向量及其线性运算

向量概念

向量的线性运算

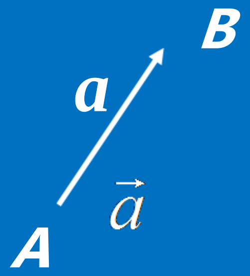
空间直角坐标系

利用坐标作向量的线性运算

向量的模、方向角、投影

向量概念

向量（矢量）：既有大小又有方向的量.



向量在数学上的表示：

$\overrightarrow{AB}$（以 A 为起点，B 为终点的向量）

可表示为：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 或者 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 等.

自由向量：与起点无关的向量.

向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ $\Leftrightarrow$ 大小相等、方向相同.

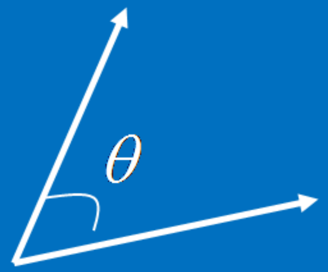
向量的模： 向量的大小，记作 $|\overrightarrow{AB}|$, $|\boldsymbol{a}|$, $|\vec{a}|$.

单位向量： 模等于 1 的向量.

零向量：模等于 0 的向量,记作 $\boldsymbol{0}$,或者 $\vec{0}$,

起点与终点重合,方向任意.

两个向量的夹角：$\left(\widehat{a,b}\right)$或$\left(\widehat{b,a}\right)$



向量$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$：$\left(\widehat{a,b}\right)=0$或$\pi$

向量$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$：$\left(\widehat{a,b}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

两向量共线:

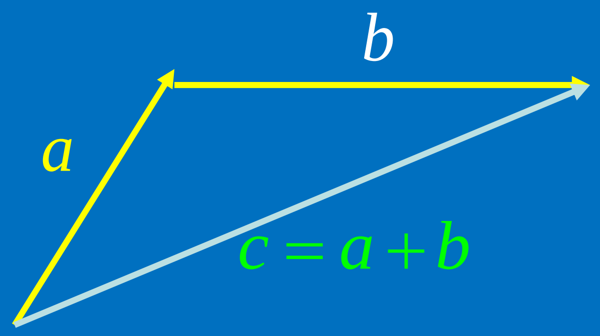
两向量平行时,当将起点放在一起时,终点在同一直线上;

k 个向量共面:

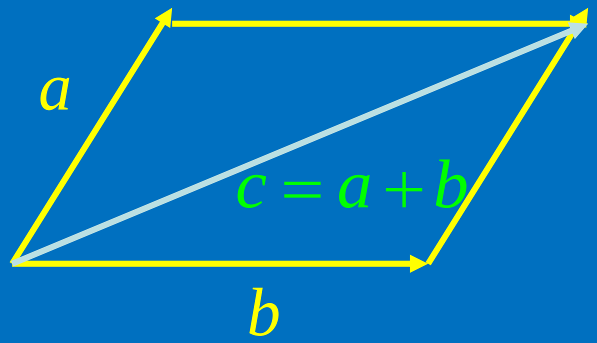
k 个向量起点放在同一点时,起点和终点在同一平面上.

