

第三节 n 阶行列式的定义

一、概念的引入

三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

说明

- (1) 三阶行列式共有 6 项，即 $3!$ 项。
- (2) 每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积。

(3) 每项的正负号都取决于位于不同行不同列的三个元素的下标排列.

例如 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 列标排列的逆序数为

$$t(312) = 1 + 1 = 2, \quad \text{偶排列} \quad + \text{正号}$$

$a_{11}a_{23}a_{32}$ 列标排列的逆序数为

$$t(132) = 1 + 0 = 1, \quad \text{奇排列} \quad - \text{负号},$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}.$$

二、 n 阶行列式的定义

定义 由 n^2 数组成的 n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和 $\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$.

记作 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

简记作 $\det(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素.

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列,
 t 为这个排列的逆序数.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$$

说明

- 1、行列式是一种特定的算式，它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的；
- 2、 n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和；
- 3、 n 阶行列式的每项都是位于不同行、不同列 n 个元素的乘积；
- 4、一阶行列式 $|a| = a$ 不要与绝对值记号相混淆；
- 5、 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号为 $(-1)^t$ 。

例1 计算对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 分析

展开式中项的一般形式是 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$

若 $p_1 \neq 4 \Rightarrow a_{1p_1} = 0$, 所以 p_1 只能等于 4,

从而这个项不为零, 同理可得 $p_2 = 3, p_3 = 2, p_4 = 1$

即行列式中不为零的项为 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{t(4321)} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$
$$= 24.$$

例2 计算上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 分析

展开式中项的一般形式是 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \cdot$

$$p_n = n, p_{n-1} = n-1,$$

所以不为零的项只有 $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \cdot$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{t(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

例3

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = ?$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 = 160.$$

同理可得下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

例4 证明对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

证明 第一式是显然的,下面证第二式.

若记 $\lambda_i = a_{i,n-i+1}$, 则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & & \\ & & a_{2,n-1} & \\ & & & \\ & \ddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{t[n(n-1)\cdots 21]} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

证毕

上页

下页

返回

例5 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad D_n &= (-1)^t a_{1,n-1} a_{2,n-2} \cdots a_{n-1,1} a_{nn} \\
 &= (-1)^t 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = (-1)^t n!,
 \end{aligned}$$

$$t[(n-1)(n-2)\cdots 21n]$$

$$= (n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1$$

$$= (n-1)(n-2)/2$$

$$\therefore D_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!.$$

三、小结

1、行列式是一种特定的算式，它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的.

2、 n 阶行列式共有 $n!$ 项，每项都是位于不同行、不同列 的 n 个元素的乘积,正负号由下标排列的逆序数决定.即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$$

思考题

已知 $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$

求 x^3 的系数.

思考题解答

解 含 x^3 的项有两项,即

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

对应于

$$(-1)^t a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + (-1)^{t(1234)} a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$$

$$(-1)^t a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} = x^3,$$

$$(-1)^{t(1234)} a_{11} a_{22} a_{34} a_{43} = -2x^3$$

故 x^3 的系数为 -1 .