代数系统简介

第9章 代数系统简介

- 9.1 二元运算及其性质
- 9.2 代数系统
- 9.3 几个典型的代数系统

9.1 二元运算及其性质

- 二元运算及一元运算的定义
- 二元运算的性质
  - 交换律、结合律、幂等律、消去律
  - 分配律、吸收律
- 二元运算的特异元素
  - 单位元
  - 零元
  - 可逆元素及其逆元

二元运算的定义及其实例

定义 设 S 为集合,函数 f: $S \times S \to S$ 称为 S 上的二元运算, 简称为二元运算. 也称 S 对 f 封闭.

例1

(1) N 上的二元运算：加法、乘法.

(2) Z 上的二元运算：加法、减法、乘法.

(3) 非零实数集 R* 上的二元运算: 乘法、除法.

(4) 设 $S = \{ a_1, a_2, \ldots , a_n\}$, $a_i \circ a_j = a_i$, $\circ$为 S 上二元运算.

二元运算的实例（续）

(5) 设 $M_n(\mathrm{R})$ 表示所有 n 阶 $(n\geq 2)$ 实矩阵的集合，即

$$M_n(\mathrm{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| \; a_{ij} \in \mathrm{R},\ i,j = 1,2,\ldots,n \right\}$$

矩阵加法和乘法都是 $M_n(\mathrm{R})$ 上的二元运算.

(6) 幂集 $P(S)$ 上的二元运算：$\cup, \cap, -, \oplus$.

(7) S^S 为 S 上的所有函数的集合：合成运算$\circ$.

n元运算

定义 设 S 为集合，n为正整数，函数

$$f: \underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{n} \to S$$

称为 S 上的 n 元运算，简称为 n元运算.

例2 (1) Z, Q 和 R 上的一元运算: 求相反数

(2) 非零有理数集 Q*和实数集 R*的一元运算：倒数

(3) 复数集合 C 上的一元运算：求共轭复数

(4) 幂集 $P(S)$ 上, 全集为 S：求绝对补运算~

(5) A 为 S 上所有双射函数的集合，$A \subseteq S^S$: 求反函数

(6) 在 $M_n(\mathrm{R})$ ($n \geq 2$)上，求转置矩阵

运算的表示

算符：∘, ∗, · , ⊕, ⊗ 等符号

表示 n 元运算

$\circ(a_1, a_2, \ldots, a_n)=b.$

对二元运算 ∘，如果 x 与 y 运算得到 z，记做

$x\circ y = z;$

对一元运算 ∘, x 的运算结果记作 $\circ x$

注意：在同一问题中不同的运算使用不同的算符

二元与一元运算的表示

公式表示

例3 设 R 为实数集合，如下定义 R 上的二元运算 *:

$$\forall x, y \in \mathrm{R},\ x * y = x.$$

那么 $3 * 4 = 3$

$0.5 * (-3) = 0.5$

运算表的形式

运算表（表示有穷集上的一元和二元运算）

$\circ$	a_1	a_2	…	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	…	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	…	$a_2 \circ a_n$
.		. . .		
.		. . .		
.		. . .		
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	…	$a_n \circ a_n$

	$\circ a_i$
a_1	$\circ a_1$
a_2	$\circ a_2$
.	.
.	.
.	.
a_n	$\circ a_n$

运算表的实例

例4 $A = P(\{a, b\})$, $\oplus$, ~分别为对称差和补集运算（$\{a,b\}$为全集）

$\oplus$ 的运算表

$\oplus$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a.b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\varnothing$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\varnothing$

~ 的运算表

X	$\sim X$
$\varnothing$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\varnothing$

运算表的实例（续）

例5 $Z_5 = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$, $\oplus$, $\otimes$ 分别为模 5 加法与乘法

$\oplus$ 的运算表

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\otimes$ 的运算表

$\otimes$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

二元运算的性质

定义 设 $\circ$ 为 S 上的二元运算,

(1) 如果对于任意的 $x, y \in S$ 有

$$x \circ y = y \circ x,$$

则称运算在 S 上满足交换律.

(2) 如果对于任意的 $x, y, z \in S$ 有

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

则称运算在 S 上满足结合律.

(3) 如果对于任意的 $x \in S$ 有

$$x \circ x = x,$$

则称运算在 S 上满足幂等律.

实例分析

Z, Q, R分别为整数、有理数、实数集；M_n(R)为 n 阶实矩阵集合, n≥2；$P(B)$为幂集；A^A 为 A上A，$|A|$≥2.

