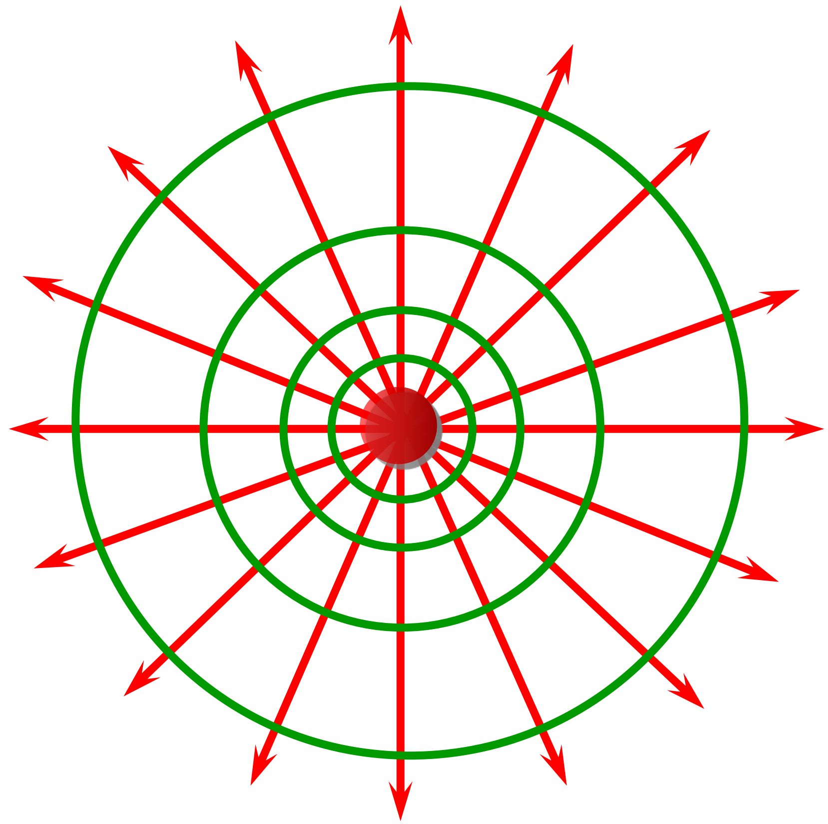
# §10-6 等势面 电场强度与电势的微分关系

## 1. 等势面

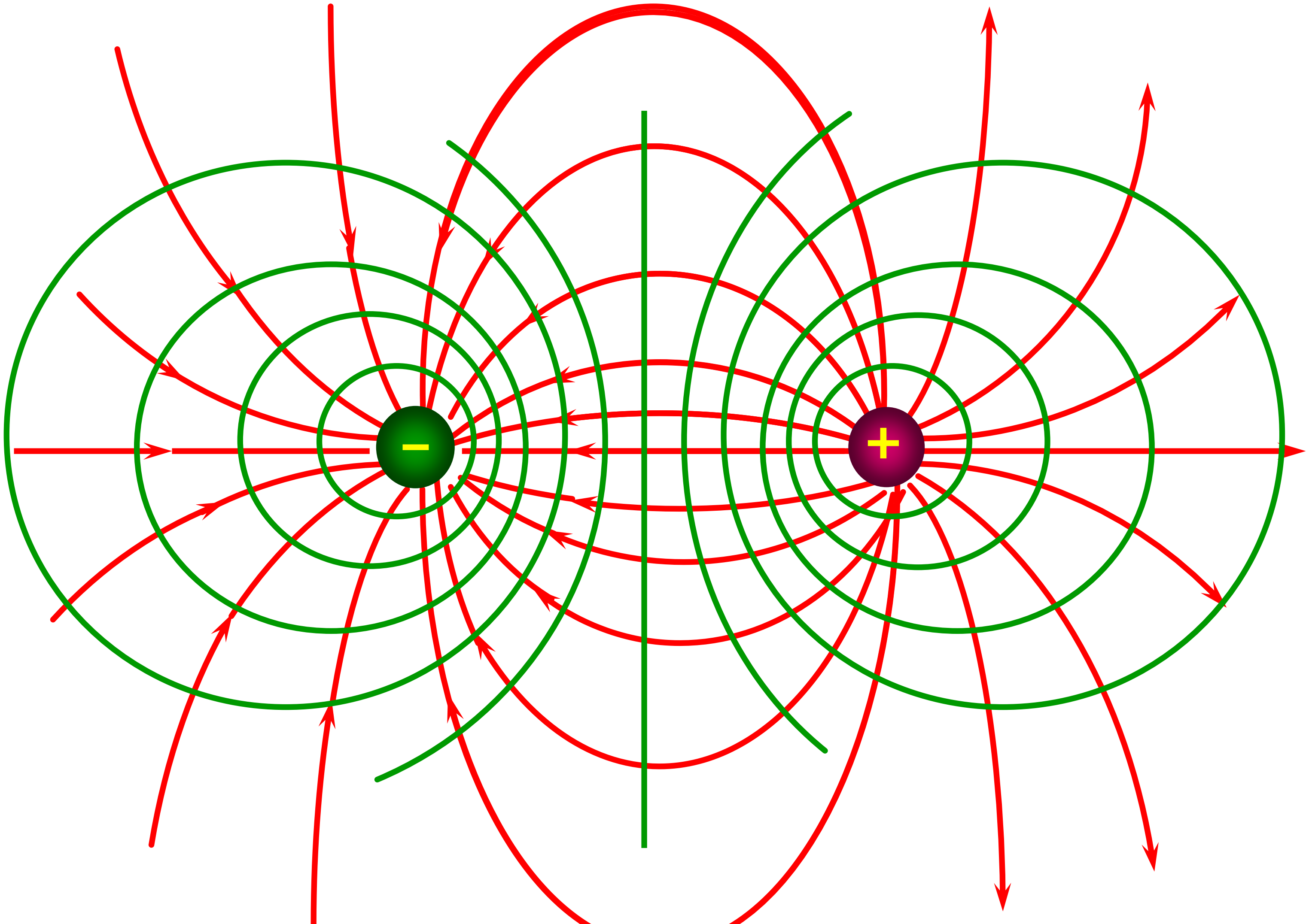
在静电场中，电势相等的点所组成的面称为等势面。

### 1.1 典型等势面

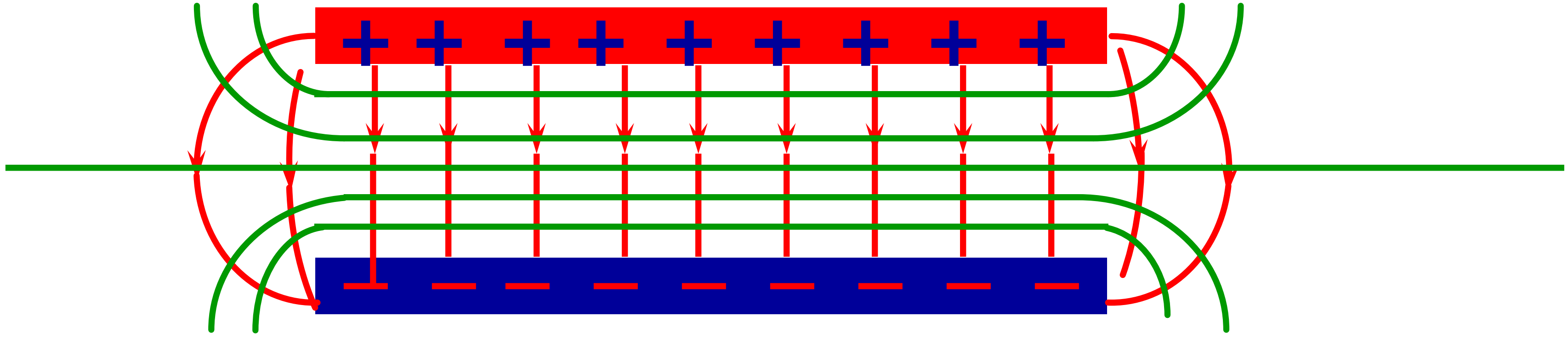
点电荷的等势面



