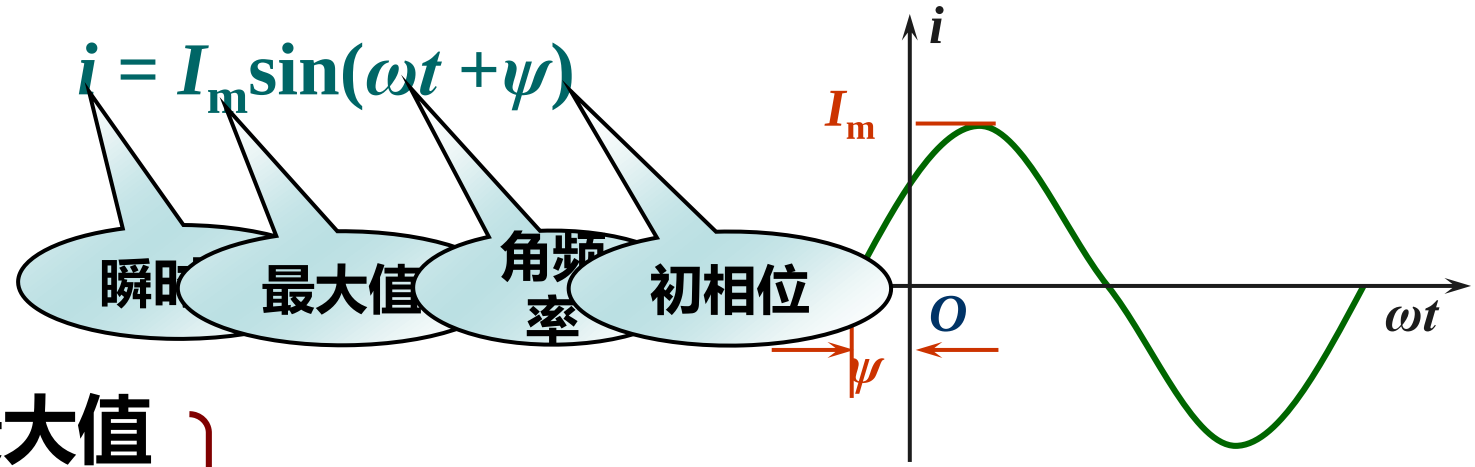
第 3 章　交流电路

3.1 正弦交流电的基本概念

交流电： 大小和方向都周期性变化、在一个周期上的函数平均值为零。

正弦交流电： 按正弦规律变化的交流电。

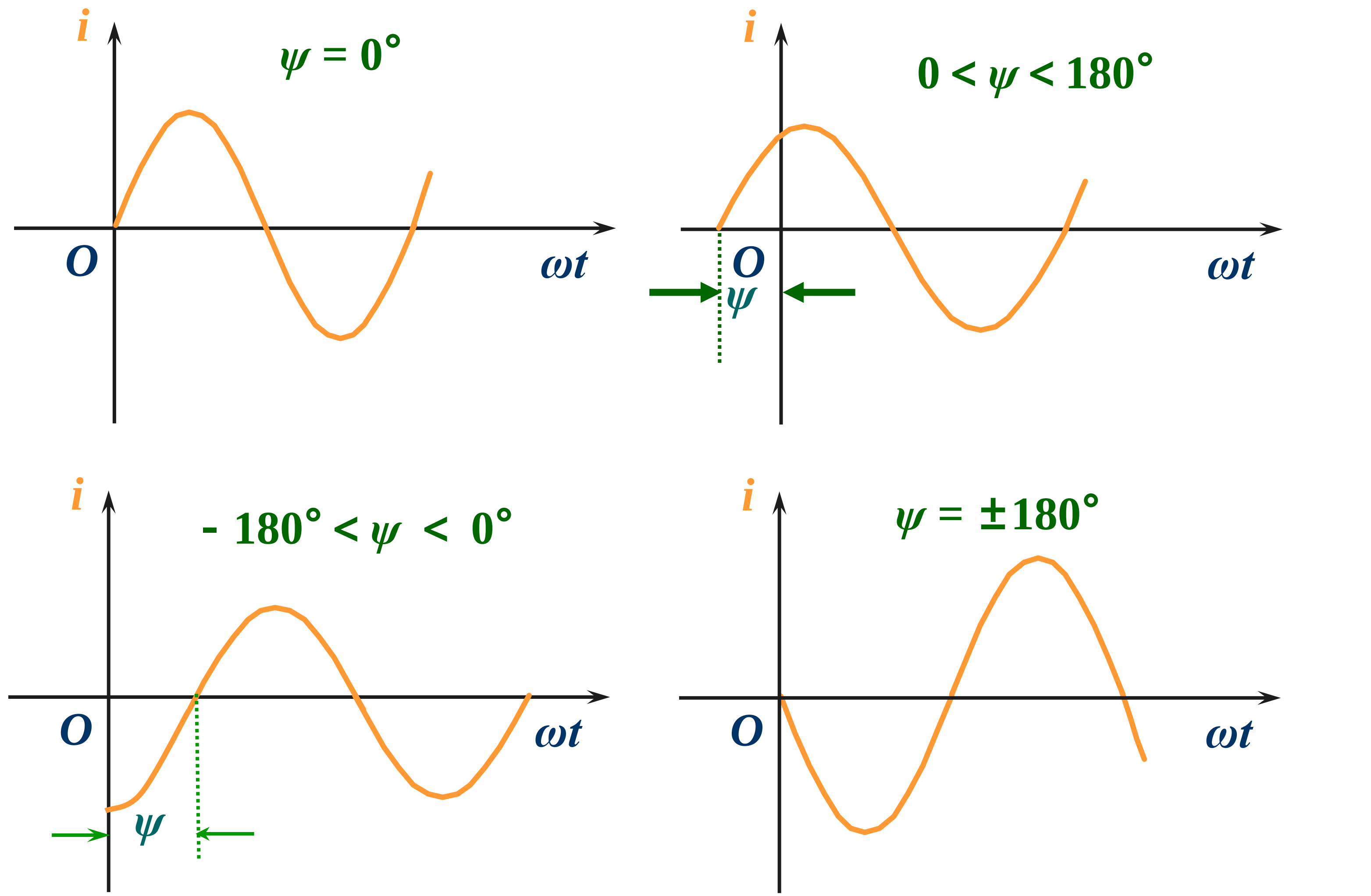
$$i = I_m \sin(\omega t + \psi)$$



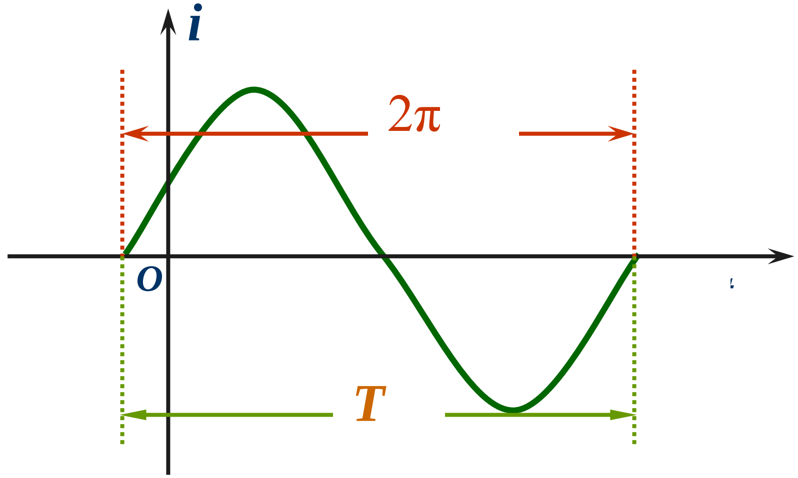
最大值
角频率
初相位

正弦交流电的**三要素**

正弦交流电的波形:



一、交流电的周期、频率、角频率



周期 T：变化一周所需要的时间（s）。

频率 f：1s 内变化的周数（Hz）。 $f = \dfrac{1}{T}$

角频率 ω： 正弦量 1s 内变化的弧度数。

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \text{ (rad/s)}$$

常见的频率值

各国电网频率： 中国和欧洲国家 50 Hz，
美国 、日本 60 Hz

有线通信频率： 300 ~ 5 000 Hz；

无线通信频率： 30 kHz ~ 3×10^4 MHz ；

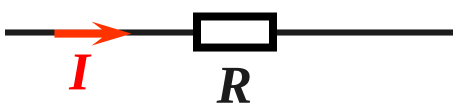
高频加热设备频率： 200 ~ 300 kHz。

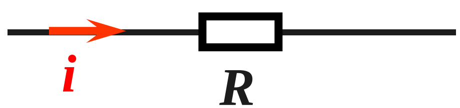
二、交流电瞬时值、最大值、有效值

e、i、u ⟹ 瞬时值

E_m、I_m、U_m ⟹ 最大值

E、I、U ⟹ 有效值





$$W_d = RI^2T$$

$$Wa = \int_0^T Ri^2 \mathrm{d}t$$

如果热效应相当，$W_d = W_a$，则 I 是 i 的有效值。

正弦电量的有效值：

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \qquad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

三、交流电的相位、初相位、相位差

$$i = 10\sin(1\,000\,t + 30^\circ)\ \text{A}$$

$$u = 311\sin(314\,t - 60^\circ)\ \text{V}$$

相位

初相位

相位: $\omega t + \psi$

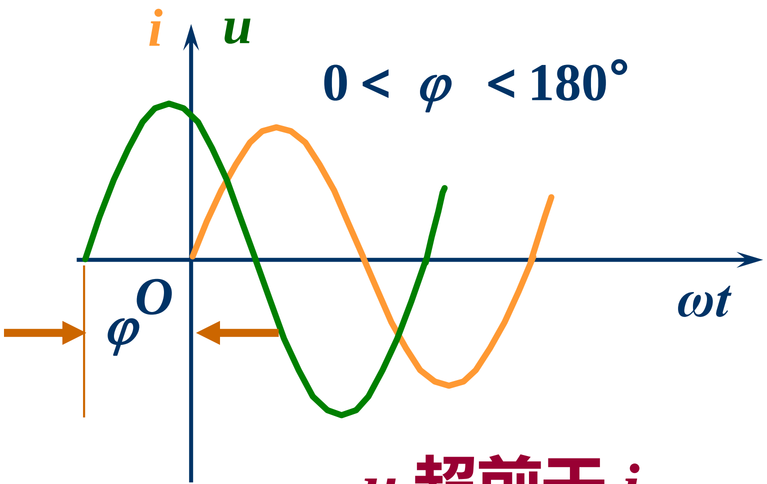
初相位: $\psi_i = 30^\circ,\ \psi_u = -60^\circ$

