

5.2 通路、回路、图的连通性

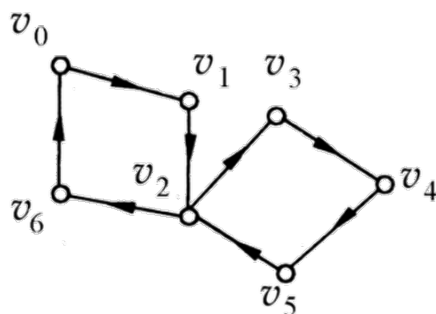
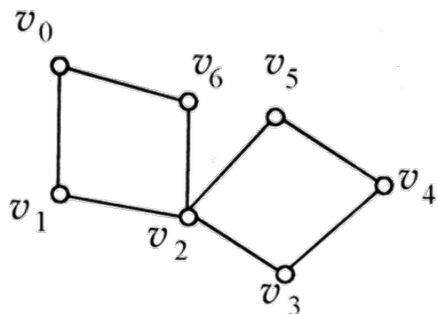
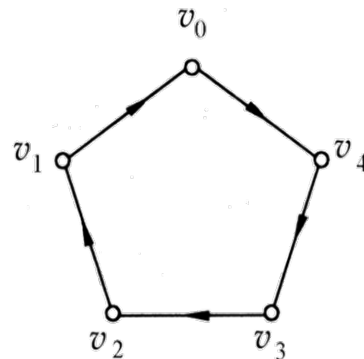
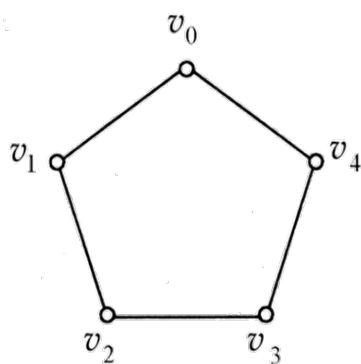
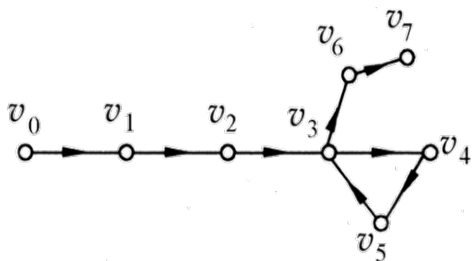
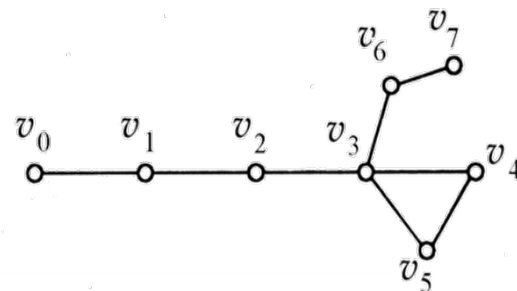
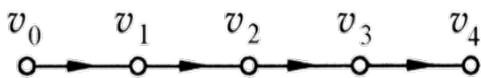
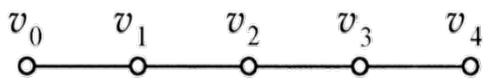
- 简单通(回)路, 初级通(回)路, 复杂通(回)路
- 无向图的连通性
无向连通图, 连通分支
- 有向连通图
弱连通图, 单向连通图, 强连通图
- 点割集与割点
- 边割集与割边(桥)

通路 & 回路

定义 给定图 $G=\langle V,E \rangle$ (无向或有向的), G 中顶点与边的交替序列 $\Gamma=v_0e_1v_1e_2\cdots e_lv_l$,

- (1) 若 $\forall i(1\leq i\leq l)$, v_{i-1}, v_i 是 e_i 的端点(对于有向图, 要求 v_{i-1} 是始点, v_i 是终点), 则称 Γ 为**通路**, v_0 是**通路的起点**, v_l 是**通路的终点**, l 为**通路的长度**. 又若 $v_0=v_l$, 则称 Γ 为**回路**.
- (2) 若通路(回路)中所有顶点(对于回路, 除 $v_0=v_l$)各异, 则称为**初级通路(初级回路)**. 初级通路又称作**路径**, 初级回路又称作**圈**.
- (3) 若通路(回路)中所有边各异, 则称为**简单通路(简单回路)**, 否则称为**复杂通路(复杂回路)**.

