学　　号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　评定成绩＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿（分）

学生姓名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　担任教师＿＿＿＿＿＿

《高等代数》期末闭卷考试题

（下述　一 —　四　题全作计100分，　两小时完卷）

考试日期：

试 题 全 文：

遵守考场纪律，防止一念之差贻误终生。

一、　填空题（共 5 小题，每题 2 分）

1、$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}=$＿＿＿＿＿＿

2、设 n 阶矩阵 A 的秩为 n，则 A^* 的秩为＿＿＿＿。

3、设 α、β、γ 线性无关，则 $k\alpha+\beta+\gamma$、$\alpha-\beta$、$\beta+\gamma$ 线性无关的充要条件是＿＿＿＿。

4、设 α、β 为 n 维非零列向量，则 $\left|\alpha\beta^{\mathrm{T}}\right|=$＿＿＿＿＿。

5、设 3 阶矩阵 A 的特征值为-1、2、1，则 $\left|\mathrm{A}^*+A^{-1}+E\right|=$＿＿＿。

二、选择题（共 10 小题，每题 2 分）

1、设 A、B 为 n 阶矩阵，则下列说法正确的是（　）

(A)、$|A+B|=|\mathrm{B}|+|\mathrm{A}|$　　　(B) $|\mathrm{AB}|=|\mathrm{BA}|$

(C)、$(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}}=A^T B^T$　　　(D) 若 $AB=A$，则 $B=E$

2、已知 4 阶矩阵 A 的伴随矩阵的秩为 1，则 A 的秩为（　　）

(A)、1　　(B)、2　　(C)、3　　(D)、4

3、已知 n 阶非零矩阵 A、B 满足 AB=O，则下列说法错误的是（　　）

(A)、$|A|=0$ 且 $|\mathrm{B}|=0$　　　(B)、方程组 $AX=0$ 有非零解

(C)、方程组 $\mathrm{B}X=0$ 有非零解　　　(D)、以上说法都不对

4、设 A,B 为同阶可逆方阵, 则(　　)成立.

(A)　$AB=BA$

(B)　存在可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$

(C)　存在可逆阵 C, 使 $C^{T}AC=B$

(D)　存在可逆阵 P,Q, 使 $PAQ=B$

5、若 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 m,则方程组 $AX=B$（　　）。

(A)、有唯一解　　(B)、有无穷解　(C)、有解　　(D)、可能无解

6、设向量组 α_1，α_2，α_3 是 R^3 的一组基，则下列向量组（　）是 R^3 的一组基。

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$　　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$

(C) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$

(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3$

7、设 T 是向量空间 R^3 上的变换，下列 T 是线性变换的是（　　）。

(A)、$T(a_1,a_2,a_3)=(a_1,a_2^2,a_3)$

(B)、$T(a_1,a_2,a_3)=(a_1+a_2,2a_2,a_2+a_3)$

(C)、$T(a_1,a_2,a_3)=(a_1+a_2,a_2+1,a_1+a_3)$

(D)、$T(a_1,a_2,a_3)=(a_1+a_2,a_1a_2,a_3)$

8、设 A、B 都是正定矩阵，则（　　）

(A)、AB,A+B 一定都是正定矩阵

(B)、AB 是正定矩阵，A+B 不一定是正定矩阵

(C)、AB 不一定是正定矩阵，A+B 是正定矩阵

(D)、AB、A+B 都不是正定矩阵

9、设 A、B 是 n 阶矩阵，下列结论正确的是（　）

(A)、若 A、B 相似，则 A、B 有相同特征向量

(B)、若 λ 是 A、B 的特征值，则 λ 也是 A+B 的特征值

(C)、A 的特征向量即为 $AX=0$ 的所有解

（D）、若 X 是 A 的特征向量，则 X 也是 A^2 的特征向量

10、已知 2 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2-3A+2E=O$，则下列矩阵中和 A 合同的是（　　）

（A）、$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$　　（B）、$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

（C）、$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}$　　（D）、$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

三、计算题（共 8 小题，每题 8 分）

1、已知四阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，且 $|A|=1$，

$|B|=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_4,\alpha_2-2\alpha_4,\alpha_1+3\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4)$，求 $|B|$

2、设 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 2E$，求 B^{-1}

3、设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$，求向量组 α_1、α_2、α_3 的秩和一个极大线性无关组。

4 、 设 $\alpha_1=(1,2,0)^T$ ， $\alpha_2=(1,\alpha+2,-3\alpha)^T$ ， $\alpha_3=(-1,-b-2,\alpha+2b)^T$ ，

$\beta=(1,3,-3)^T$，试讨论当a,b为何值时，

（Ⅰ）β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示;

（Ⅱ）β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一地线性表示，并求出表示式;

（Ⅲ）β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式.