相位差: 同频率的正弦电量的初相位之差。

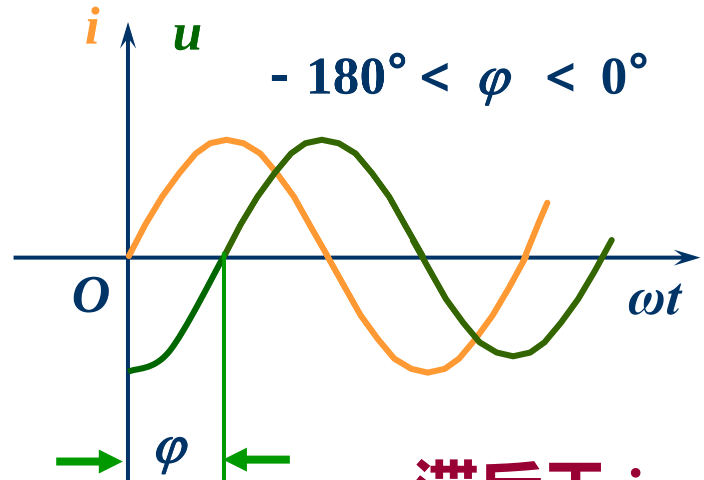
$$i = 100\sin(314\,t + 30^\circ)\ \text{A}$$

$$u = 311\sin(314\,t - 60^\circ)\ \text{V}$$

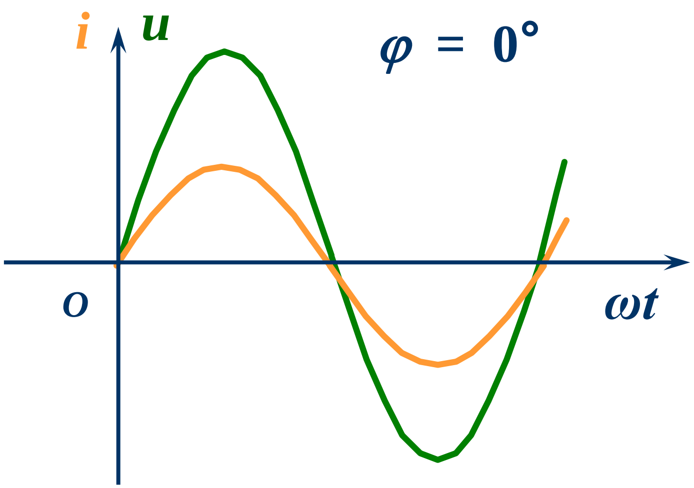
$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -60^\circ - 30^\circ = -90^\circ$$



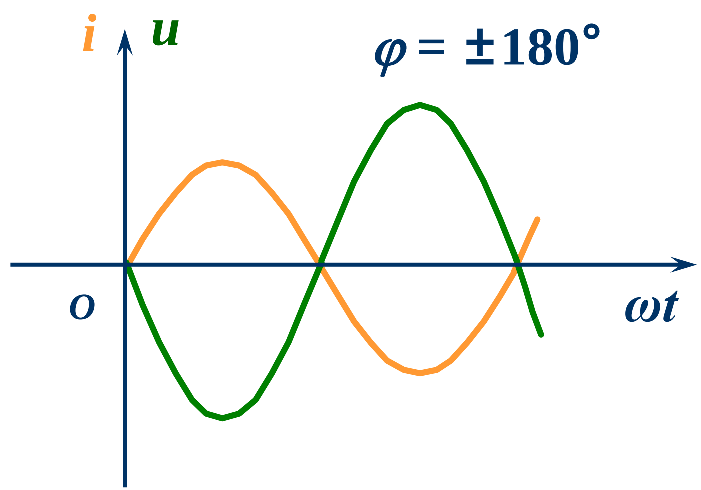
u 超前于 i



u 滞后于 i

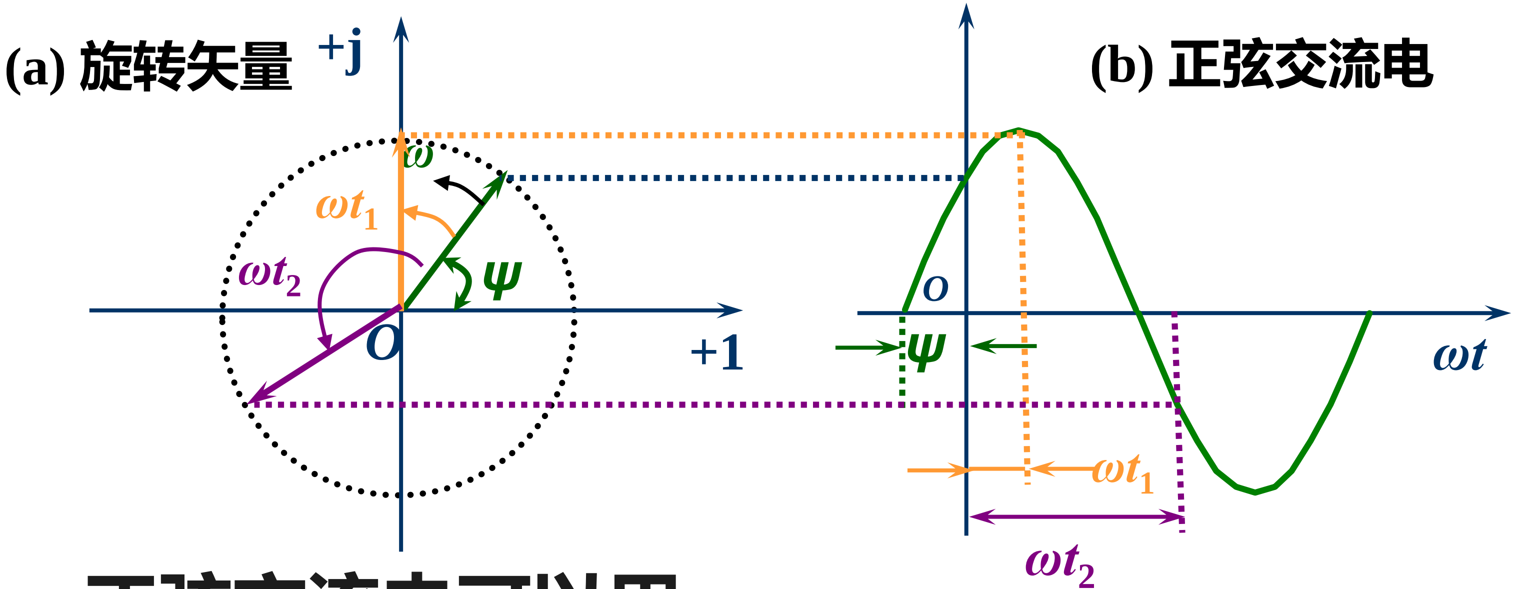


u 与 i 同相位

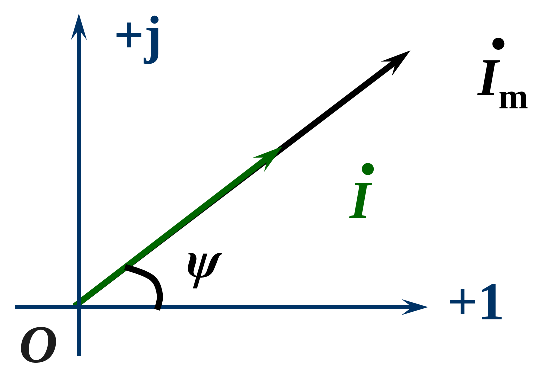


u 与 i 反相

3.2 正弦交流电的相量表示法

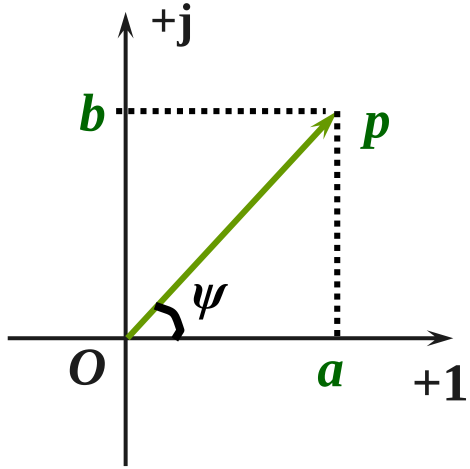


- 正弦交流电可以用一个**固定矢量**表示
- **最大值相量** $\dot{I}_m$
- **有效值相量** $\dot{I}$



高等教育出版社

一、复数的表示方法



模

辐角

$$\overline{Op} = a + \mathrm{j}\, b$$ 代数式

$$= c\,(\cos\psi + \mathrm{j}\sin\psi)$$ 三角式

$$= c\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}$$ 指数式

$$= c\underline{/\psi}$$ 极坐标式

二、复数的运算方法

复数的运算：加、减、乘、除法。

设：

$$A_1 = a_1 + \mathrm{j}\, b_1 = c_1 \angle \psi_1$$

$$A_2 = a_2 + \mathrm{j}\, b_2 = c_2 \angle \psi_2 \neq 0$$

加、减法： $A_1 \pm A_2 = (a_1 \pm a_2) + \mathrm{j}\,(b_1 \pm b_2)$

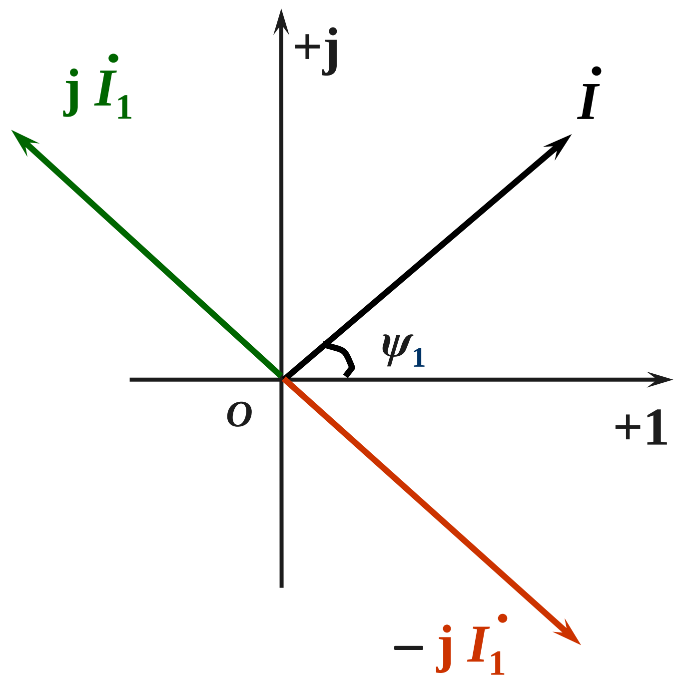
乘法： $A_1 A_2 = c_1\, c_2 \angle \psi_1 + \psi_2$

除法： $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \angle \psi_1 - \psi_2$

由于： $e^{\pm j90^\circ} = 1\angle\pm 90^\circ = \pm j$

则 $j\dot{I} = \dot{I}e^{j90^\circ} = Ie^{j\psi}\cdot e^{j90^\circ} = Ie^{j(\psi+90^\circ)}$

$-j\dot{I} = \dot{I}e^{-j90^\circ} = Ie^{j\psi}\cdot e^{-j90^\circ} = Ie^{j(\psi-90^\circ)}$



[例 3.2.1] 已知 $i_1 = 20\sin(\omega t + 60^\circ)$ A， $i_2 = 10\sin(\omega t - 45^\circ)$ A 。两者相加的总电流为 i ，即 $i = i_1 + i_2$ 。(1) 求 i 的数学表达式；(2) 画出相量图； (3) 说明 i 的最大值是否等于 i_1 和 i_2 的最大值之和， i 的有效值是否等于 i_1 和 i_2 的有效值之和，并说明为什么。

[解]

(1) 采用相量运算

$$\dot{I}_{1m} = 20\angle 60^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{2m} = 10\angle -45^\circ \text{ A}$$

