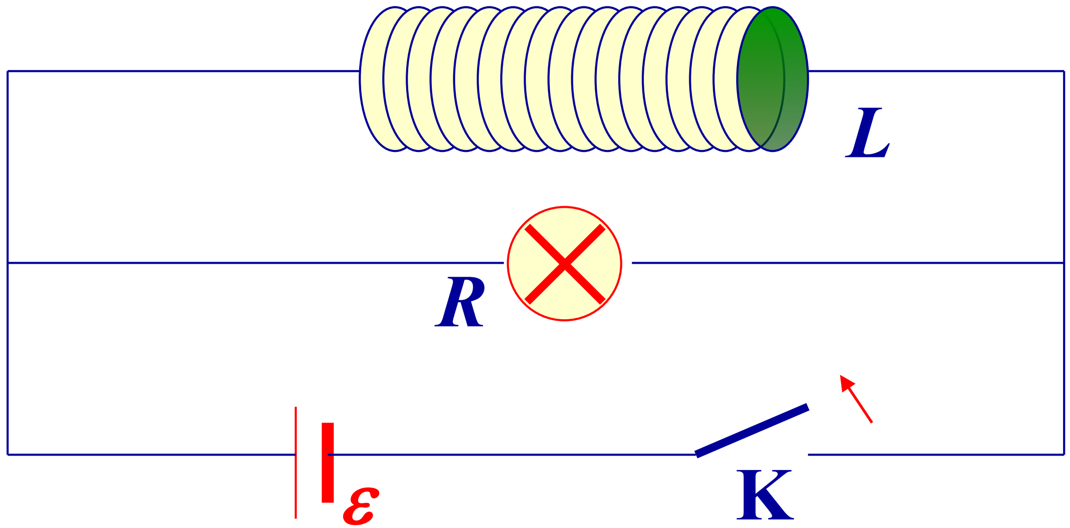
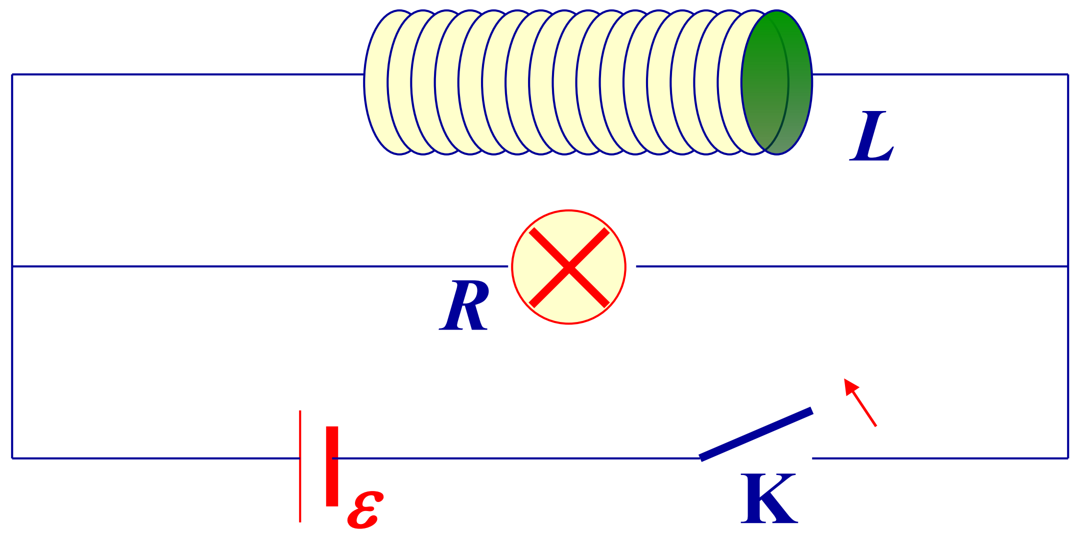
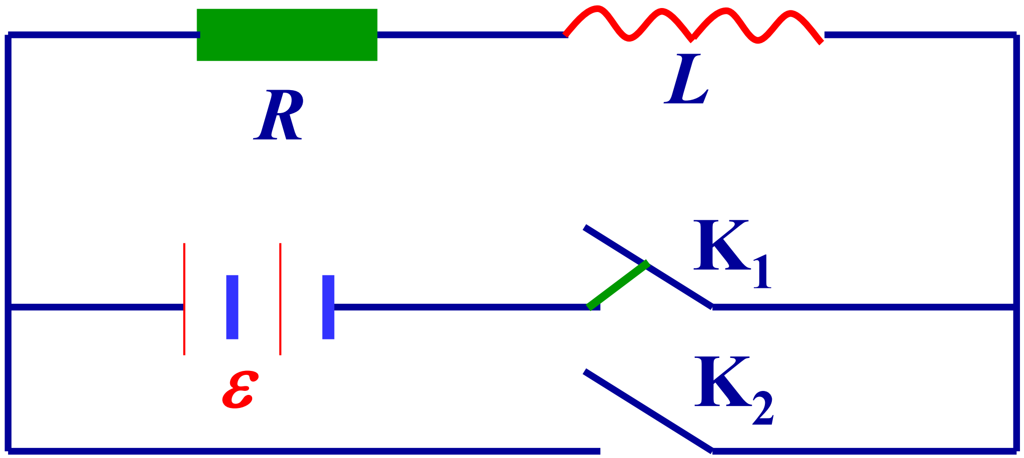
§ 12-4 磁场的能量



当电键打开后，电源已不再向灯泡供应能量了。它突然闪亮一下，所消耗的能量从哪里来的?