通路 & 回路实例



通路与回路(续)

说明:

■ 表示方法

① 用顶点和边的交替序列(定义), 如 $\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_l v_l$

② 用边的序列, 如 $\Gamma = e_1 e_2 \dots e_l$

③ 简单图中, 用顶点的序列, 如 $\Gamma = v_0 v_1 \dots v_l$

④ 非简单图中, 可用混合表示法, 如 $\Gamma = v_0 v_1 e_2 v_2 e_5 v_3 v_4 v_5$

■ 环是长度为1的圈, 两条平行边构成长度为2的圈.

■ 在无向简单图中, 所有圈的长度 ≥ 3 ; 在有向简单图中, 所有圈的长度 ≥ 2 .

通路与回路(续)

■ 在两种意义下计算圈的个数

① 定义意义下

在无向图中, 一个长度为 $l(l \geq 3)$ 的圈看作 $2l$ 个不同的圈. 如 $v_0v_1v_2v_0$, $v_1v_2v_0v_1$, $v_2v_0v_1v_2$, $v_0v_2v_1v_0$, $v_1v_0v_2v_1$, $v_2v_1v_0v_2$ 看作6个不同的圈.

在有向图中, 一个长度为 $l(l \geq 3)$ 的圈看作 l 个不同的圈.

② 同构意义下

所有长度相同的圈都是同构的, 因而是1个圈.

通路和回路(续)

定理 在 n 阶图 G 中, 若从顶点 u 到 v ($u \neq v$) 存在通路, 则从 u 到 v 存在长度小于等于 $n-1$ 的通路.

推论 在 n 阶图 G 中, 若从顶点 u 到 v ($u \neq v$) 存在通路, 则从 u 到 v 存在长度小于等于 $n-1$ 的初级通路.

定理 在一个 n 阶图 G 中, 若存在 v 到自身的回路, 则一定存在 v 到自身长度小于等于 n 的回路.

推论 在一个 n 阶图 G 中, 若存在 v 到自身的简单回路, 则存在 v 到自身长度小于等于 n 的初级回路.

无向图的连通性

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$,

u 与 v 连通: 若 u 与 v 之间有通路. 规定 u 与自身总连通.

连通关系 $R=\{\langle u,v\rangle \mid u,v \in V \text{ 且 } u\sim v\}$ 是 V 上的等价关系

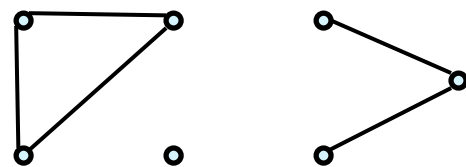
连通图: 任意两点都连通的图. 平凡图是连通图.

连通分支: V 关于连通关系 R 的等价类的导出子图

设 $V/R=\{V_1,V_2,\dots,V_k\}$, $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$ 是 G 的连通分支, 其个数记作 $p(G)=k$.