# 电偶极子的等势面



# 电平行板电容器电场的等势面

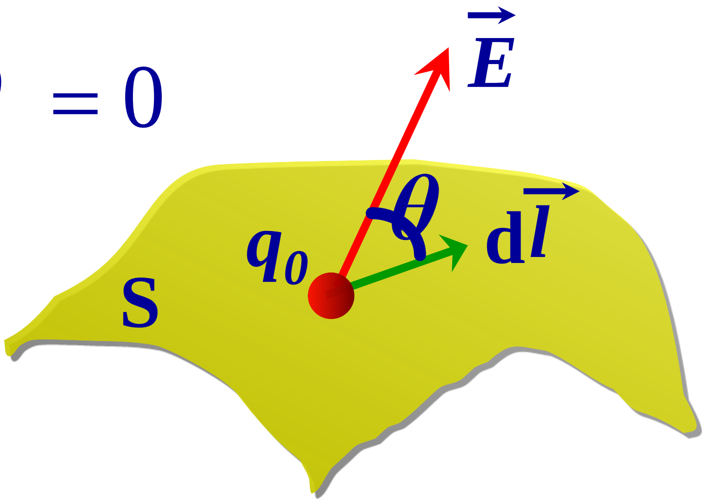


## 1.2 等势面与电场线的关系

**$q_0$在等势面上移动，**$\vec{E}$与$\mathrm{d}\vec{l}$成$\theta$角。

**在等势面上移动不作功**

$$\mathrm{d}A = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = q_0 E\cdot\mathrm{d}l\cdot\cos\theta = 0$$




