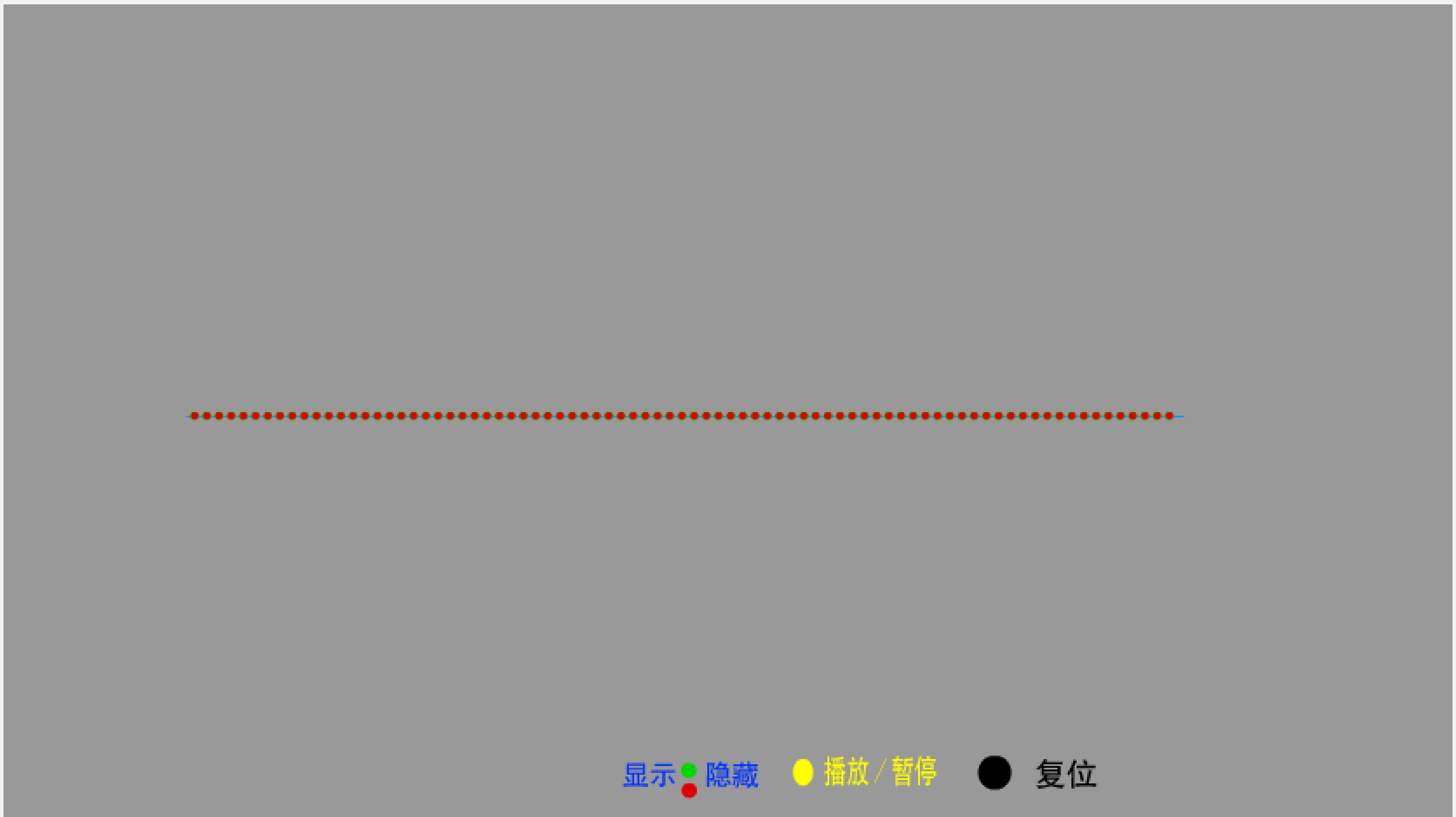
第七章

机械波

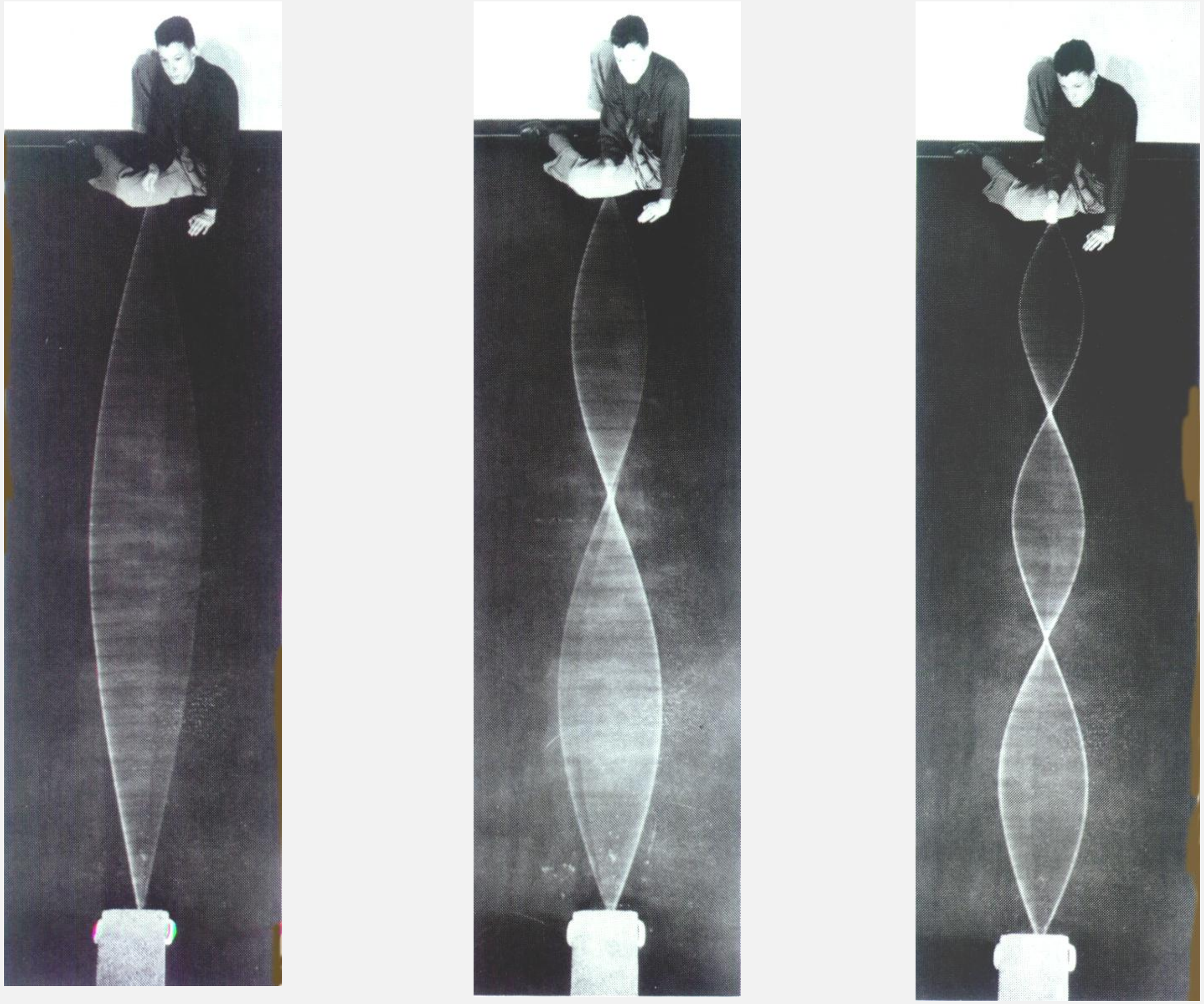
§7-6 驻波

驻波是两列振幅相同的相干波在同一条直线上沿相反方向传播时叠加而成的。

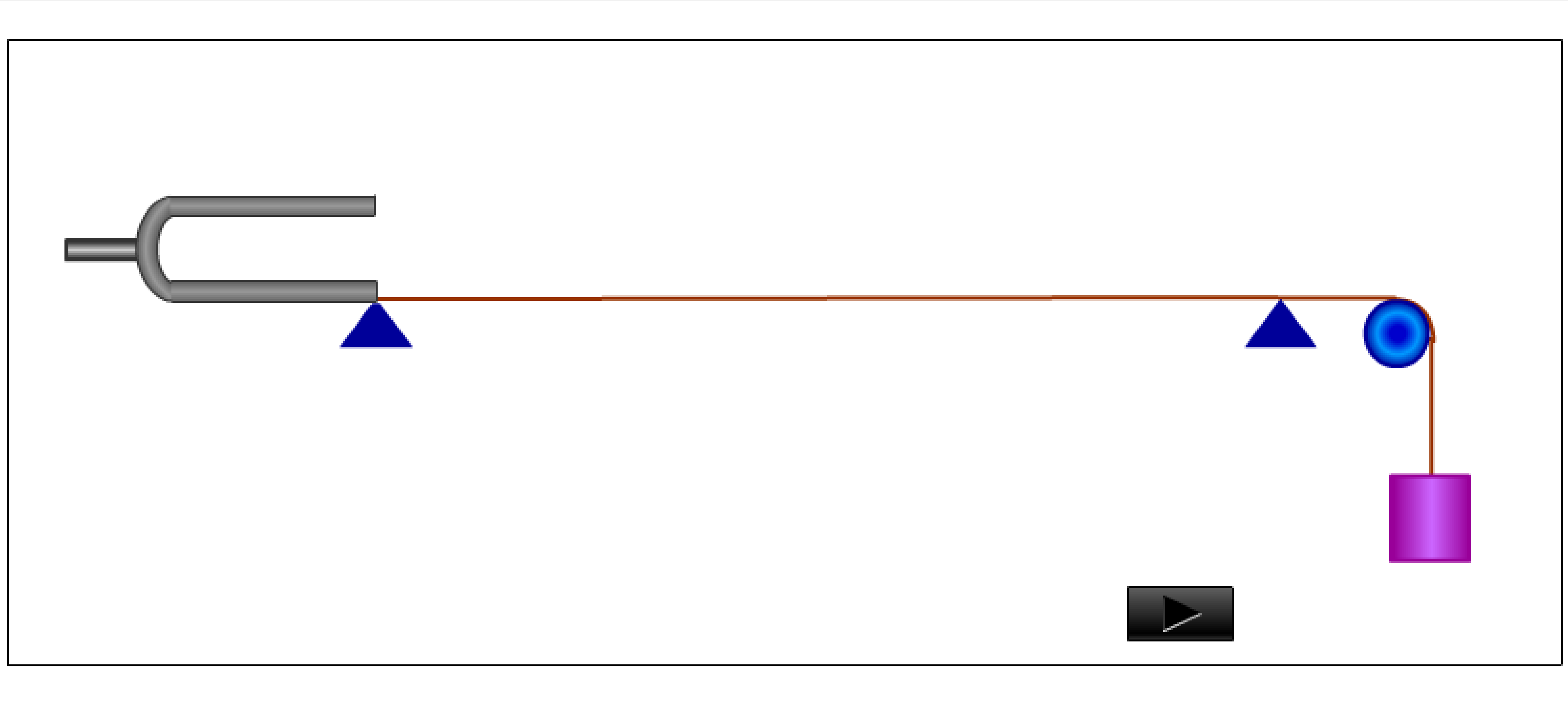
驻波的形成