G 是连通图 $\Leftrightarrow p(G)=1$

例



点割集

记 $G-v$: 从 G 中删除 v 及关联的边

$G-V'$: 从 G 中删除 V' 中所有的顶点及关联的边

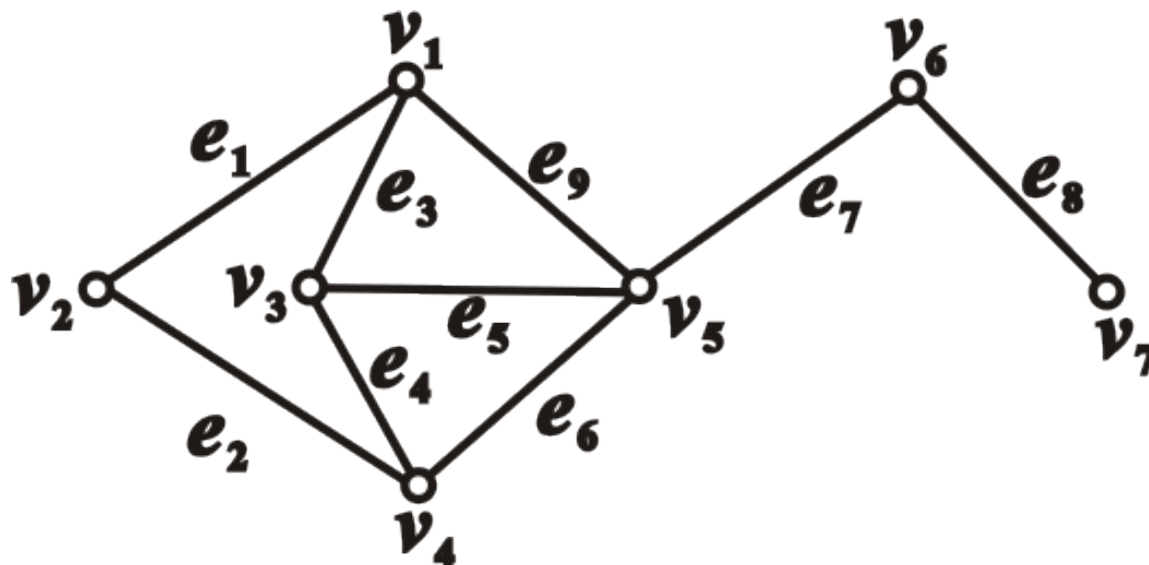
$G-e$: 从 G 中删除 e

$G-E'$: 从 G 中删除 E' 中所有边

定义 设无向图 $G=<V,E>$, $V' \subset V$, 若 $p(G-V') > p(G)$ 且
 $\forall V'' \subset V', p(G-V'') = p(G)$, 则称 V' 为 G 的**点割集**.
若 $\{v\}$ 为点割集, 则称 v 为**割点**.

点割集实例

例 $\{v_1, v_4\}$, $\{v_6\}$ 是点割集, v_6 是割点.
 $\{v_2, v_5\}$ 不是点割集



边割集

定义 设无向图 $G=\langle V, E \rangle$, $E' \subseteq E$, 若 $p(G-E') > p(G)$ 且 $\forall E'' \subset E'$, $p(G-E'') = p(G)$, 则称 E' 为 G 的**边割集**. 若 $\{e\}$ 为边割集, 则称 e 为**割边**或**桥**.

在上一页的图中, $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_3, e_5, e_6\}$, $\{e_8\}$ 等是边割集,
 e_8 是桥, $\{e_7, e_9, e_5, e_6\}$ 不是边割集

说明: K_n 无点割集

n 阶零图既无点割集, 也无边割集.

若 G 连通, E' 为边割集, 则 $p(G-E') = 2$

若 G 连通, V' 为点割集, 则 $p(G-V') \geq 2$

有向图的连通性

设有向图 $D=<V,E>$

u 可达 v : u 到 v 有通路. 规定 u 到自身总是可达的.

可达具有自反性和传递性

D 弱连通(连通): 基图为无向连通图

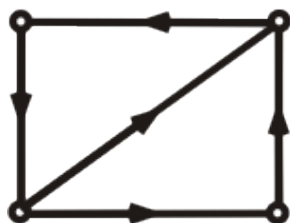
D 单向连通: $\forall u,v \in V$, u 可达 v 或 v 可达 u

D 强连通: $\forall u,v \in V$, u 与 v 相互可达

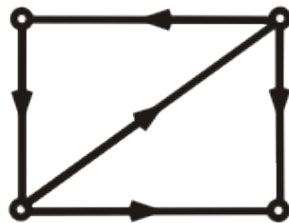
强连通 \Rightarrow 单向连通 \Rightarrow 弱连通

有向图的连通性(续)

