江西财经大学

16－17 第一学期期末考试答案

试卷代码：06266A　　授课课时：96　　考试用时：110 分钟

课程名称：数学分析　**（主干课程）**　　适用对象：165 统计拔尖班

试卷命题人 **刘小惠**　　试卷审核人 **徐慧植**

一、叙述题（每题 5 分，共 10 分）

1. 用“$\varepsilon-\delta$”语言叙述：$f(x)$ 在区间 I 上可导。

答：对于$\forall x_0\in I$，及$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$使得$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称$f(x)$在区间I可导。

2. 用“$\varepsilon-\delta$”语言叙述：$f(x)$ 在区间 I 上不一致连续。

答：存在$\varepsilon_0>0$，对于任意$\forall\delta>0$，总存在x',x''满足：当$|x'-x''|<\delta$时，有

$$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$$

则称$f(x)$在区间 I 上不一致连续。

二、选择题（每题 2 分，共 10 分）

1. 当 $x\to0$ 时，$y=\sin x$ 与下列哪个函数是不等价的？ [D]

（A） $y=x$　　（B） $y=e^x-1$

（C） $y=\ln(1+x)$　　（D） $y=1-\cos x$

2. 曲线 $\begin{cases}x=\cos t+\cos^2 t\\ y=1+\sin t\end{cases}$ 在点 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处对应**法线**的斜率为[A]

（A）$1+\sqrt{2}$　（B）$1-\sqrt{2}$　（C）$-1-\sqrt{2}$　（D）$-1+\sqrt{2}$

3. 已知 $g(t)=(1-t)(2-t)\cdots(100-t)$，则 $g'(100)$=[B]

（A） $-99!$　（B）$99!$　（C $-100!$　（D）$100!$

4. 若 $f'(x)$ 存在，则 $d(x^{f(x)})$=[A]

（A）$\left(f'(x)\ln x+\frac{f(x)}{x}\right)x^{f(x)}dx$　　（B） $\left(f'(x)\ln x+\dfrac{f(x)}{x}\right)x^{f(x)}$

（C） $\left(f(x)\ln x+\dfrac{f'(x)}{x}\right)x^{f(x)}dx$　　（C） $\left(f(x)\ln x+\dfrac{f'(x)}{x}\right)x^{f(x)}$

5. 对于某任意给定的 $\varepsilon > 0$，下列哪项中**不是**当 $x \to +\infty$ 时的**无穷小量**[B]

（A）$\dfrac{\ln x}{x^{\varepsilon}}$　　（B）$\varepsilon + \frac{1}{x}$

（C）$\dfrac{x^{\varepsilon}}{e^{x}}(1+\varepsilon)$　　（D）$\dfrac{\ln x}{e^{x}}$

三、计算题（每题 8 分，共 40 分）

1. 若 $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^3+x^2+5x+1}-ax^2-bx\right)=0$，试求 a,b 的值。

解：因为

$$0=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^4+2x^3+x^2+5x+1}-ax^2-bx$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+2x^3+x^2+5x+1-(ax^2-bx)^2}{\sqrt{x^4+2x^3+x^2+5x+1}+ax^2+bx}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a^2)x^4+2(1+ab)x^3+(1-b^2)x^2+5x+1}{\sqrt{x^4+2x^3+x^2+5x+1}+ax^2+bx}$$

-- 4分

从而推得 $a=1$,或者 $a=-1$(舍去)。将 $a=1$ 代入原等式，可得

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4+2x^3+x^2+5x+1}-x^2}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^3+2x^2+x+5+1/x}-x$$

类似地，应用分子有理化处理方法，可得 $b=1$

-- 8分

2. $\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x^2)}$

解：当 $x\to0$ 时，$x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$。应用等价无穷小替换,并结合洛必达法则，可得

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{x^2}$$

-- 4分

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}}{2x}$$

-- 6分

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+2x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sqrt{1+2x}-1}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x+\frac{1}{2}\ln(1+2x)}-1}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{1}{2}\ln(1+2x)}{2x} = 1$$

--- 8分

3. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，求$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0-\Delta x)\}}{e^{\Delta x}-1}$的值.

解：当$x\to 0$时, $x\sim\sin(x)\sim e^x-1$，因此应用等价无穷小替换，可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0-\Delta x)\}}{e^{\Delta x}-1}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$$

--- 4 分

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$$
$$= 3\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$$
$$= 4f'(x)$$

--- 8 分

4. 已知$\lim_{t\to 3}\frac{t^2+ct+d}{t^2-2t-3}=2$，求$c$和$d$.

