第三节 频率与概率

一、频率的定义与性质

二、概率的定义与性质

三、小结

一、频率的定义与性质

1. 定义

在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数.比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率，并记成 $f_n(A)$.

2. 性质

设 A 是随机试验 E 的任一事件, 则

(1) $0 \le f_n(A) \le 1$;

(2) $f(S) = 1,\ \ f(\varnothing) = 0$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件,则

$$f(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k).$$

实例 将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次, 各做 7 遍, 观察正面出现的次数及频率.

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	f	n_H	f	n_H	f
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	[illegible]	[illegible]	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	247	0.494
5	1	[illegible]	[illegible]	0.48	251	0.502
6	2	0.4	18	0.36	[illegible]	[illegible]
7	4	0.8	27	0.54	258	0.516

在 $\frac{1}{2}$ 处波动较大

随n的增大, 频率 f 呈现出稳定性

在 $\frac{1}{2}$ 处波动较小

波动最小

从上述数据可得

(1) 频率有随机波动性,即对于同样的 n, 所得的 f 不一定相同;

(2) 抛硬币次数 n 较小时, 频率 f 的随机波动幅度较大, 但随 n 的增大 , 频率 f 呈现出稳定性.即当 n 逐渐增大时频率 f 总是在 0.5 附近摆动, 且逐渐稳定于 0.5.

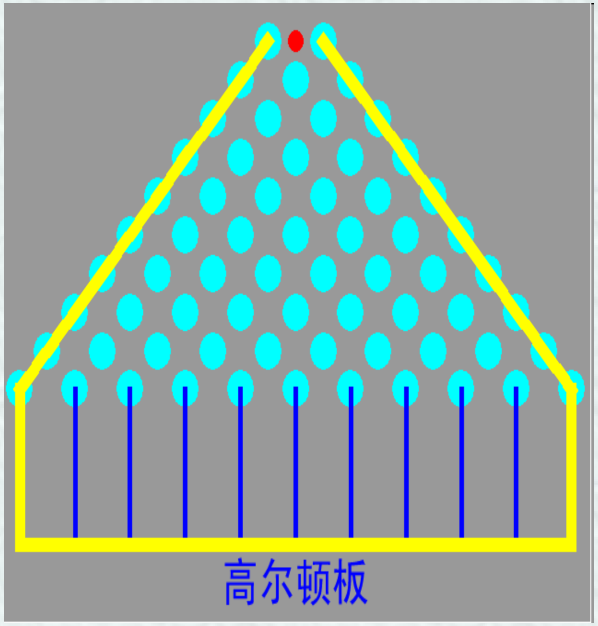
实验者	n	n_H	f
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
$K\cdot$皮尔逊	12000	6019	0.5016
$K\cdot$皮尔逊	24000	12012	0.5005

$$f(H) \xrightarrow{n\text{的增大}} \frac{1}{2}.$$

我们再来看一个验证频率稳定性的著名实验

高尔顿(Galton)板试验.

