练习卷（3）参考答案

一、填空题（将答案写在答题纸相应的位置。每小题 3 分，共 15 分.）

1. 4
2. 2020!
3. $\dfrac{-b}{a^2\sin^3 t}$
4. $2^n e^{2x+1}$
5. $x-x^2/2+C$

二、单项选择题（将答案写在答题纸相应的位置。每小题 3 分，共 15 分.）

1. B
2. D
3. D
4. D
5. A

三、计算题（要求写出主要计算步骤及结果；每小题 7 分，共 42 分.）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\dfrac{x}{\sin x}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)}$.

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{\dfrac{x^2}{2}\sin x}$ ………………………………………………… $2'$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$ ………………………………………………… $4'$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$ ………………………………………………… $6'$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2/2}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$ ………………………………………………… $7'$

2. 求过原点且与曲线 $y=e^x$ 相切的切线方程.

解： $y'=e^x$， ………………………………………………… $2'$

设切点为 (x_0,e^{x_0})，则切线方程为 $y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$， ……………………… $4'$

由 $x=0$ 时 $y=0$， $-e^{x_0}=-x_0e^{x_0}$ 得 $x_0=1$， ………………………………………… $6'$

所求切线方程为 $y=ex$. ………………………………………… 7′

3. 设 $\int_0^{-x} ye^t dt+\int_0^y x\cos t dt=0$， 求 dy .

解： 由原式可得 $y\left[e^t\right]_0^{-x}+x\left[\sin t\right]_0^y=0$， …………………………… 2′

即 $y(e^{-x}-1)+x\sin y=0$， ………………………………………………… 4′

两边取微分 $(e^{-x}-1)dy-ye^{-x}dx+\sin ydx+x\cos ydy=0$， ……………………… 6′

解得 $dy=\dfrac{ye^{-x}-\sin y}{x\cos y+e^{-x}-1}dx$. ………………………………………… 7′

4.求定积分 $\int_1^e \dfrac{dt}{t\sqrt{1+\ln t}}$.

解： 原式 $=\int_1^e \dfrac{d\ln t}{\sqrt{1+\ln t}}$ ………………………………………………… 2′

$=\int_1^e \dfrac{d\left(1+\ln t\right)}{\sqrt{1+\ln t}}$ ………………………………………………… 4′

$=2\left[\sqrt{1+\ln t}\right]_1^e$ ………………………………………………… 6′

$=2\left(\sqrt{2}-1\right)$ ………………………………………………… 7′

5. 设 $f(x)=\dfrac{2}{x(1+x^2)}+\dfrac{1}{2}\int_1^2 f(x)dx$, 求 $\int_1^2 f(x)dx$.

解： 设 $\int_1^2 f(x)dx=A$, 则 $f(x)=\dfrac{2}{x(1+x^2)}+\dfrac{A}{2}$ …………………………… 2′

积分得 $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 \dfrac{2}{x(1+x^2)}dx+\int_1^2 \dfrac{A}{2}dx$, …………………………… 4′

其中 $\int_1^2 \dfrac{2}{x(1+x^2)}dx=\int_1^2 \dfrac{1}{x^2(1+x^2)}dx^2=\left[\ln\dfrac{x^2}{1+x^2}\right]_1^2=\ln\dfrac{8}{5}$ ………………………… 6′

所以 $A=\ln\dfrac{8}{5}+\dfrac{A}{2}$. $A=\int_1^2 f(x)dx=2\ln\dfrac{8}{5}$. …………………………… 7′

6. 求不定积分 $\int e^{\sqrt{2x+1}}dx$.

解： 令 $\sqrt{2x+1}=t$, $x=\dfrac{t^2-1}{2}$, $dx=tdt$ …………………………… 2′

原式 $=\int e^t t\,dt=\int t\,de^t$ ························· $4'$

$=e^t t-\int e^t\,dt$ ························· $6'$

$=e^t(t-1)=e^{\sqrt{2x+1}}\left(\sqrt{2x+1}-1\right)+C$ ························· $7'$

四、解答题（要求写出主要计算步骤及结果；每小题 7 分，共 14 分.）

1. 确定 a,b 的值，使 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x-2)e^{\frac{1}{x}}-(ax+b)\right]=0$.

解： 由 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\dfrac{(x-2)e^{\frac{1}{x}}}{x}-a-\dfrac{b}{x}\right]=0$，得 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-2)e^{\frac{1}{x}}}{x}$ ························· $2'$

则 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=1$ ························· $4'$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x-2)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-2e^{\frac{1}{x}}\right]$ ························· $6'$

$=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}2e^{\frac{1}{x}}=-1$ ························· $7'$

2. 已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=-1$ 处有极值 2，试确定常数 a,b，并求 $f(x)$ 的极值点、拐点.

解： 由 $\begin{cases} f'(-1)=3x^2+2ax+b\big|_{x=-1} \\ \qquad\quad =3-2a+b=0 \\ f(-1)=-1+a-b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-3 \end{cases}$， ························· $2'$

$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-3 \end{cases}$，即 $f(x)=x^3-3x$ ························· $4'$

令 $f'(x)=3x^2-3=0$，得 $x=\pm1$，易知 $x=\pm1$ 为极值点 ························· $6'$

令 $f''(x)=6x=0$，得 $x=0$，易知 $(0,0)$ 为拐点. ························· $7'$

五、证明题（要求写出主要证明步骤；每小题 7 分，共 14 分.）

1. 证明：$a\cos x+b\cos 2x=0$ 在 $(0,\pi)$ 内存在根，其中 a,b 为常数.

证明： 令 $f(x)=a\sin x+\dfrac{b}{2}\sin 2x$，$f'(x)=a\cos x+b\cos 2x$ ························· $2'$

则 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，且 $f(0)=f(\pi)=0$ ············ $4'$

由罗尔定理可知，存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f'(\xi)=0$，······························ $6'$

即 $a\cos x+b\cos 2x=0$ 在 $(0,\pi)$ 内存在根. ·· $7'$

2. 证明：当 $x\neq 0$ 时，$e^x>1+x$.

证明： 令 $f(x)=e^x-1-x$， ··· $2'$

则 $f(0)=0$， $f'(x)=e^x-1$ ··· $4'$

由 $x>0$ 时， $f'(x)>0\Rightarrow f(x)>f(0)=0$；

$x<0$ 时， $f'(x)<0\Rightarrow f(x)>f(0)=0$. ·· $6'$

所以，当 $x\neq 0$ 时， $f(x)=e^x-1-x>0$，即 $e^x>1+x$. ····················· $7'$