高等数学
单元自测(十)

一、填空题（每小题4分，共20分）

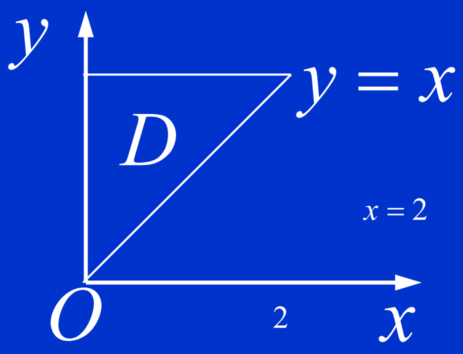
1.积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$ 的值为 $\underline{\frac{1}{2}(1-e^{-4})}$

析： 原式 $= \int_0^2 e^{-y^2} dy \int_0^y dx$

$$= \int_0^2 y e^{-y^2} dy$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right)$$



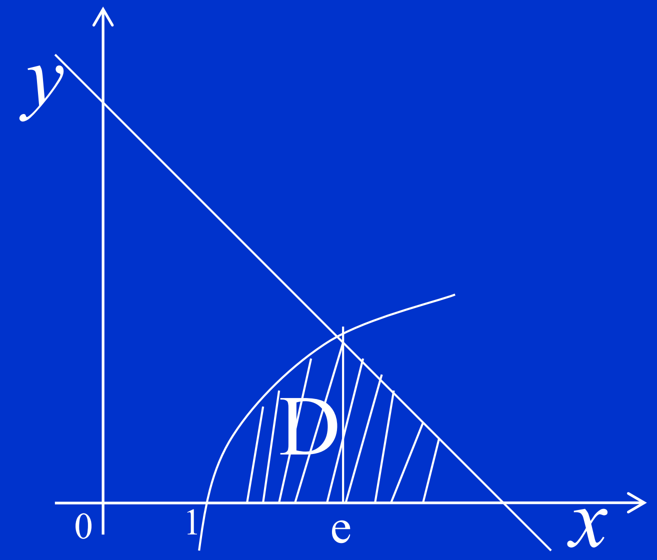
首 页 上一页 下一页 尾 页 结 束 返 回

2.由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(e+1)-x$ 及 $y=0$ 围成的平面图形的面积为 $\underline{\dfrac{3}{2}}$

析： $s=\iint\limits_{D}dxdy$

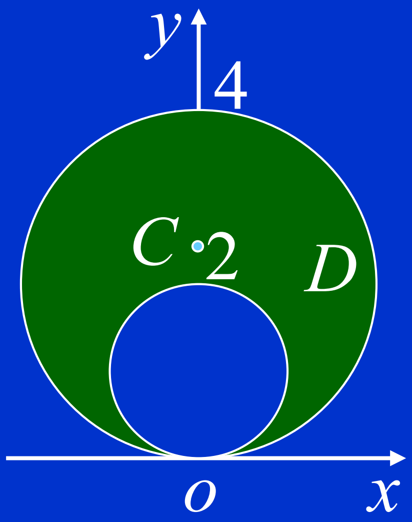
$=\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e+1-y}dx$

$=\dfrac{3}{2}$



首 页　上一页　下一页　尾 页　结 束　返 回

3.位于两圆 $r=2\sin\theta$ ，$r=4\sin\theta$ 之间的均匀薄片的重心是 $\underline{\left(0,\dfrac{7}{3}\right)}$



析：利用对称性可知 $\bar{x}=0$

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3\pi}\iint_D r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{56}{9\pi}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{56}{9\pi}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{7}{3}$$

首 页 上一页 下一页 尾 页 结 束 返 回

4.设Ω是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ ，则

$$\iiint_{\Omega} e^{|z|}dv = \underline{\quad 2\pi \quad}$$

析： $$\iiint_{\Omega} e^{|z|}dv = 2\int_0^1 e^z dz \iint_{Dz} dxdy$$

$$= 2\int_0^1 e^z \pi\left(1-z^2\right)dz$$

$$= 2\pi$$

或者 原式 $= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 e^{r\cos\varphi} r^2 \sin\varphi d\varphi$

