$P(A)+P(B)$　　$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$
$>1-P(A\cup B)\geq 0$

江西财经大学 $P(A\cap B)>0 \Rightarrow A\cap B\neq\phi$

17—18 第一学期期末考试试卷

试卷代码：06603A　　授课课时：48　　考试用时：110 分钟

课程名称：**概率论**　　适用对象：2016 级

试卷命题人 涂雄苓　　试卷审核人 徐慧植

一、单项选择题（从下列各题四个备选答案中选出一个正确答案，并将其代号写在答题纸相应位置处。答案错选或未选者，该题不得分。每小题 3 分，共 15 分）.

1. 如果 $P(A)+P(B)>1$，则 事件 A 与 B 必定（ C ）

A、独立　　B、不独立　　C、相容　　D、不相容

2. 随意地投掷一均匀的骰子两次，则这两次出现的点数之和为 8 的概率是（ C ）

A、$\frac{3}{36}$　　B、$\frac{4}{36}$　　C、$\frac{5}{36}$　　D、$\frac{2}{36}$

2 6
6 2　44　$\frac{5}{36}$
3 5
5 3

3. 设随机变量 X 服从 $N(0,1)$ 分布，$Y=2X+1$，则 $Y\sim$（ B ）

$(A)N(0,1)$　　$(B)N(1,4)$　　$(C)N(1,2)$　　$(D)N(0,4)$

$E(Y)=E(2X+1)$
$=2E(X)+1=1$
$D(Y)=D(2X+1)$
$=D(2X)+D(1)+2cov(2X,1)$
$=4D(X)$

4. 已知 X 服从泊松分布，则 $D(X)$ 与 $E(X)$ 的关系为（ C ）

(A) $D(X)>E(X)$　　(B) $D(X)<E(X)$

(C) $D(X)=E(X)$　　(D) 以上都不是

$D(X)=\lambda$
$E(X)=\lambda$

5. 如果仅知道随机变量 X 的期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$，而分布未知，则对任意正实数 a，下列可以估计的是（ D ）

$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$
$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

A. 概率 $P(|X|\geq a)$ 的上界　　B. 概率 $P(X-EX\geq a)$ 的上界

C. 概率 $P(-a<X<a)$ 的下界　　D. 概率 $P(-a<X-EX<a)$ 的下界

二、填空题（请将下列各小题的正确答案写在答题卷上，请在答案前表明题号；每小题 3 分，共 15 分）.

1. 已知 $P(A)=0.6$，$P(B|A)=0.3$，则 $P(A-B)=$ 0.42；

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=0.3$
$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=0.6\times0.3$
$=0.18$
$P(A-B)=P(A)-P(AB)$
$=0.6-0.18=0.42$

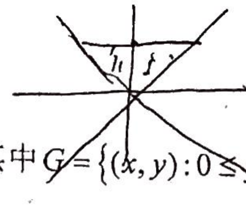
2. 设离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ \frac{1}{3} & -1\leq x<2\\ 1 & x\geq 2\end{cases}$$

，则 $P(X=2)=$ $F(2)-F^{-}(2)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$。

3. 已知 $D(X)=25$，$D(Y)=36$，X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY}=0.4$，则 $D(X-Y)=$ 37；

$cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=0.4\times5\times6=12$
$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2cov(X,Y)=D(X)+D(Y)-2\times12$
$=25+36-24=37$



4. 设（X, Y）服从区域 G 上的均匀分布，其中 $G=\{(x,y):0\le y\le 1,|x|\le y\}$，则（X, Y）的联合密度函数 $f(x,y)=$ $\begin{cases}1 & (x,y)\in G\\ 0 & 其他\end{cases}$

5. 设一随机变量 X 的 $EX=12, DX=9$，则用切比雪夫不等式估计 $P(6<X<18)\ge$ ________.

$P\{6<X<18\}$

$=P\{|X-E(X)|<6\}\ge 1-\frac{D(X)}{36}=\frac{3}{4}$

三、计算题（请将下列各小题的正确答案写在答题卷上，请在答案前标明题号，并保留必要的计算步骤；每小题 15 分，共 30 分）.

1．设二维随机向量 (X,Y) 的联合分布律如下:

$X \backslash Y$	-1	0	1	2
-2	a	0	0	0
-1	0.14	0.09	0	0
0	0.01	0.02	0.03	0
1	0.12	0.13	0.14	0.15

求: (1) 求常数 a；(2)关于 X 和 Y 的边缘分布律；(3) X 与 Y 是否独立？说明理由；(4) 求 $E(XY)$。

2．设二维随机向量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}Axy, & 0<y<1, 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$.

求: (1) 求常数 A；(2) DX；(3) $P(X<0.4, Y<1.2)$.

