第六节　　独立性

一、事件的相互独立性

二、几个重要定理

三、例题讲解

四、小结

一、事件的相互独立性

1.引例

盒中有5个球(3绿2红),每次取出一个,有放回地取两次.记

$A=$ 第一次抽取,取到绿球,

$B=$ 第二次抽取,取到绿球,

则有

$$P(B|A)=P(B),$$

它表示 A 的发生并不影响 B 发生的可能性大小.

$$P(B|A)=P(B) \Leftrightarrow \boxed{P(AB)=P(A)P(B)}$$

2.定义

设 A, B 是两事件，如果满足等式

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

则称事件 A, B 相互独立，简称 A, B 独立.

说明

事件 A 与事件 B 相互独立，是指事件 A 的发生与事件 B 发生的概率无关.

请同学们思考

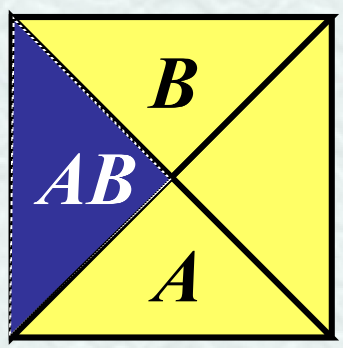
两事件相互独立与两事件互斥的关系.

两事件相互独立 $P(AB)=P(A)P(B)$

两事件互斥 $AB=\varnothing$

二者之间没有必然联系

例如

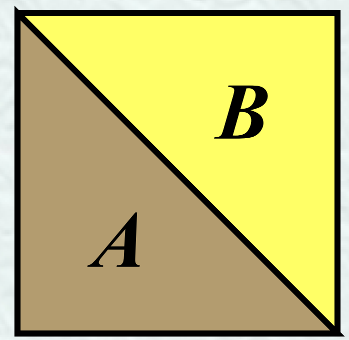


若 $P(A)=\dfrac{1}{2}, P(B)=\dfrac{1}{2}$,

则 $P(AB)=P(A)P(B)$.

由此可见两事件相互独立，但两事件不互斥.

若 $P(A)=\dfrac{1}{2}, P(B)=\dfrac{1}{2}$



则 $P(AB)=0,$

$$P(A)P(B)=\frac{1}{4},$$

故 $P(AB)\neq P(A)P(B).$

由此可见两事件互斥但不独立.

3.三事件两两相互独立的概念

定义 设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A, B, C 两两相互独立.

4.三事件相互独立的概念

定义 设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A,B,C 相互独立.

注意

三个事件相互独立 $\begin{array}{c}\longrightarrow \\ \not\longleftarrow\end{array}$ 三个事件两两相互独立

推广 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件, 如果对于任意 $k\,(1 < k \le n)$, 任意 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, 具有等式

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为相互独立的事件.

n 个事件相互独立 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ n个事件两两相互独立

二、几个重要定理

定理一 设 A, B 是两事件,且 $P(A)>0$. 若 A, B 相互独立,则 $P(B|A)=P(B)$. 反之亦然.

证明 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B).$$

定理二 若 A, B 相互独立，则下列各对事件，

$\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

证明 先证 A 与 $\overline{B}$ 独立.

因为 $A = AB \cup A\overline{B}$ 且 $(AB)(A\overline{B}) = \varnothing$,

所以 $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$,

即 $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$.

又因为 A、B 相互独立, 所以有

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

因而 $P(A\overline{B})=P(A)-P(A)P(B)$

$$=P(A)(1-P(B))$$

$$=P(A)P(\overline{B}).$$

从而 A 与 $\overline{B}$ 相互独立.

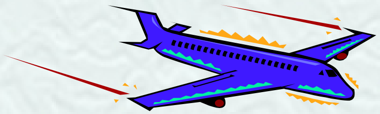
两个结论

1. 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(n \geq 2)$ 相互独立，则其中任意 k $(2 \leq k \leq n)$个事件也是相互独立.

2. 若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geq 2)$相互独立，则将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件,所得的 n 个事件仍相互独立.

三、例题讲解

射击问题



例1 设每一名机枪射击手击落飞机的概率都是0.2,若10名机枪射击手同时向一架飞机射击,问击落飞机的概率是多少?

