

# 第 11 章 静电场

## 参考答案

### 一、选择题

- 1、A      2、B      3、C      4、C      5、B  
6、C      7、D      8、C      9、B      10、C  
11、D    12、C    13、A    14、B    15、D

### 二、计算题

1、解：铜球的摩尔数为：

$$\nu = \frac{m}{\mu} = 0.279$$

该铜球所包含的原子个数为：

$$N = \nu N_A = 1.68 \times 10^{23}$$

每个铜原子中包含了 29 个质子，而每个质子的电量为  $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，所以铜球所带的正电荷为

$$q = 1.69 \times 10^{23} \times 29 \times 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} = 7.80 \times 10^5 \text{ C}$$

2、解：(1)电子与质子之间的库仑力为：

$$f_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = 8.99 \times 10^9 \times \left( \frac{1.60 \times 10^{-19}}{5.29 \times 10^{-11}} \right)^2 = 8.22 \times 10^{-8} \text{ N}.$$

(2)电子与质子之间的万有引力为：

$$f_m = G \frac{mM}{r^2} = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{1.67 \times 10^{-27} \times 9.11 \times 10^{-31}}{(5.29 \times 10^{-11})^2} = 3.63 \times 10^{-47} N.$$

所以

$$\frac{f_e}{f_m} = \frac{8.22 \times 10^{-8}}{3.63 \times 10^{-47}} = 2.62 \times 10^{39}$$

3、解(1)因电荷分布具有球对称性，用电场迭加原理分析可知：电场分布也具有相同的球对称性。作一半径为  $r$  的同心球形高斯面，根据高斯定理有

$$\oiint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oiint dS = E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q$$

$$\text{当 } r < R \text{ 时: } \sum q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{r^3}{R^3} Q$$

$$\text{所以 } E_{\text{内}} \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{r^3}{R^3} Q$$

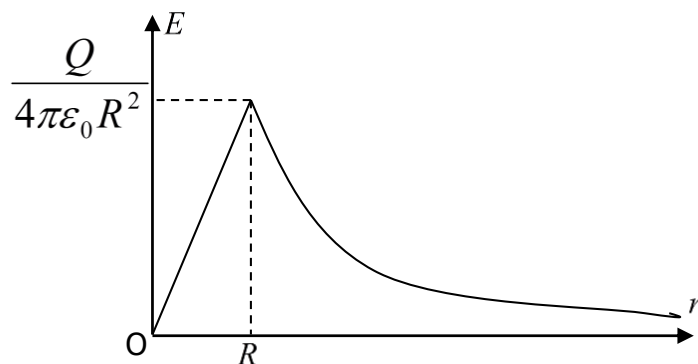
$$\text{故 } E_{\text{内}} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} (r < R)$$

$$\text{当 } r > R \text{ 时, } \sum q = Q$$

$$\text{所以 } E_{\text{外}} 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

$$\text{故 } E_{\text{外}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R)$$

其  $E-r$  分布曲线如图所示..



(2)选无穷远点为电势零点。

球内任一点的电势为

$$U_{\text{内}} = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^R E_{\text{内}} dr + \int_R^{\infty} E_{\text{外}} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_r^R r dr + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (R^2 - r^2) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

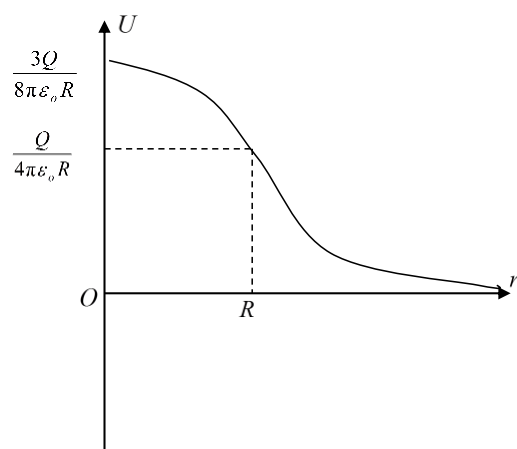
$$\text{化简得 } U_{\text{内}} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (r < R)$$

球外任一点的电势为

$$U_{\text{外}} = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} E_{\text{外}} dr = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\text{即 } U_{\text{外}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R)$$

$U-r$  分布曲线如图所示。



4、解：解：设坐标原点位于  $P$  点， $X$  轴沿杆的方向，如图所示。杆的电荷线密度  $\lambda = q/l$ 。在  $X$  处取电荷元  $dq$ 。

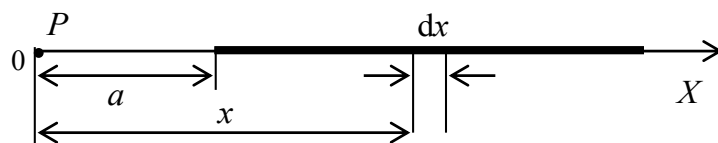
$$dq = \lambda dx = q dx / l$$

它在  $P$  点产生的电势

$$dU_p = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 x}$$

整个杆上电荷产生的电势

$$U_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} \int_a^{a+l} \frac{dx}{x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{a+l}{a}$$



5、解：(1) 以  $q_1$  和  $q_2$  分别表示内外球面所带电量，由电势叠加原理得：

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} \right) = 60$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{R_2} = -30$$

代入  $R_1$  和  $R_2$  的值联立上式得：

$$q_1 = \frac{2}{3} \times 10^{-9} C$$

$$q_2 = -\frac{4}{3} \times 10^{-9} C$$

(2) 由  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{R_2} \right) = 0$  得：

$$r = \frac{q_1}{-q_2} R_2 = 10cm$$

6、解：(1)高斯定理为：

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{S \text{ 内}} q_i / \epsilon_0$$

(2)在球内( $r < R$ ),  $\oiint_{S_1} \vec{E}_{\text{内}} \cdot d\vec{S} = \sum_{S_1 \text{ 内}} q_i / \epsilon_0$

$$\vec{E}_{\text{内}} = 0 ;$$

(3)在球外( $r > R$ ),  $\oiint_{S_2} \vec{E}_{\text{外}} \cdot d\vec{S} = \sum_{S_2 \text{ 内}} q_i / \epsilon_0$

$$E_{\text{外}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ 方向沿球的径向向外};$$

(4)对于球内的任意一点，若距球心为  $r$  ( $r < R$ )，其电势为

$$V_1 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^R \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_R^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{q}{r^2} \cdot dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

对于球外的任意一点，若距球心为  $r$  ( $r > R$ )，其电势为：

$$V_2 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{q}{r^2} \cdot dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

7、解：  $dq = \frac{Q}{2\pi R} dl$   $r = \sqrt{R^2 + x^2}$

$$dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} \frac{Q}{2\pi R} dl$$

$$U = \oint dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

(1) 当  $x \gg R$   $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x}$

(2) 当  $x=0$   $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

8、解：(1) 圆环上电荷元  $dq$  在轴线上任一点(设其坐标为  $x$ )的电位为：

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}$$

积分：

$$U = \int dU = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}$$

(2)  $P_1$  点的电势为：  $U_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + R^2}} = \frac{Q}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 R}$

$P_2$  点的电势为：  $U_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + (2R)^2}} = \frac{Q}{4\sqrt{5}\pi\epsilon_0 R}$

所以：  $\frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

9、解：  $E_x = -\frac{\partial u}{\partial x} = -(6-12xy) = 66$

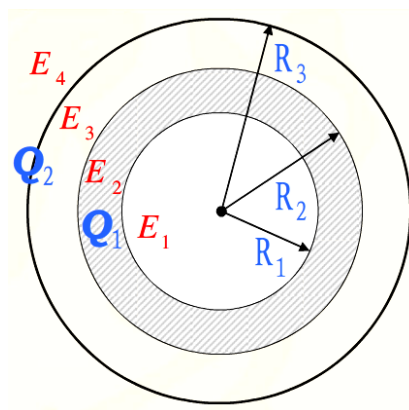
$$E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2 = 24$$

$$E_z = -\frac{\partial u}{\partial z} = -14z = 0$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = 66\vec{i} + 24\vec{j}$$

10、解：取半径为  $r$  的同心球面为高斯面：

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \sum q / \epsilon_0$$



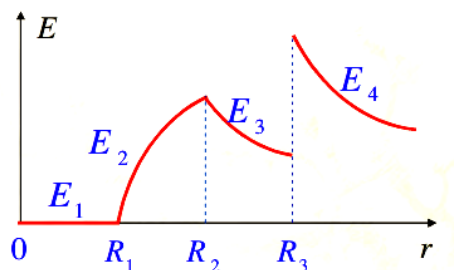
①  $R < R_1$ ，该高斯面内无电荷， $\sum q = 0$ ，故  $E_1 = 0$ ；

②  $R_1 < r < R_2$ ，高斯面内电荷  $\sum q = \frac{Q_1(r^3 - R_1^3)}{R_2^3 - R_1^3}$ ；故  $E_2 = \frac{Q_1(r^3 - R_1^3)}{4\pi\epsilon_0(R_2^3 - R_1^3)r^2}$

③  $R_2 < r < R_3$ ，高斯面内电荷为  $Q_1$ ，故  $E_3 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

④  $r > R_3$ ，高斯面内电荷为  $Q_1 + Q_2$ ，故  $E_4 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ；方向沿着径矢方向。

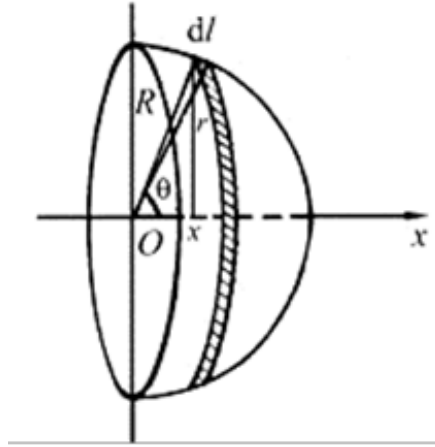
如图所示，在带电球面的两侧，场强的左右极限不同，电场强度不连续。



而在紧贴  $r=R_3$  的带电球面两侧，场强的跃变量为：

$$\Delta E = E_4 - E_3 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

11、解：以球心  $O$  为坐标原点，建立如图所示的坐标系。



在球面上取宽度为  $dl$  的圆环，圆环的半径为  $r$ 。

$$dl = R d\theta,$$

圆环所带的电量为：

$$dq = \sigma 2\pi r dl = \sigma 2\pi r R d\theta.$$

该圆环在球心产生的电场强度为：

$$dE = \frac{x dq}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma 2\pi r R d\theta}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}},$$

方向沿  $x$  轴的反方向。

由图中可见， $r = R \sin \theta$ ,  $x = R \cos \theta$ ，将这些关系代入上式，得：

$$dE = \frac{\sigma 2\pi R^3 \cos \theta \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 (R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{\sigma 2\pi \cos \theta \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0}.$$

所以：

$$E = \int dE = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^{x/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0},$$

E 的方向沿 x 轴的反方向。

12、解：(1)点 A 的电势：

$$\begin{aligned} U_A &= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 \frac{d}{2}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 \frac{d}{2}} \\ &= \frac{40 \times 10^{-9}}{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 5 \times 10^{-2}} + \frac{-70 \times 10^{-9}}{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 5 \times 10^{-2}} \\ &= -5.4 \times 10^3 V \end{aligned}$$

(2)点 B 的电势：

$$\begin{aligned} U_A &= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \\ &= \frac{40 \times 10^{-9}}{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 8 \times 10^{-2}} + \frac{-70 \times 10^{-9}}{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 6 \times 10^{-2}} \\ &= -6.0 \times 10^3 V \end{aligned}$$

### 三、问答题

1、解：(1)电场强度  $\vec{E} = \vec{F}/q$ 。是从力的角度对电场分布的描述，它给出了一个矢量场分布的图像；(2)而电势  $U = W/q$ 。是从能量和功的角度对电场分布的描述，它给出了一个标量场分布的图像。(3)空间任一点的电场强度  $\vec{E}$  和该点的电势  $U$  之间并没有一对一的关系。