由于使灯泡闪亮的电流是线圈中的自感电动势产生的电流，而这电流随着线圈中的磁场的消失而逐渐消失，所以，可以认为使灯泡闪亮的能量是原来储存在通有电流的线圈中的，或者说是储存在线圈内的磁场中，称为**磁能**。



设电路接通后回路中某瞬时的电流为 I，自感电动势为 $-L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ 由欧姆定律得

$$\varepsilon - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = IR$$

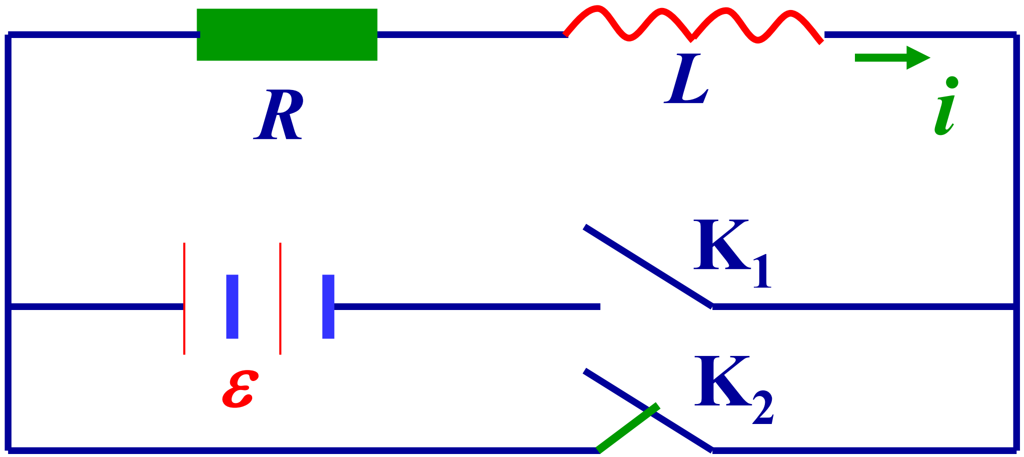
$$\int_0^t \varepsilon I\,\mathrm{d}t = \int_0^{I_0} LI\,\mathrm{d}I + \int_0^t RI^2\,\mathrm{d}t$$

在自感和电流无关的情况下

$$\int_0^t \mathcal{E} I \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} L I_0^2 + \int_0^t R I^2 \, \mathrm{d}t$$

$\int_0^t R I^2 \, \mathrm{d}t$ 是时间 t 内电源提供的部分能量转化为消耗在电阻 R 上的焦耳热；

$L I_0^2 / 2$ 是回路中建立电流的暂态过程中电源电动势克服自感电动势所作的功，这部分功转化为载流回路的能量；



当回路中的电流达到稳定值后，断开K_1，并同时接通K_2，这时回路中的电流按指数规律衰减，此电流通过电阻时，放出的焦耳热为

$$\mathrm{d}W = \varepsilon_L \cdot i\mathrm{d}t = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\cdot i\mathrm{d}t = -Li\mathrm{d}i$$

$$W = \int \mathrm{d}W = -L\int_I^0 i\,\mathrm{d}i = \frac{1}{2}LI^2$$

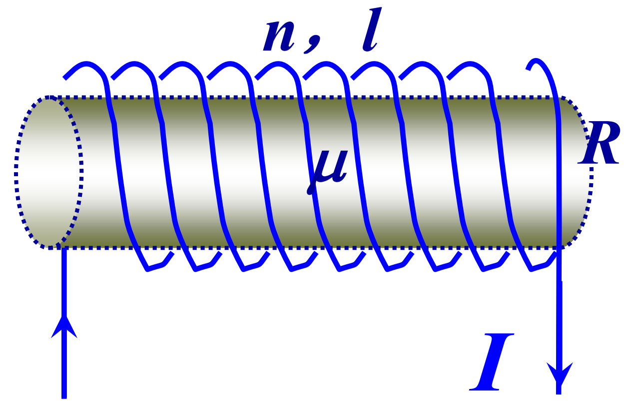
自感电动势做功—消耗自感线圈中的能量

$$W_m = \frac{1}{2} L I_0^2$$

磁能

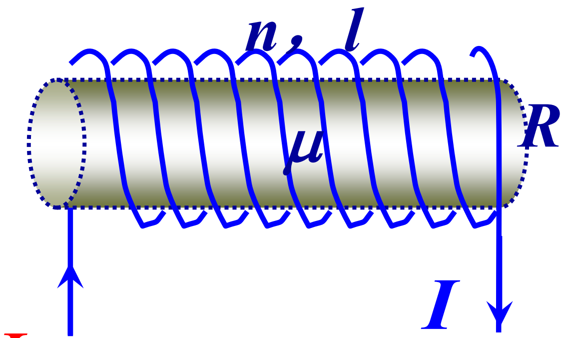
磁能的另一种表示形式

对于一个很长的直螺线管，磁场可近似认为全部集中于管内，且管内磁场近似均匀，



$$B = \mu n I, \qquad L = \mu n^2 V$$

$$\therefore W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}V = \frac{1}{2}BHV$$



$$\therefore w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}BH$$

磁能密度

$$\mathrm{d}W_m = w_m\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}BH\,\mathrm{d}V$$