向量的线性运算

向量的加法：



三角形法则

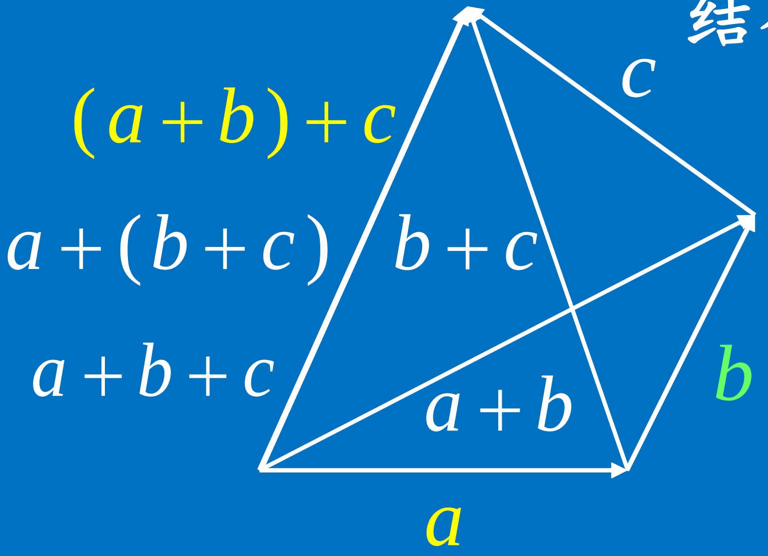


平行四边形法则

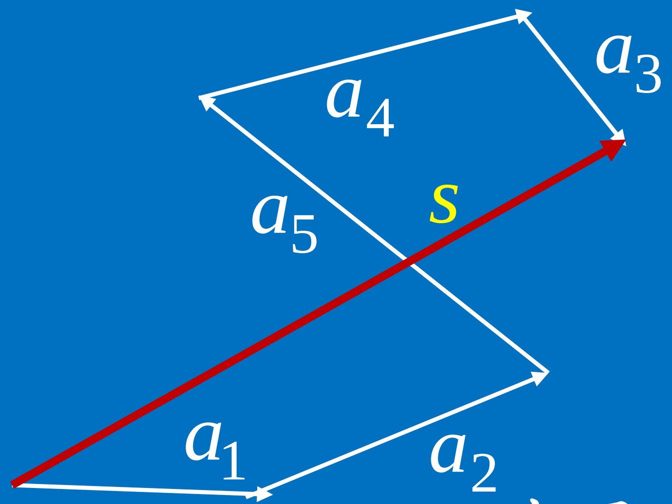
加法的运算规律：

交换律 $a+b=b+a$

结合律$(a+b)+c= a+(b+c)$



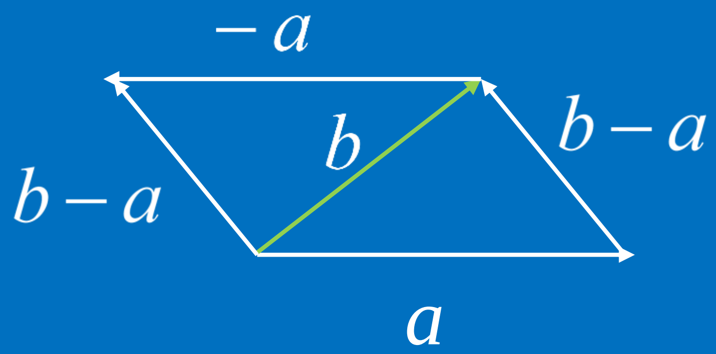
(结合律示意图)



$(s=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ 示意图)

负向量： 与向量 $\boldsymbol{a}$ 模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$.

向量的减法： $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$



向量与数的乘法

向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量.

模：$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

方向：当 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

运算规律

结合律：$\lambda(\mu \boldsymbol{a})=\mu(\lambda \boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$; $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的线性运算：向量相加及数乘向量.

设 e_a 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

由于 $|\boldsymbol{a}|>0$，所以 $|\boldsymbol{a}|\mathrm{e}_a$ 与 e_a 的方向相同,

即 $|\boldsymbol{a}|\mathrm{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同;

又 $|\boldsymbol{a}|\mathrm{e}_a$ 的模是 $|\boldsymbol{a}||\mathrm{e}_a|=|\boldsymbol{a}|\cdot 1=|\boldsymbol{a}|$,即 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 模也相同,

因此 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{e}_a$.

两向量平行的充分必要条件

定理 设向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$，则向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a} \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbf{R}$，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明 充分性显然.

(必要性) 设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$. 取 $|\lambda|=\dfrac{|b|}{|a|}$，则有 $|\boldsymbol{b}|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;

规定：$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时，$\lambda>0$；$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时，$\lambda<0$.