二者的关系是  $\vec{E} = -\nabla U = -\frac{dU}{dn}$ ， $U = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ ，即空间任一点的场强  $\vec{E}$  和该点附近电势的空间变化率相联系；空间任一点的电势和该点到电势零点的整个空间的场强分布相联系。

(4)由于电场强度  $\vec{E}$  是矢量，利用场迭加原理计算时，应先将各电荷元产生的电场  $d\vec{E}$  进行分解，再按方向进行合成，即  $d\vec{E} = dE_x \vec{i} + dE_y \vec{j} + dE_z \vec{k}$ ， $E_x = \int dE_x$ ， $E_y = \int dE_y$ ， $E_z = \int dE_z$ ，而电势是标量可直接进行迭加，即  $U = \int dU$ ，但用这种方法求电势时，应注意电荷是否分布在有限空间及电势零点的选择，最好选无穷远点为电势零点。

2、解：相对于观察者静止的电荷所激发的电场叫做静电场。



高斯定理： $\psi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$  物理意义：在任意静电场中，通过任一闭合曲面的  $\mathbf{E}$  通量，等于该曲面内电荷量的代数和除以  $\varepsilon_0$ 。

环路定理： $\oint_L E \cos \theta dl = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$  物理意义：静电场力做功与路径无关。

3、解： $V_A = \int_A^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$

## 第 12 章 静电场中的导体和电介质

### 参考答案

#### 一、选择题

1、B    2、B    3、D    4、D    5、C    6、C    7、B    8、C    9、B    10、B  
11、A    12、C    13、A    14、C    15、C    16、C    17、D    18、C    19、C    20、B  
21、A    22、B    23、D    24、B    25、C

#### 二、计算题

1、解（1）因 3 块导体板靠的很近，可将 6 个导体表面视为 6 个无限大带电平面。导体表面电荷分布可认为是均匀的，且其间的场强方向垂直于导体表面。作如图虚线所示的圆柱形高斯面，因导体在达到静平衡后，内部场强为零，又导体外的场强方向与高斯面的侧面平行，故由高斯定理可得

$$\sigma_2 = -\sigma_3 \quad \sigma_4 = -\sigma_5 \quad .$$

再由导体板 A 内 d 点场强为零，可知

$$E_d = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_5}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_6}{2\varepsilon_0} = 0$$

所以  $\sigma_1 = \sigma_6$ 。

故点 a 的场强为 6 个导体表面产生场强的矢量和

$$E_a = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sum_{i=1}^6 \sigma_i = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{2\varepsilon_0 S} = \frac{1}{2\varepsilon_0} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6)$$

根据上述已有结果，可知

$$\sigma_1 = \sigma_6 = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{2S}.$$

再由于  $\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q_1}{S} \quad \sigma_3 + \sigma_4 = \frac{Q_2}{S}.$

得  $\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q_1}{S} - \sigma_1 = \frac{Q_1 - Q_2 - Q_3}{2S}$

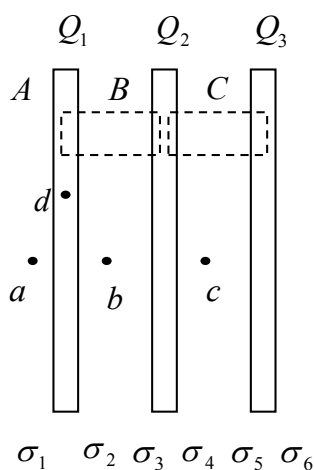
$$\sigma_4 = -\sigma_5 = \frac{Q_2}{S} - \sigma_3 = \frac{Q_1 + Q_2 - Q_3}{2S}$$

(2)  $a$ 、 $b$ 、 $c$  点的场强

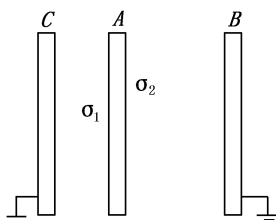
$$E_a = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sum \sigma_i = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{2\varepsilon_0 S}$$

同理  $E_b = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sum \sigma_i = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1 - Q_2 - Q_3}{2\varepsilon_0 S}$

$$E_c = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sum \sigma_i = \frac{\sigma_5}{\varepsilon_0} = \frac{Q_3 - Q_1 - Q_2}{2\varepsilon_0 S}$$



2、解：



如题图示，令  $A$  板左侧面电荷面密度为  $\sigma_1$ ，右侧面电荷面密度为  $\sigma_2$

$$(1) \because U_{AC} = U_{AB}, \text{ 即}$$

$$\therefore E_{AC} d_{AC} = E_{AB} d_{AB}$$

$$\therefore \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_{AC}}{E_{AB}} = \frac{d_{AB}}{d_{AC}} = 2$$

$$\text{且} \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{q_A}{S}$$

$$\text{得} \quad \sigma_2 = \frac{q_A}{3S}, \quad \sigma_1 = \frac{2q_A}{3S}$$

$$\text{而} \quad q_C = -\sigma_1 S = -\frac{2}{3} q_A = -2 \times 10^{-7} \text{ C}$$

$$q_B = -\sigma_2 S = -1 \times 10^{-7} \text{ C}$$

$$(2) \quad U_A = E_{AC} d_{AC} = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} d_{AC} = 2.3 \times 10^3 \text{ V}$$

3、解：根据静电平衡时电荷的分布，可知电场分布呈球对称。内球壳带电量为  $q$ ，取同心球面为高斯面，由高斯定理  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = E(r) \cdot \sum q / \varepsilon_0$ ，根据不同半径的高斯面内的电荷分布，解得各区域内的电场分布为：

$$r < R_1 \text{ 时}, \quad E_1(r) = 0$$

$$R_1 < r < R_2 \text{ 时}, \quad E_2(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$r > R_2 \text{ 时}, \quad E_3(r) = \frac{Q + q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

由电场强度与电势的积分关系，可得各相应区域内的电势分布。

$$r < R_1 \text{ 时},$$

$$U_1 = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{R_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_{R_2}^\infty \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

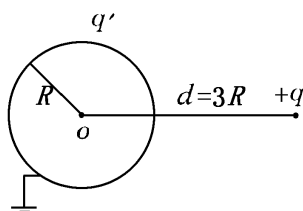
$$R_1 < r < R_2 \text{ 时},$$

$$U_2 = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{R_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_{R_2}^\infty \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$r > R_2 \text{ 时},$$

$$U_3 = \int_r^\infty \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{l} = \frac{q + Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

4、



解：如题 4 图所示，设金属球感应电荷为  $q'$ ，则球接地时电势  $U_o=0$

$$\text{由电势叠加原理有： } U_o = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 3R} = 0$$

$$\text{得 } q' = -\frac{q}{3}$$

5、解：利用有介质时的高斯定理  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q$

(1)介质内 ( $R_1 < r < R_2$ ) 场强

$$\vec{D} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi r^3}, \vec{E}_{\text{内}} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^3};$$

介质外 ( $r > R_2$ ) 场强

$$\vec{D} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi r^3}, \vec{E}_{\text{外}} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

(2)介质外( $r > R_2$ )电势

$$U = \int_r^\infty \vec{E}_{\text{外}} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

介质内 ( $R_1 < r < R_2$ ) 电势

$$\begin{aligned} U &= \int_r^{R_2} E_{\text{内}} d\vec{r} + \int_{R_2}^\infty E_{\text{外}} d\vec{r} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left( \frac{1}{r} + \frac{\epsilon_r - 1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

(3)金属球的电势

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_{\text{内}} \cdot d\vec{r} + \int_{R_2}^\infty \vec{E}_{\text{外}} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Qdr}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} + \int_{R_2}^\infty \frac{Qdr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\epsilon_r - 1}{R_2} \right)$$

6、解：由介质中的高斯定理：

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

$$D \cdot \Delta S = \sigma_0 \Delta S$$

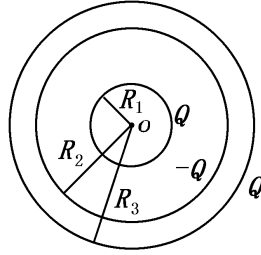
$$D = \sigma_0 = 4.5 \times 10^{-5} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = 2.5 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$P = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 E = D - \varepsilon_0 E = 2.3 \times 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

D, E, P 的方向相同，垂直向下

7、解:



如图，内球带电  $Q$ ，外球壳内表面带电  $-Q$ ，外表面带电  $Q$

(1) 在  $r < R_1$  和  $R_2 < r < R_3$  区域

$$\vec{E} = 0$$

$$\text{在 } R_1 < r < R_2 \text{ 时} \quad \vec{E}_1 = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$r > R_3 \text{ 时} \quad \vec{E}_2 = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$\therefore$  在  $R_1 < r < R_2$  区域

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2 dr}{8\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

在  $r > R_3$  区域

$$W_2 = \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_3}$$

$$\therefore \text{总能量 } W = W_1 + W_2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

$$= 1.82 \times 10^{-4} \text{ J}$$

$$(2) \text{ 导体壳接地时, 只有 } R_1 < r < R_2 \text{ 时 } \vec{E} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, W_2 = 0$$

$$\therefore W = W_1 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 1.01 \times 10^{-4} \text{ J}$$

$$(3) \text{ 电容器电容 } C = \frac{2W}{Q^2} = 4\pi\varepsilon_0 / \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 4.49 \times 10^{-12} \text{ F}$$

### 三、问答题

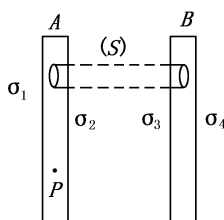
1、关键是题目中两个表达式中的 $\sigma$ 不是一回事。下面为了讨论方便，我们把导体表面的电荷密度改为 $\sigma'$ ，其附近的场强则写成 $E = \sigma' / \epsilon_0$ 。

对于无限大均匀带电平面（面电荷密度为 $\sigma$ ），两侧场强为 $E = \sigma / 2\epsilon_0$ ，这里的 $\sigma$ 是指带电平面单位面积上所带的电荷。对静电平衡状态下的导体，其表面附近的场强为 $E = \sigma' / \epsilon_0$ ，

这里的 $\sigma'$ 是指带电导体表面某处单位面积上所带的电荷。

如果无限大均匀带电平面是一个静电平衡状态下的无限大均匀带电导体板，则 $\sigma$ 是此导体板的单位面积上（包含导体板的两个表面）所带的电荷，而 $\sigma'$ 仅是导体板的一个表面单位面积上所带的电荷。在空间仅有此导体板（即导体板旁没有其他电荷和其他电场）的情形下，导体板的表面上电荷均匀分布，且有两表面上的面电荷密度相等，在此情形下两个电荷密度之间的关系为 $\sigma = 2\sigma'$ ，这样，题目中的两个 $E$ 式就统一了。

2、解：



如图所示，设两导体 $A$ 、 $B$ 的四个平面均匀带电的电荷面密度依次为 $\sigma_1$ ， $\sigma_2$ ， $\sigma_3$ ， $\sigma_4$

(1)则取与平面垂直且底面分别在 $A$ 、 $B$ 内部的闭合柱面为高斯面时，有

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = (\sigma_2 + \sigma_3)\Delta S = 0$$

$\therefore$

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

说明相向两面上电荷面密度大小相等、符号相反；

(2)在 $A$ 内部任取一点 $P$ ，则其场强为零，并且它是由四个均匀带电平面产生的场强叠加而成的，即

$$\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0$$

又 $\because$

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

$\therefore$

$$\sigma_1 = \sigma_4$$

说明相背两面上电荷面密度总是大小相等，符号相同。

3、 ①机理：静电感应是导体中的自由电子在电场力的作用下的宏观移动，使导体上的电荷整体达到一种新的分布状态；而电介质的极化则是分子在电场力的作用下的取向极化或位移极化，介质中的分子并未出现宏观的迁移。

