第四章 线性方程组

1．把下列矩阵化为行最简形矩阵：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$； (4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

解 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \underset{r_3+(-3)r_1}{\overset{r_2+(-2)r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\underset{r_3\div(-2)}{\overset{r_2\div(-1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_3-r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\overset{r_3\div 3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{r_2+3r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underset{r_1+r_3}{\overset{r_1+(-2)r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \underset{r_3+(-2)r_1}{\overset{r_2\times 2+(-3)r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$\underset{r_1+3r_2}{\overset{r_3+r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1\div 2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -10 \end{pmatrix}$

$\underset{\substack{r_3\div(-3) \\ r_4\div(-5)}}{\overset{r_2\div(-4)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_3-r_2 \\ r_4-r_2}}{\overset{r_1-3r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_3-3r_2 \\ r_4-2r_2}}{\overset{r_1-2r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -8 & 8 & 9 & 12 \\ 0 & -7 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$

$\underset{\substack{r_3-8r_1 \\ r_4-7r_1}}{\overset{r_2+2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_2\times(-1) \\ r_4-r_3}}{\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\overset{r_2+r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. 在秩是 r 的矩阵中,有没有等于 0 的 $r-1$ 阶子式?有没有等于 0 的 r 阶子式?

解　　在秩是 r 的矩阵中,可能存在等于 0 的 $r-1$ 阶子式,也可能存在等于 0 的 r 阶子式.

例如，$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$R(\alpha) = 3$ 同时存在等于 0 的 3 阶子式和 2 阶子式.

3．从矩阵 A 中划去一行得到矩阵 B,问 A,B 的秩的关系怎样?

解　$R(A)\geq R(B)$

设 $R(B)=r$，且 B 的某个 r 阶子式 $D_r\neq 0$.矩阵 B 是由矩阵 A 划去一行得

到的，所以在 A 中能找到与 D_r 相同的 r 阶子式 $\overline{D_r}$，由于 $\overline{D_r}=D_r\neq 0$，故而 $R(A)\geq R(B)$.

4．求作一个秩是 4 的方阵,它的两个行向量是 $(1,0,1,0,0),(1,-1,0,0,0)$

解　设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 为五维向量,且 $\alpha_1=(1,0,1,0,0)$,

$\alpha_2=(1,-1,0,0,0)$,则所求方阵可为 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\end{pmatrix}$,秩为 4,不妨设

$$\begin{cases}\alpha_3=(0,0,0,x_4,0)\\ \alpha_4=(0,0,0,0,x_5)\text{ 取 } x_4=x_5=1\\ \alpha_5=(0,0,0,0,0)\end{cases}$$

故满足条件的一个方阵为 $\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&-1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

5．求下列矩阵的秩,并求一个最高阶非零子式:

(1) $\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}3&2&-1&-3&-1\\2&-1&3&1&-3\\7&0&5&-1&-8\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}2&1&8&3&7\\2&-3&0&7&-5\\3&-2&5&8&0\\1&0&3&2&0\end{pmatrix}$.

解　(1) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -4 & 4\end{pmatrix} \overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim} \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 3 & -4 & 4\end{pmatrix}$

$\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & -6 & 5\\ 0 & 4 & -6 & 5\end{pmatrix} \overset{r_3-r_2}{\sim} \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & -6 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 秩为2

二阶子式 $\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -4$.

(2) $\begin{pmatrix}3 & 2 & -1 & -3 & -2\\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3\\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8\end{pmatrix} \underset{r_3-7r_1}{\overset{\substack{r_1-r_2\\ r_2-2r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix}1 & 3 & -4 & -4 & 1\\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5\\ 0 & -21 & 33 & 27 & -15\end{pmatrix}$

$\overset{r_3-3r_2}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 3 & -4 & -4 & 1\\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 秩为2.

二阶子式 $\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -7$.

(3) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 8 & 3 & 7\\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5\\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0\end{pmatrix} \underset{\substack{r_2-2r_4\\ r_3-3r_4}}{\overset{r_1-2r_4}{\sim}} \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & -1 & 7\\ 0 & -3 & -6 & 3 & -5\\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$

$\underset{r_3+2r_1}{\overset{r_2+3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & -1 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14\\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0\end{pmatrix} \underset{\substack{r_3\div 14\\ r_4\div 16\\ r_4-r_3}}{\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\ r_4\leftrightarrow r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 秩为 3

三阶子式 $\begin{vmatrix}0 & 7 & -5\\ 5 & 8 & 0\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix}5 & 8\\ 3 & 2\end{vmatrix} = 70 \neq 0$.