则有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

两向量平行的充分必要条件：

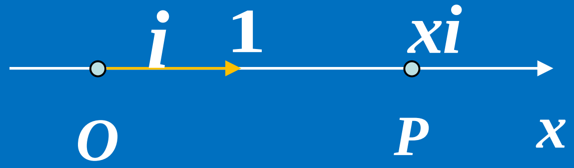
定理 设向量 $a\neq 0$，则向量 $b /\!/ a \Leftrightarrow \exists\, \lambda\in \mathbf{R}$：使 $b=\lambda a$.

证明 充分性显然.

(唯一性) 设 $b=\lambda a$, $b=\mu a$,

则 $(\lambda-\mu)a=0 \Rightarrow |\lambda-\mu||a|=0$,

因 $|a|\neq 0 \Rightarrow \lambda=\mu$.



数轴 Ox 上的点 P,向量 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 的关系：

点 $P \leftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$ $\leftrightarrow$ 实数 x.

点 P 的坐标为 $x \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$.

向量及其线性运算

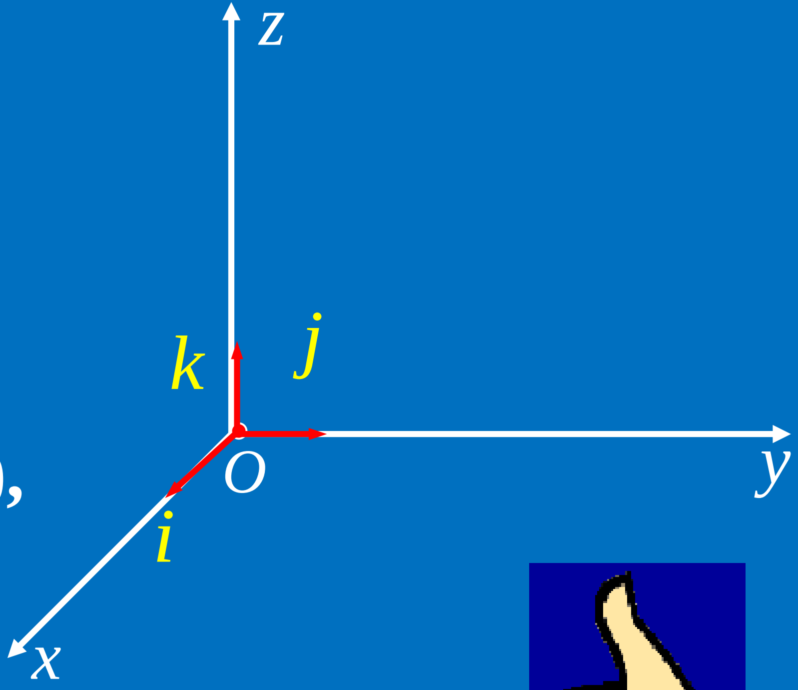
1. 理解向量、向量的模的概念.

2. 掌握向量的线性运算，掌握数乘的充要条件.

空间直角坐标系

坐标轴

O 为原点
x 轴(横轴), y 轴(纵轴), z 轴(竖轴), 两两垂直.
三轴的单位向量依次为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

