达式唯一）
- 若$\xi_1 + \xi_2 = 0, \xi_1 \in W_1, \xi_2 \in W_2$,则$\xi_1 = \xi_2 = 0$（零向量表达式唯一）
- $dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2)$ *(维数公式)*

Theorem 1.1.12

设V_1 是V_n 的一个子空间, 则必存在V_n 的 子空间V_2, 使得

$$V_1 \oplus V_2 = V_n$$

. 事实上，V_2称为V_1的直和补子空间

Example 1.1.31

设I_r表示r阶单位矩阵,对n阶方阵 $A = \begin{pmatrix} I_r, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, I_{n-r} \end{pmatrix}$.
它们的列 空间为$R(A), R(B)$，证明：$R^n = R(A) \bigoplus R(B)$.

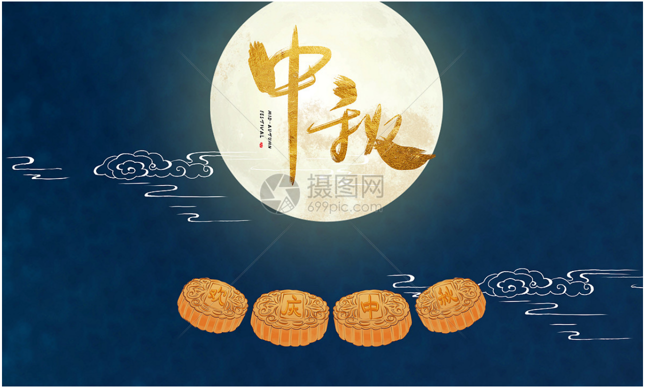

Figure: 中秋快乐

Exe: 矩阵论（杨）：p31， 1-12

1.2 内积空间

Definition 1.2.1

欧氏空间与酉空间 对数域F上的n维线性空间$V_n(F)$，定义的一个从$V_n(F)$中向量到数域F 的二元运算，记为(α, β)，即

$$(\alpha, \beta) : V_n(F) \to F,$$

如果满足

- 对称性：$(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$,
- 线性性： $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$, $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta)$
- 正定性: $(\alpha, \alpha) \geq 0$, $(\alpha, \alpha) = 0$的充要条件是$\alpha = 0$

则称(α, β)是$V_n(F)$的一个内积，并称其中定义了内积的线性空间$[V_n(F); (\alpha, \beta)]$为内积空间.

Example 1.2.2

- n维欧氏空间：$[R^n; (\alpha, \beta) = \alpha^T \beta]$,其中 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)^T$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)^T$,

$$(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$$

- L^2空间： $f, g \in L^2(D)$,则

$$(f, g) = \int_D fg$$

Cauchy 不等式

Theorem 1.2.1

$\forall \alpha, \beta \in V_n$,

$$|(\alpha, \beta)|^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$$

Definition 1.2.3

$\forall \alpha \in V_n$, 定义 $\|\alpha\| := (\alpha, \alpha)^{1/2}$, $\|\alpha\|$称为 α的范数

Theorem 1.2.2

Minkovski 不等式

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$

Q: 引入范数的目的以及范数有哪些性质?

标准正交基

Definition 1.2.4

在内积空间$[V_n(F);(\alpha,\beta)]$中，若一组基$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$满足条件$(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases}$，则称$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$为$V_n(F)$的标准正交基.

Theorem 1.2.3

不含0的标准正交组线性无关

Theorem 1.2.4

（*Gram-Schmidt*正交化方法）设$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$是内积空间$[V_n(F); (\alpha, \beta)]$中线性无关的向量组，则由如下方法：

$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_k = \alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\beta_i, \alpha_k)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \beta_i, k = 2, \cdots, n$$

所得向量组$\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$是正交向量组.

1.3 线性变换

Definition 1.3.1

映射/变换：两个非空集合A与B间的对应关系f，使得A中的每一个元素a，都在B中总有唯一的一个元素$b = f(a)$与它对应，这种对应称为从A到B的映射(变换)，记作

$$f : A \to B.$$

- Q: 映射与函数的区别是什么？

Definition 1.3.2

T称为由V_n到V_m的变换(映射), 如果T将V_n中的向量映射到V_m中的向量, 记作

$$T : \alpha \in V_n \to \beta = T\alpha \in V_m$$

其中β为α在T下的像, α称为β的原像.

Example 1.3.3

- $T : \alpha = (x_1, x_2)^T \in R^2 \to \beta = (0, x_2)^T \in R^2$
- $T : \alpha = (x_1, x_2)^T \in R^2 \to \beta = (2x_1, 2x_2)^T \in R^2$
- $T : \alpha \in P(t) \to \beta = (\alpha)^2 \in P(t)$

Definition 1.3.4

T为由V_n到V_m的变换, 如果 $\forall k \in F$,$\forall \alpha, \beta \in V_n$, 都有

$$T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta); T(k\alpha) = kT(\alpha);$$

即变换T与线性运算可交换, 则T是线性变换.
当T是V_n到自身的一个线性变换, 则称T是V_n的线性变换.