$= 2\pi$

5. 由 $y=a^2-x^2$，$z=x+2y, x=0$，$y=0$，$z=0$ 所围第一卦限部分的立体体积为 $\underline{\dfrac{a^4}{4}+\dfrac{8}{15}a^5}$

析：$V=\iiint\limits_{\Omega} dv$

$$=\int_0^a dx\int_0^{a^2-x^2} dy\int_0^{x+2y} dz$$

$$=\int_0^a dx\int_0^{a^2-x^2}(x+2y)dy$$

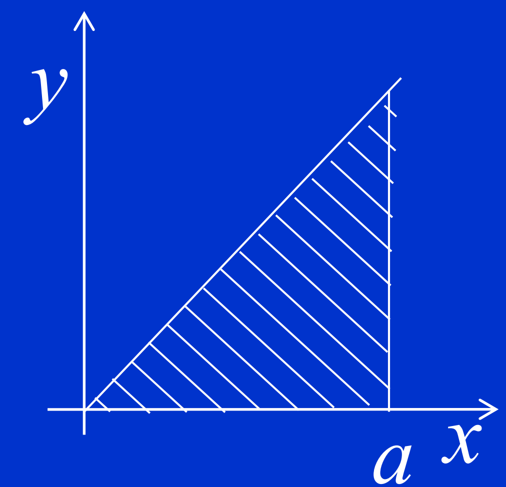
$$=\int_0^a \left[xy+y^2\right]_0^{a^2-x^2} dx=$$

首 页　上一页　下一页　尾 页　结 束　返 回

二、（8分）证明：

$$\int_0^a dx\int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dy = \pi\left[f(a)-f(0)\right]\ (a>0)$$

证：$\int_0^a dx\int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dy$



$$=\int_0^a f'(y)dy\int_y^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$$

$$= \int_0^a f'(y)\,dy \int_y^a \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a-y}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+y}{2}\right)^2}}$$

$$= \int_0^a f'(y) \arcsin \frac{x - \frac{a+y}{2}}{\frac{a-y}{2}} \Bigg|_y^a dy$$

$$= \pi \int_0^a f'(y)\,dy$$

$$= \pi[f(a) - f(0)]$$

三、计算下列各题（每题9分，共27分）

1.求 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\,dxdy$ 其中D为 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le r^2\}$

解：原式$=\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)\pi r^2\quad(\xi,\eta)\in D$

$$=\lim_{\substack{\xi\to 0\\ \eta\to 0}} e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)$$

$$=1$$

2.设 $f(x,y)=\begin{cases} x^2y, 1\le x\le 2, 0\le y\le x, \\ 0, \text{其他} \end{cases}$ 求：

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 2x\}$

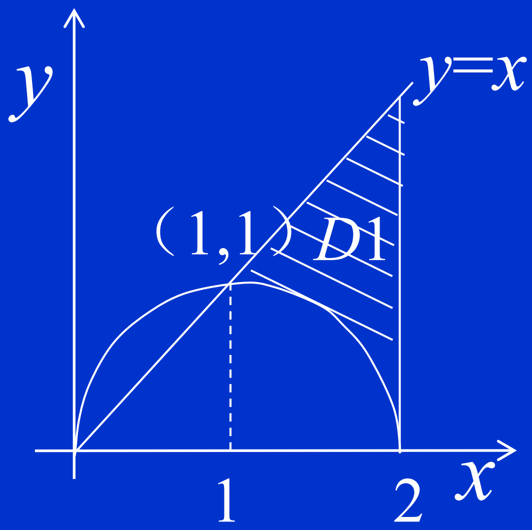
解：$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

$=\iint\limits_{D1} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D1} x^2ydxdy$

