

练习卷 (3)

一、填空题 (将答案写在答题纸相应的位置。每小题 3 分, 共 15 分.)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 8^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} =$ _____.

2. 设 $f(x) = x(x-1)(x-2) \cdots (x-2020)$, 则 $f'(0) =$ _____.

3. 参数方程 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ 所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.

4. 函数 $y = e^{2x+1}$ 的 n 阶导数 $y^{(n)} =$ _____.

5. 设 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$, 则 $f(x) =$ _____.

二、单项选择题 (将答案写在答题纸相应的位置。每小题 3 分, 共 15 分.)

1. 下列函数在自变量 $x \rightarrow \infty$ 过程中, 极限不存在的是 ()

A. $\frac{1}{x} \arctan \frac{1}{x}$ B. $x \arctan x$ C. $\frac{1}{x} \arctan x$ D. $x \arctan \frac{1}{x}$

2. 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)}$ 的可去间断点为 ()

A. $x = -1$ B. $x = 0$ C. $x = 1$ D. $x = 2$

3. 设 $x + y = \ln x$, 则 $\frac{dx}{dy} =$ ()

A. $\frac{x-1}{x}$ B. $\frac{x}{x-1}$ C. $\frac{1-x}{x}$ D. $\frac{x}{1-x}$

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x} = -2$, 则有 ()

A. $f(0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值 B. $f(0)$ 为 $f(x)$ 的一个极小值
C. $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内单调增加 D. $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内单调减少

5. 已知广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{kx} dx = 2$, 则 k 的值为 ()

A. $-\frac{1}{2}$ B. -2 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

三、计算题 (要求写出主要计算步骤及结果; 每小题 7 分, 共 42 分.)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{x}{\sin x}\right)}{\ln \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)}.$

2. 求过原点且与曲线 $y = e^x$ 相切的切线方程.

3. 设 $\int_0^{-x} ye' dt + \int_0^y x \cos t dt = 0$, 求 dy .

4. 求定积分 $\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{1+\ln t}}$.

5. 设 $f(x) = \frac{2}{x(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx$, 求 $\int_1^2 f(x) dx$.

6. 求不定积分 $\int e^{\sqrt{2x+1}} dx$.

四、解答题 (要求写出主要计算步骤及结果; 每小题 7 分, 共 14 分.)

1. 确定 a, b 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[(x-2)e^{\frac{1}{x}} - (ax+b) \right] = 0$.

2. 已知 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 在 $x = -1$ 处有极值 2, 试确定常数 a, b , 并求出 $f(x)$ 的极值点、拐点.

五、证明题 (要求写出主要证明步骤; 每小题 7 分, 共 14 分.)

1. 证明: $a \cos x + b \cos 2x = 0$ 在 $(0, \pi)$ 内存在根, 其中 a, b 为常数.

2. 证明: 当 $x \neq 0$ 时, $e^x > 1+x$.