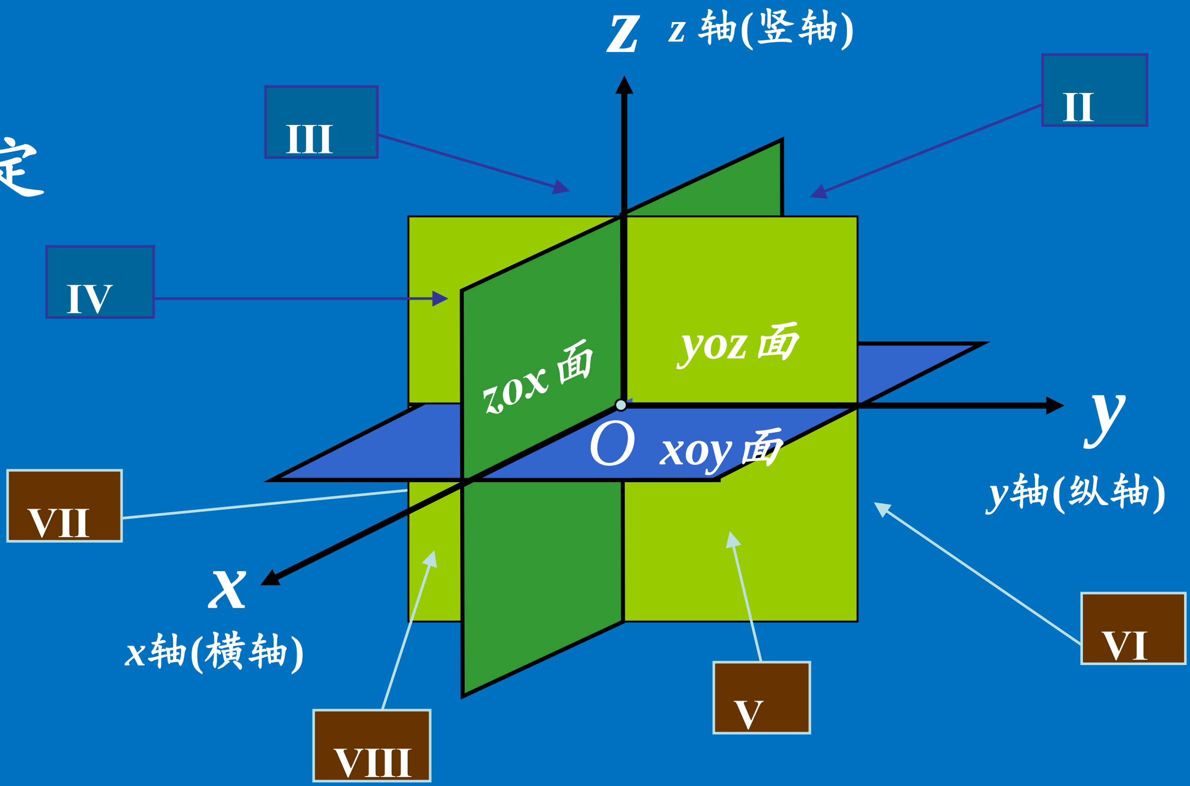


构成空间直角坐标系 $Oxyz$ 或$[O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$,
正向符合右手规则.

坐标面

任意两条坐标轴确定的平面.

xOy 平面;
xOz 平面;
yOz 平面.

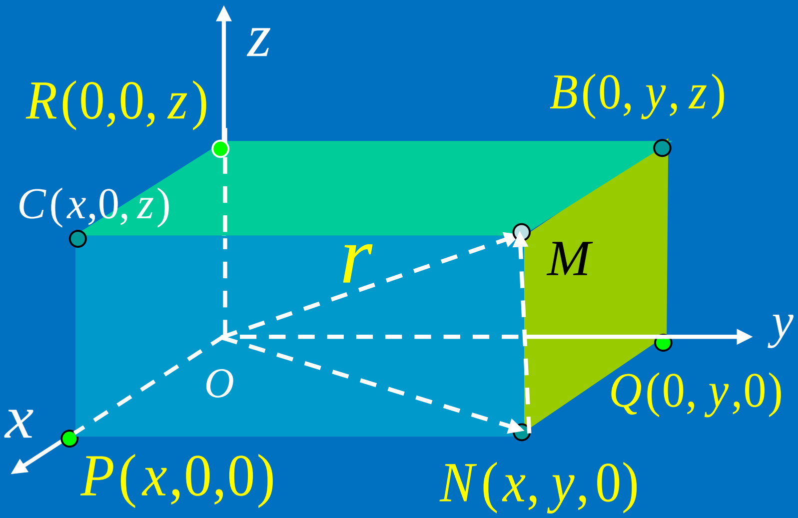


封限

坐标平面将空间划分的每一个部分称为一个封限.

给定向量 $\mathbf{r}$,对应点 M,使 $\overrightarrow{OM}=\mathbf{r}$.

$$\mathbf{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$



$$\overrightarrow{OP}=x\mathbf{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\mathbf{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\mathbf{k}.$$

$\mathbf{r}=\overrightarrow{OM}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 称为 $\mathbf{r}$ 的坐标分解式.

$M\leftrightarrow \boxed{\mathbf{r}=\overrightarrow{OM}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}\leftrightarrow (x,y,z)$,称 (x,y,z) 为点 M 的坐标.