$$q_0 \neq 0 \qquad E \neq 0 \qquad \mathrm{d}l \neq 0$$

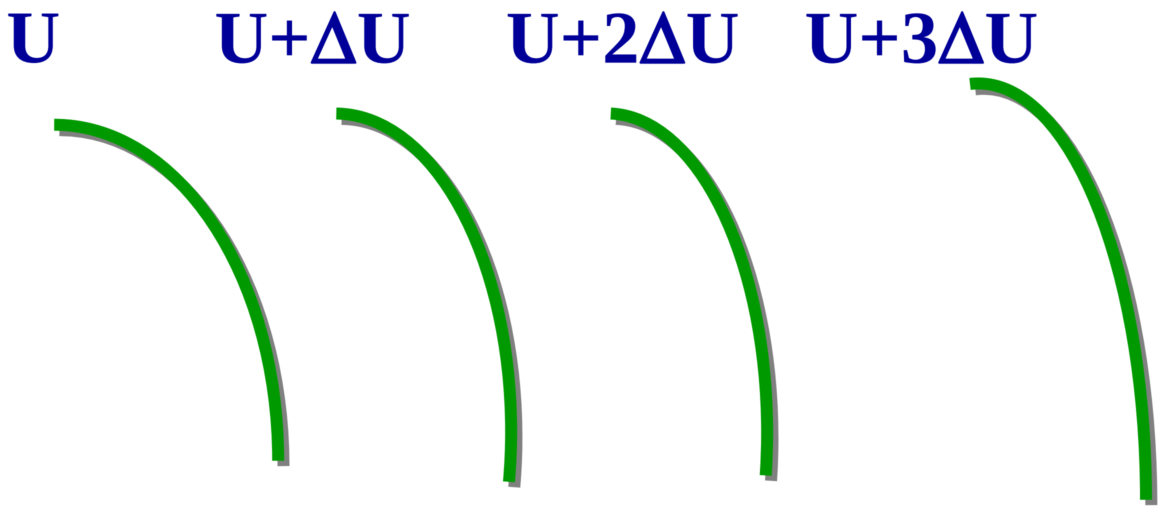
$$\therefore \quad \cos\theta = 0$$

**即** $\quad \vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{l}$

**结论：电场线与等势面垂直。**

## 1.3 等势面图示法

**等势面画法规定：相邻两等势面之间的电势间隔相等。**



## 2. 电场强度与电势的关系　电势梯度

### 2.1 电势梯度

在电场中任取两相距很近的等势面1和2，

电势分别为$U$和$U+\mathrm{d}U$，且$\mathrm{d}U>0$

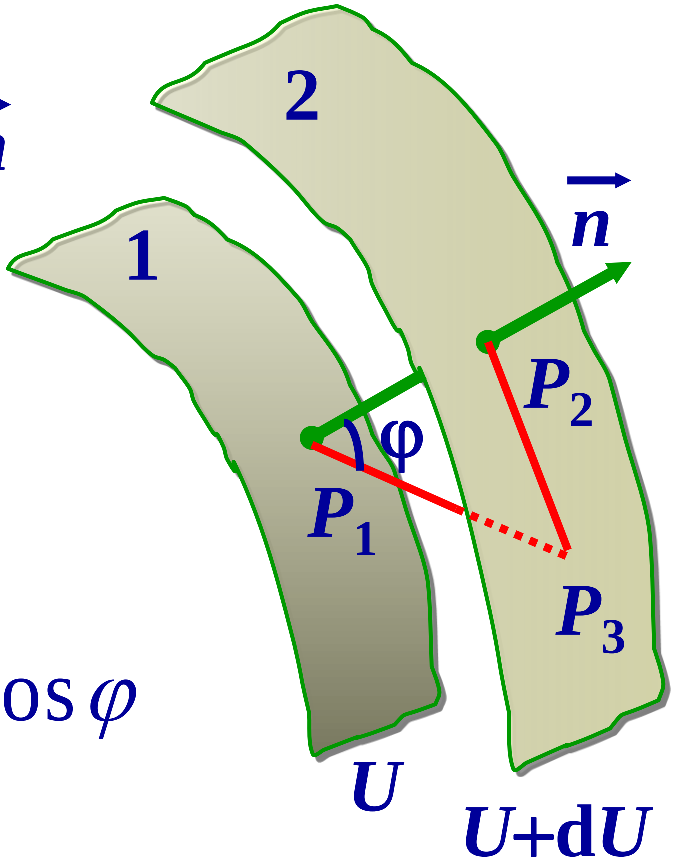
等势面1上$P_1$点的单位法向矢量为$\vec{n}$

与等势面2正交于$P_2$点。

在等势面2任取一点$P_3$，设

$$\overline{p_1 p_2} = dn \qquad \overline{p_1 p_3} = dl$$