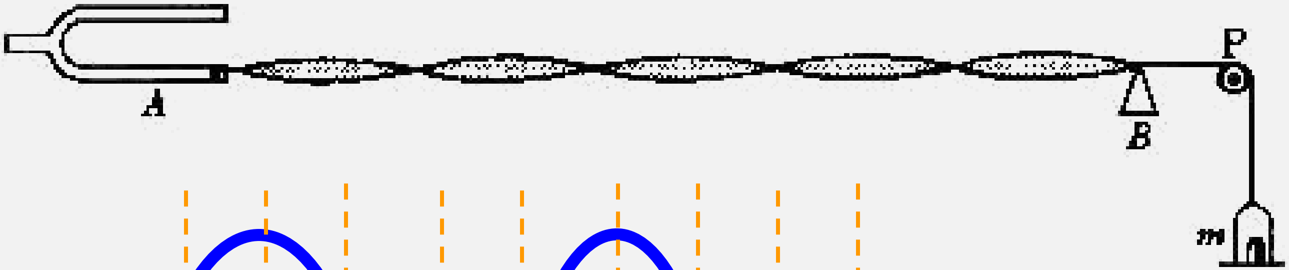
1. 弦线上的驻波实验

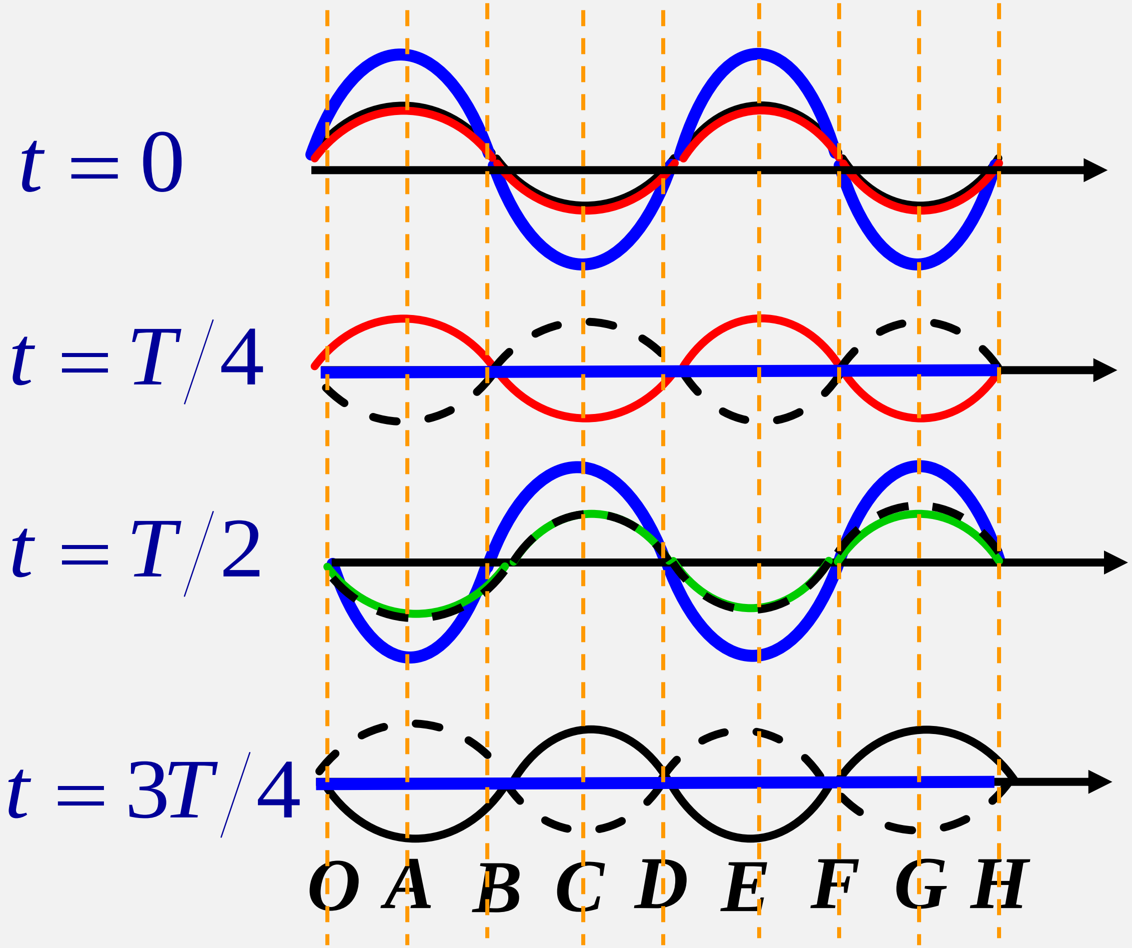


驻波现象：振幅、频率、传播速度都相同的两列相干波，在同一直线上沿相反方向传播时叠加而形成的一种特殊的干涉现象。



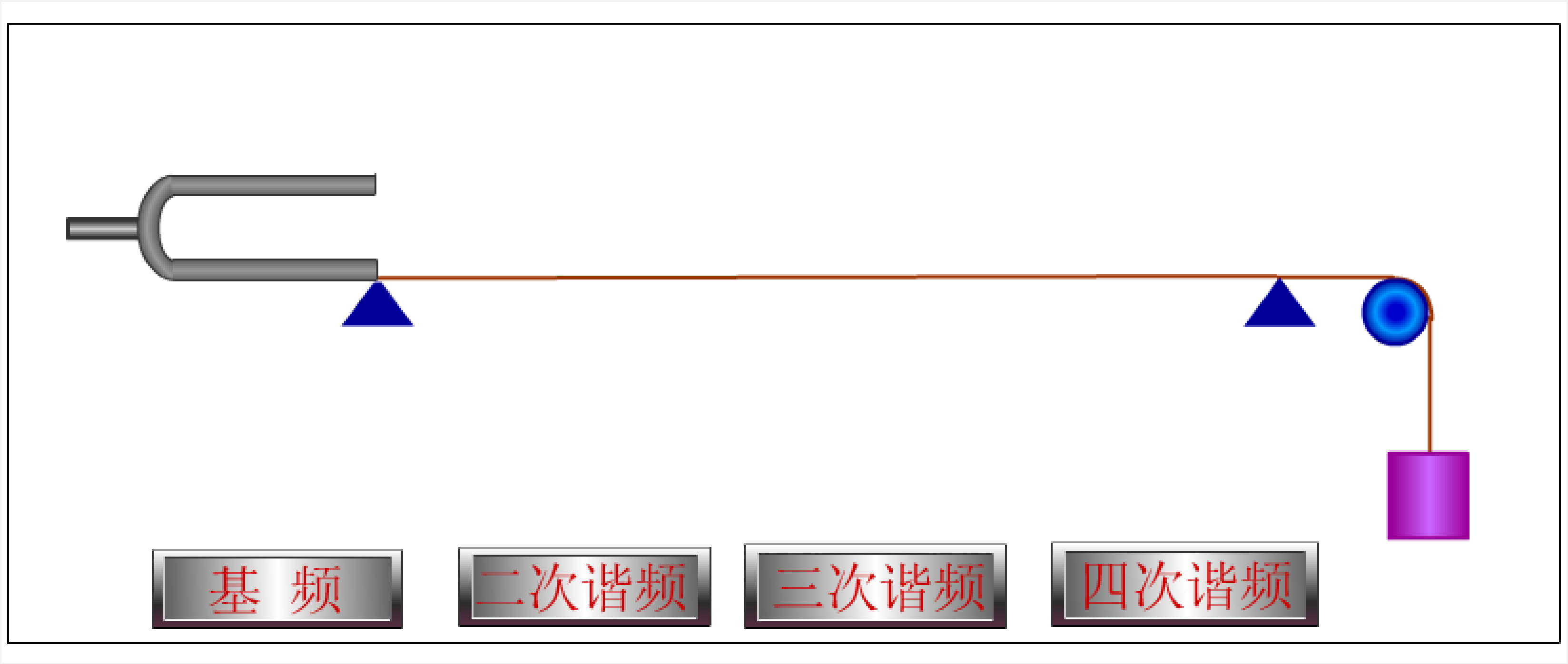
实验——弦线上的驻波：





波节*O B D F H*

波腹*A C E G*



用电动音叉在绳上产生驻波

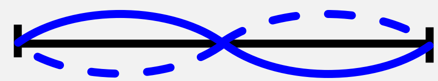
这一驻波是由音叉在绳中引起的向右传播的波和反射后向左传播的波合成的结果。改变拉紧绳子的张力，就能改变波在绳上的传播速度。