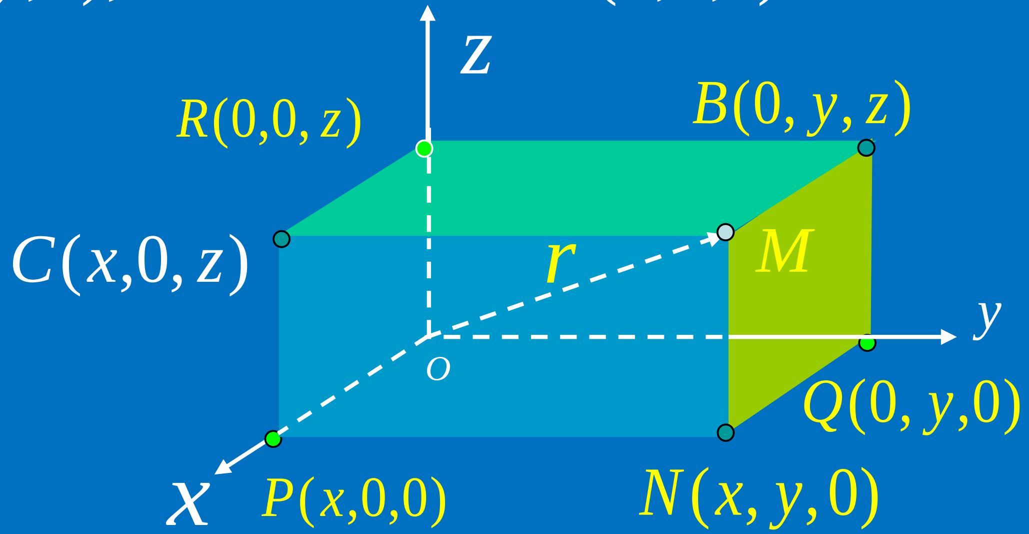
向径:向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径.

坐标轴及坐标面上的点的坐标特征

xOy 面：$N(x,y,0)$； yOz 面：$B(0,y,z)$； xOz 面：$C(x,0,z)$.

x 轴：$P(x,0,0)$； y 轴：$Q(0,y,0)$； z 轴：$R(0,0,z)$.

原点：$(0,0,0)$.



利用坐标作
向量的线性运算

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$， $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,

$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}$,

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}$,

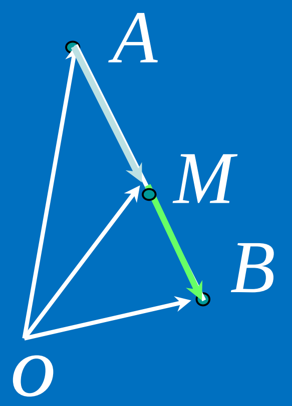
$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}$.

向量平行的充分必要条件

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)\neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$.

$$\boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a} \Leftrightarrow (b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z) \Leftrightarrow \boxed{\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}}$$

例 已知点 $A(x_1, y_1, z_1)$、点 $B(x_2, y_2, z_2)$和实数 $\lambda \neq -1$, 在直线 AB 上求点 M,使 $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$.



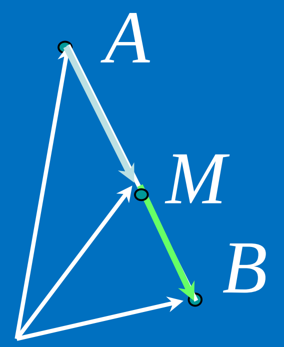
解

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}) = \frac{1}{1+\lambda}\left[\left(x_1, y_1, z_1\right) + \lambda\left(x_2, y_2, z_2\right)\right]$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\right)$$

例 已知点 $A(x_1, y_1, z_1)$、点 $B(x_2, y_2, z_2)$和实数 $\lambda \neq -1$, 在直线 AB 上求点 M,使 $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$.



解

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$$

此为点 M 的坐标.

此为定比分点公式. 当 $\lambda=1$ 时,为中点公式.

利用坐标进行运算

1. 理解空间直角坐标系.