$=\int_1^2 x^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} ydy$

$=\int_1^2 \frac{x^2}{2}y^2\Big|_{\sqrt{2x-x^2}}^{x}dx$

$=\int_1^2 (x^4-x^3)dx=\frac{49}{20}$



首 页 上一页 下一页 尾 页 结 束 返 回

3.求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<a)$ 内部分的面积。

解：由对称性，取

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \qquad D_{xy}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$A=2A_1=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

$$= 8\int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{ady}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$= 8a\int_0^a \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= 8a\int_0^a \arcsin \frac{b}{a} dx$$

$$= 8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$$

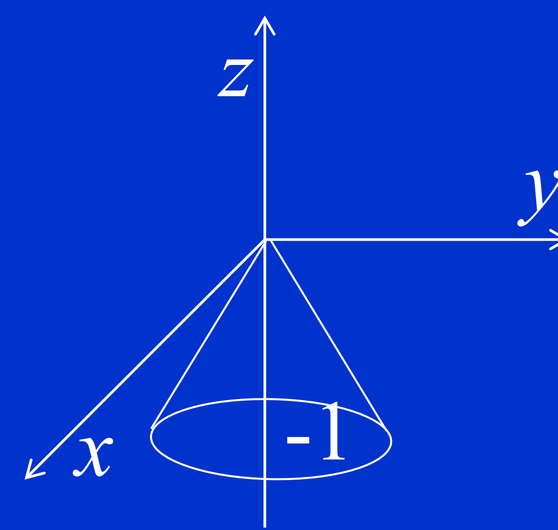
四、(16分)将三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv$（其中 Ω 由曲面 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=-1$ 围成）分别化为直角坐标系、柱面坐标系和球面坐标系下的三次积分，并选用一种方法计算其值。

解：

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{-1}^{-\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_{-1}^{-r}\sqrt{r^2+z^2}\,dz$$

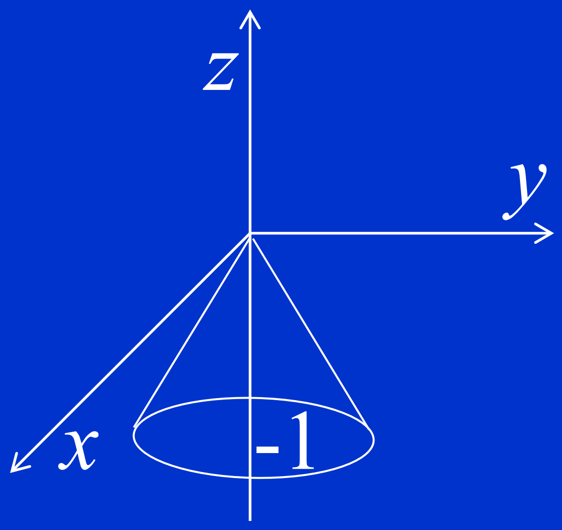
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}d\phi\int_0^{-\frac{1}{\cos\phi}}r\cdot r^2\sin\phi\,dr$$



$$I = 2\pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\frac{1}{4}r^{4}\sin\varphi\Big|_{0}^{-\frac{1}{\cos\varphi}}d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\frac{\sin\varphi}{\cos^{4}\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\pi\left[-\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$$



五、（12分）设有一半径为R的球体，p_0是球表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到p_0距离的平方成正比（比例常数$k>0$, 求球体的重心位置。

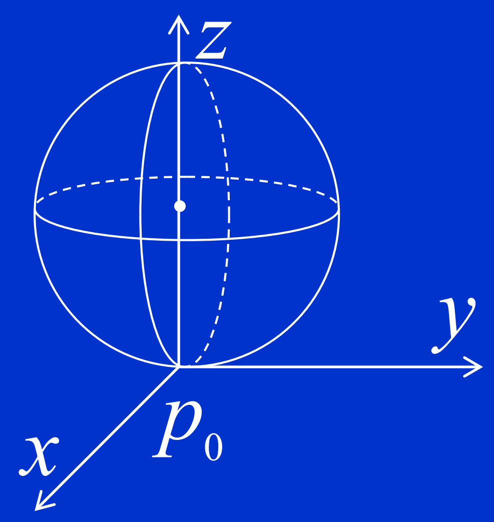
解：建立坐标系如图所示：（p_0为原点）

则，球面方程：

$$x^2+y^2+z^2=2Rz$$

由对称性

$$\bar{x}=\bar{y}=0$$



$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} kz\left(x^2+y^2+z^2\right)dv}{\iiint\limits_{\Omega} k\left(x^2+y^2+z^2\right)dv}$$