弦线长度等于半波长的整数倍时形成驻波。

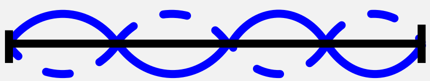
$$L = n\frac{\lambda_n}{2}, n = 1,2\cdots \text{ —— 驻波条件}$$

两端固定

$n=1$



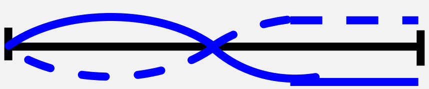
$n=2$



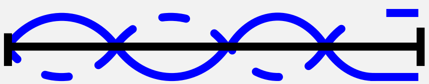
$n=4$

一端固定

$n=1$



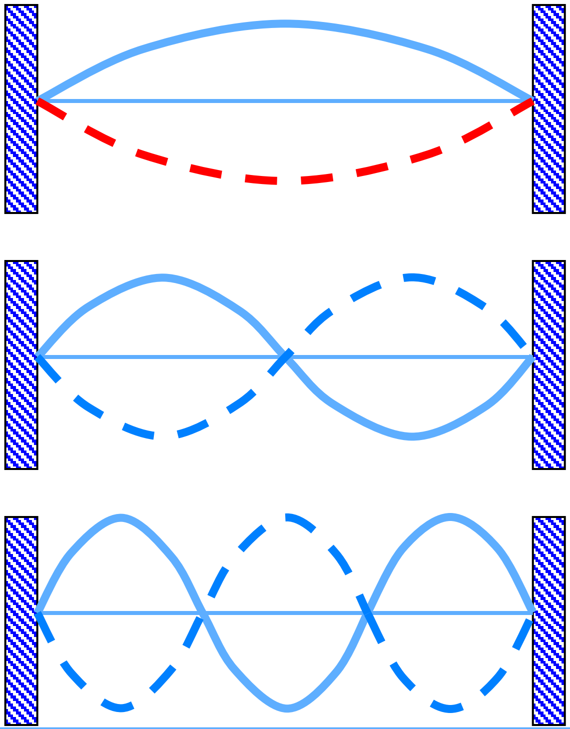
$n=2$



$n=4$

两端固定
的弦振动的简正模式

$$l = n\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1,2,\cdots$$



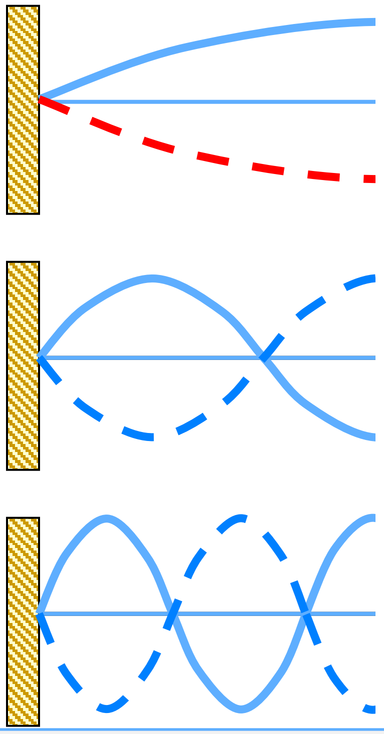
$$l = \frac{\lambda_1}{2}$$

$$l = \frac{2\lambda_2}{2}$$

$$l = \frac{3\lambda_3}{2}$$

一端固定一端自由的
弦振动的简正模式

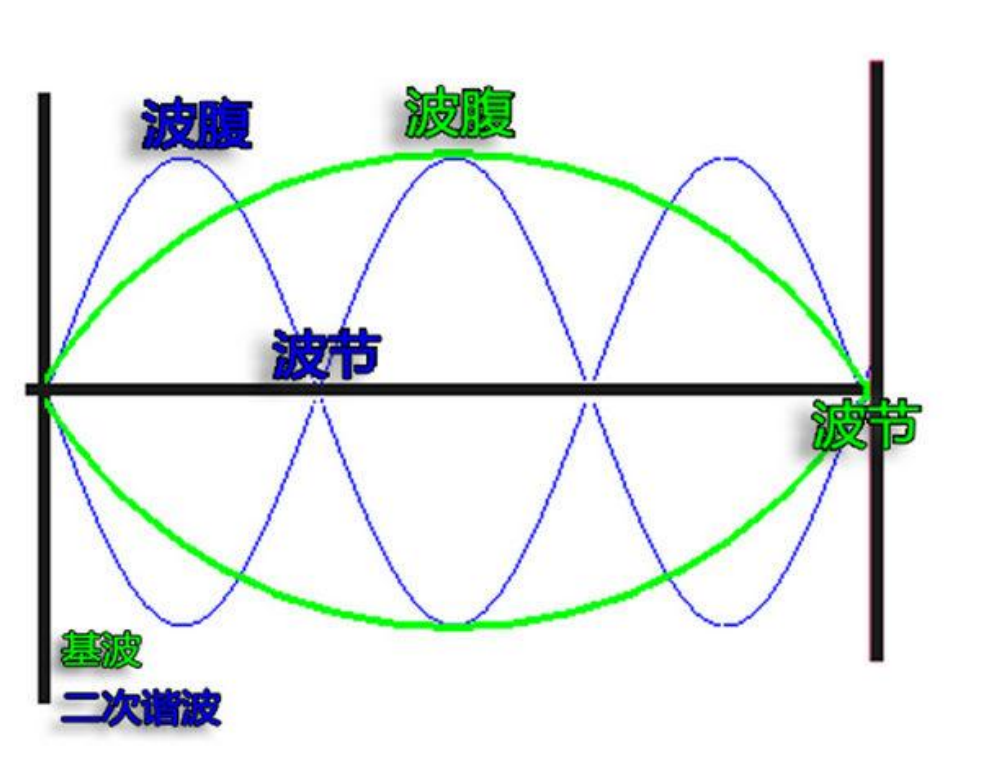
$$l = (n - \frac{1}{2})\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1,2,\cdots$$