<u>在任何磁场中</u>，某点的磁场能量密度，只与该点的磁感应强度B和介质性质有关。

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\iiint BH\,\mathrm{d}V}$$

总磁能

$$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\iiint BH\,\mathrm{d}V$$

一般情况下,磁场所储存的总能量

$$W_{\mathrm{m}} = \iiint_V w_{\mathrm{m}} \mathrm{d}V = \iiint_V \frac{BH}{2} \mathrm{d}V$$

积分应遍及磁场存在的全空间。

电场能量密度

电磁场的能量密度:

$$w = \frac{1}{2}(ED + BH)$$

磁场能量密度

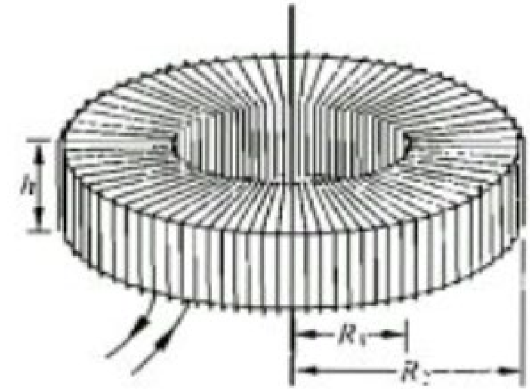
电磁场的总能量

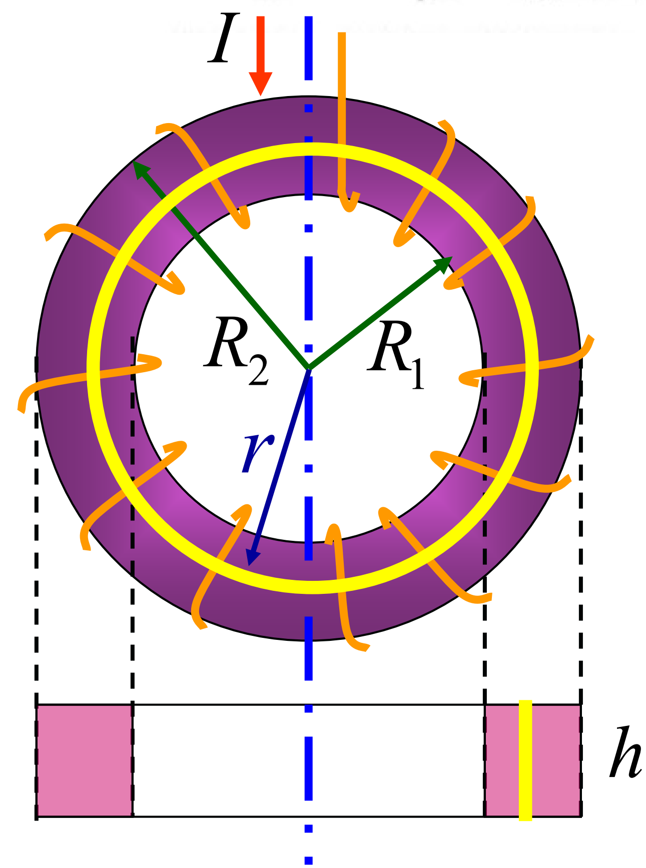
$$W = \iiint_V \frac{1}{2}(ED + BH)\mathrm{d}V$$

例：由N匝线圈绕成的矩形截面螺绕环, 通有电流I。

求: 磁场能量W_{m}。

解: 根据安培环路定理





$$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

$$w_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2\mu_0}B^2=\frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi^2 r^2}$$

