线性代数模拟试卷及答案（二）

一、填空题（将答案写在答题纸相应位置，不写解答过程。每空 3 分，共 15 分）

1、设行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=3$，则 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & -3a_{11}+2a_{12} \\ a_{21} & -3a_{21}+2a_{22} \end{vmatrix}=$__________。

2、设 A 是三阶方阵，且 $|A|=\dfrac{1}{3}$，则 $|(3A)^{-1}|=$__________。

3、 设 A,B 是三阶方阵，E 是三阶单位阵，$|A|=2$ 且 $A^2+AB+2E=0$，则 $|A+B|=$

___________。

4、已知向量 $\alpha=(2,1,1,3)^T,\beta=(1,-2,5,k)^T$，且向量 α,β 正交，则 $k=$__________.

5. 三阶方阵 A 的特征值为 $1.-1,2$，则 $B=2A^3-3A^2$ 的特征值为_____________

二、选择题（从下列各题四个备选答案中选出一个正确答案，并将其代号写在答题纸的相应位置。答案选错或未选者，该题不得分。每小题 3 分，共 15 分。）

1．设 A，B 均为 n 阶方阵，且 $A(B-E)=0$，则（　　　）

(A) $A=0$ 或 $B=E$　　　　(B) $|A|=0$ 或 $|B-E|=0$

(C) $|A|=0$ 或 $|B|=1$　　　　(D) $A=BA$

2. 已知方程组 $AX=b$ 对应的齐次线性方程组为 $AX=0$，则（　　）

(A) 若 $AX=0$ 只有零解，则 $AX=b$ 一定是唯一解；

(B) 若 $AX=0$ 有非零解，则 $AX=b$ 一定有无穷多解；

(C) 若 $AX=b$ 有无穷解，则 $AX=0$ 一定有非零解；

(D) 若 $AX=b$ 有无穷解，则 $AX=0$ 一定只有零解；

3、若 A 是 n 阶方阵，且 $|A|=0$，则 A 中（　　）

(A) 必有一列元素全为 0　　　　(B)必有一列向量是其余列向量的线性组合

(C) 必有两列成比例　　　　(D)任一列向量是其余列向量的线性组合

4、设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{m\times n}$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{n\times m}$ 矩阵，则（　　）

(A) 当 $\boldsymbol{m>n}$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq \boldsymbol{0}$；

(B) 当 $\boldsymbol{m>n}$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=\boldsymbol{0}$；

(C) 当 $\boldsymbol{n>m}$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq \boldsymbol{0}$；

(D) 当 $\boldsymbol{n>m}$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=\boldsymbol{0}$。

5、向量组 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s}$ 线性无关的充要条件是（　　）

(A) $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s}$ 均不为零向量；

(B) $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s}$ 中任意两个向量的分量不对应成比例；

(C) $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s}$ 中任意一个向量均不能由其余 $\boldsymbol{s-1}$ 个向量线性表示；

(D) $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s}$ 中有一部分向量线性无关。

三、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 10 分）

计算行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & -1 \\ 1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & b \end{vmatrix}$ 的值.

四、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 10 分）

（1） 求解矩阵 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix}^{2023}$ （2）求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆

五、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 10 分）

求向量组的最大无关组，并用极大无关组表示其余向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

六、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 10 分）

求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=3 \\ 3x_1+8x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7 \end{cases}$$

七、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 10 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$，求特征值与特征向量。

八、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 10 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,相似，求 x, y 的值。

九、证明题（要求在答题纸相应位置上写出详细证明过程，每小题 5 分，共 10 分）

（1）求证：任意 $\boldsymbol{m}\ (\boldsymbol{m} > \boldsymbol{n})$ 个 $\boldsymbol{n}$ 维向量必定线性相关。

（2）证明实对称矩阵的特征值都是实数。

线性代数模拟试卷答案（二）

一、填空题（将答案写在答题纸相应位置，不写解答过程。每空 3 分，共 15 分）

1、设行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=3$，则 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & -3a_{11}+2a_{12} \\ a_{21} & -3a_{21}+2a_{22} \end{vmatrix}=$ ___6____。

2、设 A 是三阶方阵，且 $|A|=\frac{1}{3}$，则 $|(3A)^{-1}|=$ ___1/9______。

3、设 A,B 是三阶方阵，E 是三阶单位阵，$|A|=2$ 且 $A^2+AB+2E=0$，则 $|A+B|=$

____−4____。

4、已知向量 $\alpha=(2,1,1,3)^T,\beta=(1,-2,5,k)^T$，且向量 α,β 正交，则 $k=$ ____−5/3____.

