第八章 不定积分 计算题

1. 求不定积分$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{2+x-x^2}}$

2. 求$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$

3. $\int \frac{x^2 arctgx}{1+x^2}dx$ ，

4. $\int \frac{dx}{x(1+x^3)^2}$

5. $\int \frac{x \arg tgx}{\sqrt{1+x^2}}dx$

6. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2+x}}$

7. $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x-4^x}dx$ （10 分）

8. 设 f(x)的原函数为$\frac{\sin x}{x}$,求$\int xf'(x)dx$ （10 分）

9. 计算$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

10. $\int \frac{du}{\sqrt{u}+\sqrt[3]{u}}$

11. 求$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

12. 计算 $\int \frac{e^x}{x}(1+x\ln x)dx$

第八章 不定积分 计算题 答案

1. 解：$\because 2+x-x^2=(1+x)(2-x)$ 令 **t=**$\sqrt{\dfrac{2-x}{1+x}}$ （得 **2** 分）

$\therefore x=\dfrac{2-t^2}{1+t^2}$ **dx=**$\dfrac{-6t}{(1+t^2)^2}dt$ （得 **5** 分）

$$\therefore \int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{2+x-x^2}}=\int(\frac{1+t^2}{3})^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{-6t}{(1+t^2)^2}dt=-\frac{2}{3}\int dt=-\frac{2}{3}t+c$$

=$-\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2-x}{1+x}}+c$ （得 **8** 分）

（其他变换还有如 **t=**$\dfrac{1}{x+1}$ ）

2. $\int\dfrac{\sin x}{1+\sin x}dx=\int\dfrac{\sin x(1-\sin x)}{\cos^2 x}dx$ （得 **3** 分）

=$\int\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx-\int\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$ ***dx*** （得 **6** 分）

=$\dfrac{1}{\cos x}-\tan x+x+C$ （得 **8** 分）

3. 解：$\int\dfrac{x^2 arctgx}{1+x^2}dx=\int\dfrac{(1+x^2-1)arctgx}{1+x^2}dx=\int arctgxdx-\int arctgxd(arctgx)$

（ 得 **4** 分）

=xarctgx$-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{2}(arctgx)^2+c$ （得 **7** 分）

4. 解：$\int\dfrac{dx}{x(1+x^3)^2}=\int\dfrac{x^2dx}{x^3(1+x^3)^2}$(令$1+x^3=t$)

=$\dfrac{1}{3}\int\dfrac{dt}{(t-1)t^2}$ （得 **3** 分）

=$\dfrac{1}{3}\int(\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2})dt=\dfrac{1}{3}[\int\dfrac{dt}{t-1}-\int\dfrac{dt}{t}-\int\dfrac{dt}{t^2}]$

=$\dfrac{1}{3}(\ln|t-1|-\ln|t|+\dfrac{1}{t})+c=\dfrac{1}{3}(\ln\left|\dfrac{x^3}{1+x^3}\right|+\dfrac{1}{1+x^3})+c$ （得 **7** 分）

5. 解:$\int\frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^2}}=\int arctgxd(\sqrt{1+x^2})\cdots(得2分)=\sqrt{1+x^2}arctgx-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

... (得 3 分)=$\sqrt{1+x^2}arctgx-\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+c$ (得 7 分)

6. 解:$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$令$\sqrt{x^2+x+1}=t-x$

=$\int\frac{2(t^2+t+1)}{t(2t+1)^2}dt$ (得 2 分)

=$\int(\frac{2}{t}-\frac{3}{(2t+1)}-\frac{3}{(2t+1)^2})dt\cdots(得4分)=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t+1|-\frac{3}{2(2t+1)}+c$

=$2\ln|x+\sqrt{x^2+x+1}|-\frac{3}{2}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{2(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}+c$

(得 7 分)

7. 原式=$\int\frac{(\frac{3}{2})^x}{(\frac{3}{2})^x-1}dx$ (得 5 分)

=$\frac{1}{\ln^3-\ln^2}\int\frac{1}{\left[(\frac{3}{2})^x\right]^2-1}d(\frac{3}{2})^x$ (得 7 分)

= $\frac{1}{2(\ln^3-\ln^2)}\cdot\ln\left|\frac{(\frac{3}{2})^x-1}{(\frac{3}{2})^x+1}\right|$ (得 10 分)

8. 解: $\because$ f(x)=$(\frac{\sin x}{x})'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ (得 3 分)

$\therefore\ \int xf'(x)dx=\int xdf(x)$ (得 4 分)

=$xf(x)-\int f(x)dx$ (得 5 分)

=cosx$-\frac{\sin x}{x}-[\int\frac{\cos x}{x}dx+\int\sin d(\frac{1}{x})]$ (得 8 分)

=cosx$-2\frac{\sin x}{x}+c$ (得 10 分)

9. 1.解：令 u=$\sqrt{e^x-1}$　则 x=ln(1+u²)　dx=$\frac{2u}{1+u^2}du$　　(得 3 分)

原式=$\int\frac{(1+u^2)\ln(1+u^2)}{u}\cdot\frac{2u}{1+u^2}du$　　(得 5 分)

=$2\int\ln(1+u^2)du$

=$2u\ln(1+u^2)-\int\frac{4u^2}{1+u^2}du$　　(得 6 分)

=$2u\ln(1+u^2)-4u+4arctgu+C$　　(得 7 分)

=$2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4arctg\sqrt{e^x-1}+C$　　(得 8 分)

10. $\int\frac{du}{\sqrt{u}+\sqrt[3]{u}}$ 令(u=x⁶) =$\int\frac{6x^5}{x^3+x^2}dx$　　(得 2 分)

=$6\int(x^2-x+1-\frac{1}{1+x})dx=6(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|1+x|)+c$　　(得 4 分)

=$2\sqrt{u}-3\sqrt[3]{u}+6\sqrt[6]{u}-6\ln(1+\sqrt[6]{u})+c$　　(得 8 分)

11. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}(令x=\sec t)=\int\frac{\sec t\cdot tgt}{\sec^2 t\cdot tgt}dt$　　(得 3 分)

=$\int\cos tdt=\sin t+c=\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}+c$　　(得 8 分)

12. 原式 $=\int\frac{e^x}{x}dx+\int e^x\ln x\,dx$　　(得 2 分)

$=\int e^x d\ln x+\int e^x\ln x\,dx$　　(得 4 分)

$=e^x\ln x-\int e^x\ln x\,dx+\int e^x\ln x\,dx$　　(得 6 分)

$=e^x\ln x+C$.　　(得 8 分)

第八章　不定积分 **填**空题

1. 若$\int f(x+1)dx = xe^{x+1}+c$，则 **f(x)=（   ）；**

2. 已知函数 **f(x)**的一个原函数是 **sinx**,则 f'**(x)=**____________

3. 设 **f(x)=x+**$\frac{1}{x}$**,g(x)=** $\frac{1}{x}$，则有$\int f[g(x)]dx =$________ $\int g[f(x)]dx =$__________

4. 积分$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx =$ __________________.

5. 设$f'(\ln x) = 1+x$ 则 **f(x)=**_________________________

6. 设$\int xf(x)dx = \arcsin x + c$则$\int \frac{dx}{f(x)}$=______________________

7. 积分 $\int e^x \sin x\, dx$ = ________________

8. $\int \frac{dx}{1+e^x}$ = ______________________________

9. $\int e^{e^x+x}\ dx$ **=** _________________________.

第八章 不定积分**填**空题 答案

1. x e^x， 2. − sin x 3. 1.ln|x|+$\frac{1}{2}x^2$ **+c， 4. 2tg**$\frac{x}{2} - x + c$

5. x+e^x +c， 6. $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+c$ **7.** $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

8. $x - \ln(1+e^x) + C.$ **9.** $e^{e^x} + C$

第八章 不定积分 证明题

1. 设$f(x)$单调连续，$f^{-1}(x)$是它的反函数，如果

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

证明：$\int f^{-1}(x)\,dx=xf^{-1}(x)-F[f^{-1}(x)]+C$.

2. 试证：

$$\int\left\{\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{[f'(x)]^3}\right\}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2+C.$$

第八章 不定积分 证明题答案

1.证明 因

$$\left\{xf^{-1}(x)-F[f^{-1}(x)]\right\}'$$

$$=f^{-1}(x)+\frac{x}{f'(x)}-F'[f^{-1}(x)]\cdot\frac{1}{f'(x)},$$ (得 4 分)

又$F'(x)=f(x)$，从而$F'[f^{-1}(x)]-f[f^{-1}(x)]=x$. (得 6 分)

于是 $\left\{xf^{-1}(x)-F[f^{-1}(x)]\right\}'=f^{-1}(x)$.

因此 $\int f^{-1}(x)\,dx=xf^{-1}(x)-F[f^{-1}(x)]+C$. (得 8 分)

2.证 原式 $=\int\frac{f(x)[f'(x)]^2-f''(x)f^2(x)}{[f'(x)]^3}dx$ (得 2 分)

$$=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot\frac{[f'(x)]^2-f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2}dx$$ (得 4 分)

$$=\int\frac{f(x)}{f'(x)}d\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]$$ (得 6 分)

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2+C.$$ (得 8 分)

第八章 不定积分 选择题

1. $\int \frac{dx}{1+e^x}$ = (　　　)

(A) x−ln(1+e^x)+C　　　　(B) x+ln(1+e^x)+C

(C) x−ln(1+e^{-x})+C　　　　(D) x+ln(1+e^{-x})+C

2. 设 f(x)的一个原函数为 e^{2x}，则 $\int xf'(x)dx =$ (　　)

(A) $\frac{1}{2}e^{2x}+c$　(B) $2xe^{2x}+c$　(C) $\frac{1}{2}xe^{2x}-e^{2x}+c$　(D) $2xe^{2x}-e^{2x}+c$

3. 已知 $\int f(x+1)dx = xe^{x+1}+c$　则 f (x)=(　).

