第三章 向量

**1**．设 ***v*1**

= **(1, 1,**

**0)*T* , *v***

= **(0,**

**1, 1)*T* , *v***

= **(3,**

**4, 0)*T* ,**

求 ***v*1** − ***v*2** 及 **3*v*1** + **2*v*2** − ***v*3 .**

**2**

**3**

***T T***

解 ***v*1** − ***v*2** = **(1, 1,**

**0)** − **(0,**

**1, 1)**

= **(1** − **0,**

**1** − **1,**

**0** − **1)*T*** = **(1, 0,**

***T T***

− **1)*T***

***T***

**3*v*1** + **2*v*2** − ***v*3** = **3(1, 1,**

**0)** + **2(0,**

**1, 1)**

− **(3, 4, 0)**

= **(3** × **1** + **2** × **0** − **3,**

**3** × **1** + **2** × **1** − **4,**

**3** × **0** + **2** × **1** − **0)*T***

= **(0, 1,**

**2)*T***

**2**．设 **3(*a*1** − ***a*)** + **2(*a*2** + ***a*)** = **5(*a*3** + ***a*)** 其中 ***a*1** = **(2,5,1,3) ,**

***T***

***a*** = **(10,1,5,10)*T* , *a***

**2**

**3**

= **(4,1,**−**1,1)*T* ,**求 ***a***

解 由 **3(*a*1** − ***a*)** + **2(*a*2** + ***a*)** = **5(*a*3** + ***a*)** 整理得

***a*** = **1 (3*a***

**6 1**

+ **2*a*2**

− **5*a*3**

**)** = **1 [3(2,5,1,3)*T***

**6**

+ **2(10,1,5,10)*T***

− **5(4,1,**−**1,1)*T* ]**

= **(1,2,3,4)*T***

**3**．举例说明下列各命题是错误的**:**

**(1)**若向量组 ***a*1 , *a*2 ,**L**, *am*** 是线性相关的**,**则 ***a*1** 可由 ***a*2 ,**L***am* ,** 线性表示**. (2)**若有不全为 **0** 的数 λ**1 ,** λ**2 ,**L**,** λ***m*** 使

λ**1*a*1** + L + λ***m am*** + λ**1*b*1** + L + λ***m bm*** = **0**

成立**,**则 ***a*1 ,**L**, *am*** 线性相关**,**

***b*1 ,**L**, *bm*** 亦线性相关**.**

**(3)**若只有当 λ**1 ,** λ**2 ,**L**,** λ***m*** 全为 **0** 时**,**等式

λ**1*a*1** + L + λ***m am*** + λ**1*b*1** + L + λ***m bm*** = **0**

才能成立**,**则 ***a*1 ,**L**, *am*** 线性无关**,**

***b*1 ,**L**, *bm*** 亦线性无关**.**

**(4)**若 ***a*1 ,**L**, *am*** 线性相关**,**

***b*1 ,**L**, *bm*** 亦线性相关**,**则有不全为 **0** 的数**,**

λ**1 ,** λ**2 ,**L**,** λ***m*** 使 λ**1*a*1** + L + λ***m am***

同时成立**.**

= **0,** λ**1*b*1** + L + λ***m bm*** = **0**

解 **(1)** 设 ***a*1**

= ***e*1**

= **(1,0,0,**L**,0)**

***a*2** = ***a*3**

= L = ***am*** = **0**

满足 ***a*1 , *a*2 ,**L**, *am*** 线性相关**,**但 ***a*1** 不能由 ***a*2 ,**L**, *am* ,** 线性表示**. (2)** 有不全为零的数 λ**1 ,** λ**2 ,**L**,** λ***m*** 使

原式可化为

λ**1*a*1** + L + λ***m am*** + λ**1*b*1** + L + λ***m bm*** = **0**

λ**1 (*a*1** + ***b*1 )** + L + λ***m* (*am***

+ ***bm* )** = **0**

取 ***a*1**

= ***e*1**

= −***b*1 , *a*2**

= ***e*2**

= −***b*2 ,**L**, *am***

= ***em***

= −***bm***

其中 ***e*1 ,**L**, *em*** 为单位向量**,**则上式成立**,**而

***a*1 ,**L**, *am* , *b*1 ,**L**, *bm*** 均线性相关

**(3)** 由 λ**1*a*1** + L + λ***m am*** + λ**1*b*1** + L + λ***m bm*** = **0**

**(**仅当 λ**1**

= L = λ***m***

= **0 )**

⇒ ***a*1** + ***b*1 , *a*2** + ***b*2 ,**L**, *am***

+ ***bm*** 线性无关

取 ***a*1**

= ***a*2**

= L = ***am*** = **0**

取 ***b*1 ,**L**, *bm*** 为线性无关组

满足以上条件**,**但不能说是 ***a*1 , *a*2 ,**L**, *am*** 线性无关的**.**

**(4)**

***a*** = **(1,0)*T***

***a*** = **(2,0)*T***

***b*** = **(0,3)*T***

***b*** = **(0,4)*T***

λ**1*a*1** + λ**2 *a*2**

**1**

**2**

**1**

**2**

= **0** ⇒ λ**1**

= −**2**λ**2** ⎫

⎪

λ ***b*** λ ***b* 0** λ

**3** λ ⎬

⇒ λ**1**

= λ**2**

= **0** 与题设矛盾**.**

**1 1** +

**2 2** =

⇒ = −

**1 4**

**2** ⎪⎭

**4**．设 ***b*1** = ***a*1** + ***a*2 , *b*2** = ***a*2** + ***a*3 , *b*3** = ***a*3** + ***a*4 , *b*4** = ***a*4** + ***a*1 ,**证明向量组

***b*1 , *b*2 , *b*3 , *b*4** 线性相关**.**

证明 设有 ***x*1 , *x*2 , *x*3 , *x*4** 使得

***x*1*b*1** + ***x*2 *b*2** + ***x*3 *b*3** + ***x*4 *b*4** = **0** 则

***x*1 (*a*1** + ***a*2 )** + ***x*2 (*a*2** + ***a*3 )** + ***x*3 (*a*3** + ***a*4 )** + ***x*4 (*a*4** + ***a*1 )** = **0**

**( *x*1** + ***x*4 )*a*1** + **( *x*1** + ***x*2 )*a*2** + **( *x*2** + ***x*3 )*a*3** + **( *x*3** + ***x*4 )*a*4** = **0**

**(1)** 若 ***a*1 , *a*2 , *a*3 , *a*4** 线性相关**,**则存在不全为零的数 ***k*1 , *k*2 , *k*3 , *k*4 ,**

***k*1** = ***x*1** + ***x*4 ; *k*2** = ***x*1** + ***x*2 ; *k*3** = ***x*2** + ***x*3 ; *k*4** = ***x*3** + ***x*4 ;**

由 ***k*1 , *k*2 , *k*3 , *k*4** 不全为零**,**知 ***x*1 , *x*2 , *x*3 , *x*4** 不全为零**,**即 ***b*1 , *b*2 , *b*3 , *b*4** 线性相