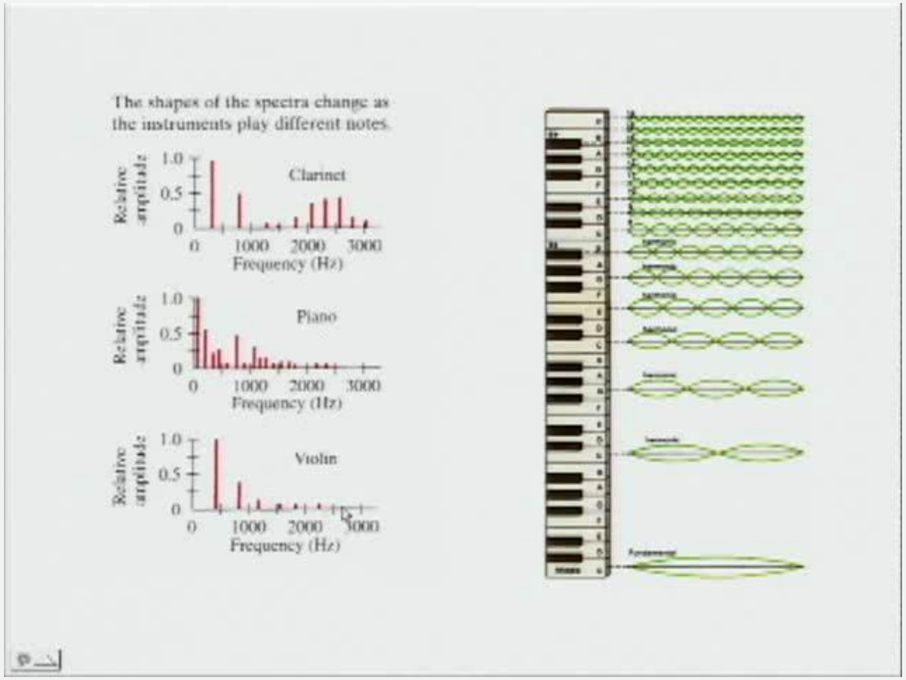


$$l = \frac{\lambda_1}{4}$$

$$l = \frac{3\lambda_2}{4}$$

$$l = \frac{5\lambda_3}{4}$$


波腹
波腹
波节
波节
基波
二次谐波


The shapes of the spectra change as the instruments play different notes.
Clarinet
Piano
Violin
Relative amplitude
Frequency (Hz)
0
1000
2000
3000
0.5
1.0

2. 驻波波函数

沿*x*轴的正、负方向传播的波

$$y_1 = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$$

合成波

$$y = y_1 + y_2 = A\left[\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

$$= \left(2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\frac{2\pi}{T}t$$

合成波的振幅 $\left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$ 与位置*x*有关。

合成波的振幅 $\left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$ 与位置x有关。

波腹位置 $\left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right| = 1$ ⇒ $\frac{2\pi}{\lambda}x = k\pi$

⇒ $x = k\frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.)$

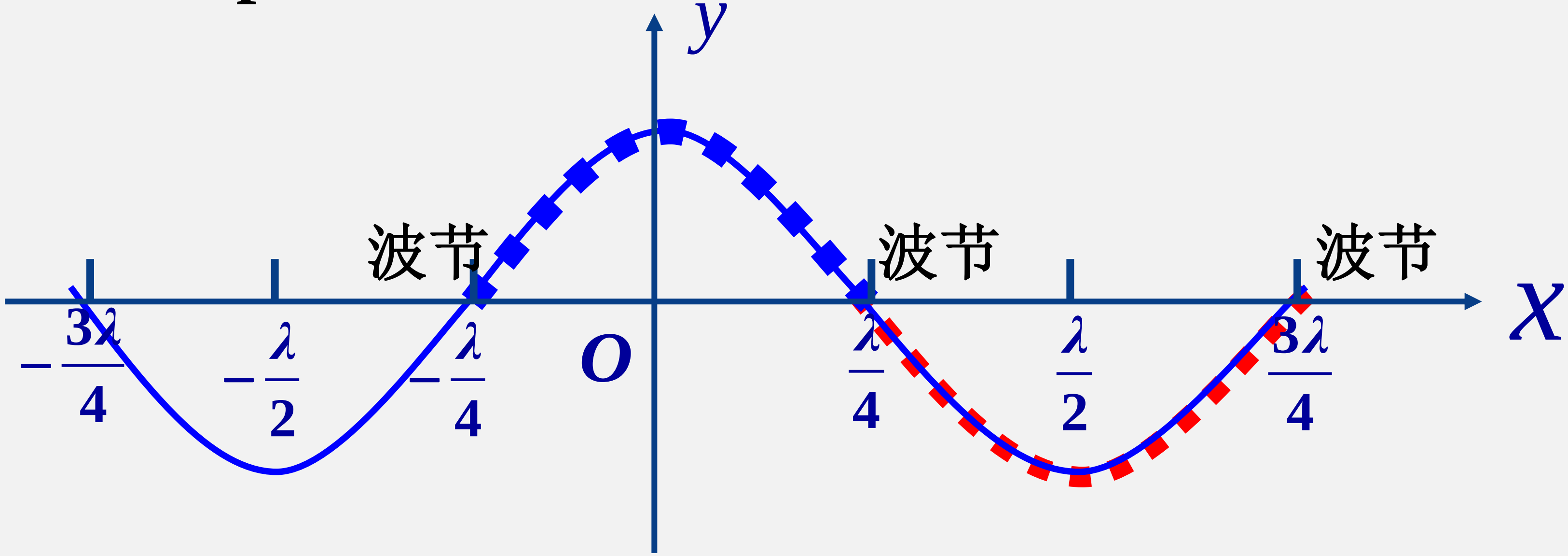
波节位置 $\left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right| = 0$ ⇒ $\frac{2\pi}{\lambda}x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

⇒ $x = (2k+1)\frac{\lambda}{4} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.)$

相邻两波腹(节)距离为λ/2。

相位分布

振幅项$2A\cos(2\pi x/\lambda)$可正可负，时间项$\cos(\omega t)$对波线上所有质点有相同的值，表明驻波上相邻波节间质点振动相位相同，波节两边的质点的振动有相位差p。

