高等数学I练习卷（5）参考答案

一、填空题（将答案写在答题纸相应的位置。每小题3分，共15分.）

1. e^{-4}　　2. $\dfrac{2x}{1+x^2}dx$　　3. $-\dfrac{3}{2}$　　4. e^2　　5. $\dfrac{\pi}{2}$.

二、单项选择题（将答案写在答题纸相应的位置。每小题3分，共15分.）

1.A　　2.B　　3.C　　4.A　　5.C

三、计算题（要求写出主要计算步骤及结果。每小题7分，共49分.）

1. 求函数 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$ 的导数 y'.

解：$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}(\sqrt{1-x^2})'----2$分

$=\dfrac{1}{|x|}\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}--------------4$分

$=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},-1<x<0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},0<x<1\end{cases}----------7$分

2. 已知方程 $y^3=xe^y+1$ 确定函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$ 的值.

解：方程$y^3=xe^y+1$两边对x求导：

$3y^2y'=e^y+xe^yy'----(1)---------------------2$分

再两边对x求导：

$6y(y')^2+3y^2y''=e^yy'+e^yy'+xe^y(y')^2+xe^yy''----(2)----4$分

$x=0$代入原式得$y=1,--------------------------5$分

$x=0,y=1$代入(1)式得$y'=\dfrac{e}{3},-------------------6$分

$x=0,y=1,y'=\dfrac{e}{3}$代入(2)式得$y''=0$

即$\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}=0-----------------------------7$分

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{3}{x})}{\operatorname{arccot}x}$.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{3}{x})}{\operatorname{arccot}x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{3}{x}}{\operatorname{arccot}x}\quad(\frac{0}{0})----1$分

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{3}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}------3$分

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3(1+x^2)}{x^2}-----4$分

$=3------------5$分

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{3}{x})}{\operatorname{arccot}x}=\dfrac{0}{\pi}=0---6$分

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{3}{x})}{\operatorname{arccot}x}$不存在$----7$分

4. 确定a,b的值，使函数$f(x)=\begin{cases}x^2+bx, & x\le 0\\ e^x-a, & x>0\end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$内可导.

解：$f(x)$在$x=0$处可导，则必连续，所以

$f(0^-)=f(0^+)=f(0)$

而$f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+bx)=0=f(0)$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}(e^x-a)=1-a$

故$1-a=0, a=1---------------------4$分

又因为$f(x)$在$x=0$处可导，则$f'_-(0)=f'_+(0)$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2+bx}{x}=b$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

故$b=1-------------------------7$分

5. 求定积分$\int_{-1}^{6}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+2}}dx$.

解：令$t=\sqrt[3]{x+2}$,则$x=t^3-2, dx=3t^2dt$,

$x=-1$时$,t=1; x=6$时$,t=2$

$$\int_{-1}^{6}\frac{x}{\sqrt[3]{x+2}}dx=\int_{1}^{2}\frac{t^3-2}{t}3t^2dt------3分$$

$$=3\int_{1}^{2}(t^4-2t)dt--------------5分$$

$$=3(\frac{t^5}{5}-t^2)\Big|_1^2=\frac{48}{5}-------------7分$$

6. 求定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx$.

解：$f(x)=\sqrt{\cos x-\cos^3 x}$为偶函数，所以

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx---------2分$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x(1-\cos^2 x)}dx------3分$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin xdx----------4分$$

$$=-2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}d(cosx)---------5分$$

$$=-\frac{4}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}----------7分$$

7. 求不定积分$\int x^2\sin 2xdx$.

解:$\int x^2\sin 2xdx=\frac{1}{2}\int x^2d(-\cos 2x)$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}\int 2x\cos 2xdx----------2分$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}\int xd(\sin 2x)-----------4分$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int \sin 2xdx-----6分$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C-----7分$$

四、作图题（要求写出主要计算步骤及结果。共 14 分.）

设函数$y=\frac{x^2}{x+1}$,

（1）求函数单调区间与极值；

（2）求曲线的凹凸区间与拐点；

（3）求曲线的渐近线；

（4）画出函数的图形.

解：定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$y=\dfrac{x^2}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}, y'=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}, y''=\dfrac{2}{(x+1)^3}$

令$y'=0$,得$x_1=-2, x_2=0; y''\neq 0$

列表：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$		$+$		$+$
y	↗∩	极大值-4	↘∩	↘∪	极小值0	↗∪

--------------------6 分

（1）函数的单调增加区间为：$(-\infty,-2)$和$(0,+\infty)$，单调减少区间为：$(-2,-1)$和$(-1,0)$；

极大值为 $f(-2)=-4$，极小值为 $f(0)=0$ **------------------------8 分**

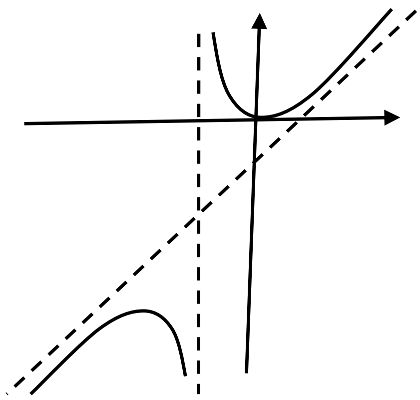
（2）曲线的凸区间为$(-\infty,-1)$，凹区间为$(-1,+\infty)$，无拐点。--------------------------------10 分

（3）$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2}{x+1}=\infty$，曲线有铅直渐近线 $x=-1$；

$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$， $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2}{x+1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{-x}{x+1})=-1$， ----------------12 分

曲线有斜渐近线 $y=x-1$

（4）画图



----------------14 分

五、证明题（要求写出主要证明步骤。共 7 分.）

设 $0<a<1,c>0,x>0$，证明不等式：$(x+c)^{a}<x^{a}+c^{a}$.

证明：令 $f(x)=(x+c)^{a}-x^{a}-c^{a}$，则 $f(0)=0$ −−−−−−−−1分

$f'(x)=a(x+c)^{a-1}-ax^{a-1}$ −−−−−−−−−−−−−−−−−−−3分

当 $0<a<1$ 时, $a-1>0$，x^{a-1} 单调减少，

$c>0$ 时, $(x+c)^{a-1}<x^{a-1}$

所以 $f'(x)<0,\ f(x)$ 单调减少，

$\therefore x>0$ 时, $f(x)<f(0),(x+c)^{a}-x^{a}-c^{a}<0,$

即:$(x+c)^{a}>x^{a}+c^{a}$ −−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−7分