关**.**

⎧ ***x*1** + ***x*4** = **0**

⎛ **1 0**

**0 1** ⎞⎛ ***x*1** ⎞

⎪ ⎜ ⎟⎜ ⎟

⎪ ***x*1** + ***x*2** = **0**

⎜ **1 1**

**0 0** ⎟⎜ ***x*2** ⎟

**(2)** 若 ***a*1 , *a*2 , *a*3 , *a*4** 线性无关**,**则 ⎨ ⇒ ⎜

⎟⎜ ⎟ = **0**

⎪ ***x*2** +

***x*3** = **0**

⎜ **0 1 1**

**0** ⎟⎜ ***x*3** ⎟

⎜ ⎟⎜ ⎟

**1 0 0 1**

**1 1 0 0**

⎪⎩ ***x*3** +

***x*4** = **0**

⎝ **0 0 1**

**1** ⎠⎝ ***x*4** ⎠

由

**0 1 1**

**0 0 1**

= **0** 知此齐次方程存在非零解

**0**

**1**

则 ***b*1 , *b*2 , *b*3 , *b*4** 线性相关**.**

综合得证**.**

**5**．设 ***b*1**

= ***a*1 , *b*2**

= ***a*1** + ***a*2 ,**L**, *br***

= ***a*1** + ***a*2** + L + ***ar* ,**且向量组

***a*1 , *a*2 ,**L**, *ar*** 线性无关**,**证明向量组 ***b*1 , *b*2 ,**L**, *br*** 线性无关**.**

证明 设 ***k*1*b*1** + ***k*2 *b*2** + L + ***kr br***

= **0** 则

**(*k*1** + L + ***k r* )*a*1** + **(*k*2** + L + ***kr* )*a*2** + L + **(*k p*** + L + ***k r* )*a p*** + L + ***kr ar*** = **0**