则 $dn = dl \cdot \cos\varphi$ 　　 $$\frac{dU}{dl} = \frac{dU}{dn}\cos\varphi$$

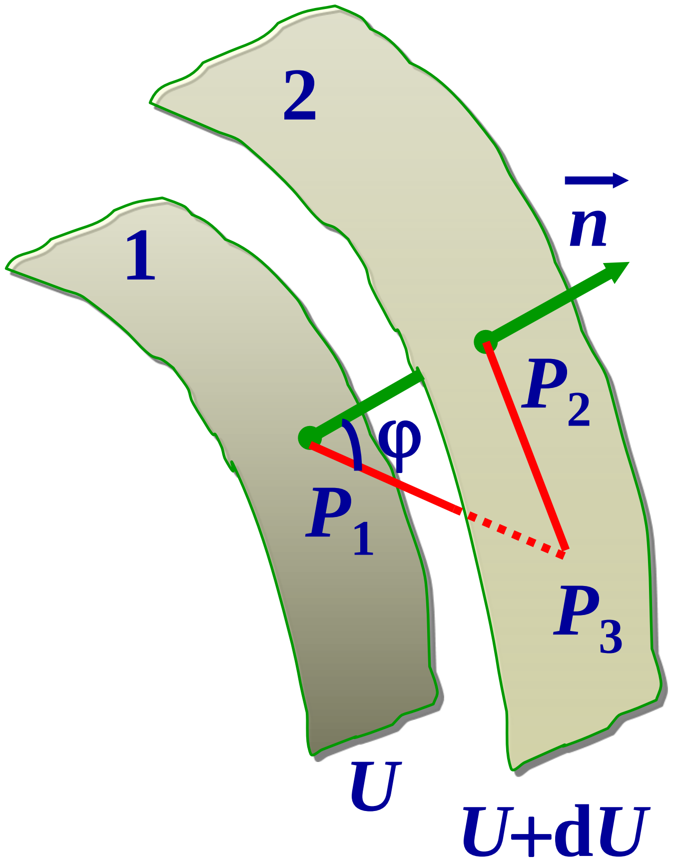


**定义电势梯度（gradient）**

$$\mathrm{grad}\,U = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{n}$$

**其量值为该点电势增加率的最大值。**

**方向与等势面垂直，并指向电势升高的方向。**



## 2.2 电势梯度与电场强度的关系

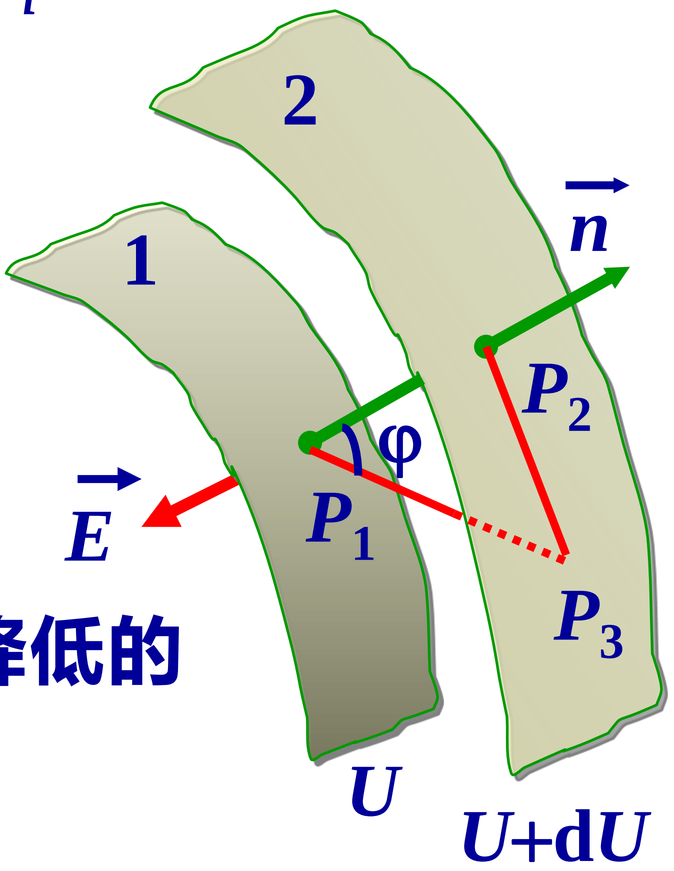
***q*从等势面1移动到等势面2，电场力做功**

$$\mathrm{d}A = q\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = qE\cdot\mathrm{d}l\cdot\cos\varphi = qE\cdot\mathrm{d}n$$