解：由题设，有

$$2=\lim_{t\to 3}\frac{t^2+ct+d}{t^2-2t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{t^2+ct+d}{(t-3)(t+1)}$$

推得，必有

$$3^2+3c+d=0 \qquad ①$$

--- 4分

即分子分母均为$t\to 3$时的无穷小量。因此，进一步地，由洛必达法则可得

$$2=\lim_{t\to 3}\frac{t^2+ct+d}{t^2-2t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{2t+c}{2t-2}=\frac{6+c}{4}$$

推得$c=2$。将此代入①可得

$$d=-15.$$

--- 8分

5. 推导$\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]$，其中$[a]$表示不大于$a$的最大整数。

解：有$a-1<[a]\le a$，$\forall a\in R^1$，因此有

$$1=\lim_{x\to 0^+}x\left(\frac{1}{x}-1\right)\le\lim_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]\le\lim_{x\to 0^+}x\frac{1}{x}=1$$

-- 4分

及

$$1=\lim_{x\to 0^-}x\left(\frac{1}{x}-1\right)\ge\lim_{x\to 0^-}x\left[\frac{1}{x}\right]\ge\lim_{x\to 0^-}x\frac{1}{x}=1$$

故应用迫敛准则及左右极限的性质可得，

$$\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

-- 8分

四、证明题（每题 10 分，共 20 分）

1. 若函数$f(x)$、$g(x)$均为区间I上的凹函数，试证$F(x)=\min\{f(x),g(x)\}$也是I上的凹函数。

证明：若函数$f(x),g(x)$均为区间I上的凹函数，则由凹函数的定义可知，$\forall x_1,x_2\in I$及$\forall\lambda\in(0,1)$，有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

及

$$g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge\lambda g(x_1)+(1-\lambda)g(x_2)$$

-- 4分

又由于，对于$c>0$

$$cf(x)\ge c\times\min\{f(x),g(x)\}$$
$$cg(x)\ge c\times\min\{f(x),g(x)\}$$

因此

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge\lambda\cdot\min\{f(x_1),g(x_1)\}+(1-\lambda)\cdot\min\{f(x_2),g(x_2)\}$$
$$g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge\lambda\cdot\min\{f(x_1),g(x_1)\}+(1-\lambda)\cdot\min\{f(x_2),g(x_2)\}$$

-- 8分

从而推得

$$\min\{f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2),g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\}$$
$$\ge\lambda\cdot\min\{f(x_1),g(x_1)\}+(1-\lambda)\cdot\min\{f(x_2),g(x_2)\}$$

即

$$F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)$$

得证。

-- 10分

2. 试用拉格朗日中值定理证明不等式：$h<\arcsin(h)<\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$，其中$0<h<1$.

证明：令$f(x)=\arcsin(x)$。因$f(0)=0$，则由拉格朗日中值定理，有

$$f(h)=f(h)-f(0)=f'(\xi)h$$

这里$\xi\in(0,h)$。由于

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

-- 6分

因此

$$h \le f(h) = f'(\xi)h = \frac{h}{\sqrt{1-\xi^2}} \le \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$$

得证。

-- 10 分

五、讨论题（每题 10 分，共 20 分）

1. 讨论函数$f(x) = xD(x^2+1)$在 $x=0$ 处的连续性和可导性，其中 $D(x)$ 为 R 上的狄利克雷函数。

讨论：根据定义于整个实数域上的狄利克雷函数的性质可知：任意$c \in Q$(全体有理数集)均是$D(t)$的周期，故

$$D(x^2+1) = D(x^2)$$

因此

$$f(x) = xD(x^2+1) = xD(x^2)$$

下面简记$g(x) = D(x^2)$。

-- 2分

另一方面，根据导数定义，有

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{xD(x^2)-0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} D(x^2) \end{aligned}$$

-- 4 分

由实数性质可知：(a)、当$r \in Q$时，必有$r^2 \in Q$；(b)、$s \in R\backslash Q$时，必有$\sqrt{s} \in R\backslash Q$。取有理数列$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$，及无理数列$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$，分别满足：

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0 = \lim_{n\to\infty} s_n$$

由(a)、(b)可知：$\{r_n^2\}_{n=1}^{\infty}$仍为有理序列，$\{\sqrt{s_n}\}_{n=1}^{\infty}$为无理序列。故，

$$\lim_{n\to\infty} g(r_n) = \lim_{n\to\infty} D(r_n^2) = 1 \ne \lim_{n\to\infty} g(\sqrt{s_n}) = \lim_{n\to\infty} D(s_n) = 0$$

即$\lim_{x\to 0} D(x^2)$不存在。故$\boldsymbol{f(x)}$**在**$\boldsymbol{x=0}$**处不可导**。

-- 6分

此外，由于

$$|f(x)| \le |x| \to 0, \qquad 当x \to 0 时$$

因此

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

即$\boldsymbol{f(x)}$**在**$\boldsymbol{x=0}$**处连续。**

-- 10 分

2. 设数列$\{x_n\}$满足：

$$x_0 = 25, x_n = \arctan(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \cdots$$

试讨论此数列的敛散性(如果收敛，请给出其极限；如果不收敛，请给出理由。)

讨论：令$f(x) = \arctan(x) - x$。由

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 \leq 0$$

可得$f(x)$**严格单调递减**。因此，当$x \geq 0$时，有

$$f(x) \leq f(0) = 0$$

-- 4 分

即$\arctan(x) \leq x$。因此，对于$\forall n > 0$

$$x_n = \arctan(x_{n-1}) \leq x_{n-1} \leq \cdots \leq x_0$$

推得$\{x_n\}$为单调递减数列。又，当$x \geq 0$时，$\arctan(x) \geq 0$。故$x_n \geq 0, n = 0, 1, \cdots$，有下界。故由单调有界定理，可得$\{x_n\}$收敛。令$a = \lim_{n\to\infty} x_n$，

-- 8 分

从而由

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \arctan(x_{n-1})$$

可得

$$a = \arctan(a)$$

解得$a = 0$。

-- 10 分