②电荷分布：导体达到静电平衡后电荷只分布在导体的表面，体内电荷密度为零；对于均匀各向同性电介质，介质极化后，极化电荷亦只分布在介质的表面，介质内部的体电荷密度亦为零。

③电场分布：导体达到静电平衡后其内部电场强度处处为零，导体表面附近的电场强度方向处处垂直于导体表面，大小与表面处的电荷密度呈正比；电介质极化后极化电荷在介质内部产生反向电场，使介质中的场强减弱，但不为零。

4、电势能是电场中相对于电势零点的电势高低而具有的能量，其具体大小与势能零点的选择有关；电容器存储的能量是由充电过程中非静电力克服静电力做功而储存在电容器中的能量；电场的能量是以场的形式储存在电场空间中的能量。电势能、电容器存储的能量归根结底都是电场的能量。

## 第 13 章 电流和稳恒磁场

### 参考答案

#### 一、选择题

1、C    2、C    3、D    4、D    5、A    6、A    7、C    8、D    9、D    10、B  
11、C    12、D    13、B    14、C    15、B    16、B    17、D    18、C    19、D    20、C  
21、A    22、B    23、B    24、A    25、A    26、C    27、D    28、B    29、A    30、A  
31、D    32、D

#### 二、计算题

1、解法 1：（1）取半径为  $r$  厚度为  $dr$ ，长为  $l$  的圆筒作为电阻微元，由电阻的定义，此电阻微元的阻值为  $dR = \rho \frac{dr}{S} = \rho \frac{dr}{2\pi r l}$ 。

总电阻相当于所有微元电阻串联，故  $R = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho dr}{2\pi r l} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{R_2}{R_1}$

（2）当内芯铜线与铝层之间的电势差为  $U$  时，由欧姆定律可得径向电流为

$$I = \frac{U}{R} = 2\pi l U / \rho \ln \frac{R_2}{R_1}$$

解法 2: 对半径为  $r$  的圆柱面而言, 由于对称性, 圆柱面上各点电流密度  $j$  的大小均相同, 各点电流密度的方向均沿径矢向外, 因此, 通过半径为  $r$  的圆柱面  $S$  的电流为

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = 2\pi r l j, \text{ 电流密度 } j = \frac{I}{2\pi r l}$$

$$\text{由欧姆定律的微分形式 } j = \sigma E = \frac{E}{\rho},$$

圆柱面上电场强度的大小为  $E = \rho j = \frac{\rho I}{2\pi r l}$ ,  $E$  的方向均沿径矢向外, 于是, 同轴电缆内外两侧的电场差应为

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho I}{2\pi r l} \cdot dr = \frac{\rho I}{2\pi l} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$\text{所以, 同轴电缆的径向电流为 } I = \frac{2\pi l U}{\rho \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}$$

$$\text{同轴电缆的径向总电阻: } R = \frac{U}{I} = \frac{\rho \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}{2\pi l}$$

2、解: 建立如图坐标轴, 在  $x$  处高度为  $dx$  的圆台电阻为

$$dR = \rho \frac{dx}{\pi r^2} \quad \text{①}$$

$$\text{由几何关系, 可得 } \frac{x}{l} = \frac{r - R_2}{R_1 - R_2}, \text{ 两边求导, } \frac{dx}{l} = \frac{dr}{R_1 - R_2}, \quad dx = \frac{l dr}{R_1 - R_2}$$

$$\text{故两端面之间的电阻为: } R = \int dR = \int_0^l \frac{\rho dx}{\pi r^2} = \int_{R_2}^{R_1} \frac{\rho}{\pi r^2} \frac{l dr}{R_1 - R_2} = \frac{\rho l}{\pi R_1 R_2}$$

3、解法 1: 在两球壳之间作一半径为  $r$  的同心球面, 若通过该球面的电流为  $I$ , 则球面各点沿径矢向外的电流密度大小相等, 并且

$$j = \frac{I}{4\pi r^2}$$

$$\text{又因为 } j = \sigma E = kE^2$$



$$\text{故 } E = \left( \frac{I}{4\pi r^2 k} \right)^{1/2} = \left( \frac{I}{4\pi k} \right)^{1/2} \frac{1}{r}$$

$$\text{于是两球壳之间的电势差为: } U = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b E dr = \left( \frac{I}{4\pi k} \right)^{1/2} \ln \frac{b}{a}$$

$$\text{从上式可得到电流为: } I = \frac{4\pi k U^2}{\left( \ln \frac{b}{a} \right)^2}$$

解法 2: 在两球壳之间作一半径为  $r$  的厚度为  $dr$  的同心薄球壳, 通过该球壳的电流为  $I$ , 则球壳上沿径矢向外方向各点电流密度的大小相等, 并且

$$j = \frac{I}{4\pi r^2}$$

$$\text{又因为 } j = \sigma E = kE^2$$

$$\text{故 } E = \left( \frac{I}{4\pi r^2 k} \right)^{1/2} = \left( \frac{I}{4\pi k} \right)^{1/2} \frac{1}{r}$$

$$\text{而材料的电阻率 } \rho: \rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{kE} = \frac{1}{k \left( \frac{I}{4\pi k} \right)^{1/2} \frac{1}{r}} = \left( \frac{4\pi}{kI} \right)^{1/2} \cdot r$$

$$\text{此薄球壳沿径矢向外方向的电阻为: } dR = \frac{\rho dr}{4\pi r^2}$$

$$\text{其中电阻率 } \rho \text{ 为: } \rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{kE}$$

于是两球壳之间的沿径矢向外方向的总电阻为:

$$R = \int dR = \int_a^b \frac{\rho dr}{4\pi r^2} = \int_a^b \frac{\left( \frac{4\pi}{kI} \right)^{1/2} \cdot r dr}{4\pi r^2} = \left( \frac{1}{4\pi kI} \right)^{1/2} \int_a^b \frac{dr}{r} = \left( \frac{1}{4\pi kI} \right)^{1/2} \ln \frac{b}{a}$$

两球壳之间电势差为  $U$  时:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{\left( \frac{1}{4\pi kI} \right)^{1/2} \ln \frac{b}{a}} = \frac{(4\pi kI)^{1/2} U}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$\text{由上式两边平方可以解出电流 } I \text{ 为: } I = \frac{4\pi k U^2}{\left( \ln \frac{b}{a} \right)^2}$$

4、解：导线可分成 4 段，在 O 点产生的磁感应强度分别为  $B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$ 、 $B_4$ ，由磁场叠加原理，O 点的磁感应强度为

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4$$

对导线 1 和 4，O 点位于其延长线上，此二段导线在 O 点产生的磁感应强度为零。

$$\text{即： } \vec{B}_1 = \vec{B}_4 = 0$$

$$\text{圆弧导线 2 在 O 点产生的磁感应强度： } B_2 = \frac{1}{4} \left( \frac{\mu_0 I}{2R} \right) = \frac{\mu_0 I}{8R}, \text{ 方向 } \otimes$$

$$\text{直导线 3 在 O 点产生的磁感应强度： } B_3 = \frac{1}{4} \frac{\mu_0 I}{\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2),$$

$$\text{其中 } a = \frac{R}{\sqrt{2}}, \theta_1 = \pi/4, \theta_2 = 3\pi/4, \text{ 则有, } B_3 = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi R} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \text{ 方向 } \otimes$$

故 4 段导线在 O 点处产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{8R} + \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \right), \text{ 方向 } \otimes.$$

5、解：折线在 P 点产生的磁感强度可以看作是两段半无限长载流直导线在 P 点产生的磁感强度的矢量和；

水平段半无限长载流直导线在 P 点产生的磁感强度：

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left( \cos 0 - \cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \text{ 方向：垂直纸面向外}$$

竖直段半无限长载流直导线在 P 点产生的磁感强度：

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left( \cos \frac{\pi}{4} - \cos \pi \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \text{ 方向：垂直纸面向里}$$

$$\text{折线在 P 点产生的磁感强度： } B = B_2 - B_1 = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi a}, \text{ 方向：垂直纸面向里}$$

6、解：中心 O 处的磁感强度  $\vec{B}$  为两个圆线圈在 O 处产生的磁感应强度的矢量和。

AA' 线圈在 O 点所产生的磁感强度

$$B_A = \frac{\mu_0 N_A I_A}{2r_A} = \frac{4 \times 10^7 \times 10}{2 \times 20 \times 10^{-2}} = 1 \times 10^4 \text{ T} \quad (\text{方向垂直 AA' 平面})$$

CC' 线圈在 O 点所产生的磁感强度

$$B_C = \frac{\mu_0 N_C I_C}{2r_C} = \frac{4 \times 10^7 \times 20}{2 \times 10^{-1} \times 1^2} = 5 \times 10^4 \text{ T} \quad (\text{方向垂直 } CC' \text{ 平面})$$

O 点的合磁感强度  $B = (B_A^2 + B_C^2)^{1/2} = 2.236 \times 10^{-1} \text{ T}$

B 的方向在和 AA'、CC' 都垂直的平面内，和 CC' 平面的夹角

$$\theta = \tan^{-1} \frac{B_C}{B_A} = 63.4^\circ$$

7、解：在圆盘上取一半径分别为 r 和 r+dr 的细环带，此环带所带电量为 dq = σ2πrdr。考虑到圆盘以角速率 ω 绕轴 AA' 转动，即每秒转 n = ω/2π 圈，于是此环带上的圆电流为：

$$dI = ndq = \frac{\omega}{2\pi} \sigma 2\pi r dr = \omega \sigma r dr$$

已知圆电流在圆心的磁感应强度的值为  $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$ ，其中 I 为圆电流，R 为圆电流的半径。因此，圆盘上细环带在盘心 O 的磁感应强度的值为：

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0 \omega \sigma r dr}{2}$$

于是整个圆盘转动时，在盘心 O 的磁感应强度 B 的值为

$$B = \int dB = \int_0^R \frac{\mu_0 \omega \sigma r dr}{2} = \frac{\mu_0 \omega \sigma R^2}{4}$$

方向垂直盘面向上，沿 A' → A。

8、解：根据磁场叠加原理，O 点磁感应强度由 acb、adb、be、ef、fa 中电流共同产生。

电源很远， $B_{ef} = 0$ 。be、fa 两段直线的延长线通过 O 点， $B_{be} = 0$ ， $B_{ef} = 0$ 。设两圆弧长分别为  $l_1$  和  $l_2$ ，流过的电流为  $I_1$  和  $I_2$ ，方向如图。圆弧 acb、adb 中电流在 O 点产生的磁场分别为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2r} \frac{l_1}{2\pi r} \quad \text{方向垂直纸面向里}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2r} \frac{l_2}{2\pi r} \quad \text{方向垂直纸面向外}$$

圆弧 acb、adb 构成并联电路，有

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad \text{或} \quad I_1 \rho \frac{l_1}{S_1} = I_2 \rho \frac{l_2}{S_2}$$

即  $I_1 l_1 = I_2 l_2$

故可得 O 点磁感应强度

$$B_O = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2r} \frac{l_1}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I_2}{2r} \frac{l_2}{2\pi r} = 0$$

9、解：（1）图中矩形框区域的磁场由左右两平行长直导线产生，且方向相同，故图中 A 点的磁感应强度为：

$$B_A = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \left(\frac{d}{2}\right)} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \left(\frac{d}{2}\right)} = \frac{\mu_0 (I_1 + I_2)}{\pi d} = 4 \times 10^{-5} T, \text{ 方向 } \perp \text{ 纸面向外}$$

（2）在矩形框上取面元  $dS$ ,  $dS = ldr$

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{r_1}^{r_1+r_2} \left( \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi (d-r)} \right) l dr \\ &= \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \ln 3 - \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \ln \frac{1}{3} = \frac{\mu_0 I_1 l}{\pi} \ln 3 = 2.2 \times 10^{-6} Wb \end{aligned}$$