**电场力做功等于电势能的减少量**

$$\mathrm{d}A = -q\cdot\mathrm{d}U$$

$$\therefore \quad E = -\frac{dU}{dn}$$




**场强与等势面垂直，但指向电势降低的方向。**

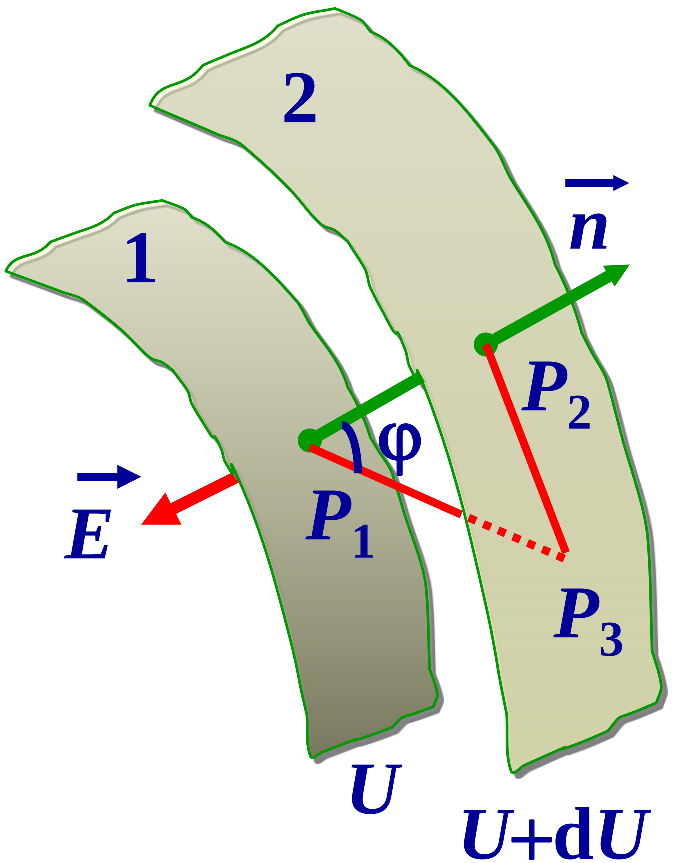
**场强也与等势面垂直，但指向电势降低的方向。**

$$\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{n} = -\mathrm{grad}\,U$$

**在直角坐标系中**

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$E_x = ?, E_y = ?, E_z = ?$$



## 2.3 场强与电势梯度的关系的应用

电势叠加为标量叠加，故可先算出电势，再应用场强与电势梯度的关系算出场强。

例　电偶极子较远处的电场

例　均匀带电圆环轴线上的电场

例　均匀带电圆盘轴线上的电场

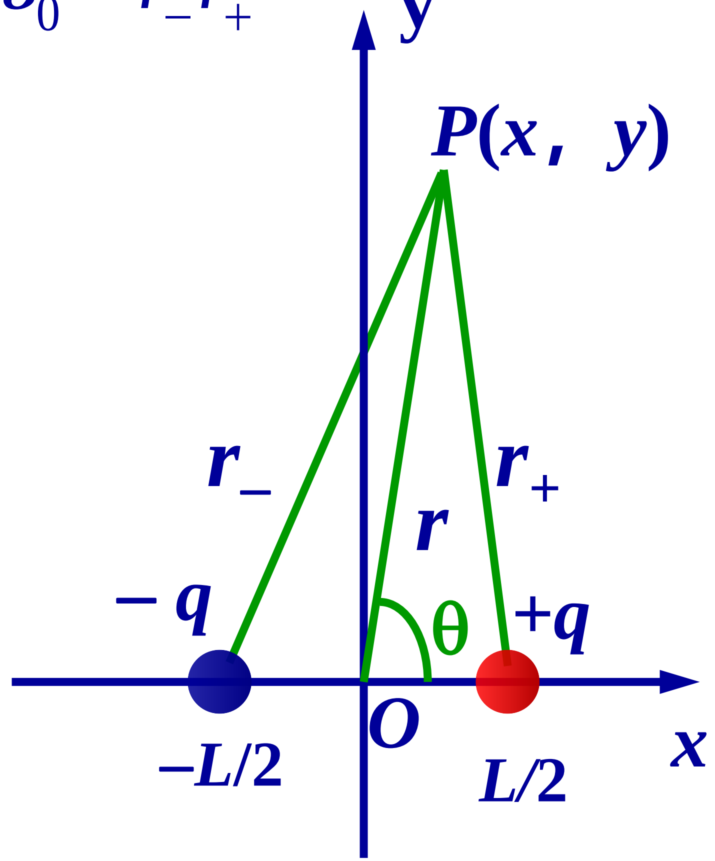
**例：　计算电偶极子较远处的电场。**

**解：在直角坐标系中先写出电势的表达式，**

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r_-}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r_-r_+}$$

$$\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L\cos\theta}{r^2}=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

