求反函数不定积分的技巧

——读《高等数学的若干问题解释》有感

——Shared from 荆轲

/*知识储备*/

$f\left(f^{-1}(x)\right)=f^{-1}(f(x))=x;$

$arccos(sinx)=arcsin(cosx)=\frac{\pi}{2}-x;$

$cos(arcsinx)=sin(arccosx)=\sqrt{1-x^2};$

$cos(arctanx)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};sin(arctanx)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$

$archx=ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right);arcshx=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right);$

$ch(arcshx)=\sqrt{x^2+1};sh(archx)=\sqrt{x^2-1};$

/*命题一*/

设$f(x)$的反函数为$f^{-1}(x)$，那么有不定积分公式：

$$\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x=xf^{-1}(x)-\int f(f^{-1}(x))d(f^{-1}(x))$$

证明：由不定积分的分部积分公式：

$$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$$

令$u(x)=f^{-1}(x)$，$v(x)=x$得：

$$\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x=xf^{-1}(x)-\int xd(f^{-1}(x))$$

显然，由$f^{-1}(x)=f^{-1}(x)$得：$x=f(f^{-1}(x))$

所以，

$$\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x=xf^{-1}(x)-\int f(f^{-1}(x))d(f^{-1}(x))$$

证毕.

有了这个不定积分公式，求反函数的不定积分就简单多了.

下面是一些简单的例子：

(1)

$$\begin{aligned}\int arccosxdx &= xarccosx - \int \cos(arccosx)\, d(arccosx)\\ &= xarccosx - \sin(arccosx) + C\\ &= xarccosx - \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int arcsinxdx &= xarcsinx - \int \sin(arcsinx)\, d(arcsinx)\\ &= xarcsinx + \cos(arcsinx) + C\\ &= xarcsinx + \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int arctanxdx &= xarctanx - \int \tan(arctanx)\, d(arctanx)\\ &= xarctanx - (-\ln|\cos(arctanx)|) + C\\ &= xarctanx - \left(-\ln\left|\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right|\right) + C\\ &= xarctanx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

类似的例子还有很多……

需要注意的是，该公式有一定的局限性，并不是对所有的情况都适用：公式只在

$$\int f(f^{-1}(x))d(f^{-1}(x))$$

能求出来的时候适用，在求不出来的时候，还需要用其他方法来解决.

/*命题二*/

设

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

且$F(x)$具有单值反函数：$x = F^{-1}(y)$ $(F^{-1}(y) \neq 0)$，那么有不定积分公式：

$$\boldsymbol{\int f^k(x)dx = \int (F'^{-1}(y))^{1-k}dy}$$

证明：由题设条件显然有：

$$F'(x) = f(x)$$

根据反函数导数的性质，有：

$$F'(x) = \frac{1}{F'^{-1}(y)}$$

因此，有：

$$\begin{aligned}\int f^k(x)dx &= \int \big(F(x)\big)^k \frac{dx}{dy}dy \\ &= \int \left(\frac{1}{F'^{-1}(y)}\right)^k \frac{dF^{-1}(y)}{dy}dy \\ &= \int \left(\frac{1}{F'^{-1}(y)}\right)^k F'^{-1}(y)\,dy \\ &= \int (F'^{-1}(y))^{1-k}dy\end{aligned}$$

即：

$$\int f^k(x)dx = \int (F'^{-1}(y))^{1-k}dy$$

证毕.

下面是一个经典例子：

e.g. 计算积分$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$

解：由

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctanx + C$$

取$y = arctanx$，即$x = tany$，得：$F'^{-1}(y) = (tany)' = 1 + tan^2y$，故

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx &= \int (1+tan^2y)^{-1}\,dy \\ &= \int cos^2ydy \\ &= \int \frac{1+cos2y}{2}dy \\ &= \frac{y}{2} + \int \frac{cos2y}{2}dy \\ &= \frac{y}{2} + \frac{sin2y}{4} + C \\ &= \frac{y}{2} + \frac{cosysiny}{2(cos^2y+sin^2y)} + C \\ &= \frac{y}{2} + \frac{tany}{2(1+tan^2y)} + C \\ &= \frac{arctanx}{2} + \frac{x}{2(1+x^2)} + C\end{aligned}$$

解毕.