(A) xe^{x+1}　(B) xe^x　(C) (x+1)e^x　(D) (x+1)e^{x+1}

4. 设 f(x)在[a , b]上的某个原函数为零，则在[a , b]上 f(x) (　)

(A)的原函数等于零.　　　　(B)的不定积分恒等于零.

(C)不恒等于零,但 f′(x)恒等于零.　　(D)恒等于零.

5. 若 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$,则$f(x)=$(　)

(A) $\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+c$　　　　(B) $x-\frac{1}{2}x^2+c$

(C) $\cos x-\sin x+c$　　　　(D) $\frac{1}{2}x^2-x+c$

6. 设 f ′(x^2)=$\frac{1}{x}$(x>0),则 f(x)=

(A) 2x+c　(B)ln|x|+c　(C)2$\sqrt{x}$+c　(D) $\frac{1}{\sqrt{x}}$+c

7. 不定积分 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

(A) $\frac{3}{4}X^{\frac{4}{3}}-\frac{4}{3}X^{\frac{3}{4}}$ +C　　(B) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+c$

(c) $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+c$　　(D) $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+c$

8. 设非零函数 f(x)在[a, b] 上有连续的导数,则 f(x)=(　)

(A) $\int f'(x)dx$ (B) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$ (C) $\int_a^x f'(t)dt$ (D) $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx$

9. 已知 f(x) =ktg2x 的一个原函数为 $\frac{2}{3}\ln\cos 2x$ 则 k = ( ).

(A) $-\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $-\frac{4}{3}$

10. 设 $f'(x)$ 连续,下述等式正确的是 ( )

(A) $[\int f(x)dx]' = f(x) + c$ (B) $\int f'(x)dx = f(x) + 1$

(C) $\int f'(x)dx = f(x) + c$ (D) $\int f(x)dx - \int f(x)dx = 0$

11. f .g 具有连续导数, F' (x)=f(x).下述等式成立的是( )

(A) $\int f(g(x))dx$ =F(g(x))+C (B) $\int f(g(x))g'(x)dx$ =F(g(x))

(C) $\int f(g(x))g'(x)dx$ =F(g(x))+C (D) $\int g(f(x))f'(x)dx = F(g(x)) + C$

第八章 不定积分 选择题 答案

1. A.　2. D,　3. B,　4. D,　5. B,　6. C,

7. C,　8. B,　9. D,　10. C,　11. C,

第九章 定积分 应用题

1. 利用定积分的概念计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(2n-1)}}\right)$

第九章 定积分 应用题 答案

1. 原式= $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{i}{n}}}$　　(得 3 分)

= $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx=2\sqrt{1+x}\Big|_0^1$　　(得 5 分)

=2($\sqrt{2}-1)$　　(得 8 分)

第十章 定积分应用 选择题

66. 6 曲线 y=x ^{2} 与 y ^{2} =x 所围图形绕 y 轴一周所成旋转体的体积 V=

(A) $\frac{\pi}{5}$　　(B) $\frac{3}{10}\pi$

(C) π　　(D) $\frac{\pi}{2}$

2、.曲线 y=x ^{2} 与 y=x 所围成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积是(　)

(A) $\pi\int_0^1(x-x^2)dx$　　(B) $\pi\int_0^1(x^2-x^4)^2dx$

(C) $\pi\int_0^1(x^2-x^4)dx$　　(D) $\pi^2\int_0^1(x^4-x^2)^2dx$

3、.旋轮线 x=a(t-sint).y=a(1-cost)　(a>0.　0≤t≤2 π)一拱与 x 轴围成共区域面积

为(　　)

A.$2\pi a^2$　　B.$3\pi a^2$　　C.πa^2　　D.$\frac{1}{2}\pi a^2$

第十章　定积分应用　选择题答案

1、　　2、(C)　3、(B)

第九章 定积分　计算题

1. 求积分$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$　(　分)

2. 设 f(x)为连续函数，且 f(x)=x+2$\int_0^1 f(t)dt$,求 f(x).(　分)

3. 已知$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$,求$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}dx$　(10 分)

4. 求$\int_0^n e^x|\sin \pi x|dx$($n$是正整数)(10分)

5. 计算$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$，(6 分)

6. 计算$\int_0^1 x\cos \pi x dx$　(6 分)

7. 计算$\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx$　(8 分)

8. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$　(8 分)

9. .求$\int_0^1 \arcsin xdx$，　(8 分)

第九章　　定积分　计算题　答案

1. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx=\int_{1}^{e}\ln xdx-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln xdx$ （得 2 分）

$=(\ln x-1)x\Big|_{1}^{e}-(\ln x-1)x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}$ （得 5 分）

$=2-\frac{2}{e}$ （得 8 分）

2. $\because\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_0^1(2\cdot\int_0^1 f(t)dt)dx$

$=\frac{1}{2}+2\int_0^1 f(t)dt$ （得 4 分）

$\therefore\int_0^1 f(t)dt=-\frac{1}{2}$ （得 6 分）

故 $f(x)=x+2\times(-\frac{1}{2})=x-1$ （得 8 分）

3. 解：令 $I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}dx$ （得 1 分）

$\therefore I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+e^x)\sin^2 x-\sin^2 x}{1+e^x}dx$ （得 4 分）

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx$ （得 6 分）

$=I-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{e^x(e^{-x}+1)}dx$ （得 7 分）

$=I-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(-t)}{e^{-t}(e^t+1)}d(-t)$ （得 9 分）

$=I-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^t\sin^2 t}{1+e^t}dt$

$= I - I_1$

$\therefore I_1 = \frac{I}{2}$ （得 10 分）

4. 原式=$\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} e^x |\sin \pi x| dx$ （得 4 分）

$=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_k^{k+1} e^x \sin \pi x dx$ （得 6 分）

$=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k (-1)^k \frac{\pi(1+e)}{1+\pi^2} e^k$ （得 8 分）

$=\frac{\pi(1+e)}{1+\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1} e^k$ （得 10 分）

5. 解：原式=$\int_1^e (1+\ln x) d(1+\ln x)$ （得 3 分）

$=\frac{1}{2}(1+\ln x)^2\Big|_1^e = \frac{1}{2}(4-1) = \frac{3}{2}$ （得 6 分）

6. 解：原式=$\frac{1}{\pi}\int_0^1 x d \sin \pi x$ （得 2 分）

$=\frac{1}{\pi}[x \sin \pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin \pi x dx]$ $\quad = \frac{1}{\pi^2}\cos \pi x\Big|_0^1 = -\frac{2}{\pi^2}$

7. 解：原式=$\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^4)^{\frac{3}{2}} dx^2$ （得 1 分）

令 $x^2=\sin t$ 则 $x=0$ 时 $t=0$；$x=1$ 时 $t=\frac{\pi}{2}$ （得 2 分）

原式=$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^{\frac{3}{2}} d \sin t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt$ （得 4 分）

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos 2t)^2}{4} dt = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2t+\cos^2 2t) dt$

$=\frac{1}{8}[\frac{\pi}{2}+\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4t}{2} dt]$

$=\frac{1}{8}[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t d 4t$

$=\frac{1}{8}[\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{8}\cos 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{32}\pi$ （得 8 分）

8. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ (令 x=asinx)= $a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$ （得 4 分）

$$=\frac{a^2}{2}(t+\frac{\sin 2t}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}$$ （得 8 分）

9. $\int_0^1 \arcsin x\,dx = x\arcsin\Big|_0^1-\int_0^1 x\,d\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ （得 5 分）

$$=\frac{\pi}{2}+\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-1$$ （得 8 分）

第九章 定积分 填空题

1. 函数 f(x)在[a,b]上连续是它在该区间上可积的(　　　)条件；

2. 设 f(x)在(-∞,+∞)内连续,则 $\int_a^b f(x)dx+\int_b^a f(x)dx$ =__________________.

3. 设函数 f(x)在[a,b]上连续,则 $\lim\limits_{b\to a}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ =__________________.

4. 设 f(x)在[a,b]上连续,F(x)= $x\int_0^x f(t)dt$ 则 F' (x)=________, F' (a)=________

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}=$ ______________

6. 极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n}}\right)=$$ ________.

7. 积分 $\int_{-1}^2\left|x^2-x\right|dx=$ ______________.

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\int_e^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=$ ____________________

9. $\int_{-2}^2\frac{x+|x|}{2+x^2}dx$ =______________.

10. 若 $\int_0^{x^2}f(t)dt=x^2(1+x)$ 则 f(2)=______________.

11. 设 f(x)连续,且 f(o)=2.当 a=________时, F(x)= $\begin{cases}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)dt}{\sin^2 x},x>0\\ a+x^2,x\le 0\end{cases}$

在 x=0 点连续.

12 若函数 $f''(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $xf'(x)=f(x)$. $\int_a^b xf''(x)dx$ = _________ .