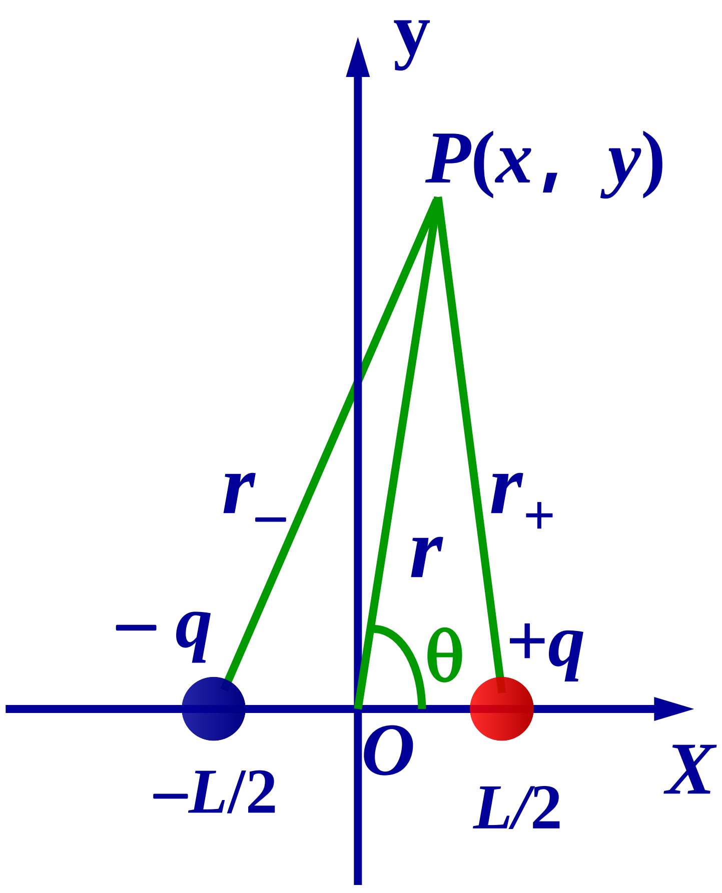
$$=\frac{px}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}}$$



$$U \approx \frac{px}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$= \frac{p(2x^2 - y^2)}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + y^2)^{5/2}}$$




$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{3pxy}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + y^2)^{5/2}}$$

