第二章　矩阵及其运算

1．已知线性变换：

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + 5y_3, \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3, \end{cases}$$

求从变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换.

解

由已知：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

故 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} y_1 = -7x_1 - 4x_2 + 9x_3 \\ y_2 = 6x_1 + 3x_2 - 7x_3 \\ y_3 = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{cases}$$

2．已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3, \\ x_2 = -2y_1 + 3y_2 + 2y_3, \\ x_3 = 4y_1 + y_2 + 5y_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = -3z_1 + z_2, \\ y_2 = 2z_1 + z_3, \\ y_3 = -z_2 + 3z_3, \end{cases}$$

求从 z_1, z_2, z_3 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换.

解　　由已知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 12 & -4 & 9 \\ -10 & -1 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

所以有 $\begin{cases} x_1 = -6z_1 + z_2 + 3z_3 \\ x_2 = 12z_1 - 4z_2 + 9z_3 \\ x_3 = -10z_1 - z_2 + 16z_3 \end{cases}$

3．设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

求 $3AB-2A$ 及 $A^T B$.

解

$$3AB-2A=3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=3\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^T B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

4．计算下列乘积：

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;　(2) $(1,2,3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;　(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1,2)$;

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

(5) $(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

解

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 7+3\times 2+1\times 1 \\ 1\times 7+(-2)\times 2+3\times 1 \\ 5\times 7+7\times 2+0\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\times 3+2\times 2+3\times 1) = (10)$

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times(-1) & 2\times 2 \\ 1\times(-1) & 1\times 2 \\ 3\times(-1) & 3\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & -6 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 & a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 & a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3 \end{pmatrix}$

$\times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

5．设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$， $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，问：

(1) $AB = BA$ 吗?

(2) $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ 吗?

(3) $(A+B)(A-B) = A^2-B^2$ 吗?

解

(1) $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$

则 $AB=\begin{pmatrix}3&4\\4&6\end{pmatrix}$ $\quad BA=\begin{pmatrix}1&2\\3&8\end{pmatrix}$ $\quad \therefore AB\neq BA$

(2) $(A+B)^2=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&14\\14&29\end{pmatrix}$

但 $A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}3&8\\4&11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&8\\8&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&16\\15&27\end{pmatrix}$

故 $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$

(3) $(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6\\0&9\end{pmatrix}$

而 $\quad A^2-B^2=\begin{pmatrix}3&8\\4&11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&8\\1&7\end{pmatrix}$

故 $\quad (A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$

6．举反列说明下列命题是错误的:

（1）若 $A^2=0$,则 $A=0$;

（2）若 $A^2=A$,则 $A=0$ 或 $A=E$;

（3）若 $AX=AY$,且 $A\neq 0$,则 $X=Y$.

解 (1) 取 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $\quad A^2=0$,但 $A\neq 0$

(2) 取 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ $\quad A^2=A$,但 $A\neq 0$ 且 $A\neq E$

(3) 取 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\quad X=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ $\quad Y=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$AX=AY$ 且 $A\neq 0$ 但 $X\neq Y$

7．设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}$,求 $A^2,A^3,\cdots,A^k$.

解 $\quad A^2=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3\lambda&1\end{pmatrix}$

利用数学归纳法证明: $A^k=\begin{pmatrix}1 & 0\\ k\lambda & 1\end{pmatrix}$

当$k=1$时,显然成立,假设k时成立,则$k+1$时

$$A^k=A^kA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ k\lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ (k+1)\lambda & 1\end{pmatrix}$$

由数学归纳法原理知: $A^k=\begin{pmatrix}1 & 0\\ k\lambda & 1\end{pmatrix}$

8．设$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$,求$A^k$.

解　首先观察

$$A^2=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda\\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2\\ 0 & 0 & \lambda^3\end{pmatrix}$$

由此推测　$A^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \dfrac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}\quad(k\geq 2)$

用数学归纳法证明:

当$k=2$时,显然成立.