第九章 定积分 填空题 答案

1. 充分　　2. 0.　　3. f(a),　　4. . $\int_a^x f(t)dt + xf(x), af(a)$

5. $\frac{1}{3}$,　　6. $\frac{\pi}{6}$　　7. $\frac{11}{6}$　　8. $\frac{1}{2}$,

9. ln3 ,　　10. $1+\frac{3}{2}\sqrt{2}$　　11. 1,　　12. 0

第九章 定积分 证明题

1. (10 分) 证明积分不等式：$\int_0^1 \ln(1+x)dx > \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$

2. (8 分) 证明函数 f(x)= $\int_a^x e^{-t^2}dt + \int_1^x \frac{\sin t}{t}dt$ 在区间(a,1)内有唯一的零点 (0<a<1).

3. 若 f(x)为$(-\infty,+\infty)$ 上以 T 为周期的函数 ,证明对任何实数 a 有$\int_0^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

4. (8 分)若 $f(x)$ 为连续函数，证明$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$，并由此计算 $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$。

5. (10 分) 设 f, g 均为定义在[a, b] 上的有界函数,证明:若仅在[a, b]上有限个点 x 处 f(x)≠g(x), 则当 f 在[a, b]上可积时,g 也在[a, b]上可积

6. (11 分)设 f(x)在[0,1]上连续且递减, 证明:当 0<λ <1 时,$\int_0^\lambda f(x)dx \ge \lambda\int_0^1 f(x)dx$

7. 设 f 在[a, b]上有界,{a_n}⊂[a, b]且$\lim_{n\to\infty} a_n = c$ 若 f 在[a, b]上只有 a_n (=1,2,…) 为其间断点,则 f 在[a, b]上可积

8. 证明:如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，又$f(x)\ge 0$ 且$\int_a^b f(x)dx = 0$。则在$[a,b]$上 $f(x) \equiv 0$

9. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(\frac{x}{2})dx,$$

求证：在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

第九章 定积分 证明题 答案

1. 证：令 $F(x)=\int_0^x \ln(1+t)dt-\int_0^x \frac{t}{1+t}dt$ （得 3 分）

$\because F'(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$ $F''(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}>0\ (x>0)$ （得 5 分）

$\therefore F'(x)$单增,又$F'(0)=0$ $\therefore$ 当$x>0$时,$F'(x)>0$ （得 8 分）

故$F(x)$单增,而$F(0)=0$ $\therefore \int_0^1 \ln(1+x)dx>\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$ （得 10 分）

2. 证:对 0<a<1,当 x $\in[a,1]$ 时,$\frac{\sin x}{x}>0$ $\therefore f(a)=-\int_a^1 \frac{\sin t}{t}dt<0$ （得 2 分）

f (1)=$\int_a^1 e^{-t^2}dt+\int_1^1 \frac{\sin t}{t}dt$=$\int_a^1 e^{-t^2}dt>0$ （得 4 分）

又$\because$ f(x)在[a,1]上为连续函数. $\therefore$ 至少有一点 $x_0\in(a,1)$使 $f(x_0)=0$ （得 6 分）

又$\because f'(x)=e^{-x^2}+\frac{\sin x}{x}>0$ $x\in(a,1)$ $\therefore$ f(x)在(a,1)内单增

故 x_0 为 f(x)在(a,1)内唯一的零点 （得 8 分）

3. 证明:设 kT$\le a$ <(k+1)T 其中 k 为整数 ,则

$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_a^{(k+1)T} f(x)dx+\int_{(k+1)T}^{a+T} f(x)dx$ （得 3 分）

等式右边第一个积分,令 x=kT+u

等式右边第二个积分,令 x=(k+1)T+v 则

左边=$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_{a-kT}^{T} f(kT+u)du+\int_0^{a-kT} f[(k+1)T+v]dv$ （得 6 分）

=$\int_{a-kT}^{T} f(u)du+\int_0^{a-kT} f(v)dv$

=$\int_{a-kT}^{T} f(x)dx+\int_0^{a-kT} f(x)dx$

=$\int_0^{T} f(x)dx=$ 右边 （得 10 分）

4. 证明: 令 x=$\pi-y$ （得 2 分）

则$\int_0^{x} xf(\sin x)dx=\int_0^{\pi}(\pi-y)f[\sin(\pi-y)d(\pi-y)]$]

=$\int_0^{\pi}(\pi-y)f(\sin y)dy=\int_0^{\pi}(\pi-x)f(\sin x)dx$

=$\int_0^{\pi}\pi f(\sin x)dx-\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx$移项得

2$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

故$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}$

$=-\frac{\pi}{2}arctg(\cos x)|_0^{\pi} = \frac{-\pi}{2}[-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}] = \frac{\pi^2}{4}$ （得 10 分）

5．证明：记 F(x)=f(x)−g(x) （得 1 分）

由条件知 F(x)除有限个点外,均为零,因此除这有限个点外,F(x)在[a, b]上连续（得 5 分）

由课本定理 10.5 ,F(x)在[a, b]上可积 （得 6 分）

于是 g(x)=f(x)−F(x)在[a, b]上也可积。 （得 10 分）

6．证:$\int_0^{\lambda} f(x)dx - \lambda\int_0^1 f(x)dx$

$=\int_0^{\lambda} f(x)dx - \lambda\int_0^{\lambda} f(x)dx - \lambda\int_{\lambda}^1 f(x)dx$ （得 2 分）

$=(1-\lambda)\lambda f(\xi_1) - \lambda(1-\lambda)f(\xi_2)$

$=\lambda(1-\lambda)[f(\xi_1) - f(\xi_2)]$ （得 8 分）

其中 $0 \le \xi_1 \le \lambda \le \xi_2 \le 1$ 而 f(x)递减

则有$f(\xi_1) \ge f(\xi_2)$ 又因 0<x<1 时(1−λ)>0

因此有$\lambda(1-\lambda)[f(\xi_1) - f(\xi_2)] \ge 0$

即 $\int_0^{\lambda} f(x)dx \ge \lambda\int_0^1 f(x)dx$ （得 10 分）

7．证明： 设$|f(x)| \le M$ x∈[a, b] ,不妨 c∈[a, b]

对$\forall\varepsilon > 0$,取$\delta = \min\{b-a, c-a, \frac{\varepsilon}{12M}\}$ 因为$a_n \to c(n \to \infty)$

所以在$[a, c-\delta]$与$[c+\delta, b]$上 f 至多只有有限个不连续点 （得 3 分）

于是存在$[a, c-\delta]$ 的分割 T_1 使得 $\sum_{T_1} w_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}$ 存在$[c+\delta, b]$的

分割 T₂ ,使得$\sum_{T_2} w_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}$　　　　　　　　(得 6 分)

从而对[a,b]分割 $T=T_1 \cup T_2$ 有

$$\sum_{T} w_i \Delta x_i = \sum_{T_1} w_i \Delta x_i + \sum_{T_2} w_i \Delta x_i + 2\delta w([c-\delta, c+\delta])$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{12M} \cdot 2M = \varepsilon$$

$\therefore f$在$[a,b]$上可积　　　　　　　　(得 8 分)

8. 证明：设有一个点$\xi \in [a,b]$使$f(\xi) > 0$,因为$f(x)$在$[a,b]$上连续，所以必有含有 ξ 的区间 $[c_1, c_2]$ 存在，使得 $[c_1, c_2]$ 上 $f(x) > \frac{f(\xi)}{2}$ ，从而 .

$\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx > \frac{f(\xi)}{2}(c_2 - c_1) > 0$　　　　(4 分)

已知$\int_a^b f(x)\,dx = 0$,因为

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx,$$

所以$\int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx = 0$,而由假设

$\int_a^{c_1} f(x)\,dx \ge 0$ ，$\int_{c_2}^{b} f(x)\,dx \ge 0$ ，并且 $\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx > 0$ ，所以 $\int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx > 0$　　　　(6 分)

这与原式矛盾，

故$[a,b]$上的任一点x均有$f(x)=0$即在$[a,b]$上$f(x) \equiv 0$.　　　　(10 分)

8. 证明：由已知条件可知$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2} f(\xi_1)$，$\frac{1}{2} \le \xi_1 \le 1$.　　　　(2 分)

又

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(\frac{x}{2})\,dx \overset{\frac{x}{2}=u}{=\!=\!=\!=} 2\int_0^{\frac{1}{4}} f(u)\,du = 2[\frac{1}{4} f(\xi_2)] = \frac{1}{2} f(\xi_2)$$　　　　(4 分)

其中 $0 \le \xi_2 \le \frac{1}{4}$. 由$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(\frac{x}{2})\,dx \Longrightarrow$

$f(\xi_1) = f(\xi_2)$，　　　　(6 分)

因此$f(x)$在$[\xi_2, \xi_1]$上用罗尔定理可得

$\exists \xi \in (\xi_2, \xi_1) \subset (0,1) \quad \ni: f'(\xi) = 0$.　　　　　　(10 分)

第九章 定积分 选择题

1. 设非零函数 f(x)在[a,b]上有连续导数，则 f(x)=(　　)

　(A) $\int f'(x)dx$　　　　(B) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$

　(C) $\int_a^x f'(t)dt$　　　　(D) $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx$

2. 设 $a = \int_0^1 e^{-x^2}dx$， $b = \int_1^2 e^{-x^2}dx$ 则有(　　　)；

　(A) a=b　　(B) a>b　　(C) a<b　　(D) 不能比较

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\int_1^x (t^2-1)dt}{\ln^2 x}$ =(　　　　)；

　(A) 1　　(B) 0　　(C) -1　　(D) 不存在

4. 设 f(x)>0,且 $\int_0^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{t}}dt = x^2(1+x)$. 则 $f(1)=$ (　　　)

　(A) 1　　(B) 4　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 2

5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x dx$ = (　　　)

　(A) 3/2　　(B) 2/3　　(C) 1/2　　(D) 1/3

6. 函数 f(x)在区间 [a,b]上连续是它在该区间上可积的(　　)

　(A)必要条件　(B)充分条件　(C)充要条件　(D)无关条件

7. 已知 $\int_0^x f(t^2)dt = x^3$,则 $2\int_0^1 f(t)dt =$ (　　)

　(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

8. $\frac{d}{dx}(\int_a^b \sin x^2 dx) = ($　　).