5. 三阶方阵 A 的特征值为 $1.-1,2$，则 $B=2A^3-3A^2$ 的特征值为 __−1, −5, 4___

二、选择题（从下列各题四个备选答案中选出一个正确答案，并将其代号写在答题纸的相应位置。答案选错或未选者，该题不得分。每小题 3 分，共 15 分。）

1．设 A，B 均为 n 阶方阵，且 $A(B-E)=0$，则（ B ）

(A) $A=0$ 或 $B=E$ (B) $|A|=0$ 或 $|B-E|=0$

(C) $|A|=0$ 或 $|B|=1$ (D) $A=BA$

2. 已知方程组 $AX=b$ 对应的齐次线性方程组为 $AX=0$，则（ C ）

(A) 若 $AX=0$ 只有零解，则 $AX=b$ 一定是唯一解；

(B) 若 $AX=0$ 有非零解，则 $AX=b$ 一定有无穷多解；

(C) 若 $AX=b$ 有无穷解，则 $AX=0$ 一定有非零解；

(D) 若 $AX=b$ 有无穷解，则 $AX=0$ 一定只有零解；

3、若 A 是 n 阶方阵，且 $|A|=0$，则 A 中（ B ）

(A) 必有一列元素全为 0 (B)必有一列向量是其余列向量的线性组合

(C) 必有两列成比例 (D)任一列向量是其余列向量的线性组合

4、设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{m\times n}$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{n\times m}$ 矩阵，则（　B　）

(A) 当 $\boldsymbol{m>n}$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq \boldsymbol{0}$；

(B) 当 $\boldsymbol{m>n}$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=\boldsymbol{0}$；

(C) 当 $\boldsymbol{n>m}$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq \boldsymbol{0}$；

(D) 当 $\boldsymbol{n>m}$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=\boldsymbol{0}$。

5、向量组 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s}$ 线性无关的充要条件是（　C　）

(A) $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s}$ 均不为零向量；

(B) $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s}$ 中任意两个向量的分量不对应成比例；

(C) $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s}$ 中任意一个向量均不能由其余 $\boldsymbol{s-1}$ 个向量线性表示；

(D) $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s}$ 中有一部分向量线性无关。

三、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 10 分）

计算行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & -1 \\ 1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & b \end{vmatrix}$ 的值.

解：

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & -1 \\ 1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+0 & 1-1 \\ 1+1 & b+0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a-0 & 1+1 \\ 1-1 & b-0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & 0 \\ 2 & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & 2 \\ 0 & b \end{vmatrix}$$

$$= a^2 b^2$$

注：利用了 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$

四、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 10 分）

（1） 求解矩阵 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix}^{2023}$　（2）求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆

解：

(1)$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix}^{2023} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{2023} = 11^{2022}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

(2)$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行初等变换}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$

五、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 10 分）

求向量组的最大无关组，并用极大无关组表示其余向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

解：

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以极大无关组为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,向量$\alpha_4 = 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$

六、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 10 分）

求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

解：

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/7 & 13/7 & 13/7 \\ 0 & 1 & -2/7 & -4/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 \\ x_2 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \\ \quad x_3 = x_3 \\ \quad x_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \text{通解} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \ k_1, k_2 \in R.$$

七、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 10 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$，求特征值与特征向量。

解：（1）求特征值（利用 $|\lambda I - A| = 0$）

$\lambda_1 = -4, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

（2）求特征向量（利用 $(\lambda I - A)X = 0$）

对 $\lambda_1 = -4$，解 $(\lambda I - A)X = 0$ 得基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

所以属于特征值 $\lambda_1 = -4$ 的全体特征向量为 $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, k_1 \neq 0$

对 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$，解 $(\lambda I - A)X = 0$ 得基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

所以属于特征值 $\lambda_1 = -4$ 的全体特征向量为 $k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_{2,} k_3$ 不全为零

（注：注意特征向量不能为零向量，要加上相应的限制条件）

八、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 10 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}y & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 相似，求 x, y 的值。

解：（注：一般先利用迹相等，行列式相等，若条件不够再考虑用特征值相同）

$tr(A)=tr(B)\Rightarrow x=y+2$

$|A|=|B|\Rightarrow -x=y$

两式联立解得 $x=1, y=-1$

九、证明题（要求在答题纸相应位置上写出详细证明过程，每小题 5 分，共 10 分）

（1）求证：任意 $\boldsymbol{m}\ (\boldsymbol{m} > \boldsymbol{n})$ 个 $\boldsymbol{n}$ 维向量必定线性相关。

（1）证明：不妨假设这 m 个向量为列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_m$

令 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_m)$，则 A 为 $n\times m$ 矩阵

因此有 $R(A)\le n < m$

即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_m$ 线性相关

（2）证明实对称矩阵的特征值都是实数。

略