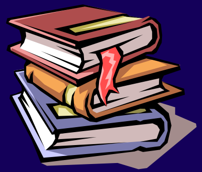
§3　矩阵的秩

一.矩阵秩的概念

二. 用初等变换求矩阵的秩

三. 矩阵秩的基本性质



一.矩阵秩的概念

定义3. 在 $A_{m\times n}$ 中任取 k 行 k 列 $(k\le m, k\le n)$, 位于这些行列交叉处的元素, 不改变其位置次序所生成的 k 阶行列式称为矩阵 A 的 k 阶子式.

$A_{m\times n}$ 的 k 阶子式有 $\underline{\quad C_m^k C_n^k \quad}$ 个.

定义4. 设 A 中有一个 r 阶子式 $D\neq 0$，且所有 $r+1$ 阶子式都等于0，则称 D 为 A 的最高阶非零子式, 数 r 称为矩阵 A 的秩, 记作 $R(A)$.

规定零矩阵的秩为 0 .

说明:

(1) 显然 $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m,n\}$

(2) $R(A^{\mathrm{T}}) = R(A)$

(3) A 为 n 阶可逆方阵, 则 $R(A) = n$.

因此称 可逆矩阵为 **满秩矩阵**;

称不可逆矩阵(奇异矩阵)为**降秩矩阵**.

例1. 求$R(A), R(B)$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(类似P68例5)

解: A 中 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$

第1 行与第3 行成比例, $\therefore |A| = 0$

因此 $R(A) = 2$.

B中3 阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 = 6 \neq 0$

所有 4 阶子式都为0

因此 $R(B) = 3$.

说明: 行阶梯形矩阵的秩 = 非零行数

二. 用初等变换法求矩阵的秩

定理2. $A \sim B \Longrightarrow R(A)=R(B)$

说明: 1) A 经一次初等行变换变为 $B \Longrightarrow R(A)\le R(B)$

B 也可经一次初等行变换变为A, 故 $R(B)\le R(A)$

因此 $R(A)=R(B)$

2) 由1) 知, 经有限次行初等变换 矩阵的秩不变

3) 初等列变换的情形. 因为 $A \overset{c}{\sim} B \Longleftrightarrow A^{\mathrm{T}} \overset{r}{\sim} B^{\mathrm{T}}$

而由 2) 知 $R(A^{\mathrm{T}})=R(B^{\mathrm{T}})$

所以 $R(A)=R(A^{\mathrm{T}})=R(B^{\mathrm{T}})=R(B)$

综上所述, 定理2 成立.

据此, $A \overset{r}{\sim}$ 行阶梯形 B, 则得 $R(A)$ 等于 B 的非 0 行数

例2. 求下述矩阵的秩及其一个最高阶非零子式

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(P67例5)

解: $A \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (详见书P68)

$\therefore \quad R(A)=3$

由上式可见, A中前1, 2, 4 列必含最高阶非0 子式,

其中 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -16$

即为 A 的一个最高阶非零子式 .

例3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\2&-4&8&0\\-2&4&-2&3\\3&-6&0&-6\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$

1) 求 $R(A), R(B)$, 其中 $B=(A,\vec{b})$; (P68例6)

2) 判别非齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 是否有解;

3) 判别齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 是否有非零解, 若有非零解, 求出它们.

解: 1)

$$B=(A,\vec{b})=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\2&-4&8&0&2\\-2&4&-2&3&3\\3&-6&0&-6&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\0&0&2&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore R(A)=2,\ R(B)=3$$

2) **因**B **的行阶梯形第3行对应矛盾方程** $0 \cdot x_4 = 1$,

所以 $A\vec{x} = \vec{b}$ 无解.

3) $$A \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{r_2 \div 2}{\overset{r_1 - r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore A\vec{x} = \vec{0}$ 的等价方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \qquad - 2x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 0 \end{cases}$$

取 x_2, x_4 为 **自由未知量**

令 $x_2 = C_1, x_4 = C_2$,**得**

$$\begin{cases} x_1 = 2C_1 + C_2 \\ x_2 = C_1 \\ x_3 = \quad -\frac{1}{2}C_2 \\ x_4 = \quad C_2 \end{cases}$$ 即 $$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(C_1, C_2 \in \mathrm{R})$

思考: 若 A 为 4 阶满秩方阵, $A\vec{x}=\vec{0}$ 是否有非零解 ？

例4. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 3 & \lambda & -1 & 2\\ 5 & 3 & \mu & 6\end{pmatrix}$, 已知 $R(A)=2$, 求 λ, μ 的值.

