高等数学
单元自测(六)

一、填空（20分）

1.函数 $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$ 上的平均值

为 $\bar{y}=$ $\underline{\dfrac{\sqrt{3}+1}{12}\pi}$

析: $\bar{y}=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

$$=\left(\sqrt{3}+1\right)\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\left(\sqrt{3}+1\right)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t dt=\frac{\sqrt{3}+1}{12}\pi$$

2.曲线 $y=\ln\left(1-x^2\right)$ 上 $0\le x\le\frac{1}{2}$ 一段弧长

$s=$ $\underline{\ln 3-\frac{1}{2}}$.

析：$s=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{1-x^2}-1\right)dx$$

$$=\left(\ln\frac{1+x}{1-x}-x\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\ln 3-\frac{1}{2}$$

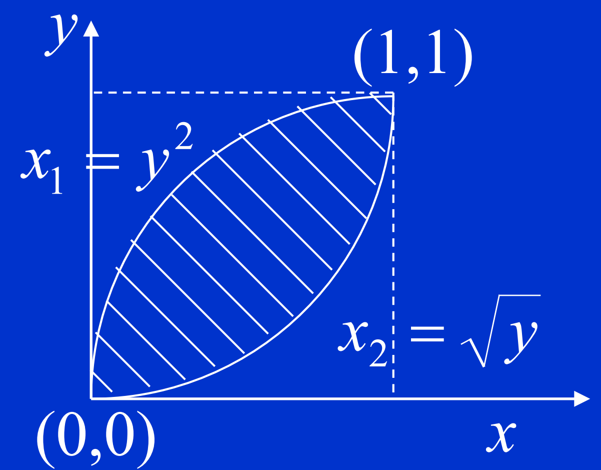
3.曲线 $y=e^x-e$，$y=0$，$x=0$，$x=2$， 所围成图形的面积 $A=$ $\underline{(e-1)^2}$

析：$A=\int_0^2\left|e^x-e-0\right|dx$

$$=\int_0^1\left(e-e^x\right)dx+\int_1^2\left(e^x-e\right)dx$$

$$=e^2+1-2e$$

4.曲线 $y=x^2$ 与 $y^2=x$ 所围图形绕y轴旋转一周所成旋转体的体积 $V=$ $\underline{\dfrac{3}{10}\pi}$



析：$V=\pi\int_0^1 x_2^2dy-\pi\int_0^1 x_1^2dy$

$=\pi\int_0^1 ydy-\pi\int_0^1 y^4dy$

$=\dfrac{3}{10}\pi$

5.横截面为S，深为h的水池装满水，把水全部抽到高为H的水塔上，所作功 W= $\underline{\rho g S h\left(H+\frac{1}{2}h\right)}$

析：$W=\rho g\int_0^h S(H+x)dx$

$$=\rho g S h(H+\frac{h}{2})$$

二、$\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}$ 一拱 $(0 \le t \le 2\pi)$ 的弧长。

解：由弧长公式，有：

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + (1 - \cos t)^2}\, dt$$

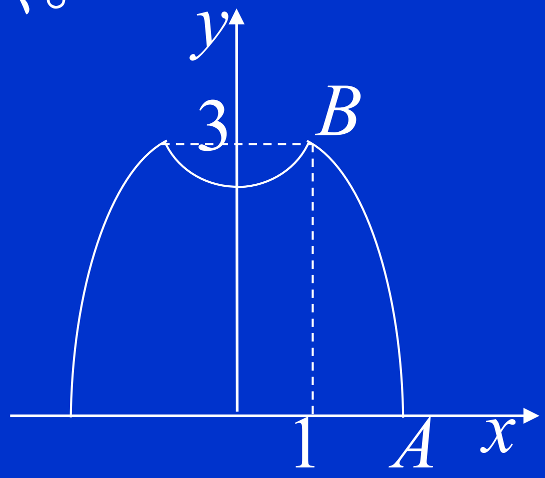
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\, dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 8$$

