

高等数学 I 练习卷 (4)

一、填空题 (将答案写在答题纸相应的位置。每小题 3 分, 共 18 分.)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} =$ _____.

2. 设 $f(x) = \sin^2 x$, 则 $f''(x) =$ _____.

3. 曲线 $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = 1 - t \end{cases}$ 在参数 $t=1$ 相应的点处的切线方程为 _____.

4. 设 $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2020}}{2020}$, 则 $y^{(2020)} =$ _____.

5. 不定积分 $\int \frac{1}{1+4x^2} dx =$ _____.

6. 定积分 $\int_0^{2021\pi} \sin x dx =$ _____.

二、单项选择题 (将答案写在答题纸相应的位置。每小题 3 分, 共 18 分.)

1. 下列极限值为 1 的是 ()

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{x}}$ B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}$ C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x}}$

2. 曲线 $y = \frac{x \arctan x}{x-1}$ 的渐近线条数为 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$, 则 ()

A. $f'(1) = -1$ B. $f'(1) = 1$ C. $f'(1) = 2$ D. $f'(1)$ 不存在

4. 若 $f(-x) = -f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), 在 $(-\infty, 0)$ 内有 $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, 则 $(0, +\infty)$ 内有 ()

A. $f(x)$ 单增, 曲线 $f(x)$ 为凹弧 B. $f(x)$ 单减, 曲线 $f(x)$ 为凹弧
C. $f(x)$ 单减, 曲线 $f(x)$ 为凸弧 D. $f(x)$ 单增, 曲线 $f(x)$ 为凸弧

5. 已知 $f(e^x) = e^{2x}$, 则 $\int f(x) dx =$ ()

A. $e^x + C$ B. $\frac{1}{2}e^{2x} + C$ C. $\frac{x^2}{2} + C$ D. $\frac{x^3}{3} + C$

6. 关于函数 (曲线) $f(x) = |x|$ 叙述错误的是 ()

A. 在 $x=0$ 处连续

B. 在 $x=0$ 处不可导

C. 在 $x=0$ 处可微

D. 在 $(0,0)$ 处不存在切线

三、计算题 (要求写出主要计算步骤及结果; 每小题 8 分, 共 16 分.)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[1 - \frac{1}{x} \ln(1+x) \right]$.

2. 设 $y = \left(\frac{x}{1+x} \right)^x + \cos e^{2x}$, 求 dy .

四、解答题 (要求写出主要解答步骤及结果; 每小题 8 分, 共 16 分.)

1. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续性与可导性.

2. 求函数 (曲线) $I(x) = \int_0^x t e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值, 凹凸区间与拐点. (要求列表).

五、计算积分 (要求写出主要计算步骤; 每小题 8 分, 共 16 分.)

1. 计算不定积分 $\int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{3x}} dx$.

2. 计算定积分 $\int_0^1 x e^{-2x} dx$.

六、证明题 (要求写出主要证明步骤; 每小题 8 分, 共 16 分.)

1. 设 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续, 在 $(2,3)$ 内可导, 且 $f(2)=3, f(3)=2$. 证明: 存在点 $\xi \in (2,3)$, 使得 $f(\xi) = -\xi f'(\xi)$.

2. 证明不等式: 当 $x > 4$ 时, $2^x > x^2$.