5、设α_1、α_2、α_3是R^3的一组基，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3$,求

（1）由基α_1、α_2、α_3到基β_1、β_2、β_3的过渡矩阵；

（2）向量$\alpha=2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$在基$\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$下的坐标。

6、设线性空间 R^3 的一组基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 在线性变换 T 下的像分别为

$$T(\alpha_1)=\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},T(\alpha_2)=\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},T(\alpha_3)=\beta_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

（1）求 T 在基 α_1、α_2、α_3 下的矩阵；

（2）求 $T(\beta_1)$、$T(\beta_2)$、$T(\beta_3)$。

7、已知 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=6$，$\lambda_2=\lambda_3=3$，和属于 $\lambda_1=6$ 的一个特征向量 $\alpha=(1,1,1)^T$，求 A

8、已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & a & 6 \end{pmatrix}$ 相似于对角阵，求

（1）a 的值；

（2）求正交变换矩阵使二次型 $X^T AX$ 为标准型。

《高等代数》（周五）标准答案（试卷 A）

一、填空题

1、$(k-1)^2(k+2)$　2、n　3、$k \neq 0$　4、0　5、0

二、选择题

1、B　2、C　3、D　4、D　5、C　6、B　7、B　8、C　9、D　10、A

三、计算题

1、$B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 1\\ -2 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ……………………………4 分

$$|B|=|A|\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 1\\ -2 & -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=2$$ ……………………………………4 分

2、

$$AB=B+3A$$

$$\Rightarrow B=A^{-1}B+2E$$ ……………………………2 分

$$\Rightarrow B(E-A^{-1})=2E \Rightarrow B^{-1}=2(E-\frac{1}{|A|}A^{*})$$ …………4 分

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -6 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$$ ……………………………………2 分

3、

$$\begin{vmatrix}k & 1 & 1\\ 1 & k & 1\\ 1 & 1 & k\end{vmatrix}=(k-1)^2(k+2)$$ …………………………2 分

所以

当$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -2$时，α_1、α_2、α_3线性无关，$R(\alpha_1、\alpha_2、\alpha_3)=3$，极大线性无关组为其本身；……………………………………………………………..2分

当$\lambda=1$时，$(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，所以$R(\alpha_1、\alpha_2、\alpha_3)=1$，$\alpha_1$为其一个极大线性无关组……………………………………………………………….2分

当$\lambda=-2$时，$R(\alpha_1、\alpha_2、\alpha_3)=2$，$\alpha_1$、$\alpha_2$为其一个极大线性无关组…………..2分

4、$\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&a+2&-b-2&3\\0&-3a&a+2b&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{pmatrix}$………………………3分

当$a\neq 0$且$a\neq b$时，β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一地线性表示

$\beta=(1-\frac{1}{a})\alpha_1+\frac{1}{a}\alpha_2$………………………2分

当$a=0$时，β不能由α_1、α_2、α_3线性表示……………1分

当$a=b\neq 0$时，β可由α_1、α_2、α_3线性表示，且表示不唯一

$\beta=(1-\frac{1}{a})\alpha_1+(k+\frac{1}{a})\alpha_2+k\alpha_3$（k为任意常数）……………………….2分

5、$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3)=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

所以由基α_1、α_2、α_3到基β_1、β_2、β_3的过渡矩阵为

$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$…………………2分

$$\alpha=2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$ ....2 分

$$=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$ ....2 分

$$=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}$$ ....2 分

所以 $\alpha=2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$ 在基 β_1、β_2、β_3 下的坐标为 $\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}$。

6、 $\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}A$ ....2 分

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$$ ....2 分

$$=$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\-1&2&-1\end{pmatrix}$$ ....2 分

$$T\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&2&2\\0&-3&2\end{pmatrix}$$ ....2 分

7、设 $\left(x_1,\ x_2,\ x_3\right)^T$ 为属于 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 的特征向量

$$x_1+x_2+x_3=0$$ ....2 分

基础解系为$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$…………2 分

将上述基础解系标准正交化得$\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$…………2 分

所以

$$A=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & & \\ & 3 & \\ & & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$$…………

.2 分

8、 $|\lambda E-A|=(\lambda-6)^2(\lambda-2)$…………2 分

$$6E-A=6E-A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & 0\\ 0 & -a & 0\end{pmatrix}$$

A 可对角化，所以$R(6E-A)=1$，所以$a=0$…………2 分

A 的二次型矩阵为$\begin{pmatrix}2 & 5 & 0\\ 5 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$，特征值为-3、6、7…………1 分

相应特征向量为

$(1,\ -1,\ 0)^T$，$(0,\ 0,\ 1)^T$，$(1,\ 1,\ 0)^T$…………2 分

从而相应的正交变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ....1 分

四、证明题

$AX = AY \Rightarrow A(X-Y) = O$ ....2 分

$\Rightarrow R(A) + R(X-Y) \le n$ ....2 分

$\Rightarrow R(X-Y) = 0$. ....2 分

所以 $X - Y = O$