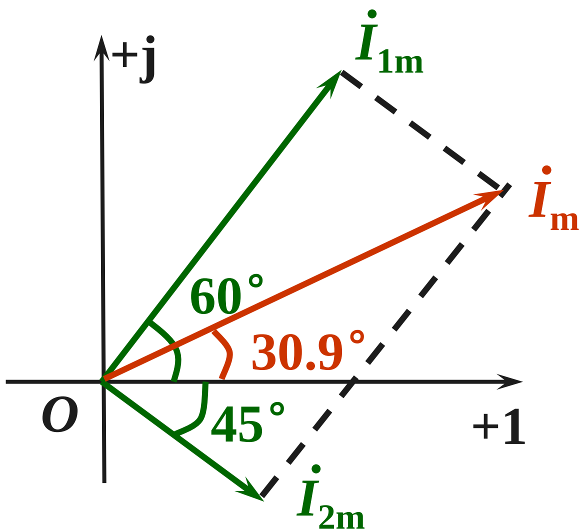
$$\dot{I}_{m} = \dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m}$$

$$= 19.9\angle 30.9^\circ \text{ A}$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

$$= 19.9\sin(\omega t + 30.9^\circ) \text{ A}$$

(2) 相量图



(3) 因为 $i_1 + i_2$ 的初相位不同，故最大值和有效值之间不能代数相加。

[例 3.2.2] 已知 u_1 和 u_2 的有效值分别为 $U_1 = 100\ \text{V}$，$U_2 = 60\ \text{V}$，u_1 超前于 u_2 60°，求：(1) 总电压 $u = u_1 + u_2$ 的有效值并画出相量图；(2) 总电压 u 与 u_1 及 u_2 的相位差。

[解]

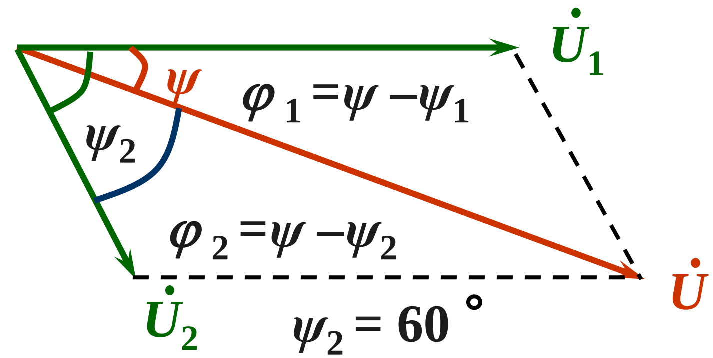
(1) 选 u_1 为参考相量

$$\dot{U}_1 = 100\angle 0^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{U}_2 = 60\angle -60^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

$$= (100\angle 0^\circ + 60\angle -60^\circ)\ \text{V} = 140\angle -21.79^\circ\ \text{V}$$



相量图

(2) $\varphi_1 = \psi - \psi_1 = -21.79^\circ - 0^\circ = -21.79^\circ$

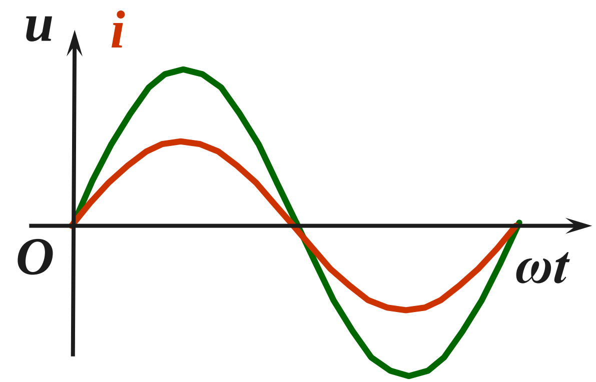
$\varphi_2 = \psi - \psi_2 = -21.79^\circ - (-60^\circ) = 38.21^\circ$

3.3 单一参数交流电路

一、 纯电阻电路

1. 电压、电流的关系

(1) 波形图



(2) 大小关系

$$U = R\,I$$

$$U_m = R\,I_m$$

(3) 相量关系: $\dot{U} = R\,\dot{I}$

如： $\dot{U} = U\angle 0^\circ$

则： $\dot{I} = I\angle 0^\circ$

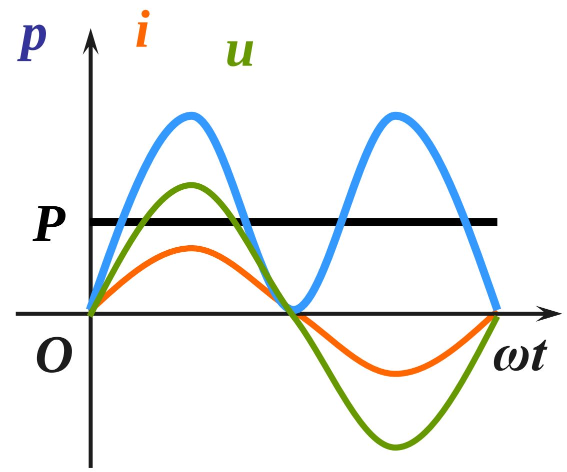
2.功率关系

(1) 瞬时功率

$$p = ui = U_m \sin\omega t \, I_m \sin\omega t$$

$$= U_m I_m \sin^2\omega t$$

$$= UI(1 - \cos 2\omega t)$$



(2) 平均功率 (有功功率):

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t = UI\,(\mathbf{W})$$

$p \geq 0$ —— 耗能元件。

p 与 u^2 和 i^2 成比例。

[例 3.3.1] 一只电熨斗的额定电压 $U_N = 220$ V，额定功率 $P_N = 500$ W，把它接到 220 V 的工频交流电源上工作。求电熨斗这时的电流和电阻值。如果连续使用 1 h，它所消耗的电能是多少?

[解]

$$I_N = \frac{P_N}{U_N} = \frac{500}{220}\,\text{A} = 2.27\,\text{A}$$

$$R = \frac{U_N}{I_N} = \frac{220}{2.27}\,\Omega = 96.9\,\Omega$$

$$W = P_N t = (500\times1)\ \text{W}\cdot\text{h} = 0.5\ \text{kW}\cdot\text{h}$$

二、纯电容电路

1. 电压、电流的关系

(1) 频率关系：同频率的正弦量;

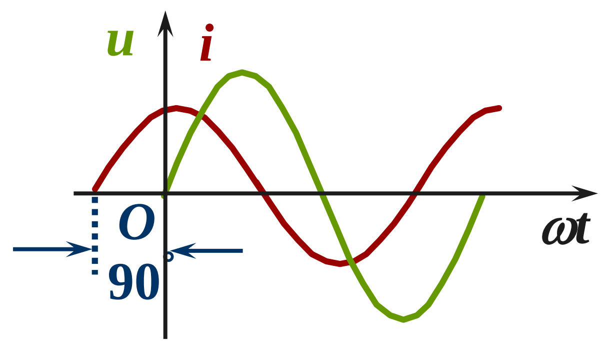
(2) 大小关系: $U_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{\omega C} I_{\mathrm{m}}$　$U = \dfrac{1}{\omega C} I$

容抗： $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$　$U = X_C I$

(3) 相位关系: $\psi_u = \psi_i - 90^\circ$

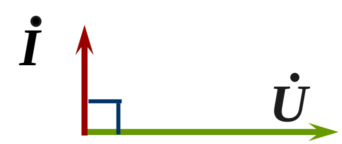
(4) 相量关系: $\dot{U} = \mathrm{j}\, X_L \dot{I}$

(5) 波形图:



(6) 相量图：如 $\dot{U} = U\angle 0^\circ$

则 $\dot{I} = I\angle 90^\circ$



2.功率关系

(1) 瞬时功率:

$$p = UI\sin 2\omega t$$

$p > 0$ 电容储存电场能量(电能→电场能量)

$p < 0$ 电容释放电场能量(电场能量→电能)

(2) 平均功率(有功功率)

$$P = 0$$

(3) 无功功率:

$$Q = UI = X_C I^2 = \frac{U^2}{X_C} \ (\mathrm{var})$$

[例 3.3.2] 今有一只 47 μF 的额定电压为 20 V 的无极性电容器，试问：(1) 能否接到 20 V 的交流电源上工作；(2) 将两只这样的电容器串联后接于工频 20 V 的交流电源上，电路的电流和无功功率是多少？(3) 将两只这样的电容器并联后接于1 000 Hz 的交流电源上，电路的电流和无功功率又是多少？

[解] $U_m = \sqrt{2}U = 1.414 \times 20\text{V} = 28.8\text{V}$

故不可以接到 20 V 的交流电上。

(2) $$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 23.5\ \mu\text{F}$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = 135.5\ \Omega$$

所以: $$I = \frac{U}{X_C} = \frac{20}{135.5}\ \text{A} = 0.15\ \text{A}$$

$$Q = U I = 20 \times 0.15\ \text{var} = 3\ \text{var}$$

(3) $C = C_1 + C_2 = 94\ \mu\text{F}$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = 1.69\ \Omega$$

$$I = \frac{U}{X_C} = \frac{20}{1.69}\ \text{A} = 11.83\ \text{A}$$

$$Q = U I = 10 \times 11.83\ \text{var} = 118.3\ \text{var}$$

三、纯电感电路

1.电压、电流的关系

(1) 频率关系: 同频率的正弦量;

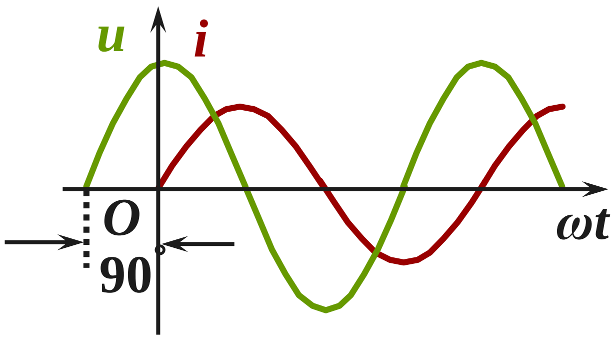
(2) 大小关系: $U_m = \omega L I_m$　　$U = \omega L I$

感抗： $X_L = \omega L = U / I$　　$U = X_L I$

(3) 相位关系: $\psi_u = \psi_i + 90^\circ$

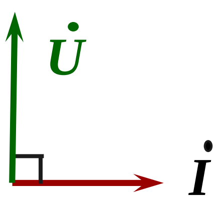
(4) 相量关系： $\dot{U} = \mathrm{j} X_L \dot{I}$

(5) 波形图:



(6) 相量图：如： $\dot{I} = I \angle 0^\circ$

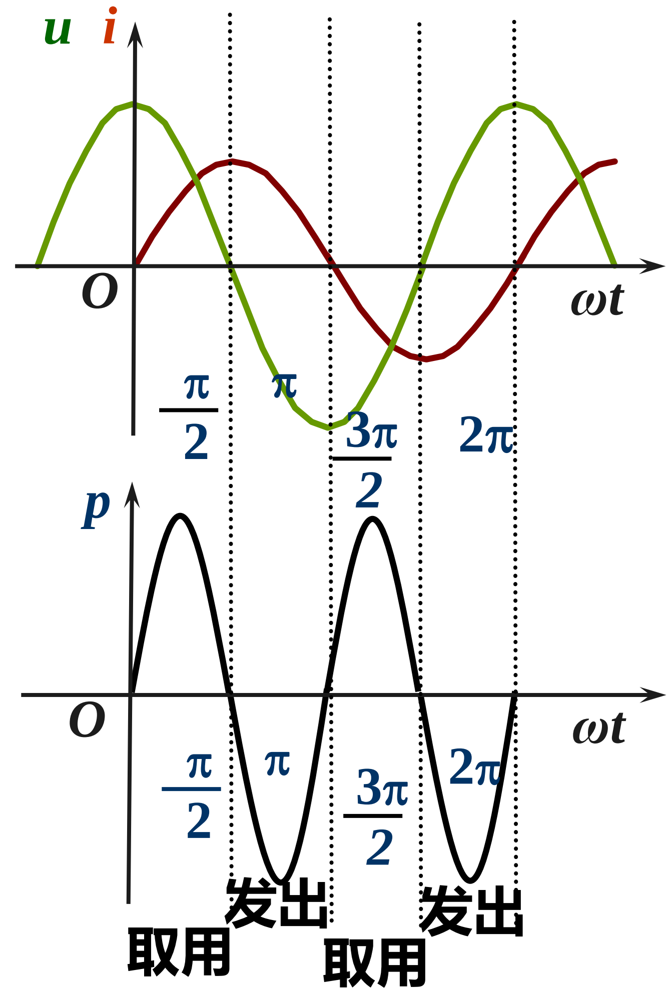
则： $\dot{U} = U \angle 90^\circ$



2.功率关系

(1) 瞬时功率

$$p = u\,i = U_m \cos\omega t\, I_m \sin\omega t = U I \sin 2\omega t$$



(2) 平均功率（有功功率）

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t = 0$$

(3) 无功功率

$$Q = U\,I = X_L I^2 = \frac{U^2}{X_L}\ \text{(var)}$$

结论：**纯电感不消耗能量，**
只和电源进行能量交换（能量的吞吐）。

[例3.3.3] 有一电感器,电阻可忽略不计,电感 L = 0.2 H。把它接到 220 V工频交流电源上工作，求电感的电流和无功功率？若改接到 100 V 的另一交流电源上，测得电流为 0.8 A，此电源的频率是多少?