因向量组 ***a*1 , *a*2 ,**L**, *ar*** 线性无关**,**故

⎧***k*1** + ***k*2** + L + ***kr*** = **0**

⎛ **1** L L

**1**⎞⎛ ***k*1** ⎞

⎛ **0** ⎞

⎪ ⎜ ⎟⎜

⎟ ⎜ ⎟

⎪ ***k*2** + L + ***kr*** = **0**

⎜ **0 1**

L **1**⎟⎜ ***k*2** ⎟

⎜ **0** ⎟

⎨ ⇔ ⎜

⎪ LLLLLL ⎜ M

⎟⎜

L L ⎟⎜

M

⎟ = ⎜ ⎟

M ⎟ M

⎜ ⎟⎜

⎟ ⎜ ⎟

⎩⎪ ***kr*** = **0**

**1** L L **1**

**0 1** L **1**

⎝ **0** L **0**

**1**⎠⎝ ***kr*** ⎠

⎝ **0** ⎠

因为

M L L

**0** L **0**

= **1** ≠ **0** 故方程组只有零解

M

**1**

则 ***k*1**

= ***k*2**

= L = ***kr***

= **0** 所以 ***b*1 , *b*2 ,**L**, *br*** 线性无关

**6**．利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组**:**

⎛ **25**

⎜

**31 17**

**43** ⎞

⎟

⎛ **1 1 2 2 1** ⎞

⎜ ⎟

⎜ **75**

**94 53**

**132** ⎟

⎜ **0 2 1 5**

− **1**⎟

**(1)**

⎜ **75**

⎜

**94 54**

**134** ⎟ **; (2)** ⎜ **2 0**

⎟ ⎜

**3** − **1**

**3** ⎟ **.**

⎟

⎝ **25**

**32 20**

**48** ⎠

⎝ **1 1 0 4**

− **1**⎠

⎜

⎜ **75**

**94 53**

⎟

**132** ⎟

***r*2** − **3*r*1** ⎜

⎟

**1 2 3** ⎟

解 **(1)**

⎜ **75**

**94 54**

⎜ **0**

**134** ⎟ ***r***

**~**

− **3*r* 0**

**1 3 5** ⎟

⎜ ⎟ **3 1** ⎜ ⎟

− ***r***

⎜

***r*** − ***r***

**4**

**3**

**~**

⎝ **25 32 20**

⎛ **25 31 17**

⎜

**48** ⎠ ***r*4**

**43** ⎞

⎟

**1** ⎝ **0**

**1 3 5** ⎠

⎜ **0 1**

⎜

**2 3** ⎟

⎟

***r*3** − ***r*2** ⎜ **0**

**0 1 3** ⎟

⎝ **0 0 0 0** ⎠

所以第 **1**、**2**、**3** 列构成一个最大无关组**.**

⎛ **1 1 2 2 1** ⎞

⎜ ⎟

⎛ **1 1**

⎜

**2 2 1** ⎞

⎟

⎜ **0 2 1 5**

− **1**⎟ ***r*3** − **2*r*1** ⎜ **0 2 1**

**5** − **1** ⎟

**(2)** ⎜ **2 0**

⎜

**3** − **1**

⎟ **~** ⎜

**3** ⎟ ***r*4** − ***r*1** ⎜ **0** − **2**

− **1** − **5 1** ⎟

⎟

⎝ **1 1 0 4**

− **1**⎠

⎝ **0 0**

− **2 2**

− **2** ⎠

⎛ **1 1**

⎜

**2 2 1** ⎞

⎟

***r*3** + ***r*2** ⎜ **0 2 1**

**~** ⎜

**5** − **1** ⎟

⎟ ，

***r*3** ↔ ***r*4** ⎜ **0 0**

− **2 2**

− **2** ⎟

⎝ **0 0**

**0 0 0** ⎠

所以第 **1**、**2**、**3** 列构成一个最大无关组．

**7**．求下列向量组的秩**,**并求一个最大无关组**:**

⎛ **1** ⎞

⎛ **9** ⎞

⎛ − **2** ⎞

⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟

⎜ **2** ⎟

⎜ **100** ⎟

⎜ − **4** ⎟

**(1)**

***a*1** = ⎜ − **1**⎟ **, *a*2**

= ⎜ **10** ⎟ **, *a*3** = ⎜

**2** ⎟ **;**

⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟

⎝ **4** ⎠

***T***

⎝ **4** ⎠

***T***

⎝ − **8** ⎠

***T***

**(2)**

***a*1** = **(1,2,1,3) , *a*2**

= **(4,**−**1,**−**5,**−**6) , *a*3**

= **(1,**−**3,**−**4,**−**7) .**

解 **(1)**

− **2*a*1** = ***a*3** ⇒ ***a*1 , *a*3** 线性相关**.**

⎛ ***a T*** ⎞ ⎛ **1**

**2** − **1 4** ⎞

⎛ **1 2** − **1 4** ⎞

⎜ **1** ⎟ ⎜

⎟ ⎜ ⎟

由 ⎜ ***a*2**

***T***

⎟ = ⎜ **9**

**100 10**

**4** ⎟ **~** ⎜ **0 82 19**

− **32** ⎟

⎜ ***T*** ⎟ ⎜

⎟ ⎜ ⎟

⎝ ***a*3** ⎠

⎝ − **2** − **4**

**2** − **8** ⎠

⎝ **0 0 0 0** ⎠

秩为 **2,**一组最大线性无关组为 ***a*1 , *a*2 .**

⎛ ***a T*** ⎞ ⎛ **1 2 1**

**3** ⎞ ⎛ **1 2 1 3** ⎞

⎜ **1** ⎟ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟

**(2)**

***T***

⎜ ***a*2**

⎟ = ⎜ **4**

− **1** − **5**

− **6** ⎟ **~** ⎜ **0**

− **9** − **9**

− **18** ⎟

⎜ ***T*** ⎟ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟

⎝ ***a*3** ⎠

⎝ **1** − **3**

⎛ **1 2**

⎜

− **4** − **7** ⎠ ⎝ **0**

**1 3** ⎞

⎟

− **5** − **5**

− **10** ⎠

**~** ⎜ **0**

⎜

− **9** − **9**

− **18** ⎟

⎟

⎝ **0 0 0 0** ⎠

秩为 **2,**最大线性无关组为 ***aT* , *aT* .**

**1 2**

**8**．设 ***a*1 , *a*2 ,**L **, *an*** 是一组 ***n*** 维向量**,**已知 ***n*** 维单位坐标向量 ***e*1 , *e*2 ,**L**, *en*** 能

由它们线性表示**,**证明 ***a*1 , *a*2 ,**L **, *an*** 线性无关**.**

证明 ***n*** 维单位向量 ***e*1 , *e*2 ,**L **, *en*** 线性无关

不妨设**:**

***e*1** = ***k*11 *a*1** + ***k*12 *a*2** + L + ***k*1*n an***

***e*2** = ***k*21 *a*1** + ***k*22 *a*2** + L + ***k*2 *n an***

LLLLLLLLLLLL

***en*** = ***kn*1*a*1** + ***kn* 2 *a*2** + L + ***knn an***

⎛ ***eT*** ⎞ ⎛ ***k***

***k*** L ***k***

⎞⎛ ***aT*** ⎞

⎜ **1** ⎟

⎜ **11 12**

**1*n*** ⎟⎜ **1** ⎟

⎜ ***eT*** ⎟

**2**

⎜ ***k*21**

***k*22**

L ***k*2 *n***

⎟⎜ ***aT*** ⎟

所以 ⎜

**2**

⎟ = ⎜

⎟⎜ ⎟

⎜ M ⎟ ⎜ L

L L L ⎟⎜ M ⎟

⎜ ***T*** ⎟ ⎜

⎟⎜ ***T*** ⎟

⎝ ***en*** ⎠

⎝ ***kn*1**

***kn* 2**

L ***knn*** ⎠⎝ ***an*** ⎠

两边取行列式，得

***T T T T***

***e*1 *k*11**

**2** = ***k*21**

***e***

***T***

M L

***n kn*1**

***e***

***T***

***k*12**

***k*22**

L

***kn* 2**

L ***k*1*n a*1 *e*1**

L ***k*2 *n* 2** 由 ***e*2**

***a***

***T***

***T***

L L M M

L ***knn n n***

***a***

***e***

***T***

***T***

***a*1**

***T***

***a***

≠ **0** ⇒ **2** ≠ **0**

M

***T***

***a***

***n***

即 ***n*** 维向量组 ***a*1 , *a*2 ,**L **, *an*** 所构成矩阵的秩为 ***n***

故 ***a*1 , *a*2 ,**L **, *an*** 线性无关**.**

**9**．设 ***a*1 , *a*2 ,**L **, *an*** 是一组 ***n*** 维向量**,**证明它们线性无关的充分必要条件 是：任一 ***n*** 维向量都可由它们线性表示**.**

证明 设 ε **1 ,** ε **2 ,**L **,** ε ***n*** 为一组 ***n*** 维单位向量，对于任意 ***n*** 维向量

***T***

***a*** = **(*k*1 , *k*2 ,**L **, *kn* )**

则有 ***a*** = ε **1 *k*1** + ε **2 *k*2** + L + ε ***n kn*** 即任一 ***n*** 维向量都

可由单位向量线性表示**.**

必要性

⇒ ***a*1 , *a*2 ,**L **, *an*** 线性无关，且 ***a*1 , *a*2 ,**L **, *an*** 能由单位向量线性表示，即

α**1** = ***k*11**ε **1** + ***k*12**ε **2** + L + ***k*1*n***ε ***n***

α **2** = ***k*21**ε **1** + ***k*22**ε **2** + L + ***k*2 *n***ε ***n***

LLLLLLLLLLLL

α ***n*** = ***kn*1**ε **1** + ***kn* 2**ε **2** + L + ***knn***ε ***n***

⎛ ***aT*** ⎞ ⎛ ***k***

***k*** L ***k***

⎞⎛ ε ***T*** ⎞

⎜ **1** ⎟

⎜ **11 12**

**1*n*** ⎟⎜ **1** ⎟

⎜ ***aT*** ⎟

⎜ ***k*21**

***k*22**

L ***k*2 *n***

⎟⎜ ε ***T*** ⎟

故 ⎜ **2**

⎟ = ⎜

**2**

⎟⎜ ⎟

⎜ M ⎟ ⎜ L

L L L ⎟⎜ M ⎟

⎜ ***T*** ⎟ ⎜

⎟⎜ ***T*** ⎟

⎝ ***an*** ⎠

⎝ ***kn*1**

***kn* 2**

L ***knn*** ⎠⎝ ε ***n*** ⎠

两边取行列式，得

***T***

***a***

***k***

**1 11**

***T***

***a***

***k***

**2** = **21**

***k*12**

***k*22**

L ***k*1*n* 1**

L ***k*2 *n* 2**

ε

ε

***T***

***T***

M L

***n kn*1**

***a***

***T***

L

***kn* 2**

L L M

L ***knn n***

ε

***T***

***T***

***a***

**1**

***T***

***a***

由 **2** ≠ **0** ⇒

***k*11**

***k*21**

***k*12**

***k*22**

L ***k*1*n***

L ***k*2 *n*** ≠ **0**

M

***T***

***a***

***n***

⎛ ***k*11**

⎜

L

***kn*1**

***k*12**

L

***kn* 2**

L

L L

L ***knn***

***k*1*n*** ⎞

⎟

⎜ ***k*21**

令 ***A*** =

***n***×***n*** ⎜

⎜ L

⎜

⎝ ***kn*1**

***k*22**

L

***kn* 2**

L ***k*2 *n*** ⎟

⎟ 则

L L ⎟

⎟

***k***

L ***nn*** ⎠

⎛ ***aT*** ⎞

⎛ ε ***T*** ⎞

⎛ ***a T*** ⎞

⎛ ε ***T*** ⎞

⎜ **1** ⎟

⎜ **1** ⎟

⎜ **1** ⎟

⎜ **1** ⎟

⎜ ***aT*** ⎟

⎜ ε ***T*** ⎟

⎜ ***a T*** ⎟

⎜ ε ***T*** ⎟

由 ⎜ **2** ⎟ = ***A***⎜

**2** ⎟ ⇒

***A***−**1** ⎜

**2** ⎟ = ⎜ **2** ⎟

⎜ M ⎟

⎜ M ⎟

⎜ M ⎟

⎜ M ⎟

⎜ ***T*** ⎟

⎜ ***T*** ⎟

⎜ ***T*** ⎟

⎜ ***T*** ⎟

⎝ ***an*** ⎠

⎝ ε ***n*** ⎠

⎝ ***an*** ⎠

⎝ ε ***n*** ⎠

即 ε **1 ,** ε **2 ,**L **,** ε ***n*** 都能由 ***a*1 , *a*2 ,**L **, *an*** 线性表示，因为任一 ***n*** 维向量能由单

位向量线性表示，故任一 ***n*** 维向量都可以由 ***a*1 , *a*2 ,**L **, *an*** 线性表示**.**

充分性

⇐ 已知任一 ***n*** 维向量都可由 ***a*1 , *a*2 ,**L **, *an*** 线性表示，则单位向量组：

ε **1 ,** ε **2 ,**L **,** ε ***n*** 可由 ***a*1 , *a*2 ,**L **, *an*** 线性表示，由 **8** 题知 ***a*1 , *a*2 ,**L **, *an*** 线性无关**.**

**10**．设向量组 ***A* : *a*1 , *a*2 ,**L **, *as*** 的秩为 ***r*1 ,**向量组 ***B* : *b*1 , *b*2 ,**L **, *bt*** 的秩 ***r*2**

向量组 ***C* :**

***a*1 , *a*2 ,**L **, *a s* , *b*1 , *b*2 ,**L **, *br*** 的秩 ***r*3 ,**证明

**max{*r*1 , *r*2 }** ≤ ***r*3**

≤ ***r*1** + ***r*2**

证明 设 ***A*, *B*, *C*** 的最大线性无关组分别为 ***A***′**, *B***′**, *C*** ′ **,**含有的向量个数

**(**秩**)**分别为 ***r*1 , *r*2 , *r*2 ,**则 ***A*, *B*, *C*** 分别与 ***A***′**, *B***′**, *C*** ′ 等价**,**易知 ***A*, *B*** 均可由 ***C***