三、曲线 $y=3-\left|x^2-1\right|$ 与x轴所围封闭图形绕y=3旋转所得旋转体的体积。

解：作图如右

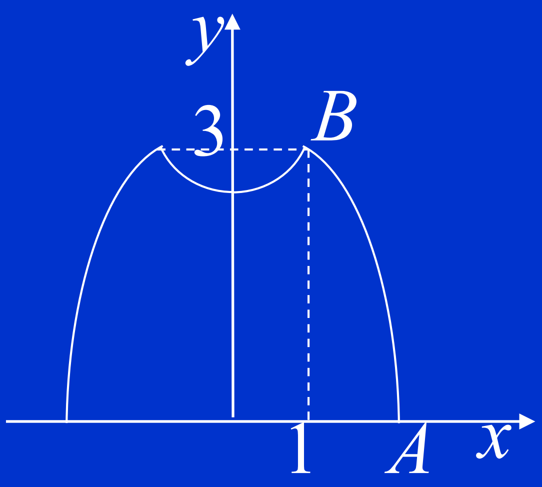


当 $0\le x\le 2$ 时

$$y=3-\left|x^2-1\right|=\begin{cases} x^2+2 & 0\le x\le 1 \\ 4-x^2 & 1<x\le 2 \end{cases}$$

设旋转体在[0,1]上的体积为V_1，在[1,2]上的体积为V_2，则

$$dV_1 = \pi\left\{3^2 - \left[3 - \left(x^2 + 2\right)\right]^2\right\}dx$$
$$= \pi\left(8 + 2x^2 - x^4\right)dx$$



$$dV_2 = \pi\left\{3^2 - \left[3 - \left(4 - x^2\right)\right]^2\right\}dx$$
$$= \pi\left(8 + 2x^2 - x^4\right)dx$$

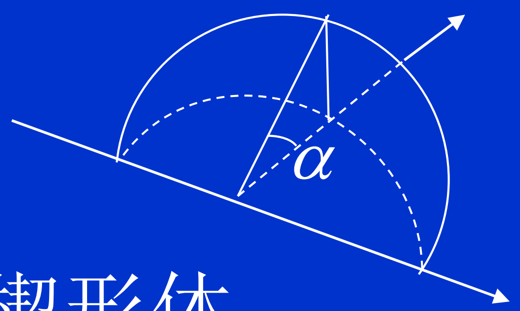
从而，由对称性有：

$$V = 2\left(V_1 + V_2\right)$$
$$= 2\pi\left[\int_0^1\left(8 + 2x^2 - x^4\right)dx + \int_1^2\left(8 + 2x^2 - x^4\right)dx\right]$$
$$= 2\pi\int_0^2\left(8 + 2x^2 - x^4\right)dx = \frac{448}{15}\pi$$

四、设有一正椭圆柱体，其底面的长、短轴分别为$2a,2b$，用过此柱体底面的短轴且与底面成α角$(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$的平面截此柱体得一如图所示的楔形体，求此楔形体的体积。

解：设底面正椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



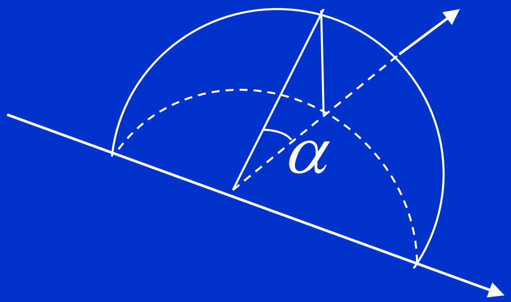
以垂直y轴的平行平面截此楔形体得截面为直角三角形，其一直角边长为 $a\sqrt{1-y^2/b^2}$ ，另一直角边长为

