模拟试卷一及答案

［请注意：将各题题号及答案写在答题纸上，写在试卷上无效］

一、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分。）不写解答过程。

1．行列式$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$的展开式中$x$的系数是_________；

2．已知 3 阶矩阵A的特征值为 0，1，2，则$\left|A^2-5A+7E\right|=$___________；

3．向量组$\alpha_1=(0,0,1),\alpha_2=(0,1,1),\alpha_3=(1,1,1),\alpha_4=(1,0,0)$的秩为______；

4．设$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & t & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，若 3 阶非零方阵$B$满足$AB=0$，则$t=$______；

5．设 3 阶可逆方阵A有特征值 2，则方阵$(A^2)^{-1}$有一个特征值为_________。

二、单项选择题（从下列各题四个备选答案中选出一个正确答案，并将其代号写在答题纸相应位置处。答案错选或未选者，该题不得分。每小题 3 分，共 15 分。）

1．A是n阶方阵，A^*是其伴随矩阵，则下列结论错误的是【　　】

A. 若A是可逆矩阵，则A^*也是可逆矩阵；

B. 若A不是可逆矩阵，则A^*也不是可逆矩阵；

C. 若$|A^*|\neq 0$，则A是可逆矩阵；

D. $|AA^*|=\left|AE\right|$。

2．设$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$，若$AP=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{pmatrix}$，则$P=$【　　】

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；　　B. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；

C. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；　　D. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3．$m>n$是n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关的【　　】

A. 充分条件　　　　　　　*B.* 必要条件

C. 充分必要条件　　　　　*D.* 必要而不充分条件

4．设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$Ax=0$的基础解系，则该方程组的基础解系还可以表示为【　　】

A．$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的一个等价向量组；

B．$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的一个等秩向量组；

C．$\alpha_1,\alpha_2+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$；

D．$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.

5．$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是齐次线性方程组$AX=0$（A为$m\times n$矩阵）的基础解系，则$R(A)=$【　　】

A．s　　B．$n-s$　　C．$m-s$　　D．$m+n-s$

三、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果。本题10分）。

计算行列式$\begin{vmatrix}1+a & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2+a & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3+a & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4+a\end{vmatrix}$

四、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果。本题10分）。

求解矩阵方程

$$AX+B=X,\text{其中}A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 5 & -3\end{pmatrix}.$$

五、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果。本题10分）。

已知$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 3\\ 0 & 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$，求$|A^8|$及$\left|A^*\right|$。

六、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果。本题10分）

设向量组$\alpha_1=(a,3,1)^T,\alpha_2=(2,b,3)^T,\alpha_3=(1,2,1)^T,\alpha_4=(2,3,1)^T$的秩为2，求$a,b$和向量组的极大线性无关组，并将其余向量用极大无关组线性表示。

七、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果。本题10分）

根据参数的取值，讨论线性方程组解的情况，并求解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2\\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=k\end{cases}$$

八、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果。本题 10 分）

设$\lambda=1$是矩阵$A=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 4\\ t & 0 & 1\end{pmatrix}$的一个特征值。

（1） 求参数t的值；

（2） 求对应于$\lambda=1$的所有特征向量。

九、证明题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

(1) 设A,B都是 n 阶矩阵，且A可逆，证明AB与BA相似；

(2) 设$b_1=a_1+a_2,b_2=a_2+a_3,b_3=a_3+a_4,b_4=a_4+a_1$，证明向量组$b_1,b_2,b_3,b_4$线性相关。

模拟试卷答案

［请注意：将各题题号及答案写在答题纸上，写在试卷上无效］

一、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分。）不写解答过程。

1. 行列式$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$的展开式中$x$的系数是__2__；

2. 已知 3 阶矩阵A的特征值为 0，1，2，则$|A^2-5A+7E|=$__21__；

3. 向量组$\alpha_1=(0,0,1),\alpha_2=(0,1,1),\alpha_3=(1,1,1),\alpha_4=(1,0,0)$的秩为__3__；

4. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & t & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，若 3 阶非零方阵$B$满足$AB=0$，则$t=$__$-4$__；

5. 设 3 阶可逆方阵A有特征值 2，则方阵$(A^2)^{-1}$有一个特征值为__1/4__。

二、单项选择题（从下列各题四个备选答案中选出一个正确答案，并将其代号写在答题纸相应位置处。答案错选或未选者，该题不得分。每小题 3 分，共 15 分。）

1. A是n阶方阵，A^*是其伴随矩阵，则下列结论错误的是【 D 】

   A. 若A是可逆矩阵，则A^*也是可逆矩阵；

   B. 若A是不可逆矩阵，则A^*也是不可逆矩阵；

   C. 若$|A^*|\neq 0$，则A是可逆矩阵；

   D. $|AA^*|=|AE|$。

2. 设$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$，若$AP=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{pmatrix}$，则$P=$【 A 】

   A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；　　B. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；

   C. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；　　D. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $m>n$是n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关的【 A 】

A.　充分条件　　　　　　　　*B.*　必要条件

C.　充分必要条件　　　　　　*D.*　必要而不充分条件

4．设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$Ax=0$的基础解系，则该方程组的基础解系还可以表示为【　C　】

A．$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的一个等价向量组；

B．$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的一个等秩向量组；

C．$\alpha_1,\alpha_2+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$；

D．$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.