假设k时成立，则$k+1$时，

$$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \dfrac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1} & \frac{(k+1)k}{2}\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix}$$

由数学归纳法原理知：$A^k=\begin{pmatrix} \lambda^{k} & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^{k} & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{k} \end{pmatrix}$

9．设 A,B 为 n 阶矩阵，且 A 为对称矩阵，证明 $B^T AB$ 也是对称矩阵.

证明　　已知：$A^T=A$

则　　$(B^T AB)^T=B^T(B^T A)^T=B^T A^T B=B^T AB$

从而　　$B^T AB$ 也是对称矩阵.

10．设 A,B 都是 n 阶对称矩阵，证明 AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

证明　　由已知：$A^T=A$　　$B^T=B$

充分性：$AB=BA\Rightarrow AB=B^T A^T\Rightarrow AB=(AB)^T$

即 AB 是对称矩阵.

必要性：$(AB)^T=AB\Rightarrow B^T A^T=AB\Rightarrow BA=AB$.

11．求下列矩阵的逆矩阵：

(1)$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$；　　(2)$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$；　　(3)$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$；

(4)$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$；　(5)$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$；

(6)$\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$ $(a_1 a_2\cdots a_n\neq 0)$

解

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ $\qquad |A|=1$

$A_{11}=5,\ A_{21}=2\times(-1),\ A_{12}=2\times(-1),\ A_{22}=1$

$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

故 $\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

(2) $|A|=1\neq 0$ 　故 A^{-1} 存在

$A_{11}=\cos\theta \quad A_{21}=\sin\theta \quad A_{12}=-\sin\theta \quad A_{22}=\cos\theta$

从而 $\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

(3) $|A|=2$, 　故 A^{-1} 存在

$$A_{11}=-4 \quad A_{21}=2 \quad A_{31}=0$$

而

$$A_{12}=-13 \quad A_{22}=6 \quad A_{32}=-1$$

$$A_{13}=-32 \quad A_{23}=14 \quad A_{33}=-2$$

故 $\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2}\\ -16 & 7 & -1\end{pmatrix}$

(4) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$

$|A|=24 \qquad A_{21}=A_{31}=A_{41}=A_{32}=A_{42}=A_{43}=0$

$A_{11}=24 \qquad A_{22}=12 \qquad A_{33}=8 \qquad A_{44}=6$

$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=-12 \qquad A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=-12$

$A_{14}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=3 \qquad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=-4$

$A_{24}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-5 \qquad A_{34}=(-1)^7\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-2$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(5) $|A|=1\neq 0$　故 A^{-1} 存在

而
$$\begin{aligned} &A_{11}=1 && A_{21}=-2 && A_{31}=0 && A_{41}=0 \\ &A_{12}=-2 && A_{22}=5 && A_{32}=0 && A_{42}=0 \\ &A_{13}=0 && A_{23}=0 && A_{33}=2 && A_{43}=-3 \\ &A_{14}=0 && A_{24}=0 && A_{34}=-5 && A_{44}=8 \end{aligned}$$

从而 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$

(6) $A=\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$

由对角矩阵的性质知　$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$

12．解下列矩阵方程：

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;　(2) $X\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}X\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

解

(1) $X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

(2) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(3) $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

(4) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

13．利用逆矩阵解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

解　(1)　方程组可表示为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

故 $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&5\\3&5&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

从而有 $$\begin{cases}x_1=1\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}$$

(2) 方程组可表示为 $$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-3\\3&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

故 $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-3\\3&2&-5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}$$

故有 $$\begin{cases}x_1=5\\x_2=0\\x_3=3\end{cases}$$

14．设 $A^k=O$ (k 为正整数),证明
$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

证明　　一方面，　$E=(E-A)^{-1}(E-A)$

另一方面，由 $A^k=O$ 有

$$E=(E-A)+(A-A^2)+A^2-\cdots-A^{k-1}+(A^{k-1}-A^k)$$
$$=(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(E-A)$$

故　$(E-A)^{-1}(E-A)=(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(E-A)$

两端同时右乘 $(E-A)^{-1}$

就有 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$

15．设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$,证明 A 及 $A+2E$ 都可逆,并求 A^{-1} 及
$(A+2E)^{-1}$.