$a\sqrt{1-y^2/b^2}\tan\alpha$

接四

则截面面积

$$S(y)=\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\tan\alpha$$



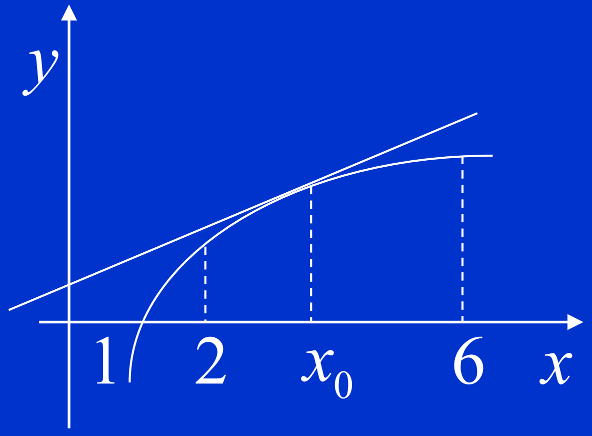
从而所求体积

$$V=2\int_0^b S(y)dy$$

$$=\frac{2}{3}a^2b\tan\alpha$$

首页 上一页 下一页 尾页 结束 返回

五、求曲线 $y = \ln x$ 在区间(2,6)内的一条切线，使该切线与直线x=2，x=6及曲线所围图形的面积最小。



解：设所求切线与曲线 $y = \ln x$ 交于点 $(x_0, \ln x_0)$

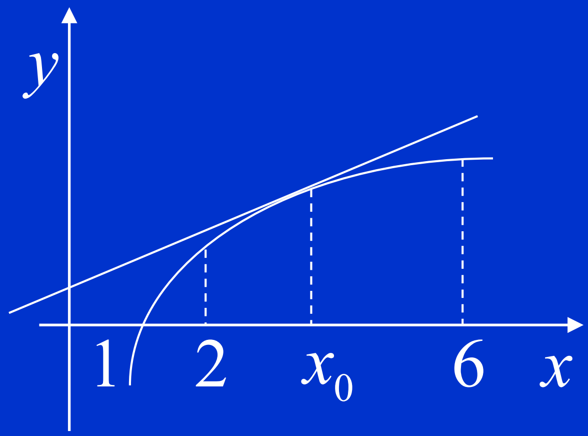
则切线方程为：

$$y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0) \qquad (2 < x_0 < 6)$$

从而切线与x=2，x=6所围图形面积

$$A = \int_2^6 \left[\frac{1}{x_0}(x - x_0) + \ln x_0 - \ln x \right] dx$$

$$A=\int_2^6\left[\frac{1}{x_0}(x-x_0)+\ln x_0-\ln x\right]dx$$



$$=\frac{16}{x_0}+4\ln x_0-4\ln 2-6\ln 3$$

设 $f(x)=\frac{16}{x}+4\ln x-4\ln 2-6\ln 3$ $\qquad (2<x<6)$

由 $f'(x)=-\frac{4}{x^2}(4-x)$ 得唯一驻点x=4

由实际问题知最小面积存在且驻点唯一，则

所求切线方程为：$y=\frac{1}{4}x-1+\ln 4$

六、设函数 $f(x)$ 在闭区间[0,1]上连续，在开区间(0,1)内大于零且满足 $xf'(x)=f(x)+\frac{3}{2}ax^2$ (a为常数)。又曲线$y=f(x)$与$x=1,y=0$所围的圆形S的面积值为2，求函数 $y=f(x)$，并问a为何值时，图形S绕x轴旋转一周所得旋转体体积最小？

解：由已知，当 $x\neq 0$时，有

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{3}{2}a \quad , \quad 即 \left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\frac{3}{2}a$$

从而$f(x)=\frac{3}{2}ax^2+cx$，当$x=0$时，有$f(0)=0$

从而由其函数连续性知

$$f(x)=\frac{3}{2}ax^2+cx \qquad x\in[0,1]$$

又由 $2=A=\int_0^1 f(x)dx$

$$=\int_0^1\left(\frac{3}{2}ax^2+cx\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c$$