5．$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是齐次线性方程组$AX=0$（A为$m\times n$矩阵）的基础解系，则$R(A)=$【　B　】

A．s　　　　B．$n-s$　　　　C．$m-s$　　　　D．$m+n-s$

三、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果。本题 10 分）。

计算行列式$\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix}\text{(加边)}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}\text{（每一行减去第一行，变成标准的爪形）}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+\frac{10}{a} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}\text{（中间爪去旁边爪）}$$

$$=a^4+10a^3$$

四、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果。本题 10 分）。

求解矩阵方程

$$AX + B = X, 其中 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

方法一：

$AX + B = X \Rightarrow AX - X = -B \Rightarrow (A-E)X = -B$

$\because |A-E| \neq 0$

$\therefore X = -(A-E)^{-1}B$

方法二：

$(A-E|-B)$做行初等变换，左边变成单位矩阵E时，右边为所求的X

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

五、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果。本题 10 分）。

已知 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$，求$|A^8|$及$|A^*|$。

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

解：$\therefore |A^8| = |A|^8 = 1$

$|A^*| = |A|^3 = 1$

六、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果。本题 10 分）

设向量组$\alpha_1 = (a,3,1)^T, \alpha_2 = (2,b,3)^T, \alpha_3 = (1,2,1)^T, \alpha_4 = (2,3,1)^T$的秩为 2，求$a,b$和向量组的极大线性无关组，并将其余向量用极大无关组线性表示。

解：$[\alpha_3,\alpha_4,\alpha_1,\alpha_2]$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & 3 & 3 & b \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$(注：此处为等号）

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3-2a & b-4 \\ 0 & -1 & 1-a & 1 \end{bmatrix}$$(注：此处用箭头表示初等变换，不能再用等号）

由于向量组的秩为 2

所以有

（1） $\begin{aligned}&3-2a=1-a\Rightarrow a=2\\&b-4=1\Rightarrow b=5\end{aligned}$

代入得

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&2&2\\0&-1&-1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&4\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此有 α_3,α_4 为极大无关组，且有 $\alpha_1=\alpha_3$，$\alpha_2=4\alpha_3-\alpha_4$

（注：得到线性关系后可代入检验是否正确）

七、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果。本题 10 分）

根据参数的取值，讨论线性方程组解的情况，并求解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+x_4=1\\x_1+2x_2-x_3+4x_4=2\\x_1+7x_2-4x_3+11x_4=k\end{cases}$$

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}2&-1&1&1&1\\1&2&-1&4&2\\1&7&-4&11&k\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&4&2\\0&-5&3&-7&-3\\0&5&-3&7&k-2\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&4&2\\0&-5&3&-7&-3\\0&0&0&0&k-5\end{array}\right]$$(注：变为阶梯形时，可判断解的情况）

(1)$k\neq 5$,无解。

(1)$k=5$,无穷多解。

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&4&2\\0&-5&3&-7&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&1/5&6/5&4/5\\0&1&-3/5&7/5&3/5\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$(求无穷多解，需变成行最简形）

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4 \\ x_2 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4 \\ \quad x_3 = x_3 \\ \quad x_4 = x_4 \end{cases}$$

此时方程组的通解为 $X = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -6 \\ -7 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, k_1, k_2 \in R$

八、计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果。本题 10 分）

设 $\lambda = 1$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的一个特征值。

（1）求参数 t 的值；

（2） 求对应于 $\lambda = 1$ 的所有特征向量。

解：（1）由题意得

$$\left|\lambda I - A\right|_{\lambda=1} = 0 \Rightarrow \left|I - A\right| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -t & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow t$为任意实数

（2） 对 $\lambda = 1$,解 $(\lambda I - A)X = 0$得

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -t & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -t & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 = x_3 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 属于特征值 $\lambda = 1$ 的全体特征向量是 $k\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, k \neq 0$

九、证明题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

(1) 设 A, B 都是 n 阶矩阵，且 A 可逆，证明 AB 与 BA 相似；

证明：由于 $A^{-1}(AB)A = BA$

按定义有 AB 与 BA 相似。

(2) 设$b_1=a_1+a_2, b_2=a_2+a_3, b_3=a_3+a_4, b_4=a_4+a_1$，证明向量组$b_1,b_2,b_3,b_4$线性相关。

证明：

$$(b_1,b_2,b_3,b_4)=(a_1,a_2,a_3,a_4)\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$