## 第一章 行列式 习题课



主要内容

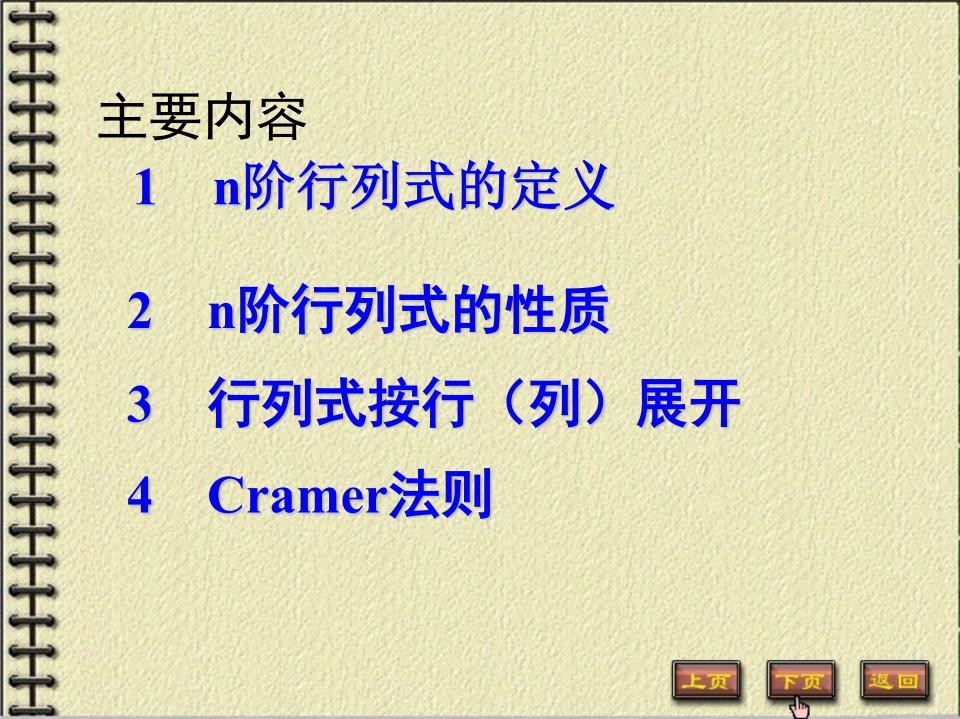
x+y= 典型例题



测验题







## 型 题 例 、计算(证明)行列式 克拉默法则

### 2 利用范德蒙行列式计算

利用范德蒙行列式计算行列式,应根据范德蒙行列式的特点,将所给行列式化为范德蒙行列式,然后根据范德蒙行列式计算出结果。

例2 计算

$$D_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{bmatrix}$$





解  $D_n$ 中各行元素分别是一个数的不同方幂,方幂次数自左至右按递升次序排列,但不是从0变到n-1,而是由1递升至n.若提取各行的公因子,则方幂次数便从0增至n-1,于是得到

$$D_{n} = n! \quad 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1$$

$$1 \quad 2 \quad 2^{2} \quad \cdots \quad 2^{n-1}$$

$$1 \quad 3 \quad 3^{2} \quad \cdots \quad 3^{n-1}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$1 \quad n \quad n^{2} \quad \cdots \quad n^{n-1}$$





上面等式右端行列式为n阶范德蒙行列式,由 范德蒙行列式知

$$D_{n} = n! \prod_{n \ge i > j \ge 1} (x_{i} - x_{j})$$

$$= n! (2 - 1)(3 - 1) \cdots (n - 1)$$

$$\bullet (3 - 2)(4 - 2) \cdots (n - 2) \cdots [n - (n - 1)]$$

$$= n! (n - 1)! (n - 2)! \cdots 2! 1!.$$





## 3 用化三角形行列式计算

例3 计算

$$D_{n+1} = \begin{bmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{bmatrix}$$





### 解 将第2,3,...,n+1列都加到第一列,得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} x + \sum_{i=1}^{n} a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x + \sum_{i=1}^{n} a_i & x & a_2 & \cdots & a_n \\ x + \sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x + \sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