[解] (1) 接到 220 V工频交流电源时

$$X_L = 2\pi f L = 62.8\ \Omega$$

$$I = \frac{U}{X_L} = \frac{220}{62.8}\ \text{A} = 3.5\ \text{A}$$

$$Q = U I = 220 \times 3.5\ \text{var} = 770\ \text{var}$$

(2) 接到100 V 交流电源时

$$X_L = \frac{U}{I} = \frac{100}{0.8}\ \Omega = 125\ \Omega$$

$$f = \frac{X_L}{2\pi L} = 100\ \text{Hz}$$

3.4 串联交流电路

一、R、L、C 串联电路

根据KVL $u = u_R + u_L + u_C$

$$\dot U = \dot U_R + \dot U_L + \dot U_C$$

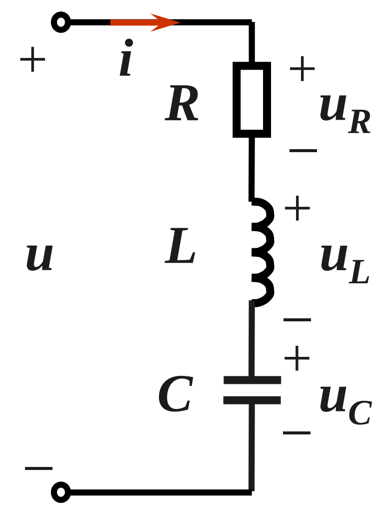
$$= R\dot I + \mathrm{j}\,X_L\dot I - \mathrm{j}\,X_C\dot I$$

$$= [R + \mathrm{j}\,(X_L - X_C)]\dot I$$

$$= [R + \mathrm{j}\,\underbrace{(X_L - X_C)]\dot I}_{\text{复数阻抗: }Z}$$

$$Z = R + \mathrm{j}\,(X_L - X_C)$$

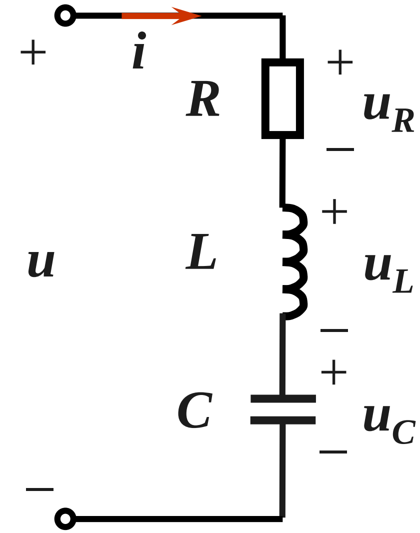
$$= R + \mathrm{j}\,X = \sqrt{R^2 + X^2}\,\angle\,\arctan(X/R)$$

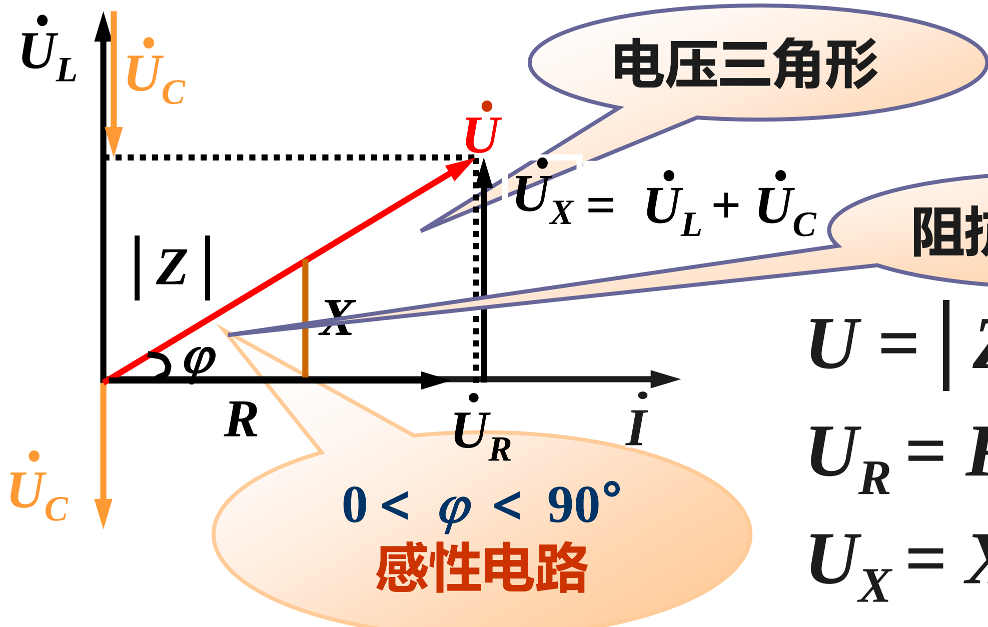


阻抗: $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \dfrac{U}{I}$

阻抗角: $\varphi = \arctan(X/R) = \psi_u - \psi_i$

相量图: $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$

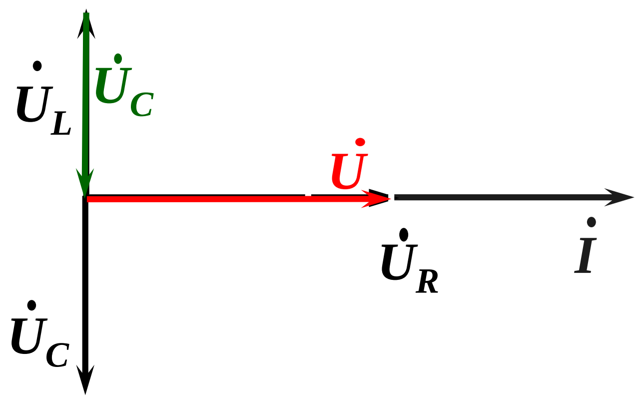


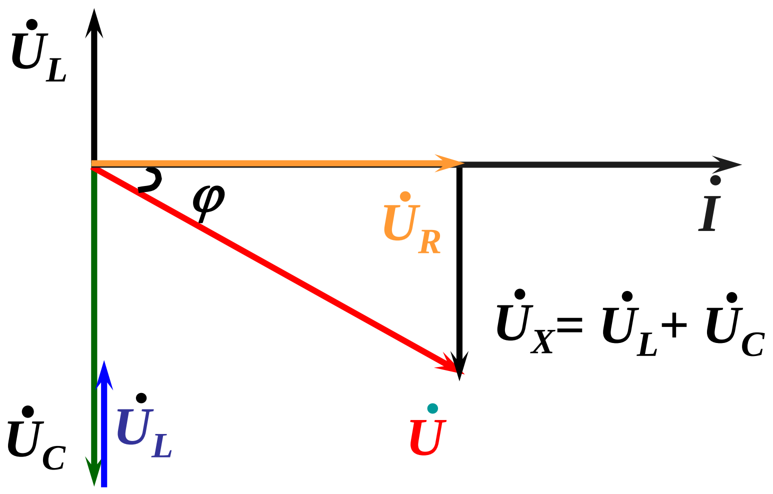


$$U = |Z|\,I$$

$$U_R = R\,I$$

$$U_X = X\,I = (X_L - X_C)\,I$$





$\varphi = 0°$

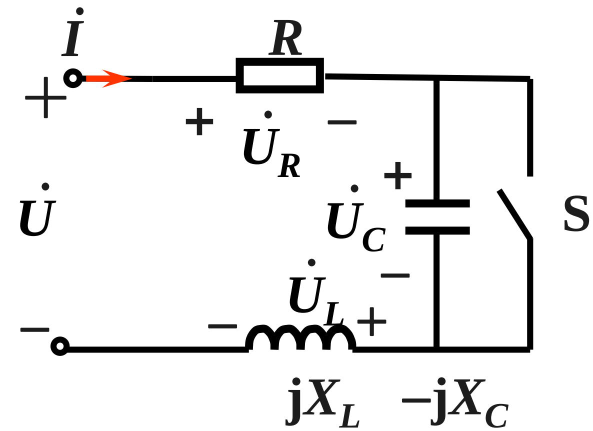
$-90° < \varphi < 90°$

电路呈阻性

电路呈容性

[例 3.4.1] 已知 $U = 12$ V， $R = 3\ \Omega$ ， $X_L = 4\ \Omega$。 求：(1) X_C 为何值时（ $X_C \neq 0$ ），开关 S 闭合前后，电流 I 的有效值不变。这时的电流是多少？ (2) X_C 为何值时，开关 S 闭合前电流 I 最大，这时的电流是多少？

[解] (1) 开关闭合前后电流 I 有效值不变，则开关闭合前后电路的阻抗模相等。



$$\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^{\ 2}}$$

故 $(X_L - X_C)^2 = X_L^{\ 2}$

因 $X_C \neq 0$，求得 $X_C = 2X_L = 2\times4\ \Omega = 8\ \Omega$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^{\ 2}} = \sqrt{3^2 + 4^2}\ \Omega = 5\ \Omega$$

$$I = \frac{U}{|Z|} = 2.4\ \text{A}$$

(2) 开关闭合前， $X_L = X_C$ 时， $|Z|$ 最小，电流最大，

故 $X_C = X_L = 4\ \Omega$

$$|Z| = R = 3\ \Omega$$

$$I = \frac{U}{|Z|} = 4\ \mathrm{A}$$

二、阻抗串联电路

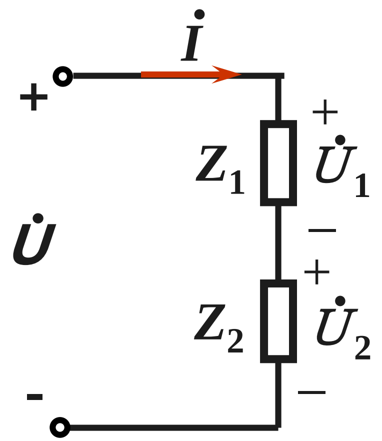
KVL：

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

$$\dot{U} = Z_1 \dot{I} + Z_2 \dot{I}$$

$$= (Z_1 + Z_2) \dot{I}$$

$$= Z \dot{I}$$



$$Z = Z_1 + Z_2$$

$$= (R_1 + R_2) + \mathrm{j}(X_1 + X_2)$$

$$Z = \sum Z_i = \sum R_i + \mathrm{j} \sum X_i$$

[例3.4.2] 有一个 R、C 串联的负载，$R = 6\ \Omega$，$C = 159\ \mu F$。由工频的交流电源通过一段导线向它供电，测得电流为 1.76 A。已知输电线的电阻 $R_W = 0.5\ \Omega$，电感$L_W = 2\ mH$。试求输电线上的电压降、负载的电压、电源的电压，并画出相量图。