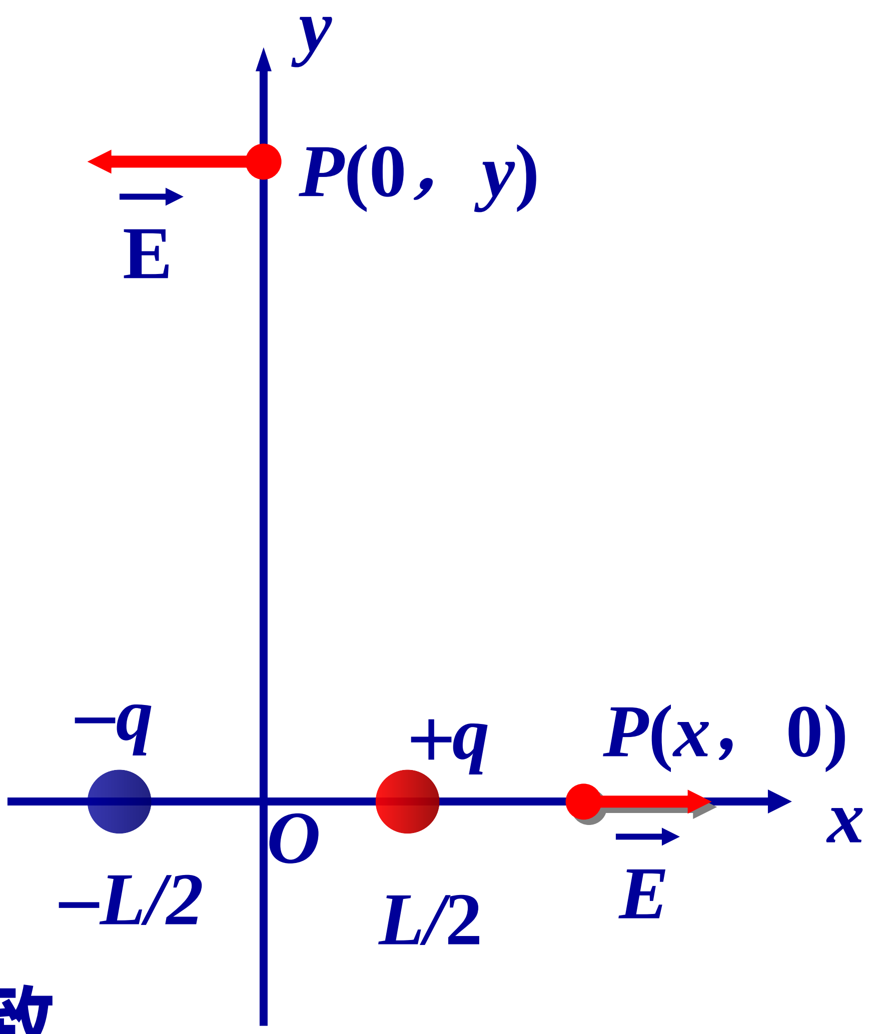
**讨论：**

**1. 在$x$轴上，$y=0$，则**

$$E_x = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 x^3} \qquad E_y = 0$$

**2. 在$y$轴上，$x=0$，则**

$$E_x = -\frac{p}{2\pi\varepsilon_0 y^3} \qquad E_y = 0$$




**与用叠加原理得到的结果一致。**

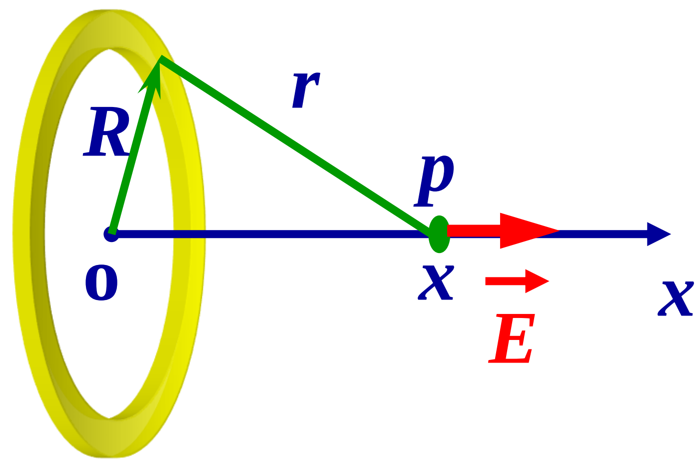
$$E_x = \frac{p(2x^2 - y^2)}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + y^2)^{5/2}} \qquad E_y = \frac{3pxy}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + y^2)^{5/2}}$$

例： 计算均匀带电圆环轴线上的电场。

解：P点电势

