高等数学练习卷（1）参考答案

一、填空题(将答案写在答题纸的相应位置。每小题 3 分，共 15 分。)

1. $\underline{e^{-2}}$.　　2. $\underline{(x+2)e^x}$.　　3. $\underline{\quad 0 \quad}$.　　4. $\underline{x=1}$.　　5. $\underline{\quad 2 \quad}$.

二、单项选择题(将答案写在答题纸的相应位置。每小题 3 分，共 15 分。)

1.D　2.C　3.B　4.B　5.A

三、计算题(要求写出主要计算步骤及结果。每小题 8 分，共 40 分。)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x-\sin x}$.

$$\text{解：}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}------2\text{分}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos x}------4\text{分}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}--------6\text{分}$$

$$=\frac{1}{2}\;2----------8\text{分}$$

2. 计算由参数方程 $\begin{cases} x=1-2t \\ y=t-t^3 \end{cases}$ 所确定的函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$$\text{解：}\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}----------2\text{分}$$

$$=\frac{1-3t^2}{-2}-----------4\text{分}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}----6分$$

$$=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{1-3t^2}{-2})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t}{\boxed{-2}}--------8分$$

3. 计算不定积分 $\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$.

解:$\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$

$$=\int\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx--------3分$$

$$=\int\frac{1}{(e^x)^2+1}de^x------6分$$

$$=\arctan e^x+C-------8分$$

4. 计算不定积分 $\int x\ln(1+x)dx$.

解:$\int x\ln(1+x)dx=\int\ln(1+x)d\frac{x^2}{2}$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x}dx------------3分$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int(x-1+\frac{1}{1+x})dx--------5分$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+x)+C------7分$$

$$=\frac{x^2-1}{2}\ln(1+x)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+C-----------8分$$

5. 计算定积分 $\int_1^4\frac{\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^3}dx$.

解：令$t=\sqrt{x}$,则$x=t^2,dx=2tdt$

$$\int_1^4\frac{\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^3}dx=\int_1^2\frac{t}{1+t^3}2tdt------2分$$

$$=\frac{2}{3}\int_1^2\frac{1}{1+t^3}d(1+t^3)-----------4分$$

$$=\frac{2}{3}\ln\left|1+t^3\right|\Big|_1^2----------------6分$$

$$=\frac{2}{3}\ln\frac{9}{2}-------------------8分$$

四、综合解答题(要求写出主要计算步骤及结果。每小题 10 分，共 20 分。)

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，试讨论 $f(x)$ 在 x=0 处的连续性与可导性.

(1)连续性

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0$--------2分

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0$--------4分

$f(0)=0$

所以$f(x)$在$x=0$处连续---------5分

(2)可导性

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=1$----7分

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0$----9分

$f'_-(0)\neq f'_+(0)$

所以$f(x)$在$x=0$处不可导------------10分

2. 求 $y=x^3-5x^2+3x+5$ 的单调区间与极值，凹凸区间与拐点. （要求列表)

解：(1) $y'=3x^2-10x+3=(3x-1)(x-3)$

令$y'=0$，得$x_1=\dfrac{1}{3}, x_2=3$

(2) $y''=6x-10$ --------------------------------------2 分

令$y''=0$，得$x_3=\dfrac{5}{3}$

(3)列表考察

x	$(-\infty,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},3)$	3	$(3,+\infty)$	x	$(-\infty,\frac{5}{3})$	$\frac{5}{3}$	$(\frac{5}{3},+\infty)$
y'	+	0	−	0	+	y''	−	0	+
y	↗	$\frac{148}{27}$	↘	-4	↗	y	∩	$\frac{20}{27}$	∪

--8 分

(4)单调增加区间为$(-\infty,\frac{1}{3})$和$(3,+\infty)$；单调减少区间为$(\frac{1}{3},3)$

极大值为$f(\frac{1}{3})=\frac{148}{27}$，极小值为$f(3)=-4$；

凸区间为$(-\infty,\frac{5}{3})$，凹区间为$(\frac{5}{3},+\infty)$；拐点为$(\frac{5}{3},\frac{20}{27})$-----------------------10 分

五、 证明题(要求写出主要证明过程。每小题 5 分，共 10 分。)

1. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(x)>0$.

证明：方程$x+\int_0^x f(t)dt=1$在$(0,1)$内有且仅有一个实根.

证：令$F(x)=x+\int_0^x f(t)dt-1$,则$F(x)$在$[0,1]$上连续

$F(0)=-1<0, F(1)=\int_0^1 f(t)dt>0$

由连续函数的零值定理知：$\exists\xi\in(0,1)$,使得$F(\xi)=0$------3分

又因为$F'(x)=1+f(x)>0$

$F(x)$在$[0,1]$上单调增加，所以$F(x)=0$最多有一个实根

故方程$x+\int_0^x f(t)dt=1$在$(0,1)$内有且仅有一个实根-------5分

2. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)=0$.

证明：在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

证：令$F(x)=e^{-x^2}f(x)$----------------2分

则$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导

且$F(a)=F(b)=0$

$F(x)$在$[a,b]$上满足罗尔定理的条件

故在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$F'(\xi)=0$

即：$e^{-\xi^2}[f'(\xi)-2\xi f(\xi)]=0,\ \because e^{-\xi^2}>0$

所以 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$-----------------5分