10、解：空间各点磁场可看作半径为  $R$ ，电流  $I_1$  均匀分布在横截面上的圆柱导体和半径为  $r$  电流  $-I_2$  均匀分布在横截面上的圆柱导体磁场之和；

导体实心部分各点电流密度为  $j = \frac{I}{\pi(R^2 - r^2)}$ ，设方向垂直于纸面向外，而空腔部分电流

密度大小相等，方向相反；

（1）圆柱轴线上磁感应强度的大小：

电流  $I_1$  在轴线上产生的磁感应强度： $B_1 = 0$ ；

电流  $-I_2$  在轴线上产生的磁感应强度，由安培环路定理可得，

$$\oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = B_2 \cdot 2\pi a = \mu_0 \sum I_i = \mu_0 I_2 = \frac{\mu_0 I r^2}{R^2 - r^2}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi a (R^2 - r^2)}$$

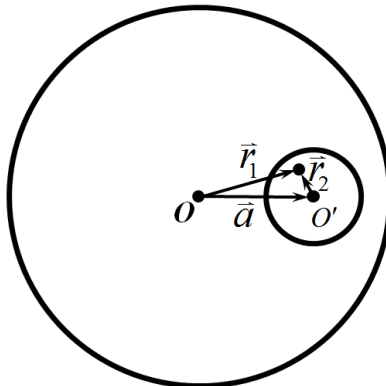
（2）空腔部分轴线上  $O'$  点  $B$  的大小：

电流  $-I_2$  在空腔部分轴线上  $O'$  点产生的磁感应强度， $B'_2 = 0$ ；

电流  $I_1$  在空腔部分轴线上  $O'$  点产生的磁感应强度： $B'_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{a^2}{(R^2 - r^2)} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi (R^2 - r^2)}$

$$\therefore B'_O = \frac{\mu_0 I a}{2\pi (R^2 - r^2)}$$

（3）在空腔部分任选一点  $P$ ，设  $OP$ 、 $O'P$  和  $OO'$  三个矢量分别为  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{a}$ ；



由安培环路定理可得，电流  $I_1$  在 P 点产生的磁感应强度：

$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = B_1 \cdot 2\pi r_1 = \mu_0 \sum I_i = \frac{I}{\pi(R^2 - r^2)} \pi r_1^2, \quad B_1 = \frac{\mu_0 I r_1}{2\pi(R^2 - r^2)}, \quad \text{方向垂直于 } \vec{r}_1 \text{ 指}$$

向左上方，且与  $\vec{j}$  满足  $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{r}_1$ ；

同理由安培环路定理可得，电流  $-I_2$  在 P 点产生的磁感应强度：

$$\oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = B_2 \cdot 2\pi r_2 = \mu_0 \sum I_i = \frac{I}{\pi(R^2 - r^2)} \pi r_2^2, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I r_2}{2\pi(R^2 - r^2)}, \quad \text{方向垂直于 } \vec{r}_2 \text{ 指}$$

向右上方，且与  $\vec{j}$  满足  $\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{r}_2$ ；

故空腔部分任意一点 P 点的磁感应强度：

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{r}_1 - \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{r}_2 = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

由矢量三角形可知， $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{a}$ ，可得  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{a}$ ；

$$\text{P 点的磁感应强度大小为 } B = \frac{\mu_0}{2} j a = \frac{\mu_0 I a}{2\pi(R^2 - r^2)};$$

由结果可知与 (2) 计算得到空腔轴线上的磁感应强度相同。

11、解：无限长载流导体直圆管中电流分布具有圆对称性，可以直接利用安培环路定理计算直圆管周围各点的磁感应强度。

$$\text{安培环路定理：} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$$

在垂直于轴线任一截面上作一系列同心圆积分回路，积分回路方向与其内部包围电流方向满足右手定则。

$$r < a \text{ 时，} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i = 0, \quad \vec{B}_1 = 0$$

$$a < r < b \text{ 时，} \sum I_i = \frac{I\pi(r^2 - a^2)}{\pi(b^2 - a^2)} = \frac{I(r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)},$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_2 \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_i = \frac{\mu_0 I (r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)},$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I (r^2 - a^2)}{2\pi r (b^2 - a^2)}, \quad \text{方向沿半径为 } r \text{ 的同心圆的切线方向，与电流方向满足右手定则。}$$

$$r > b \text{ 时，} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_3 \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_i = \mu_0 I,$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad \text{方向沿半径为 } r \text{ 的同心圆的切线方向，与电流方向满足右手定则。}$$

12、解：（1）通过  $abcd$  面积  $S_1$  的磁通量

$$\Phi_{m1} = \vec{B} \cdot \vec{S}_1 = BS_1 = 2.0 \times 0.3 \times 0.4 = 0.24 \text{ Wb}$$

（2）通过  $befc$  面积  $S_2$  的磁通量

$$\Phi_{m2} = \vec{B} \cdot \vec{S}_2 = 0$$

（3）通过  $ae fd$  面积  $S_3$  的磁通量

$$\Phi_{m3} = \vec{B} \cdot \vec{S}_3 = BS_3 = 2.0 \times 0.3 \times 0.5 \times \cos \theta = 0.3 \times \frac{4}{5} = 0.24 \text{ Wb}$$

13、解：同轴电缆的磁场分布具有轴对称性，磁感应线是围绕轴线的同心圆。取半径为  $r$  的磁感应线作积分环路  $L$ ，由安培环路定理得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum_i I_i$$

（1）  $r < R_1$  时，

$$B_1 \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R_1^2} \pi r^2, \quad B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

（2）  $R_1 < r < R_2$  时，

$$B_2 \cdot 2\pi r = \mu_0 I, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

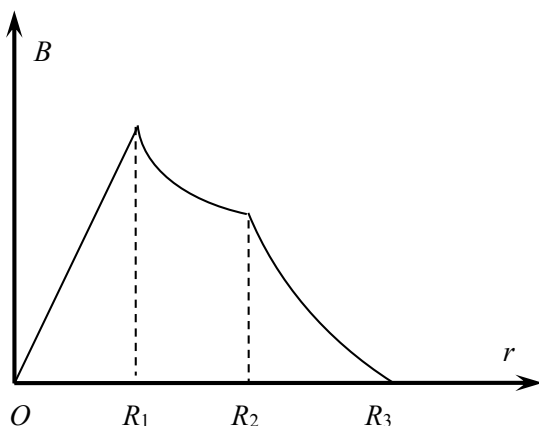
（3）  $R_2 < r < R_3$  时，  $\sum_i I_i = I - \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \pi(r^2 - R_2^2)$

$$B_3 \cdot 2\pi r = \mu_0 \left[ I - \frac{I(r^2 - R_2^2)}{R_3^2 - R_2^2} \right], \quad B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

（4）  $r > R_3$  时，

$$B_4 \cdot 2\pi r = 0, \quad B_4 = 0$$

磁感应强度分布曲线：



14、解：围绕无限长圆柱形铜导体轴线取同心圆为环路 $l$ ，取其绕向与电流成右手螺旋关系，根据安培环路定理可得

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_l dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_i$$

在圆柱形铜导体内部时， $r \leq R$ ， $B_1 \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_i = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2} \pi r^2 = \frac{\mu_0 I r^2}{R^2}$ ， $B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$

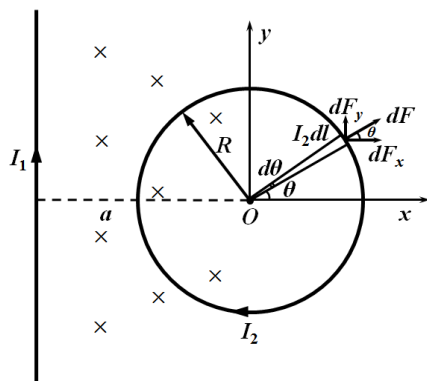
在圆柱形铜导体外部时， $r > R$ ， $B_2 \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_i = \mu_0 I$ ， $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

通过该矩形平面的磁通量：

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^R \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \times 1 \cdot dr + \int_R^{2R} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \times 1 \cdot dr = \frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln 2$$

15、解：在圆电流上取如图所示电流元 $I_2 dl$ ，无限长载流直导线所产生的磁场为非均匀磁场，圆电流所在处的磁感应强度方向均为垂直纸面向里。电流元 $I_2 dl$ 所在处磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a + R \cos \theta)},$$



此电流元所受的磁力 $dF$ 的大小为 $dF = B I_2 dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl}{2\pi(a + R \cos \theta)}$ ，其方向由右旋关系可知

沿径矢向外。

由图可知  $dl = R d\theta$ ，故  $dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R d\theta}{2\pi(a + R \cos \theta)}$

力  $dF$  的在  $Ox$  轴和  $Oy$  轴上的分量分别为

$$dF_x = dF \cos \theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R \cos \theta d\theta}{2\pi(a + R \cos \theta)}$$

$$dF_y = dF \sin \theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R \sin \theta d\theta}{2\pi(a + R \cos \theta)}$$

圆电流所受总磁力在  $Ox$  轴和  $Oy$  轴上的分量分别为

$$F_x = \int dF_x = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I_1 I_2 R \cos \theta d\theta}{2\pi(a + R \cos \theta)} = \mu_0 I_1 I_2 \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right)$$

$$F_y = \int dF_y = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I_1 I_2 R \sin \theta d\theta}{2\pi(a + R \cos \theta)} = 0 \quad (\text{由对称性也可得到 } F_y = 0)$$

故圆电流所受磁力为： $f = F_x = \mu_0 I_1 I_2 \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right)$ ，方向沿  $Ox$  轴正向。

16、解：在载流导线  $I_2$  上取电流元  $I_2 dx$ ；无限长载流直导线  $I_1$  在此电流元处产生的磁场磁感应强度为： $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$  方向垂直纸面向里；

电流元  $I_2 dx$  受到的安培力大小为： $d\vec{F} = I_2 d\vec{x} \times \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx (\vec{k})$ ， $\vec{k}$  表示方向在纸面内竖直向上；

故导线  $I_2$  所受到总的安培力为： $\vec{F} = d\vec{F} = \int_a^L \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{a+L}{a} (\vec{k})$

方向：在纸面内竖直向上。

17、解：（1）长直导线周围产生的磁感应强度为： $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$

由安培力的计算公式： $\vec{F} = \int_L I_2 d\vec{l} \times \vec{B}$

CD 段所受安培力：

$$F_{CD} = I_2 B \int_L dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi d} = 8.0 \times 10^{-4} \text{ N}，\text{方向垂直 } CD \text{ 向左}$$

EF 段所受安培力：



$$F_{FE} = I_2 B \int_L dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(d+a)} = 8.0 \times 10^{-5} \text{ N}, \text{ 方向垂直 } FE \text{ 向右}$$

CF 段所受安培力:

$$F_{CF} = \int_L I_2 B dl = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{a}\right) = 9.2 \times 10^{-5} \text{ N}, \text{ 方向垂直 } CF \text{ 向上};$$

同理可得 DE 段所受安培力:

$$F_{DE} = F_{CF} = 9.2 \times 10^{-5} \text{ N}, \text{ 方向垂直 } ED \text{ 向下};$$

$$(2) \text{ 矩形线圈所受合力: } \vec{F} = \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{DE} + \vec{F}_{EF} + \vec{F}_{CF},$$

大小为  $F = 7.2 \times 10^{-4} \text{ N}$ , 方向向左

$$\text{矩形线圈所受合力矩 } \vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$$

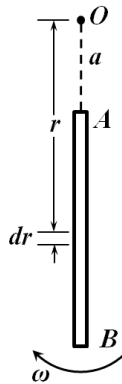
$\because$  线圈与导线共面

$$\therefore \vec{P}_m // \vec{B}$$

故矩形线圈所受合力矩:  $\vec{M} = 0$ .

