江西财经大学

2020—2021 第一学期期末考试试卷

试卷代码：1004100554A　　授课课时：64　　考试用时：110 分钟

课程名称：概率论与数理统计（主干课程）　　适用对象：2019 级

试卷命题人 熊婷燕　　试卷审核人 谭利

一、单项选择题（从下列各小题的四个备选答案中选出一个正确答案。请将正确答案写在答题卷上，并在答案前标明题号。答案错选或未选者，该题不得分。每小题 3 分，共 15 分。）

1. 下列命题一定正确的是（）

A. 若 P(A)=0，则 A 为不可能事件

B. 若 A 与 B 互不相容，则 P(A)=1-P(B)

C. 若 A 与 B 相互独立，则 A 与 B 互不相容

D. 若 $P(AB)\neq 0$,则$P(BC\mid A)=P(B\mid A)P(C\mid BA)$

2．设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，且 $f(-x)=f(x)$，$F(x)$是 X 的分布函数，则对任意实数 a，有________

A. $F(-a)=1-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$　　B. $F(-a)=F(a)$

C. $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$　　D. $F(-a)=2F(a)-1$

3．若随机变量 X 与 Y 均服从标准正态分布，则________

A. $X+Y$ 服从正态分布　　B. X^2+Y^2 服从 χ^2 分布

C. X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布　　D. X^2/Y^2 服从 F 分布

4．设总体 $X\sim B(1,p),P\{x=1\}=p,P\{x=0\}=1-p$,其中 $p>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，则下列不是统计量的是（）

A. X_n+2p　B. $\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$　C. X_1+X_2　D. $(X_n-X_1)^2$

扫码使用
夸克扫描王

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为独立同分布的随机变量列，且均服从参数为 $\lambda(\lambda>1)$ 的指数分布，记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则：

A. $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\lambda\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x)$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x)$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{\lambda n}}\le x\right\}=\Phi(x)$　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\le x\right\}=\Phi(x)$

二、填空题（请将下列各小题的正确答案写在答题卷上，并在答案前标明题号。每小题 3 分，共 15 分。）

1. 已知 $P(A)=0.4,P(B)=0.25,P(A-B)=0.25,$ 求 $P(B-A)=$ ______

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=ae^{-|x|}$，则常数 $a=$__________

3. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma>0$，且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 1/2，则 $\mu=$__________

4. 若随机变量 X，Y，Z 相互独立，其中 X 服从[0, 6]上的均匀分布，Y 服从正态分布 $N(0,4)$，Z 服从参数为 3 的泊松分布，记 $U=X-2Y-3Z$，则 $D(U)=$ __________

5. 已知 $E(X)=1$，$D(X)=4$，利用切比雪夫不等式估计概率 $P\{|X-1|<2.5\}\ \ge$________

三、计算题（请将正确答案写在答题卷上，并在答案前标明题号，保留必要的计算步骤。共 15 分。）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi},x^2+y^2\le 1\\ 0,x^2+y^2>1\end{cases}$，

(1) 求 X,Y 的边缘密度函数；(2) 判断 X,Y 是否独立；(3) 求 X 与 Y 的相关系数。

四、计算题（请将正确答案写在答题卷上，并在答案前标明题号，保留必要的计算步骤。共 15 分。）

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta},0<x<1\\ 0,\text{其它}\end{cases}$，其中 $\theta>-1$ 为未知参数。

扫码使用
夸克扫描王

（1）求θ的矩估计；　　　（2）求θ的极大似然估计。

五、应用题（请将正确答案写在答题卷上，并在答案前标明题号，保留必要的计算步骤。共 10 分。）

某公司有 1、2、3 三厂，他们生产一批同样的产品，已知各厂的产量分别为这批产品的 50%，20%，30%。又各厂产品次品率分别为 2%，5%，4%，

（1） 求从这批产品中任取一件产品是次品的概率；

（2） 从这批产品中任取一件产品是次品，则这件产品来自哪个厂的可能性更大？

六、应用题（请将正确答案写在答题卷上，并在答案前标明题号，保留必要的计算步骤。共 10 分。）

某车间有 150 同类型的机器，每台出现故障的概率都是 0.02，假设各台机器的工作状态相互独立，求：机器出现故障的台数不少于 2 的概率。（$\Phi(0.5832)=0.719$，$\Phi(1.166)=0.879$）

