### 第四节 对换

### 一、对换的定义

定义 在排列中,将任意两个元素对调,其余元素不动,这种作出新排列的手续叫做对换.

将相邻两个元素对调,叫做相邻对换.

例如

$$a_1 \cdots a_l$$
  $a_1 b_1 \cdots b_m$   $a_1 \cdots a_l a_1 b_1 \cdots b_m b_1 c_1 \cdots c_n$ 
 $a_1 \cdots a_l$   $b_1 \cdots b_m$   $a_1 \cdots a_l b_1 b_1 \cdots b_m$   $a_1 \cdots a_l b_m$   $a_1 \cdots a_n b_n$   $a_1 \cdots$ 







一、**对换与排列的奇偶性的关系**定理1 一个排列中的任意两个元素对换,排改变奇偶性.

证明 设排列为  $a_1 \cdots a_l \ ab \ b_1 \cdots b_m \ {}^{\overline{T} + \overline{P} + \overline{$ 定理1 一个排列中的任意两个元素对换,排列

$$a_1 \cdots a_l$$
  $ab \ b_1 \cdots b_m$   $\xrightarrow{\text{MPA} = D} a_1 \cdots a_l$   $ba \ b_1 \cdots b_m$ 





当a < b时,

经对换后 a 的逆序数增加1, b的逆序数不变;

当a > b时,

经对换后 a 的逆序数不变, b的逆序数减少1.

因此对换相邻两个元素,排列改变奇偶性.

设排列为  $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$ 

现来对换a与b.

 $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$ 

m 次相邻对换  $a_1 \cdots a_l$  ab  $b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$ 

m+1 次相邻对换  $a_1\cdots a_l$  b  $b_1\cdots b_m$  a  $c_1\cdots c_n$ 

 $\therefore a_1 \cdots a_l ab_1 \cdots b_m bc_1 \cdots c_n,$ 

2m+1次相邻对换  $a_1 \cdots a_l bb_1 \cdots b_m ac_1 \cdots c_n$ ,

所以一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.





推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数, 偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证明 由定理1知对换的次数就是排列奇偶性的

变化次数,而标准排列是偶排列(逆序数为0),因此知推论成立.

定理2 n阶行列式也可定义为

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

其中t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.





### 例2 在六阶行列式中,下列两项各应带什么符号.

- (1)  $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ ;
- (2)  $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ .

解 (1) 
$$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65} \rightarrow a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$$
,

431265的逆序数为

$$t=1+0+2+2+1+0=6,$$

所以 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 前边应带正号.



### $(2) \quad a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$

行标排列341562的逆序数为

$$t = 0 + 0 + 2 + 0 + 0 + 4 = 6$$

列标排列234165的逆序数为

$$t = 1 + 0 + 3 + 0 + 0 = 4$$

所以 $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 前边应带正号.

### 小结

- 1. 一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.
  - 2. 行列式的两种表示方法

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

$$D = \sum (-1)^t a_{1\,p_1} a_{2\,p_2} \cdots a_{np_n}$$





### 第五节 行列式的性质

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} D^{T} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D<sup>T</sup> 称为行列式 D 的转置行列式.

性质1 行列式与它的转置行列式相等.





### 证明 记 $D = \det(a_{ii})$ 的转置行列式

即 
$$b_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, 2, \dots, n)$$
, 按定义

$$D^{T} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{t} b_{1 p_{1}} b_{2 p_{2}} \cdots b_{n p_{n}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{t} a_{p_{1} 1} a_{p_{2} 2} \cdots a_{p_{n} n}.$$

### 又因为行列式D可表示为

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}.$$







故  $D=D^T$ .

证毕

说明 行列式中行与列具有同等的地位,因此行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.

性质2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

证明 设行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

是由行列式  $D = det(a_{ii})$  变换 i, j 两行得到的,





即当 $k \neq i, j$  时,  $b_{kp} = a_{kp}$ ; 当 k = i, j 时,

$$b_{ip}=a_{jp},\ b_{jp}=a_{ip},$$

于是  $D_1 = \sum (-1)^t b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n}$  $= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n}$ 

$$=\sum (-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n},$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列,

t为排列  $p_1 \cdots p_i \cdots p_i \cdots p_n$  的逆序数.

