江西财经大学 2022—2023 学年第一学期
期末考试参考答案与评分标准

试卷代码：1004703413A　　授课课时：48　　考试用时：110 分钟

课程名称：微积分 I（主干课程）　　适用对象：修读微积分 I 的学生

试卷命题人 ＿杨廷＿　　试卷审核人 ＿汪星＿

一、 单项选择题（从下列各题四个备选答案中选出一个正确答案，并将其代号写在答题纸相应位置处。答案错误或未选者，该题不得分。每小题 3 分，共 15 分。）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}2, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}=$(C)。

   A. 2　　B. 0　　C. $\begin{cases}2, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}0, & |x|\le 1,\\ 2, & |x|>1\end{cases}$

2. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+2+\dfrac{2}{x}}{2x^3+2x^2-5-\dfrac{2}{x}}=$（ B ）。

   A. $-\dfrac{2}{5}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. -1　　D. 不存在

3. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x_0)=f'(x_0)=0$，则极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)+f(x_0-3h)}{h}=$（ D ）。

   A. -2　　B. -3　　C. -5　　D. 0

4. 已知函数 $f(x)$ 在 x_0 处取极大值，则有（ D ）。

   A. $f'(x_0)=0$　　B. $f''(x_0)<0$

   C. $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)<0$　　D. $f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)$ ($|\Delta x|$ 很小)

5. 设 $z=y^x$, 则全微分 $\mathrm{d}z=$（ C ）。

   A. $xy^{x-1}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$　　B. $y^x\ln y(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$

   C. $y^x\ln y\,\mathrm{d}x+xy^{x-1}\,\mathrm{d}y$　　D. $y^x\ln y\,\mathrm{d}y+xy^{x-1}\,\mathrm{d}x$

二、 填空题（请将下列各小题的正确答案写在答题卷上，在答案前标明题号；每小题 3 分，共 15 分。）

1. 函数 $y=2^{\frac{1}{x^2+1}}$ 的值域为 ＿$1<y\le 2$＿。

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=$ ＿e^{-2}＿。

3. $y=\arcsin x^2$ 的导数是 $\underline{\qquad\qquad \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \qquad\qquad}$。

4. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x}=\underline{\qquad\qquad \mathbf{0} \qquad\qquad}$。

5. 设 $f(x,y)=2x+x^2(y-1)\arctan\dfrac{x}{y}$，则 $f_x(2,1)=\underline{\qquad\qquad \mathbf{2} \qquad\qquad}$。

三、 **极限计算题**（请将正确答案写在答题卷上，在答案前标明题号，并保留必要的计算步骤。10 分）

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{x+1}$。

解答： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{(x+1)+2}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{x+1}}\right)^{x+1}$ …………………………………(5 分)

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{x+1}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$ …………………………………………………………(10 分)

四、 **求函数高阶导数**（请将正确答案写在答题卷上，在答案前标明题号，并保留必要的计算步骤。8 分）

已知 $y=(x^2+x)\sin x$，求 $y^{(20)}$。

解答： $y^{(20)}$

$=C_{20}^0\cdot(\sin x)^{(20)}\cdot(x^2+x)+C_{20}^1\cdot(\sin x)^{(19)}\cdot(x^2+x)'+C_{20}^2\cdot(\sin x)^{(18)}\cdot(x^2+x)''$ ………(4 分)

$=(x^2+x-380)\sin x-(40x+20)\cos x$ …………………………………………(8 分)

五、 **求函数导数**（请将正确答案写在答题卷上，在答案前标明题号，并保留必要的计算步骤。8 分）

已知 $f(x)=\arcsin\sqrt{1-\ln x}$，求 $f'(x)$。

解答： $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-\ln x}^2}}\left(\sqrt{1-\ln x}\right)'$ …………………………………………(4 分)

$=-\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x\cdot(1-\ln x)}}$ …………………………………………………………(8 分)

六、 **求二元函数偏导数**（请将正确答案写在答题卷上，在答案前标明题号，并保留必要的计算步骤。10 分）

已知 $z=x^{\frac{1}{y}}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

解答：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y}\cdot x^{\frac{1}{y}-1}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^{\frac{1}{y}}\ln x\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)$ ……(4 分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{y}(\dfrac{1}{y}-1)\cdot x^{\frac{1}{y}-2}$ ……(6 分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{y^2}\cdot x^{\frac{1}{y}-1}-\dfrac{1}{y^3}x^{\frac{1}{y}-1}\ln x$ ……(8 分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^{\frac{1}{y}}\ln x\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)\ln x\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)+x^{\frac{1}{y}}\ln x\dfrac{2}{y^3}$ ……(10 分)

七、 **求隐函数导数**（请将正确答案写在答题卷上，在答案前标明题号，并保留必要的计算步骤。8 分）

求由方程 $\mathrm{e}^{xy}+x\ln y=y$ 确定的隐函数的导数 y'。

解答：方程左右两边同时对 x 求导，可得

$\mathrm{e}^{xy}(y+xy')+\ln y+x\dfrac{y'}{y}=y'$ ……(5 分)

解得 $y'=\dfrac{y\mathrm{e}^{xy}+\ln y}{1-x\mathrm{e}^{xy}-\frac{x}{y}}$ ……(8 分)

八、 **求全微分**（请将正确答案写在答题卷上，在答案前标明题号，并保留必要的计算步骤。10 分）

设 $z=\mathrm{e}^{x+y}\sin(xy)$，求 $\mathrm{d}z$。

解答：$\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$ ……(5 分)

$=(\mathrm{e}^{x+y}\sin(xy)+y\mathrm{e}^{x+y}\cos(xy))\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{x+y}\sin(xy)+x\mathrm{e}^{x+y}\cos(xy))\,\mathrm{d}y$ ……(10 分)

九、 **经济应用题**（请将正确答案写在答题卷上，在答案前标明题号，并保留必要的计算步骤。8 分）

某厂每日生产 Q 个单位某商品的总成本为 C 元，其中固定成本为 200 元，且生产一个单位商品的变动成本为 10 元，每单位商品售价为 P 元，需求函数为 $Q=150-2P$. 假定市场均衡，问每日产量为多少才能使总利润最大?

解答：利润函数为 $L(Q)=P\cdot Q-C=\dfrac{1}{2}(150-Q)\cdot Q-(200+10Q)=-\dfrac{1}{2}(Q-65)^2+1912.5$(4 分)

所以，当 $Q=65$ 时，利润最大。……(8 分)

十、 **证明题**（请将正确答案写在答题卷上，在答案前标明题号，并保留必要的计算步骤。8 分）

证明：当 $x>0$ 时，$0<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<1$ 成立。

解答： 即证 $\frac{1}{x} < \frac{1}{\ln(1+x)} < \frac{1+x}{x}$,

即 $x > \ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$,

也即证 $1 > \frac{\ln(1+x)}{x} > \frac{1}{1+x}$. …………………………………………………………… (4 分)

根据拉格朗日定理，在 $(1, 1+x)$ 内至少存在一点 ξ，使得

$$\ln(1+x) - \ln 1 = \frac{1}{\xi}x.$$

所以，$\frac{1}{\xi} = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

又因为 $1 < \xi < 1+x$, 所以 $1 < \frac{x}{\ln(1+x)} < 1+x$, 即 $1 > \frac{\ln(1+x)}{x} > \frac{1}{1+x}$.

结论得证。 …………………………………………………………………………………… (8 分)