第五章　相似矩阵及二次型

1．试用施密特法把下列向量组正交化：

(1)　$(a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$；

(2)　$(a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解　(1)　根据施密特正交化方法:

令$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$b_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b_3 = a_3 - \frac{[b_1, a_3]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_3]}{[b_2, b_2]} b_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

故正交化后得：$(b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

(2)　根据施密特正交化方法令$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$b_3=a_3-\frac{[b_1,a_3]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_3]}{[b_2,b_2]}b_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}$$

故正交化后得 $(b_1,b_2,b_3)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&-\frac{1}{5}\\0&-1&\frac{3}{5}\\-1&\frac{2}{3}&\frac{3}{5}\\1&\frac{1}{3}&\frac{4}{5}\end{pmatrix}$

2．下列矩阵是不是正交阵:

(1) $\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&-1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{8}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{8}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{7}{9}\end{pmatrix}$.

解　(1)　第一个行向量非单位向量,故不是正交阵.

(2)　该方阵每一个行向量均是单位向量，且两两正交，故为正交阵.

3．设 A 与 B 都是 n 阶正交阵，证明 AB 也是正交阵.

证明　因为 A,B 是 n 阶正交阵，故 $A^{-1}=A^T$， $B^{-1}=B^T$

$(AB)^T(AB)=B^TA^TAB=B^{-1}A^{-1}AB=E$

故 AB 也是正交阵.

4．求下列矩阵的特征值和特征向量:

(1) $\begin{pmatrix}1&-1\\2&4\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\end{pmatrix},(a_1\neq 0)$.

并问它们的特征向量是否两两正交?

解 (1) ① $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\2&4-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)$

故A的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=3$.

② 当$\lambda_1=2$时,解方程$(A-2E)x=0$,由

$(A-2E)=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系$P_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

所以$k_1P_1(k_1\neq 0)$是对应于$\lambda_1=2$的全部特征值向量.

当$\lambda_2=3$时,解方程$(A-3E)x=0$,由

$(A-3E)=\begin{pmatrix}-2&-1\\2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系$P_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

所以$k_2P_2(k_2\neq 0)$是对应于$\lambda_3=3$的全部特征向量.

③ $[P_1,P_2]=P_1^TP_2=(-1,1)\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\neq 0$

故P_1,P_2不正交.

(2) ① $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&3\\2&1-\lambda&3\\3&3&6-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+1)(\lambda-9)$

故A的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=9$.

② 当$\lambda_1=0$时，解方程$Ax=0$，由

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$得基础解系$P_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

故$k_1P_1(k_1\neq 0)$是对应于$\lambda_1=0$的全部特征值向量.

当$\lambda_2=-1$时,解方程$(A+E)x=0$，由

$A+E=\begin{pmatrix}2&2&3\\2&2&3\\3&3&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&2&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$得基础解系$P_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

故$k_2P_2(k_2\neq 0)$是对应于$\lambda_2=-1$的全部特征值向量

当$\lambda_3=9$时，解方程$(A-9E)x=0$，由

$$A-9E=\begin{pmatrix}-8 & 2 & 3\\ 2 & -8 & 3\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$得基础解系$P_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$

故$k_3P_3(k_3\neq 0)$是对应于$\lambda_3=9$的全部特征值向量.

③ $[P_1,P_2]=P_1^TP_2=(-1,-1,1)\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=0$，

$[P_2,P_3]=P_2^TP_3=(-1,1,0)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}=0$，

$[P_1,P_3]=P_1^TP_3=(-1,-1,1)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}=0$，

所以P_1,P_2,P_3两两正交.

(3) $$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}a_1^2-\lambda & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ a_2a_1 & a_2^2-\lambda & \cdots & a_2a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=\lambda^n-\lambda^{n-1}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$
$$=\lambda^{n-1}\left[\lambda-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\right]$$

$\therefore\lambda_1=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$，$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$

当$\lambda_1=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$时，

$$(A-\lambda E)$$
$$=\begin{pmatrix} -a_2^2-a_3^2-\cdots-a_n^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & -a_1^2-a_3^2-\cdots-a_n^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & -a_1^2-a_2^2-\cdots-a_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\sim}{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & a_n & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取x_n为自由未知量，并令$x_n=a_n$，设$x_1=a_1,x_2=a_2,\cdots x_{n-1}=a_{n-1}$.