18、解: (1) 由于绕 O 点转动, 带电线段 AB 上不同位置具有不同的线速度, 在 AB 上任取一

线段元  $dr$ , 其上带电量为  $dq = \lambda dr$ , 它所形成电流的电流强度为:  $dI = \frac{\omega}{2\pi} dq = \frac{\lambda \omega}{2\pi} dr$



根据电流环在圆心产生的磁感应强度的值为  $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$ , 其中 I 为圆电流, R 为圆电流的半径。

因此, 此电流元 O 点磁感应强度的值为:

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0 \lambda \omega dr}{4\pi r}$$

整个带电刚性细杆在 O 点的磁感应强度的值为:

$$B_O = \int dB = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)$$

(2) 旋转的带电线元  $dr$  的磁矩为

$$dP_m = dI \cdot S = \frac{\lambda \omega}{2\pi} dr \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} \lambda \omega r^2 dr$$

旋转的带电刚性细杆 AB 的总磁矩为

$$P_m = \int dP_m = \int_a^{a+b} \frac{1}{2} \lambda \omega r^2 dr = \frac{1}{6} \lambda \omega [(a+b)^3 - a^3]$$

19、解：（1）安培力的计算公式：  $\vec{F} = \int_L Id\vec{l} \times \vec{B}$

$\because$  bc 段与 B 平行  $\therefore \vec{F}_{bc} = \vec{I}\vec{l} \times \vec{B} = 0$

ab 段所受安培力：  $\vec{F}_{ab} = \vec{I}\vec{l} \times \vec{B}$

$F_{ab} = IBl \sin 120^\circ = 10 \times 1 \times 0.1 \times 0.866 = 0.866$  N，方向  $\perp$  纸面向外

同理 ac 段所受安培力：  $\vec{F}_{ca} = \vec{I}\vec{l} \times \vec{B}$

$F_{ca} = IBl \sin 120^\circ = 10 \times 1 \times 0.1 \times 0.866 = 0.866$  N，方向  $\perp$  纸面向里

（2）线圈的磁矩为  $\vec{P}_m = I\vec{S}$ ，对  $OO'$  轴的磁力矩  $\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$ ，沿  $\overrightarrow{OO'}$  方向，大小为

$$M = ISB = I \frac{\sqrt{3}l^2}{4} B = 4.33 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$$

（3）从所在位置转到线圈平面与磁场垂直时磁力所作的功： $A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$

$\because \Phi_1 = 0, \Phi_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 B$

$\therefore A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 B = 4.33 \times 10^{-2} \text{ J}$

### 三、问答题

1、（1）在恒定电流情况下，导体中电荷分布不随时间变化形成恒定电场；（2）恒定电场与静电场具有相似性质，同样满足高斯定理和环路定理，静电场中可引入电势概念；（3）恒定电场的存在伴随能量的转换。

## 第 14 章 电磁感应

### 参考答案

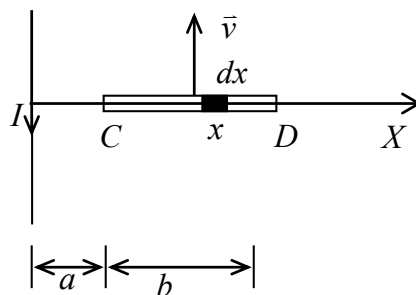
#### 一、选择题

- |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| 1、C  | 2、B  | 3、D  | 4、D  | 5、B  |
| 6、A  | 7、A  | 8、B  | 9、C  | 10、D |
| 11、C | 12、A | 13、B | 14、C | 15、D |

16、D	17、D	18、B	19、D	20、A
21、A	22、B	23、D	24、B	25、C
26、B	27、C	28、D	29、B	30、C
31、C	32、C	33、D	34、C	35、D

## 二、计算题

1、解：建立坐标（如图）在 CD 上取元长  $dx$ ，



则：

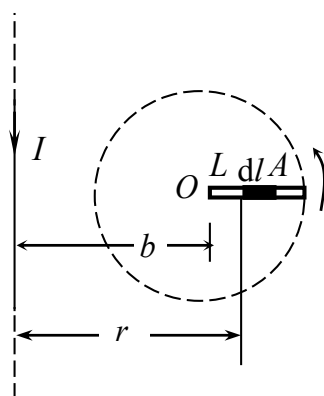
$$d\varepsilon = Bvdx$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$\varepsilon = \int d\varepsilon = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 Iv}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

感应电动势方向：C→D，D 端电势高。

2、解：无限长直导线在金属棒转动平面内激发的磁场是非均匀的，方向垂直纸面向外。



在金属棒上沿 OA 方向任取一线元  $dl$ ， $dl$  至 O 点距离为  $l$ ，距无限长直导线距离为  $r$ ，由无限长直载流导线产生磁场的公式可知，该处的磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{方向垂直纸平面向外})$$

当棒旋转至图示位置时，金属 OA 上各线元的速度方向均垂直各线元沿平面向上，其夹角

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$(\vec{v} \times \vec{B})$  的方向沿 OA 方向, 即  $(\vec{v} \times \vec{B})$  与  $d\vec{l}$  间夹角为零。由于线元  $d\vec{l}$  速度大小  $v = \omega l$ , 所以  $d\vec{l}$  上的动生电动势大小为

$$d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = (vB \sin \frac{\pi}{2}) \cos 0^\circ dl = \omega B l dl$$

金属棒上总的动生电动势大小为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{OA} &= \int_L d\varepsilon = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= \int_0^L \omega B l dl = \int_0^L \frac{\omega \mu_0 I}{2\pi r} l dl \end{aligned}$$

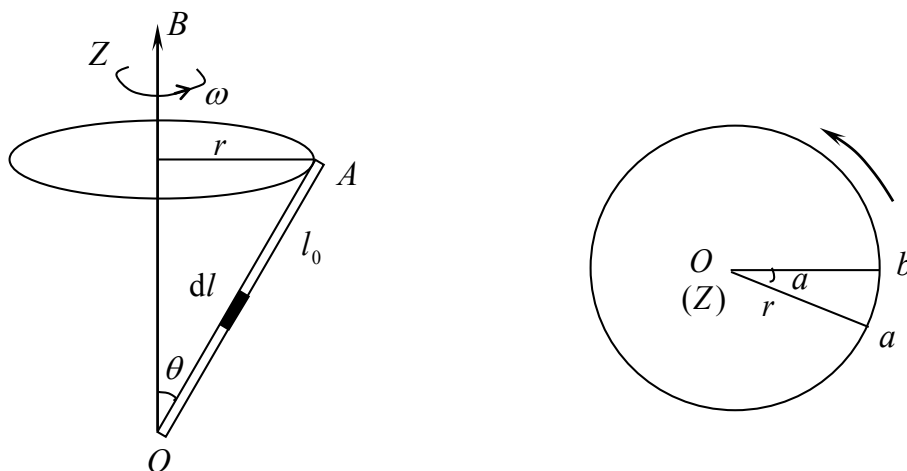
在上式中,  $r, l$  均为变量, 必须先统一变量后才能进行积分, 由图示可知,  $l = r - b, dl = dr$ ,

将其代放上式故

$$\begin{aligned} \varepsilon_{OA} &= \int_b^{b+L} \omega \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (r - b) dr = \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi} \int_b^{b+L} \frac{(r - b)}{r} dr \\ &= \frac{\mu_0 \omega I}{2\pi} (L - b \ln \frac{b+L}{b}) \end{aligned}$$

由  $\varepsilon_{OA} > 0$  或由  $(\vec{v} \times \vec{B})$  可知, 电动势  $\varepsilon_{OA}$  的方向从 O 指向 A, 即 A 点电势高。

3、解: 用动生电动势公式求解。



如图所示, 将金属棒看成为由许多线元组成, 选取距 O 点为  $l$ , 长度为  $d\vec{l}$  的线元, 动生电动势  $d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ , 由题意分析可知,  $\vec{v}$  垂直于  $\vec{B}$ , 且  $v = l \sin \theta \omega$ , 而  $\vec{v} \times \vec{B}$  的方向与  $\vec{B}$

方向垂直, 与线元  $d\vec{l}$  的夹角为  $\frac{\pi}{2} - \theta$ , 所以

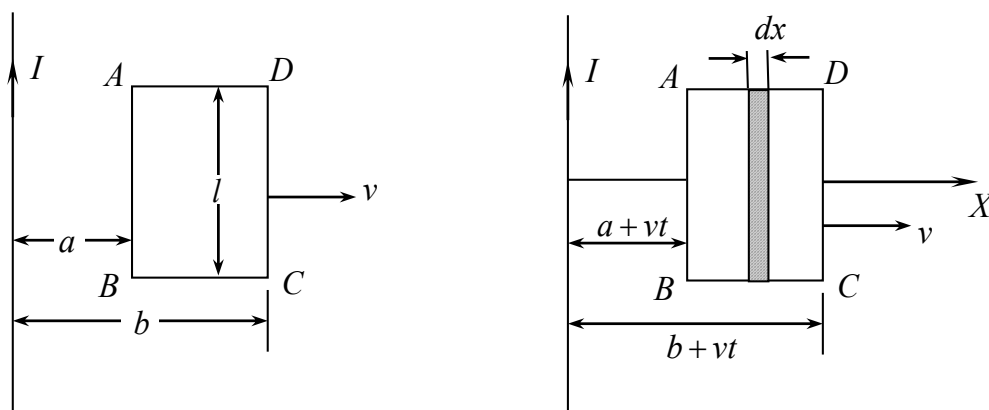
$$d\varepsilon = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = l \sin \theta \omega B dl \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = l \omega B \sin^2 \theta dl$$

对于整个金属棒来说，其电动势为

$$\varepsilon = \int d\varepsilon = \int_0^{l_0} l \omega B \sin^2 \theta dl = \frac{1}{2} \omega B l_0^2 \sin^2 \theta$$

结果表明， $\varepsilon > 0$ ，即与  $\vec{v} \times \vec{B}$  的方向一致，即 A 端电势高于 O 端电势，电动势  $\varepsilon$  的方向由 O 指向 A。

4、解：由于 I 为稳恒电流，所以它在空间各点产生的磁场为稳恒磁场。当矩形线圈 ABCD 运动时，不同的时刻通过线圈的磁通量发生变化，故有感应电动势产生。取坐标系如图 (a) 所示。



设矩形线圈以速度  $v$  以图示位置开始运动，则经过时间  $t$  之后，线圈位置如图 (b) 所示，取面积元  $dS = ldx$ ，距长直导线的距离为  $x$ ，按无限长直载流导线的磁感应强度公式知，该面积元处  $\vec{B}$  的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

通过该面积元的磁通量为

$$d\Phi = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx$$

于是通过线圈的磁通量为

$$\Phi(t) = \int d\Phi = \int_{a+vt}^{b+vt} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{a+vt}^{b+vt} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{b+vt}{a+vt}$$

由法拉第电磁感应定律可知，N 匝线圈内的感应电动势为

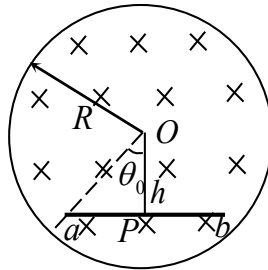
$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I N}{2\pi} \frac{a+vt}{b+vt} \left[ \frac{(a+vt)v - (b+vt)v}{(a+vt)^2} \right]$$

令  $t=0$ ，并代入数据，则得线圈刚离开直导线时的感应电动势

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -N \frac{d\Phi}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\mu_0 I N}{2\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{\mu_0 N I v (b-a)}{2\pi a b} \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10^3 \times 0.2 \times 5.0 \times 3.0 \times (0.2-0.1)}{2\pi \times 0.1 \times 0.2} = 3.0 \times 10^{-3} \text{ (V)} \end{aligned}$$