解 设事件 A_i 为“第 i 名射手击落飞机”,

$i = 1,2,\cdots,10.$

事件 B 为“击落飞机”,

则 $B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}$,

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \cdots \overline{A_{10}})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_{10}})$$

$$= 1 - (0.8)^{10} = 0.893.$$

例2 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击, 三人击中的概率分别为 0.4, 0.5, 0.7, 飞机被一人击中而被击落的概率为0.2 ,被两人击中而被击落的概率为 0.6 , 若三人都击中飞机必定被击落, 求飞机被击落的概率.

解 设 A_i 表示有 i 个人击中飞机 ,

A, B, C 分别表示甲、乙、丙击中飞机 ,

则 $P(A)=0.4,\ P(B)=0.5,\ P(C)=0.7,$

由于 $A_1 = A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C,$

故得

$$P(A_1)=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$$

$$=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7$$

$$=0.36.$$

因为 $A_2=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC,$

得 $P(A_2)=P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)$

$$=P(A)P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(B)P(C)$$

$$=0.41.$$

由 $A_3 = ABC$, 得 $P(A_3) = P(ABC)$

$$= P(A)P(B)P(C)$$

$$= 0.4 \times 0.5 \times 0.7 = 0.14.$$

因而,由全概率公式得飞机被击落的概率为

$$P = 0.2 \times 0.36 + 0.6 \times 0.41 + 1 \times 0.14$$

$$= 0.458.$$

伯恩斯坦反例

例3 一个均匀的正四面体，其第一面染成红色，第二面染成白色，第三面染成黑色，而第四面同时染上红、白、黑三种颜色.现以 A，B，C 分别记投一次四面体出现红、白、黑颜色朝下的事件，问 A，B，C是否相互独立?

解 由于在四面体中红、白、黑分别出现两面，

因此 $$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},$$

又由题意知 $$P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4},$$

故有

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) = \dfrac{1}{4}, \\ P(BC) = P(B)P(C) = \dfrac{1}{4}, \\ P(AC) = P(A)P(C) = \dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

则三事件 A, B, C 两两独立.

由于 $P(ABC) = \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{1}{8} = P(A)P(B)P(C),$

因此 A，B，C 不相互独立.

例4 同时抛掷一对骰子,共抛两次,求两次所得点数分别为7与11的概率.

解 设事件 A_i 为“第 i 次得7点” $i=1,2.$

设事件 B_i 为“第 i 次得11点” $i=1,2.$

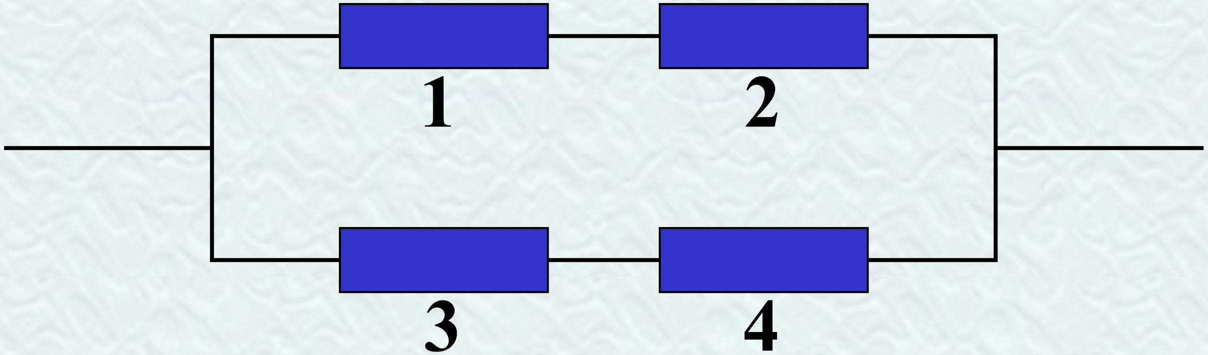
事件 A 为两次所得点数分别为 7 与 11.