解:

$$A \underset{r_3-5r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & \lambda+3 & -4 & -4\\ 0 & 8 & \mu-5 & -4\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3-r_2}{\sim} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & \lambda+3 & -4 & -4\\ 0 & 5-\lambda & \mu-1 & 0\end{pmatrix}$$

已知 $R(A)=2$, $\therefore 5-\lambda=0$, $\mu-1=0$, 即

$$\lambda=5, \quad \mu=1$$

◇ 思考

例4 按下述解法是否正确

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda+3 & -4 & -4 \\ 0 & 5-\lambda & \mu-1 & 0 \end{pmatrix}$$

根据秩的定义, 应有

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda+3 & -4 \\ 0 & 5-\lambda & \mu-1 \end{vmatrix} = 3\mu - 5\lambda + \lambda\mu + 17$$

$$\therefore \quad \mu = \frac{5\lambda - 17}{\lambda + 3} \quad (\lambda \neq -3)$$

注意: 按矩阵秩的定义, 必须所有三阶行列式为0.

例5. 设$n\ (\geq 3)$阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, 讨论它的秩.

法1. 初等变换法.

$$A \xrightarrow{c_1+c_2+\cdots+c_n} \begin{pmatrix} 1+(n-1)a & a & \cdots & a \\ 1+(n-1)a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+(n-1)a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{pmatrix} 1+(n-1)a & a & \cdots & a \\ 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{pmatrix}$$

可见: (1) 当$a\neq 1, 1+(n-1)a\neq 0$时, $R(A)=n$

(2) 当$a=1$时, $R(A)=1$

(3) 当 $1+(n-1)a=0$时, $R(A)=n-1$

法2. 先求行列式, 再讨论.

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & \cdots & a\\ a & 1 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

$$|A| \xlongequal[\cdots+c_n]{c_1+c_2+} \begin{vmatrix}1+(n-1)a & a & \cdots & a\\ 1+(n-1)a & 1 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1+(n-1)a & a & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix}1+(n-1)a & a & \cdots & a\\ 0 & 1-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1-a\end{vmatrix}$$

$$=[1+(n-1)a](1-a)^{n-1}$$

可见: (1) 当 $a\neq 1, 1+(n-1)a\neq 0$ 时, $|A|\neq 0$, $R(A)=n$

(2) 当 $a=1$ 时, $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$, $\therefore R(A)=1$

(3) 当$1+(n-1)a=0$时,

$$A \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{pmatrix} \xlongequal{\text{记}} B$$

$|B|=0$, 但B中有$n-1$ 阶子式

$$\begin{vmatrix} 1-a & & \\ & \ddots & \\ & & 1-a \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\therefore \quad R(A)=R(B)=n-1$$

三. 矩阵秩的基本性质

① $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m,n\}$

② $R(A^{\mathrm{T}}) = R(A)$

(据定义)

③ $A \sim B \Rightarrow R(A) = R(B)$ (定理2)

④ P, Q 可逆 $\Rightarrow R(PAQ) = R(A)$

特别有: $R(PA) = R(A) = R(AQ)$

⑤ $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A,B) \le R(A) + R(B)$ 证明

特别有: $R(A) \le R(A,\vec{b}) \le R(A) + 1$

⑥ $R(A+B) \le R(A) + R(B)$ 证明

⑦ $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$ (下节定理7)

⑧ 若 $A_{m\times n}B_{n\times l} = O$, 则 $R(A) + R(B) \le n$ (下章例13)