证明　　由 $A^2-A-2E=O$ 得 $A^2-A=2E$

两端同时取行列式: $|A^2-A|=2$

即　$|A||A-E|=2$,故　$|A|\neq 0$

所以 A 可逆,而 $A+2E=A^2$

$\left|A+2E\right|=\left|A^2\right|=\left|A\right|^2\neq 0$　　　　故 $A+2E$ 也可逆.

由 $A^2-A-2E=O\Rightarrow A(A-E)=2E$

$\Rightarrow A^{-1}A(A-E)=2A^{-1}E\Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{2}(A-E)$

又由 $A^2-A-2E=O\Rightarrow(A+2E)A-3(A+2E)=-4E$

$\Rightarrow(A+2E)(A-3E)=-4E$

$\therefore(A+2E)^{-1}(A+2E)(A-3E)=-4(A+2E)^{-1}$

$\therefore(A+2E)^{-1}=\dfrac{1}{4}(3E-A)$

16．设 $A=\begin{pmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$, $AB=A+2B$,求 B.

解　　由 $AB=A+2B$ 可得 $(A-2E)B=A$

故 $B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}-2&3&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&3\\-1&2&3\\1&1&0\end{pmatrix}$

17．设 $P^{-1}AP=\Lambda$,其中 $P=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$,求 A^{11}.

解　　$P^{-1}AP=\Lambda$ 故 $A=P\Lambda P^{-1}$ 所以 $A^{11}=P\Lambda^{11}P^{-1}$

$\left|P\right|=3$　　$P^*=\begin{pmatrix}1&4\\-1&1\end{pmatrix}$　　$P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&4\\-1&-1\end{pmatrix}$

而　　$\Lambda^{11}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}^{11}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2^{11}\end{pmatrix}$

故 $A^{11}=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&2^{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2731&2732\\-683&-684\end{pmatrix}$

18．设 m 次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$,记

$$f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$$

$f(A)$ 称为方阵 A 的 m 次多项式.

(1)设$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$,证明：$\Lambda^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0\\ 0 & \lambda_2^k\end{pmatrix}$, $f(\Lambda)=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & 0\\ 0 & f(\lambda_2)\end{pmatrix}$;

(2)设$A=P\Lambda P^{-1}$,证明：$A^k=P\Lambda^k P^{-1}$, $f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1}$.

证明

(1) i)利用数学归纳法.当$k=2$时

$$\Lambda^2=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0\\ 0 & \lambda_2^2\end{pmatrix}$$

命题成立,假设k时成立,则$k+1$时

$$\Lambda^{k+1}=\Lambda^k\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0\\ 0 & \lambda_2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1^{k+1} & 0\\ 0 & \lambda_2^{k+1}\end{pmatrix}$$

故命题成立.

ii)左边$=f(\Lambda)=a_0E+a_1\Lambda+a_2\Lambda^2+\cdots+a_m\Lambda^m$

$$=a_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}+\cdots+a_m\begin{pmatrix}\lambda_1^m & 0\\ 0 & \lambda_2^m\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_0+a_1\lambda_1+a_2\lambda_1^2+\cdots+a_m\lambda_1^m & 0\\ 0 & a_0+a_1\lambda_2+a_2\lambda_2^2+\cdots+a_m\lambda_2^m\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & 0\\ 0 & f(\lambda_2)\end{pmatrix}=\text{右边}$$

(2) i) 利用数学归纳法.当$k=2$时

$A^2=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^2P^{-1}$成立

假设k时成立,则$k+1$时

$A^{k+1}=A^k\cdot A=P\Lambda^kP^{-1}P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^{k+1}P^{-1}$成立,故命题成立,