线性表示**,**则秩**( *C* )** ≥ 秩**( *A* ),**秩**( *C* )** ≥ 秩**( *B* )**，即 **max{*r*1 , *r*2 }** ≤ ***r*3**

设 ***A***′ 与 ***B***′ 中的向量共同构成向量组 ***D* ,**则 ***A*, *B*** 均可由 ***D*** 线性表

示**,**

即 ***C*** 可由 ***D*** 线性表示**,**从而 ***C*** ′ 可由 ***D*** 线性表示，所以秩**( *C*** ′ **)** ≥ 秩**( *D* ),**

***D*** 为 ***r*1** + ***r*2** 阶矩阵，所以秩**( *D* )** ≤ ***r*1** + ***r*2** 即 ***r*3**

**11.**证明 ***R***(***A*** + ***B*** ) ≤ ***R***(***A***) + ***R***(***B*** )**.**

≤ ***r*1** + ***r*2 .**

证明**:**设 ***A*** = **(*a* , *a***

**,**L **, *a* )*T***

***B*** = **(*b* , *b***

**,**L **, *b* )*T***

**1 2 *n***

**1 2 *n***

且 ***A*, *B*** 行向量组的最大无关组分别为α ***T* ,**α ***T* ,**L **,**α ***T***

β ***T* ,** β ***T* ,** L **,** β ***T***

显然**,**存在矩阵 ***A***′**, *B***′ **,**使得

**1 2 *r* 1 2 *s***

⎛ ***aT*** ⎞

⎛α ***T*** ⎞

⎛ ***bT*** ⎞

⎛ β ***T*** ⎞

⎜ **1** ⎟

⎜ **1** ⎟ ⎜ **1** ⎟

⎜ **1** ⎟

⎜ ***aT*** ⎟

⎜α ***T*** ⎟

⎜ ***bT*** ⎟

⎜ β ***T*** ⎟

⎜ **2** ⎟ =

***A***′⎜

**2** ⎟ **,** ⎜

**2** ⎟ = ***B***′⎜ **2** ⎟

⎜ M ⎟

⎜ M ⎟ ⎜ M ⎟

⎜ M ⎟

⎜ ***T*** ⎟

⎜ ***T*** ⎟ ⎜ ***T*** ⎟

⎜ ***T*** ⎟

⎝ ***an*** ⎠

⎝α ***s*** ⎠

⎝ ***bn*** ⎠

⎝ β ***s*** ⎠

⎛ ***a T***

+ ***bT*** ⎞

⎛α ***T*** ⎞

⎛ β ***T*** ⎞

⎜ **1 1** ⎟

⎜ **1** ⎟

⎜ **1** ⎟

⎜ ***a T***

+ ***bT*** ⎟

⎜α ***T*** ⎟

⎜ β ***T*** ⎟

∴ ***A*** + ***B*** = ⎜ **2**

**2** ⎟ =

***A***′⎜

**2** ⎟ + ***B***′⎜ **2** ⎟

⎜ M ⎟

⎜ M ⎟

⎜ M ⎟

⎜ ***T T*** ⎟

⎜ ***T*** ⎟

⎜ ***T*** ⎟

⎝ ***an***

+ ***bn*** ⎠

⎝α ***s*** ⎠

⎝ β ***s*** ⎠

因此 ***R***(***A*** + ***B*** ) ≤ ***R***(***A***) + ***R***(***B*** )

**12**．设向量组 ***B* : *b*1 ,**L**, *br*** 能由向量组 ***A* : *a*1 ,**L**, *a s*** 线性表示为

**(*b*1 ,**L **, *br* )** = **(*a*1 ,**L **, *as* )*K*** ，

其中 ***K*** 为 ***s*** × ***r*** 矩阵，且 ***A*** 组线性无关。证明 ***B*** 组线性无关的充分必要

条

件是矩阵 ***K*** 的秩 ***R*( *K* )** = ***r* .**

证明 ⇒ 若 ***B*** 组线性无关

令 ***B*** = **(*b*1 ,**L **, *br* )**

***A*** = **(*a*1 ,**L **, *as* )** 则有 ***B*** = ***AK***

由定理知 ***R*( *B*)** = ***R*( *AK* )** ≤ **min{ *R*( *A*), *R*( *K* )}** ≤ ***R*( *K* )**

由 ***B*** 组**: *b*1 , *b*2 ,**L**, *br*** 线性无关知 ***R*( *B*)** = ***r*** ，故 ***R*( *K* )** ≥ ***r* .**

又知 ***K*** 为 ***r*** × ***s*** 阶矩阵则 ***R*( *K* )** ≤ **min{*r* , *s*}**

由于向量组 ***B* : *b*1 , *b*2 ,**L**, *br*** 能由向量组 ***A* : *a*1 , *a*2 ,**L**, *as*** 线性表示 **,** 则

***r*** ≤ ***s***

∴ **min{*r* , *s*}** = ***r***

综上所述知 ***r*** ≤ ***R*( *K* )** ≤ ***r*** 即 ***R*( *K* )** = ***r*** ．

⇐ 若 ***R*(*k* )** = ***r***

令 ***x*1*b*1** + ***x*2 *b*2** + L + ***xr br***

= **0 ,**其中 ***xi*** 为实数 ***i*** = **1,2,**L**, *r***

⎛ ***x*1** ⎞

⎜ ⎟

则有 **(*b*1 , *b*2 ,**L**, *br* )**⎜

⎜

M ⎟ = **0**

⎟

⎝ ***xr*** ⎠

⎛ ***x*1** ⎞

⎜ ⎟

又 **(*b*1 ,**L **, *br* )** = **(*a*1 ,**L **, *as* )*K* ,**则 **(*a*1 ,**L **, *as* )*K*** ⎜