⑨ $\lambda \ne 0$, 则 $R(\lambda A) = R(A)$

例6. 设 A 为n 阶方阵, 证明 $R(A+E)+R(A-E)\geq n.$

证: $\because \quad (A+E)+(E-A)=2E$

$\therefore \quad R(A+E)+R(E-A)\geq R(2E)$

$$=n$$

而 $\quad R(E-A)=R(-(E-A))=R(A-E)$

$\therefore \quad R(A+E)+R(A-E)\geq n$ 证毕

例7. 证明：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$ **且** $R(A)=n$

则 $R(B)=R(C)$

证： $\because R(A)=n \quad \therefore A$的行最简形矩阵为$\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$，

并有m阶可逆矩阵P，使 PA=$\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$.

$$\therefore PC=PAB=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}B=\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}$$

由矩阵秩的性质4, 有 $R(C)=R(PC)$

而 $R\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}=R(B)$ **所以** $R(C)=R(B)$

证毕

说明: 1) **如果矩阵 A 的秩等于它的列数,就称 A 为列满秩矩阵**

2) 特殊情形 $C=0$ 时, 有下列结论

设$AB=0$, 若A为列满秩矩阵, 则$B=0$

因为，由本例的结论，得$R(B)=0$, 故$B=0$

例8. 证明 $R(A)=1$ 的充分必要条件是存在非零列向量 $\vec{\alpha}$ 及非零行向量 $\vec{\beta}^T$，使 $A=\vec{\alpha}\vec{\beta}^T$.

证明: "必要性"

已知 $R(A)=1$

$$\therefore \exists \text{可逆矩阵} P \text{和} Q \text{使} A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} Q$$

而
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times 1} \begin{pmatrix} 1, & 0, & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{1\times n}$$

$$\therefore A = [P\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_{m\times 1}][\begin{pmatrix}1, & 0, & \cdots & 0\end{pmatrix}_{1\times n}B] = \vec{\alpha}\vec{\beta}^T$$

其中

$$\vec{\alpha} = P\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_{m\times 1} \neq \vec{0}, \quad \vec{\beta}^T = \begin{pmatrix}1, & 0, & \cdots & 0\end{pmatrix}_{1\times n}Q \neq \vec{0}$$

“充分性”

已知存在非零列向量 $\vec{\alpha}$ 及非零行向量 $\vec{\beta}^T$ ，使

$$A=\vec{\alpha}\vec{\beta}^T.$$

设

$$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},\quad \vec{\beta}^T=\begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

则必有一个 $a_i \neq 0$ 和一个 $b_j \neq 0$

因此 A 中必有一个元 $a_{ij}=a_i b_j \neq 0$

$$\therefore\ R(A) \geq 1$$

由已知 $R(A) \leq R(\overline{\alpha}) = 1$

$$\therefore\ R(A) = 1$$

思考与练习

1. 设A是 5×6 矩阵, $R(A)=3$,

(1) 问A 的 4 阶子式是否全为 0 ? 是

(2) 问A 的 3 阶子式是否全不为 0 ? 否

(3) 问A 的 2 阶子式是否可能全为 0 ? 否

2. 是非题

(1) 若方阵 A 与 B 等价, 则 $|A|=|B|$ (×)

(2) 若 A 与可逆矩阵 B 等价, 则 A 也是可逆矩阵 (√)

提示: (1) 由 P67 推论, $PAQ=B$

$$\Rightarrow |P||A||Q|=|B|$$

(2) $R(A)=R(B)=B$的(即A的)阶数

3. 设 n 阶实方阵 A 满足 $A^3 = 8E$,

(1) 问 A 是否可逆? 若可逆, $A^{-1} = ?$

(2) $|A| =$ ___ 2^n ___ , $|A^{-1}| =$ ___ 2^{-n} ___ ;

(3) 若矩阵 B 满足 $AB = O$, 能否断定 $B = O$?

提示: (1) $A\cdot(\frac{1}{8}A^2) = E \Rightarrow A$可逆, 且 $A^{-1} = \frac{1}{8}A^2$

(2) $|A^3| = |8E| \Rightarrow |A|^3 = 8^n \Rightarrow |A| = 2^n$

$$AA^{-1} = E \Rightarrow |AA^{-1}| = |E| \Rightarrow |A||A^{-1}| = 1$$

$$\Rightarrow |A^{-1}| = |A|^{-1} = 2^{-n}$$

(3) $B = A^{-1}AB = A^{-1}O = O$

作业

P79　13（3）　；　**14**（3）