得 $c=4-a$

所以 $f(x)=\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x$

因此旋转体体积

$$V(a)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1\left[\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x\right]^2dx$$

$$=\pi\left(\frac{1}{30}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{16}{3}\right)$$

由 $V'(a)=\left(\frac{a}{15}+\frac{1}{3}\right)\pi=0$ 得 $a=-5$

又 $V''(a)=\frac{1}{15}\pi$， $V''(-5)>0$

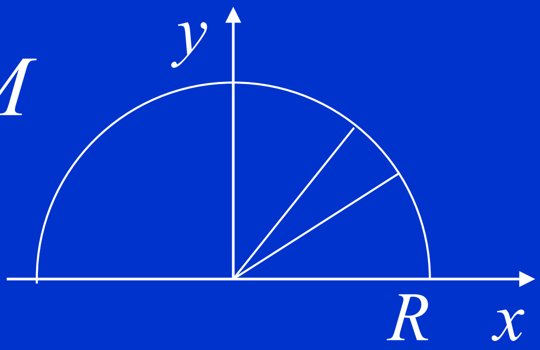
故 $a=-5$ 是唯一极小值点，所以此点为最小值点

从而当 $a=-5$ 时，旋转体体积最小.

七、求一质量均匀的半圆弧对位于其圆点的单位质量质点的引力。

解：建立坐标系如图

设半圆弧半径为R，质量为M



由对称性

$$\vec{F}=\{0,F_y\}\ ,$$

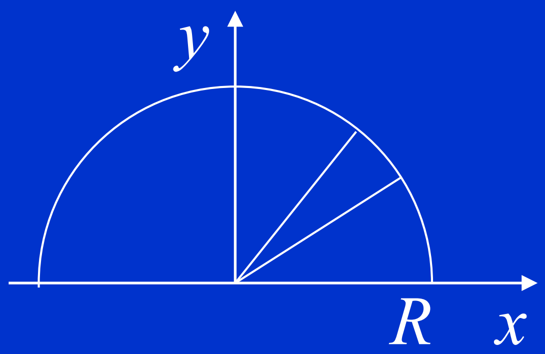
又 $dF=\dfrac{k\cdot 1\cdot dm}{R^2}=\dfrac{k\dfrac{M}{\pi R}ds}{R^2}=\dfrac{kM}{\pi R^2}d\theta\ (ds=Rd\theta)$

从而 $dF_y=dF\cdot\sin\theta=\dfrac{kM}{\pi R^2}\sin\theta d\theta$

$$\therefore \quad F_y = \int_0^{\pi} dF_y = \int_0^{\pi} \frac{kM}{\pi R^2} \sin\theta d\theta$$