取体积元 $\mathrm{d}V=2\pi rh\mathrm{d}r$

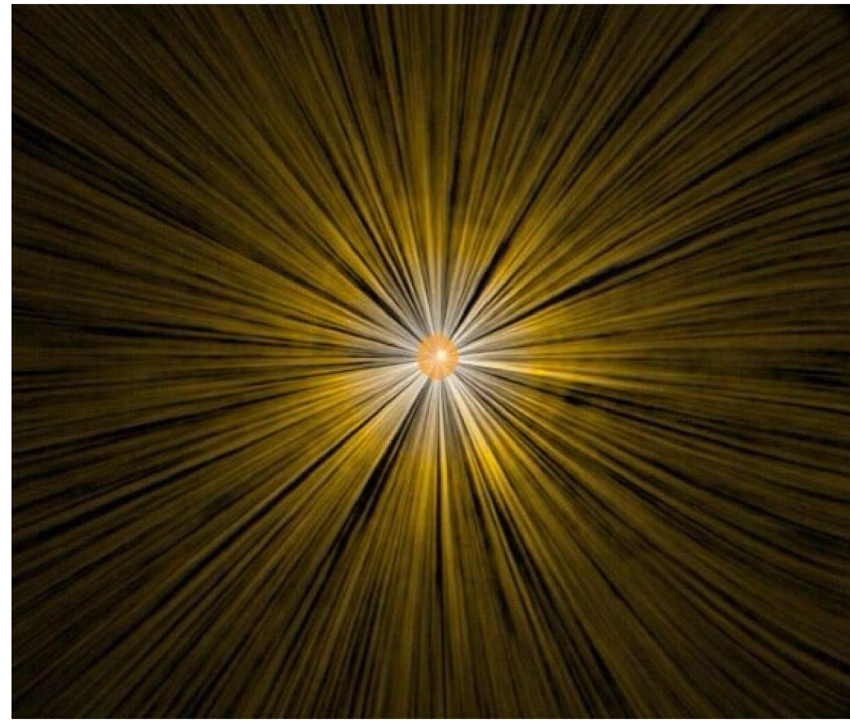
$$W_{\mathrm{m}}=\int_V w_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V \quad =\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}2\pi rh\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

作业：第12章 6，7，8，9，10

§ 12-5 麦克斯韦电磁场理论简介

静电场和恒定磁场的基本规律



(1) 静电场的高斯定理:

$$\oiint_{s} \vec{D}^{(1)} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q$$

表明：静电场是有源场。

(2) 静电场的环路定理:

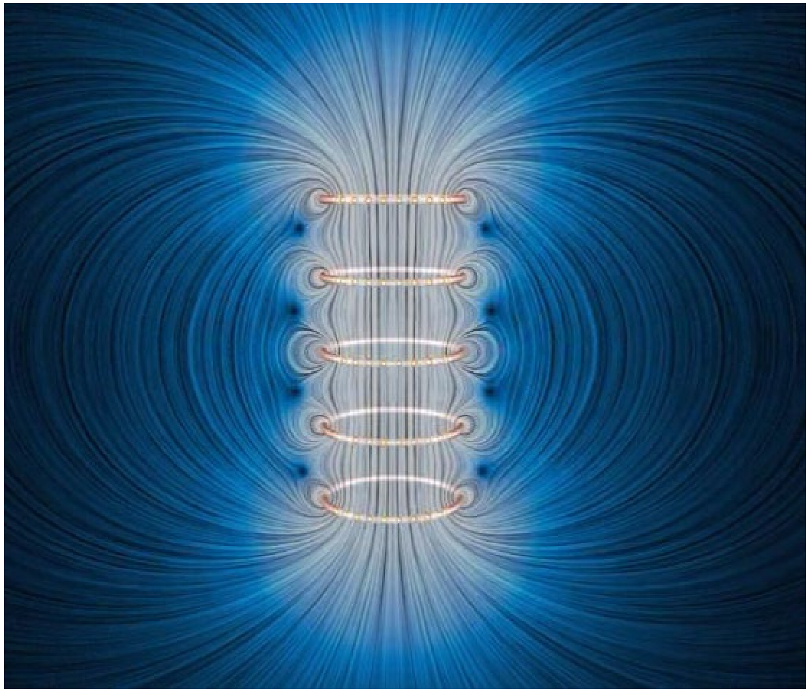
$$\oint_{s} \vec{E}^{(1)} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

表明：静电场是保守（无旋、有势）场。

（3）恒定磁场的高斯定理

$$\oiint_S \vec{B}^{(1)} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

表明：恒定磁场是无源场。



（4）恒定磁场的环路定理

$$\oint_L \vec{H}^{(1)} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum I$$

表明：恒定磁场是非保守（有旋）场。

上面四个式子中 $\vec{D}^{(1)}$、$\vec{E}^{(1)}$、$\vec{B}^{(1)}$ 和 $\vec{H}^{(1)}$ 各量分别表示由静止电荷和恒定电流产生的场，q 为高斯面S内自由电荷的代数和，I 为穿过闭合回路 L 的传导电流的代数和。

法拉第电磁感应定律：

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}$$

涡旋电场的环流和变化磁场的关系：

$$\boxed{\oint_L \vec{E}^{(2)} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.}$$