　(A) $\sin x^2$　　(B) $-2x\cos x^2$　(C) 0　　(D) $\sin b^2 - \sin a^2$

9. 设 f(u)为连续函数， 则 $\int_0^1 f(e^x)dx$

　(A) $\int_0^1 tf(t)dt$　(B) $\int_1^e$ tf(t)dt　(C) $\int_0^1 \frac{1}{t}$ f(t)dt　(D) $\int_1^e \frac{1}{t}$ f(t)dt

10. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}) =$ (　　).

(A) ln2　　(B) e　　(C) 0　　(D) 1

11. 积分 $\int_1^4 |t^2-3t+2|dt=$ (　　)

(A) $\frac{11}{3}$　　(B) $\frac{29}{6}$　　(C) $\frac{9}{2}$　　(D) $-\frac{11}{3}$

12. 极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln^1+\ln^2+\cdots+\ln^n-n\ln^n]=$

(A)0　　(B)1　　(C)-1　　(D)+∞

13. 积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$

(A)1+$\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$　　(B)$\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{2}$　　(C)1-$\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$　　(D)1-$\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

14. 积分 $\int_0^2\frac{1}{x^2-4x+3}dx$

(A)=1-ln3　　(B)=$\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$　　(C)=ln3　　(D)发散

15. 已知 f(x)的一个原函数是 x^2 ,则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(-\sin x)\cos x dx=$ (　　)

(A) 1　　(B) -1　　(C) $\frac{\pi^2}{4}$　　(D)-$\frac{\pi^2}{4}$

16. 如果 $f'(x)$ 在[-a,a]上(a>0)连续,则 $\int_{-a}^{a}[f(x)+xf'(x)]dx$ =(　　)

(A)f(a)+f(-a)　　(B)f(a)-f(-a)　　(C)a[f(a)+f(-a)]
(D)a[f(a)-f(-a)]

17. 设 f(x)是连续函数,且 F(x)=$\int_x^{e^{-x}}f(t)dt$ 则 F'(x) =(　　)

(A)$-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$　　(B)$-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

(C)$e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$　　(D)$e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

第九章 定积分 选择题 答案

1. B,　　2. B,　　3. A,　　4. A,　　5. B

6. B　　7. D　　8. C　　9. D,　　10. A

11. B, 12 . C, 13. D, 14. C, 15. B

16. C, 17. A

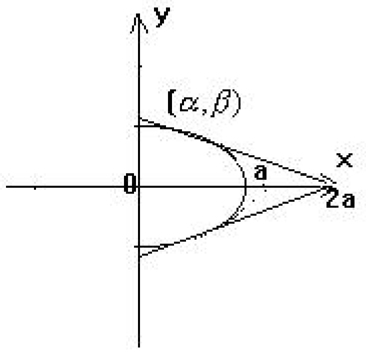
第十章 定积分的应用　应用题

1、求曲线 xy=a(a>0)与直线 x=a,x=2a 及 y=0 所围平面图形绕 y 轴旋转所成旋转体的体积。

2、求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$的周长.

3、 求 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 所围图形的面积和绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

4、 过点 (2a,0)向椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 作两条切线，求椭圆与两条切线围成的区域绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积。如图：



5、设平面图形由曲线 $y=(x-2)^2$ 与直线 $2x+y-4=0, y=4$ 所围成

1)求此平面图形的面积.

2)求此平面图形绕 x 轴旋转生成的旋转体的体积

6、求曲线 $x^2+y^2=2x$ 位于 x 轴的上半部分在$[0,\frac{1}{2}]$上与直线 $y=x, x=\frac{1}{2}$ 所围成的平面图形面积,并求该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积.

7、求由曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,与 $z=\frac{c}{a}x$,z=0 所围成的体积

8、求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ 绕 x 轴旋转所产生的旋转椭球面的面积.

第十章 定积分的应用　应用题答案

1、$V_y=\pi[\int_0^{\frac{1}{2}}(2a)^2dy+\int_{\frac{1}{2}}^1(\frac{a}{y})^2dy-\int_0^1a^2dy]$　　（得 4 分）

$=\pi[2a^2+a^2-a^2]=2\pi a^2$　　（得 6 分）

2、$\because r'(\theta)=-a\sin\theta$

$\therefore s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}d\theta$　　（得 3 分）

$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta=8a$　　（得 6 分）

3、1）$\because x=a\cos^3t, y=a\sin^3t$　　（得 1 分）

$\therefore s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(t)y'(t)dt=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\sin^2tdt$

$=12a^2[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6tdt$

$=12a^2[\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}]=\frac{3\pi a^2}{8}$　　（得 5 分）

2）$\frac{V_x}{2}=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0a\sin^3t3a\cos^2t(-\sin t)dt$

$=3\pi a^3\int_{\frac{\pi}{2}}^0(1-\cos^2t)^3\cos^2td(\cos t)$

$=3\pi a^3\int_0^1(1-u^2)^3u^2du(令u=\cos t)$

$=3\pi a^3\int_0^1(u^2-3u^4+3u^6-u^8)du$

$=3\pi a^3(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{1}{9})=\frac{16}{105}\pi a^3$

$\therefore V_x=\frac{32}{105}\pi a^3$

4、解:设切点的坐标为(α,β)(在第一象限)由对称性,只须 讨论位于第一象限绕　轴旋转的

体

积再 2 倍即可　　（得 2 分）

由解析几何知,切线方程为 $\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}=1$

已知切线过点(2a,0)，有 $\frac{2\alpha}{a}=1,$ 与 $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1$

解得 α=a/2，β= $\frac{\sqrt{3}b}{2}$ 即切点坐标是($\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}b}{2}$)　　（得 4 分）

切线方程是 x=2a(1− $\frac{\sqrt{3}}{2b}y)$　　（得 5 分）

于是绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积

$$V_y=2\pi[\int_0^{\beta}4a^2(1-\frac{\sqrt{3}}{2b})^2dy-\int_0^{\beta}a^2(1-\frac{y^2}{b^2})dy$$

5、解:(1)作图并求交点

联立 $\begin{cases}y=(x-2)^2\\ y=4\end{cases}$　得交点(0,4),(0,4)

联立 $\begin{cases}y=(x-2)^2\\ 2x+y-4=0\end{cases}$　得交点(2,0),(0,4)

联立 $\begin{cases}y=4\\ 2x+y-4=0\end{cases}$　得交点(0,4)　　（得 2 分）

所求平面图形面积为 S= $\int [4-(4-2x)]dx+\int_2^4[4-(x-2)^2]dx$　　（得 5 分）

$=\int_0^2 2xdx+\int_2^4(4x-x^2)dx=4+\frac{16}{3}=\frac{28}{3}$　　（得 7 分）

(2)所求旋转体的体积

V= $\int_0^2\pi[4^2-(4-2x)^2]dx+\int_2^4\pi[4^2-(x-2)^4]dx$　　（得 10 分）

$=46\frac{14}{15}\pi$　　（得 12 分）

6、解: S= $\int_0^{\frac{1}{2}}[\sqrt{2x-x^2}-x]dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-(1-x)^2}dx-\frac{1}{8}$ (令 $1-x=\sin t$)

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt-\frac{1}{8}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt-\frac{1}{8}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}+1}{8}$　　（得 7 分）

$V_x=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-x^2-x^2)dx$ （得 10 分）

$=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(x-x^2)dx=2\pi(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^{\frac{1}{2}}$

$=2\pi(\frac{1}{8}-\frac{1}{24})=\frac{\pi}{6}$ （得 12 分）

7、以平面 y=常数去截曲面得三角形 ABC 其面积为

$s(y)=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}x\cdot z=\frac{c}{2a}x^2=\frac{ac}{2b^2}(b^2-y^2)$ （得 6 分）

$V=\int_{-b}^{b}s(y)dy$ （得 8 分）

$=\frac{ac}{2b^2}\int_{-b}^{b}(b^2-y^2)dy=\frac{2}{3}abc$

8、$y\sqrt{1+y'^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}$ （得 3 分）

得$\varepsilon^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$ 所求面积为

$F=2\pi\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}dx=4\pi\frac{b}{a}\int_0^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}dx$ （得 6 分）

$=2\pi\frac{b}{a}(a\sqrt{a^2-\varepsilon^2a^2}+\frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon)=2\pi b(b+\frac{a}{2}\arcsin\varepsilon)$ （得 12 分）

第十章　定积分应用　填空题

1．函数 f(x)= $\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt(x\geq -1)$ 与 x 轴所围成的面积为 ____________.