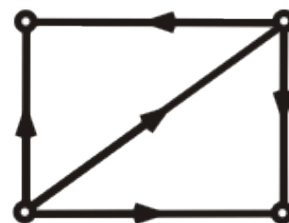
例



强连通



单向连通



弱连通

定理(强连通判别法) D 强连通当且仅当 D 中存在经过每个顶点至少一次的回路

定理(单向连通判别法) D 单向连通当且仅当 D 中存在经过每个顶点至少一次的通路

5.3 图的矩阵表示

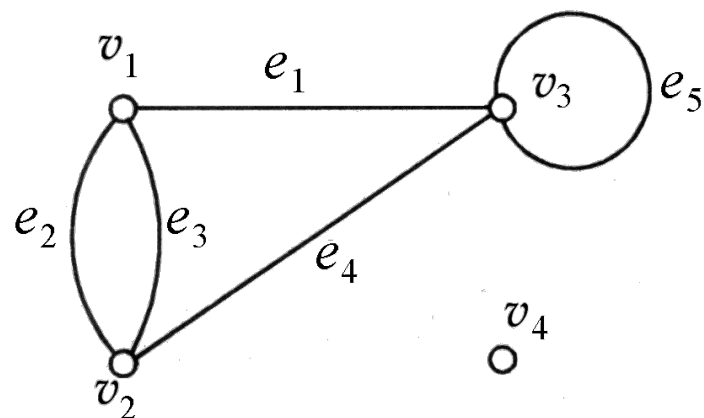
- 无向图的关联矩阵
- 有向图的关联矩阵
- 有向图的邻接矩阵
- 有向图的可达矩阵

无向图的关联矩阵

定义 设无向图 $G=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令 m_{ij} 为 v_i 与 e_j 的关联次数, 称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 **G** 的**关联矩阵**, 记为 $M(G)$.

例

$$M(G)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



无向图的关联矩阵

定义 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令 m_{ij} 为 v_i 与 e_j 的关联次数, 称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 G 的关联矩阵, 记为 $M(G)$.

性质 (1) 每一列恰好有两个1或一个2

$$(2) \sum_{j=1}^m m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(3) \sum_{i,j} m_{ij} = 2m$$

(4) v_i 为孤立点当且仅当第 i 行全为0

(5) 平行边的列相同

有向图的关联矩阵

定义 设无环有向图 $D=\langle V, E \rangle$, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令

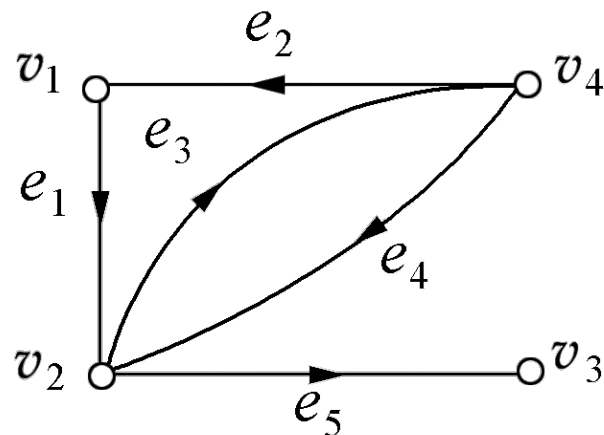
$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的始点} \\ 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联} \\ -1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的终点} \end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 **D 的关联矩阵**, 记为 $M(D)$.

有向图的关联矩阵(续)

例

$$M(D)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



性质

- (1) 每一列恰好有一个1和一个-1
- (2) 第 i 行1 的个数等于 $d^+(v_i)$, -1 的个数等于 $d^-(v_i)$
- (3) 1的总个数等于-1的总个数, 且都等于 m
- (4) 平行边对应的列相同

有向图的邻接矩阵

定义 设有向图 $D=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令 $a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 边的条数, 称 $(a_{ij}^{(1)})_{m \times n}$ 为 **D 的邻接矩阵**, 记作 $A(D)$, 简记为 A .