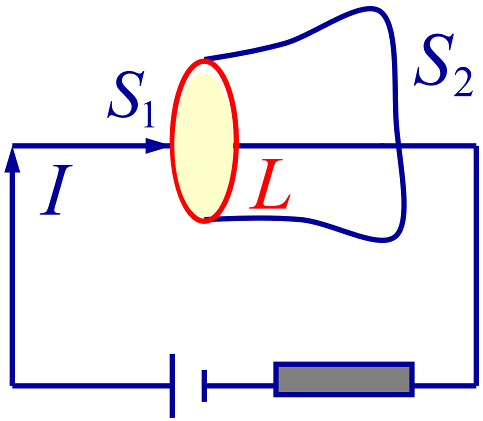
$\vec{E}^{(2)}$表示变化磁场所激发的感生涡旋电场。

$\rightarrow$ 变化的磁场可以产生感生涡旋电场。

那么，**变化的电场能否产生磁场？**

1. 位移电流

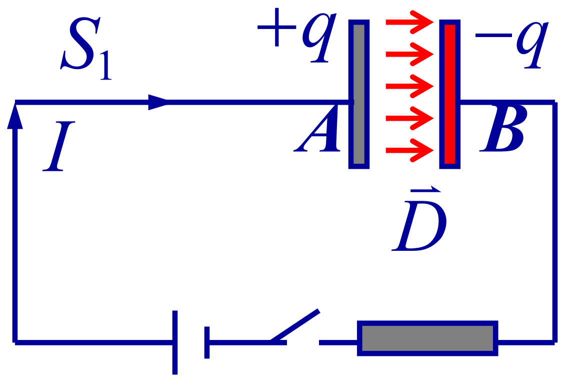
电流连续



磁场遵循环路定理

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_{传导} = \iint_{任意S} \vec{j}_{传导}\cdot d\vec{S}$$

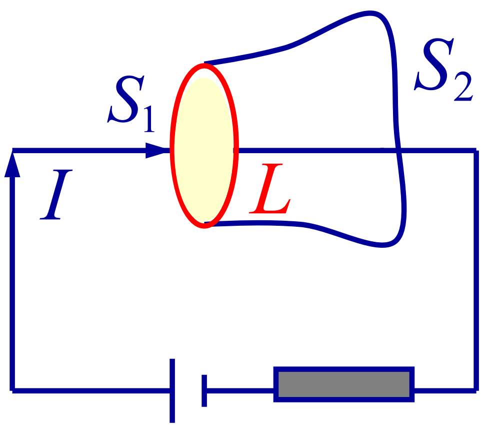
电流不连续



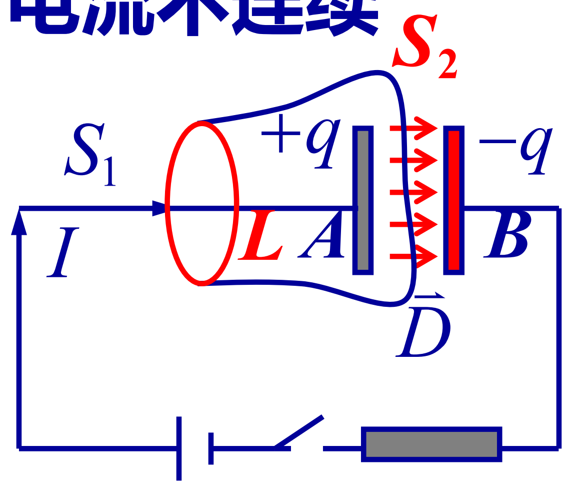
是否仍遵循环路定理?

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = ?$$

电流连续



电流不连续



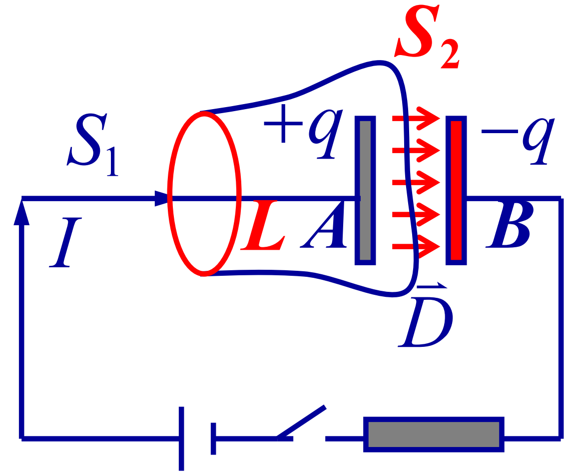
磁场遵循环路定理

是否仍遵循环路定理?

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_{传导} = \iint_{任意S} \vec{j}_{传导}\cdot d\vec{S} \qquad \oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = ?$$

原因：传导电流不连续 $\boldsymbol{I}$ **0**

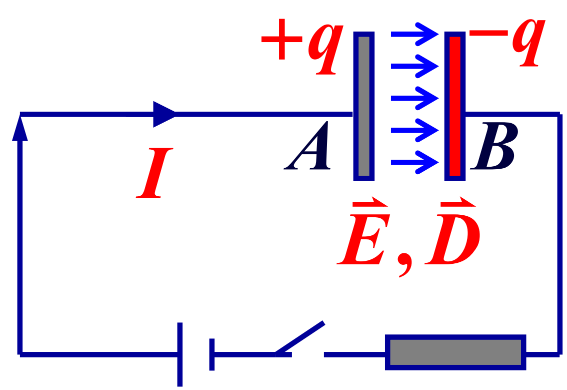
$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_{传导} = \iint_{任意S} \vec{j}_{传导}\cdot d\vec{S}$$