七、应用题（请将正确答案写在答题卷上，并在答案前标明题号，保留必要的计算步骤。共 10 分。）

在正常情况下，某炼铁厂的铁水含碳量（%）$X \sim N(4.55,\sigma^2)$。一日测得 5 炉铁水含碳量如下：4.48，4.40，4.42，4.45，4.47。在显著性水平$\alpha=0.05$下，试问该日铁水含碳量的均值是否有明显变化？

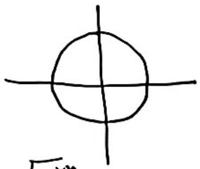
（$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$，$t_{0.05}(4)=2.132$，$t_{0.05}(5)=2.015$，$t_{0.025}(4)=2.776$，$t_{0.025}(5)=2.571$）

八、证明题（请将正确答案写在答题卷上，并在答案前标明题号，保留必要的证明步骤。共 10 分。）

设 $P(A)>0$，$P(B)>0$，若$P(A|B)=P(A|\bar{B})$，则事件A与事件B相互独立。

扫码使用
夸克扫描王

D C C A B 0.1, 0.5 4 46 $\frac{9}{25}$



三、

解：(1) 当 $x^2+y^2\le 1$ 时 $f_X(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$

$f_Y(y)=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$

综上 $f_X(x)\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & x^2+y^2>1\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & x^2+y^2>1\end{cases}$

(2) 由(1)知 当 $x^2+y^2\le 1$ 时 $f_X(x)\cdot f_Y(y)\ne f(x,y)$ ∴ X, Y 不独立

(3) $E(X)=\cancel{\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}}\iint_{x^2+y^2\le 1}x\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{1}{\pi}r^2\cos\theta\,dr$ $E(Y)=\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta\int_0^1\frac{1}{\pi}r^2dr=0$

$=\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta\int_0^1\frac{1}{\pi}r^2dr=0$

$E(XY)=\iint_{x^2+y^2\le 1}xy\frac{1}{\pi}dxdy=\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^1\frac{1}{\pi}r^3dr=0$

∴ $\mathrm{cov}(X,Y)=0$ ∴ $\rho_{XY}=0$

四：解(1) ∵ $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^\theta & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$ $(\theta>-1)$

$E(X)=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}=\frac{\theta+1}{\theta+2}$ ∴ $\hat{\theta}=\frac{2\bar{x}-1}{1-\bar{x}}$

(2) $L(\theta)=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^\theta$

$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ $\Rightarrow \hat{\theta}_{最大}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

五：解(1) A_i 各厂 B 次品

$P(B)=P(B|A_1)\cdot P(A_1)+P(B|A_2)\cdot P(A_2)+P(B|A_3)\cdot P(A_3)$

$=0.02\times 0.5+0.05\times 0.2+0.04\times 0.3$

$=0.032$

(2) 1. $\frac{P(B|A_1)\cdot P(A_1)}{P(B)}=\frac{0.01}{0.032}$ 3. $\frac{0.012}{0.032}$

2. $\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{0.01}{0.032}$ ∴ 来自3厂可能性更大

扫码使用
夸克扫描王

六醉会出现故障设为X_i $X_i \sim B(150, 0.02)$

由中心极限定理得 $X_i \sim N(3, 2.94)$

$\therefore P(X_i \geq 2) = 1 - P(X_i < 2) = 1 - P\left(\frac{X_i - 3}{\sqrt{2.94}} < \frac{2-3}{\sqrt{2.94}}\right)$

$= 1 - \Phi(-0.5832) = \Phi(0.5832) = 0.719$

七. $\bar{X} = 4.444$

$S^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2\right) = 0.00113$

$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(4)$

$H_0: \mu = 4.55$ $H_1: \mu \neq 4.55$.

~~$t_{0.05}(4) = 2.132$~~ $t_{0.025}(4) = 2.776$

$\left|\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\right| = 7.051 > 2.776$ 拒绝H_0，接受H_1，即该日铁水含碳量的均值有明显变化

八、证明：

$\because P(A|B) = P(A|\bar{B})$

$\therefore \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)}$

$\because P(A) > 0, P(B) > 0$

$\therefore P(A)P(B) - P(B)P(AB) = P(AB) - P(AB)P(B)$

即 $P(AB) = P(A)P(B)$

$\therefore$ 事件A与事件B独立

扫码使用
夸克扫描王