设排列  $p_1 \cdots p_i \cdots p_n$  的逆序数为 $t_1$ , **则有** 





$$(-1)^t = -(-1)^{t_1},$$

故  $D_1 = -\sum (-1)^{t_1} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} = -D.$ 证毕 例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

推论 如果行列式有两行(列)完全相同,则 此行列式为零.

证明 互换相同的两行,有 D = -D, ∴ D = 0.







以 $r_i$  表示行列式的第  $r_i$  行 以 $C_i$  表示行列式的第  $C_i$  列 交换 i,j 两行记作  $r_i \leftrightarrow r_j$ ,

交换 i, j 两列记作  $c_i \leftrightarrow c_j$ ,

性质3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k ,等于用数 k 乘此行列式.

<i>a</i> <sub>11</sub>	<i>a</i> <sub>12</sub>	• • • • •	$a_{1n}$		<i>a</i> <sub>11</sub>	<i>a</i> <sub>12</sub>	••••	$a_{1n}$
ka <sub>i1</sub>	ka <sub>i2</sub>	•••	ka <sub>in</sub>	= k	$a_{i1}$	$a_{i2}$	•••	a <sub>in</sub>
$a_{n1}$	$a_{n2}$	• • •	$a_{nn}$		$a_{n1}$	$a_{n2}$		$a_{nn}$





### 推论 行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

第i行(或列)乘以k,

记作  $r_i \times k$  (或  $c_i \times k$ )





性质 4 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式为零.

### 证明

<i>a</i> <sub>11</sub>	<i>a</i> <sub>12</sub>	• • • •	$a_{1n}$		<i>a</i> <sub>11</sub>	<i>a</i> <sub>12</sub>	• • •	$a_{1n}$	
$a_{i1}$	$a_{i2}$	• • •		= k		$a_{i2}$	•••	a <sub>in</sub>	_ 0
ka <sub>i1</sub>	ka <sub>i2</sub>	•••				$a_{i2}$	•••	$a_{in}$	<b>– v.</b>
$a_{n1}$	$a_{n2}$	• • •	$a_{nn}$		$a_{n1}$	$a_{n2}$	• • •	$a_{nn}$	





性质5 若行列式的某一列(行)的元素都是两 数之和.  $a_{21}$   $a_{22}$   $\cdots$   $(a_{2i} + a'_{1i})$   $\cdots$   $a_{1n}$   $\vdots$   $\vdots$   $\vdots$  $a_{n1}$   $a_{n2}$   $\cdots$   $(a_{ni} + a'_{ni})$   $\cdots$   $a_{nn}$ 等于下列两个行列式之和:  $\cdots a_{1i} \cdots a_{1n} a_{11} \cdots a_{1i}'$  $\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} +$  $a_{21} \quad \cdots \quad a'_{2i}$  $|a_{n1} \cdots a_{ni} \cdots a_{nn}|$ 

 $a_{n1} \cdots a'_{ni} \cdots a_{nn}$ 





### 例1 计算下列行列式的值

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 301 & 98 & 197 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 300+1 & 100-2 & 200-3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 300 & 100 & 200 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$





性质 6 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去,行列式不变.

