第五节 随机变量的函数的分布

一、离散型随机变量的函数的分布

二、连续型随机变量的函数的分布

三、小结

一、离散型随机变量的函数的分布

设 $f(x)$ 是定义在随机变量 X 的一切可能值 x 的集合上的函数，若随机变量 Y 随着 X 取值 x 的值而取 $y = f(x)$ 的值，则称随机变量 Y 为随机变量 X 的函数，记作 $Y = f(X)$.

问题

如何根据已知的随机变量 X 的分布求得随机变量 $Y = f(X)$ 的分布？

例1 设 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

求 $Y = X^2$ 的分布律.

解 Y 的可能值为 $(-1)^2,\ 0^2,\ 1^2,\ 2^2;$

即 $0,\ 1,\ 4.$

$$P\{Y=0\}=P\{X^2=0\}=P\{X=0\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Y=1\}=P\{X^2=1\}=P\{(X=-1)\cup(X=1)\}$$

$$=P\{X=-1\}+P\{X=1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$P\{Y=4\}=P\{X^2=4\}=P\{X=2\}=\frac{1}{4},$$

故 Y 的分布律为

Y	0	1	4
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

由此归纳出离散型随机变量函数的分布的求法.

离散型随机变量的函数的分布

如果 X 是离散型随机变量,其函数 $Y=g(X)$ 也是离散型随机变量.若 X 的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则 $Y=g(X)$的分布律为

$Y=g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_k)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

若 $g(x_k)$ 中有值相同的,应将相应的 p_k 合并.

例2 设

X	-1	1	2
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

求 $Y = X^2 - 5$ 的分布律.

解 Y 的分布律为

Y	-4	-1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

二、连续型随机变量的函数的分布

例3 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=2X+8$ 的概率密度.

解 第一步 先求$Y=2X+8$ 的分布函数 $F_Y(y)$.

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+8\le y\}$$

$$= P\{X \le \frac{y-8}{2}\} = \int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

第二步　由分布函数求概率密度.

$$f_Y(y) = F_y'(y)$$

$$= [\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x)\,\mathrm{d}x]'$$

$$= f_X(\frac{y-8}{2})(\frac{y-8}{2})',$$

所以 $$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{8}\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}, & 0<\frac{y-8}{2}<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{y-8}{32}, & 8<y<16,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例4 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^3\mathrm{e}^{-x^2}, & x\ge 0.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=X^2$ 和 $Y=2X+3$ 的概率密度.

解 先求随机变量 $Y=X^2$ 分布函数,

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$$

$$=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$$

$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

$$= \int_{-\infty}^{\sqrt{y}} f_X(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{-\sqrt{y}} f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

再由分布函数求概率密度.

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = f_X(\sqrt{y})(\sqrt{y})' - f_X(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot (\sqrt{y})^3 \cdot \mathrm{e}^{-(\sqrt{y})^2} + 0 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{y\mathrm{e}^{-y}}{2}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

当 Y=2X+3 时,有

$$y = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2},$$

$$f_Y(y) = F_y'(y) = \left[\int_{-\infty}^{\frac{y-3}{2}} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x\right]'$$

$$= \begin{cases} \left(\dfrac{y-3}{2}\right)^3 \mathrm{e}^{-\left(\frac{y-3}{2}\right)^2} \left(\dfrac{y-3}{2}\right)', & y \geq 3, \\ 0, & y < 3. \end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y-3}{2}\right)^{3}\mathrm{e}^{-\left(\frac{y-3}{2}\right)^{2}}, & y\geq 3,\\ 0, & y<3.\end{cases}$$

由上述例题可归纳出计算连续型随机变量的函数的概率密度的方法.

定理 设随机变量 X 的具有概率密度 $f_X(x)$, 其中$-\infty < x < +\infty$, 又设函数 $g(x)$处处可导, 且恒有 $g'(x) > 0$(或恒有$g'(x) < 0$), 则称$Y = g(Y)$是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty))$, $\beta = \max(g(-\infty), g(+\infty))$, $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.

例5 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 试证明 X 的线性函数 $Y = aX + b\ (a \neq 0)$ 也服从正态分布.

证明 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty.$$

设 $y = g(x) = ax + b$,

得 $x = h(y) = \dfrac{y-b}{a}$, 知 $h'(y) = \dfrac{1}{a} \neq 0.$

由公式 $f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|, \alpha<y<\beta, \\ 0, \qquad\qquad 其它. \end{cases}$

得 $Y=aX+b$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad -\infty<y<\infty.$$

$$=\frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}}, \quad -\infty<y<\infty.$$

得 $Y=aX+b$

$\sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$

例6 设电压 $V = A\sin\Theta$, 其中 A 是一个已知的正常数,相角 Θ 是一个随机变量,且有 $\Theta \sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 试求电压 V 的概率密度.

解 因为 $v = g(\theta) = A\sin\theta$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上恒有

$$g'(\theta) = A\cos\theta > 0,$$

所以反函数为 $\theta = h(v) = \arcsin\frac{v}{A}$,

$$h'(v) = \frac{1}{\sqrt{A^2 - v^2}},$$

又由$\Theta \sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，知$\Theta$的概率密度为

$$f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由定理得$V=A\sin\Theta$的概率密度为

$$\varphi(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{A^2-v^2}}, & -A<v<A,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

请同学们思考

设 $g(x)$ 是连续函数,若 X 是离散型随机变量,则 $Y=g(X)$ 也是离散型随机变量吗?若 X 是连续型的又怎样?

答 若 X 是离散型随机变量,它的取值是有限个或可列无限多个,因此 Y 的取值也是有限个或可列无限多个,因此 Y 是离散型随机变量.若 X 是连续型随机变量,那么 Y 不一定是连续型随机变量.

例如 设 X 在 (0,2) 上服从均匀分布,概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

又设连续函数 $y=g(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x\le 2.\end{cases}$

则 $Y=g(X)$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 可以计算出来：

由于 Y 的取值为 $[0,1]$，所以

当 $y<0$ 时, $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=0$;

当 $y>1$ 时, $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=1$;

当 $0\le y\le 1$ 时, $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$

$$=\int_{g(x)\le y} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{y} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^y \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{y}{2}.$$

故 Y 的分布函数为 $F_Y(Y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{y}{2}, & 0\le y\le 1,\\ 1, & y>1.\end{cases}$

因为 $F_Y(y)$ 在 $y=1$ 处间断,故 $Y=g(X)$ 不是连续型随机变量,又因为 $F_Y(y)$ 不是阶梯函数,故 $Y=g(X)$ 也不是离散型随机变量.

三、小结

1. 离散型随机变量的函数的分布

若 $Y = g(X)$ 且 X 的分布律为:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则 $Y = g(X)$的分布律为

$Y = g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_k)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

2. 连续型随机变量的函数的分布

方法1 $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\}$

$$= \int_{g(x)\le y} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x, \quad (-\infty < x < +\infty),$$

再对 $f_Y(y)$ 求导得到 Y 的密度函数.

方法2

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

注意条件.