[解] $\dot{I} = 1.76\angle 0^\circ\ A$

$$X_{LW} = 2\pi f L_W = 0.628\ \Omega$$

$$Z_W = R_W + j X_{LW} = (0.5 + j0.628)\ \Omega = 0.8\angle 51.5^\circ\ \Omega$$

$$\dot{U}_W = Z_W \dot{I} = 1.4\angle 51.5^\circ\ V$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = 20\ \Omega$$

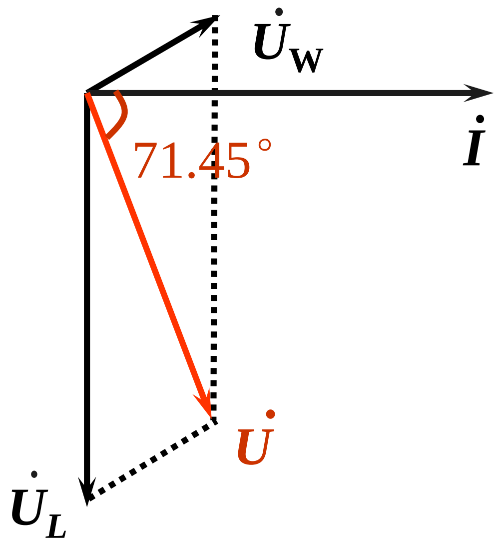
$$Z_L = R - j X_C = (6 - j20)\ \Omega = 20.88\angle -73.3^\circ\ \Omega$$

$$\dot{U}_L = Z_L \dot{I} = 36.75\angle -73.3^\circ\ V$$

$$Z = Z_W + Z_L = (0.5 + j0.628 + 6 - j20)\ \Omega$$

$$= 20.43\underline{/-71.45^\circ}\ \Omega$$

$$\dot{U} = Z\dot{I} = 36\underline{/-71.45^\circ}\ \mathrm{V}$$



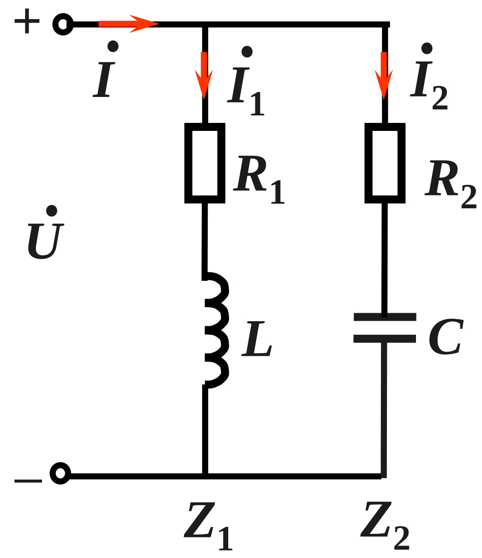
3.5 并联交流电路

KCL: $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z_1} + \frac{\dot{U}}{Z_2}$$

$$\dot{I} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)\dot{U} = \frac{\dot{U}}{Z}$$

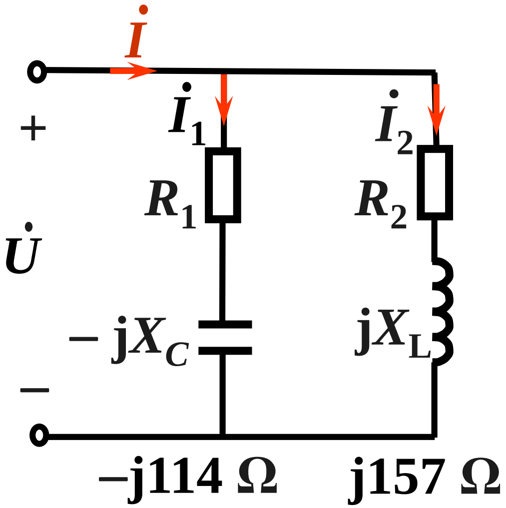
$$Z = Z_1 // Z_2$$



其中：$Z_1 = R_1 + \mathrm{j}\,X_L$

$$Z_2 = R_2 - \mathrm{j}\,X_C$$

[例 3.5.1] 已知交流电路 $U = 220$ V，$R_1 = 20\ \Omega$，$R_2 = 40\ \Omega$，$X_L = 157\ \Omega$，$X_C = 114\ \Omega$，试求电路的总电流。



[解] 方法 1: $\dot{U} = 220\angle 0^\circ$ V

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{220\angle 0^\circ}{20 - j114}\ \text{A} = 1.90\angle 80^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{220\angle 0^\circ}{40 + j157}\ \text{A} = 1.36\angle -75.7^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (1.9\angle 80^\circ + 1.36\angle -75.7^\circ)\ \text{A} = 0.86\angle 39.60^\circ\ \text{A}$$

方法 2:

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(20 - j114)(40 + j157)}{20 - j114 + 40 + j157}\ \Omega$$

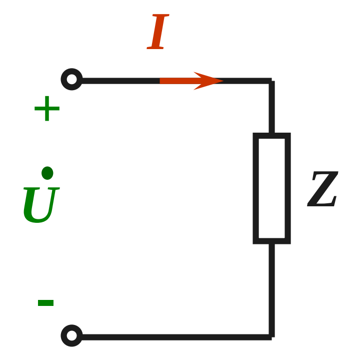
$$= \frac{116\angle -80^\circ \times 162\angle 75.7^\circ}{60 + j43}\ \Omega$$

$$= 255\angle -39.6^\circ\ \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220\angle 0^\circ}{255\angle -39.6^\circ}\ \text{A} = 0.86\angle 39.6^\circ\ \text{A}$$

3.6 交流电路的功率

一、瞬时功率



$$i = I_m \sin\omega t$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$p = u\,i = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi)\sin\omega t$$

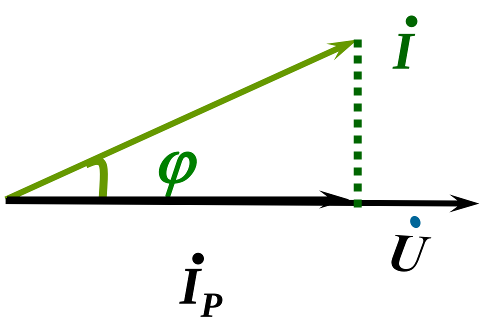
$$= U I \cos\varphi + U I \cos(2\omega t + \varphi)$$

二、有功功率

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t \quad = U I \cos\varphi$$

$$I_P = I\cos\varphi$$

称为电流的有功分量

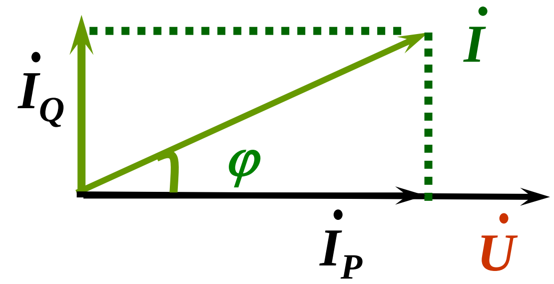


三、无功功率

$$Q = U\,I\sin\varphi$$

$$I_Q = U\,I\sin\varphi$$

I_Q —— I 的无功分量

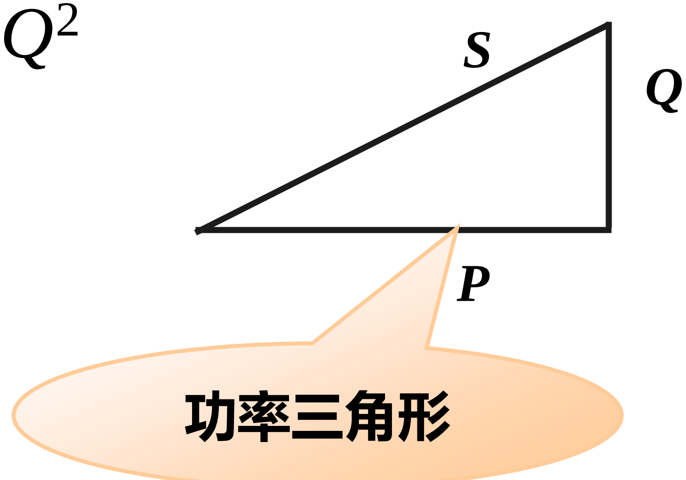


四、视在功率

$$S = U\,I\ (\mathrm{V{\cdot}A}) = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$P = S\cos\varphi$$

$$Q = S\sin\varphi = P\tan\varphi$$



▲额定视在功率

$$S_N = U_N I_N$$ —— 额定容量

▲有功功率守恒:

$$P = \sum P_i = \sum U_i I_i \cos\varphi_i$$

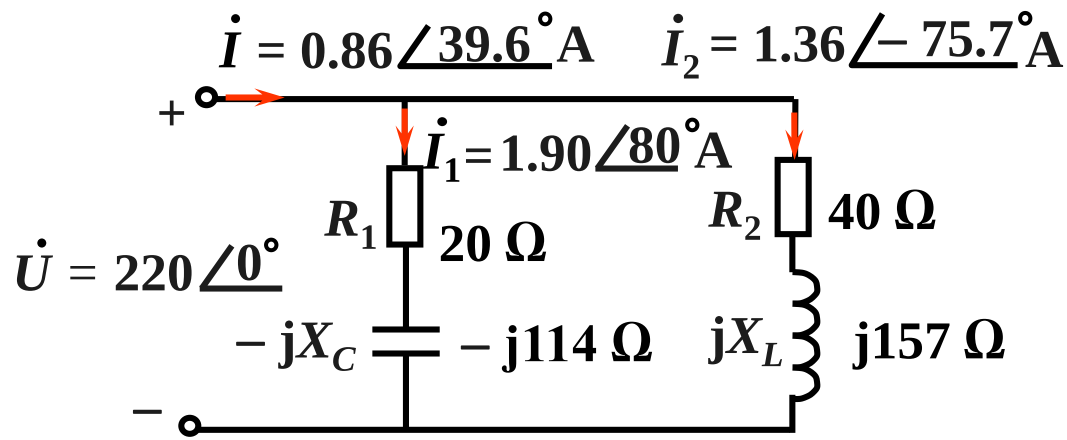
▲无功功率守恒:

$$Q = \sum Q_i = \sum U_i I_i \sin\varphi_i$$

▲视在功率不守恒:

$$S \neq \sum S_i = \sum U_i I_i$$

[例 3.6.1] 求电路的总有功功率、无功功率和视在功率。已知数据注明在图上。



[解] 方法 1 由总电压总电流求总功率

$$P = U I \cos\varphi = 220\times 0.86\times \cos(0^\circ - 39.6^\circ)\ \mathrm{W} = 146\ \mathrm{W}$$

$$Q = U I \sin\varphi = 220\times 0.86\times \sin(0^\circ - 39.6^\circ)\ \mathrm{var} = -121\ \mathrm{var}$$

$$S = U I = 220\times 0.86\ \mathrm{V\cdot A} = 190\ \mathrm{V\cdot A}$$

方法 2 由支路功率求总功率

$$P = P_1 + P_2 = U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2$$

$$= \{220 \times 1.9 \times \cos(0^\circ - 80^\circ) + 220 \times 1.36 \times \cos[0^\circ - (-75.7^\circ)]\}\ \mathrm{W}$$

$$= (72 + 74)\ \mathrm{W}$$

$$= 146\ \mathrm{W}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = P_1 \tan\varphi_1 + P_2 \tan\varphi_2$$

$$= (-411 + 290)\ \mathrm{var}$$

$$= -121\ \mathrm{var}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 190\ \mathrm{V \cdot A}$$