$$\underbrace{\frac{C_{i} + kC_{j}}{a_{21}}}_{a_{11}} \underbrace{\frac{a_{1i} + ka_{1j} - \cdots - a_{1j} - \cdots - a_{1n}}{a_{2i} - \cdots - a_{2j} - \cdots - a_{2j}}}_{a_{n1}} \underbrace{\frac{a_{2i} + ka_{2j} - \cdots - a_{2j}}{a_{nj} - \cdots - a_{nj}}}_{a_{nj}} \underbrace{\frac{a_{2i} - \cdots - a_{1i} - \cdots - a_{2j}}{a_{nj}}}_{a_{nj}} \underbrace{\frac{a_{2i} - \cdots - a_{2i} - \cdots - a_{2j}}{a_{nj}}}_{a_{nj}} \underbrace{\frac{a_{2i} - \cdots - a_{2i} - \cdots - a_{2j}}{a_{nj}}}_{a_{nj}} \underbrace{\frac{a_{2i} - \cdots - a_{2i} - \cdots - a_{2j}}{a_{nj}}}_{a_{nj}} \underbrace{\frac{a_{2i} - \cdots - a_{2i} - \cdots - a_{2j}}{a_{nj}}}_{a_{nj}} \underbrace{\frac{a_{2i} - \cdots - a_{2i} - \cdots - a_{2j}}{a_{nj}}}_{a_{nj}} \underbrace{\frac{a_{2i} - \cdots - a_{2i} - \cdots - a_{2j}}{a_{nj}}}_{a_{nj}} \underbrace{\frac{a_{2i} - \cdots - a_{2i} - \cdots - a_{2j}}{a_{nj}}}_{a_{nj}} \underbrace{\frac{a_{2i} - \cdots - a_{2i} - \cdots - a_{2i}}{a_{nj}}}_{a_{nj}} \underbrace{\frac{a_{2i} - \cdots - a_{2i} - \cdots - a_{2i}}{a_{nj}}}_{a_{nj}} \underbrace{\frac{a_{2i} - \cdots - a_{2i} - \cdots - a_{2i}}{a_{nj}}}_{a_{nj}} \underbrace{\frac{a_{2i} - \cdots - a_{2i} - \cdots - a_{2i}}{a_{nj}}}_{a_{nj}} \underbrace{\frac{a_{2i} - \cdots - a_{2i} - \cdots - a_{2i}}{a_{nj}}}_{a_{nj}} \underbrace{\frac{a_{2i} - \cdots - a_{2i} - \cdots - a_{nj}}{a_{nj}}}_{a_{nj}} \underbrace{\frac{a_{2i} - \cdots - a_{2i} - \cdots - a_{nj}}{a_{nj}}}_{a_{nj}} \underbrace{\frac{a_{2i} - \cdots - a_{nj}}{a_{nj}}}_{a_{nj}}}_{a_{nj}} \underbrace{\frac{a_{2i} - \cdots - a_{nj}}{a_{nj}}}_{a_{nj}}}_{a_{nj}$$