按楞次定律可知  $\varepsilon$  的方向为图 (b) 中的顺时针方向。

5、解：用  $\varepsilon = \int_a^b E_V \cdot dl$  求解。



$$\varepsilon = \int_a^b E_V \cdot dl = \int_a^b E_V \cos\theta \cdot dl \dots$$

因为

$$E_V(r < R) = \frac{1}{2} \frac{dB}{dt} r = \frac{1}{2} \frac{dB}{dt} \frac{h}{\cos\theta}$$

$$dl = d(h \tan\theta) = h d(\tan\theta) \dots$$

所以

$$\varepsilon = \int_a^b \frac{1}{2} \frac{dB}{dt} \frac{h}{\cos\theta} \cdot \cos\theta \cdot h d(\tan\theta) = \frac{1}{2} \frac{dB}{dt} h^2 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d(\tan\theta) = \frac{dB}{dt} h^2 \tan\theta_0。$$

6、解：(1) 由于系统具有轴对称性，可求出感生电场。在磁场中取圆心为 O，半径为  $r(r < R)$

的圆周，根据感生电场与变化磁场之间的关系

$$\oint_L \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

可得

$$E_V \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = -\pi r^2 k$$

有

$$E_r = -\frac{r}{2}k \quad (r < R)$$

由楞次定律可以判定感生电场为逆时针方向。

(2) 用法拉第电磁感应定律求解。连接  $\overline{Oa}$ ,  $\overline{Ob}$  和  $\overline{Oc}$ , 在回路  $OabO$  中, 穿过回路所围面积的磁通量为

$$\Phi = -BS = -\frac{1}{2}lBh = -\frac{1}{2}Bl\left(R^2 - \frac{l^2}{4}\right)^{1/2}$$

则

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2}l\left(R^2 - \frac{l^2}{4}\right)^{1/2} \frac{dB}{dt} = \frac{1}{2}l\left(R^2 - \frac{l^2}{4}\right)^{1/2}k$$

而

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bo} + \varepsilon_{oa} = \varepsilon_{ab}$$

所以

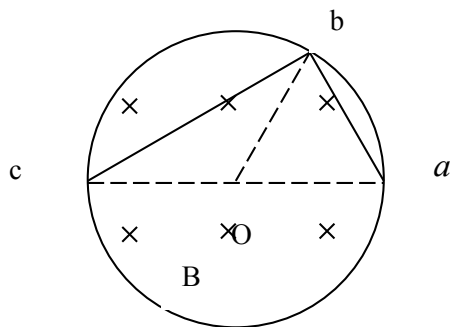
$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{1b} = \frac{1}{2}lk\left(R^2 - \frac{l^2}{4}\right)^{1/2}$$

方向由 a 指向 b. .

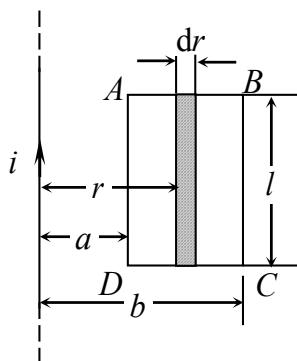
同理可得

$$\varepsilon_{bc} = \frac{1}{2}lk\left(R^2 - \frac{l^2}{4}\right)^{1/2}$$

方向由 b 指向 c. .



7、解:



(1) 无限长直导线中通有交变电流，其周围空间产生交变磁场，根据无限长直载流导线产生磁场的公式可知，此交变磁场的磁感应强度的表达式为

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \sin \omega t$$

在距导线  $r$  远处，取面元  $ldr$ ，穿过该面元的磁通量为

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cos \theta dS = BdS = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \sin \omega t \cdot ldr$$

在  $t$  时刻穿过回路 ABCD 的磁通量为

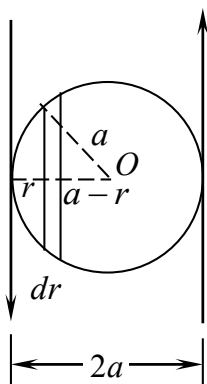
$$\Phi = \int d\Phi = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^b \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \sin \omega t \cdot ldr = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{a}{b} \right) I_0 \sin \omega t$$

(2) 根据法拉第电磁感应定律，将  $\Phi$  对时间  $t$  求导数，得回路 ABCD 中的感应电动势

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 l \omega}{2\pi} \left( \ln \frac{b}{a} \right) I_0 \cos \omega t$$

其方向作周期性变化。

8、解：



由题意可知，两平行长直导线中电流  $I$  相同而反向，可视为在无限远连通的闭合回路。设两平行长直导线构成的闭合载流回路所产生的磁场通过圆环的磁通量为  $\Phi$ 。则  $\Phi$  与  $I$  之比即为系统的互感系数。如图所示，设在无限远连通的两平行直导线构成的闭合回路中的电流为  $I$ ，则在此闭合回路平面中，由无限长载流直导线产生磁场的公式可知，与其中一根长直载流导线相距为  $r$  处的磁场为



$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{2a-r} \right) ..$$

$B(r)$  的方向垂直于纸面向外。因此，通过半圆环  $S'$  的磁通量为

$$\Phi' = \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^a \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{2a-r} \right) 2\sqrt{a^2 - (a-r)^2} dr = \mu_0 I a ..$$

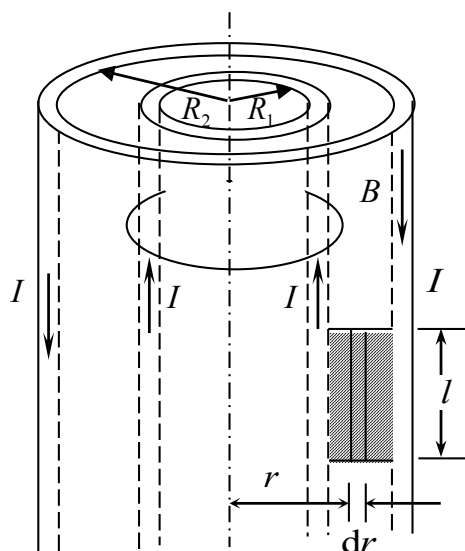
通过整个圆环面的磁能量为

$$\Phi = 2\Phi' = 2\mu_0 I a$$

由互感系数的定义，两平行无限长导线与嵌在其间的圆环之间的互感系数为

$$M = \frac{\Phi}{I} = 2\mu_0 a$$

9、解：



因二筒上的电流等值反向，这就构成了一个电流回路。此电流系统的磁场仅分布在二筒之间，磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

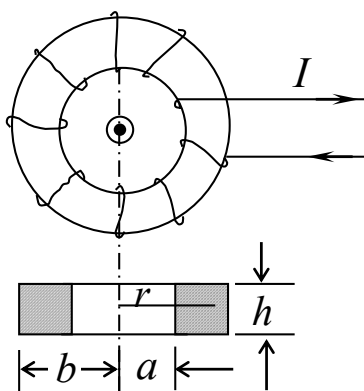
由磁通量关系式可得图中阴影部分所示长度为  $l$  的矩形上的磁通量为

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} B l dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

代入自感系数的定义式，二筒单位长度上的自感系数为

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

10、解：



(1) 由于螺绕环具有轴对称性，则可由安培环路定理求出螺绕环内部的磁感应强度  $B$ 。在环内取半径为  $r$  的圆，圆周上各点  $B$  相等，由安培环路定理

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI$$

得  $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$ ， $\vec{B}$  的方向由右手法则确定。穿过螺绕环的磁通链

$$\Psi = N \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \int_a^b \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} h \cdot dr = \frac{\mu_0 N^2 h I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

所以自感系数

(2) 无限长直电流  $I_1$  的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

则螺绕环中的磁通链

$$\Psi_{21} = N \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \int_a^b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} h \cdot dr = \frac{\mu_0 N h I_1}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

所以互感系数为

### 三、问答题

1、(1) 起源不同：静电场由静止电荷激发；而涡旋电场则起源于变化的磁场。

(2) 性质不同：静电场是有源无旋场（电场线不闭合，有头有尾），从而静电场是保守力场（势场）；涡旋电场是无源有旋场（电场线闭合，无头无尾），从而涡旋电场是非保守场（无势场）。

# 第 16 章 光的干涉

## 参考答案

### 一、选择题

- 1、A    2、A    3、C    4、B    5、A    6、A    7、B    8、C    9、A    10、A  
11、B    12、B    13、B    14、C    15、A    16、B    17、A    18、C    19、D    20、A  
21、B    22、A    23、B    24、A

### 二、计算题

- 1、解：根据双缝干涉实验中相邻明（暗）条纹间距的公式  $\Delta x = \frac{\lambda D}{a}$ ，

代入  $a=1.2 \text{ mm}$ ， $\lambda=6.0 \times 10^{-4} \text{ mm}$ ， $D=500 \text{ mm}$

可得  $\Delta x=0.25 \text{ mm}$ 。

- 2、解：根据双缝干涉实验中相邻明（暗）条纹间距公式  $\Delta x = \frac{\lambda D}{a}$ ，

$$\text{可得 } \lambda = \frac{a \Delta x}{D}$$

代入  $a=0.45 \text{ mm}$ ， $\Delta x=1.5 \text{ mm}$ ， $D=1200 \text{ mm}$

$$\text{可得 } \lambda = \frac{a \Delta x}{D} = \frac{0.45 \times 1.5}{1200} = 562.5 \text{ nm}。$$

- 3、解：根据题意，在未放入玻璃片时，P 点为第 5 级条纹中心位置，对应的光程差为

$$\delta = r_2 - r_1 = 5\lambda \quad (1)$$

如图所示，在加入玻璃片后，P 点对应的光程差

$$\delta = r_2 - [nd_0 + (r_1 - d_0)] = 0\lambda \quad (2)$$

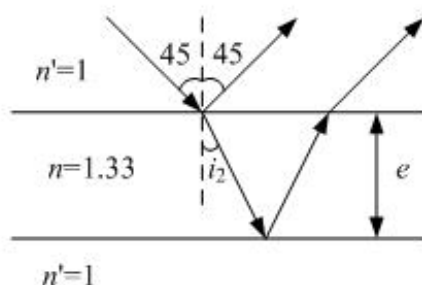
由(2)式可得

$$-(n-1)d_0 + r_2 - r_1 = 0$$

所以，玻璃板的厚度为：

$$d_0 = \frac{5\lambda}{n-1} = \frac{5 \times 6.0 \times 10^{-7}}{1.5-1} = 6.0 \times 10^{-6} \text{ m}$$

- 4、解：根据题意，做图



入射到肥皂水薄膜表面光线的入射角是 45 度，可以求出光在薄膜内的折射角  $i_2$  为：

$$1.0 \times \sin 45^\circ = 1.33 \times \sin i_2$$

解出  $i_2 = 32.12^\circ$ ， $\cos i_2 = 0.8470$

由于光在空气中的肥皂膜上表面反射时有  $\pi$  相位变化，而在其下表面反射时无  $\pi$  相位的变化，因此，光程差中要计入半波损失，对于相干加强的 500nm 的绿光，应满足：

$$2ne \cos i_2 + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

根据题意，最薄厚度应取  $k=1$ ，将题中各值代入上式，得肥皂膜的厚度为：

$$e = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{2n \cos i_2} = \frac{500 \times 10^{-6}}{2} \frac{1}{2 \times 1.33 \times 0.8470} = 1.11 \times 10^4 \text{ nm}$$

当垂直注视该肥皂水薄膜时， $\cos i_2 = 1$ ，故此时看到的相干加强的波长  $\lambda'$  应满足

$$2ne + \frac{\lambda'}{2} = k'\lambda'$$

代入数据，

当  $k'=1$  时，可得光波的波长为  $\lambda' = 590.3 \text{ nm}$ ，此为黄绿光。

当  $k'=2$  时，可得光波的波长为  $\lambda' = 196.8 \text{ nm}$ ，此为紫外光，眼睛看不到。

因此，当垂直注视该肥皂水薄膜时，可看到黄绿光。

5、解：当上下两表面反射光的光程差为半波长的奇数倍，即

$$\delta = (2k+1) \frac{\lambda}{2}, (k=0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