$$U=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r}=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{(R^2+x^2)^{1/2}}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{1/2}}$$




P点电场 $$E=E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$$

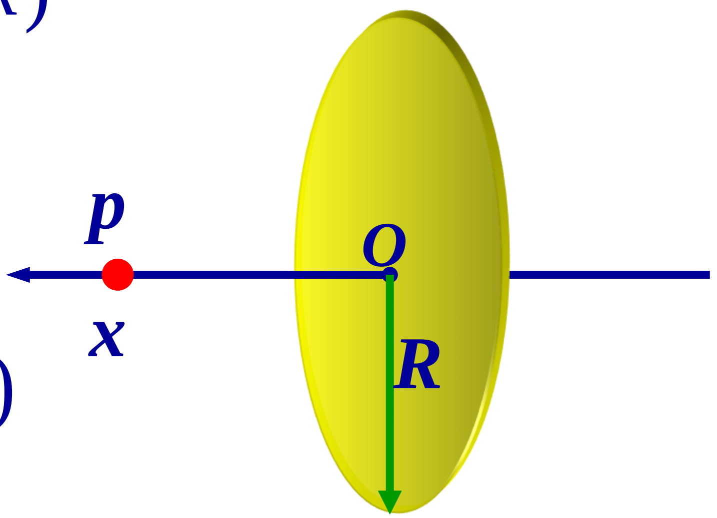
与用电场强度叠加原理得到的结果一致。

例： 计算均匀带电圆盘轴线上的电场。

解：
$$U=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+x^2}-x)$$

$$E=E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}})$$




与用叠加原理得到的结果一致。

讨论： 当$R\to\infty$时，$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

即无穷大均匀带电平面的电场。