第十章　定积分应用　填空题答案

1. $\frac{2\sqrt{2}}{3}-1$。

第十章 定积分应用　计算题

1、求曲线 $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ 所围成图形的面积.(10 分)

2、 求星形线 **x=acos** $^3\varphi$　**y=asin** $^3\varphi$　**a>0**　**0≤φ≤2π**　的全长.

3、.求心脏线 **r=a(1+cos** θ **)**的全长

第十章 定积分应用　计算题答案

1、解：由图形对称性知

$$S = 4\int_0^a y dx \qquad (4\text{ 分})$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3\theta(-3a\cos^2\theta\sin\theta)d\theta \qquad (6\text{ 分})$$

$$= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^2\theta d\theta \qquad (7\text{ 分})$$

$$= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\sin^2\theta d\theta \qquad (8\text{ 分})$$

$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta \qquad (9\text{ 分})$$

$$= \frac{3}{8}\pi a^3 \qquad (10\text{ 分})$$

2、$.s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x^{12} + y^{12}}d\varphi$　　(得 2 分)

$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}d\varphi$　　(得 4 分)

$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin\varphi\cos\varphi|d\varphi = 6a$　　(得 8 分)

3、 **s=2** $\int_0^{\pi}\sqrt{r^2 + r'^2}d\theta$　　(得 2 分)

=2a $\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}d\theta$　　(得 4 分)

=4a $\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 8a$　　(得 8 分)

第十章　定积分应用　选择题

66. 6 曲线 **y=x** ^{2} 与 **y** ^{2} **=x** 所围图形绕 **y** 轴一周所成旋转体的体

积 V=

(A) $\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{3}{10}\pi$

(C) π (D) $\frac{\pi}{2}$

2、.曲线 $y=x^2$ 与 y=x 所围成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积是( )

(A) $\pi\int_0^1(x-x^2)dx$ (B) $\pi\int_0^1(x^2-x^4)^2dx$

(C) $\pi\int_0^1(x^2-x^4)dx$ (D) $\pi^2\int_0^1(x^4-x^2)^2dx$

3、.旋轮线 x=a(t−sint).y=a(1−cost) (a>0. 0≤t≤2π)一拱与 x 轴围成共区域面积为( )

A.$2\pi a^2$ B.$3\pi a^2$ C.πa^2 D.$\frac{1}{2}\pi a^2$

第十章 定积分应用 选择题答案

1、 2、(C) 3、(B)

第十一章 广义积分 证明题

1. 设 f 在[a,+∞)上可导,且 $\int_a^{\infty}f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}f'(x)dx$ 均收敛. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ (10 分)

2. 设 f 是[a,∞) 上连续可微函数且当 $x\to+\infty$ 时 f 递减趋于零,则当且仅当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛时 $\int_a^{+\infty}xf'(x)dx$ 收敛. (10 分)

第十一章 广义积分 证明题答案

1. 证 明：$\because f(x)=\int_a^x f'(t)dt \therefore \lim_{x\to\infty} f(x)$ 存在 （得 3 分）

不妨设 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\beta\neq 0>0$,则存在 M>0,

当 x>M 时，f(x)>$\frac{\beta}{2}$ （得 5 分）

且 $\int_x^{2x} f(t)dt \geq \frac{\beta}{2}x \to +\infty$ （得 7 分）

这与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛矛盾.故 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ （得 8 分）

2. 证明：充分性 设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,对 $\forall\varepsilon>0 \quad \exists A_0$

当 $M>A_0$ 时 $\varepsilon>\int_M^{2M} f(x)dx \geq f(2M)\int_M^{2M} dx = Mf(2M)$ （得 3 分）

$\exists A_1$， 当 $M_1>M_2>A_1$ 时 $\varepsilon>\int_{M_2}^{M_1} f(x)dx$

当 $M''>M'>2\max\{A_0,A_1\}$时

$$\left|\int_{M'}^{M''} xf'(x)dx\right| = \left|xf(x)\right|_{M'}^{M''} - \int_{M'}^{M''} f(x)dx|$$

$$<\left|\int_{M'}^{M''} f(x)dx\right| + \left|M''f(M'')\right| + \left|M'f(M')\right| <\varepsilon+2\varepsilon+2\varepsilon=5\varepsilon$$

$\therefore \int_a^{+\infty} xf'(x)dx$ 收敛 (得 5 分)

必要性：设 $\int_a^{+\infty} xf'(x)dx$ 收敛,对 $\forall\varepsilon>0 \quad \exists A_\varepsilon$

当 M>A>A_ε 时　有ε> $\left|\int_A^M xf'(x)dx\right| \geq A\left|f(M)-f(A)\right|$

=Af(A)−Af(M) (得 2 分)

$\because f(x)\to 0$　取 M 充分大　使得 Af(M)<ε

$\therefore$ Af(A)<2ε　即 $\lim\limits_{A\to\infty} Af(A)=0$

又 $\because \int_a^A f(x)dx = xf(x)\Big|_a^A - \int_a^A xf'(x)dx$ (得 4 分)

$\therefore \lim\limits_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx = -af(a)-\int_a^{+\infty} xf'(x)dx$

即　$\int_e^{\infty} f(x)dx$ 收敛 (得 5 分)

第十一章 广义积分计算题

1. 计算非正常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x)}dx$

2 . 计算 A= $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$ (10 分)

第十一章 广义积分计算题答案

1. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x)}dx=\int_1^{+\infty}[\frac{-x+1}{x^2}+\frac{1}{x+1}]dx$ （得 3 分）

$=-[\ln x+\frac{1}{x}-\ln(x+1)]\Big|_1^{+\infty}$ （得 6 分）

=1−ln2 （得 8 分）

2. $\because A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos xdx$ （得 4 分）

$\therefore A=\frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos xdx)$ （得 6 分）

$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin xdx$ （得 7 分）

（令 x=2θ） $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2\theta d\theta$ （得 8 分）

$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2A$ （得 9 分）

$\therefore A=-\frac{\pi}{2}\ln 2$ （得 10 分）

第十一章广义积分　填空题

1. 广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$　当__________时收敛,当__________ 时发散

2. 瑕积分$\int_0^1\frac{dx}{x^q}$,当__________时收敛,当__________时发散.

3. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=$______________

第十一章广义积分　填空题答案

1. p>1,p≤ 1
2. 0<q<1,q≥1

3. π

第十一章　广义积分　选择题

1. 下列广义积分收敛的是(　　　　);

(A) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$　　　　(B) $\int_0^1\frac{1}{x^3}dx$

(C) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[10]{x^9}}dx$　　　　(D) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[9]{x^{10}}}dx$

2. 下列广义积分发散的是(　　　)

(A) $\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}$　　　　(B) $\int_e^\infty\frac{\ln x}{x}dx$

(C) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　　　　(D) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛是 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_{-\infty}^{a}f(x)dx$　都收敛的(　　　)

(A)　无关条件　(B) 充要条件　(C)充分条件　(D)　必要条件

4. 设 f(x)>0. 且 $\int_0^{+\infty}$ f(x)dx 收敛, 则 $\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)dx$　(　　　　　)

(A)可能收敛　(B)可能发散　(C)一定收敛　(D)一定发散

5. 积分 $\int_1^\infty\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ =(　　)

(A) =0　　(B)= $\frac{\pi}{2}$　　(C)　= $\frac{\pi}{4}$　　(D)发散

6. 下列广义积分发散的是(　　)

(A) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}dx$　　(B) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　(C) $\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2}dx$　　(D) $\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$

7. 下列广义积分收敛的是(　　)

(A) $\int_{e}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$　　(B) $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$　　(C) $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$　　(D) $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

8. 下述结论正确的是(　　)

(A) $0<p\le 1$时$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 收敛　　(B) $p\ge 1$时 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^p}$收敛

(C) 0<p<1 时 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^p}$收敛　　(D)p>0 时 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^p}$收敛

第十一章　广义积分　选择题答案

1. (C)　2. B　3. (b)　4. (c)　5. (B)　6. (A)　7. (C)　8. (C)

第十二章 数项级数　证明题

1. 设$a_n>0,\{a_n\}$单调减少趋于零，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt{a_n\cdot a_{n+1}}$收敛 (8 分)

2. 用级数知识证明当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n^n}$ 是比$\frac{1}{n!}$高阶的无穷小 . (10 分)

3. 设 $a_n>0$，证明级数$\sum\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$是收敛的.(8 分)

4. 设 $a_n>0$, $a_n>a_{n+1}$ (n=1,2,…)且$\lim_{n\to\infty}a_n=0$　证明级数$\sum(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 收敛. (10 分)

5. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$都收敛且 $a_n\le b_n\le c_n$ (n=1,2,…) 则$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$也收敛. (8 分)

第十二章 数项级数　证明题答案

1. $\because a_n>0$,且$\{a_n\}$单调减小　$\therefore\sqrt{a_na_{n+1}}$也单调减小　　　(得 3 分)

又$\because 0<\sqrt{a_n a_{n+1}}\le\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}=0$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}=0$ （得 6 分）

由莱布尼兹判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛 （得 8 分）

2. 证:设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{n!}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n},a_n=\frac{n!}{n^n}$(得2分)

$$\because\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1$$ （得 5 分）

$\therefore$所设级数收敛,由必要条件知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ （得 7 分）

即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{n!}}=0$

故当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n^n}$ 是比$\frac{1}{n!}$高阶的无穷小 （得 10 分）

