江西财经大学

试卷代码：03043 A　　　　授课课时：48　　　　考试时长：110 分钟

课程名称：**线性代数（主干课程）**　　　　适用对象：　全校

试卷命题人：**课程组**　　　　试卷审核人：**罗春林**

［请注意：将各题题号及答案写在答题纸上，写在试卷上无效］

一、填空题（将正确答案写在答题纸的相应位置。答错或未答，该题不得分。本大题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分。）

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&y&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似，则 $|B|$ 为______.

2. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与向量组 β_1,β_2,β_3 等价，其中 $\beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为______.

3. 若齐次线性方程组 $\begin{cases}2x+y+z=0\\ \quad ax-z=0\\ -x+3z=0\end{cases}$ 存在非零解，则系数 a 为______.

4. 已知矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}$，则 B 的伴随矩阵 B^* 为______.

5. 设 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&2&a\\3&b&b\end{bmatrix}$ 的一个特征向量，则 $a-b$ 为______.

二、单项选择题（从下列各题四个备选答案中选出一个正确答案，并将其代号写在答题纸的相应位置。答案错选或未选者，该题不得分。本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。）

1. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 0，1，2，那么齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系所含向量的个数为（　　）

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

2. 行列式$\begin{vmatrix} 2+a & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}$的值为（　　）

A. 1　　　B. 0　　　C. a　　　D. $-a^2b$

3. 若向量组α,β,γ线性无关，α,β,δ线性相关，则（　　）

A．α必可由β,γ,δ线性表示　　　B．β必不可由α,γ,δ线性表示

C．δ必可由α,β,γ线性表示　　　D．δ必不可由α,β,γ线性表示

4. 设A为$n\times m$矩阵，$R(A)=s$，则线性方程组$AX=0$有非零解的充分必要条件是（　　）

A．$s<m$　　　B．$s>m$　　　C．$s<n$　　　D．$s>n$

5. 设A_1，A_2，A_3，A_4均为n阶方阵，且$A_1A_2A_3A_4=I$，则必有（　　）

A．$A_3A_4A_1A_2=I$　　　B．$A_4A_3A_2A_1=I$

C．$A_2A_1A_3A_4=I$　　　D．$A_1A_3A_2A_4=I$

三、计算题（请写出主要步骤及结果，本题 10 分。）

设四阶行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$分别表示$D$中第$i$行第$j$列位置上的元素$a_{ij}$的代数余子式。计算：$A_{31}+A_{32}+A_{33}-A_{34}$.

四、计算题（请写出主要步骤及结果，本题 10 分。）

设方阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$，$A^*$为$A$的伴随矩阵，且满足$ABA^*=2BA^*+I$，求$B$.

五、计算题（请写出主要步骤及结果，本题 10 分。）

设向量组$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}k+1\\1\\k\\k+1\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}k^2+1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，试确定当$k$取何值时$\beta$可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，并写出表示式？

六、计算题（请写出主要步骤及结果，本题 10 分。）

求向量组$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\3\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}-2\\5\\8\\9\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\\7\end{bmatrix}$的一个极大线性无关组,并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

七、计算题（请写出主要步骤及结果，本题 10 分。）

求线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2=5\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=1\\5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3\end{cases}$的通解.

八、计算题（请写出主要步骤及结果，本题 10 分。）

设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\0&0&5\end{bmatrix}$ 求A的特征值和最大特征值所对应的特征向量。

九、证明题（请写出推理步骤及结果，本题 10 分。）

设X^*是线性方程组$AX=b\ \ (b\neq 0)$的一个解，X_1,X_2是导出组$AX=0$的一个基础解系，令$\beta_1=X^*$，$\beta_2=X^*+X_1$，$\beta_3=X^*+X_2$，证明：β_1,β_2,β_3线性无关.

江西财经大学

试卷代码：03043 A　　　　　　授课课时：48　　　　　　考试时长：110 分钟

课程名称：**线性代数（主干课程）**　　　　　　　　　　适用对象：　全校

试卷命题人：**课程组**　　　　　　　　　　　　　　　　试卷审核人：**罗春林**

［请注意：将各题题号及答案写在答题纸上，写在试卷上无效］

一、填空题（将正确答案写在答题纸的相应位置。答错或未答，该题不得分。本大题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分。）

1. -2 .　　2. 3.　　3. $\frac{1}{3}$.　　4. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.　　5. $\frac{1}{2}$

二、单项选择题（从下列各题四个备选答案中选出一个正确答案，并将其代号写在答题纸的相应位置。答案错选或未选者，该题不得分　本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。）

B D C A A.