提取第一列的公因子,得

将第1列的( $-a_1$ )倍加到第2列,将第1列的( $-a_2$ )倍加到第3列,…,将第1列的( $-a_n$ )倍加到最后一列,得





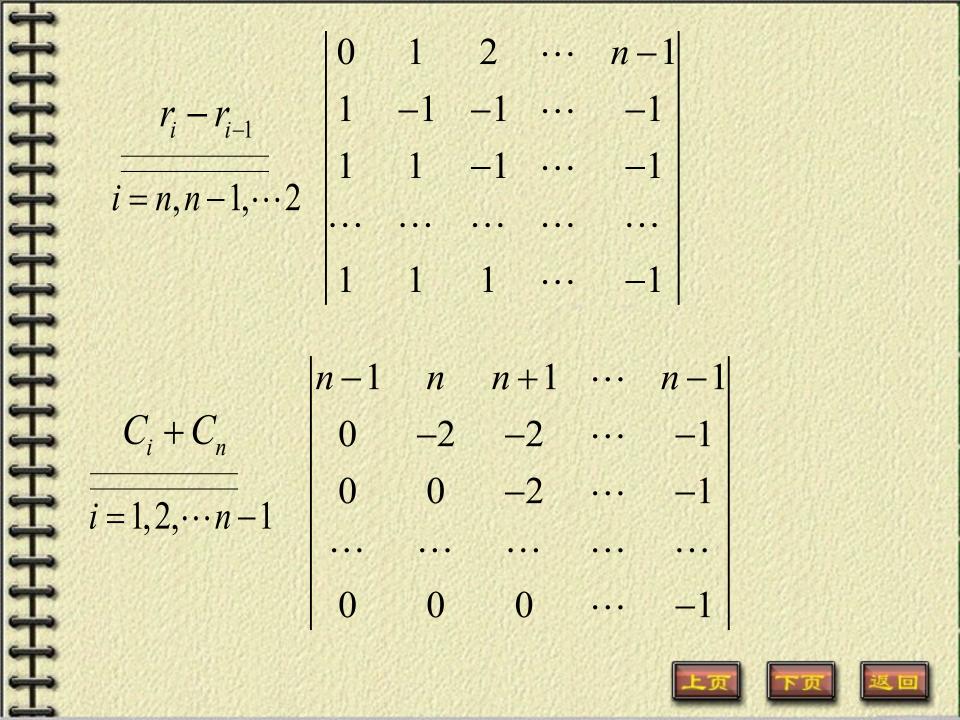


$$D_{n+1} = \left(x + \sum_{i=1}^{n} a_i\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x - a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & x - a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_2 & \cdots & x - a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(x + \sum_{i=1}^{n} a_i\right) \prod_{i=1}^{n} (x - a_i).$$



例4 计算 
$$D_n = \det(a_{ij})$$
, 其中 $a_{ij} = |i-j|$   
解:  
$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$



## $=(n-1)(-2^{n-2})(-1)$ $= (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$

### 4 用降阶法计算

例5 计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

解 将  $D_4$ 的第2、3、4行都加到第1行,并从第1行中 提取公因子a+b+c+d,得







$$D_{4} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$
再将第2、3、4列都减去第1列,得
$$D_{4} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a-b & d-b & c-b \\ c & d-c & a-c & b-c \\ d & c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}$$

按第1行展开,得

$$D_4 = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}.$$

把上面右端行列式第2行加到第1行,再从第1行中提取公因子a-b-c+d,得

a-b d-b c-b

$$D_4 = (a+b+c+d)(a-b-c+d)$$







再将第2列减去第1列,得  $D_A = (a+b+c+d)(a-b-c+d)$ 按第1行展开,得  $D_4 = (a+b+c+d)(a-b-c+d) \begin{vmatrix} a-d & b-c \\ b-c & a-d \end{vmatrix}$  $= (a+b+c+d)(a-b-c+d) \bullet [(a-d)^{2} - (b-c)^{2}]$ = (a+b+c+d)(a-b-c+d) $\bullet (a+b-c-d)(a-b+c-d)$ 

## 6 用递推法计算

例6 计算三对角行列式  $(a \neq b)$ 

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ab & a+b & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & ab & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & ab & a+b \end{vmatrix}$$

