

1.3 命题逻辑等值演算

- 等值式
- 基本等值式
- 等值演算
- 置换规则

等值式

定义 若等价式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 与 B **等值**，记作 $A \Leftrightarrow B$ ，并称 $A \Leftrightarrow B$ 是**等值式**

说明：定义中， A, B, \Leftrightarrow 均为元语言符号， A 或 B 中可能有哑元出现。

例如，在 $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \vee (\neg r \wedge r))$ 中， r 为左边公式的哑元。

用真值表可验证两个公式是否等值

请验证： $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$$

基本等值式

双重否定律： $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

等幂律： $A \vee A \Leftrightarrow A, A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律： $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律： $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律： $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

基本等值式(续)

德·摩根律: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

吸收律: $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, \quad A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

零律: $A \vee 1 \Leftrightarrow 1, \quad A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

同一律: $A \vee 0 \Leftrightarrow A, \quad A \wedge 1 \Leftrightarrow A$

排中律: $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

矛盾律: $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

基本等值式(续)

蕴涵等值式: $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

等价等值式: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

假言易位: $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

等价否定等值式: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

归谬论: $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

注意:

A, B, C 代表任意的命题公式

牢记这些等值式是继续学习的基础

等值演算与置换规则

等值演算：

由已知的等值式推演出新的等值式的过程

置换规则：若 $A \Leftrightarrow B$, 则 $\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$

等值演算的基础：

- (1) 等值关系的性质：自反、对称、传递
- (2) 基本的等值式
- (3) 置换规则

应用举例——证明两个公式等值

例1 证明 $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

证 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) \quad (\text{蕴涵等值式, 置换规则})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r \quad (\text{结合律, 置换规则})$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r \quad (\text{德·摩根律, 置换规则})$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r \quad (\text{蕴涵等值式, 置换规则})$$

说明: 也可以从右边开始演算 (请做一遍)

因为每一步都用置换规则, 故可不写出
熟练后, 基本等值式也可以不写出

应用举例——证明两个公式不等值

例2 证明: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \not\equiv (p \rightarrow q) \rightarrow r$

用等值演算不能直接证明两个公式不等值,证明两个公式不等值的基本思想是找到一个赋值使一个成真,另一个成假.

方法一 真值表法 (自己证)

方法二 观察赋值法. 容易看出000, 010等是左边的成真赋值, 是右边的成假赋值.

方法三 用等值演算先化简两个公式, 再观察.

应用举例——判断公式类型

例3 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$

解 $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$

$$\Leftrightarrow q \wedge \neg(\neg p \vee q) \quad (\text{蕴涵等值式})$$

$$\Leftrightarrow q \wedge (p \wedge \neg q) \quad (\text{德·摩根律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \neg q) \quad (\text{交换律, 结合律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge 0 \quad (\text{矛盾律})$$

$$\Leftrightarrow 0 \quad (\text{零律})$$

由最后一步可知, 该式为矛盾式.

例3 (续)

$$(2) (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

解 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (q \vee \neg p) \quad (\text{蕴涵等值式})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee q) \quad (\text{交换律})$$

$$\Leftrightarrow 1$$

由最后一步可知，该式为重言式。

问：最后一步为什么等值于1？

例3 (续)

$$(3) ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$$

$$\text{解 } ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q)) \wedge r \quad (\text{分配律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge 1 \wedge r \quad (\text{排中律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge r \quad (\text{同一律})$$

这不是矛盾式，也不是重言式，而是非重言式的可满足式. 如101是它的成真赋值, 000是它的成假赋值.