上页

下页

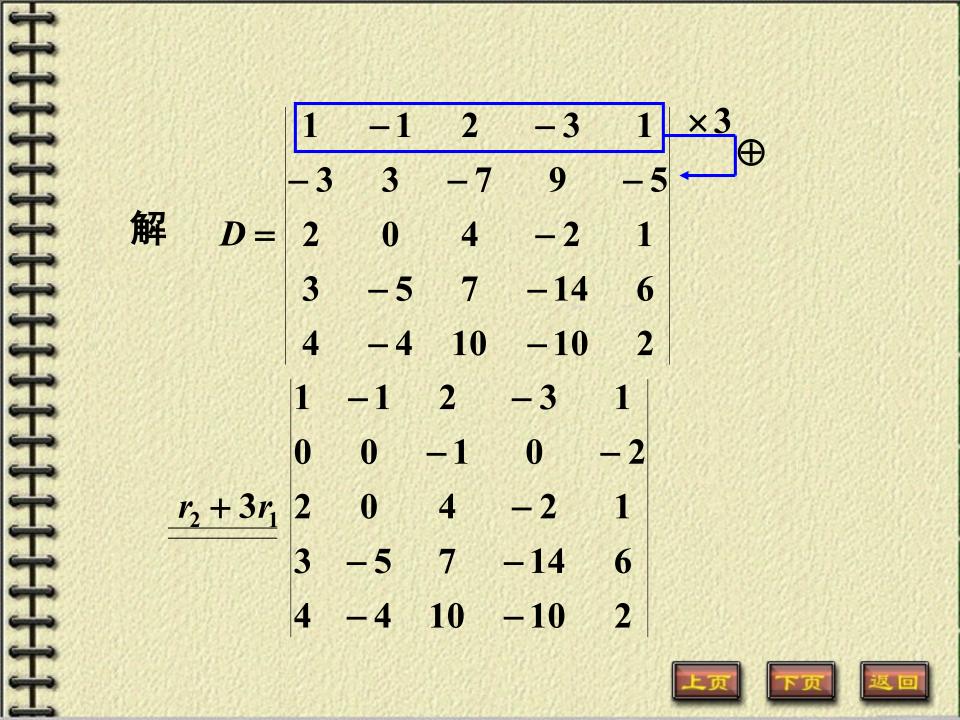


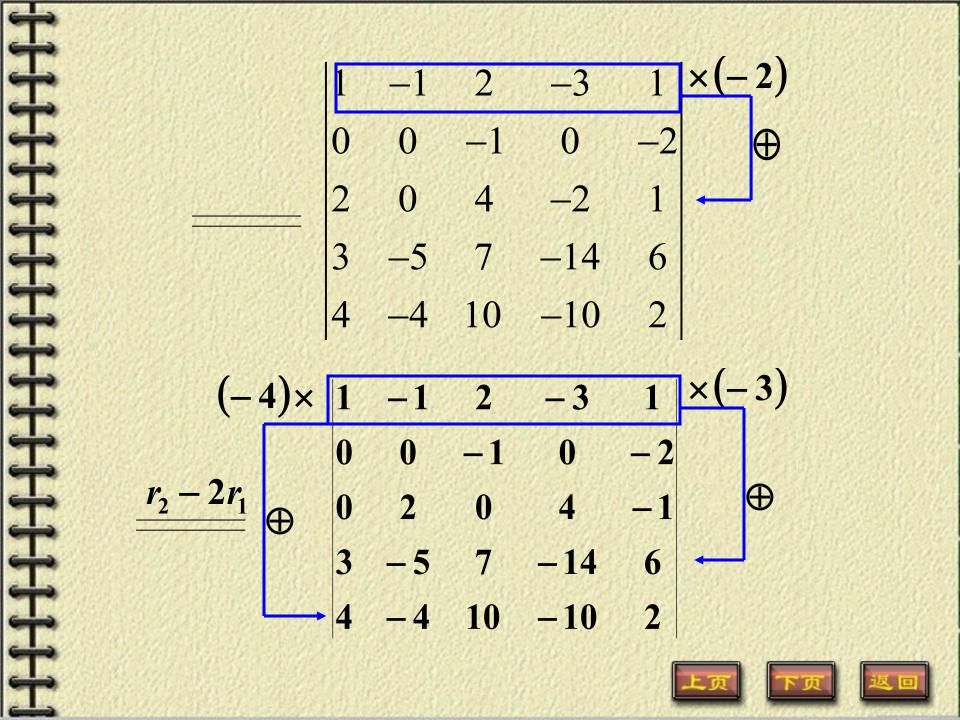
### 二、应用举例

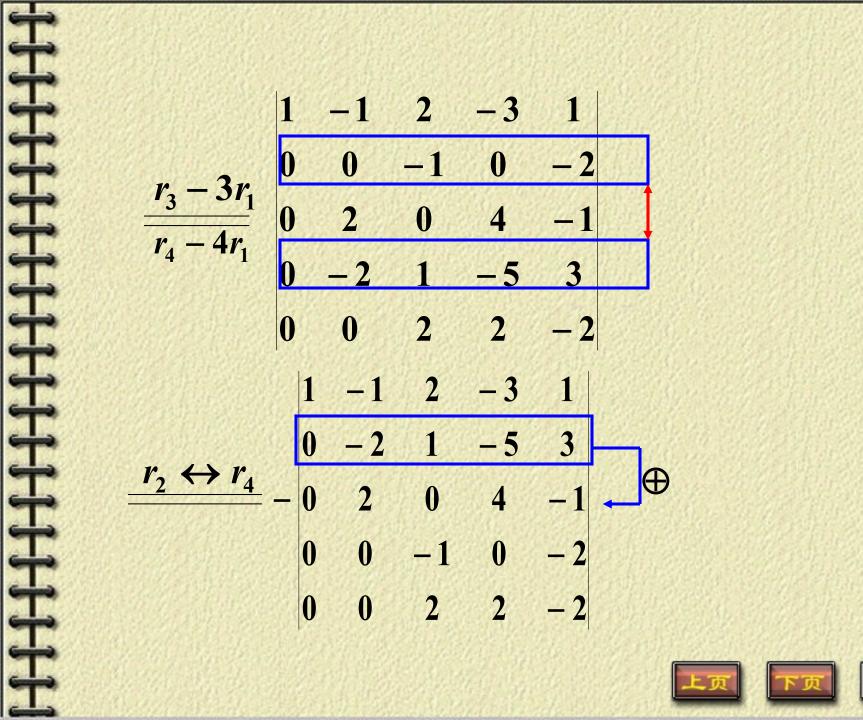
计算行列式常用方法:利用运算 $r_i + kr_j$ 把行列式化为上三角形行列式,从而算得行列式的值.

