

高等数学 I 练习卷 (2)

一、填空题(将答案写在答题纸的相应位置。每小题 3 分, 共 15 分。)

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $c =$ _____.

2. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan 2n}{n} =$ _____.

3. 函数 $y = \arccos(-x)$ 的微分 $dy =$ _____.

4. 函数 $f(x) = \frac{x+1}{x}$ 在区间 $[2, 3]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 则使结论成立的 $\xi =$ _____.

5. $\frac{d}{dx} \int_1^{\sqrt{x}} \sqrt{1+t^2} dt =$ _____.

二、单项选择题(将答案写在答题纸的相应位置。每小题 3 分, 共 15 分。)

1. 函数 $y = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$ 是 ().

- A. 奇函数 B. 偶函数 C. 非奇非偶函数 D. 既是奇函数又是偶函数

2. 函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的间断点是 ().

- A. $x = -1$ B. $x = 1$ C. $x = 0$ D. 不存在

3. 若曲线 $y = x^2 + ax + b$ 与 $y = x^3 + x$ 在点 $(1, 2)$ 处相切, 则 a, b 的值为 ().

- A. $a = 2, b = -1$ B. $a = 1, b = -3$ C. $a = 0, b = -2$ D. $a = -3, b = 1$

4. 若 $\int f(x) dx = x^2 e^x + C$, 则函数 $f(x) =$ ().

- A. $2xe^x$ B. $x^2 e^x$ C. $(x^2 + 2x)e^x$ D. $\frac{x^3}{3} e^x$

5. 反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ ($a > 0$) ().

- A. 发散 B. 收敛于 a C. 收敛于 $-\frac{1}{a}$ D. 收敛于 $\frac{1}{a}$

三、计算题(要求写出主要计算步骤及结果。每小题 8 分, 共 56 分。)

1. 已知函数 $y = \frac{(x+2)(x-3)^2}{x^2+1}$, 求 y' .

2. 求函数 $y = \frac{1}{1+x}$ 的 n 阶导数.

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)^x$.

4. 求函数曲线 $y = \frac{x}{e^x}$ 的凹凸区间与拐点.

5. 计算定积分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$.

6. 计算不定积分 $\int \frac{1+\ln x}{x^2} dx$.

7. 计算不定积分 $\int \frac{x-1}{x^2+1} dx$.

四、综合解答题(要求写出主要计算步骤及结果。共 8 分。)

设函数 $f(x) = ax^3 - 6ax^2 + b$ ($a > 0$)，在区间 $[-1, 2]$ 上最大值为 3，最小值为 -29，求常数 a, b 的值.

五、证明题(要求写出主要证明过程。共 6 分。)

证明积分中值定理：

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，证明：在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ ，使下列式子成立

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$