第十一章

线面积分

(习题课)

4. 计算 $I=\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$，其中$\Gamma$为球面 $x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2}$ 与平面 $x+z=1$ 的交线.

解: Γ 的半径为

$$r=\sqrt{\frac{9}{2}-\left(\frac{|-1|}{\sqrt{2}}\right)^2}=2$$

则

$$I=\frac{9}{2}\int_{\Gamma}ds=\frac{9}{2}\times 2\pi\times 2=18\pi$$

8. 求 $I=\oint_L \dfrac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$, 其中：

(1) L 为圆周 $x^2+y^2-2y=0$ 的正向;

(2) L 为椭圆 $4x^2+y^2-8x=0$ 的正向;

解: (1) $L: x^2+y^2-2y=0 \longrightarrow L: x^2+(y-1)^2=1$

所以点 (1,0)不在 L 所围区域 D 内, 于是

$$I=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D 0dxdy=0.$$

(2) $L: 4x^2+y^2-8x=0 \longrightarrow L: (x-1)^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

所以点 (1,0)在 L 所围区域 D 内,

补曲线 $L_\delta: (x-1)^2+y^2=\delta^2$, 于是

$$I = \oint_{L \cup L_\delta} \frac{y\,dx - (x-1)\,dy}{(x-1)^2 + y^2} - \int_{L_\delta} \frac{y\,dx - (x-1)\,dy}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$= 0 - \int_{L_\delta} \frac{y\,dx - (x-1)\,dy}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$L_\delta : \begin{cases} x = 1 + \delta \cos\theta \\ y = \delta \sin\theta \end{cases} (\theta : 2\pi \to 0)$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= -2\pi.$$

9. 确定参数 λ 的值,使得在不经过直线 $y=0$ 的区域上

$$\frac{x(x^2+y^2)^{\lambda}}{y}dx-\frac{x(x^2+y^2)^{\lambda}}{y^2}dy$$

是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求出 $u(x,y)$.

解: $$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-2x(x^2+y^2)^{\lambda-1}}{y^2}(x^2+y^2+\lambda x^2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x(x^2+y^2)^{\lambda-1}}{y^2}(2\lambda y^2-x^2-y^2)$$

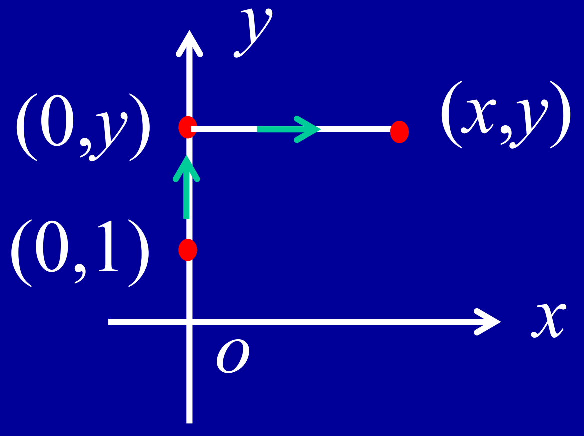
由 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 得 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$

取积分路径如图.

$$u(x,y)=\int_{(0,1)}^{(x,y)}\frac{x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{y}dx-\frac{x^2(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{y^2}dy$$

$$=\int_0^x\frac{x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{y}dx$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}+C$$



题组二：线积分的应用题和证明题

1. 已知曲线 L 的极坐标方程为 $r = a(1+\cos\theta)$ $(a > 0,$ $0 \le \theta \le \pi)$, L上任意一点的线密度为 $\rho(\theta) = \sec\dfrac{\theta}{2}$,

求: (1) 曲线段的弧长; (2) 曲线段的重心;

(3) 曲线段关于极轴的转动惯量;

解: $L: r = a(1+\cos\theta)$

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta = \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}a\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta = 2a\left|\cos\tfrac{\theta}{2}\right|d\theta$$

(1) $s = \int_L ds = 2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4a.$

(2) $m=\int_L \rho(\theta)ds=\int_0^{\pi}\sec\frac{\theta}{2}\cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta=2a\pi.$

$$m_y=\int_L x\rho(\theta)ds=\int_0^{\pi}a(1+\cos\theta)\cos\theta\cdot\sec\frac{\theta}{2}\cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}a(1+\cos\theta)\cos\theta\cdot 2ad\theta=\pi a^2.$$

$$m_x=\int_L y\rho(\theta)ds=\int_0^{\pi}a(1+\cos\theta)\sin\theta\cdot 2ad\theta=4a^2$$

所以 $\bar{x}=\dfrac{m_y}{m}=\dfrac{a}{2}$, $\bar{y}=\dfrac{m_x}{m}=\dfrac{2a}{\pi}$. 故重心坐标为$G(\dfrac{a}{2},\dfrac{2a}{\pi})$.