6．求解下列齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

解 (1) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \text{即得} \begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}x_4 \\ x_2 = -3x_4 \\ x_3 = \frac{4}{3}x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

故方程组的解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -3 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{即得} \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

故方程组的解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{即得} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{故方程组的解为} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

(4)　对系数矩阵实施行变换：

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{17} & \frac{13}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{19}{17} & \frac{20}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{即得} \begin{cases} x_1 = \frac{3}{17} x_3 - \frac{13}{17} x_4 \\ x_2 = \frac{19}{17} x_3 - \frac{20}{17} x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

$$\text{故方程组的解为} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{17} \\ \frac{19}{17} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{17} \\ -\frac{20}{17} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7．求解下列非齐次线性方程组：

$$(1) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 10, \\ 11x_1 + 3x_2 = 8; \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ x - 2y + 4z = -5, \\ 3x + 8y - 2z = 13, \\ 4x - y + 9z = -6; \end{cases}$$

(3) $\begin{cases} 2x+y-z+w=1, \\ 4x+2y-2z+w=2, \\ 2x+y-z-w=1; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x+y-z+w=1, \\ 3x-2y+z-3w=4, \\ x+4y-3z+5w=-2; \end{cases}$

解 (1) 对系数的增广矩阵施行行变换,有

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & -10 & 11 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$R(A)=2$ 而 $R(B)=3$,故方程组无解.

(2) 对系数的增广矩阵施行行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得 $\begin{cases} x=-2z-1 \\ y=z+2 \\ z=z \end{cases}$ 亦即 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) 对系数的增广矩阵施行行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2} \\ y=y \\ z=z \\ w=0 \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) 对系数的增广矩阵施行行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得$\begin{cases} x=\frac{1}{7}z+\frac{1}{7}w+\frac{6}{7} \\ y=\frac{5}{7}z-\frac{9}{7}w-\frac{5}{7} \\ z=z \\ w=w \end{cases}$ 即$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

8．λ取何值时,非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$$

(1)有唯一解；**(2)**无解；**(3)**有无穷多个解?

解 **(1)** $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}\neq 0$,即$\lambda\neq 1,-2$时方程组有唯一解.

(2) $R(A)<R(B)$

$$B=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$$

由$(1-\lambda)(2+\lambda)=0,(1-\lambda)(1+\lambda)^2\neq 0$

得$\lambda=-2$时,方程组无解.

(3) $R(A)=R(B)<3$,由$(1-\lambda)(2+\lambda)=(1-\lambda)(1+\lambda)^2=0$,

得$\lambda=1$时,方程组有无穷多个解.

9．非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

当λ取何值时有解？并求出它的解.

解 $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{3}(\lambda-1) \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) \end{pmatrix}$

方程组有解，须$(1-\lambda)(\lambda+2)=0$得$\lambda=1, \lambda=-2$

当$\lambda=1$时,方程组解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

当$\lambda=-2$时,方程组解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

10．设$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1, \end{cases}$

问λ为何值时,此方程组有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解
时求解.

解 $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 5-\lambda & -\lambda-1 \end{pmatrix}$

$\overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5-\lambda}{2} & -2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \frac{(1-\lambda)(10-\lambda)}{2} & \frac{(1-\lambda)(4-\lambda)}{2} \end{pmatrix}$

当$|A| \neq 0$,即$\frac{(1-\lambda)^2(10-\lambda)}{2} \neq 0 \quad \therefore \lambda \neq 1$且$\lambda \neq 10$时，有唯一解.

当$\frac{(1-\lambda)(10-\lambda)}{2} = 0$且$\frac{(1-\lambda)(4-\lambda)}{2} \neq 0$，即$\lambda = 10$时，无解.

当$\dfrac{(1-\lambda)(10-\lambda)}{2}=0$且$\dfrac{(1-\lambda)(4-\lambda)}{2}=0$，即$\lambda=1$时，有无穷多解.

此时，增广矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

原方程组的解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1,k_2\in R)$

11．试利用矩阵的初等变换，求下列方阵的逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

解 （1）$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

故逆矩阵为$\begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(2) $$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1` & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

故逆矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$

12．(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,求 X 使 $AX = B$;

(2) 设$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ -3 & 3 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$,求$X$使$XA=B$.

解

(1) $$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}4 & 1 & -2 & 1 & -3\\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1\end{array}\right)\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 10 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -15 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4\end{array}\right)$$

$$\therefore X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}10 & 2\\ -15 & -3\\ 12 & 4\end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix}A\\ \hline B\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc}0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ -3 & 3 & -4\\ \hline 1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{array}\right)\overset{\text{初等列变换}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline 2 & -1 & -1\\ -4 & 7 & 4\end{array}\right)$$

$$\therefore X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -4 & 7 & 4\end{pmatrix}.$$