⎜

M ⎟ = **0**

⎟

⎛ ***x*1** ⎞

⎜ ⎟

⎝ ***xr*** ⎠

⎜ ***x*2** ⎟

由于 ***a*1 , *a*2 ,**L**, *as*** 线性无关**,**所以 ***K*** ⋅ ⎜

⎜

⎜

⎟ = **0**

M ⎟

⎟

⎧***k*11 *x*1** + ***k*21 *x*2** + L + ***kr* 1 *xr***

⎪

⎝ ***xr*** ⎠

= **0**

⎪ **12 *x*1**

***k***

+ ***k*22 *x*2**

+ L + ***kr* 2 *xr*** = **0**

⎪ LLLLLLLLLLLL

即

⎨

（**1**）

⎪***k*1*r x*1** + ***k*2 *r x*2** + L + ***krr xr*** = **0**

⎪ LLLLLLLLLLLL

⎪

⎩ ***k*1 *s x*1** + ***k*2 *s x*2** + L + ***krs xr*** = **0**

由于 ***R*( *K* )** = ***r*** 则**(1)**式等价于下列方程组**:**

⎧***k*11 *x*1** + ***k*21 *x*2** + L + ***kr* 1 *xr*** = **0**

⎪

⎪***k*12 *x*1** + ***k*22 *x*2** + L + ***kr* 2 *xr*** = **0**

⎨

⎪ LLLLLLLLLLLL

⎪⎩***k*1*r x*1** + ***k*2 *r x*2** + L + ***krr xr*** = **0**

***k*11**

***k***

由于 **12**

M

***k*1*r***

***k*21**

***k*22**

M

***k*2 *r***

L ***kr* 1**

L ***kr* 2** ≠ **0**

M

L ***krr***

所以方程组只有零解 ***x*1** = ***x*2**

证毕**.**

**13**．设

***T***

= L = ***xr***

= **0 .**所以 ***b*1 , *b*2 ,**L**, *br*** 线性无关**,**

***V*1** = **{ *x*** = **( *x*1 , *x*2 ,**L **, *xn* )**

***V*2** = **{ *x*** = **( *x*1 , *x*2 ,**L **, *xn* )**

***T***

***x*1 ,**L **, *xn*** ∈ ***R***满足***x*1** + ***x*2** + L + ***xn***

***x*1 ,**L **, *xn*** ∈ ***R***满足***x*1** + ***x*2** + L + ***xn***

= **0}**

= **1}**

问***V*1 ,*V*2** 是不是向量空间？为什么？

证明 集合***V*** 成为向量空间只需满足条件： 若α ∈ ***V* ,** β ∈ ***V*** ，则α + β ∈***V***

若α ∈ ***V* ,** λ ∈ ***R*** ，则 λα ∈ ***V V*1** 是向量空间，因为：

α = **(**α**1 ,**α **2 ,**L**,**α ***n* )**

***T***

***T***

α**1** + α **2** + L + α ***n*** = **0**

β = **(** β**1 ,** β **2 ,**L**,** β ***n* )**

β**1** + β **2** + L + β ***n*** = **0**

***T***

α + β

= **(**α**1** + β**1 ,**α **2** + β **2 ,**L**,**α ***n*** + β ***n* )**

且 **(**α**1** + β**1 )** + **(**α **2** + β **2 )** + L + **(**α ***n*** + β ***n* )**

= **(** β**1** + β **2** + L + β ***n* )** + **(**α**1** + α **2** + L + α ***n* )** = **0**

故α + β ∈***V*1**

λ ∈ ***R*,** λα

= **(**α**1 ,**α **2 ,**L **,**α ***n* )**

λα **1** + λα **2** + L + λα ***n*** = λ **(**α**1** + α **2** + L + α ***n* )** = λ ⋅ **0** = **0** 故 λα ∈ ***V*1**

***V*2** 不是向量空间，因为：

**(**α**1** + β**1 )** + **(**α **2** + β **2 )** + L + **(**α ***n*** + β ***n* )**

= **(** β**1** + β **2** + L + β ***n* )** + **(**α**1** + α **2** + L + α ***n* )** = **1** + **1** = **2** 故α + β ∉***V*2**

λ ∈ ***R*,** λα

= **(**λα**1 ,** λα **2 ,**L **,** λα ***n* )**

λα **1** + λα **2** + L + λα ***n*** = λ **(**α**1** + α **2** + L + α ***n* )** = λ ⋅ **1** = λ

故当 λ

**2**

**3**

≠ **1** 时， λα ∉ ***V*2**

**14**．试证**:**由 ***a*1**

就

是 ***R* 3 .**

= **(0,1,1)*T* , *a***

= **(1,0,1)*T* , *a***

= **(1,1,0)*T*** 所生成的向量空间

证明 设 ***A*** = **(*a*1 , *a*2 , *a*3 )**

**0**

***A*** = ***a*1 , *a*2 , *a*3 1**

**1**

**1 1 1 1**

**0 1** = **(**−**1)**−**1 1 0**

**1 0 0 1**

**0**

**1** = −**2** ≠ **0**

**1**

于是 ***R*( *A*)** = **3** 故线性无关**.**由于 ***a*1 , *a*2 , *a*3** 均为三维**,**且秩为 **3,**

所以 ***a*1 , *a*2 , *a*3** 为此三维空间的一组基**,**故由 ***a*1 , *a*2 , *a*3** 所生成的向量空间

就是 ***R* 3 .**

**15**．由 ***a*1**

= **(1,1,0,0)*T***

***T***

**, *a*2**

= **(1,0,1,1)*T***

***T***

**,** 所生成的向量空间记作***V*1 ,**由

***b*1** = **(2,**−**1,3,3)**

***V*1** = ***V*2 .**

**, *a*2**

= **(0,1,**−**1,**−**1)**

**,** 所生成的向量空间记作***V*2 ,**试证

证明 设***V*1**

**1**

**1**

= {***x*** = ***k a***

+ ***k*2 *a*2**

***k*1 , *k*1**

∈ ***R***}

***V*** = {***x*** = λ β

**2**

**1**

**1**

+ λ**2** β **2**

λ**1 ,** λ**1**

∈ ***R***}

任取***V*1** 中一向量**,**可写成 ***k*1*a*1** + ***k*2 *a*2 ,** 要证 ***k*1*a*1** + ***k*2 *a*2** ∈***V*2 ,**从而得***V*1** ⊆ ***V*2** 由 ***k*1*a*1** + ***k*2 *a*2** = λ**1** β**1** + λ**2** β **2** 得

⎧***k*1** + ***k*2** = **2**λ**1**

⎪

⎪***k*1** = λ**2** − λ**1**

⎨

⎪***k*2** = **3**λ**1** − λ**2**

⎪⎩***k*2** = **3**λ**1** − λ**2**

⎧**2**λ**1** = ***k*1** + ***k*2**

⇔

⎨

⎩− λ**1** + λ**2** = ***k*1**

上式中**,**把 ***k*1 , *k*2** 看成已知数**,**把 λ**1 ,** λ**2** 看成未知数

**2**

***D*1** = − **1**

**0**

= **2** ≠ **0**

**1**

⇒ λ**1 ,** λ**2** 有唯一解

∴***V*1** ⊆ ***V*2**

同理可证**:**

***V*2** ⊆ ***V*1**

**1**

**(**Q ***D*2** = **1**

**1**

≠ **0 )**

**0**

故***V*1**

= ***V*2**

**16**．验证 ***a*1**

= **(1,**−**1,0)*T* , *a***

= **(2,1,3)*T* , *a***

= **(3,1,2)*T*** 为 ***R* 3** 的一个基**,**并把

***v*** = **(5,0,7)*T* , *v***

**2**

**3**

**1**

**2**

= **(**−**9,**−**8,**−**13)*T*** 用这个基线性表示**.**

解 由于 ***a*1 , *a*2 , *a*3**

**1 2**

= − **1 1**

**0 3**

**3**

**1** = −**6** ≠ **0**

**2**

即矩阵 **(*a*1 , *a*2 , *a*3 )** 的秩为 **3**

**3**

故 ***a*1 , *a*2 , *a*3** 线性无关，则为 ***R*** 的一个基**.**

设 ***v*1**

= ***k*1*a*1** + ***k*2 *a*2** + ***k*3 *a*3** ，则

⎧***k*1** + **2*k*2** + **3*k*3** = **5**

⎪

⎨− ***k*1** + ***k*2** + ***k*3** = **0**

⎪

⎧***k*1** = **2**

⎪

⇒ ***k***

⎨ **2** = **3**

⎪

⎩**3*k*2** + **2*k*3** = **7**

⎩***k*3**

= −**1**

故 ***v*1** = **2*a*1** + **3*a*2** − ***a*3**

设 ***v*2** = λ**1*a*1** + λ**2 *a*2** + λ**3 *a*3** ，则

⎧λ**1** + **2**λ**2** + **3**λ**3**

⎪

⎨− λ**1** + λ**2** + λ**3**

⎪

= −**9**

= −**8**

⎧***k*1**

⎪

⇒ ***k***

⎨ **2**

⎪

= **3**

= −**3**

⎩**3**λ**2** + **2**λ**3**

= −**13**

⎩***k*3**

= −**2**

故线性表示为

***v*2** = **3*a*1** − **3*a*2** − **2*a*3**

17．求下列齐次线性方程组的基础解系:

⎧ ***x*1** − **8 *x*2** + **10 *x*3** + **2 *x*4** = **0**

⎧**2 *x*1** − **3 *x*2** − **2 *x*3** + ***x*4** = **0**

(1) ⎪**2 *x***

⎨

**1**

⎪

+ **4 *x*2**

+ **5 *x*3**

− ***x*4** = **0**

(2) ⎪**3 *x***

⎪

⎨

**1**

+ **5 *x*2**

+ **4 *x*3**

− **2 *x*4** = **0**

⎩**3 *x*1** + **8 *x*2** + **6 *x*3** − **2 *x*4** = **0**

⎩**8 *x*1** + **7 *x*2** + **6 *x*3** − **3 *x*4** = **0**

(3) ***nx*1** + **(*n*** − **1) *x*2** + L **2 *xn***−**1** + ***xn***

= **0** .