3. 证：$\because\frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}=\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})}-\frac{1}{(1+a_1)-(1+a_n)}$ （得 4 分）

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)}=1-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$$ （得 6 分）

又$a_n>0,\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}=0$ （得 8 分）

$\therefore$ 原级数收敛

4. 令 $b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ （得 2 分）

$\because a_n>0\therefore b_n>0\because a_n\to 0(n\to\infty)\therefore b_n\to 0(n\to\infty)$ （得 4 分）

$\because a_n>a_{n+1}(n=1,2,\cdots)\therefore a_1+a_2+\cdots+a_n>na_{n+1}$

$$(n+1)(a_1+a_2+\cdots+a_n)>n(a_1+\cdots+a_n)+na_{n+1}=n(a_1+\cdots+a_n+a_{n+1})$$

$\therefore b_n > b_{n+1} (n = 1,2,\cdots)$ （得 8 分）

由交错级数收敛判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$收敛 （得 10 分）

5. 证明 $\because a_n \le b_n \le c_n$ $\therefore 0 \le b_n - a_n \le c_n - a_n$ （得 2 分）

$\because \sum a_n$与$\sum c_n$收敛 $\therefore \sum (c_n - a_n)$收敛 （得 4 分）

由正项级数比较判别法 $\sum (b_n - a_n)$收敛 （得 6 分）

$b_n = b_n - a_n + a_n$ $\therefore \sum b_n$收敛 （得 8 分）

第十二章 数项级数 计算题

1. 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ a_n =2, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$,求$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

2. 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ 的敛散性.

3. 求级数$\sum \frac{n}{(n+1)!}$ 的和

4. 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$的和

第十二章 数项级数　计算题答案

1. 解： 由于$\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{2k-1}a_{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{2k}a_{2k-1}$　　（得 2 分）

$=-\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}$　　因此$\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}=5-2=3$　　（得 5 分）

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}=3+5=8$　　（得 6 分）

2. 解：由于$\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n<\left(\frac{n}{2n}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$　　n=1、2 、……　　（得 3 分）

而几何级数$\sum_{n=1}^{\infty}.\left(\frac{1}{2}\right)^n$收敛，根据比较判别法原级数收效。　　（得 6 分）

3. 解：$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots$　(x≠0)　　（得 2 分）

$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}x+\frac{3}{4!}x^2+\cdots+\frac{n-1}{n!}x^{n-2}+\cdots=(\frac{e^x-1}{x})'=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$　　（得 4 分）

取 x=1 得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$　　（得 8 分）

4. 解：$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$　　$x\in(-1,1)$　　（得 2 分）

$1+2x+3x^2+\cdots+nx^n+\cdots=(\frac{1}{1-x})'=\frac{1}{(1-x)^2}$ **x∈(-1,1)** **(得 4 分)**

$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=\frac{1}{(1-x)^2}|_{x=\frac{1}{2}}=4$ **(得 8 分)**

第十二章数项级数　填空题

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-u_n)$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}u_n$ = (　　　)；

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{np^n}$,当 p= ______________时条件收敛.

3. .级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n\geq 0,n=1,2,\cdots)$ 满足莱布尼兹判别法的两个条件,__________

________________则它是收敛的.

4. .若 $\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{1}{2}$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ __________ ,若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{1}{2}$ 则

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ _____________

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ 之和为_________________

6. 若 $\sum\frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}(x>0)$ 收敛 则 x=___________

7. 设 a_n >0 则数列 $\{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的关系是__________________

第十二章数项级数　填空题答案

1. 1　　2. p= -1　　3. .ln(1+x) ,ln$\frac{4}{3}$　　4. 发散,　绝对收敛

5. $\frac{4}{3}$　　6. x>1,　　7. 同敛散。

第十二章　数项级数　选择题

1. 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则下面级数一定收敛的是（　　　　）；

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+1)$　　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$　　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$

2. 下列级数中是条件收敛的级数有（　　　　）；

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$　　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$　　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

3. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$　条件收敛;等价于(　　　)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛　　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛且 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散　　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

4. 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛是级数$\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$ 收敛的(　　　)

(A)充分条件　　　(B) 必要条件

(C) 充要条件　　　(D) 上述均不对

5. 设常数 k>0，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$

(A) 发散　　(B)绝对收敛　　(C)条件收敛　　(D)收敛或发散

6. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$.

(A) 是条件收敛的　　　(B) 是绝对收敛的

(C)可能收敛也可能发散　　　(D) 上述均不对

7. 设常数 k>0 ,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$(　　)

(A)发散　(B)绝对收敛　　(C)条件收敛　　(D)收敛或发散与 k 的取值有关

8. 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都发散,则(　　)

(A)$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 必发散　　(B)$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 必发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 必发散　　(D)$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 必发散

9. 下面级数绝对收敛的是(　　)

(A)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$　　(B)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{2}{n}$

(C)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{\pi}{n})$　　(D)$\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{\pi}{4n}$

10. F(p)=$\sum\frac{1}{n^p}$,F 的定义域为(　　)

(A) [0,1]　　(B) (0,1]　　(C) (0,1)　　(D) $(1,\infty)$

11. 下面级数收敛的是(　　)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$　(B) $\frac{\sqrt{n}}{2n^2+n+2}$　(C) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)$　(a>1)

第十二章　数项级数　选择题

1. C　2. B　3. C　4. A　5. C　6. B

7. C　8. C　9. C　10. .D　11. B

第十三章 函数项级数　计算题

1. 设 S(x)=$\sum ne^{-nx}$ x>0，计算积分$\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(t)dt$

2. .判断级数$\sum \frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$(x>0)的敛散性.

第十三章 函数项级数 计算题答案

1. $\because ne^{-nx}$在$[\ln 2,\ln 3]$上连续且一致收敛

$\therefore$ 它在$[\ln 2,\ln 3]$可逐积分 (得 4 分)

$$\therefore \int_{\ln 2}^{\ln 3} s(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx}dx$$ (得 6 分)

$$=\sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{3})^n] = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$ (得 8 分)

2. 对交错级数$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ 由莱布尼兹判别法知它收敛 (得 3 分)

而$\frac{x^n}{1+x^n}$ 当 x>1 时,单增有界 ；x=1 时,值为$\frac{1}{2}$ ；当 x<1 时,单降为界 (得 6 分)

故由阿贝尔判别法知$\sum \frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$收敛

第十三章函数项级数 填空题

1. $f_n(x)=x^n$ n=1,2,⋯ { $f_n(x)$ }在[0,1]上的极限函数是________

2. $f_n(x)=\begin{cases} 2n^2x & 0\le x\le \frac{1}{2n} \\ 2n-2n^2x & \frac{1}{2n}<x\le\frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n}<x\le 1 \end{cases}$ 的极限函数是________________

第十三章函数项级数 填空题答案

1. $f(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x<1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$

2. f≡0

第十三章 函数项级数 证明题

1. 证明:函数 f(x)= $\sum\frac{\sin nx}{n^3}$ 在(−∞,∞)有连续的导函数. (10 分)

2. 设 $f_0(x)$在[a , b]上连续,定义函数序列 $f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)dt, n=0,1,2,\cdots,$
证明 $f_n(x)$在[a , b]上一致收敛. (10 分)

3. 设 f(x)在[$\frac{1}{2}$,1]上的连续函数,那么当 f(x)在[$\frac{1}{2}$,1]有界且
f(1)=0 时,{ $x^n f(x)$ }在[$\frac{1}{2}$,1]上一致收敛. (10 分)

4. 设 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ 求证

1)对任给的 0<α<1, $f_n(x)$ 在[α,1] 上一致收敛.

2) $f_n(x)$ 在(0,1]上不一致收敛 (12 分)

5. 若在区间 I 上,对任何自然数 n,$|u_n(x)|\le v_n(x)$,证明:当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在 I 上一收敛时级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上也一致收敛,且绝对收敛. (11 分)

第十三章 函数项级数 证明题答案

1. 证: $\because (\dfrac{\sin nx}{n^3})'=\dfrac{\cos nx}{n^2}$ 而 $\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right|\le \dfrac{1}{n^2}$ (得 2 分)

由 $\sum \dfrac{1}{n^2}$ 收敛知 $\sum (\dfrac{\sin nx}{n^3})'$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛 (得 2 分)

而由$\left|\dfrac{\sin nx}{n^3}\right| \le \dfrac{1}{n^3}$及$\sum \dfrac{1}{n^3}$收敛知$\sum \dfrac{\sin nx}{n^3}$收敛 (得 6 分)

$\therefore (\sum \dfrac{\sin nx}{n^3})' = \sum \dfrac{\cos nx}{n^2}$ (得 8 分)

又$\because \dfrac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上连续 且$\sum \dfrac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛

$\therefore \sum \dfrac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上连续. (得 10 分)

2. 证: $\because f_0(x)$在[a , b]上连续. $|f_0(x)| \le m$ (得 3 分)

从而 $|f_1(x)| \le m(x-a) \le m(b-a)$ (得 5 分)

$|f_2(x)| \le \int_a^x m(t-a)dt \le \dfrac{m}{2!}(b-a)^2$ (得 6 分)

$\therefore |f_n(x)| \le \dfrac{m(b-a)^n}{n!}$ (得 8 分)

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(b-a)^n}{n!}$ 收敛 . $\therefore \lim_{n\to\infty} \dfrac{m(b-a)^n}{n!} \to 0$ (得9分)