解法 3 由元件功率求总功率

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = (20\times1.9^2 + 40\times1.36^2)\ \mathrm{W} = 146\ \mathrm{W}$$

$$Q = -X_C I_1^2 + X_L I_2^2 = (-114\times1.9^2 + 157\times1.36^2)\ \mathrm{var}$$

$$= -121\ \mathrm{var}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 190\ \mathrm{V\cdot A}$$

3.7 电路的功率因数

一、什么是功率因数

有功功率与视在功率的比值

$$\frac{P}{S} = \cos\varphi$$

功率因数

功率因数角

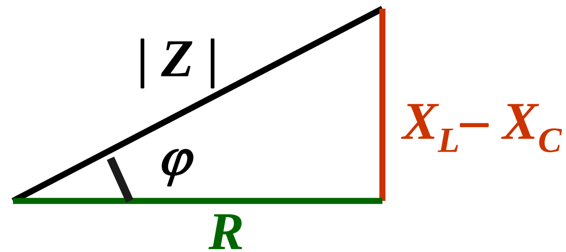
- 纯电阻电路的功率因数为多少?
- 纯电感电路的功率因数为多少?
- 纯电容电路的功率因数为多少?

二、常用电路的功率因数

纯电阻电路	$\cos\varphi = 1$
纯电感电路	$\cos\varphi = 0$
纯电容电路	$\cos\varphi = 0$
RLC串联电路	$0 < \cos\varphi < 1$
电动机 空载	$\cos\varphi = 0.2 \sim 0.3$
满载	$\cos\varphi = 0.7 \sim 0.9$
日光灯	$\cos\varphi = 0.5 \sim 0.6$

三、功率因数和电路参数的关系

$$\varphi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$



四、功率因数低的害处

1. 降低了供电设备的利用率

$P = S_N \cos\varphi$ S_N ——供电设备的容量

例如： $S_N = 1\ 000\ \text{kV·A}$，

$\cos\varphi = 0.5$ 时，输出 $P = ?$

$\cos\varphi = 0.9$ 时，输出 $P = ?$

2. 增加了供电设备和输电线路的功率损失

$$I = P / (U \cos\varphi)$$

当 P 一定时，$\cos\varphi\downarrow \rightarrow I\uparrow \rightarrow$功率损失↑

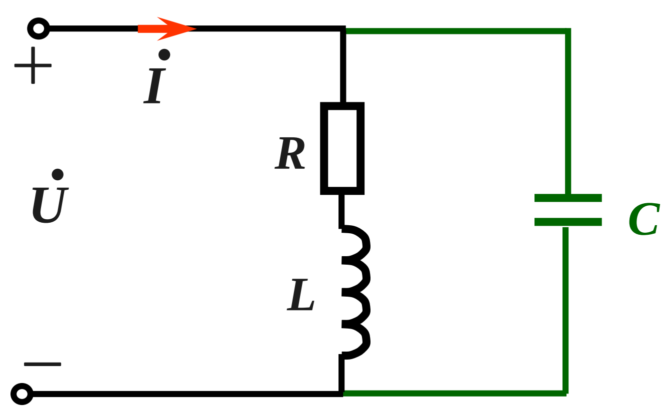
而且 线路电压降落↑

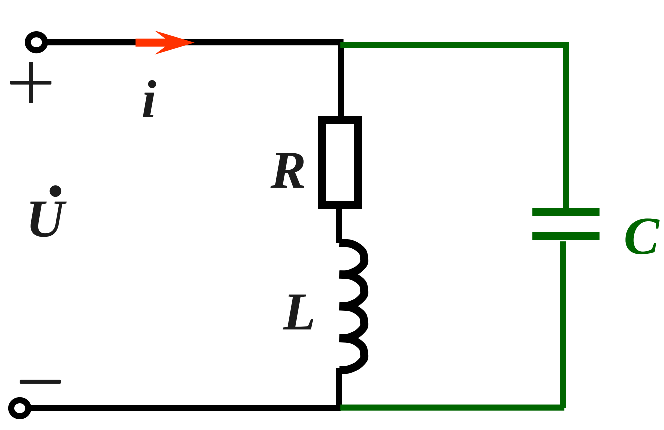
五、造成功率因数低的原因

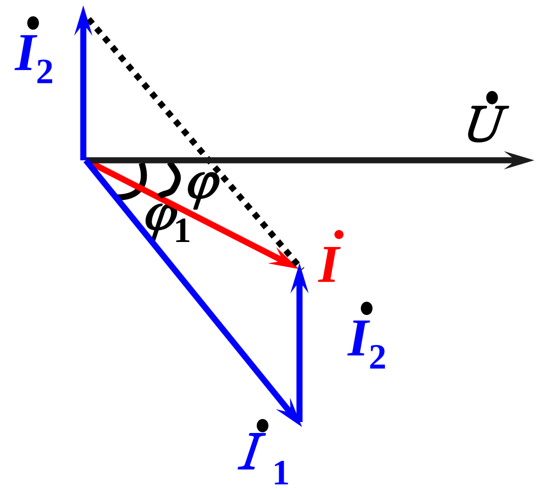
(1) 大马拉小车。
(2) 电感性负载比较多，无功功率多。

六、提高功率因数的办法

并联补偿电容。







$$I_2 = I_1 \sin\varphi_1 - I \sin\varphi \qquad I_2 = \omega C U$$

$$I_1 = \frac{P}{U\cos\varphi_1} \qquad \omega C U = \frac{P}{U}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi)$$

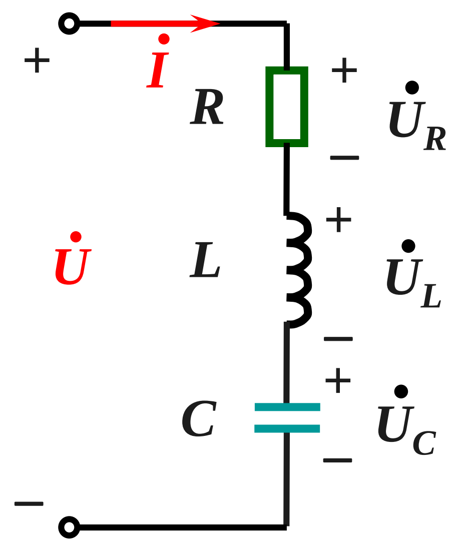
$$I = \frac{P}{U\cos\varphi} \qquad C = \frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi)$$

*3.8 电路中的谐振

- 什么叫谐振?
  在既有电容又有电感的电路中，当电源的频率和电路的参数符合一定的条件时，电路总电压与总电流的相位相同，整个电路呈电阻性。
- 谐振时要注意一些什么?
  某些物理量会达到极大值。
- 谐振有几种?
  串联谐振、并联谐振

一、串联谐振

1. 谐振的条件及谐振频率



$$Z = R + \mathrm{j}(X_L - X_C) = R + \mathrm{j}X$$

当 $X = 0$ 时:

$$Z = R$$

$$\varphi = 0$$

—— u与 i 同相位

谐振的条件:

$$X_L = X_C \rightarrow \omega_\mathrm{n} L = \frac{1}{\omega_\mathrm{n} C}$$

谐振频率:

$$\omega_\mathrm{n} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad f_\mathrm{n} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

2.串联谐振的特点

(1) $Q = 0 \quad \rightarrow Q_L = -Q_C \neq 0$

$\lambda = \cos\varphi = 1$

(2) L 和 C 串联部分相当于短路

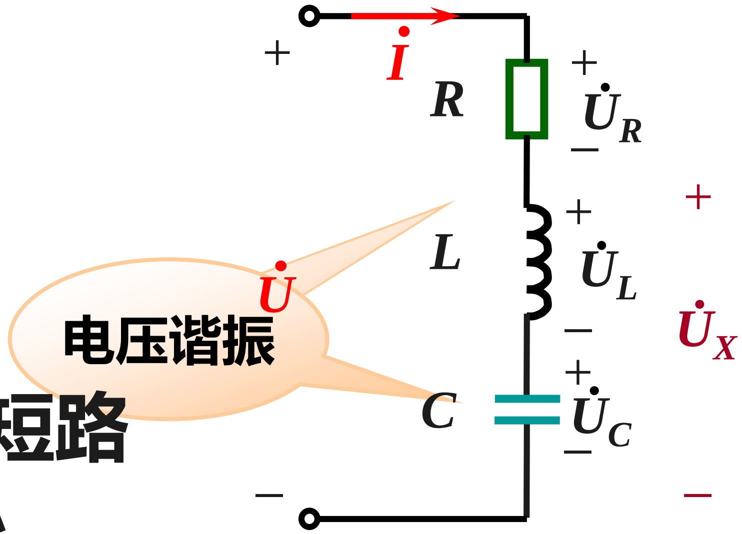
$Z = R = |Z|$, 最小

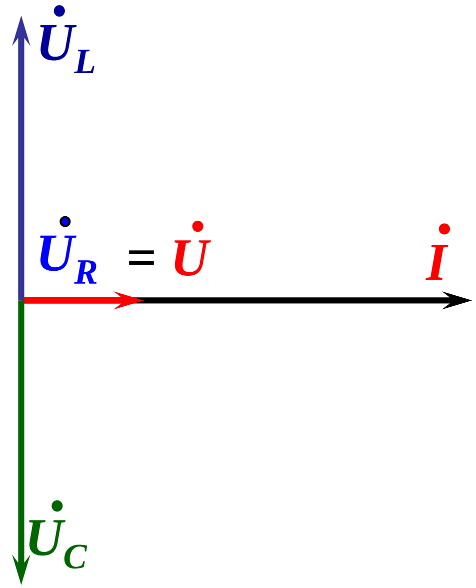
——电路呈现纯电阻特性

(3) $U_L = U_C \rightarrow$ 电压谐振

(4) 品质因数

$$Q_f = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{X_L I^2}{RI^2}$$





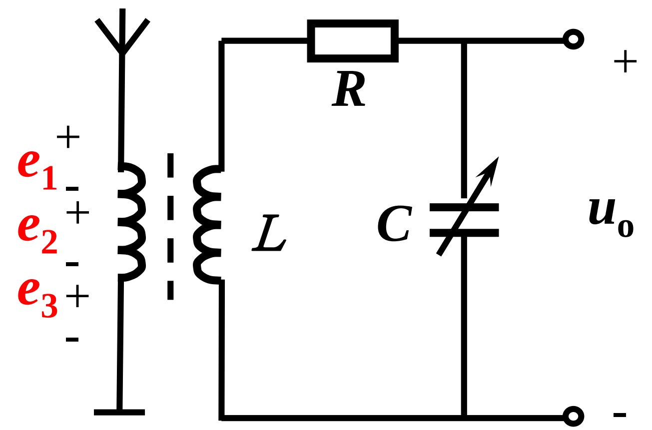
[例 3.8.1] 下图为收音机的接收电路，各地电台所发射的无线电电波在天线线圈中分别产生各自频率的微弱的感应电动势 e_1、e_2、e_3、…调节可变电容器，使某一频率的信号发生串联谐振，从而使该频率的电台信号在输出端产生较大的才输出电压，以起到选择收听该电台广播的目的。今已知L = 0.25 mH，C 在 40 ~ 350 pF 之间可调。求收音机可收听的频率范围。