而 $$\iiint\limits_{\Omega} z\left(x^2+y^2+z^2\right)dv$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^5\sin\varphi\cos\varphi dr$$

$$=2\pi\frac{(2R)^6}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{8}{3}\pi R^6$$

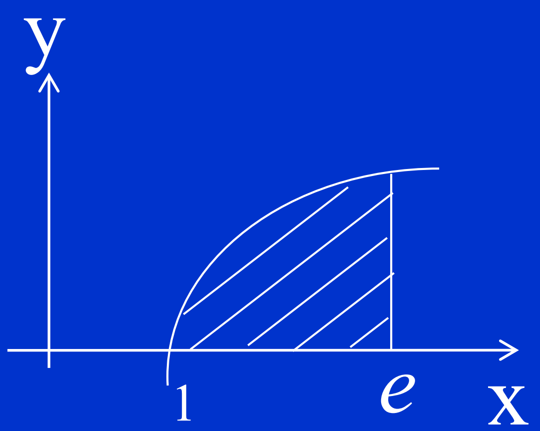
$$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dv$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^4\sin\varphi dr=\frac{32}{15}\pi R^5$$

$\therefore$ 重心 $\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$

六、（10分）设一由 $y=\ln x$ ，x轴及 $x=e$ 所围均匀薄板，其密度$\mu=1$，求此薄板绕 $x=t$ 旋转的转动惯量$I(t)$，并问t为何值时，$I(t)$ 最小？

解：$I(t)=\iint\limits_{D}(x-t)^2\,dxdy$



$$=\int_1^e dx\int_0^{\ln x}(x-t)^2\,dy$$

$$=\int_1^e (x-t)^2\ln x\,dx$$

$$=\frac{(x-t)^3}{3}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{(x-t)^3}{3x}\,dx$$

$$= t^2 - \frac{1}{2}(e^2+1)t + \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$$

或 $I(t) = \int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} (x-t)^2 dx$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left[(e-t)^3 - (e^y - t)^3\right] dy = \ldots$$

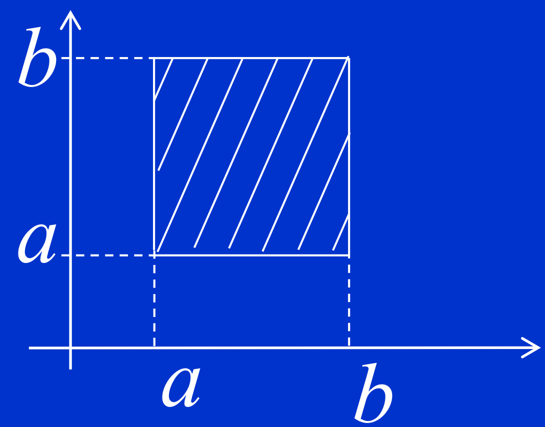
令 $I'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{4}(e^2+1)$

$$\min I(t) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9}e^3 - \frac{1}{16}(e^2+1)^2$$

七、（7分）设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，证明：

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$$

证：左端$=\int_a^b f(x)dx\int_a^b f(y)dy$



$$=\iint_D f(x)f(y)dxdy$$

$$\le \frac{1}{2}\iint_D [f^2(x)+f^2(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_a^b \mathrm{d}y\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b f^2(y)\,\mathrm{d}y\right)$$

$$=(b-a)\int_a^b f^2(x)dx$$

=右端