上页

下页



第二个行列式再按第一列展开,得

 $D_{n} = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$  (\*) 对(\*)式整理,得  $D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$ 

依次递推下去,得

$$D_n - aD_{n-1} = b^2(D_{n-2} - aD_{n-3})$$

$$=b^{n-2}(D_2-aD_1)$$
 $=b^{n-2}((a+b)^2-ab-a(a+b))$ 
 $=b^n$  (1)
同样对(\*)式还可整理为,
 $D_n-bD_{n-1}=a^n$  (2)
由(1)(2)两式得,
 $(b-a)D_n=b^{n+1}-a^{n+1}$ 

当 
$$a \neq b$$
 时,

$$D_n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a}$$

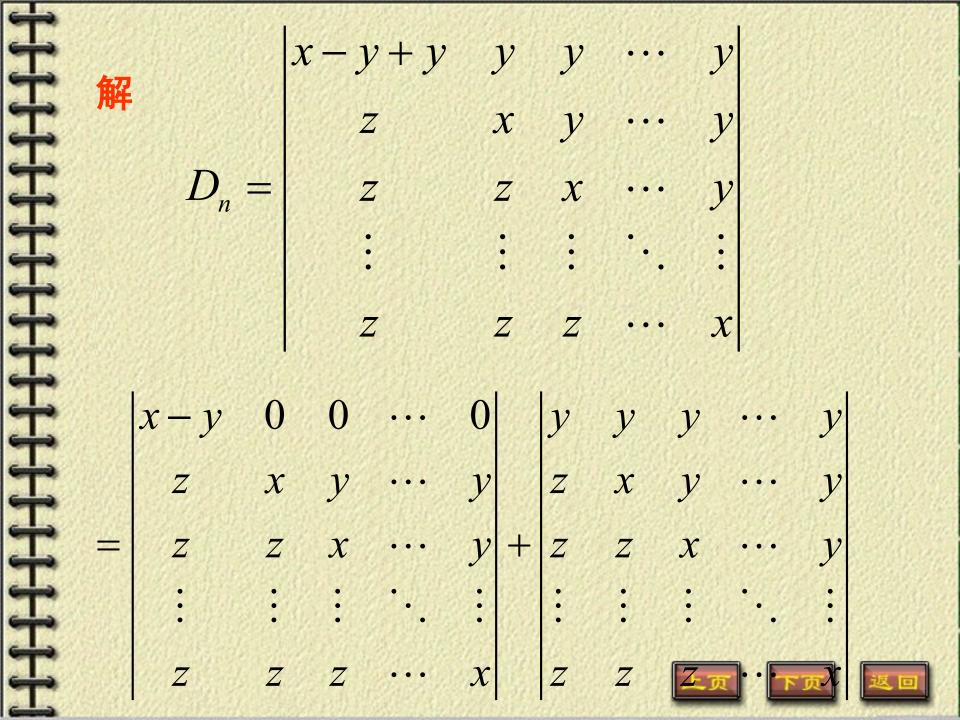


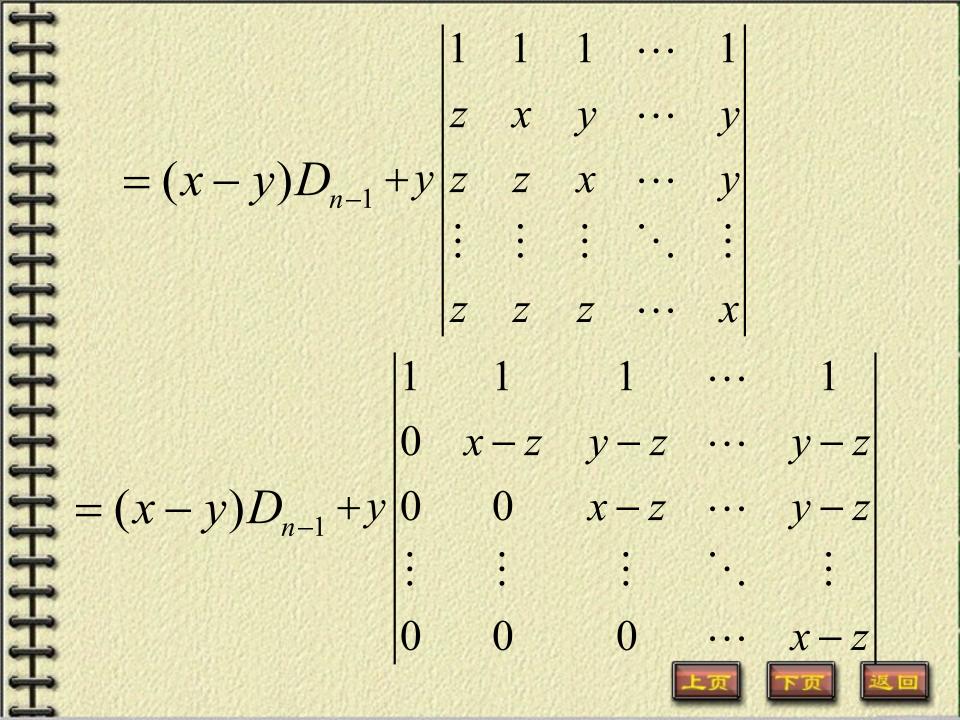
### 例7 求下面行列式的值

$$D_n = \begin{vmatrix} z & z & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$









$$= (x - y)D_{n-1} + y(x - z)^{n-1}$$

同理 
$$D_n = (x-z)D_{n-1} + z(x-y)^{n-1}$$

$$\therefore (y-z)D_n = y(x-z)^n - z(x-y)^n$$

$$\frac{1}{2}$$
 当  $y \neq z$  时  $y(x)$ 

$$D_n = \frac{y(x-z)^n - z(x-y)^n}{y-z}$$

当 
$$y = z$$
 时,见教材27页8(2)

### 升阶法

例8 计算

$$D_{n} = \begin{vmatrix} 1 + a_{1} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + a_{2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 + a_{n} \end{vmatrix}$$

 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ 





## 解 $1 + a_1$ $1 + a_2$ n+1 $1+a_n$

## $a_1$ 0 $a_2$ $|a_n|$





$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}) a_1 a_2 \dots a_n$$

## 解 当 $x_1 = 0$ 时,

同理,

$$D_n = \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a + x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a + x_n \end{vmatrix}$$

 $=ax_2x_3\cdots x_n$ 

$$= \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

可得其余的结果。



$$D_{n} = D_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & a + x_{1} & a & \cdots & a \\ 0 & a & a + x_{2} & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & a + x_{n} \end{vmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

箭形行列式,自己计算



### 练习

(2)

### 计算下列n阶行列式

 $a_1$ 

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} -1 & 1 - a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 - a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 - a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 - a_n \end{vmatrix}$$

