2019-2020 学年第 1 学期高等数学 1

期末试卷 A 答案与评分标准

一、**填空题**（每小题 3 分，共 15 分）

1. $[1,+\infty)$　　2. 2　　3. $\mathrm{d}x$　　4. $\dfrac{\pi}{4}$　　5. $C_1+C_2\mathrm{e}^{4x}$

二、**选择题**（每小题 3 分，共 15 分）

B　C　A　D　B

三、**计算下列各题**（每小题 4 分，共 20 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\frac{\cos x-1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x^2}}$ ……………………（**1 分**）

$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}$ ……………………（**1 分**）

$=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ ……………………（**2 分**）

2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{\sin x}\right)$

$=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\sin x\ln x}\right)$ ……………………（**1 分**）

$=\mathrm{e}^{\sin x\ln x}(\sin x\ln x)'$ ……………………（**1 分**）

$=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$ ……………………（**2 分**）

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)}{\mathrm{e}^{x^2}}$ ……………………（**2 分**）

$=\dfrac{0}{1}=0$ ……………………（**2 分**）

4. $\displaystyle\int\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

$=\displaystyle\int\frac{1}{(1+t^2)t}2t\mathrm{d}t=2\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ ……………………（**2 分**）

$=2\arctan t+C$ ……………………………………………………………（1 分）

$=2\arctan\sqrt{x}+C$ ………………………………………………………（1 分）

5. $\int_{-1}^{1}(2+x)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

$=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ ……………………………（1 分）

$=4\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ ……………………………………………………（1 分）

$=4\dfrac{1}{4}\pi 1^2=\pi$ ……………………………………………………………（2 分）

四、求解下列各题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 设 $xy-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=0$，求 $y'(0)$ 与 $y''(0)$.

解： $y(0)=0$， ……………………………………………………………（1 分）

方程两边求导得 $y+xy'-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y y'=0$， ……………………………………（1 分）

于是 $y'(0)=1$， ……………………………………………………………（1 分）

再求导得 $2y'+xy''-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y y''+\mathrm{e}^y(y')^2=0$， ……………………………（1 分）

于是 $y''(0)=-2$. ……………………………………………………………（1 分）

2. 求曲线 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos 2t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程和法线方程.

解： $x'(t)=\cos t$， $y'(t)=-2\sin 2t$， ……………………………………（1 分）

于是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=-4\sin t$， $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-2\sqrt{2}$， ……………………………（2 分）

切点 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, y=0$，切线方程 $y=-2\sqrt{2}\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$， ………………………（1 分）

法线方程 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ……………………………………………（1 分）

3. 设 $f(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

解： $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$， $f'(x)=\dfrac{\sin x}{x}$， ……………………………………（2 分）

由分部积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)\mathrm{d}x$ ……………………………………（**2 分**）

$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = -1.$ ……………………………………………………………（**1 分**）

4. 已知 $f'(\cos x) = \sin x$，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\cos x)$ 以及 $f(\cos x)$.

解：由复合函数求导法则得 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\cos x) = f'(\cos x)(-\sin x) = -\sin^2 x$，……（**2 分**）

$f(\cos x) = -\int \sin^2 x\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$. …………（**3 分**）

五、(6 分）设平面图形由曲线 $y = \sqrt{x}$，直线 $x = 1$ 及 x 轴所围成，求该图形面积 A、绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_x 以及绕 y 轴旋转所得旋转体的体积 V_y.

解：$A = \int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \dfrac{2}{3}$，……………………………………………………（**2 分**）

$V_x = \int_0^1 \pi y^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^1 x\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$，……………………………………………………（**2 分**）

$V_y = \int_0^1 2\pi xy\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{x}\mathrm{d}x = 2\pi \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 = \dfrac{4}{5}\pi$. ……………………………………（**2 分**）

六、(6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1) = 8\int_0^{\frac{1}{8}} t^2 f(t)\mathrm{d}t$，证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使得 $\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$.

解：由积分中值定理，存在 $\eta \in [0,1/8]$，使得 $\int_0^{1/8} t^2 f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{8}\eta^2 f(\eta)$，

于是 $f(1) = \eta^2 f(\eta)$，……………………………………………………………（**2 分**）

设 $g(x) = x^2 f(x)$，有 $g(\eta) = g(1)$，……………………………………………（**1 分**）

显然 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，由罗尔定理，

至少存在一点 $\xi \in (\eta,1) \subset (0,1)$，使得 $g'(\xi) = \xi^2 f'(\xi) + 2\xi f(\xi) = 0$. …………（**2 分**）

于是 $\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$. ……………………………………………………………（**1 分**）

七、(8 分）已知函数 $y = f(x)$ 连续，求解下列两小题：

（1）若 $f(x)$ 满足 $f(x) + \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = x$，求 $f(x)$；

（2）若 $f(x)$ 满足 $f(x)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x$，求 $f(x)$.

解:（1）设 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = I$，则 $f(x)+I = x$，两边在 $[0,1]$ 上积分得

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + I\int_0^1 \mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x$，即 $I+I=\frac{1}{2}$，于是 $I=\frac{1}{4}$， $f(x)=x-\frac{1}{4}$. ……**（2 分）**

（2）方程两边求导得 $f'(x)+f(x)=1$，即 $y'+y=1$， ………………………………**（2 分）**

这是一阶线性方程（或变量可分离的方程），解为 $y=\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{x}+C\right)$. …………**（3 分）**

由 $f(0)=0$ 得 $y=1-\mathrm{e}^{-x}$. ……………………………………………………………**（1 分）**

八、（10 分）求曲线 $f(x)=x^3-3x^2-9x+12$ 的单调区间、极值、凹凸区间和拐点.

解: $f'(x)=3x^2-6x-9$, ………………………………………………………………**（1 分）**

令 $f'(x)=0$ 得 $x=-1, x=3$， ……………………………………………………**（1 分）**

增区间 $(-\infty,-1],[3,+\infty)$，减区间 $[-1,3]$， ………………………………………**（1 分）**

极大值 $f(-1)=17$，极小值 $f(3)=-15$， ………………………………………**（2 分）**

$f''(x)=6x-6$, ……………………………………………………………………………**（1 分）**

令 $f''(x)=0$ 得 $x=1$，……………………………………………………………………**（1 分）**

凹区间 $[1,+\infty)$，凸区间 $(-\infty,1]$， ………………………………………………**（1 分）**

拐点 $(1,1)$. ……………………………………………………………………………**（2 分）**