时，产生干涉相消，此时透射光最强。

因为  $n_1 < n < n_2$ ，反射光无附加光程差，所以在垂直入射情况下，上下表面反射光光程差可以表示为：

$$\delta = 2dn \quad (2)$$

联立 (1)、(2) 两式，有：

$$2dn = (2k+1) \frac{\lambda}{2}, (k=0, 1, 2, \dots)$$

依题意可知， $i_2 = 0$ ， $k=0$ ，所以有：

$$d = (2k+1) \frac{\lambda}{4n_2} = (2 \times 0 + 1) \frac{550 \times 10^{-9}}{4 \times 1.38} \approx 10^{-5} \text{ cm}$$

6、解：垂直入射时，薄膜干涉的光程差为

$$\delta = \delta_0 + \delta'$$

其中  $\delta_0$  为传播光程差， $\delta'$  为附加光程差。

因玻璃的折射率为 1.5，依题意，传播光程差  $\delta_0$  为：

$$\delta_0 = 2n_2d$$

因玻璃膜放置在空气中，所以，属于反射条件不同的情况，因此，附加光程差为  $\frac{\lambda}{2}$ ，故

$$\delta = \delta_0 + \delta' = 2n_2d - \frac{\lambda}{2}$$

依题意可知，当  $\delta$  为半波长的偶数倍时，出现干涉相长现象，即：

$$\delta = 2dn_2 - \frac{\lambda}{2} = 2j \frac{\lambda}{2} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

时，反射光干涉相长（加强）。

代入数据，有：

$$2n_2d = (2j+1) \frac{\lambda}{2}, \quad \lambda = \frac{4n_2d}{2j+1} = \frac{4 \times 1.5 \times 1.2 \times 10^{-6}}{2j+1} = \frac{7.2 \times 10^{-6}}{2j+1}$$

$$\text{当 } j=0 \text{ 时, } \lambda = \frac{4n_2d}{2j+1} = 72000 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$\text{当 } j=1 \text{ 时, } \lambda = \frac{4n_2d}{2j+1} = 24000 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$\text{当 } j=2 \text{ 时, } \lambda = \frac{4n_2d}{2j+1} = 14400 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$\text{当 } j=3 \text{ 时, } \lambda = \frac{4n_2d}{2j+1} = 1285.7 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$\text{当 } j=4 \text{ 时, } \lambda = \frac{4n_2d}{2j+1} = 8000 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$\text{当 } j=5 \text{ 时, } \lambda = \frac{4n_2d}{2j+1} = 6545.5 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$\text{当 } j=6 \text{ 时, } \lambda = \frac{4n_2d}{2j+1} = 5538.5 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$\text{当 } j=7 \text{ 时, } \lambda = \frac{4n_2d}{2j+1} = 4800 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$\text{当 } j=8 \text{ 时, } \lambda = \frac{4n_2d}{2j+1} = 4235.3 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$\text{当 } j=9 \text{ 时, } \lambda = \frac{4n_2d}{2j+1} = 3789.8 \times 10^{-10} \text{ m}$$

所以在可见光中,  $j=5、6、7、8$ , 对应的波长为 654.55、553.85、480.00、423.55nm, 从玻璃片反射的光最强。

7、解: (1) 每条明纹宽度为  $\Delta x = \frac{D\lambda}{d}$

代入数据, 有:

$$\Delta x = \frac{2 \times 500 \times 10^{-9}}{2 \times 10^{-4}} \text{ m} = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

(2) 中央明纹两侧的两条第 10 级明纹间距应为  $20 \Delta x$ , 根据题意, 代入数据得:

$$20 \Delta x = 0.1 \text{ m}$$

(3) 根据题意, 有:

$$e(n-1) = 7\lambda$$

所以有

$$n = 1 + \frac{7\lambda}{e} = 1.53$$

8、解: 在双缝干涉实验中, 条纹间的间距为:

$$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda \tag{1}$$

根据题意, 屏上 20 条明纹之间的距离为  $9.84 \times 10^{-2} \text{ m}$ , 即

$$20 \Delta x = 9.84 \times 10^{-2} \text{ m}$$

故条纹间距  $\Delta x$

$$\Delta x = \frac{9.84 \times 10^{-2}}{20} \text{ m} = 4.92 \times 10^{-3} \text{ m}$$

将缝间距为  $d = 2.2 \times 10^{-4} \text{ m}$ 、屏到双缝的距离为  $D = 1.8 \text{ m}$  和条纹间距  $\Delta x$  代入 (1) 式, 可得:

$$\lambda = \frac{\Delta x \cdot d}{D} = \frac{4.92 \times 10^{-3} \times 2.2 \times 10^{-4}}{1.8} m = 6.01 \times 10^{-7} m = 601.3 nm$$

### 三、问答题

1、光的干涉的基本条件包括以下三个方面：

1 是频率相同， 2 是振动方向一致， 3 是相位差恒定，但不能过大。

根据光的干涉条件，玻璃窗户厚度太大，造成相位差太大，导致观察不到干涉条纹，或者条纹的级别过大。

但是将两块玻璃叠在一起，有些地方形成空气薄膜，形成等厚干涉。

2、光波发生半波损失需要具备以下两个基本条件：

1) 反射光才有半波损失。

2) 从光疏物质向光密物质入射时的反射光才有。

3、将入射光从牛顿环的下方入射，从牛顿环的上方观察。由于是透射光，空气薄膜。无半波损失，中心厚度为零，故光程差为 0，为明斑。

4、两个独立光源发出光波的初相位瞬息万变，光叠加区域任一点相位差的不稳定程度远超出人眼和普通检测器的检测能力。

## 第 17 章 光的衍射

### 参考答案

#### 一、选择题

1、D    2、B    3、C    4、C    5、C    6、B    7、B    8、D    9、B    10、D  
11、B    12、D    13、B    14、D    15、B    16、D    17、D    18、C    19、C    20、B

#### 二、计算题

1、解：（1）根据单缝的夫琅禾费衍射中衍射角、缝宽和波长之间的关系

$$a \sin \theta = \pm k \lambda \quad (k=1,2,3, \dots) , \quad k \text{ 为暗纹级数}$$

$$\text{可得：} \quad a = \frac{k \lambda}{\sin \theta}$$

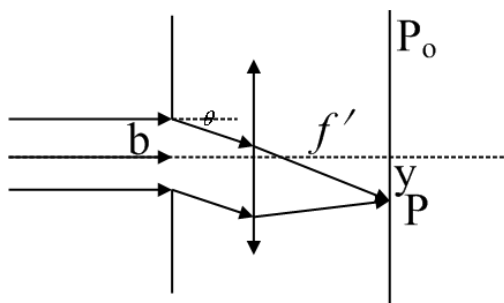
根据题意，代入数据，有：

$$a = \frac{500nm}{\sin 30^\circ} = 1000nm$$

$$(2) \Delta x_{\text{中央明纹}} = 2f\theta_0 = 2f \frac{\lambda}{a} = 2 \times 10^{-3} m$$

$$\Delta x_{\text{第一级明纹}} = f \frac{\lambda}{a} = 1 \times 10^{-3} m$$

2、解：根据题意，作图如下：



根据单缝衍射中各要素之间的关系，衍射角可以表示为：

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} b \sin\theta \approx \frac{2\pi}{\lambda} b \tan\theta = \frac{2\pi}{\lambda} b \frac{y}{f'}$$

将上式变形，可得：

$$y = \frac{\lambda f'}{2\pi b} \Delta\phi$$

代入数据，可得两种情况下（缝的两边到  $P$  点的相位差为  $\frac{\pi}{2}$  和  $\frac{\pi}{6}$ ）， $P$  点离焦点的距离  $P_1$ 、 $P_2$  分别为：

$$P_1 = \frac{\lambda f'}{2\pi b} \Delta\phi_1 = \frac{480 \times 10^{-9} \times 60 \times 10^{-2}}{2\pi \times 0.4 \times 10^{-3}} \times \frac{\pi}{2} = 0.18 \text{ mm}$$

$$P_2 = \frac{\lambda f'}{2\pi b} \Delta\phi_1 = \frac{480 \times 10^{-9} \times 60 \times 10^{-2}}{2\pi \times 0.4 \times 10^{-3}} \times \frac{\pi}{6} = 0.06 \text{ mm}$$

3、解：单缝衍射次最大的位置为

$$\sin\theta_{k_0} \approx \pm \left( k_0 + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{b}$$

第三个次最大可以表示为

$$\sin\theta_{30} \approx \pm \left( 3 + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{b} = \pm \frac{7}{2} \frac{\lambda_1}{b}$$

第二个次最大可以表示为

$$\sin\theta_{20} \approx \pm \left( 2 + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{b} = \pm \frac{5}{2} \frac{\lambda_2}{b}$$

据题意有：



$$\pm \frac{7}{2} \frac{\lambda_1}{b} = \pm \frac{5}{2} \frac{\lambda_2}{b}$$

从而得：

$$\lambda_1 = \frac{5}{7} \lambda_2 = \frac{5}{7} \times 6000 \approx 428.6 \text{ nm}$$

4、解：光栅方程为：

$$d \sin \theta_k = j \lambda \quad (j=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots)$$

$$\text{由题意可知光栅常数 } d = \frac{1}{N} = \frac{1 \times 10^{-3}}{50} = 2 \times 10^{-5} \text{ m}$$

对于白光，第一级的末端为红光，对应波长为 760nm

$$\sin \theta_1 = j \frac{\lambda}{d} = 1 \times \frac{760 \times 10^{-9}}{2 \times 10^{-5}} = 3.8 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

第二级的始端为紫光，对应波长为 400nm

$$\sin \theta_2 = j \frac{\lambda}{d} = 2 \times \frac{400 \times 10^{-9}}{2 \times 10^{-5}} = 4.0 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

所以衍射角之差为

$$\Delta \theta = \arcsin(4.0 \times 10^{-2}) - \arcsin(3.8 \times 10^{-2}) \approx 0.2 \times 10^{-2} \text{ rad} = 0.2 \times 10^{-2} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 7'$$

5、解：(1) 由题意可得光栅常数

$$d = \frac{1 \times 10^{-3}}{400} = 2.5 \times 10^{-6} \text{ m}$$

当光垂直入射时，由光栅方程

$$d \sin \theta_k = j \lambda \quad (j=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots)$$

代入数据，有：

$$2.5 \times 10^{-6} \times \sin 90^\circ = j \times 589 \times 10^{-9}$$

得：

$$j = 4.24$$

所以最多能看到第 4 级光谱

(2) 当光以  $30^\circ$  入射时，此时对应的光栅方程为

$$d(\sin \theta_0 \pm \sin \theta_k) = j \lambda$$

代入数据，有：

$$2.5 \times 10^{-6} \times (\sin 30^\circ \pm \sin 90^\circ) = j \times 589 \times 10^{-9}$$

得：

$$j = 6.36 \text{ 或 } j = -2.12$$

所以最多能可以看到第 6 级光谱。

6、解：由题意可得光栅常数为：

$$d = \frac{1 \times 10^{-3}}{250} = 4.0 \times 10^{-6} \text{ m}$$

当光垂直入射时，光栅方程为：

$$d \sin \theta_k = j \lambda \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\text{当 } j = 1 \text{ 时, } 4.0 \times 10^{-6} \times \sin 30^\circ = 1 \times \lambda, \quad \lambda = 2000 \times 10^{-9} \text{ m}$$

$$\text{当 } j = 2 \text{ 时, } 4.0 \times 10^{-6} \times \sin 30^\circ = 2 \times \lambda, \quad \lambda = 1000 \times 10^{-9} \text{ m}$$

$$\text{当 } j = 3 \text{ 时, } 4.0 \times 10^{-6} \times \sin 30^\circ = 3 \times \lambda, \quad \lambda = 666.7 \times 10^{-9} \text{ m}$$

$$\text{当 } j = 4 \text{ 时, } 4.0 \times 10^{-6} \times \sin 30^\circ = 4 \times \lambda, \quad \lambda = 500 \times 10^{-9} \text{ m}$$

$$\text{当 } j = 5 \text{ 时, } 4.0 \times 10^{-6} \times \sin 30^\circ = 5 \times \lambda, \quad \lambda = 400 \times 10^{-9} \text{ m}$$

$$\text{当 } j = 6 \text{ 时, } 4.0 \times 10^{-6} \times \sin 30^\circ = 6 \times \lambda, \quad \lambda = 333.3 \times 10^{-9} \text{ m}$$