故基础解系为$P_1=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

当$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$时，

$$(A-0\cdot E)=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\sim}{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

可得基础解系

$$P_2=\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},P_3=\begin{pmatrix} -a_2 \\ 0 \\ a_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,P_n=\begin{pmatrix} -a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix}$$

综上所述可知原矩阵的特征向量为

$$\left(P_1,P_2,\cdots,P_n\right)=\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

5．设方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ 相似，求 x, y.

解　方阵 A 与 Λ 相似，则 A 与 Λ 的特征多项式相同，即

$$|A-\lambda E|=|\Lambda-\lambda E| \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & x-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & y-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}.$$

6．设 A, B 都是 n 阶方阵，且 $|A| \neq 0$，证明 AB 与 BA 相似.

证明　$|A| \neq 0$ 则 A 可逆

$A^{-1}(AB)A=(A^{-1}A)(BA)=BA$　　则 AB 与 BA 相似.

7．设 3 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=0, \lambda_3=-1$；对应的特征向量依
次为

$$P_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

求 A.

解　根据特征向量的性质知 (P_1, P_2, P_3) 可逆,

得: $(P_1,P_2,P_3)^{-1}A(P_1,P_2,P_3)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

可得 $A=(P_1,P_2,P_3)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}(P_1,P_2,P_3)^{-1}$

得 $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$

8．设 3 阶对称矩阵 A 的特征值 6，3，3，与特征值 6 对应的特征向量为

$P_1=(1,1,1)^T$,求 A.

解　设 $A=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_2 & x_4 & x_5\\ x_3 & x_5 & x_6\end{pmatrix}$

由 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，知① $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6\\ x_2+x_4+x_5=6\\ x_3+x_5+x_6=6\end{cases}$

3 是 A 的二重特征值,根据实对称矩阵的性质定理知 $A-3E$ 的秩为 1，

故利用①可推出 $\begin{pmatrix}x_1-3 & x_2 & x_3\\ x_2 & x_4-3 & x_5\\ x_3 & x_5 & x_6-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ x_2 & x_4-3 & x_5\\ x_3 & x_5 & x_6-3\end{pmatrix}$

秩为 1.

则存在实的 a,b 使得② $\begin{cases}(1,1,1)=a(x_2,x_4-3,x_5)\\ (1,1,1)=b(x_3,x_5,x_6-3)\end{cases}$ 成立.

由①②解得 $x_2=x_3=1, x_1=x_4=x_6=4, x_5=1$.

得 $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

9．试求一个正交的相似变换矩阵,将下列对称矩阵化为对角矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

解　(1) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ 0 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2)$

故得特征值为 $\lambda_1=-2, \lambda_2=1, \lambda_3=4$.

当$\lambda_1=-2$时，由

$$\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0 \text{解得} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

单位特征向量可取: $P_1=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$

当$\lambda_2=1$时,由

$$\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0 \text{解得} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

单位特征向量可取：$P_2=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}$

当$\lambda_3=4$时,由

$$\begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&-3&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0 \quad \text{解得} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_3\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

单位特征向量可取：$P_3=\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}$

得正交阵$(P_1,P_2,P_3)=P=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

(2)$|A-\lambda E|=\begin{pmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{pmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$，

故得特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，由

$$\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{解得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

此二个向量正交,单位化后,得两个单位正交的特征向量

$$P_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$P_2^*=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{-4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\text{单位化得 }P_2=\frac{\sqrt{5}}{3}\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}$$

当$\lambda_3=10$时,由

$$\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{解得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_3\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

单位化 $P_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$:得正交阵$(P_1,P_2,P_3)$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2\sqrt{5}}{15}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4\sqrt{5}}{15}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{\sqrt{5}}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

10．(1) 设 $A=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}$，求 $\varphi(A)=A^{10}-5A^9$；

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$,求 $\varphi(A)=A^{10}-6A^9+5A^8$.

解　(1)　$\because A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$是实对称矩阵.

故可找到正交相似变换矩阵$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\Lambda$

从而$A=P\Lambda P^{-1}, A^k=P\Lambda^k P^{-1}$

因此$\varphi(A)=A^{10}-5A^9=P\Lambda^{10}P^{-1}-5P\Lambda^9P^{-1}$

$$=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5^{10}\end{pmatrix}P^{-1}-P\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5^{10}\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(2)　同(1)求得正交相似变换矩阵

$$P=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}=\Lambda, A=P\Lambda P^{-1}$

$\varphi(A)=A^{10}-6A^9+5A^8$

$$=A^8(A^2-6A+5E)=A^8(A-E)(A-5E)$$

$$=P\Lambda^8P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix}.$$

11．用矩阵记号表示下列二次型:

(1) $f=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$;

(2) $f=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz$;

(3) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_1x_4+6x_2x_3-4x_2x_4$.