从而 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛. (得 10 分)

3. 证明: $\because |f(x)| \le M$且$\lim_{n\to\infty} x^n f(x) = \begin{cases} 0 & ,x \ne 1 \\ f(1) & ,x = 1 \end{cases}$ (得 3 分)

而f(1)=0,故$\lim_{n\to\infty} x^n f(x) = 0$ (得5分)

又由于 f(x)在 x=1 处连续,故$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0.$

当 $1-\delta < x \le 1$时,$|f(x) - f(1)| = |f(x)| < \varepsilon$ (得 7 分)

从而 当 $x \in [\dfrac{1}{2}, 1-\delta)$时, $|x^n f(x) - 0| \le (1-\delta)^n M \to 0$ (得 8 分)

当 $x \in [1-\delta, 1]$时, $|x^n f(x) - 0| \le |f(x)| < \varepsilon$ (得 9 分)

因此, $\{x^n f(x)\}$ 一致收敛 . (得 10 分)

4. 证明:先求极限函数 f(x) $\forall x\in(0,1]$ 易知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{1+n^2x^2}=0$ 即 f(x)=0 (得 2 分)

(1)因为 $|f_n(x)-f(x)|=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\le\dfrac{n}{1+n^2\alpha^2}<\dfrac{n}{n^2\alpha^2}=\dfrac{1}{n\alpha^2}$ (得 4 分)

对 $\forall x>0$ 取 N=[$\dfrac{1}{\varepsilon\alpha^2}$] 则当 n>N 时

对 $\forall x\in[\alpha,1]$ 必有 $|f_n(x)-f(x)|\le\dfrac{1}{n\alpha^2}<\varepsilon$

按定义有 $f_n(x)$ 在[α,1]上一致收敛 (得 6 分)

(2)因为 $\dfrac{df_n(x)}{dx}=\dfrac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$ 对每个自然数 n,$x_n=\dfrac{1}{n}$ 是 $f_n(x)$ 的唯一极大值点. 因而必是连续函数 $f_n(x)$ 在[0,1]的最大值点 (得 9 分)

显然也是它在(0,1] 的最大值点，所以 $\sup\limits_{0<x\le1}\left|f_n(x)-f(x)\right|$

$$=\max_{0<x\le1}\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right)=f_n(x_n)=f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

故 $f_n(x)$在(0,1]不一致收敛 (得 12 分)

5. 证 先证一致收敛性,对∀ε>0,由 $\sum v_n(x)$ 在 I 上一致收敛,存在 N(ε),当 n>N 时,

对∀自然数 p 和 x∈I

$v_{n+1}(x)+v_{n+2}(x)+\cdots+v_{n+p}(x)<\varepsilon$ (得 5 分)

于是 $\left|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)\right|\le\left|u_{n+1}(x)\right|+\cdots+\left|u_{n+p}(x)\right|$

$\le v_{n+1}(x)+\cdots+v_{n+P}(x)<\varepsilon$ (得 8 分)

对∀自然数 p 和 x∈I 成立

即 $\sum u_n(x)$在I上一致收敛 (得 10 分)

又 $\sum\left|u_n(x)\right|\le\sum v_n(x)<+\infty$ ∀x∈I

故 $\sum u_n(x)$在I上绝对收敛 (得 11 分)

第十三章 函数项级数 选择题

1. 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$在(a,b)内任何区间 ($a_1, b_1$)(a<$a_1$<$b_1$<b)内一致收敛，则在(a,b)内下面哪个结论是错误的(　　　)

(A)可逐项求导　(B)可逐项求积　(C)极限与求和可交换顺序　(D)级数收敛

2. 下列函数列在所示区间 D 上不一致收敛的是(　　)

(A) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$　D=(−1,1)　(B) $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$　D=(−∞,+∞)

(C) $f_n(x)=\frac{n}{x}$　D=[0,+∞)　(D) $f_n(x)=\frac{n}{x}$　D=[0,10]

第十三章 函数项级数 选择题答案

1. C　2. C

第十四章 幂级数　　应用题

1、.利用幂级数的展开式求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n \ln(1+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$.

第十四章 幂级数　　应用题答案

1、令 $\frac{1}{\sqrt{x}}=t$,则 $\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n \ln(1+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$ = $\frac{2}{\sqrt{n}}\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \frac{\ln(1+t)}{t^3}dt$　　(得 2 分)

$$=\frac{2}{\sqrt{n}}\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \frac{t-\frac{1}{2}t^2+0(t^3)}{t^3}dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n}}(1-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\ln t)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1}+0(1)$$　　(得 4 分)

$$=2-\frac{1}{2}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}+0(\frac{1}{\sqrt{n}})\to 2$$　　(得 6 分)

第十四章 幂级数　计算题

1. 将 $\frac{d}{dx}(\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x})$ 展开成 **x** 的幂级数

2. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的和函数

3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛区间,并求和函数

4. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛半径和收敛区间。

5. 将 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 展成 $(x-3)$ 的幂级数，并确定其收敛区间。

6. .函数 **f(x)=** $\frac{1}{x^2-3x+2}$ 展开成 **x** 的幂级数,并确定收敛区间

7. .将函数 **f(x)=** $\frac{1}{x^2-x-6}$ 展开成 **x** 的幂级数,并确定收敛区间.

第十四章 幂级数　计算题答案

1. $e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}$ 且收敛半径为 $+\infty$ （得 3 分）

$$\therefore \frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{t^{2n}}{n!}dt}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!(2n+1)}$$ （得 5 分）

$$\therefore \frac{d}{dx}[\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x}]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(2n+1)n!}x^{2n-1}$$ （得 8 分）

2. $\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+1}=1\quad \therefore R=1,$ 而当 $x=\pm 1$ 时级数发散 （得 3 分）

$\therefore$ 级数收敛域为 $(-1,1)$

令 **s(x)=** $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}2nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2x(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx)'+\frac{1}{1-x}$ （得 5 分）

$=2x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'+\frac{1}{1-x}=2x(\frac{x}{1-x})'+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2}\quad(-1<x<1)$ （得 8 分）

3. 解:由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \therefore R = 1$ (得 2 分)

x=-1 是交错级数，收敛 **x=1** 调和级数,发散

$\therefore$ 收敛区间为$[-1,1)$ (得 4 分)

又 $\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}dt = \int_0^x(\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{n-1})dt = \int_0^x\frac{1}{1-t}dt$

=-ln(1-x) 即和函数为 **-ln(1-x)** **-1≤x<1** (得 7 分)

4. 解: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2} \therefore R = 2\cdots$ (得 2 分)

当=-2 时,级数为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{n!}{n}$ 收敛，当 x=2 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是调和级数发散,故

级数的收敛区间为[-2,2) (得 7 分)

5. $\because \frac{1}{1+x} = \frac{1}{4+(x-3)} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x-3}{4}}\cdots$ (得 2 分)

$\because \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n, |x|<1\cdots$ (得 3 分)

$\therefore \frac{1}{1+\frac{x-3}{4}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-3}{4})^n\cdots$ (得 4 分)

故 $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-3}{4})^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-3)^n$

$\left|\frac{x-3}{4}\right| < 1, -1 < x < 7\cdots$ (得 7 分)

6. 解: $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$ (得 2 分)

而 $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$ **x∈(-2,2)** (得 4 分)

$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ **x∈(-1,1)**

因此 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n$　　　　$x\in(-1,1)$　　　　（得 6 分）

7. 解：$f(x)=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3-x}+\quad\frac{1}{2+x}\right)$　　　　（得 2 分）

$$\frac{1}{3-x}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}.+\cdots+\frac{x^n}{3^n}+\cdots\right)$$

$=\frac{1}{3}\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$　　　　$-3<x<3$　　　　（得 3 分）

$$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{2^n}+\cdots\right]$$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}$　　　　$-2<x<2$　　　　（得 4 分）

所以 $f(x)=-\frac{1}{5}[\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}$

$=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}]x^n$　　　　$-2<x<2$　　　　（得 6 分）

第十四章幂级数　填空题

1. 在$(-1,1)$ 内,级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$的和函数是________ ,级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n3^n}$ 的和为_____________

2. 设$|x|<1$,级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}$的和函数是________,$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ 的和函数是_________

3. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$的和函数为_____________

4. .级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+x+1)^n}{n(n+1)}$的收敛域是__________________.

5. .级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$ 的收敛域是______________________

6. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛区间是______________.

7. $\int_0^t e^{-x^2}$ dx 的幂级数展开式为______________

8. arctgx 的幂级数展开式为_______________________

第十四章幂级数 填空题答案

1. ln (1+x), ln (4/3).

