

高等数学 I 练习卷 (5)

一、填空题 (将答案写在答题纸相应的位置。每小题 3 分, 共 15 分.)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+2}\right)^x = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设函数 $y = \ln(1+x^2)$, 则微分 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0+2x)}{x} = 3$, 则 $f'(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设函数 $\varphi(x) = \int_0^x e^{2t^2} dt$, 则 $\varphi'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 反常积分 $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、单项选择题 (将答案写在答题纸相应的位置。每小题 3 分, 共 15 分.)

1. 设函数 $f(x) = \frac{e^x - e}{x(x-1)}$, 则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的 ()
A. 可去间断点 B. 跳跃间断点 C. 无穷间断点 D. 震荡间断点
2. 设函数 $f(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 ()
A. $f(x)$ 与 x^2 是等价无穷小 B. $f(x)$ 与 x^2 是同阶但非等价无穷小
C. $f(x)$ 是比 x^2 更高价无穷小 D. $f(x)$ 是比 x^2 更低价无穷小
3. 曲线 $y = \cos x$ 在点 $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$ 处的切线方程为 ()
A. $y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3})$ B. $y - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{1}{2})$
C. $y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3})$ D. $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3})$
4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x-1)^2} = -1$, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处 ()
A. 有极大值 B. 有极小值 C. 可导, 且 $f'(1) \neq 0$ D. 不可导
5. 函数 $f(x) = \sec x$ 的一个原函数是 ()
A. $\sec x \cdot \tan x$ B. $\ln|\sec x \cdot \tan x|$ C. $\ln|\sec x + \tan x|$ D. $\ln|\sec x - \tan x|$

三、计算题 (要求写出主要计算步骤及结果。每小题 7 分, 共 49 分.)

1. 求函数 $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$ 的导数 y' .

2. 已知方程 $y^3 = xe^y + 1$ 确定函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0}$ 的值.

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+\frac{3}{x})}{\operatorname{arccot} x}$.

4. 确定 a, b 的值, 使函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx, & x \leq 0 \\ e^x - a, & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导.

5. 求定积分 $\int_{-1}^6 \frac{x}{\sqrt[3]{x+2}} dx$.

6. 求定积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$.

7. 求不定积分 $\int x^2 \sin 2x dx$.

四、作图题 (要求写出主要计算步骤及结果。共 14 分.)

设函数 $y = \frac{x^2}{x+1}$,

- (1) 求函数单调区间与极值;
- (2) 求曲线的凹凸区间与拐点;
- (3) 求曲线的渐近线;
- (4) 画出函数的图形.

五、证明题 (要求写出主要证明步骤。共 7 分.)

设 $0 < a < 1, c > 0, x > 0$, 证明不等式: $(x+c)^a < x^a + c^a$.