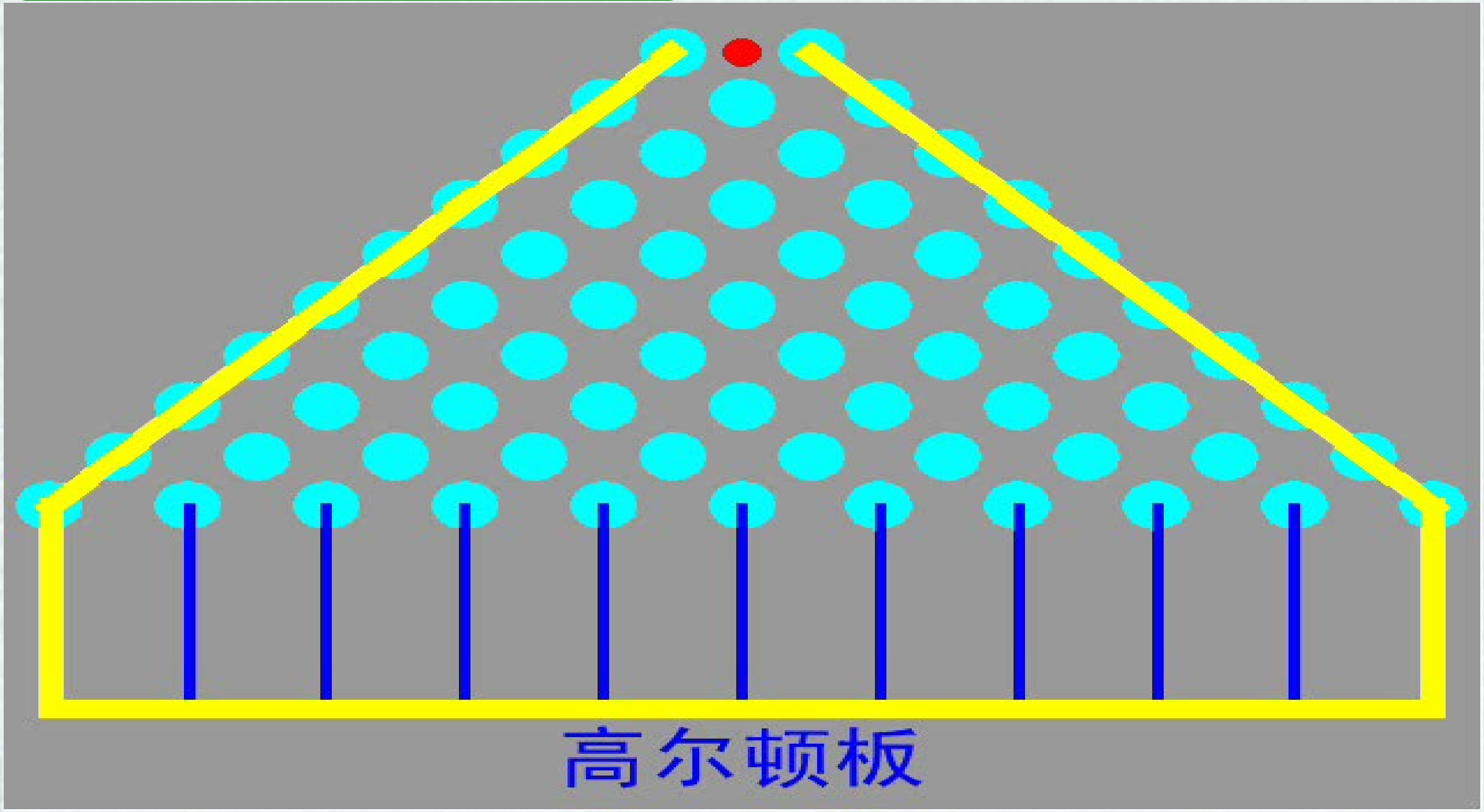
试验模型如下所示:



自上端放入一小球,任其自由下落,在下落过程中当小球碰到钉子时,从左边落下与从右边落下的机会相等.碰到下一排钉子时又是如此.最后落入底板中的某一格子.因此,任意放入一球,则此球落入哪一个格子,预先难以确定.但是如果放入大量小球,则其最后所呈现的曲线,几乎总是一样的.

请看动画演示

单击图形播放/暂停　ESC键退出



重要结论

频率当 n 较小时波动幅度比较大，当 n 逐渐增大时， 频率趋于稳定值，这个稳定值从本质上反映了事件在试验中出现可能性的大小．它就是事件的**概率**.

请同学们思考.

医生在检查完病人的时候摇摇头：“你的病很重，在十个得这种病的人中只有一个能救活.”当病人被这个消息吓得够呛时，医生继续说：“但你是幸运的．因为你找到了我，我已经看过九个病人了，他们都死于此病.”

医生的说法对吗?

二、概率的定义与性质

1933年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫提出了概率论的公理化结构，给出了概率的严格定义，使概率论有了迅速的发展.

柯尔莫哥洛夫资料

1. 概率的定义

设 E 是随机试验, S 是它的样本空间.对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 A 的概率,如果集合函数 $P(\cdot)$满足下列条件:

(1) **非负性:** 对于每一个事件 A, 有 $P(A) \geq 0$;

(2) **规范性:** 对于必然事件 S,有 $P(S) = 1$;

(3) **可列可加性:** 设 $A_1, A_2, \cdots$是两两互不相容的事件,即对于 $i \neq j$, $A_i A_j = \varnothing$, $i, j = 1, 2, \cdots$,则有

$$\underbrace{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots}_{\text{概率的可列可加性}}$$

2. 性质

(1) $P(\varnothing) = 0.$

证明 $A_n = \varnothing \ (n = 1,2,\cdots),$

则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$,且 $A_i A_j = \varnothing, \quad i \neq j.$

由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

$$\left.\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} P(\varnothing) \\ &P(\varnothing) \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(\varnothing) = 0.$$

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

概率的有限可加性

证明 令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing,$

$$\Rightarrow A_i A_j = \varnothing, \ i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots.$$

由概率的可列可加性得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + 0$$

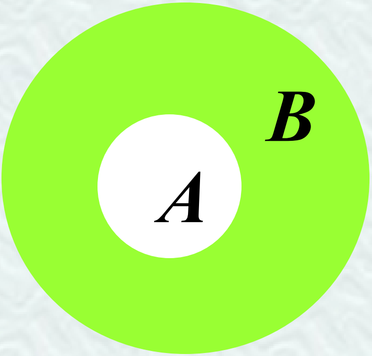
$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

(3) 设 A, B 为两个事件,且 $A \subset B$,则

$$P(A) \le P(B), \quad P(B-A) = P(B) - P(A).$$

证明　因为　$A \subset B$,

所以　$B = A \cup (B-A)$.