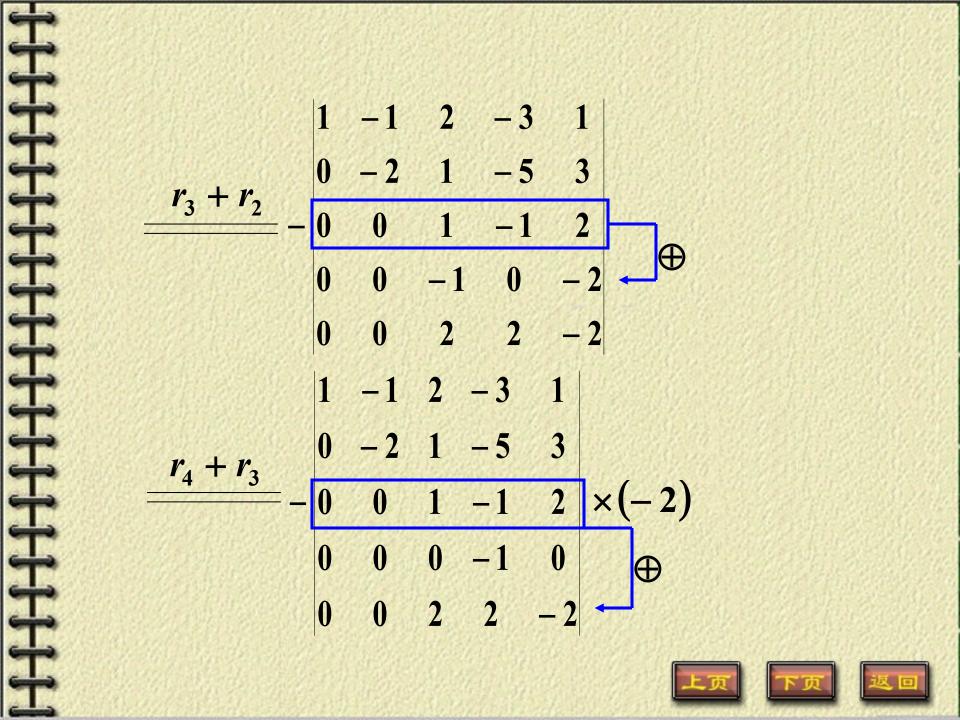
例2 
$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \times 3 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \end{bmatrix}$$
  $+$  3  $+$  4  $+$  6  $+$  4  $+$  4  $+$  4  $+$  6  $+$  9  $+$ 