则有 $P(A)=P(A_1B_2\cup B_1A_2)=P(A_1B_2)+P(B_1A_2)$

$$=P(A_1)P(B_2)+P(B_1)P(A_2)$$

$$=\frac{6}{36}\times\frac{2}{36}+\frac{2}{36}\times\frac{6}{36}=\frac{1}{54}.$$

例5 一个元件(或系统)能正常工作的概率称为元件(或系统)的可靠性.如图所示,设有 4 个独立工作的元件 1,2,3,4 按先串联再并联的方式联结(称为串并联系统),设第 i 个元件的可靠性为 p_i $(i=1,2,3,4)$. 试求系统的可靠性.



解

以 A_i $(i=1,2,3,4)$ 表示事件第 i 个元件正常工作,

以 A 表示系统正常工作.

则有 $A = A_1A_2 \cup A_3A_4.$

由事件的独立性,得系统的可靠性:

$$P(A) = P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4)$$

$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$= p_1p_2 + p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4.$$

例6 要验收一批(100件)乐器.验收方案如下:自该批乐器中随机地取3件测试(设3件乐器的测试是相互独立的),如果3件中至少有一件在测试中被认为音色不纯,则这批乐器就被拒绝接收.设一件音色不纯的乐器经测试查出其为音色不纯的概率为0.95;而一件音色纯的乐器经测试被误认为不纯的概率为0.01.如果已知这100件乐器中恰有4件是音色不纯的.试问这批乐器被接收的概率是多少?

解 设以 $H_i\ (i = 0,1,2,3)$ 表示事件"随机地取出 3 件乐器,其中恰有 i 件音色不纯",

H_0, H_1, H_2, H_3 是 S 的一个划分，

以 A 表示事件 “这批乐器被 接收”.已知一件音色纯的乐器，经测试被认为音色纯的概率为 0.99，而一件音色不纯的乐器,经测试被认为音色纯的概率为0.05，并且三件乐器的测试是相互独立的，于是有

$$P(A|H_0) = (0.99)^3, \quad P(A|H_1) = (0.99)^2 \times 0.05,$$

$$P(A|H_2) = 0.99 \times (0.05)^2, \quad P(A|H_3) = (0.05)^3,$$

而 $P(H_0)=\binom{96}{3}\Big/\binom{100}{3}$,

$$P(H_1)=\binom{4}{1}\binom{96}{2}\Big/\binom{100}{3},$$

$$P(H_2)=\binom{4}{2}\binom{96}{1}\Big/\binom{100}{3},\quad P(H_3)=\binom{4}{3}\Big/\binom{100}{3}.$$

故 $P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A|H_i)P(H_i)$

$$=0.8574+0.0055+0+0=0.8629.$$

例7 甲、乙两人进行乒乓球比赛,每局甲胜的概率为 $p(p \geq 1/2)$,问对甲而言,采用三局二胜制有利,还是采用五局三胜制有利.设各局胜负相互独立.

解 采用三局二胜制,甲最终获胜,

胜局情况可能是:

"甲甲","乙甲甲","甲乙甲";

由于这三种情况互不相容,

于是由独立性得甲最终获胜的概率为:

$$p_1 = p^2 + 2p^2(1-p).$$

采用五局三胜制,甲最终获胜,至少需比赛 3 局,

且最后一局必需是甲胜 ,而前面甲需胜二 局.

例如,比赛四局, 则甲的胜局情况可能是 :

“甲乙甲甲” ,“乙甲甲甲” ,“甲甲乙甲” ;

由于这三种情况互不相 容,于是由独立性得 :

在五局三胜制下,甲最终获胜的概率为 :

$$p_2 = p^3 + \binom{3}{2}p^3(1-p) + \binom{4}{2}p^3(1-p)^2.$$

由于 $p_2 - p_1 = p^2(6p^3 - 15p^2 + 12p - 3)$

$$= 3p^2(p-1)^2(2p-1).$$

当 $p > \frac{1}{2}$ 时, $p_2 > p_1$; 当 $p = \frac{1}{2}$ 时, $p_2 = p_1 = \frac{1}{2}$.

故当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 对甲来说采用五局三胜制有利.

当 $p = \frac{1}{2}$ 时, 两种赛制甲最终获胜的概率是相同的, 都是 $\frac{1}{2}$.

四、小结

1. A, B 两事件独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)\,P(B)$

A,B,C 三个事件相互独立

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

2. 重要结论

A, B 相互独立 $\Leftrightarrow \overline{A}$ 与 B, A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$相互独立.