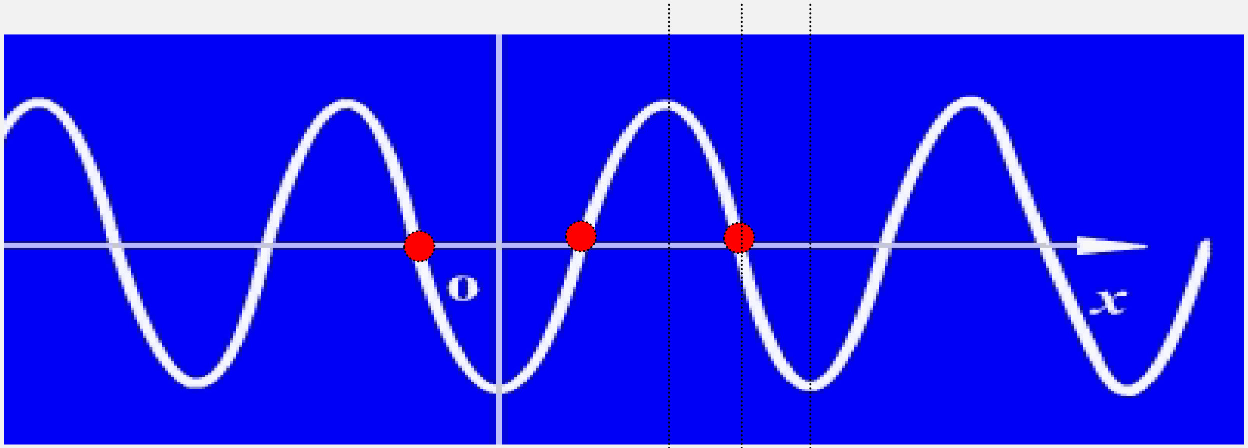


相位分布图

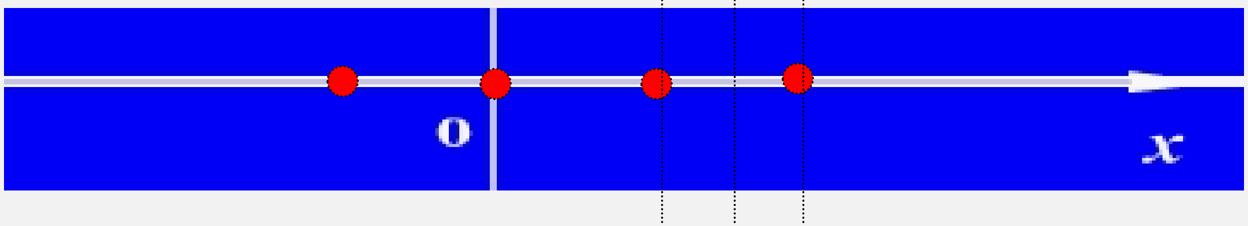
能量分布

在驻波形成后，各个质点分别在各自的平衡位置附近作简谐运动。能量(动能和势能)在波节和波腹之间来回传递，无能量的传播。

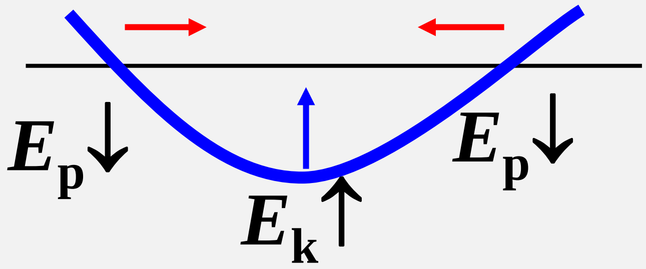
$t = 0$　时刻：
各点$E_k = 0$，
波节E_p最大



$t = T/4$时刻：
各点$E_p = 0$，
波腹E_k最大

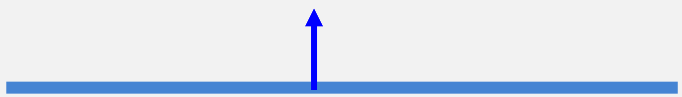


驻波能量流动特性



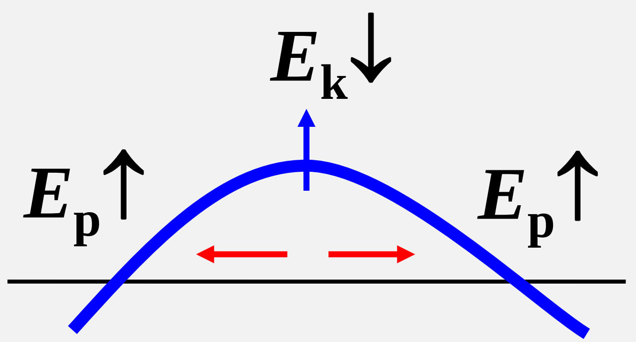
势能→动能

能量由波节向波腹流动