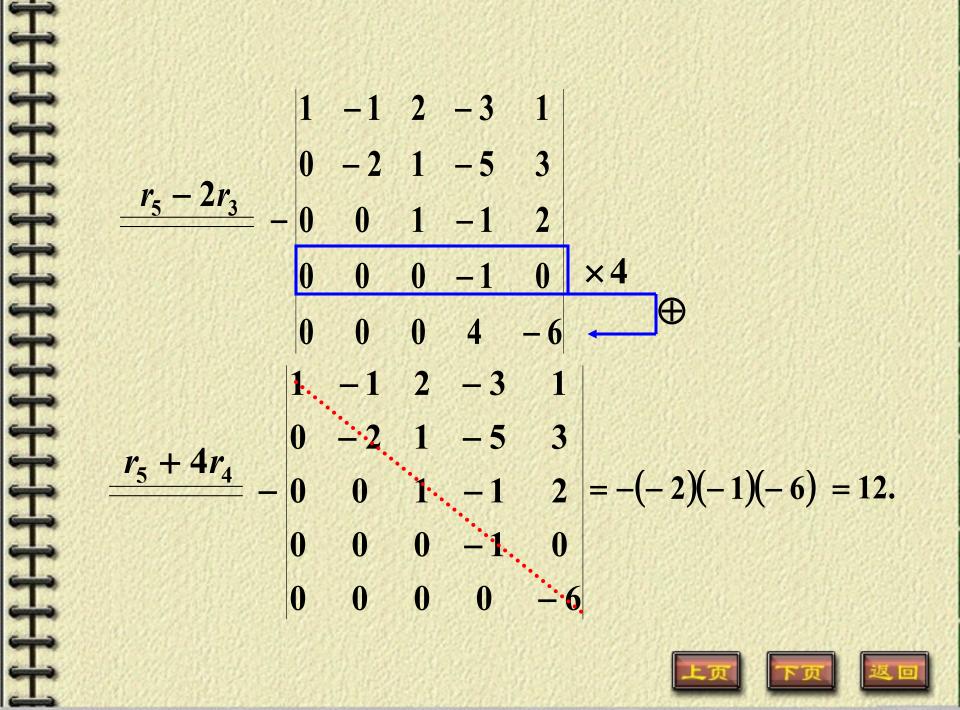












例3. 计算 a 特点: 各列元素之和相等 a bb+3a b+3a b+3a b+3a $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ a b+3a $c_2 - c_1, c_3 - c_1$  $c_4 - c_1$ b-a0 a  $= (b+3a)(b-a)^3$ 

$$\begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}$$

$$\frac{c_2 - c_1, c_3 - c_1}{c_4 - c_1} \begin{vmatrix} b & a - b & a - b & a - b \\ a & b - a & 0 & 0 \\ a & 0 & b - a & 0 \\ a & 0 & 0 & b - a \end{vmatrix}$$

$$\frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{a} \begin{vmatrix} b+3a & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 & 0 \\ a & 0 & b-a & 0 \\ a & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix}$$



 $a_1 a_2 a_3 a_4 \neq 0$ 例4 计算4阶行列式,  $|x+a_1|$  $x x + a_2 x$  $x x x + a_3$ x  $x \qquad x + a_4$ 解:  $\frac{r_{i} - r_{1}}{\overline{i} = 2,3,4} \begin{vmatrix} x + a_{1} & x & x \\ -a_{1} & a_{2} \\ -a_{1} & a_{3} \\ -a_{1} & a_{3} \end{vmatrix}$ 双边 - 对角形  $a_4$ 

$$= a_1 a_2 a_3 a_4 \begin{vmatrix} 1 + \frac{x}{a_1} & \frac{x}{a_2} & \frac{x}{a_3} & \frac{x}{a_4} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}{a_1 a_2 a_3 a_4} \left( 1 + \sum_{i=1}^4 \frac{x}{a_i} \right)$$

$$= \prod_{i=1}^{4} a_i \left( 1 + \sum_{i=1}^{4} \frac{x}{a_i} \right)$$

### 例5. **计算**

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & a \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

 $0 \quad a \quad a+b \quad a+b+c$ 

(P13 例9)

 $a \quad 3a+b \quad 6a+3b+c$ 0 0 a 3a+b

注意: 1) 运算次序不同行列式变形结果可能形式不同. 例如  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 + r_2 \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_2 - r_1 \\ -a & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ -a & -b \end{vmatrix}$  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_2 - r_1 \\ c - a & d - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c - a & d - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ c - a & d - b \end{vmatrix}$ 

2)忽视后次运算是作用在前次运算基础上的就要出错. 例如,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{vmatrix} a + c & b + d \\ c - a & d - b \end{vmatrix}$$

3)

