高等数学 I 练习卷（2）参考答案

一、填空题(将答案写在答题纸的相应位置。每小题 3 分，共 15 分。)

1. $\frac{1}{e}$.　　2. 0.　　3. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.　　4. $\sqrt{6}$.　　5. $\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x}}$.

二、单项选择题(将答案写在答题纸的相应位置。每小题 3 分，共 15 分。)

1.A　　2. B　　3.A　　4.C　　5.D

三、计算题(要求写出主要计算步骤及结果。每小题 8 分，共 56 分。)

1. 已知函数 $y=\frac{(x+2)(x-3)^2}{x^2+1}$，求 y'.

解：两边取对数：

$$\ln|y|=\ln|x+2|+2\ln|x-3|-\ln|x^2+1|------1'$$

两边对 x 求导：

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-3}-\frac{2x}{x^2+1}------------4'$$

$$y'=y[\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-3}-\frac{2x}{x^2+1}]------------7'$$

$$=\frac{(x+2)(x-3)^2}{x^2+1}[\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-3}-\frac{2x}{x^2+1}]------8'$$

2. 求函数 $y=\frac{1}{1+x}$ 的 n 阶导数.

解：$y'=\frac{-1}{(1+x)^2},------2'$

$$y''=\frac{(-1)(-2)}{(1+x)^3},---------4'$$

$$y'''=\frac{(-1)(-2)(-3)}{(1+x)^4},-------6'$$

……

$$y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}-----8'$$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^x$.

解: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^x$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}$ ————————2′

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}$ ——————————4′

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2+\frac{3}{x})}$ ———————————6′

$=e^2$ ——————————————8′

4. 求函数曲线 $y=\frac{x}{e^x}$ 的凹凸区间与拐点.

解: $y=\frac{x}{e^x}=xe^{-x}$定义域为$(-\infty,+\infty)$

$y'=(1-x)e^{-x}, y''=(x-2)e^{-x}$

令$y''=0$,得$x=2$ ——————————————————————————————4′

$x<2$时, $y''<0$; $x>2$时, $y''>0$ ——————————————————————6′

所以曲线的凹区间为$(2,+\infty)$;凸区间为$(-\infty,2)$;拐点为$(2,2e^{-1})$ ————8′

5. 计算定积分 $\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx$.

解: 令$x=3\sin t$,则$\sqrt{9-x^2}=3\cos t, dx=3\cos tdt$

$x=0$时$t=0$; $x=3$时$t=\frac{\pi}{2}$ ———————————————2′

$\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2 tdt$ ——————————————————————4′

$=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$ ————————————————————6′

$=\frac{9}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{9}{4}\pi$ ——————————————————————————8′

6. 计算不定积分 $\int\frac{1+\ln x}{x^2}dx$.

解:$\int\frac{1+\ln x}{x^2}dx$

$=\int(1+\ln x)d(-\frac{1}{x})---------2'$

$=-\frac{1+\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx--------5'$

$=-\frac{1+\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C--------7'$

$=-\frac{2+\ln x}{x}+C----------8'$

7．计算不定积分$\int\frac{x-1}{x^2+1}dx$ ．

解:$\int\frac{x-1}{x^2+1}dx$

$=\int\frac{x}{x^2+1}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx-----------2'$

$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)-\int\frac{1}{x^2+1}dx-----5'$

$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x+C---------8'$

四、综合解答题(要求写出主要计算步骤及结果。，共 8 分。)

设函数 $f(x)=ax^3-6ax^2+b\quad(a>0)$，在区间$[-1,2]$上最大值为 3，最小值为-29，

求常数a,b的值.

解：$f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$

令$f'(x)=0$,得$x=0,4$(舍去)$---------------2'$

$f(-1)=b-7a,\ f(0)=b,\ f(2)=b-16a$

$a>0,\therefore\ f(2)<f(-1)<f(0)-----------4'$

所以最大值为$f(0)=b=3$,

最大值为$f(2)=b-16a=-29----------6'$

解得$a=2,b=3------------------8'$

五、 证明题(要求写出主要证明过程。共 6 分。)

证明积分中值定理：

设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，证明：在$[a,b]$上至少存在一点ξ，使下列式子成立

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

证：$f(x)$在$[a,b]$上连续，所以存在最大值M与最小值m.

即：$m < f(x) < M$ ------------------------ $2'$

由定积分的保号性有：$\int_a^b mdx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b Mdx$

$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$

$m < \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} < M$ ------------------------ $4'$

由连续函数的介值定理知：至少存在一点ξ，使得

$f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

即：$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ -------------------- $6'$