

# 高等数学 I 练习卷 (1)

一、填空题(将答案写在答题纸的相应位置。每小题 3 分, 共 15 分。)

1. 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+2}\right)^x =$ \_\_\_\_\_.
2. 已知函数  $y = xe^x$ , 则  $y'' =$ \_\_\_\_\_.
3. 定积分  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx =$ \_\_\_\_\_.
4. 曲线  $y = \frac{1}{\ln x}$  的垂直渐近线为\_\_\_\_\_.
5. 极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} - \sqrt{x}}{x-1} =$ \_\_\_\_\_.

二、单项选择题(将答案写在答题纸的相应位置。每小题 3 分, 共 15 分。)

1. 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列变量中与  $x^2$  是等价无穷小量的是 ( ).

- A.  $1 - \cos x$     B.  $x + x^2$     C.  $e^x - 1$     D.  $\ln(1+x) \cdot \sin x$

2. 曲线  $y = x \ln x$  在点  $(1, 0)$  处的切线方程是 ( ).

- A.  $y = x$     B.  $y = -x - 1$     C.  $y = x - 1$     D.  $y = x + 1$

3. 若  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , 则  $\int \sin x f(\cos x) dx =$  ( ).

- A.  $F(\cos x) + C$     B.  $-F(\cos x) + C$     C.  $F(\sin x) + C$     D.  $-F(\sin x) + C$

4. 反常积分  $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$  ( ).

- A. 发散    B. 收敛于  $\frac{1}{2}$     C. 收敛于  $-\frac{1}{2}$     D. 收敛于 1

5. 设函数  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ , 则  $x = 2$  是  $f(x)$  的 ( ).

- A. 可去间断点    B. 跳跃间断点    C. 第二类间断点    D. 连续点

三、计算题(要求写出主要计算步骤及结果。每小题 8 分, 共 40 分。)

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ .
2. 计算由参数方程  $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t - t^3 \end{cases}$  所确定的函数的二阶导数  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .
3. 计算不定积分  $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ .
4. 计算不定积分  $\int x \ln(1+x) dx$ .
5. 计算定积分  $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1 + (\sqrt{x})^3} dx$ .

**四、综合解答题(要求写出主要计算步骤及结果。每小题 10 分，共 20 分。)**

1. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，试讨论  $f(x)$  在  $x=0$  处的连续性与可导性.
2. 求  $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 5$  的单调区间与极值，凹凸区间与拐点. (要求列表)

**五、证明题(要求写出主要证明过程。每小题 5 分，共 10 分。)**

1. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续，且  $f(x) > 0$ .

证明：方程  $x + \int_0^x f(t) dt = 1$  在  $(0, 1)$  内有且仅有一个实根.

2. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续，在  $(a, b)$  内可导，且  $f(a) = f(b) = 0$ .

证明：在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ ，使得  $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$ .