即 $A^k=P\Lambda^kP^{-1}$

ii) 证明

右边$=Pf(\Lambda)P^{-1}$

$=P(a_0E+a_1\Lambda+a_2\Lambda^2+\cdots+a_m\Lambda^m)P^{-1}$

$=a_0PEP^{-1}+a_1P\Lambda P^{-1}+a_2P\Lambda^2P^{-1}+\cdots+a_mP\Lambda^mP^{-1}$

$=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m=f(A)$=左边

19．设n阶矩阵A的伴随矩阵为A^*，证明：

(1) 若$|A|=0$,则$|A^*|=0$;

(2) $|A^*|=|A|^{n-1}$.

证明

(1)　用反证法证明．假设$\left|A^*\right| \neq 0$则有$A^*(A^*)^{-1}=E$

由此得$A=AA^*(A^*)^{-1}=|A|E(A^*)^{-1}=O \therefore A^*=O$

这与$\left|A^*\right| \neq 0$矛盾，故当$|A|=0$时

有$\left|A^*\right|=0$

(2)　由于$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$，则$AA^*=|A|E$

取行列式得到：$|A|\left|A^*\right|=|A|^n$

若$|A| \neq 0$　则$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$

若$|A|=0$由(1)知$\left|A^*\right|=0$此时命题也成立

故有$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$

20．取$A=B=-C=D=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$,验证$\begin{vmatrix}A & B\\C & D\end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix}|A| & |B|\\|C| & |D|\end{vmatrix}$

检验：$\begin{vmatrix}A & B\\C & D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\-1 & 0 & 1 & 0\\0 & -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\left|\begin{array}{cc:cc}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\ \hdashline -1 & 0 & 1 & 0\\0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right|=\begin{vmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}=4$

而　$\begin{vmatrix}|A| & |B|\\|C| & |D|\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}=0$

故　$\begin{vmatrix}A & B\\C & D\end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix}|A| & |B|\\|C| & |D|\end{vmatrix}$

21．设$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & & \\4 & -3 & & O\\ & & 2 & 0\\O & & 2 & 2\end{pmatrix}$,求$\left|A^8\right|$及$A^4$

解　$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & & \\4 & -3 & & O\\ & & 2 & 0\\O & & 2 & 2\end{pmatrix}$，令$A_1=\begin{pmatrix}3 & 4\\4 & -3\end{pmatrix}$　$A_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\2 & 2\end{pmatrix}$

则 $A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$

故 $A^8=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}^8=\begin{pmatrix} A_1^8 & O \\ O & A_2^8 \end{pmatrix}$

$\left|A^8\right|=\left|A_1^8\right|\left|A_2^8\right|=\left|A_1\right|^8\left|A_2\right|^8=10^{16}$

$$A^4=\begin{pmatrix} A_1^4 & O \\ O & A_2^4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5^4 & 0 & & \\ 0 & 5^4 & & O \\ & & 2^4 & 0 \\ & O & 2^6 & 2^4 \end{pmatrix}$$

22．设 n 阶矩阵 A 及 s 阶矩阵 B 都可逆,求 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}$.

解　将 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}$ 分块为 $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$

其中　C_1 为 $s\times n$ 矩阵，C_2 为 $s\times s$ 矩阵

　　C_3 为 $n\times n$ 矩阵，C_4 为 $n\times s$ 矩阵

则 $\begin{pmatrix} O & A_{n\times n} \\ B_{s\times s} & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}=E=\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s \end{pmatrix}$

由此得到 $\begin{cases} AC_3=E_n \Rightarrow C_3=A^{-1} \\ AC_4=O \Rightarrow C_4=O \quad (A^{-1}\text{存在}) \\ BC_1=O \Rightarrow C_1=O \quad (B^{-1}\text{存在}) \\ BC_2=E_s \Rightarrow C_2=B^{-1} \end{cases}$

故　$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$.