⎛ **1** − **8 10 2** ⎞

⎛ **1 0 4 0** ⎞

⎜ ⎟ 初等行变换⎜

**3 1** ⎟

解 (1) ***A*** = ⎜ **2 4**

⎜

**5** − **1** ⎟

⎟

**~** ⎜ **0 1** − − ⎟

⎜ **4 4** ⎟

⎝ **3 8**

**6**

⎧ ***x*1**

− **2** ⎠

= −**4 *x*3**

⎝ **0 0 0 0** ⎠

所以原方程组等价于 ⎪ **3 1**

⎨

⎪⎩ ***x*2**

= ***x*3** + ***x*4**

**4 4**

取 ***x*3**

= **1, *x*4**

= −**3** 得 ***x*1**

= −**4, *x*2** = **0**

取 ***x*3**

= **0, *x*4**

= **4** 得 ***x*1**

= **0, *x*2** = **1**

⎛ − **4** ⎞

⎛ **0** ⎞

⎜ ⎟ ⎜ ⎟

因此基础解系为

⎜

ξ**1** ⎜

=

**0** ⎟

**1** ⎟**,** ξ**2**

= ⎜ **1** ⎟

⎜ **0** ⎟

⎜ ⎟ ⎜ ⎟

⎝ − **3** ⎠

⎝ **4** ⎠

⎛

⎜ **1 0**

**2 1** ⎞

−

⎟

⎛ **2** − **3** − **2 1** ⎞

⎜ **19**

**19** ⎟

⎜ ⎟ 初等行变换⎜

**14** =**7** ⎟

(2)

***A*** = ⎜ **3 5**

⎝ **7**

**8**

⎜

**4** − **2** ⎟

**6** − **3** ⎟

⎠

**~** ⎜ **0 1 19**

⎜ **0 0 0**

⎜

⎝

−

**19** ⎟

**0** ⎟

⎟

⎠

⎧

***x***

⎪ **1**

所以原方程组等价于 ⎨

= − **2 *x***

**19 3**

+ **1 *x***

**19 4**

⎪ = − **14 *x***

⎩

***x***

**2 19 3**

+ **7 *x***

**19 4**

取 ***x*3**

= **1, *x*4**

= **2** 得 ***x*1**

= **0, *x*2** = **0**

取 ***x*3**

= **0, *x*4**

= **19** 得 ***x*1**

= **1, *x*2**

⎛ **0** ⎞

= **7**

⎛ **1** ⎞

⎜ ⎟ ⎜ ⎟

⎜ **0** ⎟

⎜ **7** ⎟

因此基础解系为

ξ**1** = ⎜ **1** ⎟**,**ξ**2** = ⎜ **0** ⎟

⎜ ⎟ ⎜ ⎟

(3)原方程组即为

⎝ **2** ⎠

⎝ **19** ⎠

***xn*** = −***nx*1** − **(*n*** − **1) *x*2** − L − **2 *xn***−**1**

取 ***x*1** = **1, *x*2** = ***x*3** = L = ***xn***−**1** = **0** 得 ***xn***

= −***n***

取 ***x*2**

= **1, *x*1** = ***x*3**

= ***x*4**

= L =

***xn***−**1**

= **0** 得 ***xn***

= −**(*n*** − **1)** = −***n*** + **1**

LL

取 ***xn***−**1**

= **1, *x*1** = ***x*2**

= L =

***xn***−**2**

= **0** 得 ***xn***

= −**2**

⎛ **1**

⎜

⎜ **0**

所以基础解系为 **(**ξ **,**ξ **, ,**ξ **)** = ⎜

L

M

**1 2 *n***−**1** ⎜

⎜ **0**

⎜

**0** L **0** ⎞

⎟

**1** L **0** ⎟

M M ⎟

⎟

**0** L **1** ⎟

⎟

⎝ − ***n***

− ***n*** + **1** L

− **2** ⎠

18．设 ***A*** = ⎛ **2**

⎜

⎝ **9**

− **2 1**

− **5 2**

**3** ⎞

⎟ ,求一个 **4** × **2** 矩阵 ***B*** ,使 ***AB*** = **0** ,且

**8** ⎠

***R*( *B*)** = **2** .

解 由于 ***R*( *B*)** = **2** ,所以可设 ***B***

⎛ **1**

⎜

= ⎜ **0**

⎜ ***x***

**1**

⎜

⎜

**0** ⎞

⎟

**1** ⎟

***x*** ⎟ 则由

**2** ⎟

⎟

⎛ **2** − **2 1**

⎛ **1**

⎜

**3** ⎞⎜ **0**

**0** ⎞

⎟

**1** ⎟ ⎛ **0**

⎝ ***x* 3**

**0** ⎞

***x* 4** ⎠

***AB*** = ⎜

⎟⎜

⎝ ***x*3**

⎜

⎟ = ⎜

⎟

***x***

**4** ⎠

⎟ 可得

⎛ **1 0**

**3 0** ⎞⎛ ***x*1** ⎞

⎛ − **2** ⎞

⎜ ⎟⎜ ⎟ ⎜ ⎟

⎜ **0 1**

**0 3** ⎟⎜ ***x*2** ⎟

⎜ **2** ⎟

⎜ **2 0**

**8 0** ⎟⎜ ***x***

⎟ = ⎜ − **9** ⎟ **,**解此非齐次线性方程组可得唯一解

⎜ ⎟⎜ ⎟ ⎜ ⎟

⎝ **0 2 0**

**8** ⎠⎝ ***x*4** ⎠

⎝ **5** ⎠

⎛ **11** ⎞

⎜ ⎟

⎛ **1 0** ⎞

⎛ ***x*1** ⎞

⎜ ⎟

⎜ **2** ⎟

⎜ =**1** ⎟

⎜ ⎟

⎜ **0 1** ⎟

⎜ ***x*2** ⎟

⎜ **2** ⎟

⎜ **1**=**1**

=**1** ⎟

⎜ ***x*** ⎟ = ⎜

**5** ⎟ ， 故所求矩阵 ***B*** = ⎜ **2 2** ⎟ ．

⎜ **3** ⎟

⎜ ⎟

⎜ − **2** ⎟

⎜ **5 1** ⎟

⎝ ***x*4** ⎠

⎜ ⎟

⎜ =**1** ⎟

⎝ **2** ⎠

⎜ − ⎟

⎝ **2 2** ⎠

**19**．求一个齐次线性方程组**,**使它的基础解系为

ξ = **(0,1,2,3)*T* ,** ξ

**1**

**1**

= **(3,2,1,0)*T* .**

解 显然原方程组的通解为

⎛ ***x* 1** ⎞

⎛ **0** ⎞

⎛ **3** ⎞

⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟

⎜ ***x* 2** ⎟

⎜ **1** ⎟

⎜ **2** ⎟

⎜ ***x*** ⎟ =

⎜ **3** ⎟

***k* 1** ⎜ **2** ⎟ +

***k* 2** ⎜ **1** ⎟ **,( *k*1 , *k*2** ∈ ***R* )**

⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟

⎝ ***x* 4** ⎠

⎧ ***x*1**

⎪

= **3*k*2**

⎝ **3** ⎠

⎝ **0** ⎠

⎪ ***x*2**

即

⎨

⎪ ***x*3**

⎪⎩ ***x*4**

= ***k*1** + **2*k*2** 消去 ***k***

= **2*k*1** + ***k*2**

**1**

= **3*k*1**

**, *k*2** 得

⎧**2 *x*1** − **3 *x*2** + ***x*4**

⎨

⎩ ***x*1** − **3 *x*3** + **2 *x*4**

= **0**

此即所求的齐次线性方程组**.**

= **0**

20．设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知η**1 ,**η**2 ,**η**3** 是它

