高等数学 I 练习卷（4）参考答案

一、填空题 (将答案写在答题纸相应的位置。每小题 3 分，共 18 分.)

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}=$ __1__ .

2. 设 $f(x)=\sin^2 x$，则 $f''(x)=$ __$2\cos 2x$__ .

3. 曲线 $\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2} \\ y=1-t \end{cases}$ 在参数 $t=1$ 相应的点处的切线方程为 __$x+y-\dfrac{1}{2}=0$__ .

4. 设 $y=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^{2020}}{2020}$，则 $y^{(2020)}=$ __2019!__ .

5. 不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{1+4x^2}dx=$ __$\dfrac{1}{2}\arctan 2x+C$__ .

6. 定积分 $\displaystyle\int_0^{2021\pi}\sin x dx=$ __2__ .

二、单项选择题 (将答案写在答题纸相应的位置。每小题 3 分，共 18 分.)

1. 下列极限值为1的是（　A　）

A. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-\frac{1}{x}}$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$　　C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{x}$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x}}$

2. 曲线 $y=\dfrac{x\arctan x}{x-1}$ 的渐近线条数为（　D　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，则（　C　）

A. $f'(1)=-1$　　B. $f'(1)=1$　　C. $f'(1)=2$　　D. $f'(1)$不存在

4. 若 $f(-x)=-f(x)\ (-\infty<x<+\infty)$，在 $(-\infty,0)$ 内有 $f'(x)>0$，$f''(x)<0$，则 $(0,+\infty)$ 内有（　A　）

A. $f(x)$ 单增，曲线 $f(x)$ 为凹弧　　B. $f(x)$ 单减，曲线 $f(x)$ 为凹弧

C. $f(x)$ 单减，曲线 $f(x)$ 为凸弧　　D. $f(x)$ 单增，曲线 $f(x)$ 为凸弧

5. 已知 $f(e^x)=e^{2x}$，则 $\displaystyle\int f(x)dx=$（　D　）

A. e^x+C　　B. $\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$　　C. $\dfrac{x^2}{2}+C$　　D. $\dfrac{x^3}{3}+C$

6. 关于函数（曲线）$f(x)=|x|$ 叙述错误的是（　C　）

A．在 $x=0$ 处连续　　　　B．在 $x=0$ 处不可导

C．在 $x=0$ 处可微　　　　D．在 $(0,0)$ 处不存在切线

三、计算题 (要求写出主要计算步骤及结果；每小题 8 分，共 16 分.)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[1-\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]$.

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ ……………………………………………… $2'$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}$ ……………………………………………… $4'$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}$ ……………………………………………… $6'$

$=\frac{1}{2}$ ……………………………………………… $8'$

2. 设 $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x+\cos e^{2x}$,求 dy .

解： 令 $y_1=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x, y_2=\cos e^{2x}$ ……………………………………………… $2'$

$\ln y_1=x\ln\frac{x}{1+x}=x\left[\ln x-\ln(1+x)\right]$，　$\frac{y_1'}{y_1}=\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}$ …………………………… $4'$

$y_2'=2e^{2x}\sin e^{2x}$ ……………………………………………… $6'$

$y'=y_1'+y_2'=x\ln\frac{x}{1+x}\left(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right)+2e^{2x}\sin e^{2x}$ …………………… $8'$

四、解答题 (要求写出主要解答步骤及结果；每小题 8 分，共 16 分.)

1. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续性与可导性.

解： $\because$ $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$ ……………………………………… $2'$

$\therefore$ $f(x)$在 x=0 处连续. ………………… $4'$

$\because$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在 ……………………………………… $6'$

$\therefore f(x)$在$x=0$处不可导. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8'$

2. 求函数（曲线）$I(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt$的单调区间与极值, 凹凸区间与拐点.(要求列表).

解： $I(x)=\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}$, $I'(x)=xe^{-x^2}$, $I''(x)=(1-2x^2)e^{-x^2}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

令$I'(x)=0$得$x=0$；$I''(x)=0$得$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4'$

列表讨论如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$	x	$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$
$I'(x)$	$-$	0	$+$	$I''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$I(x)$	单减		单增	$I(x)$	凸		凹		凸

$\therefore$ 单减区间$(-\infty,0)$, 单增区间$(0,+\infty)$; 极小值为$(0,0)$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6'$

凸区间$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$、$(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$，凹区间$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$；拐点为$(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$. $\cdots\cdots\cdots\cdots 8'$

五、计算积分 (要求写出主要计算步骤;每小题 8 分，共 16 分.)

1. 计算不定积分$\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{3x}}dx$.

解： 令$t=1+\sqrt[3]{3x}$, $x=\frac{1}{3}(t-1)^3$, $dx=(t-1)^2dt$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

则$\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{3x}}dx=\int\frac{(t-1)^2}{t}dt$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4'$

$=\int(t-2+\frac{1}{t})dt=\frac{1}{2}t^2-2t+\ln|t|+C$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6'$

$=\frac{1}{2}(1+\sqrt[3]{3x})^2-2(1+\sqrt[3]{3x})+\ln\left|1+\sqrt[3]{3x}\right|+C$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8'$

2. 计算定积分$\int_0^1 xe^{-2x}dx$.

解： $\int_0^1 xe^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 xde^{-2x}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$

$=-\frac{1}{2}\left(xe^{-2x}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{-2x}dx\right)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4'$

$$=-\frac{1}{2}\left(e^{-2}+\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^1\right)$$ ……………………6′

$$=-\frac{1}{2}\left(e^{-2}+\frac{1}{2}(e^{-2}-1)\right)=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}e^{-2}$$ ……………………8′

六、证明题 (要求写出主要证明步骤;每小题 8 分，共 16 分.)

1. 设 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续，在 $(2,3)$ 内可导，且 $f(2)=3, f(3)=2$. 证明：存在点 $\xi\in(2,3)$，使得 $f(\xi)=-\xi f'(\xi)$.

证：令 $F(x)=xf(x)$ ……………………………………………2′

$F(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续，在 $(2,3)$ 内可导，且 $F(2)=6=F(3)$ ……………………4′

据罗尔定理，存在点 $\xi\in(2,3)$，使得 $F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$ ……………………6′

即 $f(\xi)=-\xi f'(\xi)$. ……………………8′

2. 证明不等式：当 $x>4$ 时，$2^x>x^2$.

证：令 $f(x)=2^x-x^2$， ……………………………………………2′

则 $f'(x)=2^x\ln 2-2x,\ f''(x)=2^x\ln^2 2-2$ ……………………4′

当 $x>4$ 时，$f''(x)>2^4\ln^2 2-2>0\Rightarrow f'(x)\nearrow$；从而 $f'(x)>f'(4)>0\Rightarrow f(x)\nearrow$

……………………6′

所以，当 $x>4$ 时，$f(x)=2^x-x^2>f(4)=0$, 即 $2^x>x^2$. ……………………8′