

§6.1 简谐振动

一、简谐振动：物体振动时，若决定其位置的坐标按余弦（或正弦）函数规律随时间变化，这样的振动称为简谐振动。谐振子：作简谐运动的物体。

(1) 受力特点：线性恢复力 $F = -kx$

(2) 动力学微分方程

简谐运动的微分方程： $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ ，其中 $\omega^2 \equiv \frac{k}{m}$ 。

简谐运动的运动方程： $x = A \cos(\omega t + \varphi)$

速度： $v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$

加速度： $a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$

二、简谐运动的振幅、周期、频率和相位

1. 振幅： $A = |x_{\max}|$ ，由初始条件决定。

2. 周期、频率

周期： $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ；频率： $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ ；角频率： $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$

周期和频率取决于振动系统本身的性质。

3. 相位 $\omega t + \varphi$

物理意义：描述质点 t 时刻的运动状态。

初相位：描述质点初始时刻的运动状态。

4. 相位差：两个振动之间的相位之差。

(1) 对同一简谐运动，相位差可以给出两运动状态间变化所需的时间。

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} T$$

(2) 对于两个同频率的简谐运动，相位差表示它们间步调上的差异。

如果 $\varphi_2 - \varphi_1 > 0$ ，则称第 2 个振动相位超前于第 1 个振动。

四、谐振动的能量

动能： $E_k = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$ ；势能： $E_p = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$

机械能： $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} k A^2$

弹性回复力是保守力，作简谐振动的系统机械能守恒。

平均动能： $\bar{E}_k = \frac{1}{T} \int_0^T E_k dt = \frac{1}{4} k A^2$ ；平均势能： $\bar{E}_p = \frac{1}{T} \int_0^T E_p dt = \frac{1}{4} k A^2$

谐振动在一个周期内的平均势能和平均动能相等。

五、谐振动的旋转矢量表示法

旋转的矢量：长度为 A ，以 O 为原点作角速度为 ω 的逆时针旋转。旋转矢量的端点在 x 轴上的投影点的运动为简谐振动 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ ，速度和加速度在 x 轴上的投影为简谐振动的速度 $v = A\omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$ 和加速度 $a = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi)$ 。

§6.2 谐振动的合成

一、同方向同频率谐振动的合成： $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ ； $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

振幅： $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ ； 相位： $\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$

讨论：

(1) 相位差 $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \dots$)， $A = A_1 + A_2$ ， 相互加强；

(2) 相位差 $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$ ($k=0, \pm 1, \dots$)， $A = |A_1 - A_2|$ ， 相互削弱；

(3) 一般情况： $A_1 + A_2 > A > |A_1 - A_2|$ 。

二、同方向不同频率谐振动的合成、拍

合振动 $x = x_1 + x_2$ ；

合振幅 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t}$ ，在 $A_1 + A_2$ 和 $|A_1 - A_2|$ 之间周期性变化。

合振动不再是简谐振动，可看作是振幅缓变的近似简谐振动。

拍的现象 $x = 2A \cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t) \cdot \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t)$

拍频：单位时间内振幅大小变化的次数，即 $\nu = |(\omega_2 - \omega_1) / 2\pi| = |\nu_2 - \nu_1|$

振动角频率： $\omega = (\omega_2 + \omega_1) / 2$