的三个解向量．且

⎛ **2** ⎞

⎛ **1** ⎞

⎜ ⎟ ⎜ ⎟

η = ⎜ **3** ⎟ ，η + η

**1** ⎜ **4** ⎟ **2 3**

= ⎜ **2** ⎟

⎜ **3** ⎟

⎜ ⎟ ⎜ ⎟

⎝ **5** ⎠

求该方程组的通解．

⎝ **4** ⎠

解 由于矩阵的秩为 3，***n*** − ***r*** = **4** − **3** = **1** ，一维．故其对应的齐次线性 方程组的基础解系含有一个向量，且由于η**1 ,**η**2 ,**η**3** 均为方程组的解， 由

非齐次线性方程组解的结构性质得

⎛ **3** ⎞

⎜ ⎟

**2**η − **(**η + η **)** = **(**η − η **)** + **(**η − η **)** = ⎜ **4** ⎟ = 齐次解

**1 2 3 1 2 1 2** ⎜ **5** ⎟

**(**齐次解**)**

**(**齐次解**)** ⎜ ⎟

⎝ **6** ⎠

⎛ **3** ⎞

⎛ **2** ⎞

⎜ ⎟ ⎜ ⎟

⎜ **4** ⎟

⎜ **3** ⎟

为其基础解系向量，故此方程组的通解： ***x*** = ***k*** ⎜ **5** ⎟ + ⎜ **4** ⎟ ， **(*k*** ∈ ***R*)**

⎜ ⎟ ⎜ ⎟

⎝ **6** ⎠

⎝ **5** ⎠

21．设 ***A*, *B*** 都是 ***n*** 阶方阵，且 ***AB*** = **0** ，证明 ***R*( *A*)** + ***R*( *B*)** ≤ ***n*** ．

证明 设 ***A*** 的秩为 ***r*1** ，***B*** 的秩为 ***r*2** ，则由 ***AB*** = **0** 知，***B*** 的每一列向量

都是以 ***A*** 为系数矩阵的齐次线性方程组的解向量．

(1) 当 ***r*1**

= ***n*** 时,该齐次线性方程组只有零解,故此时 ***B*** = **0** ,

***r*1** = ***n*** ， ***r*2** = **0** ， ***r*1** + ***r*2**

= ***n*** 结论成立．

(2) 当 ***r*1** < ***n*** 时,该齐次方程组的基础解系中含有 ***n*** − ***r*1** 个向量,从而

***B***

的列向量组的秩 ≤ ***n*** − ***r*1** ,即 ***r*2**

综上, ***R*( *A*)** + ***R*( *B*)** ≤ ***n*** ．

≤ ***n*** − ***r*1** ,此时 ***r*2**

≤ ***n*** − ***r*1** ,结论成立。

**22**．设 ***n*** 阶矩阵 ***A*** 满足 ***A*2**

***R*( *A*)** + ***R*( *A*** − ***E* )** = ***n***

= ***A* , *E*** 为 ***n*** 阶单位矩阵**,**证明

**(**提示**:**利用题 **11** 及题 **21** 的结论**)**

证明 Q ***A*( *A*** − ***E* )** =

***A*2** − ***A*** =

***A*** − ***A*** = **0**

所以由 **21** 题所证可知 ***R*( *A*)** + ***R*( *A*** − ***E* )** ≤ ***n***

又 Q ***R*( *A*** − ***E* )** = ***R*( *E*** − ***A*)**

由 **11** 题所证可知

***R*( *A*)** + ***R*( *A*** − ***E* )** = ***R*( *A*)** + ***R*( *E*** − ***A*)** ≥ ***R*( *A*** + ***E*** − ***A*)** = ***R*( *E* )** = ***n***

由此 ***R*( *A*)** + ***R*( *A*** − ***E* )** = ***n*** ．

23．求下列非齐次方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解 系：

⎧ ***x*1** + ***x*2**

⎨

= **5,**

⎧ ***x*1** − **5 *x*2** + **2 *x*3** − **3 *x*4**

= **11,**

**(1)**

⎪ **2 *x*** +

⎪

**1**

***x*2** +

***x*3** + **2 *x*4**

= **1,**

(2) ⎪**5 *x***

⎪

⎨

**1**

+ **3 *x*2**

+ **6 *x*3**

− ***x*4**

= −**1,**

⎩**5 *x*1** + **3 *x*2** + **2 *x*3** + **2 *x*4** = **3;**

⎩**2 *x*1** + **4 *x*2** + **2 *x*3** + ***x*4**

= −**6.**

⎛ **1 1**

**0 0 5** ⎞

⎛ **1 0 1**

**0** − **8** ⎞

⎜ ⎟ 初等行变换⎜ ⎟

解 (1) ***B*** = ⎜ **2 1 1**

⎜

**2 1** ⎟

⎟

**~** ⎜ **0 1**

⎜

− **1 0**

**13** ⎟

⎟

⎝ **5 3**

**2 2 3** ⎠

⎝ **0 0 0 1 2** ⎠

⎛ − **8** ⎞

⎛ − **1**⎞

⎜ ⎟ ⎜ ⎟

⎜ **13** ⎟

⎜ **1** ⎟

∴η = ⎜

⎜

⎝

**0** ⎟**,** ξ

⎟

**2** ⎠

⎛ **1**

⎜ **1** ⎟

⎜ ⎟

=

⎝ **0** ⎠

− **5 2** − **3**

**11** ⎞

⎛ **1 0 9**

⎜

⎜ **7**

− **1 1** ⎞

⎟

**2** ⎟

⎜ ⎟ 初等行变换⎜

**1** =**1** ⎟

**(2)**

***B*** = ⎜ **5**

⎜

**2**

⎝

**3 6** − **1**

**4 2 1**

− **1** ⎟

− **6** ⎟

⎠

**~** ⎜ **0 1** − **7**

⎜ **0 0 0**

⎜

⎝

**2** − **2** ⎟

**0 0** ⎟

⎟

⎠

⎛ **1** ⎞

⎛ − **9** ⎞

⎛ **1** ⎞

⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟

∴η = ⎜ − **2** ⎟**,** ξ

= ⎜ **1** ⎟**,** ξ

= ⎜ − **1**⎟

⎜ **0** ⎟ **1**

⎜ ⎟

⎝ **0** ⎠

⎜ **7** ⎟ **2**

⎜ ⎟

⎝ **0** ⎠

⎜ **0** ⎟

⎜ ⎟

⎝ **2** ⎠

24．设η ∗ 是非齐次线性方程组 ***Ax*** = ***b*** 的一个解,ξ

**1**

次线性方程组的一个基础解系,证明:

∗

**,**L**,** ξ

***n***−***r***

是对应的齐

(1)η

∗

**,** ξ**1 ,**L **,** ξ***n***−***r*** 线性无关；

(2)