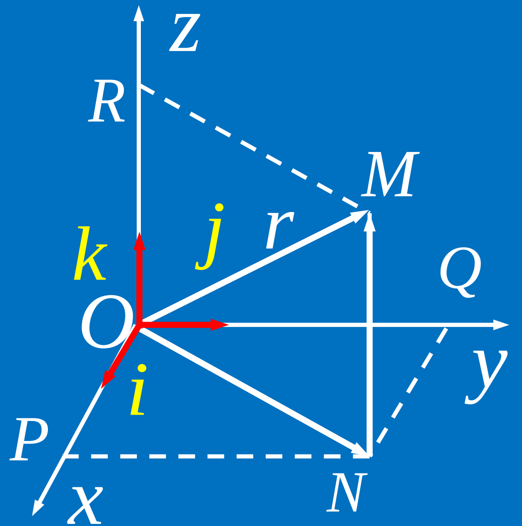
2. 掌握向量的坐标运算.

向量的模、方向角、投影

设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

$$|\boldsymbol{r}|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{\left|\overrightarrow{OP}\right|^2+\left|\overrightarrow{OQ}\right|^2+\left|\overrightarrow{OR}\right|^2}.$$



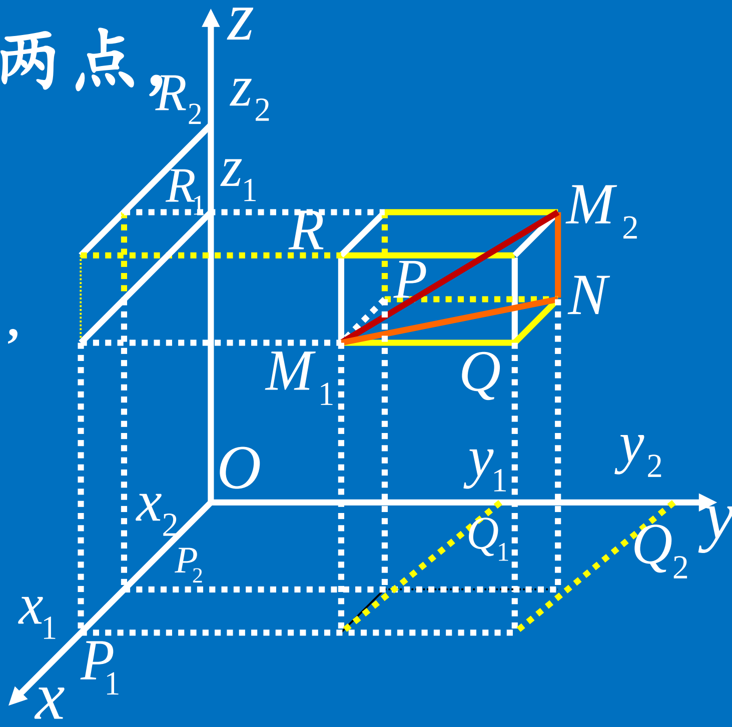
$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}.\quad \left|\overrightarrow{OP}\right|=|x\boldsymbol{i}|,\left|\overrightarrow{OQ}\right|=|y\boldsymbol{j}|,\left|\overrightarrow{OR}\right|=|z\boldsymbol{k}|.$$

$$\boxed{|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

设 $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|^2 = \left|\overrightarrow{M_1N}\right|^2 + \left|\overrightarrow{NM_2}\right|^2$$

$$= \left|\overrightarrow{M_1P}\right|^2 + \left|\overrightarrow{M_1Q}\right|^2 + \left|\overrightarrow{M_1R}\right|^2,$$



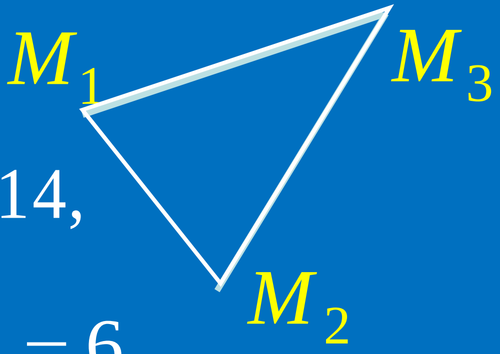
$$\left|\overrightarrow{M_1P}\right| = \left|\overrightarrow{R_1R_2}\right| = |x_2 - x_1|,$$

$$\left|\overrightarrow{M_1Q}\right| = \left|\overrightarrow{Q_1Q_2}\right| = |y_2 - y_1|,$$

$$\left|\overrightarrow{M_1R}\right| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

$$\boxed{d = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}.$$

例 求证:以 $M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.