<u>是在连续电流激发的静磁场的情况下得出</u> ——<u>特殊规律</u>

在电流不连续的情况下，需要对这一H的环路定理进行修正！

$$I \;—\; q,\sigma \;—\; \vec{E},\vec{D}$$

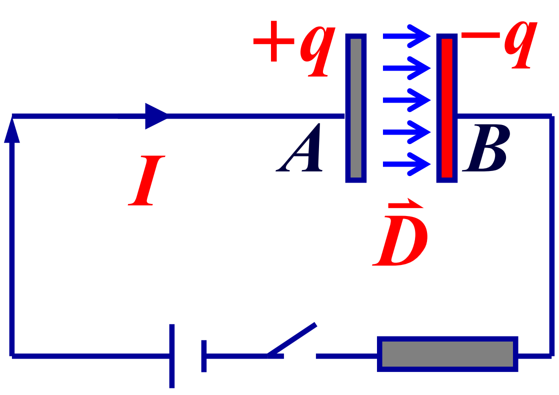


分析：设充电过程的某一时刻，电路中电流为*I*，

有：
$$I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

此刻电容器*A*、*B*板带电量±*q*，电荷面密度为±σ 。

电容器极板间电位移矢量的大小为：



$$D=\sigma=\frac{q}{S}$$

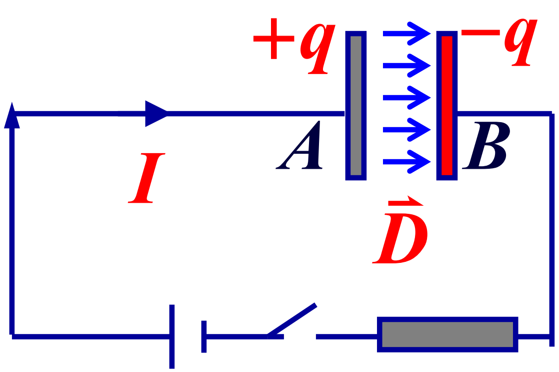
$$\therefore I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=S\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=S\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$$

即：电路中的电流，借助于电容器内的电场变化，仍然可以看作是连续的。

Maxwell 提出了建设性的假说：

变化的电场也是一种电流，称为位移电流I_d。

$$I_d = S\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$$



位移电流密度： $\vec{j}_d = \dfrac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t}$

虽然传导电流 I 不连续，但传导电流 I 和位移电流 I_d 的和（称为全电流$I_全$）是连续的。

$$\boxed{I_全 = I + I_d = I + S\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}}$$

导线中，$I_全 = ?$　　　极板间，$I_全 = ?$

Maxwell 还假设：位移电流在磁效应方面与传导电流是等效的，

以 $\vec{H}^{(2)}$ 表示位移电流产生的磁场强度； $I_d = S\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$

$$\oint_L \vec{H}^{(2)} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_d = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

用 $\vec{H}$ 表示空间总的磁场，

$$\vec{H} = \underline{\vec{H}^{(1)}} + \underline{\vec{H}^{(2)}}$$

$$\therefore \oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint (\vec{H}^{(1)} + \vec{H}^{(2)}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \sum (\ I + I_d\ ) = I_{全}$$

全电流安培环路定理：

磁场中，沿任意闭合回路 $\vec{H}$ 的线积分，在数值上等于：穿过以该闭合回路为边线的任意曲面的传导电流和位移电流的代数和。

$$\oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum\left(I + I_d\right) = \iint_S \vec{j}_{传导}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

总结讨论：

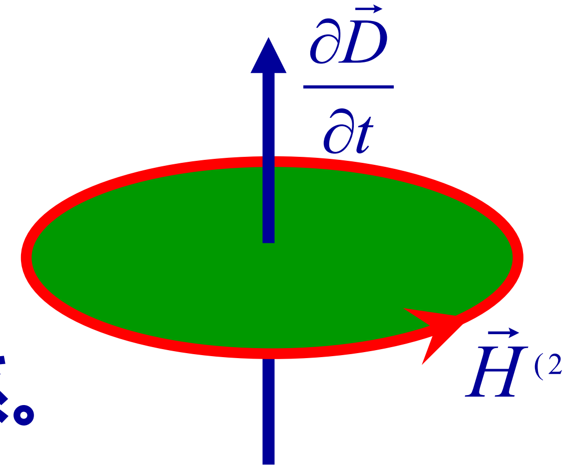
$$\oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum (I + I_d) = \iint_S \vec{j}_{传导} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

①传导电流，位移电流（变化的电场）均能激发磁场；

②传导电流、位移电流激发的磁场，均为涡旋磁场；

位移电流激发磁场H的方向判断：

$$\oint_L \vec{H}^{(2)} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_d = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



$\vec{H}^{(2)}$ 与回路L中 $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 成右手螺旋关系。