η ∗ **,**η ∗

+ ξ**1 ,**L**,**η

+ ξ***n***−***r*** 线性无关。

∗

证明 (1)反证法,假设η

**,** ξ**1 ,**L **,** ξ***n***−***r*** 线性相关,则存在着不全为 0 的数

***C*0 , *C*1 ,**L**, *Cn***−***r*** 使得下式成立:

∗

***C* 0**η

+ ***C*1**ξ**1** + L + ***C n***−***r***ξ***n***−***r*** = **0**

(1)

其中, ***C*0** ≠ **0** 否则,ξ**1 ,**L**,** ξ***n***−***r*** 线性相关,而与基础解系不是线性相关的

产生矛盾。

由于η ∗ 为特解，ξ

**1**

∗

**,**L**,** ξ

***n***−***r***

为基础解系，故得

∗

***A*(*C*0**η

+ ***C*1**ξ**1** + L + ***C n***−***r*** ξ***n***−***r* )** = ***C* 0 *A***η

∗

= ***C* 0 *b***

而由(1)式可得 ***A*(*C*0**η

+ ***C*1**ξ**1** + L + ***C n***−***r***ξ***n***−***r* )** = **0**

故 ***b*** = **0** ，而题中,该方程组为非齐次线性方程组,得 ***b*** ≠ **0**

∗

产生矛盾,假设不成立, 故η

**,** ξ**1 ,**L **,** ξ***n***−***r*** 线性无关.

(2)反证法,假使η ∗

**,**η ∗

+ ξ**1 ,**L**,**η

+ ξ***n***−***r*** 线性相关.

则存在着不全为零的数 ***C*0 , *C*1 ,**L**, *Cn***−***r*** 使得下式成立:

∗

***C* 0**η

∗

∗

+ ***C*1 (**η

+ ξ**1 )** + L + ***C n***−***r* (**η

∗

∗

+ ξ***n***−***r* )** = **0**

（**2**）

即 **(*C*0** + ***C*1** + L + ***C n***−***r* )**η

+ ***C*1**ξ**1** + L + ***C n***−***r***ξ***n***−***r*** = **0**

1) 若 ***C*0** + ***C*1** + L + ***C n***−***r***

= **0** ,由于ξ**1 ,**L**,** ξ***n***−***r*** 是线性无关的一组基础解

2) 系,故 ***C*0**

= ***C*1**

= L = ***C n***−***r***

= **0** ,由(2)式得 ***C*0** = **0** 此时

***C*0** = ***C*1**

= L = ***C n***−***r***

= **0** 与假设矛盾.

∗

3) 若 ***C*0** + ***C*1** + L + ***C n***−***r***

≠ **0** 由题(1)知, η

**,** ξ**1 ,**L **,** ξ***n***−***r*** 线性无关,故

***C*0** + ***C*1** + L + ***C n***−***r***

= ***C*1**

= ***C* 2**

= L = ***C n***−***r***

= **0** 与假设矛盾,

综上,假设不成立,原命题得证.

25.设η**1 ,**L **,**η***s*** 是非齐次线性方程组 ***Ax*** = ***b*** 的 ***s*** 个解，***k*1 ,**L **, *k s*** 为实数，

满足 ***k*1** + ***k*2** + L + ***k s***

= **1** .证明

***x*** = ***k*1**η**1** + ***k*2**η**2** + L + ***k s***η***s*** 也是它的解.

证明 由于η**1 ,**L **,**η***s*** 是非齐次线性方程组 ***Ax*** = ***b*** 的 ***s*** 个解.

故有 ***A***η***i*** = ***b***

**(*i*** = **1,**L **, *s*)**

而 ***A*(*k*1**η**1** + ***k*2**η**2** + L + ***k s***η***s* )** = ***k*1 *A***η**1** + ***k*2 *A***η**2** + L + ***k s A***η***s***

= ***b*(*k*1** + L + ***k s* )** = ***b***

即 ***Ax*** = ***b***

（ ***x*** = ***k*1**η**1** + ***k*2**η**2** + L + ***k s***η***s*** ）

从而 ***x*** 也是方程的解．

26．设非齐次线性方程组 ***Ax*** = ***b*** 的系数矩阵的秩为 ***r*** ，η**1 ,**L **,**η***n***−***r*** +**1** 是 它

的 ***n*** − ***r*** + **1** 个线性无关的解(由题 24 知它确有 ***n*** − ***r*** + **1** 个线性无关的 解)．试证它的任一解可表示为

***x*** = ***k*1**η**1** + ***k*2**η**2** + L + ***kn***−***r*** +**1**η***n***−***r*** +**1**

证明 设 ***x*** 为 ***Ax*** = ***b*** 的任一解．

（其中 ***k*1** + L + ***kn***−***r*** +**1**

= **1** ）.

由题设知：η**1 ,**η**2 ,**L **,**η***n***−***r*** +**1** 线性无关且均为 ***Ax*** = ***b*** 的解．

取ξ**1**

解．

= η**2** − η**1 ,** ξ**2**

= η**3** − η**1 ,**L **,** ξ***n***−***r***

= η***n***−***r*** +**1** − η**1** ，则它的均为 ***Ax*** = ***b*** 的

用反证法证：ξ**1 ,** ξ**2 ,**L **,** ξ***n***−***r*** 线性无关．

反设它们线性相关，则存在不全为零的数：

***l*1 , *l*2 ,**L **, *ln***−***r*** 使得 ***l*1**ξ**1** + ***l*2**ξ**2** + L + ***ln***−***r***ξ***n***−***r*** = **0**

即 ***l*1 (**η**2** − η**1 )** + ***l*2 (**η**3** − η**1 )** + L + ***ln***−***r* (**η***n***−***r*** +**1** − η**1 )** = **0**

亦即 − **(*l*1** + ***l*2** + L + ***ln***−***r* )**η**1** + ***l*1**η**2** + ***l*2**η**3** + L + ***ln***−***r***η***n***−***r*** +**1** = **0**

由η**1 ,**η**2 ,**L **,**η***n***−***r*** +**1** 线性无关知

− **(*l*1** + ***l*2** + L + ***ln***−***r* )** = ***l*1**

矛盾，故假设不对．

= ***l*2**

= L = ***ln***−***r*** = **0**

∴ξ**1 ,** ξ**2 ,**L **,** ξ***n***−***r*** 线性无关，为 ***Ax*** = ***b*** 的一组基．

由于 ***x*,**η**1** 均为 ***Ax*** = ***b*** 的解，所以 ***x*** − η**1** 为的 ***Ax*** = ***b*** 解 ⇒ ***x*** − η**1** 可由

ξ**1 ,** ξ**2 ,**L **,** ξ***n***−***r*** 线性表出．

***x*** − η**1**

= ***k*2**ξ**1** + ***k*3**ξ**2** + L + ***kn***−***r*** −**1**ξ***n***−***r***

= ***k*2 (**η**2** − η**1 )** + ***k*3 (**η**3** − η**1 )** + L + ***kn***−***r*** +**1 (**η***n***−***r*** +**1** − η**1 )**

***x*** = η**1 (1** − ***k*2** − ***k*3** − L − ***kn***−***r*** +**1 )** + ***k*2**η**2** + ***k*3**η**3** + L + ***kn***−***r*** +**1**η***n***−***r*** +**1** = **0**

令 ***k*1**

= **1** − ***k*2** − ***k*3** − L − ***kn***−***r*** +**1** 则 ***k*1** + ***k*2** + ***k*3** + L + ***kn***−***r*** +**1** = **1**

***x*** = ***k*1**η**1** + ***k*2**η**2** + L + ***kn***−***r*** +**1**η***n***−***r*** +**1** ,证毕．