可出现的光有紫光 400nm、绿光 500nm、红光 666.7nm

7、解：（1）单缝衍射图样的中央角宽度为

$$2\theta = 2 \frac{\lambda}{b} = 2 \times \frac{6240 \times 10^{-7}}{0.012} = 0.104 \text{ rad,}$$

（2）由光栅方程  $d \sin \theta_k = j \lambda$ ，中央角半宽为  $\theta \approx \sin \theta$ ，所以

$$j = \frac{d \sin \theta}{\lambda} = \frac{0.041 \times \frac{0.104}{2}}{0.012} = 3.42$$

即能看到的 3 级的光谱，0、 $\pm 1$ 、 $\pm 2$ 、 $\pm 3$  共 7 条谱线。

（3）谱线的半角宽度由  $\Delta \theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}$ ，当衍射角  $\theta$  很小时， $\cos \theta \approx 1$

$$\Delta \theta = \frac{\lambda}{Nd} = \frac{624 \times 10^{-9}}{10^3 \times 0.041 \times 10^{-3}} = 1.52 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

8、解：由光栅公式  $(a+b) \sin \varphi = k \lambda$ ，可得：

$$\sin\varphi = \frac{k\lambda}{a+b} = 0.2357k$$

代入数据，计算：

$$k=0, \quad \varphi=0$$

$$k=\pm 1, \quad \varphi_1 = \pm \sin^{-1}0.2357 = \pm 13.6^\circ$$

$$k=\pm 2, \quad \varphi_2 = \pm \sin^{-1}0.4714 = \pm 28.1^\circ$$

$$k=\pm 3, \quad \varphi_3 = \pm \sin^{-1}0.7071 = \pm 45.0^\circ$$

$$k=\pm 4, \quad \varphi_4 = \pm \sin^{-1}0.9428 = \pm 70.5^\circ$$

9、一平行单色光投射于衍射光栅上，其方向与光栅的法线成  $\theta_0$  角，在和法线  $11^\circ$  和  $53^\circ$  角的方向上发现第一级谱线，且位于法线的两侧。

(1) 试求入射角  $\theta_0$

(2) 试问为什么在法线两侧能观察到一级谱线，而在法线同侧能观察到二级谱线？

解：(1) 根据题意有

$$d(\sin\theta_0 + \sin\theta) = \lambda \quad (\text{同侧})$$

$$d(\sin\theta_0 - \sin\theta') = -\lambda \quad (\text{异侧})$$

两式相加，可得

$$2\sin\theta_0 = \sin\theta - \sin\theta'$$

$$\theta_0 \approx \frac{1}{2}(\theta - \theta') = \frac{1}{2}(\sin 53^\circ - \sin 11^\circ) \approx 17.7^\circ$$

(2) 当一级谱线位于法线两侧时：

$$d(\sin\theta_0 - \sin\theta') = -j\lambda$$

$$\sin\theta' = \sin\theta_0 + j\frac{\lambda}{d}$$

对于  $j=1$  的谱线， $\frac{\lambda}{d} = \sin\theta' - \sin\theta_0 = 0.49$

对于  $j=2$  的谱线， $\sin\theta' = \sin\theta_0 + 2\frac{\lambda}{d} = 0.30 + 2 \times 0.49 = 1.28 > 1$ ，所以在法线两侧时，观察不到第二级谱线。

当位于法线同侧时， $d(\sin\theta_0 + \sin\theta) = j\lambda$

当  $j=2$  时， $\sin\theta = 2\frac{\lambda}{d} - \sin\theta_0 = 2 \times 0.49 - 0.30 = 0.68 < 1$

所以在法线同侧时，能观察到第二谱线。

10、解：（1）由已知条件可知  $a+b=4a$

$$4a \sin \theta = k\lambda$$

$$a \sin \theta = k' \lambda$$

其中  $k'=1, k=4$ , 所以，在中央明纹中只有  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$  缺级，共可见 7 条。

（2） $k'=2, k=8$ , 第 8 级缺级。在第一级明纹中， $\pm 5, \pm 6, \pm 7$  可见，所以，每一级明纹范围内可见 3 条。

## 第 19 章 早期量子论和量子力学基础

### 参考答案

#### 一、选择题

1、D    2、A    3、A    4、D    5、C    6、C    7、D    8、B    9、C    10、D

#### 二、计算题

1、实验表明，黑体辐射实验曲线的峰值波长  $\lambda_m$  和黑体温度的乘积为一常数，即  $\lambda_m T = b = 2.897 \times 10^{-3} \text{m} \cdot \text{K}$ 。实验测得太阳辐射波谱的峰值波长  $\lambda_m = 510 \text{nm}$ ，设太阳可近似看作黑体，试估算太阳表面的温度。

解：太阳表面的温度大约为

$$T = \frac{b}{\lambda_m} = \frac{2.897 \times 10^{-3}}{510 \times 10^{-9}} = 5680 (\text{K}).$$

2、铝表面电子的逸出功为  $6.72 \times 10^{-19} \text{J}$ ，今有波长为  $\lambda = 2.0 \times 10^{-7} \text{m}$  的光投射到铝表面上。试求：（1）由此产生的光电子的最大初动能；（2）遏止电势差；（3）铝的红限波长。

解：（1）光子的能量为  $E = h\nu = hc/\lambda$ ,

根据爱因斯坦光电效应方程:  $h\nu = E_k + A$ ,

产生的光电子的最大初动能为:

$$E_k = h\nu - A = 6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 / 2.0 \times 10^{-7} - 6.72 \times 10^{-19} = 3.23 \times 10^{-19} (\text{J}).$$

（2）遏止电势差的公式为  $eU_a = E_k$ ,

遏止电势差为:

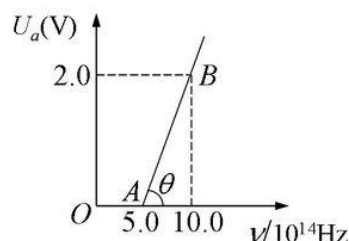
$$U_a = E_k/e = 3.23 \times 10^{-19} / 1.6 \times 10^{-19} = 2.0(\text{V}).$$

(3) 铝的红限频率为  $\nu_0 = A/h$ , 红限波长为

$$\lambda_0 = c/\nu_0 = hc/A = 6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 / 6.72 \times 10^{-19} = 2.96 \times 10^{-7}(\text{m}).$$

3、图中所示为在一次光电效应实验中得出的曲线。

- (1) 由图中数据求出该金属的红限频率;
- (2) 求证: 对不同材料的金属, AB 线的斜率相同;
- (3) 由图上数据求出普朗克恒量  $h$ 。(基本电荷



$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C})$$

解: (1) 由图中数据可知, 该金属的红限频率  $\nu_0 = 5.0 \times 10^{14} \text{ Hz}$

(2) 由  $e|U_a| = h\nu - A$  得  $|U_a| = h\nu/e - A/e$ , 即  $d|U_a|/d\nu = h/e$  (恒量) 由此可知, 对不同金属, 曲线的斜率相同。

$$(3) h = e \frac{2.0 - 0}{(10.0 - 5.0) \times 10^{14}} = 6.4 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

4、波长为  $0.04 \text{ nm}$  的 X 射线经物质散射后产生康普顿效应。若散射角等于  $90^\circ$ ,

试求: (1) 散射光波长; (2) 反冲电子获得的能量; (3) 反冲电子动量的的大小和方向。(康普顿波长  $\lambda_c = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$ ,  $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ )

解 (1) 由康普顿散射公式, 有

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (1)$$

$$= 2 \times 0.024 \times \sin^2 45^\circ$$

$$= 0.0024 \text{ nm}$$

散射光波长

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = 0.04 + 0.002$$

$$= 0.0424 \text{ (nm)} = 4.24 \times 10^{-12} \text{ (m)}$$

(2) 反冲电子动能等于入射 X 射线与散射光波能量之差, 故

$$E_k = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = hc \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$= 6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \times \left( \frac{1}{0.4} - \frac{1}{0.424} \right) \times 10^{10} \quad (2)$$

$$= 2.81 \times 10^{-16} \text{ (J)} = 1.76 \times 10^3 \text{ (eV)}$$

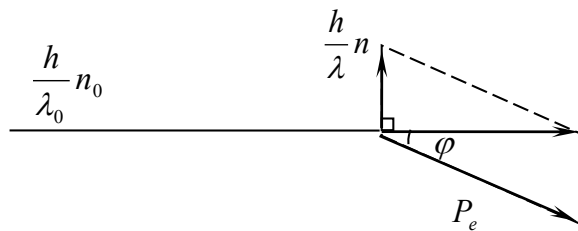
(3) 如图所示, 根据动量守恒, 有

$$P_e = h \left( \frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{h}{\lambda_0 \lambda} (\lambda_0^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{0.4 \times 0.424 \times 10^{-20}} \times (0.4^2 + 0.424^2)^{\frac{1}{2}} \times 10^{-10}$$

$$= 2.28 \times 10^{-23} \text{ (kg} \cdot \text{m/s)}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\lambda_0}{\lambda} = \arctan \frac{0.4}{0.424} = 43.3^\circ$$



5、 $\alpha$  粒子在磁感应强度为  $B = 0.025 \text{ T}$  的均匀磁场中沿半径为  $R = 0.83 \text{ cm}$  的圆形轨道运动。(1)试计算其德布罗意波长, (2)若使质量  $m = 0.1 \text{ g}$  的小球以与 $\alpha$ 粒子相同的速率运动。则其波长为多少?

$$(m_\alpha = 6.64 \times 10^{-27} \text{ kg}, h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}, e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C})$$

解: (1) 德布罗意公式:  $\lambda = h/(mv)$

由题可知 $\alpha$ 粒子受磁场力作用作圆周运动

$$\therefore qvB = m_\alpha v^2 / R, \quad m_\alpha v = qRB$$

$$\text{另} \quad q = 2e \quad \therefore m_\alpha v = 2e R B$$

$$\text{故} \quad \lambda_\alpha = h/(2eRB) = 1.00 \times 10^{-11} \text{ m} = 1.00 \times 10^{-2} \text{ nm}$$

$$(2) \text{ 由上一问可得 } v = 2eRB / m_\alpha$$

对于质量为  $m$  的小球

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{2eRB} \cdot \frac{m_{\alpha}}{m}$$

$$= \frac{m_{\alpha}}{m} \cdot \lambda_{\alpha} = 6.64 \times 10^{-34} \text{ m}$$

6、假定对某个粒子动量的测定可精确到千分之一，试确定这个粒子位置的最小不确定量。

(1) 该粒子质量为  $5 \times 10^{-3} \text{ kg}$ ，以  $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度运动；

(2) 该粒子是速度为  $1.8 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的电子。

解：粒子的动量为  $p = mv$ ，

动量的不确定量为  $\Delta p = p/1000$ ，

根据动量和位置的不确定关系  $\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2$ ，

位置的不确定量为  $\Delta x = \hbar/2\Delta p$ 。

$$(1) \Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = \frac{1000\hbar}{4\pi mv} = \frac{1000 \times 6.63 \times 10^{-34}}{4\pi \times 5 \times 10^3 \times 2} = 5.276 \times 10^{-30} (\text{m}).$$

$$(2) \Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = \frac{1000\hbar}{4\pi mv} = \frac{1000 \times 6.63 \times 10^{-34}}{4\pi \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1.8 \times 10^8} = 3.22 \times 10^{-10} (\text{m}).$$