③揭示了电场与磁场的内在联系：变化的电场→磁场

法拉第电磁感应：变化的磁场→感生电场

位移电流与传导电流的比较

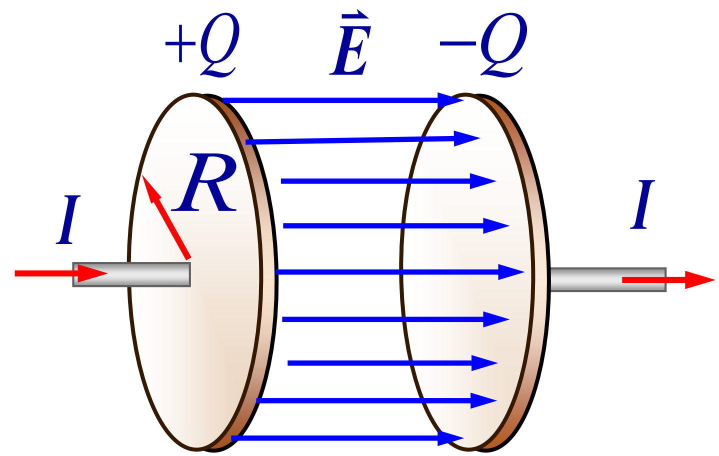
(1) 位移电流与传导电流在产生磁效应上是等效的。

(2) 产生的原因不同：传导电流是由自由电荷运动引起的，而位移电流本质上是变化的电场。

(3)热效应不同：传导电流*I*通过导体时产生焦耳热，而位移电流不产生焦耳热。

例题：半径R的两圆板构成平行板电容器，内部充满介质（介电常数ε，磁导率μ），由圆板中心引两根长直导线给电容器匀速充电，使板间电场满足 $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = const.$

求：1)电容器两板间的位移电流。



解： $I_d = S\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \pi R^2 \dfrac{\mathrm{d}(\varepsilon E)}{dt}$

$$= \pi R^2 \varepsilon \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

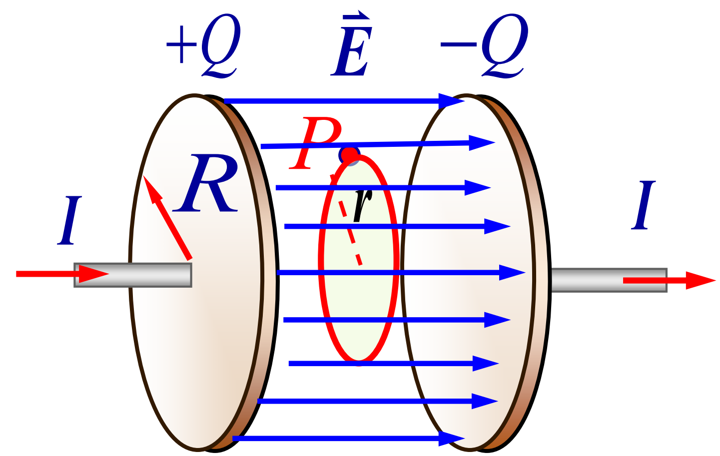
分析： 若 $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} > 0$， **$I_d$方向向右，** **充电**

若 $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} < 0$， **$I_d$方向向左，** **放电**

求：2）P点（$r<R$）处的磁感应强度。

分析电流分布：

可近似认为，位移电流均匀分布在圆柱体上。



分析磁场分布：

磁场具有轴对称性。

由全电流安培环路定理：$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum I_{全}$

过P点垂直轴线做圆形回路，

$$\therefore H\cdot 2\pi r=\sum_{内} I_d=\pi r^2\varepsilon\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}.$$

$$\therefore H=\frac{\varepsilon r}{2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t},\quad \therefore B=\mu H=\frac{\mu\varepsilon r}{2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}.$$

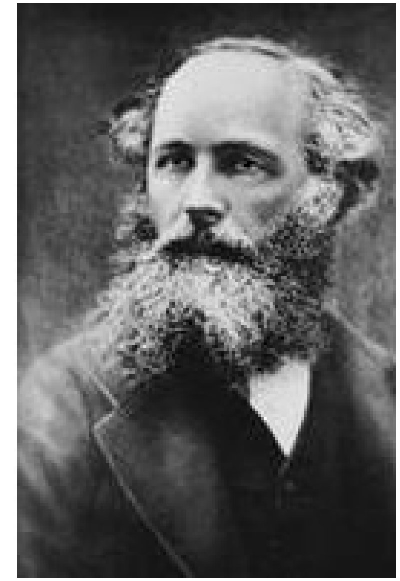
2. 麦克斯韦方程组

静电场、恒定磁场的性质；

电磁感应的规律；

——特定条件，具有局限性；

麦克斯韦总结了库仑、安培和法拉第等人的电磁学研究成果，归纳出了普遍的电磁场的基本方程组。



麦克斯韦

J.C.Maxwell

(1831--1879)

基本概念：

位移电流；

涡旋电场。

1865 年麦克斯韦在总结前人工作的基础上，提出完整的电磁场理论，他的主要贡献是提出了“涡旋电场”和“位移电流”两个假设，从而预言了电磁波的存在，并计算出电磁波的速度（即光速）。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$ （真空中）