瞬时位移为0，势能为0，

动能最大。

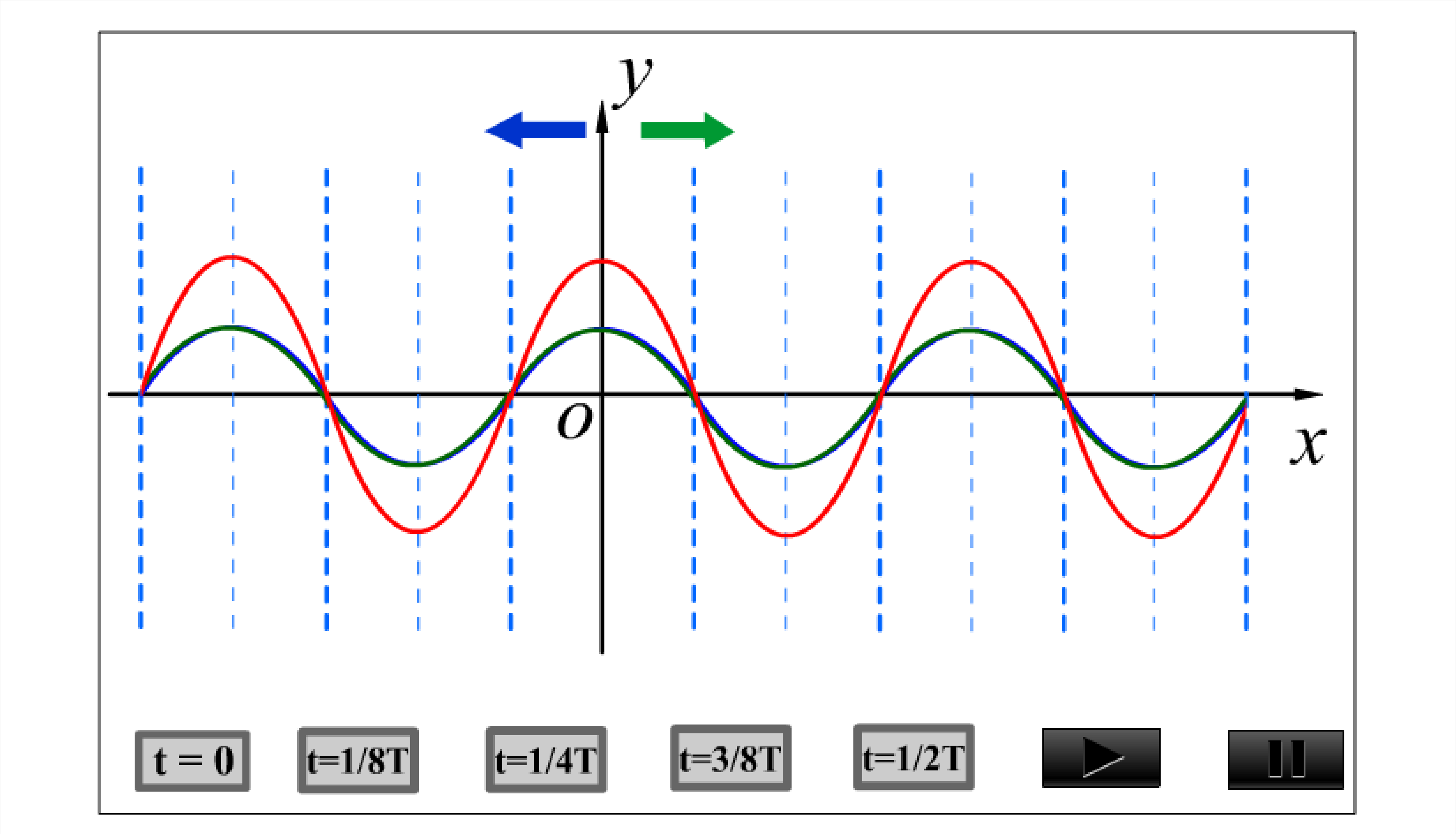


动能→势能

能量由波腹向波节流动

能量(动能和势能)在波节和波腹之间来回传递，但无能量的定向传播。

驻 波 的 形 成



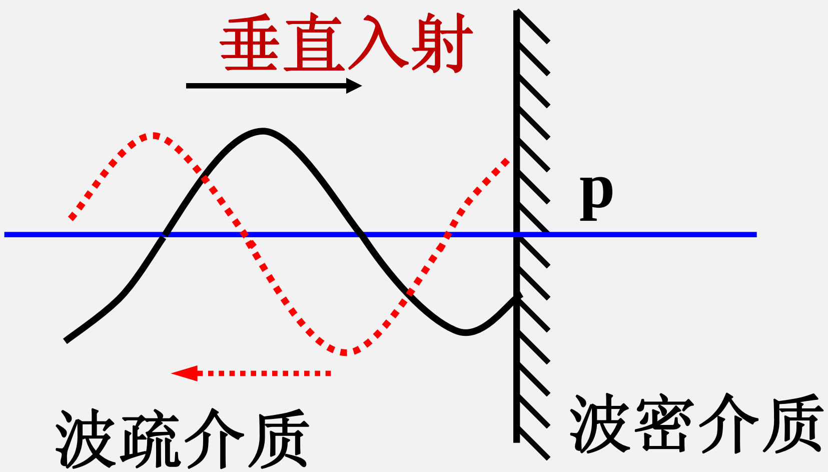
半波损失的引入

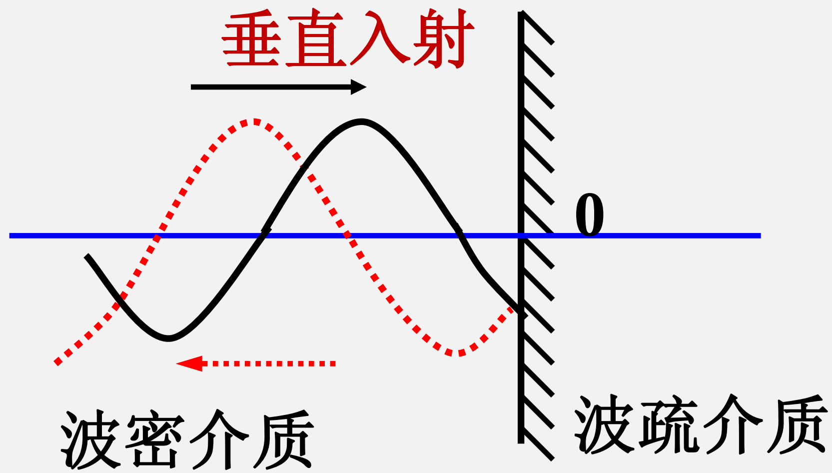
在反射点B处形成波节

原因：入射波和反射波在B点相位差为π
(半波 损失)，合振动减弱为0。

推广：

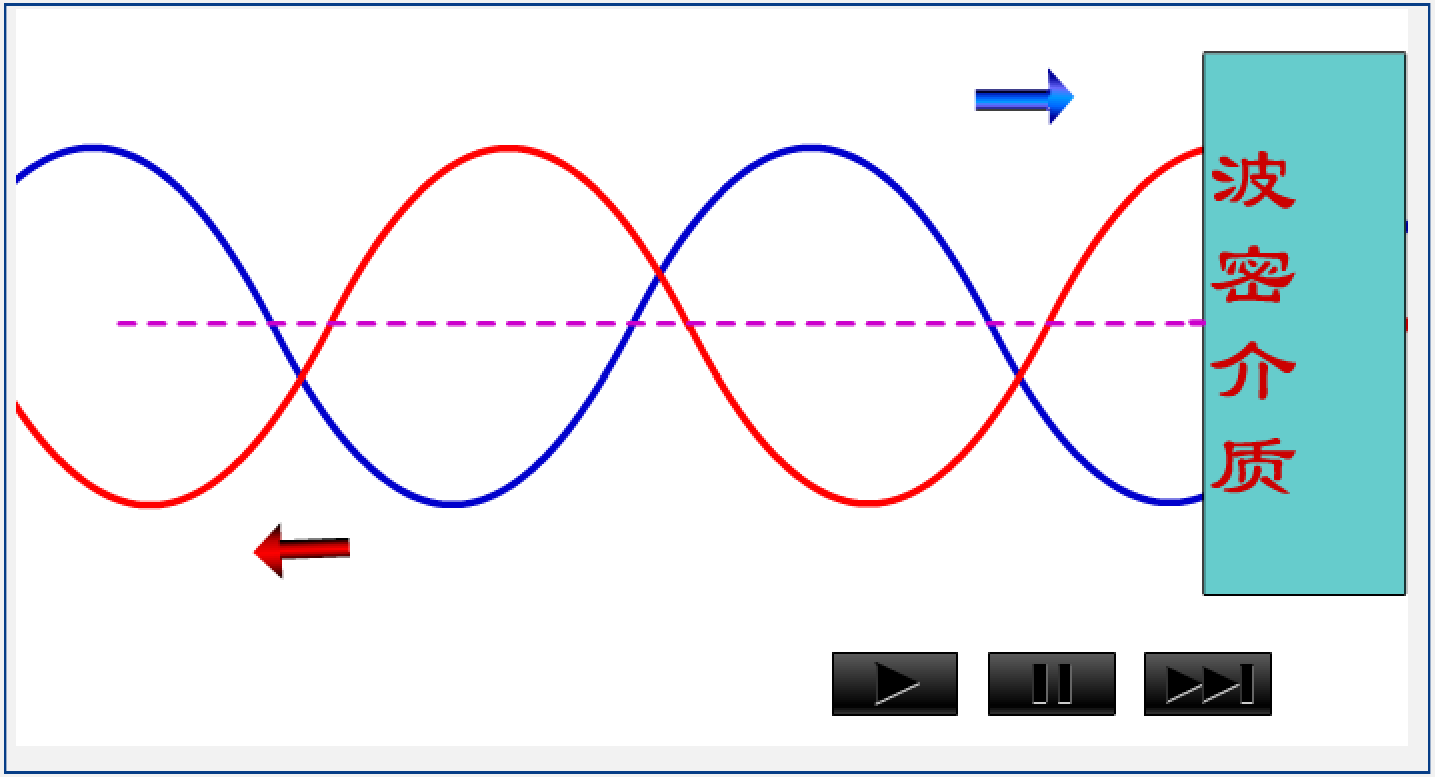
①弹性波传播情况（按照$z=\rho u$ 来划分波疏波密介质）
②电磁波的情况（按照折射率n 来划分光疏光密介质）