[解] 当C = 40 pF时

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{0.25\times10^{-3}\times40\times10^{-12}}}\ \text{Hz}$$

$$= 1\ 592\ \text{kHz}$$



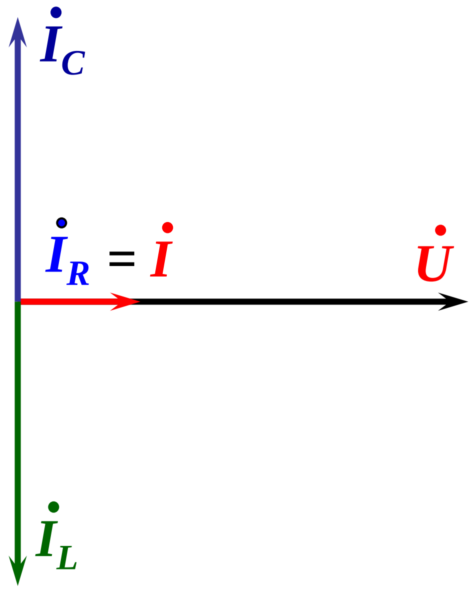
当 C = 350 pF 时:

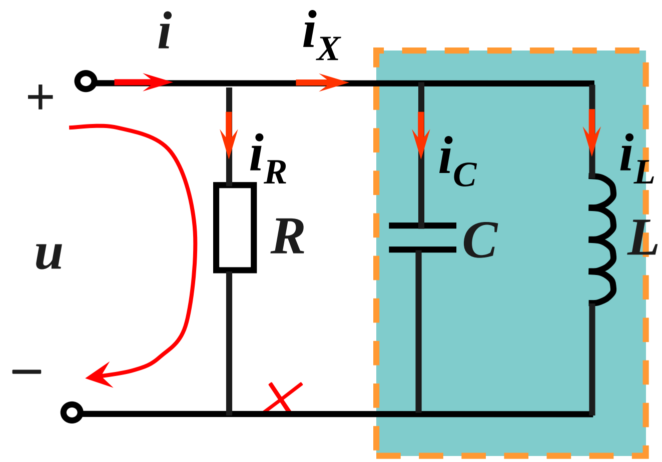
$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{0.25\times10^{-3}\times350\times10^{-12}}}\ \text{Hz}$$

$$=538\ \text{kHz}$$

所以可收听的频率范围是 538 ~ 1 592 kHz。

二、并联谐振





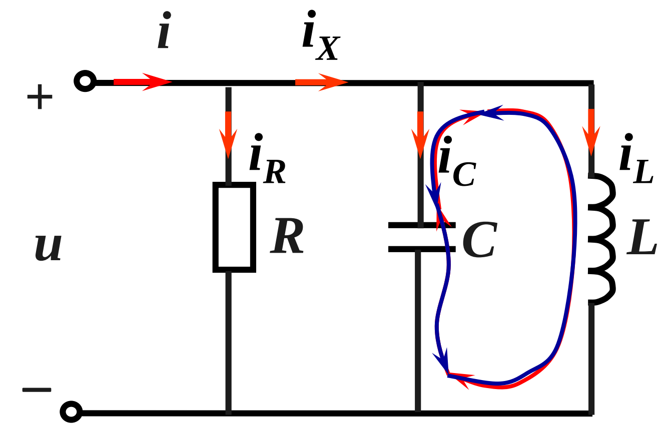
1.谐振条件

$$i_X = 0 \rightarrow i = i_R \rightarrow X_L = X_C \rightarrow \omega_n L = \frac{1}{\omega_n C}$$

2.谐振频率

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad f_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

3. 并联谐振特点



(1) $Q = 0 \longrightarrow Q_L = -Q_C \neq 0$

$\lambda = \cos\varphi = 1$

(2) L 和 C 并联部分相当开路

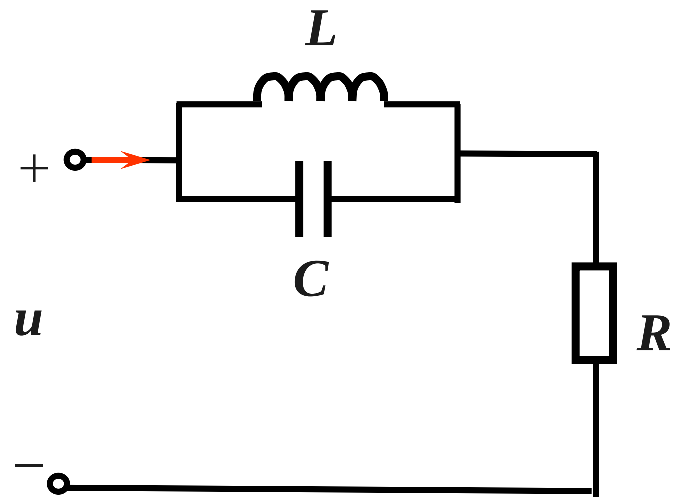
$Z = R = |Z|$，最大

——电路呈现**纯电阻**特性

(3) $I_L = I_C \longrightarrow$ 电流谐振

(4) 品质因数：$Q_f = \dfrac{I_L}{I} = \dfrac{I_C}{I}$

[例 3.8.2]　下图所示电路中，外加电压含有 800 Hz 和 2 000 Hz两种频率的信号，现要滤掉 2 000 Hz 的信号，使电阻R上只有800 Hz的信号，若 L = 12 mH，C 值应是多少?



[解]

只要使 2 000 Hz 的信号在LC并联电路中产生并联谐振，$Z_{LC} \to \infty$，该信号无法通过，R 上只有800 Hz的信号。

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f_n^2 L} = \frac{1}{4\times 3.14^2 \times 2000^2 \times 12 \times 10^{-3}}\ \mathrm{F}$$

$$= 0.53\ \mu\mathrm{F}$$

3.9 非正弦周期信号电路

- 非正弦周期信号的分解方法?
  直流分量、交流分量
  交流分量—— 谐波
  谐波：一次谐波、二次谐波、三次谐波、…
  高次谐波：三次谐波及三次以上的谐波。
- 非正弦周期信号有效值的计算方法?
- 非正弦周期信号电路的分析方法?

一、谐波分析的概念

谐波分析: 对非正弦周期信号可以用傅里叶级数将它们分解成许多不同频率的正弦分量的方法。

$$u = U_0 + U_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) + U_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) + \ldots$$

$$= U_0 + U_{nm}\sin(n\omega t + \psi_n)$$

基波

一次谐波

二次谐波

非正弦周期信号的有效值即方均根:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \cdots}$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \cdots}$$

二、非正弦周期信号电路

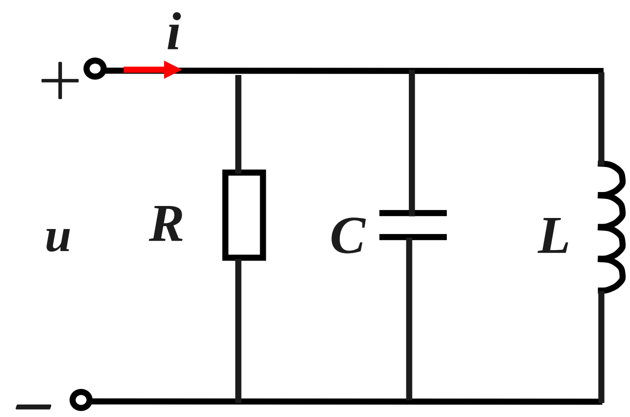
- 当作用于电路的电源为非正弦周期信号电源，或者电路中含有直流电源和若干个不同频率的正弦交流电源的线性电路可以采用**叠加定理。**

- 在计算过程中，对于直流分量，可用直流电路的计算方法，要注意电容相当开路，电感相当短路。对于各次谐波分量，可用交流电路的方法，要注意感抗和容抗与频率的比例关系。

- **电路的总有功功率：**

$$P_0 = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + \cdots$$

[例 3.9.1] R、L、C并联电路，已知 $i = 1 + 1\sin(\omega t - 30^\circ) + 1\sin(2\omega t + 30^\circ)$ A，$\omega = 1\,000$ rad/s，$R = 10\ \Omega$，$C = 10\ \mu$F，$L = 10$ mH。求电路两端的电压 u 和它的有效值。



[解] (1) 直流分量单独作用时，由于 L 相当于短路，故

$$U_0 = 0$$

(2) 基波分量单独作用时

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{1\,000 \times 10 \times 10^{-6}}\ \Omega = 100\ \Omega$$

$$X_{L1} = \omega_1 L = 1\,000 \times 10 \times 10^{-3}\ \Omega = 10\ \Omega$$

$$Z_1 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{-\mathrm{j}X_{C1}} + \frac{1}{\mathrm{j}X_{L1}}} = \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{-\mathrm{j}100} + \frac{1}{\mathrm{j}10}}\ \Omega$$

$$= 7.43\angle 42^\circ\ \Omega$$

$$\dot{U}_{1m} = Z_1 \dot{I}_{1m} = 7.43\angle 42^\circ \times 1\angle -30^\circ\ \text{V} = 7.43\angle 12^\circ\ \text{V}$$

$$u_1 = 7.43\sin(1\,000\,t + 12^\circ)\ \text{V}$$

(3) 二次谐波单独作用时

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega_2 C} = \frac{1}{2\,000\times 10\times 10^{-6}}\ \Omega = 50\ \Omega$$

$$X_{L2} = \omega_2 L = 2\,000\times 10\times 10^{-3}\ \Omega = 20\ \Omega$$

$$Z_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{-\mathrm{j}X_{C2}}+\dfrac{1}{\mathrm{j}X_{L2}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{-\mathrm{j}50}+\dfrac{1}{\mathrm{j}20}}\ \Omega$$

$$= 9.58\angle 16.7^\circ\ \Omega$$

$$\dot{U}_{2m} = Z_2 \dot{I}_{2m} = 9.58\angle 16.7^\circ \times 1\angle 30^\circ\ \text{V} = 9.58\angle 46.7^\circ\ \text{V}$$

$$u_2 = 9.58\sin(2\,000\,t + 46.7^\circ)\text{V}$$

(4) 最后求得

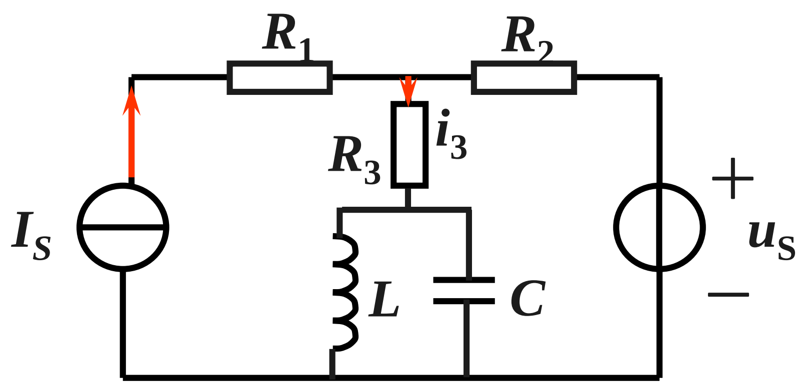
$$u = U_0 + u_1 + u_2$$

$$= [\,0 + 7.43 \sin(1\,000\,t + 12^{\circ}) + 9.58 \sin(2\,000\,t + 46.7^{\circ})\,]\ \mathrm{V}$$