三、计算题（请写出主要步骤及结果，本题 10 分）

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$ ....2 分

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$ ....4 分

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$ ....6 分

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 21$$ ....10 分

四、计算题（请写出主要步骤及结果，本题 10 分）

$ABA^* = 2BA^* + I \Rightarrow ABA^*A = 2BA^*A + IA$， ....2 分

又因为$|A| = 2$， ....4 分

所以有：$2AB = 4B + A$，$2(A-2I)B = A$，于是$B = \frac{1}{2}(A-2I)^{-1}A$.

....5 分

$$(A-2I)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

....7 分

$$B = \frac{1}{2}(A-2I)^{-1}A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

....10 分

五、计算题（请写出主要步骤及结果，本题 10 分）

$$A = [\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k+1 & k^2+1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k+1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix}.$$

....5 分

$k = 0$ ....7 分

$$\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

......................................9 分

$\beta=\alpha_1$ ....10 分

六、计算题（请写出主要步骤及结果，本题 10 分）

通过四个向量构造矩阵：$A=[\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4]=\begin{bmatrix}1&1&-2&3\\1&-1&5&-1\\3&-1&8&1\\1&3&9&7\end{bmatrix}$

....2 分

将矩阵通过初等行变换化为阶梯型矩阵（简化的阶梯型）

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-2&3\\1&-1&5&-1\\3&-1&8&1\\1&3&9&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&3\\0&-2&7&-4\\0&-4&14&-8\\0&2&11&4\end{bmatrix}$$

......................................3 分

$$\to\begin{bmatrix}1&1&-2&3\\0&-2&7&-4\\0&0&0&0\\0&0&18&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&3\\0&-2&7&-4\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

......................................5 分

通过简化阶梯型矩阵可以知道如下结论：

（1）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为：3 ....6 分

一个极大线性无关组为：$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ ....8 分

（2）其余向量用该极大线性无关组线性表示：$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2$

......................................10 分

七、计算题（请写出主要步骤及结果，本题 10 分）

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&5\\2&1&1&2&1\\5&3&2&2&3\end{bmatrix}$$ ....1 分

$$\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&5\\0&-1&1&2&-9\\0&-2&2&2&-22\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&0&-8\\0&1&-1&0&13\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}$$ ....3 分

$$\begin{cases}x_1=-8-x_3\\x_2=13+x_3\\x_4=2\end{cases}$$ ....4 分

非齐次线性方程组的一个特解为：$X^*=\begin{bmatrix}-8\\13\\0\\2\end{bmatrix}$ ....6 分

齐次线性方程组的通解为：$X^0=k\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$，其中$k_1$，$k_2$为任意实数。

......................................8 分

于是，该非齐次线性方程组的通解为：

$$X=X^*+X^0=\begin{bmatrix}-8\\13\\0\\2\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$，其中k_1，k_2为任意实数。

......................................10 分

八、计算题（请写出主要步骤及结果，本题 10 分）

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&1\\2&4-\lambda&-2\\0&0&5-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-5)$$

....3 分

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$ ....5 分

该矩阵属于$\lambda = 5$的所有特征向量为：$\alpha = k\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$，$k$为非零实数。

....10 分

九、证明题（请写出推理步骤及结果，本大题共 1 小题，共 10 分。）

$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$ ....1 分

$\beta_1 = X^*$，$\beta_2 = X^* + X_1$，$\beta_3 = X^* + X_2$代入得到：

$k_1X^* + k_2(X^* + X_1) + k_3(X^* + X_2) = 0$ ....3 分

$(k_1 + k_2 + k_3)X^* + k_2X_1 + k_3X_2 = 0$

左乘：$(k_1 + k_2 + k_3)AX^* + k_2AX_1 + k_3AX_2 = 0$ ....5 分

$k_1 + k_2 + k_3 = 0$ ....7 分

又因为X_1, X_2为$AX = 0$的基础解系，所以$k_2 = k_3 = 0$ ....9 分

因此，$k_1 = k_2 = k_3 = 0$ β_1，β_2，β_3线性无关。 ....10 分