集合	运算	交换律	结合律	幂等律
Z, Q, R	普通加法+	有	有	无
	普通乘法×	有	有	无
M_n(R)	矩阵加法+	有	有	无
	矩阵乘法×	无	有	无
$P(B)$	并∪	有	有	有
	交∩	有	有	有
	相对补−	无	无	无
	对称差⊕	有	有	无
A^A	函数符合∘	无	有	无

二元运算的性质（续）

定义 设 $\circ$ 和 $*$ 为 S 上两个不同的二元运算,

(1) 如果$\forall x, y, z \in S$ 有

$$(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$$

$$z \circ (x * y) = (z \circ x) * (z \circ y)$$

则称 $\circ$ 运算对 $*$ 运算满足分配律.

(2) 如果$\circ$ 和 $*$ 都可交换, 并且$\forall x, y \in S$ 有

$$x \circ (x * y) = x$$

$$x * (x \circ y) = x$$

则称 $\circ$ 和 $*$ 运算满足吸收律.

实例分析

Z, Q, R分别为整数、有理数、实数集；M_n(R) 为 n 阶实矩阵集合, n≥2；$P(B)$为幂集；A^A为 A上A，|A|≥2.

集合	运算	分配律	吸收律
Z,Q,R	普通加法＋与乘法×	×对＋可分配	无
		＋对×不分配	
M_n(R)	矩阵加法＋与乘法×	×对＋可分配	无
		＋对×不分配	
$P(B)$	并∪与交∩	∪对∩可分配	有
		∩对∪可分配	
	交∩与对称差⊕	∩对⊕可分配	无
		⊕对∩不分配	

二元运算的特异元素

单位元

定义　设$\circ$为S上的二元运算，如果存在e_l（或e_r）$\in S$，使得对任意 $x \in S$ 都有

$$e_l \circ x = x \ (\text{或}\ x \circ e_r = x),$$

则称 e_l (或 e_r)是 S 中关于 $\circ$ 运算的 左 (或右) 单位元.

若 $e \in S$ 关于 $\circ$ 运算既是左单位元又是右单位元，则称 e 为 S 上关于 $\circ$ 运算的 单位元.

单位元也叫做 幺元.

二元运算的特异元素（续）

零元

设 $\circ$ 为 S 上的二元运算, 如果存在θ_l（或θ_r）$\in S$，使得对任意 $x \in S$ 都有

$$\theta_l \circ x = \theta_l \ (\text{或 } x \circ \theta_r = \theta_r),$$

则称θ_l(或θ_r)是 S 中关于 $\circ$ 运算的 左 (或右) 零元.

若$\theta \in S$关于$\circ$运算既是左零元又是右零元，则称θ为 S 上关于运算 $\circ$ 的 零元.

二元运算的特异元素（续）

可逆元素及其逆元

令 e 为 S 中关于运算$\circ$的单位元. 对于 $x\in S$，如果存在y_l（或 y_r）$\in S$ 使得

$$y_l \circ x = e \text{（或 } x \circ y_r = e \text{）},$$

则称 y_l(或 y_r)是 x 的 左逆元 (或右逆元).

关于 $\circ$运算，若 $y\in S$ 既是 x 的左逆元又是 x 的右逆元，则称 y 为 x 的逆元.

如果 x 的逆元存在，就称 x 是可逆的.

实例分析

集合	运算	单位元	零元	逆元
Z, Q, R	普通加法+	0	无	x的逆元 $-x$
	普通乘法×	1	0	x 的逆元 x^{-1} (x^{-1}属于给定集合)
M_n(R)	矩阵加法+	n阶全0矩阵	无	X逆元$-X$
	矩阵乘法×	n阶单位矩阵	n阶全0矩阵	X的逆元 X^{-1}（X是可逆矩阵）
$P(B)$	并∪	$\varnothing$	B	$\varnothing$ 的逆元为 $\varnothing$
	交∩	B	$\varnothing$	B 的逆元为 B
	对称差⊕	$\varnothing$	无	X 的逆元为 X

唯一性定理

定理　设 $\circ$为S上的二元运算，e_l和 e_r 分别为 S 中关于运算的左和右单位元，则 $e_l = e_r = e$ 为 S 上关于$\circ$运算的惟一的单位元.

证　　$e_l = e_l \circ e_r = e_l \circ e_r = e_r$

所以 $e_l = e_r$，将这个单位元记作 e. 假设 e' 也是 S 中的单位元，则有

$$e' = e \circ e' = e.$$

惟一性得证.

类似地可以证明关于零元的惟一性定理.

注意：当 $|S| \geq 2$，单位元与零元是不同的；

当 $|S| = 1$ 时，这个元素既是单位元也是零元.

惟一性定理（续）

定理　设 $\circ$为 S 上可结合的二元运算, e 为该运算的单位元, 对于 $x \in S$ 如果存在左逆元 y_l 和右逆元 y_r , 则有 $y_l = y_r = y$, 且 y 是 x 的惟一的逆元.