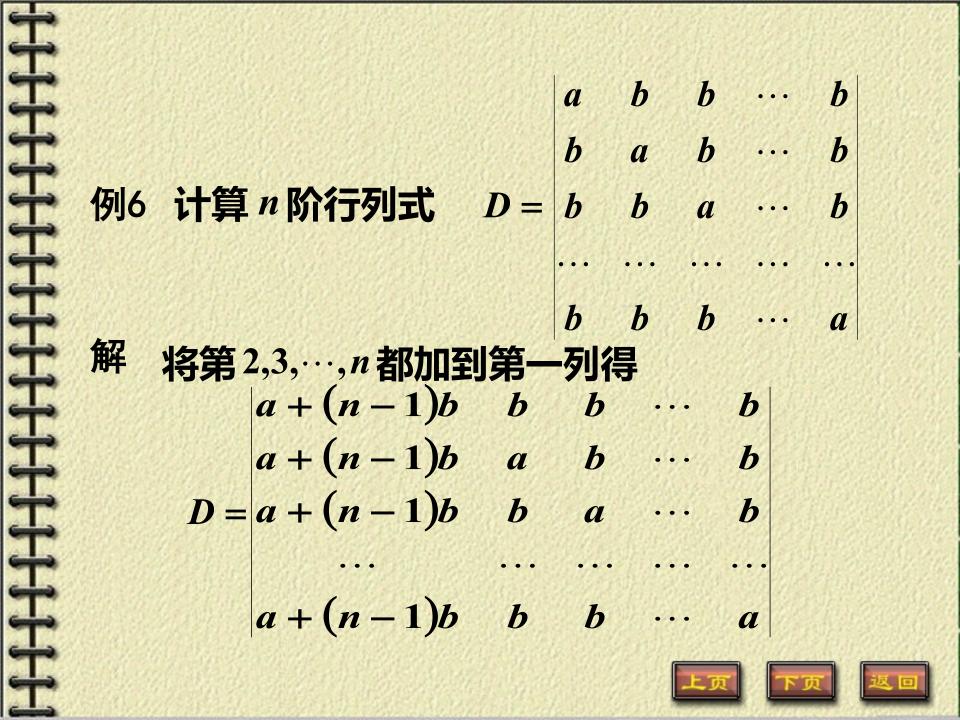
$$r_i + r_j$$
 第  $j$  行加到第  $i$  行  $r_j + r_i$  第  $i$  行加到第  $j$  行  $r_i + kr_j$  不能写成  $kr_j + r_i$ 