(3) $I_x=\int_L y^2\rho ds=\int_0^{\pi}2a^3(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta d\theta=\dfrac{5}{4}\pi a^3.$

6. 设 L 是圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, 取逆时针方向,又 $f(x)$ 为正值连续函数, 证明: $\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\geq 2\pi.$

解: 应用格林公式有

$$\text{左}=\iint_D[f(y)+\frac{1}{f(x)}]dxdy$$

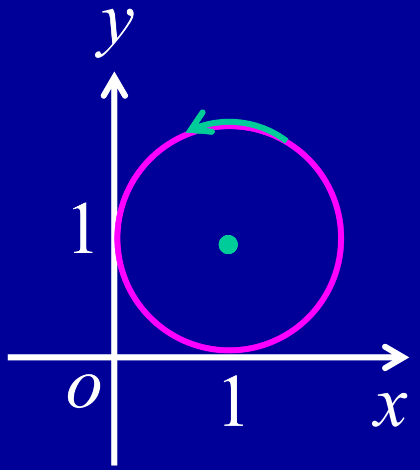
$$\boxed{\iint_D f(y)dxdy=\iint_D f(x)dxdy}$$

积分区域D具有轮换对称性

$$=\iint_D[f(x)+\frac{1}{f(x)}]dxdy$$

$$\geq\iint_D 2\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}dxdy$$

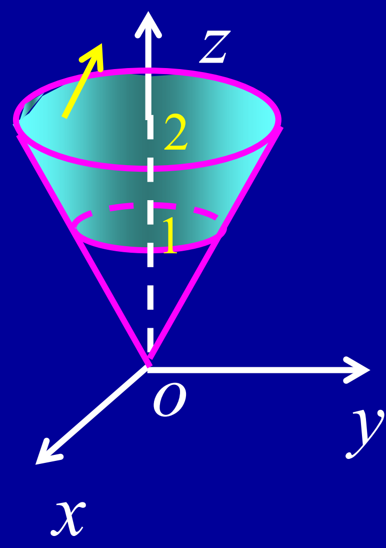
$$=2\iint_D dxdy=2\pi.$$



5. 用三种方法计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+(z^2-2z)dxdy$,

其中Σ是介于 $z=1$ 与 $z=2$ 之间的锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$

部分的上侧.



解：方法1:Gauss公式

补 $\Sigma_1: z=1$上侧，$\Sigma_2: z=2$下侧.

$$I=\oiint_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2} -\iint_{\Sigma_1} -\iint_{\Sigma_2}$$

$$=-\iiint_{\Omega} 2zdxdydz-\iint_{x^2+y^2\le 1}(-1)dxdy-(-\iint_{x^2+y^2\le 4} 0dxdy)$$

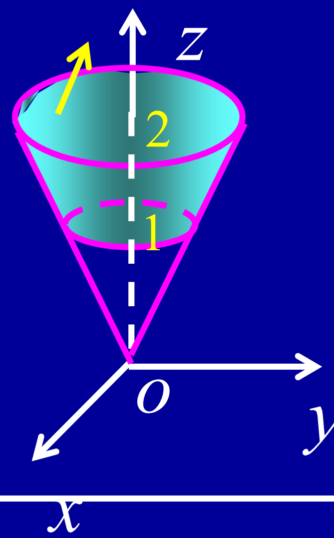
$$=-\int_1^2 2zdz\iint_{D_z} dxdy \ +\pi$$

$$=-\int_1^2 2z\pi z^2 dz \ +\pi \ =-\frac{13\pi}{2}.$$

方法2：利用第一类曲面积分转化

接5.-1

$$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2},\quad D_{xy}: 1\le x^2+y^2\le 4.$$



$$\cos\alpha\, dS = dydz$$
$$\cos\beta\, dS = dzdx$$
$$\cos\gamma\, dS = dxdy$$

$$dydz = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy$$
$$dzdx = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy$$