总结: A 为矛盾式当且仅当 $A \Leftrightarrow 0$

A 为重言式当且仅当 $A \Leftrightarrow 1$

说明: 演算步骤不惟一, 应尽量使演算短些

1.4 范式

- 析取范式与合取范式
- 主析取范式与主合取范式

析取范式与合取范式

文字:命题变项及其否定的合称

简单析取式:有限个文字构成的析取式

如 $p, \neg q, p \vee \neg q, p \vee q \vee r, \dots$

简单合取式:有限个文字构成的合取式

如 $p, \neg q, p \wedge \neg q, p \wedge q \wedge r, \dots$

析取范式:由有限个简单合取式组成的析取式

$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_r$, 其中 A_1, A_2, \dots, A_r 是简单合取式

合取范式:由有限个简单析取式组成的合取式

$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_r$, 其中 A_1, A_2, \dots, A_r 是简单析取式

析取范式与合取范式(续)

范式:析取范式与合取范式的总称

公式 A 的析取范式:与 A 等值的析取范式

公式 A 的合取范式:与 A 等值的合取范式

说明:

单个文字既是简单析取式, 又是简单合取式

$p \wedge \neg q \wedge r, \neg p \vee q \vee \neg r$ 既是析取范式, 又是合取范式
(为什么?)

命题公式的范式

定理 任何命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式.

求公式 A 的范式的步骤:

- (1) 消去 A 中的 $\rightarrow, \leftrightarrow$ (若存在)
- (2) 否定联结词 \neg 的内移或消去
- (3) 使用分配律
 - \wedge 对 \vee 分配 (析取范式)
 - \vee 对 \wedge 分配 (合取范式)

公式的范式存在, 但不惟一

求公式的范式举例

例 求下列公式的析取范式与合取范式

$$(1) A = (p \rightarrow \neg q) \vee \neg r$$

$$\text{解} \quad (p \rightarrow \neg q) \vee \neg r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r \quad (\text{消去} \rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee \neg r \quad (\text{结合律})$$

这既是 A 的析取范式（由3个简单合取式组成的析取式），又是 A 的合取范式（由一个简单析取式组成的合取式）

求公式的范式举例(续)

$$(2) B = (p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$$

解 $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \rightarrow r \quad (\text{消去第一个} \rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee r \quad (\text{消去第二个} \rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r \quad (\text{否定号内移——德·摩根律})$$

这一步已为析取范式（两个简单合取式构成）

继续： $(p \wedge q) \vee r$

$$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r) \quad (\vee \text{对} \wedge \text{分配律})$$

这一步得到合取范式（由两个简单析取式构成）

极小项与极大项

定义 在含有 n 个命题变项的简单合取式(简单析取式)中, 若每个命题变项均以文字的形式出现且仅出现一次, 称这样的简单合取式(简单析取式)为**极小项(极大项)**。

说明:

- n 个命题变项产生 2^n 个极小项和 2^n 个极大项
- 2^n 个极小项(极大项)均互不等值
- 在极小项和极大项中文字均按下标或字母顺序排列
- 用 m_i 表示第 i 个极小项, 其中 i 是该极小项成真赋值的十进制表示. 用 M_i 表示第 i 个极大项, 其中 i 是该极大项成假赋值的十进制表示, $m_i(M_i)$ 称为极小项(极大项)的名称.
- m_i 与 M_i 的关系: $\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \quad \neg M_i \Leftrightarrow m_i$

极小项与极大项 (续)

由 p, q 两个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

由 p, q, r 三个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

主析取范式与主合取范式

主析取范式：由极小项构成的析取范式

主合取范式：由极大项构成的合取范式

例如， $n=3$ ，命题变项为 p, q, r 时，

$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow m_1 \vee m_3$ 是主析取范式

$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \Leftrightarrow M_1 \wedge M_5$ 是主合取范式

A 的主析取范式：与 A 等值的主析取范式

A 的主合取范式：与 A 等值的主合取范式。

主析取范式与主合取范式(续)

定理 任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式, 并且是唯一的.

用等值演算法求公式的主范式的步骤:

- (1) 先求析取范式 (合取范式)
- (2) 将不是极小项 (极大项) 的简单合取式 (简单析取式) 化成与之等值的若干个极小项的析取 (极大项的合取), 需要利用同一律 (零律)、排中律 (矛盾律)、分配律、幂等律等.
- (3) 极小项 (极大项) 用名称 m_i (M_i) 表示, 并按角标从小到大顺序排序.

求公式的主范式

例 求公式 $A=(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$ 的主析取范式与主合取范式.