解

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_3}\right|^2=(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2=6,$$

$$\left|\overrightarrow{M_2M_3}\right|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$

所以$\left|\overrightarrow{M_2M_3}\right|=\left|\overrightarrow{M_1M_3}\right|$，即三角形是等腰三角形.

例 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$、$B(3,5,-2)$等距离的点.

解 设所求点的坐标为 $M(0,0,z)$,则有

$$\left|\overrightarrow{MA}\right|^2=\left|\overrightarrow{MB}\right|^2 \quad \Rightarrow$$

$$(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2=(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2$$

$$\Rightarrow z=\frac{14}{9}$$ 所求点为: $z=(0,0,\frac{14}{9})$

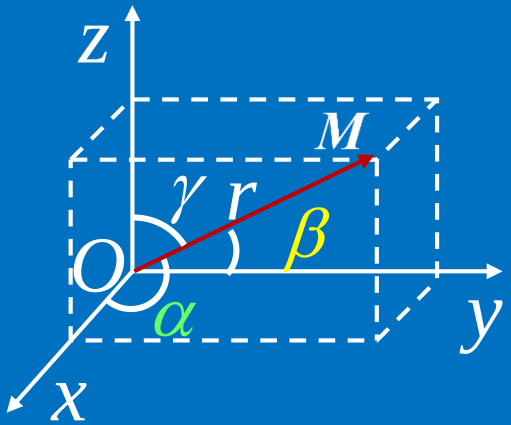
例 已知两点 $A(4,0,5)$和 $B(7,1,3)$,求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量.

解 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(7,1,3)-(4,0,5)=(3,1,-2)$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$$

$$\Rightarrow e_{\overrightarrow{AB}}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)$$

向量的方向角



非零向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 与三条坐标轴的夹角 α, β, γ $(0\le\alpha,\beta,\gamma\le\pi)$称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角.

向量的方向余弦

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)=\left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}, \frac{y}{|\boldsymbol{r}|}, \frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right)=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}(x, y, z)=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\mathbf{e}_r.$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 叫做 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦.

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right)=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}(x,y,z)=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\mathbf{e}_{r}.$$

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1}$$

例 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$和 $M_2(1,3,0)$,求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2})$.

则 $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$.

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

例 设点 A 位于第Ⅰ卦限,向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴,y 轴的夹角依次为 $\dfrac{\pi}{3}$ 和 $\dfrac{\pi}{4}$,且 $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 6$,求点 A 的坐标.

解

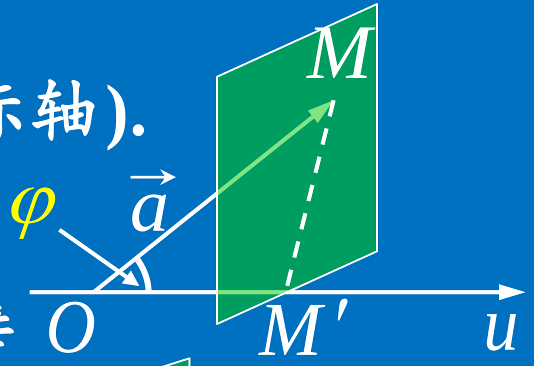
$$\alpha=\frac{\pi}{3};\ \beta=\frac{\pi}{4}.$$

由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \ \Rightarrow\ \cos^2\gamma=\dfrac{1}{4}.$

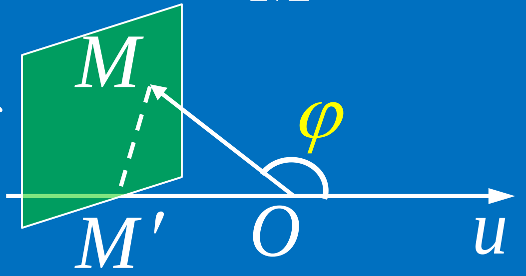
又点 A 在第Ⅰ卦限, $\Rightarrow \cos\gamma=\dfrac{1}{2}.$

$\overrightarrow{OA}=\left|\overrightarrow{OA}\right| e_{\overrightarrow{OA}}=6\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ \dfrac{1}{2}\right)=(3,3\sqrt{2},3)$,此为点 A 的坐标.