1888 年赫兹实验证实了他的预言，麦克斯韦理论奠定了经典电动力学基础，为无线电技术和现代电子通讯技术发展开辟了广阔前景。

主要贡献

麦克斯韦在电磁学方面的贡献是总结了库仑、高斯、安培、法拉第、诺埃曼、汤姆逊等人的研究成果特别是把法拉第的力线和场的概念用数学方法加以描述、论证、推广和提升，创立了一套完整的电磁场理论。

麦克斯韦除了在电磁学方面的杰出贡献外，还是分子运动论的奠基人之一。

麦克斯韦方程组的积分形式

(1) 电场的性质

$$\oiint_{s} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \Sigma q_0 = \iiint_{v} \rho_f \,\mathrm{d}V$$

(2) 磁场的性质

$$\oiint_{S} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

(3) 变化电场和磁场的联系

$$\oint_{L} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I + I_d = \underline{\iint_{s} \vec{j}_{传导}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{s} \frac{\partial \vec{D}}{\underline{\underline{\partial t}}}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}.$$

(4) 变化磁场和电场的联系

$$\oint_{L} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_{s} \frac{\partial \vec{B}}{\underline{\underline{\partial t}}}\cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

(1) 电场的高斯定理

$$\oiint_s \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \Sigma q_0 = \iiint_v \rho_f \,\mathrm{d}V$$

一般情况下，

电场
- 静止电荷——静电场$E_{静}$
- 恒定电流——恒定电场$E_{恒}$
- 变化的磁场——感生电场$E_{感}$

在任何电场中，通过闭合曲面的电位移通量，都等于这一闭合曲面内的自由电荷量的代数和。

(2) 磁场的高斯定理

$$\oiint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

一般情况下，

磁场 $\begin{cases} \text{传导电流——涡旋磁场} \\ \text{变化的电场——涡旋磁场} \end{cases}$

<u>在任何磁场中</u>，通过闭合曲面的磁通量，总是等于0。

(3) 变化电场和磁场的联系

$$\oint_L \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = I + I_d = \underline{\underline{I_{全}}}.$$

$$= \iint_s \vec{j}_{传导}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \iint_s \underline{\underline{\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}}\cdot\mathrm{d}\vec{S}.$$

在任何磁场中，磁场强度沿任意闭合路径的线积分，等于通过一闭合路径为边线的任意曲面的全电流。

(4) 变化磁场和电场的联系

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

一般情况下，

电场 $\left\{\begin{array}{l}\text{静止电荷——静电场}E_{\text{静}} \\ \text{恒定电流——恒定电场}E_{\text{恒}} \\ \text{变化的磁场——感生电场}E_{\text{感}}\end{array}\right.$

在任何电场中，电场强度沿任意闭合曲线的路径积分，等于通过闭合曲线所围面积的磁通量的变化率的负值。

麦克斯韦电磁场方程的微分形式

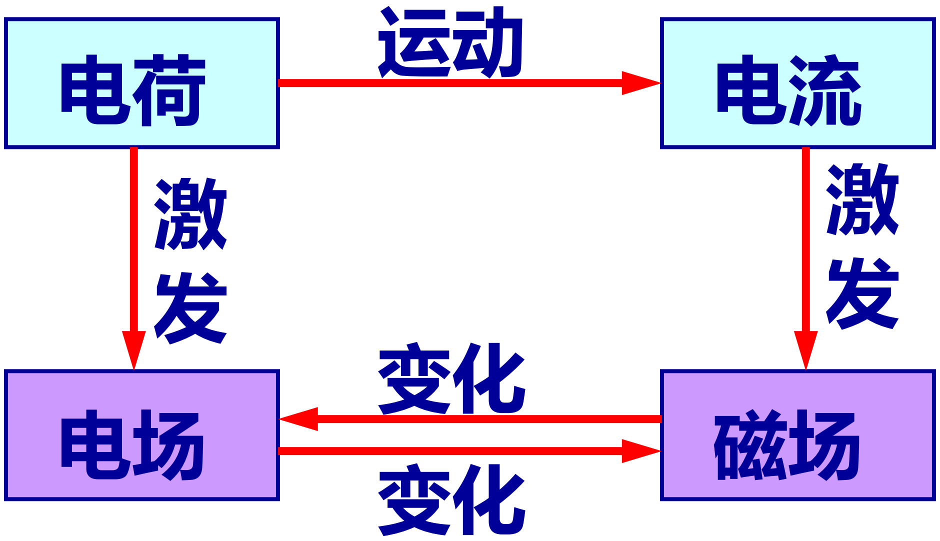
（1）静电场的高斯定理 $$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

（2）磁场的高斯定理 $$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

（3）静电场的环流定理 $$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

（4）安培环路定理 $$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{\mathrm{c}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

电场和磁场的本质及内在联系



电场和磁场紧密联系；

是同一物质——电磁场的两个方面。

麦克斯韦方程的意义

a. 完善了宏观的、统一的电磁场理论，并经受了实践的检验

b. 预言了变化的电磁场以波的形式按一定速 度在空间传播——电磁波

1862年，麦克斯韦预言了电磁波的存在，论证了光是一种电磁波。

1888年，赫兹用实验证实电磁波的存在。