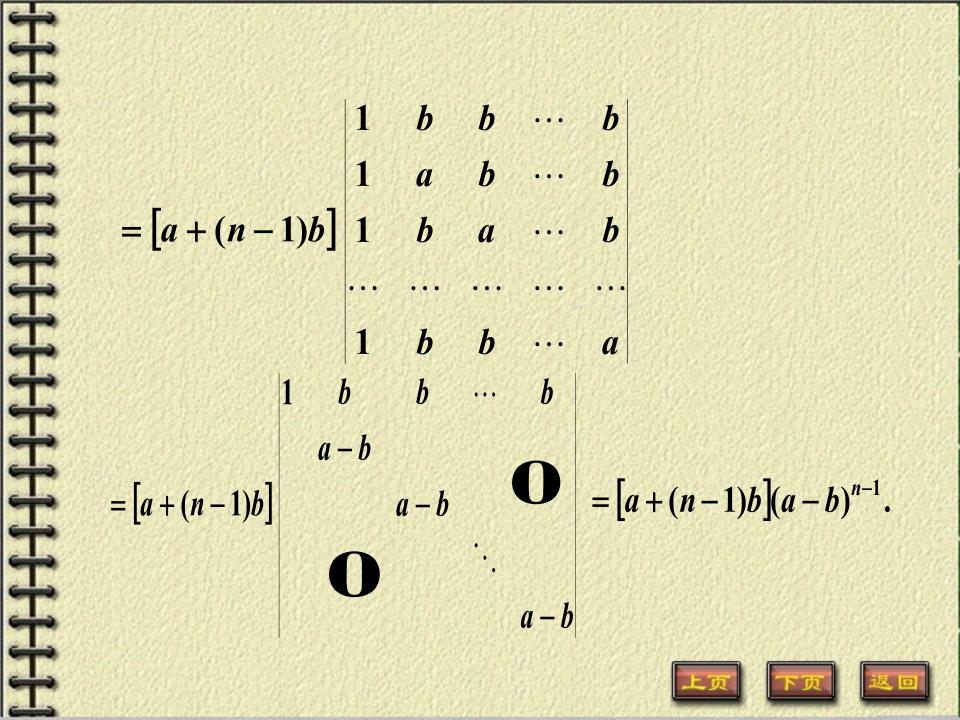
无交换律











例7 设 
$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ \hline c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, D_2 = \det(b_{ij}) = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$
证明  $D = D_1 D_2$ . (P14例10)

证明

对  $D_1$  作运算  $r_i + kr_i$ , 把  $D_1$  化为下三角形行列式

设为 
$$D_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11} \cdots p_{kk};$$

对  $D_2$  作运算  $c_i + kc_j$ ,把  $D_2$  化为下三角形行列式

设为 
$$D_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nk} \end{vmatrix} = q_{11} \cdots q_{nn}.$$



对 D 的前 k 行作运算  $r_i + kr_j$ ,再对后 n 列作运算  $c_i + kc_j$ ,把 D 化为下三角形行列式

$$D = \begin{bmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix},$$

故 
$$D = p_{11} \cdots p_{kk} \cdot q_{11} \cdots q_{nn} = D_1 D_2$$
.



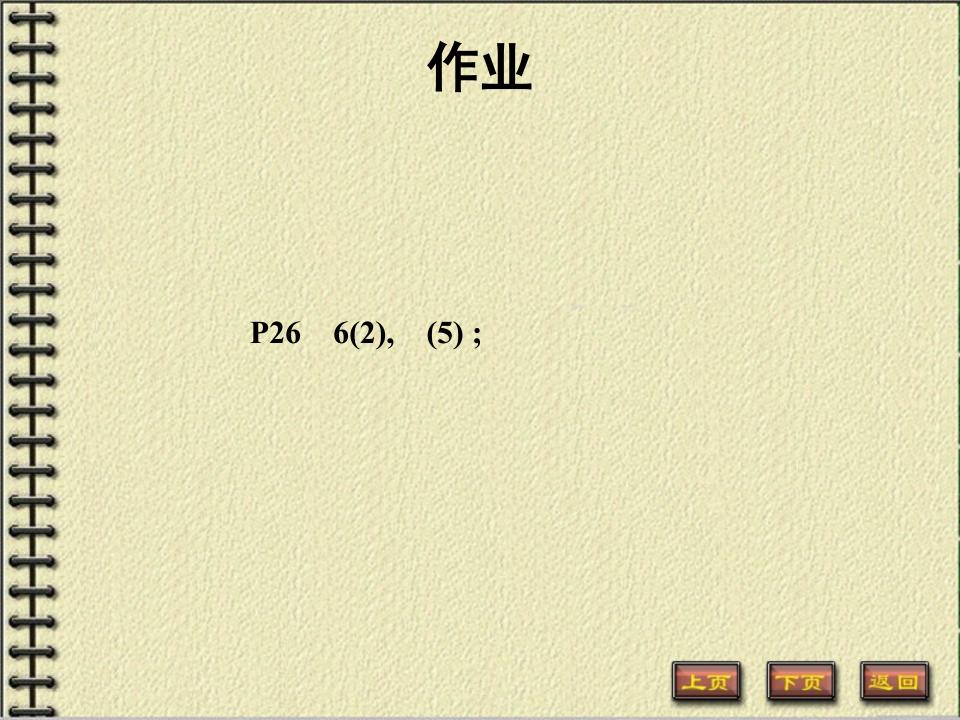
### 三、小结

行列式的6个性质(行列式中行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立).

计算行列式常用方法: (1)利用定义;(2)利用性质把行列式化为上三角形行列式,从而算得行列式的值.







### 思考题

计算4阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a^2 + \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 + \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 + \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(已知 abcd = 1)



### 思考题解答

解

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

+



$$= abcd\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + (-1)^3 abcd\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$