$$= -\frac{kM}{\pi R^2} \cos\theta \Big|_0^{\pi}$$

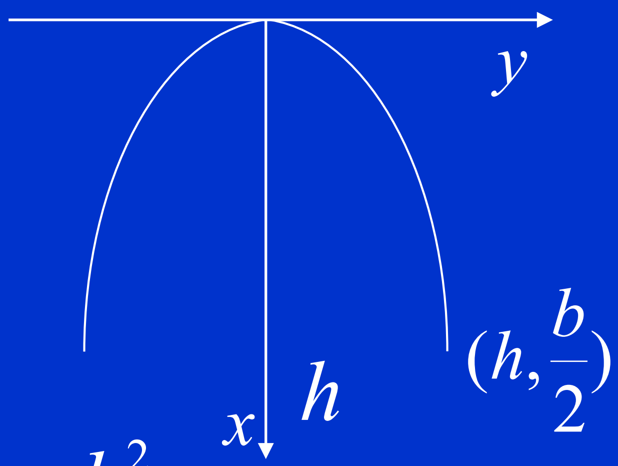
$$= \frac{2kM}{\pi R^2}$$



由 $dF_x = dF \cdot \cos\theta d\theta$ 易知 $F_x = \int_0^{\pi} dF_x = 0$

所以 $\vec{F} = \left\{0, \dfrac{2kM}{\pi R^2}\right\}$

八、底为b高为h的对称抛物线弓形闸门，底平行于水平面且离水平面距离为h，顶点与水平面齐，若底与高之和为常数a，问高和底各为何值时，闸门所受的压力最大。



解：建立坐标系如图所示

取x为积分变量 $x \in [0,h]$

设抛物线为 $y^2 = 2px$

由于曲线过点$(h,\frac{b}{2})$，有$p = \frac{b^2}{8h}$

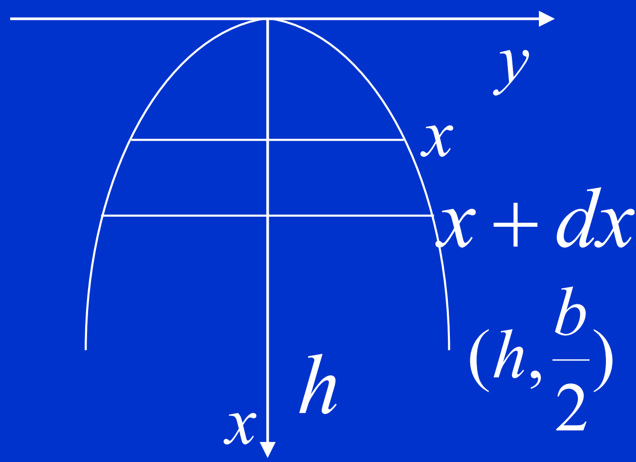
于是有 $y^2 = \frac{b^2}{4h}x$

取小区间 $[x, x+dx]$，有

$$dF = \rho g x \cdot 2 y dx$$

$$= \rho g x \cdot 2\sqrt{\frac{b^2}{4h}x}\,dx$$

$$= \frac{\rho g b}{\sqrt{h}} x^{\frac{3}{2}} dx$$

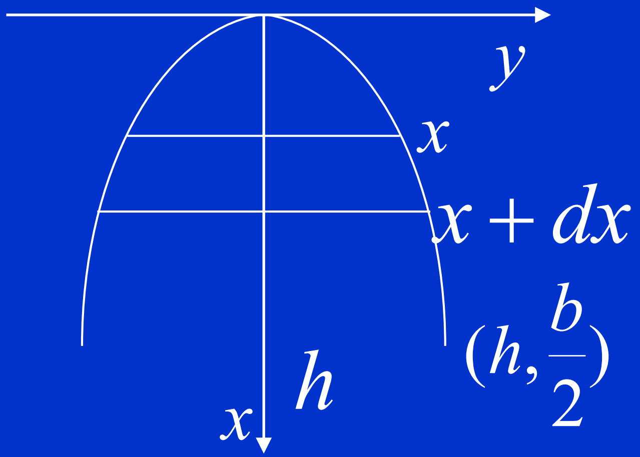


故 $F = \int_0^h dF = \int_0^h \frac{\rho g b}{\sqrt{h}} x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} \rho g b h^2$

由已知 $b + h = a$ 得 $F = \frac{2}{5} \rho g (a-h) h^2 \quad h \in (0, a)$

从而，令 $\dfrac{dF}{dh}=\dfrac{2}{5}\rho g\left(2ah-3h^2\right)=0$

得唯一驻点 $h=\dfrac{2}{3}a$



又 $\left.\dfrac{d^2F}{dh^2}\right|_{h=\frac{2}{3}a}=\left.\dfrac{2}{5}\rho g(2a-6h)\right|_{h=\frac{2}{3}a}$

$=-\dfrac{4}{5}\rho g a<0$

故当 $h=\dfrac{2}{3}a$ $b=\dfrac{1}{3}a$ 时，

F取得唯一极大值为最大值

此时，闸门所受压力最大