证　由　$y_l \circ x = e$ 和 $x \circ y_r = e$ 得

$$y_l = y_l \circ e = y_l \circ (x \circ y_r) = (y_l \circ x) \circ y_r = e \circ y_r = y_r$$

令 $y_l = y_r = y$, 则 y 是 x 的逆元.

假若 $y' \in S$ 也是 x 的逆元, 则

$$y' = y' \circ e = y' \circ (x \circ y) = (y' \circ x) \circ y = e \circ y = y$$

所以 y 是 x 惟一的逆元.

说明：对于可结合的二元运算，可逆元素 x 只有惟一的逆元，记作 x^{-1}.

消去律

定义 设∘为V上二元运算，如果$\forall\ x, y, z\in V$,

若 $x\circ y = x\circ z$，且 x不是零元，则 $y = z$

若 $y\circ x = z\circ x$, 且 x 不是零元，则 $y = z$

那么称 ∘ 运算满足 消去律.

实例: Z, Q, R 关于普通加法和乘法满足消去律.

M_n(R) 关于矩阵加法满足消去律，但是关于矩阵乘法不满足消去律.

Z_n关于模 n 加法满足消去律，当 n 为素数时关于模 n乘法满足消去律. 当 n 为合数时关于模 n 乘法不满足消去律.

例题分析

例6　设 ∘ 运算为 Q 上的二元运算，

$$\forall x, y \in \mathrm{Q},\quad x \circ y = x+y+2xy,$$

(1) ∘运算是否满足交换和结合律？说明理由.

(2) 求 ∘ 运算的单位元、零元和所有可逆元.

解 (1) ∘ 运算可交换，可结合．任取$x, y \in \mathrm{Q}$,

$$x \circ y = x+y+2xy = y+x+2yx = y \circ x,$$

任取$x, y, z \in \mathrm{Q}$,

$$(x \circ y) \circ z = (x+y+2xy) + z + 2(x+y+2xy)\, z$$

$$= x+y+z+2xy+2xz+2yz+4xyz$$

$$x \circ (y \circ z) = x + (y+z+2yz) + 2x(y+z+2yz$$

$$= x+y+z+2xy+2xz+2yz+4xyz$$

例题分析（续）

(2) 设$\circ$运算的单位元和零元分别为 e 和 θ，则对于任意 x 有 $x\circ e = x$ 成立，即 $x+e+2xe = x \Rightarrow e = 0$
由于 $\circ$ 运算可交换，所以 0 是幺元.

对于任意 x 有 $x \circ \theta = \theta$ 成立，即

$$x+\theta+2x\theta = \theta \Rightarrow x + 2x\theta = 0 \Rightarrow \theta = -1/2$$

给定 x，设 x 的逆元为 y, 则有 $x \circ y = 0$ 成立，即

$$x+y+2xy = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{1+2x} \quad (x \neq = -1/2)$$

因此当 $x \neq -1/2$时，$y = -\dfrac{x}{1+2x}$ 是 x 的逆元.

例题分析（续）

例7 (1) 说明那些运算是交换的、可结合的、幂等的.
(2) 求出运算的单位元、零元、所有可逆元素的逆元.

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

$\bullet$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	c
c	c	c	c

解 (1) $*$ 满足交换、结合律；$\circ$ 满足结合、幂等律；
$\bullet$ 满足交换、结合律.

(2) $*$ 的单位元为 b, 没零元， $a^{-1} = c, b^{-1} = b, c^{-1} = a$
$\circ$ 的单位元和零元都不存在，没有可逆元素.
$\bullet$ 的单位元为 a，零元为c, $a^{-1}=a$. b, c不可逆.

例题分析（续）

例8 设 $A = \{ a, b, c \}$, 构造 A 上的二元运算* 使得 $a*b = c$, $c*b = b$, 且*运算是幂等的、可交换的，给出关于*运算的一个运算表，说明它是否可结合，为什么？

*	a	b	c
a	a	c	
b	c	b	b
c		b	c

根据幂等律和已知条件$a*b = c$, $c*b = b$ 得到运算表

根据交换律得到新的运算表

方框 可以填入a, b, c中任一选定的符号, 完成运算表

不结合，因为 $(a*b)*b = c*b = b$, $a*(b*b) = a*b = c$

由运算表判别算律的一般方法

- 交换律：运算表关于主对角线对称
- 幂等律：主对角线元素排列与表头顺序一致
- 消去律：所在的行与列中没有重复元素
- 单位元：所在的行与列的元素排列都与表头一致
- 零元：元素的行与列都由该元素自身构成
- A 的可逆元：a 所在的行中某列 (比如第 j 列) 元素为 e，且第 j 行 i 列的元素也是 e，那么 a 与第 j 个元素互逆
- 结合律：除了单位元、零元之外，要对所有3个元素的组合验证表示结合律的等式是否成立