(1) 求主析取范式

$$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r, \quad (\text{析取范式}) \quad \textcircled{1}$$

$$(p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (\neg r \vee r)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_6 \vee m_7, \quad \textcircled{2}$$

求公式的主范式(续)

r

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7 \quad \text{③}$$

②, ③代入①并排序, 得

$$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad (\text{主析取范式})$$

求公式的主范式(续)

(2) 求 A 的主合取范式

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \\ \Leftrightarrow & (p \vee r) \wedge (q \vee r), \quad (\text{合取范式}) \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p \vee r \\ \Leftrightarrow & p \vee (q \wedge \neg q) \vee r \\ \Leftrightarrow & (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \\ \Leftrightarrow & M_0 \wedge M_2, \quad \textcircled{2} \end{aligned}$$

求公式的主范式(续)

$$q \vee r$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee q \vee r$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_4 \quad \textcircled{3}$$

②, ③代入①并排序, 得

$$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \quad (\text{主合取范式})$$

主范式的用途——与真值表相同

(1) 求公式的成真赋值和成假赋值

例如 $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$,

其成真赋值为001, 011, 101, 110, 111,

其余的赋值 000, 010, 100为成假赋值.

类似地, 由主合取范式也可立即求出成假赋值和成真赋值.

主范式的用途(续)

(2) 判断公式的类型

设 A 含 n 个命题变项, 则

A 为重言式 $\Leftrightarrow A$ 的主析取范式含 2^n 个极小项

$\Leftrightarrow A$ 的主合取范式为1.

A 为矛盾式 $\Leftrightarrow A$ 的主析取范式为0

$\Leftrightarrow A$ 的主合取范式含 2^n 个极大项

A 为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow A$ 的主析取范式中至少含一个且不含全部极小项

$\Leftrightarrow A$ 的主合取范式中至少含一个且不含全部极大项

主范式的用途(续)

(3) 判断两个公式是否等值

例 用主析取范式判断下述两个公式是否等值:

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \wedge q) \rightarrow r$

(2) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

解 $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

$$(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$$

故(1)中的两公式等值, 而(2)的不等值.

说明:

由公式 A 的主析取范式确定它的主合取范式, 反之亦然.
用公式 A 的真值表求 A 的主范式.

主范式的用途(续)

例 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习. 选派必须满足以下条件:

- (1) 若赵去, 钱也去;
- (2) 李、周两人中至少有一人去;
- (3) 钱、孙两人中有一人去且仅去一人;
- (4) 孙、李两人同去或同不去;
- (5) 若周去, 则赵、钱也去.

试用主析取范式法分析该公司如何选派他们出国?

例 (续)

解此类问题的步骤为:

- ① 将简单命题符号化
- ② 写出各复合命题
- ③ 写出由②中复合命题组成的合取式
- ④ 求③中所得公式的主析取范式

例 (续)

解 ① 设 p : 派赵去, q : 派钱去, r : 派孙去,
 s : 派李去, u : 派周去.

② (1) $(p \rightarrow q)$

(2) $(s \vee u)$

(3) $((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$

(4) $((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))$

(5) $(u \rightarrow (p \wedge q))$

③ (1) ~ (5)构成的合取式为

$$A = (p \rightarrow q) \wedge (s \vee u) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)) \wedge (u \rightarrow (p \wedge q))$$

例 (续)

$$\textcircled{4} \quad A \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$$

结论：由④可知， A 的成真赋值为00110与11001，
因而派孙、李去（赵、钱、周不去）或派赵、钱、
周去（孙、李不去）。

A 的演算过程如下：

$$\begin{aligned} A \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge (s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q)) \wedge \\ ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)) \quad (\text{交换律}) \end{aligned}$$

$$B_1 = (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)) \quad (\text{分配律})$$

例 (续)

$$B_2 = (s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q))$$

$$\Leftrightarrow ((s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge u)) \quad (\text{分配律})$$

$$B_1 \wedge B_2 \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \\ \vee (q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge u)$$

再令 $B_3 = ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))$

得 $A \Leftrightarrow B_1 \wedge B_2 \wedge B_3$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$$

注意：在以上演算中多次用矛盾律

要求：自己演算一遍