# 2019-2020 学年第 2 学期高等数学 2
# 期末试卷 A 答案与评分标准

**一、填空题**（每小题 3 分，共 15 分）

1. $(-8,-1,5)$　　2. $z=x^2+y^2$　　3. 0　　4. 0　　5. 2

**二、选择题**（每小题 3 分，共 15 分）

A　C　B　C　D

**三、计算下列各题**（每小题 6 分，共 30 分）

1. 设 $z=x^2y^3$，求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}$，$\left.\mathrm{d}z\right|_{(1,1)}$ 以及 $\left.\mathbf{grad}\,z\right|_{(1,1)}$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3, \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2,$ ………………………………………………………………（2 分）

$\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3,$ ………………………………………………………………（2 分）

$\left.\mathrm{d}z\right|_{(1,1)}=2\mathrm{d}x+3\mathrm{d}y,\quad \left.\mathbf{grad}\,z\right|_{(1,1)}=(2,3).$ ………………………………………………（2 分）

2. 设 $z=f(x+y,xy)$，其中 $f$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 以及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1+yf_2,$ ………………………………………………………………………………（2 分）

$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1+xf_2,$ ………………………………………………………………………………（2 分）

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}+(x+y)f_{12}+xyf_{22}+f_2.$ ………………………………………………（2 分）

3. $\iint\limits_D(x^2+y^2-x)dxdy$，其中 $D$ 是由直线 $y=2,\ y=x$ 及 $y=2x$ 围成的闭区域.

解：$I=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y}(x^2+y^2-x)dx$ ………………………………………3 分

$=\int_0^2\left(\frac{19}{24}y^3-\frac{3}{8}y^2\right)dy$ ………………………………………5 分

$=\dfrac{13}{6}$ ……………………………………………………………6 分

4. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中 $\Omega$ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 与两平面 $z=0, z=2$ 所围闭区域.

$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^2 z\mathrm{d}z$ …………………………………………………………（3 分）

$=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi.$ …………………………………………………………（3 分）

5. 计算曲线积分 $I=\int_L(x+y)\mathrm{d}s$，其中 $L$ 是点 $(0,0)$ 与点 $(1,2)$ 之间的线段.

$L: y=2x, 0\le x\le 1,$ …………………………………………………………（2 分）

$\mathrm{d}s=\sqrt{1^2+2^2}\mathrm{d}x=\sqrt{5}\mathrm{d}x,$ ……………………………………………………（2 分）

$I=\int_0^1(x+2x)\sqrt{5}\mathrm{d}x=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}.$ ……………………………………………………（2 分）

四、（6 分）求过点 $(1,2,-3)$ 且垂直于平面 $2x+3y-5z+8=0$ 的直线的方程.

平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(2,3,-5)$，由垂直关系知直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(2,3,-5)$， ……（2 分）

从而直线的方程为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{-5}$. ……………………………………………（4 分）

五、（6 分）求曲面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面和法线方程.

设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$，则 $F_x=2x, F_y=2y, F_z=2z$,

于是曲面在点 $(1,2,3)$ 处的法向量 $\boldsymbol{n}=(2x,2y,2z)\big|_{(1,2,3)}=(2,4,6)$， ………………（2 分）

切平面方程为 $2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0$，即 $x+2y+3z-14=0$， ……（2 分）

法线方程为 $x-1=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$. ……………………………………………………（2 分）

六、（6 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{n+2}x^n$ 的收敛半径和收敛域.

$a_n=\dfrac{2^n}{n+2}$，收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{2}$， ……………………………………………（3 分）

当 $x=\frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n+2}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ 发散,

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n+2}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$ 收敛,

因此收敛域为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. ………………………………………………………（3 分）

七、（6 分）计算曲线积分 $I=\oint_L 2xy\mathrm{d}x+(x^2+x)\mathrm{d}y$，其中 $L$ 为圆周 $x^2+y^2=1$，取逆时针方向.

$P=2xy, Q=x^2+x, Q_x-P_y=2x+1-2x=1,$ ……………………………（2 分）

由格林公式, $I=\iint_D (Q_x-P_y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D \mathrm{d}\sigma$ ………………………………………（2 分）

$=\pi$. ………………………………………………………………………………（2 分）

八、（8 分）求二元函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

$f_x=3x^2+6x-9$， $f_y=-3y^2+6y$,……………………………………………（1 分）

令 $f_x=f_y=0$ 得驻点 $(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$,……………………………（2 分）

$f_{xx}=6x+6,\ f_{xy}=0,\ f_{yy}=-6y+6$，……………………………………………（1 分）

在点 $(1,0)$ 处, $A=12, B=0, C=6,\quad AC-B^2>0, A>0,\quad f(1,0)=-5$ 为极小值,

在点 $(1,2)$ 处, $A=12, B=0, C=-6,\quad AC-B^2<0,\quad f(1,2)$ 不是极值,

在点 $(-3,0)$ 处, $A=-12, B=0, C=6,\quad AC-B^2<0,\quad f(-3,0)$ 不是极值,

在点 $(-3,2)$ 处, $A=-12, B=0, C=-6,\quad AC-B^2>0, A<0,\quad f(-3,2)=31$ 为极大值.

………………………………………………（4 分）

九、（8 分）计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma (z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma$ 为 $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 2)$，方向取下侧.

设 $\Sigma_1: z=2, (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le 2$，方向取上侧, 则 $\Sigma+\Sigma_1$ 为封闭曲面, 取外侧, 其所围空间闭区域记为 $\Omega$， ……………………………………………………………（2 分）

由高斯公式，$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(1+0-1)\mathrm{d}v=0$， ……………………（3 分）

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=0-\iint\limits_{D_{xy}}-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\cdot\pi(\sqrt{2})^2=4\pi.$$ ……………………………………………………（3 分）