$$\cos\alpha = \frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^{\ 2}+z_y^{\ 2}}}$$
$$\cos\beta = \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^{\ 2}+z_y^{\ 2}}}$$
$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^{\ 2}+z_y^{\ 2}}}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = -z_x$$
$$\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = -z_y$$

$$dydz = -z_x dxdy$$
$$dzdx = -z_y dxdy$$

$$I = \iint_{\Sigma} x dydz + y dzdx + (z^2 - 2z) dxdy$$

接5.-2

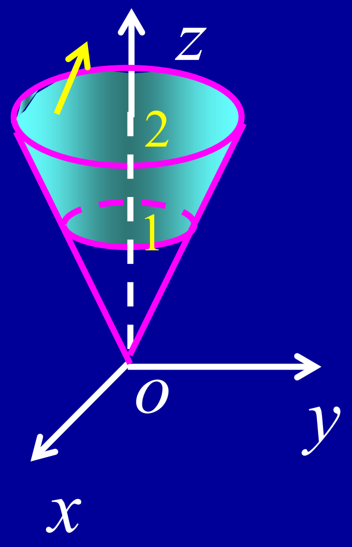
$$\boxed{\begin{aligned} dydz &= -z_x dxdy \\ dzdx &= -z_y dxdy \end{aligned}}$$

$$= \iint_{\Sigma} x(-z_x dxdy) + y(-z_y dxdy) + (z^2 - 2z) dxdy$$

$$= \iint_{\Sigma} (-xz_x - yz_y + z^2 - 2z) dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2 - 3\sqrt{x^2 + y^2}) dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 (r^2 - 3r) r dr = -\frac{13}{2}\pi$$



$$\Sigma : z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad D_{xy} : 1 \le x^2 + y^2 \le 4.$$

方法3：直接计算

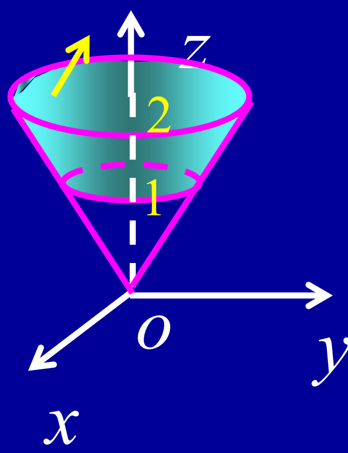
接5.-3

由对称性可知 $\iint_{\Sigma} xdydz = \iint_{\Sigma} ydzdx$

取 $\Sigma_1 : x = \sqrt{z^2 - y^2}$, $D_{yz} : 1 \le z \le 2, -z \le y \le z.$

$$\iint_{\Sigma} xdydz = 2\iint_{\Sigma_1} xdydz = -2\iint_{D_{yz}} \sqrt{z^2 - y^2} dydz$$

$$= -2\int_1^2 dz \int_{-z}^{z} \sqrt{z^2 - y^2} dy = -\frac{7}{3}\pi.$$



取 $\Sigma : z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $D_{xy} : 1 \le x^2 + y^2 \le 4.$

$$\iint_{\Sigma} (z^2 - 2z) dxdy = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}) dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 (r^2 - 2r) rdr = (\frac{15}{2} - \frac{28}{3})\pi$$

所以 $I = -\frac{2\times 7}{3}\pi + (\frac{15}{2} - \frac{28}{3})\pi = -\frac{13}{2}\pi.$

7. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$,

其中Σ是由曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 3)$ 绕 y 轴旋转一周

而得的曲面,它的法向量与 y 轴正向的夹角大于 $\frac{\pi}{2}$.

解: 旋转曲面为 $\Sigma: y-1=x^2+z^2$, $D_{xz}: x^2+z^2\le 2$.

补 $\Sigma_0: y=3, (x^2+z^2\le 2)$, 取右侧. 则

$$I=\left(\iint_{\Sigma\cup\Sigma_0}-\iint_{\Sigma_0}\right)x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}1dxdydz-\iint_{\Sigma_0}2(1-y^2)dzdx$$

$$=\int_1^3 dy\iint_{D_y}dxdz+\iint_{D_{xz}}16dzdx$$

$$=\int_1^3 \pi(y-1)dy+32\pi=34\pi$$