设点 O 及单位向量 e 确定轴 u(相当于坐标轴).



给定向量 $\boldsymbol{r}$,作 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$,过点 M 作与轴 u 垂直的平面交轴 u 于点 M', (点 M'称为点 M在轴 u 上的投影).



由此向量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x,a_y,a_z 为 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影.即有

$$\boxed{a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},\quad a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a},\quad a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}.}$$

向量投影的性质

性质 1：$(\mathbf{a})_u = |\mathbf{a}|\cos\varphi$ （或 $\mathrm{Prj}_u\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\varphi$ ），

其中 φ 为 $\mathbf{a}$ 与轴 u 的夹角.

性质 2：$(\mathbf{a}+\mathbf{b})_u = (\mathbf{a})_u + (\mathbf{b})_u$ （或 $\mathrm{Prj}_u(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathrm{Prj}_u\mathbf{a} + \mathrm{Prj}_u\mathbf{b}$ ），

$\mathrm{Prj}_u(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n) = \mathrm{Prj}_u\mathbf{a}_1 + \mathrm{Prj}_u\mathbf{a}_2 + \ldots + \mathrm{Prj}_u\mathbf{a}_n$.

性质 3：$(\lambda\mathbf{a})_u = \lambda(\mathbf{a})_u$ （或 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\mathrm{Prj}_u\mathbf{a}$）.

例 设向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,2)$,又轴 u 的正向与三条坐标轴的正向构成相等锐角,试求

(1)向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影;(2)向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角 θ.

解　设 $\mathbf{e}_u$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$,则

$$0<\alpha=\beta=\gamma<\frac{\pi}{2}.$$

由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$,得 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以

$$\mathbf{e}_u=\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{j}+\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{k}.$$

$\boldsymbol{a}=(4,-3,2)$

求向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影.

$$\mathbf{e}_u=\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{j}+\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{k}. \quad \boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}.$$

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=\mathrm{Prj}_u(4\boldsymbol{i})+\mathrm{Prj}_u(-3\boldsymbol{j})+\mathrm{Prj}_u(2\boldsymbol{k})$$

$$=4\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{i}-3\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{j}+2\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{k}$$

$$=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}-3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}.$$

$\boldsymbol{a}=(4,-3,2)$

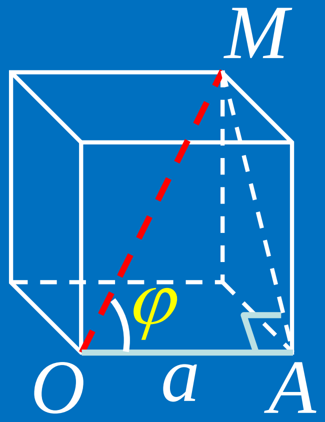
求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角 θ.

由于 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta=\sqrt{29}\cos\theta=\sqrt{3}$,

$$\Rightarrow\quad \theta=\arccos\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{29}}.$$

例 设立方体的一条对角线为 OM,一条棱为 OA,

且 $\left|\overrightarrow{OA}\right| = a$,求 $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}$.



解 设 $\varphi = \angle MOA$,

则 $$\varphi = \cos\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA} = \left|\overrightarrow{OA}\right|\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

向量及其线性运算

1. 理解空间直角坐标系、向量、向量的模、方向角、方向余弦及向量的投影的概念.

2. 掌握向量的线性运算，掌握两向量平行、垂直的充要条件.

3. 熟练掌握两点间的距离公式，会求向量的模、方向角、方向余弦.