性质

$$(1) \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^+(v_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

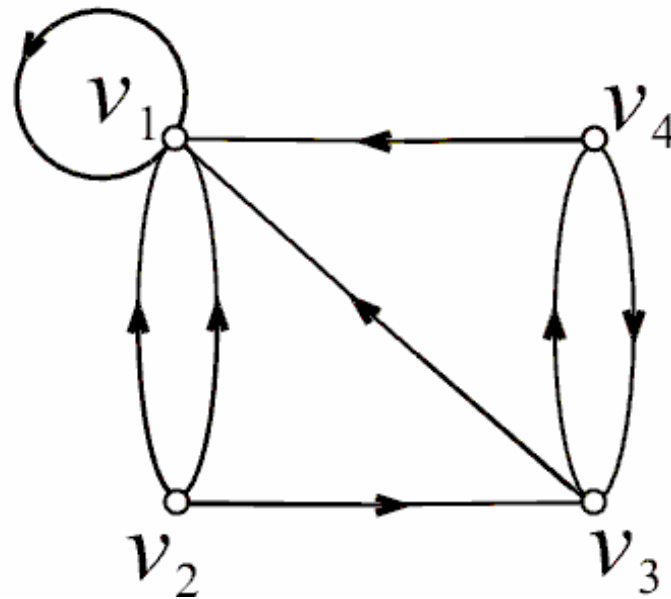
$$(2) \sum_{i=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^-(v_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$(3) \sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m \text{ --- } D \text{ 中长度为 } 1 \text{ 的通路数}$$

$$(4) \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(1)} \text{ --- } D \text{ 中长度为 } 1 \text{ 的回路数}$$

有向图的邻接矩阵实例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



D 中的通路及回路数

定理 设 A 为 n 阶有向图 D 的邻接矩阵, 则 $A^l(l \geq 1)$ 中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数,

$a_{ii}^{(l)}$ 为 v_i 到自身长度为 l 的回路数,

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数,

$\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路总数.

D 中的通路及回路数(续)

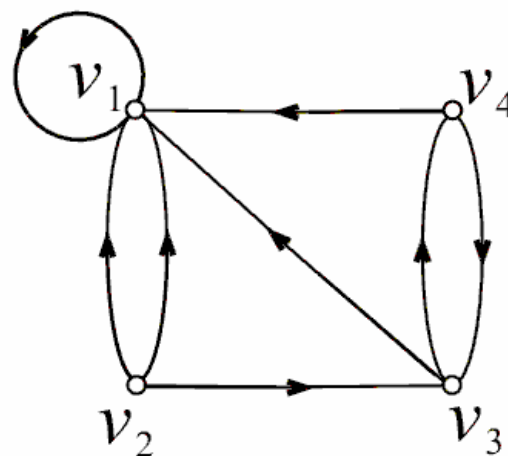
推论 设 $B_l = A + A^2 + \dots + A^l (l \geq 1)$, 则 B_l 中元素

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的通路数,

$\sum_{i=1}^n b_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的回路数.

例 问在有向图 D 中

- (1) 长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条? 其中回路分别为多少条?
- (2) 长度小于或等于4的通路为多少条? 其中有多少条回路?



例(续)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

长度	通路	回路
1	8	1
2	11	3
3	14	1
4	17	3
合计	50	8

有向图的可达矩阵

定义 设 $D=\langle V, E \rangle$ 为有向图, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 令

$$p_{ij} = \begin{cases} 0, & v_i \text{ 可达 } v_j \\ 1, & \text{否则} \end{cases}$$

称 $(p_{ij})_{n \times n}$ 为 **D 的可达矩阵**, 记作 $P(D)$, 简记为 P .

性质:

$P(D)$ 主对角线上的元素全为1.

D 强连通当且仅当 $P(D)$ 的元素全为1.

有向图的可达矩阵实例

例

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