Example 1.3.5

给定$A \in F^{m\times n}$, 定义由F^n到F^m的变换T 为

$$T : x \in F^n \to y = Ax \in F^m :$$

Example 1.3.6

给定$P \in F^{m\times m}$ 和$Q \in F^{n\times n}$, 定义由$F^{m\times n}$到$F^{m\times n}$的变换T为

$$T : X \in F^{m\times n} \rightarrow Y = PXQ \in F^{m\times n}$$

Example 1.3.7

对于$P_n(t)$中的多项式求导运算$\frac{d}{dt}$, 记为D, 即

$$Dp(t) = \frac{dp(t)}{dt}, p(t) \in P_n(t)$$

Example 1.3.8

- 恒等变换I:$I\alpha = \alpha; \forall \alpha \in V$
- 零变换$\mathbf{0} : \mathbf{0}\alpha = 0, \forall \alpha \in V$

都是V的线性变换.

Exe: 判断是否是线性变换:

- $T := (x_1, x_2)^T \in R^2 \to \beta = (0, x_2)^T \in R^2$
- $T := (x_1, x_2)^T \in R^2 \to \beta = (1, x_2)^T \in R^2$
- $T := (x_1, x_2)^T \in R^2 \to \beta = (2x_1, 3x_2)^T \in R^2$
- $T := (x_1, x_2)^T \in R^2 \to \beta = (2x_1, x_2^2)^T \in R^2$

Theorem 1.3.1

V_n 上线性变换T具有如下性质:

- $T(0) = 0$
- $T(-\alpha) = -T(\alpha)$
- $T(\sum k_i\alpha_i) = \sum k_i T(\alpha_i)$
- 若 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$线性相关，则$\{T(\alpha_1), \cdots, T(\alpha_n)\}$也线性相关

注：线性无关的一组向量在T下的像可能是线性相关的, 例如零变换把线性无关的向量都映射为零向量.

Definition 1.3.9

线性变换的矩阵表示：设T是V_n到V_m的线性变换, 在V_n和V_m 中取基$\mathcal{B}_\alpha = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 和$\mathcal{B}_\beta = \{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$, 则$\alpha_j$的像$T(\alpha_j)$可由基$\mathcal{B}_\beta$线性表出:

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} \beta_i a_{ji} = (\beta_1, \cdots, \beta_m) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

将$T\alpha_j$按$j = 1, \cdots, n$的顺序排列, 则有

$$(T\alpha_1, \cdots, T\alpha_m) = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \begin{pmatrix} a_{1,1} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

To be cont'd

令$T\mathcal{B}_\alpha = (T\alpha_1, \cdots, T\alpha_m)$,则上式可记为

$$T\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_\beta A$$

则这称为线性变换T的矩阵表示, 其中A称为T在基偶$\{\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta\}$下的矩阵.
特别地, 若$V_n = V_m$, 并且$\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_\beta$,则$T\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_\alpha A$,此时称$n$阶方阵$A$为$T$在基$\mathcal{B}_\alpha$下的矩阵.
事实上，T与n阶方阵A是一一对应关系

Example 1.3.10

求$P_{n+1}(t)$ 的线性变换$D = \dfrac{d}{dt}$在基$\mathcal{B} = \{1, t, \cdots, t^n\}$下的矩阵.

Example 1.3.11

求$P_2(t)$ 到$P_3(t)$的线性变换T

$$T(p) = \int_0^t p(s)ds$$

基偶$\{\{1, t, t^2\}; \{1, t, t^2/2.t^3/3\}\}$下的矩阵.

现考虑，由T的矩阵表示，确定T的像的坐标:
设$\alpha \in V_n$, 则可由$\mathcal{B}_\alpha$线性表出,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i = \mathcal{B}_\alpha x$$

即α在$\mathcal{B}_\alpha$下的坐标为x. 对于线性变换T,

$$T\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i T\alpha_i = T(\mathcal{B}_\alpha)x$$

将$T\mathcal{B}_\alpha$ 用V_m 的基$\mathcal{B}_\beta$表出, 若$T\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_\beta A$, 则

$$T\alpha = \mathcal{B}_\beta A x$$

即$T\alpha$在$\mathcal{B}_\beta$下的坐标为Ax.

Theorem 1.3.2

设$\mathcal{B}_\alpha = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 和 $\mathcal{B}_\beta = \{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$分别是$V_n$ 和V_m 的基, 对于 给定的$m \times n$矩阵$A = [a_{ij}]$, 则存在唯一的从V_n 到V_m 的线性变换T, 使得它在$\{\mathcal{B}_\alpha; \mathcal{B}_\beta\}$下的矩阵是$A$, 即$T\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_\beta A$.