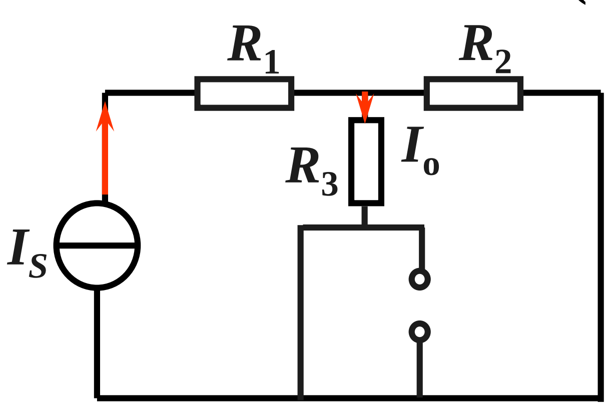
$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2} = 8.57\ \mathrm{V}$$

[例3.9.2] 已知直流理想电流源的 $I_S = 10$ A，交流理想电压源的 $u_S = 10\sqrt{2}\sin 1\,000\,t$ V， $L = 10$ mH， $C = 200\ \mu$F， $R_1 = R_2 = R_3 = 5\ \Omega$。求 R_3 的电流 i_3 及消耗的有功功率。

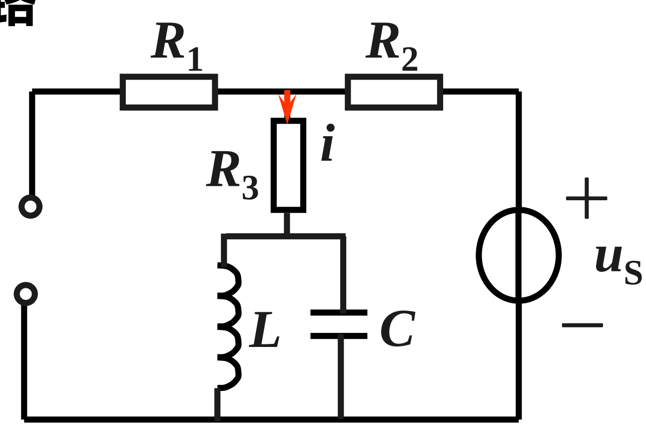
[解]



(a) 完整电路



(b) 直流通路



(c) 交流通路

(1) 直流电源单独作用时，L 相当于短路，C 相当于开路

故 $I_0 = 0.5\,I_S = 0.5\times 10\ \text{A} = 5\ \text{A}$

(2) 交流电源单独作用时，直流理想电流源应开路，则

$$X_L = \omega L = 1\,000\times 10\times 10^{-3} = 10\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1\,000\times 200\times 10^{-6}}\ \Omega = 5\ \Omega$$

$$Z = R_2 + R_3 + \frac{\mathrm{j}X_L\cdot(-\mathrm{j}X_C)}{\mathrm{j}X_L + (-\mathrm{j}X_C)} = 14.14\angle -45^\circ\ \Omega$$

通过 R_3 的交流分量

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z} = \frac{10\angle 0^\circ}{14.14\angle -45^\circ}\ \text{A} = 0.707\angle 45^\circ\ \text{A}$$

$$i = 1\sin(1\,000\,t + 45^\circ)\ \text{A}$$

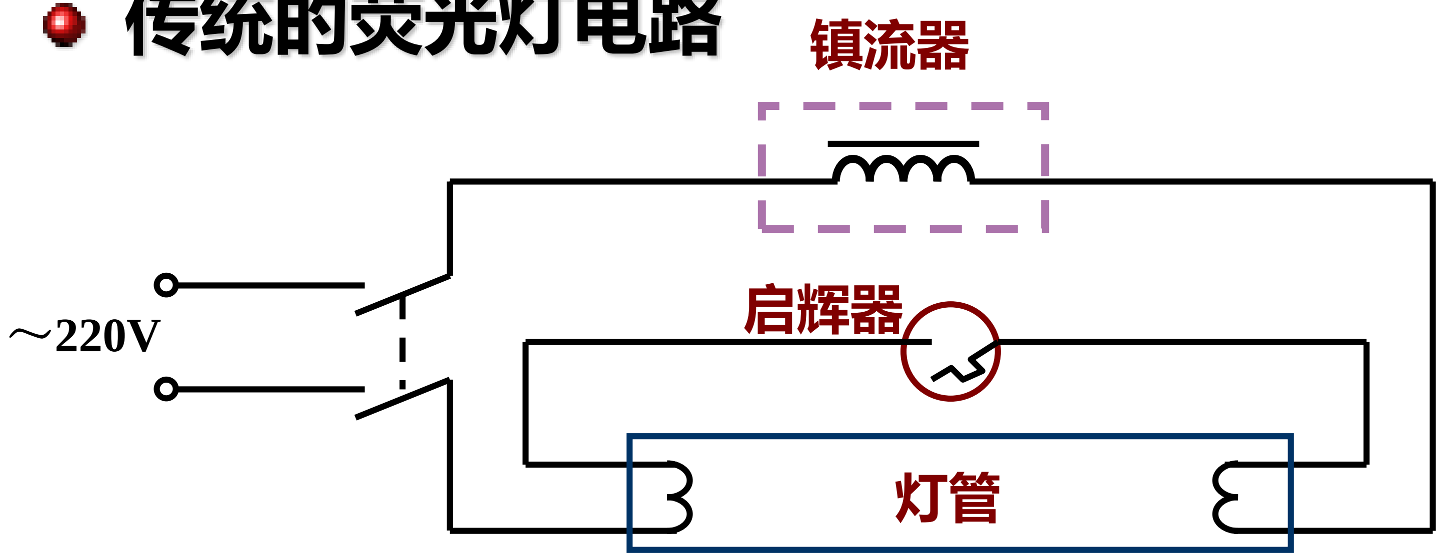
最后求得 $i_3 = I_0 + i = [5 + 1\sin(1\,000t + 45^\circ)]\ \text{A}$

$$P_3 = (I_0^2 + I^2)\,R_3 = (5^2 + 0.707^2)\times 5\ \text{W} = 127.5\ \text{W}$$

3.10 应用实例

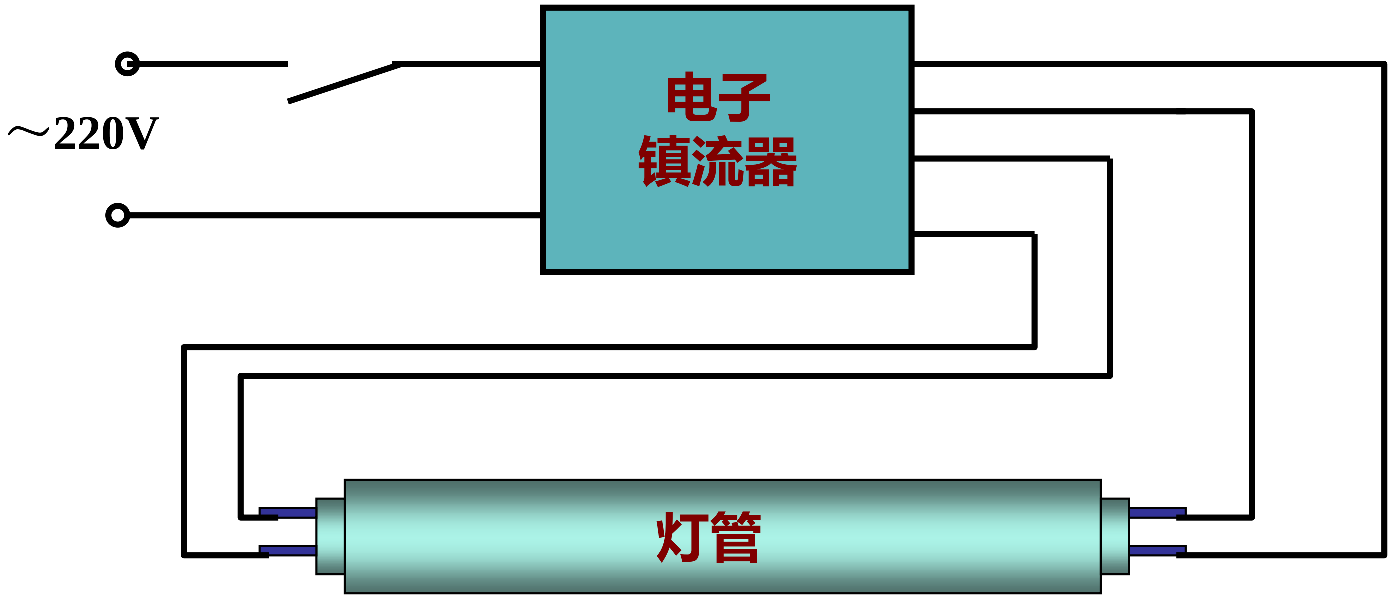
一、荧光灯电路

- 传统的荧光灯电路



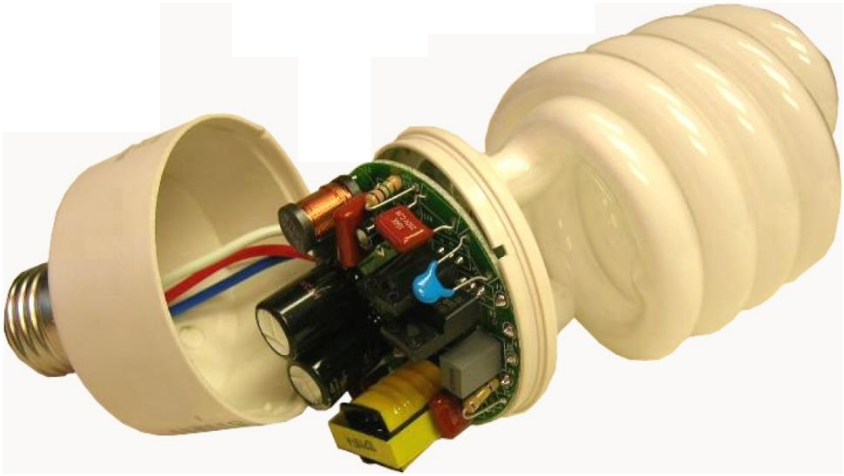
荧光灯电路的功率因数很低，为提高功率因数，通常在电路两端并联电容器。

采用电子镇流器的日光灯电路



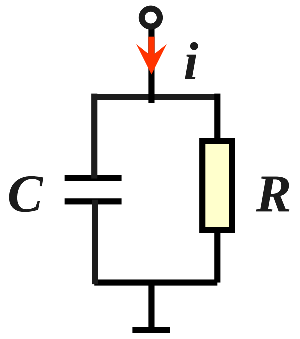
- 采用电子镇流器可以取消启辉器，将启辉和镇流作用都由电子镇流器完成。

➢将电子镇流器和灯管组装在一起，使用更为方便。



二、电阻电容分流器

- 当电容的容抗$X_C \ll R$时， i 中的直流分量只通过电阻R，交流分量只通过电容C，而且在RC并联电路两端只产生直流电压降。



- 这种电路在后面介绍的晶体管电路中经常用到，此时的电容器称为旁路电容器。

第 3 章

结　束

返回主页 上一章 下一章