解 (1) $f=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

(2) $f=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&-2\\-2&-2&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

(3) $f=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\-1&1&3&-2\\2&3&1&0\\-1&-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$.

12．求一个正交变换将下列二次型化成标准形:

(1) $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$;

(2) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$.

解 (1) 二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&2\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda)$$

故A的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=5,\lambda_3=1$.

当$\lambda_1=2$时，解方程$(A-2E)x=0$，由

$$A-2E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. 取$P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

当$\lambda_2=5$时，解方程$(A-5E)x=0$，由

$$A-5E=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$取$P_2=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

当$\lambda_3=1$时，解方程$(A-E)x=0$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$取$P_3=\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$,

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

且有 $f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2$.

(2)二次型矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0&-1\\1&1-\lambda&-1&0\\0&-1&1-\lambda&1\\-1&0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)^2,$$

故A的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=3,\lambda_3=\lambda_4=1$

当$\lambda_1=-1$时，可得单位特征向量$P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，

当$\lambda_2=3$时，可得单位特征向量$P_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，

当$\lambda_3=\lambda_4=1$时，可得单位特征向量$P_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$，$P_4=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

且有$f=-y_1^2+3y_2^2+y_3^2+y_4^2$.

13．证明：二次型$f=x^TAx$在$\|x\|=1$时的最大值为矩阵A的最大特征值.

证明　　A为实对称矩阵，则有一正交矩阵T，使得

$$TAT^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=B$$ 成立.

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值，不妨设 λ_1 最大，

T 为正交矩阵，则 $T^{-1}=T^T$ 且 $|T|=1$，故 $A=T^{-1}B^T=T^TB^T$

则 $f=x^TAx=x^TT^TBTx=y^TBy=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$.

其中 $y=Tx$

当 $\|y\|=\|Tx\|=|T|\|x\|=\|x\|=1$ 时，

即 $\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}=1$ 即 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1$

$$f_{\text{最大}}=(\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2)_{\text{最大}}\underset{y_1=1}{=}\lambda_1.$$

故得证.

14．判别下列二次型的正定性：

(1) $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$;

(2) $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4$
$\quad -12x_3x_4$

解 (1) $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-6&0\\1&0&-4\end{pmatrix}$,

$a_{11}=-2<0$, $\begin{vmatrix}-2&1\\1&-6\end{vmatrix}=11>0$, $\begin{vmatrix}-2&1&1\\1&-6&0\\1&0&-4\end{vmatrix}=-38<0$,

故 f 为负定.

(2) $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\-1&3&0&-3\\2&0&9&-6\\1&-3&-6&19\end{pmatrix}$, $a_{11}=1>0$, $\begin{vmatrix}1&-1\\-1&3\end{vmatrix}=4>0$,

$\begin{vmatrix}1&-1&2\\-1&3&0\\2&0&9\end{vmatrix}=6>0$, $|A|=24>0$.

故 f 为正定.

15．设U为可逆矩阵，$A=U^TU$，证明 $f=x^TAx$ 为正定二次型．

证明　设$U=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，　$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，

$$f=x^TAx=x^TU^TUx=(Ux)^T(Ux)$$
$$=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n,a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n,\cdots,a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n)$$
$$\cdot\begin{pmatrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$
$$=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)^2+(a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n)^2$$
$$+\cdots+(a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n)^2\geq 0.$$

若"$=0$"成立，则$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$成立．

即对任意$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$使$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0$成立．

则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，$U$的秩小于$n$，则$U$不可逆，与题意产生矛盾．
于是 $f>0$成立．
故 $f=x^TAx$为正定二次型．

16．设对称矩阵A为正定矩阵，证明：存在可逆矩阵U，使$A=U^TU$．
证明　　A正定，则矩阵A满秩，且其特征值全为正．
不妨设$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为其特征值，$\lambda_i>0$　$i=1,\cdots,n$
由定理 8 知，存在一正交矩阵P

使$P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

又因 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆， $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}^T$.

所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PQ}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{P}^T=\boldsymbol{PQ}\cdot(\boldsymbol{PQ})^T$.

令 $(\boldsymbol{PQ})^T=\boldsymbol{U}$， $\boldsymbol{U}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}$.