上页

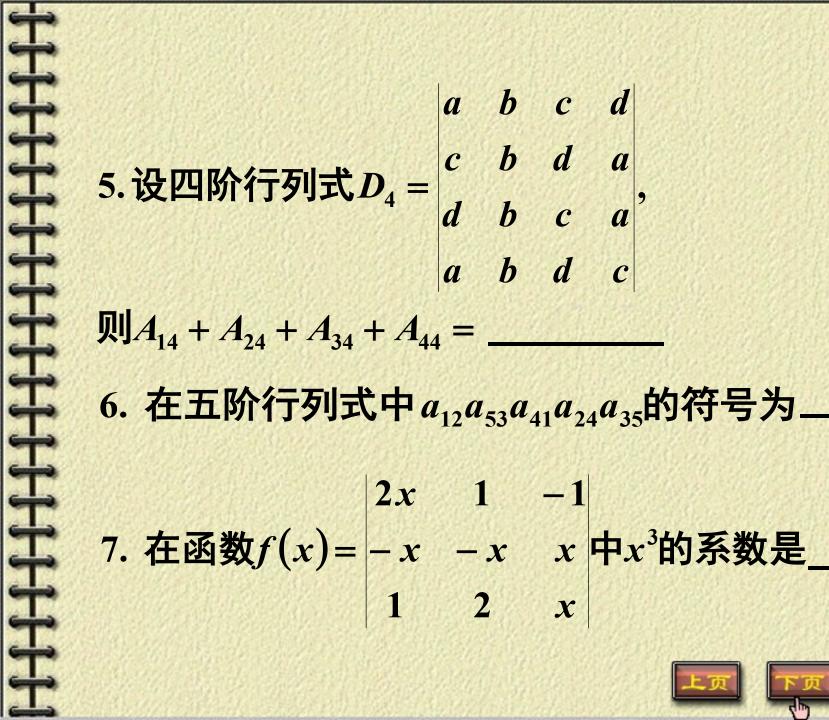
下页



$$(3) D_{n} = \begin{vmatrix} 1 + a_{1} & 2 + a_{2} & \cdots & n - 1 + a_{n-1} & n + a_{n} \\ 2 + a_{1} & 3 + a_{2} & \cdots & n + a_{n-1} & 1 + a_{n} \\ 3 + a_{1} & 4 + a_{2} & \cdots & 1 + a_{n-1} & 2 + a_{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n + a_{1} & 1 + a_{2} & \cdots & n - 2 + a_{n-1} & n - 1 + a_{n} \end{vmatrix}$$

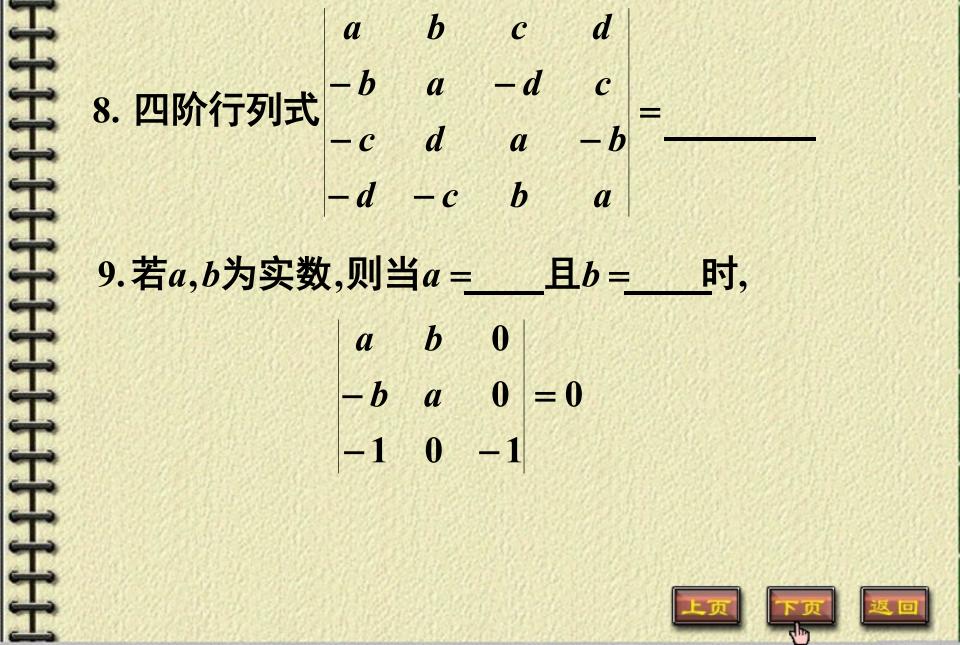
$$D_{n} = \begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}$$





6. 在五阶行列式中
$$a_{12}a_{53}a_{41}a_{24}a_{35}$$
的符号为\_\_\_\_\_

7. 在函数
$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$
中 $x^3$ 的系数是\_\_\_\_\_



$$2. D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= \chi$$
**E M**答题 (9
分) · 问 $\lambda$ ,  $\mu$ 取何值, 齐次方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
**有非零解?**

$$\begin{cases} x & y & y & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

四、证明(每小题8分,共24分).

1. 
$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$
$$= 0;$$

$$2. D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta};$$

### 3. 用数学归纳法证明

$$D_{n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{1} & x_{2} & x_{3} & \cdots & x_{n} \\ x_{1}^{2} & x_{2}^{2} & x_{3}^{2} & \cdots & x_{n}^{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1}^{n-2} & x_{2}^{n-2} & x_{3}^{n-2} & \cdots & x_{n}^{n-2} \\ x_{1}^{n} & x_{2}^{n} & x_{3}^{n} & \cdots & x_{n}^{n} \end{vmatrix}$$

 $= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j), (n \ge 2)$ 