2. $\frac{x}{1-x^2},\frac{1}{1+x^2}$

3. $-\frac{\ln(1+x)}{x}$

4. [-1,0]

5. [2,4]

6. [-1,1)

7. $x-\frac{1}{1!}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2!}\frac{x^5}{5}-\frac{1}{3!}\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$

8. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$

第十四章 幂级数 证明题

1. 设 $a_n>0$, $A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k(n=0,1,2,\cdots)$ 且 $A_n\to+\infty$, $\frac{a_n}{A_n}\to 0$

证明$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 1(10 分)

第十四章 幂级数 证明题答案

1。 证明： $\because \quad \lim_{n\to\infty}(1-\frac{A_{n-1}}{A_n})=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{A_n}=0,$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{A_{n-1}}{A_n}=1.$ ……………(2 分)

又： $\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n-1}}{A_n}=1,$ ……………(5 分)

而 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}$, (利用迫敛性可以证明。） …… (8 分)

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1.$ ……………(10 分)

结论成立。

第十四章 幂级数 选择题

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$ 的收敛区间为(　　　　)

(A) (-1,0)　(B) [0,1]　(C) [-1,1]　(D) (-1,1)

2. f(x)=ln(2+x)展开成 x 的幂级数是(　　)

(A) ln2+$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n2^n}$　(B) $\ln 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$

(C) 1+$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln 2}{n}(\frac{x}{2})^n$

3. 函数 f(x)=e^{-x^2} 展开成 x 的幂级数为(　　)

(A) $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$ (B) $1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots$

(C) $1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots$ (D) $1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots$

4. 已知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 x= −2 处收敛，则在 x=3/2 处此级数

(A)收敛 (B)发散 (C)可能收敛 (D)可能发散

5. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}(x-1)^n$ 的收敛半径 R=

(A) 1 (B) e (C) e^{-1} (D) e^{-2}

6. .级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 的收敛域为( )

(A) (−1,1) (B)(−1,1] (C) [−1,1) (D)[−1,1]

7. 下述展开式正确的是( )

(A) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots$ $x\in R$

(B) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$ $x\in[-1,1]$

(C) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$ $x\in R$

(D) $e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

8. 下列级数在所示区间上不一致收敛的是( )

(A) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$ $x\in[-r.r]$ (r>0) (B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ $x\in[0,1]$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ $x\in(-\infty,+\infty)$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$ $0<r\le|x|\le 1$

9. .级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的收敛域为(　　)

(A) (-1,1)　　(B) [-1,1)　　(C) (-1,1]　　(D) [-1,1]

第十四章 幂级数 选择题答案

1. D　2. C　3. D　4. A　5. C　6. D　7. C

8. D　9. B

第十五章 傅立叶级数 计算题

1. 求周期函数 **f(x)=sgn(cosx)**的傅里叶级数展开式.

2. 将函数 **f(x)=sinax(-π<x<π)**展成付里叶级数 .(a 为非整数)

3. 将函数$f(x)=\pi^2-x^2$在$(-\pi,\pi)$内展成付里叶级数。

4. 求$f(x)=\sin^4 x$的付里叶级数.(10 分)

5. 设函数 **f(x)=|x|** ,**x**∈ [-π,π]求 f 的付里叶(Fourier)级数展开式.

6. 把函数 **f(x)=**$\begin{cases} x, & 0\le x\le\frac{l}{2} \\ l-x, & \frac{l}{2}<x\le l \end{cases}$ 展开成正弦级数.

7. 将 $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x\le\dfrac{a}{2}\\ -1 & \dfrac{a}{2}<x\le a\end{cases}$ **(a>0)**展成余弦函数的付立叶级数.

8. 把 **f(x)=x** 在**(0,2)**内展开成正弦级数.51

第十五章 傅立叶级数　计算题答案

1. 解：$\because f(-x)=f(x)\therefore b_n=0$ （得 2 分）

a₀=$\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}(\cos x)dx$ **=** $\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sgn}(\cos x)dx$ **=0** （得 3 分）

$a_n=\dfrac{2}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nxdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nxdx]=\begin{cases}\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^k}{n} & (n=2k+1)\\ 0 & (n=2k)\end{cases}$ （得 6 分）

$\therefore f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k\dfrac{\cos(2k+1)x}{2k+1}\right\}$ （得 8 分）

2. 解：$\because f(x)=\sin ax$为奇函数 $\therefore a_n=0$ （得 1 分）

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin ax\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[\cos(n-a)x-\cos(n+a)x]dx$$

$=\dfrac{1}{\pi}[\dfrac{-\sin(n+a)x}{n+a}+\dfrac{\sin(n-a)x}{n-a}]_0^{\pi}=\dfrac{2n}{\pi}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin a\pi}{n^2-a^2}$ （得 5 分）

故 **sinax=**$\dfrac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n^2-a^2}\sin nx$

3. 解：$\because f(x)$ 为偶函数 $b_n=0,(n=1,2,\cdots)\cdots$ （得 2 分）

$a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)dx=\dfrac{4}{3}\pi^2$ $\cdots$ （得 3 分）

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos uxdx=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{n}d(\sin nx)$$

$=-\dfrac{2}{\pi}[\dfrac{x^2\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\dfrac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx\cdots$ （得 4 分）

$$=\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{-x}{n}d(\cos nx)=\frac{4}{n\pi}[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx$$

$=(-1)^{n-1}\dfrac{4}{n^2}$ $\cdots$ （得 6 分）

故 f(x)= $\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx$ … (得 7 分)

4. 解：$\because f(x)=\frac{3}{8}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}$ (得 5 分)

$\therefore f(x)$ 是偶函数．于是 $b_n = 0$ (得 7 分)

又 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{3}{4}$ (得 8 分)

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx=\begin{cases}0 & n\neq 2, n\neq 4\\ -\frac{1}{2} & n=2\\ \frac{1}{8} & n=4\end{cases}$$ (得 9 分)

于是 f(x)的付里叶级数为 $f(x)=\frac{3}{8}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}$ (得 10 分)

5. 解:将函数 f 按周期 2π延拓,因为 f 在[−π , π)是偶函数所以 b_n =0,n=1,2,… (得 2 分)

且 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi$ (得 3 分)

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx$ (得 4 分)

$=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$ n=1,2,…

故 $|x|\sim\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ (得 8 分)

6. 解:把函数 f 奇延拓到 $[-l,0]$ 上,然后按周期 $2l$ 再延拓到整个数轴,得到一个奇函数 (得 2 分)

于是 a_n=0 n=0,1,2,… (得 3 分)

$b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

$$=\frac{2l}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin ntdt+\frac{2l}{\pi^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-t)\sin ntdt$$

$=\frac{4l}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$ n=1,2,… (得 7 分)

故 **f(x)~** $\dfrac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}$ （得 8 分）

7. 按偶式展开式有 $b_n=0$ （得 2 分）

$$a_0=\frac{2}{a}[\int_0^{a/2}dx+\int_{a/2}^{a}(-1)dx]=0$$

$$a_n=\frac{2}{a}[\int\cos\frac{n\pi x}{a}dx+\int_{a/2}^{a}(-)\cos\frac{n\pi x}{a}dx]=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$ （得 4 分）

f(x)= $\dfrac{4}{\pi}(\cos\dfrac{\pi x}{a}-\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{3\pi x}{a}+\dfrac{1}{5}\cos\dfrac{5\pi x}{a}-\cdots\cdots)\quad 0<|x-\dfrac{a}{2}|<\dfrac{a}{2}$ （得 8 分）

8. 为了要把 **f** 展开为正弦级数，对 **f** 作奇式周期延拓

$a_n=0$ **n=0,1,2,⋯** （得 2 分）

$b_n=\dfrac{2}{2}\int_0^2 x\sin\dfrac{n\pi x}{2}dx=-\dfrac{4}{n\pi}\cos n\pi=-\dfrac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}$ **n=1,2,⋯** （得 4 分）

x= $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{n\pi x}{2}$ （得 8 分）

第十五章 付里叶级数 填空题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}x(0\le x\le\pi)\\0(-\pi<x<0)\end{cases}$ 则 **f(x)** 的付里叶展开式中 **b** $_n$ **=(** **)；**

2. $x^2=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ **(0<x<2π)**

则 **a_0 =_______，a_n=__________，b_n =____________**

3. **x =** $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ |x|<\pi$ 则

$a_n=$______________ $b_n=$________________

第十五章 付里叶级数 填空题答案

1. $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

2. $a_0=\frac{8}{3}\pi^2, a_n=\frac{4}{n^2}, b_n=-\frac{4\pi}{n}$

3. $a_n=0, b_n=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$

第十五章 傅立叶级数 证明题

1. 若函数 $f(x)$ 在 $\left[0,2\pi\right]$ 上单调，a_n ，b_n 是 $f(x)$ 的付里叶系数，则 $\left\{na_n\right\}$ 与 $\left\{nb_n\right\}$ 都有界。(10 分)

第十五章 傅立叶级数 证明题答案

1. $\because \pi a_n=\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx$(由第二积分中值定理)$(0<\xi<2\pi)\Rightarrow$

$=f(0)\int_0^{\xi}\cos nxdx+f(2\pi)\int_{\xi}^{2\pi}\cos nxdx$

$=\frac{f(0)-f(2\pi)}{n}\sin n\xi$

于是 $\left|na_n\right|\le\left|\frac{f(0)-f(2\pi)}{\pi}\right||\sin n\xi|\le\frac{|f(0)-f(2\pi)|}{\pi}$ (得 4 分)

又 $\pi b_n=\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx=f(0)\int_0^{\xi}\sin nxdx+f(2\pi)\int_{\xi}^{2\pi}\sin nxdx$

$=\frac{f(0)-f(2\pi)}{n}(1-\cos n\xi)(0<\xi<2\pi)$

有 $nb_n\le\left|\frac{f(0)-f(2\pi)}{\pi}\right||1-\cos n\xi|\le\frac{2|f(0)-f(2\pi)}{\pi}$ (得 8 分)

于是 $\{na_n\}$ 与 $\{nb_n\}$ 都有界 (得10分)