四、应用题（请将下列各小题的正确答案写在答题卷上，请在答案前标明题号，并保留必要的计算步骤；每小题 10 分，共 30 分）

1．某保险公司把保险人分为 3 类:“谨慎的”、“一般的”、“冒失的”。统计资料表明，这 3 种人在一年内发生事故的概率依次为 0.05，0.15，0.30；如果“谨慎的”被保险人占 20%，“一般的”占 50%，“冒失的”占 30%。

（1）求一个被保险人在一年内出事故的概率有多大；

（2）已知一个被保险人出了事故，求他是“冒失的”人的概率。

2．假设某条生产线组装一件产品所需时间 X 服从指数分布，且 $E(X)=10$（分钟）。各件产品所需的组装时间相互独立且服从相同的分布，试用中心极限定理求该生产线组装 100 件产品所需时间在 15 小时到 20 小时之间的概率。

计算 $a=0.17$

X	-2	-1	0	1
P	0.17	0.23	0.06	0.54

Y	-1	0	1	2
P	0.44	0.24	0.17	0.15

$P\{X=-2\}=0.17,\quad P\{Y=-1\}=0.44$

$P\{X=-2, Y=-1\}=0.17$ 不是独立

$$E(XY)=\sum_j\sum_i X_i \cdot Y_j P_{ij}$$

$$=(-2)\cdot(-1)\times 0.17+(-1)\cdot(-1)\cdot 0.14+1\cdot(-1)\cdot 0.12$$
$$+1\times 1\times 0.14+1\times 2\times 0.15$$
$$=0.34+0.14-0.12+0.14+0.3=0.8$$

$$\int_0^1 dx\int_0^1 Axy\,dy=1$$

$$=A\int_0^1 x\,dx\int_0^1 y\,dy=A\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{A}{4}=1$$

故 $A=4$

当 $0<x<1$, $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^1 4xy\,dy=2x$

$$f_X(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_X(x)\,dx=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx=\frac{2}{3}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f_X(x)\,dx=\int_0^1 2x^3\,dx=\frac{1}{2}$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

$$P\{X<0.4, Y<0.2\}=\int_0^{0.4}dx\int_0^1 4xy\,dy$$
$$=4\int_0^{0.4}x\,dx\int_0^1 y\,dy=4\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(0.4)^2=0.16$$

设出事故记为 B，

A_1 表示 谨慎的， A_2 表示 一般的

A_3 表示 冒失的 $P(A_1)=\cancel{0.12}\ 0.2$ $P(A_2)=0.5$

$P(A_3)=0.3$

A_1, A_2, A_3 两两相交为空，显然 $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

$P(B|A_1)=0.05$， $P(B|A_2)=\cancel{0.15}\ 0.15$ $P(B|A_3)=0.3$

$P(B)= P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+P(A_3)\cdot P(B|A_3)$

$=0.2\times 0.05+0.5\times 0.15+0.3\times 0.3$

$=0.01+0.075+0.09=0.175$

$P(A_3|B)=\dfrac{P(A_3B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_3)\cdot P(B|A_3)}{P(B)}=\dfrac{0.09}{0.175}=\dfrac{18}{35}$

$\cancel{X(\lambda)}$
$E(X_i)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{6}$ $\therefore \lambda=6$，（小时为单位）

则 $X_i \sim E(6)$， $i=1,2,\dots,100$

故 $D(X_i)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{36}$

令 100 件产品所需时间为 Y，则 $Y=\sum_{i=1}^{100} X_i$

则 $E(Y)=\sum_{i=1}^{100} E(X_i)=\frac{100}{6}$

$D(Y)=\sum_{i=1}^{100} D(X_i)=\frac{100}{36}$

$\dfrac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \sim N(0,1)$， $\dfrac{Y-\frac{100}{6}}{\frac{10}{6}}$

$P(15<Y<20)=P\left\{\dfrac{15-\frac{100}{6}}{\frac{10}{6}}<\dfrac{Y-\frac{100}{6}}{\frac{10}{6}}<\dfrac{20-\frac{100}{6}}{\frac{10}{6}}\right\}$

$=\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)+\Phi(1)-1$

$=0.9772+0.8412-1$

$=0.8185$

3. 设一个工生产的某种设备的寿命 X (单位：年)的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$ 工厂规定，出售的设备若在售出之后一年内损坏可以调换，若工厂售出一台设备赢利 100 元，调换一台厂方需要花费 300 元，试求设备净赢利的数学期望。

五、证明题（请将答案写在答题卷上，保留必要的证明步骤，每小题 5 分，共 10 分）.

1. $P(A)=a, P(B)=b(a,b$均大于0小于1)，证明$\frac{a}{b}\ge P(A|B)\ge\frac{a+b-1}{b}$。

2. 设随机变量 X： $N(1,3^2)$ Y： $N(0,4^2)$，已知 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}, Z=\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y$，$\rho_{XZ}$ 表示 X 与 Z 的相关系数，证明：$\rho_{XZ}=0$。

$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ $\lambda=\frac{1}{4}$

$P\{x\le 1\}=F(1)=1-e^{-\frac{1}{4}}$, $P\{X>1\}=1-P\{X\le 1\}=e^{-\frac{1}{4}}$

附表：

$P\{X>1\}\cdot 100+P\{X\le 1\}(100-300)$
$=e^{-\frac{1}{4}}\cdot 100+(1-e^{-\frac{1}{4}})(-200)$
$=100(3e^{-\frac{1}{4}}-2)$
≈ 33.64

N（0，1）分布函数值

x	0.44	1.2	1.8	1.5
Φ(x)	0.67	0.885	0.964	0.9332

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\le\frac{P(A)}{P(B)}\le\frac{a}{b}$

$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$
$\ge P(A)+P(B)-1=a+b-1$

故 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\ge\frac{a+b-1}{b}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$Cov(X,Z)=Cov(X,\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y)$
$=\frac{1}{3}Cov(X,X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)$
$=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$
$=\frac{1}{3}\times 9+\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\times 3\times 4=3-3=0$

$\rho_{XZ}=0$

6×0.3
18