又　$(B-A) \cap A = \varnothing$,

得　$P(B) = P(A) + P(B-A)$.

于是　$\boxed{P(B-A) = P(B) - P(A).}$

又因　$P(B-A) \ge 0$,　故 $P(A) \le P(B)$.

(4) 对于任一事件 $A, P(A) \le 1.$

证明 $A \subset S \Rightarrow P(A) \le P(S) = 1,$

故 $P(A) \le 1.$

(5) 设 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件, 则 $P(\overline{A}) = 1 - P(A).$

证明 因为 $A \cup \overline{A} = S, A \cap \overline{A} = \varnothing, P(S) = 1,$

所以 $1 = P(S) = P(A \cup \overline{A})$

$$= P(A) + P(\overline{A}).$$

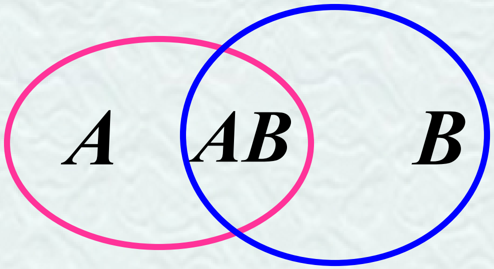
$$\Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

(6) (加法公式) 对于任意两事件 A, B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证明 由图可得

$$A \cup B = A + (B - AB),$$



且 $A \cap (B - AB) = \varnothing,$

故 $P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB).$

又由性质 3 得

$$P(B - AB) = P(B) - P(AB),$$

因此得 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$

推广 三个事件和的情况

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_2A_3)$$
$$- P(A_1A_3) + P(A_1A_2A_3).$$

n 个事件和的情况

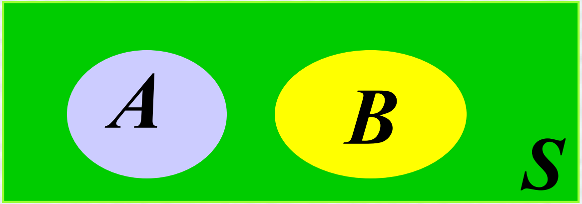
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)$$
$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例1 设事件 A,B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$, 求在下列三种情况下 $P(B\overline{A})$ 的值.

(1) A与B互斥; (2) $A \subset B$; (3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解 (1) 由图示得 $P(B\overline{A})=P(B)$,

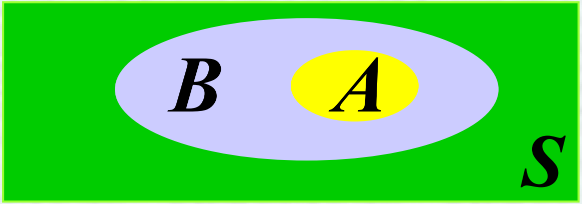
故 $P(B\overline{A})=P(B)=\frac{1}{2}$.



(2) 由图示得

$$P(B\overline{A})=P(B)-P(A)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

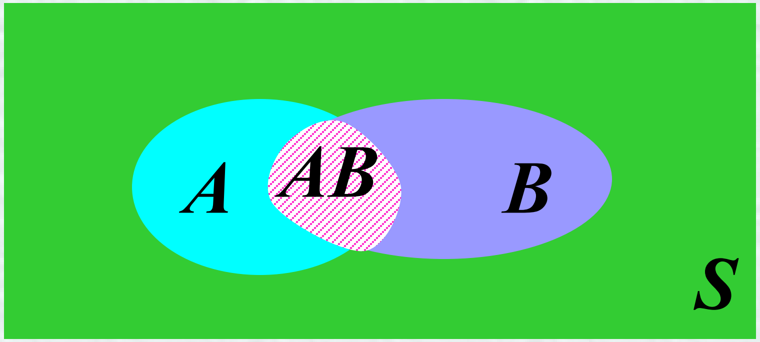


(3) 由图示得 $A \cup B = A \cup A\overline{B}$, 且 $A \cap B\overline{A} = \varnothing$,

又 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,

$P(A \cup A\overline{B}) = P(A) + P(B\overline{A})$,

因而 $P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8}$.



三、小结

1. 频率(波动) $\xrightarrow{n\to\infty}$ 概率(稳定).

2. 概率的主要性质

(1) $0 \le P(A) \le 1$, $P(S)=1$, $P(\varnothing)=0$;

(2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;

(4) 设 A, B 为两个事件, 且 $A \supset B$, 则

$P(A) \ge P(B)$, $\quad P(A-B) = P(A) - P(B)$.

柯尔莫哥洛夫资料

Andrey Nikolaevich Kolmogorov

Born: **25 Apr. 1903 in Tambov, Tambov province,Russia**

Died: **20 Oct. 1987 in Moscow, Russia**