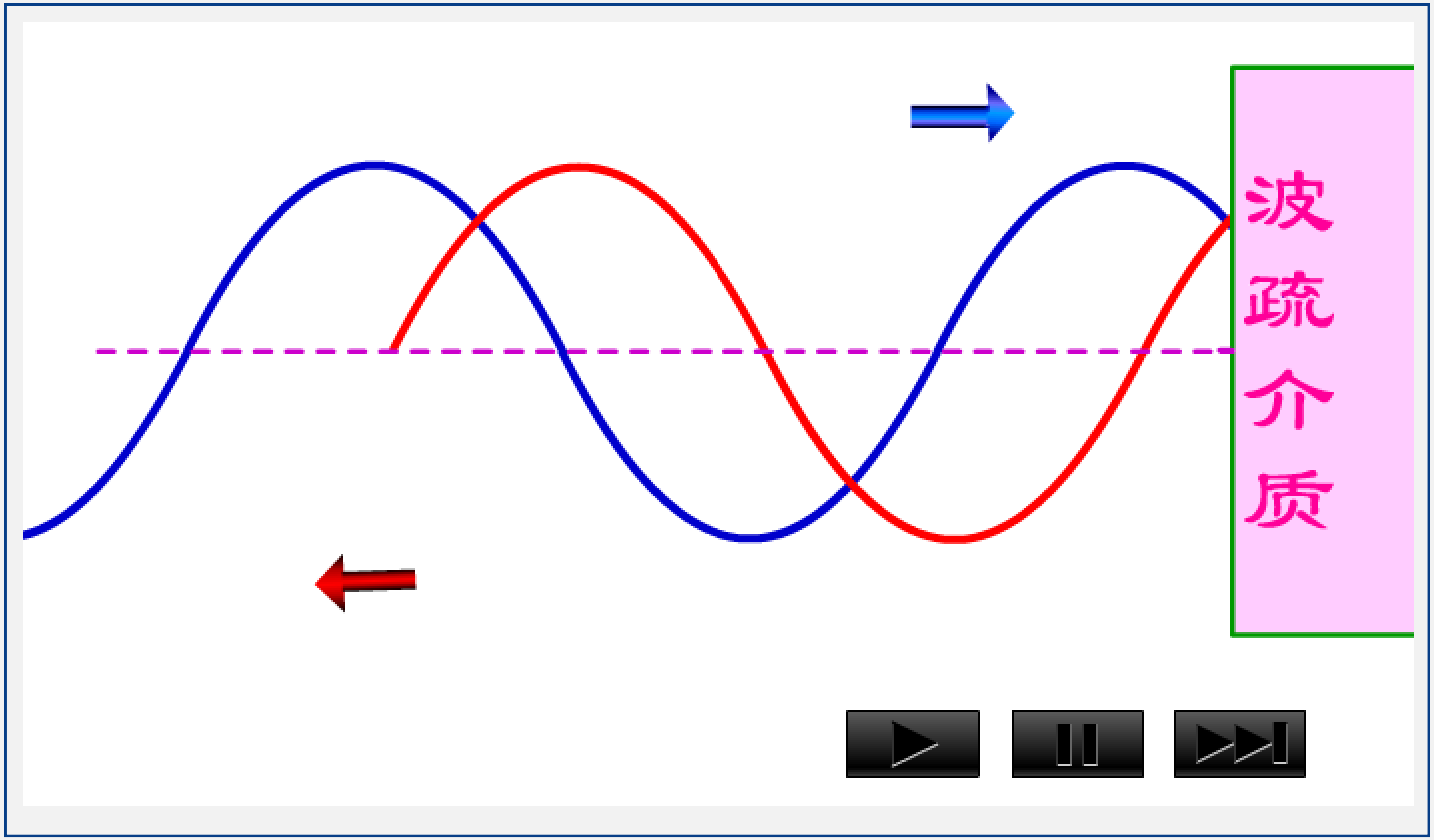
半波损失

波疏介质 ρu 较小

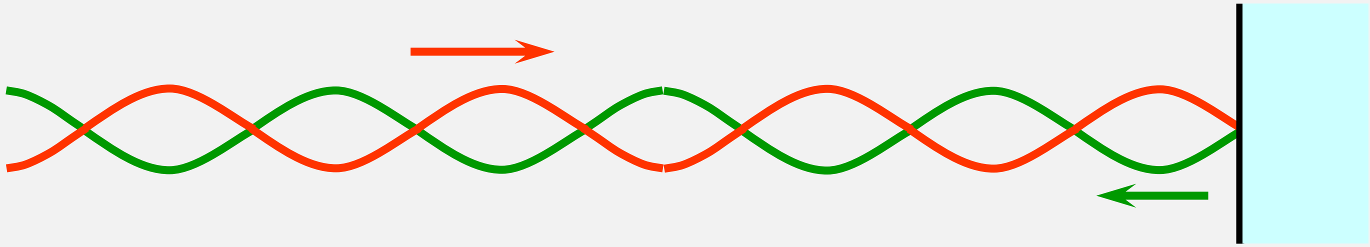


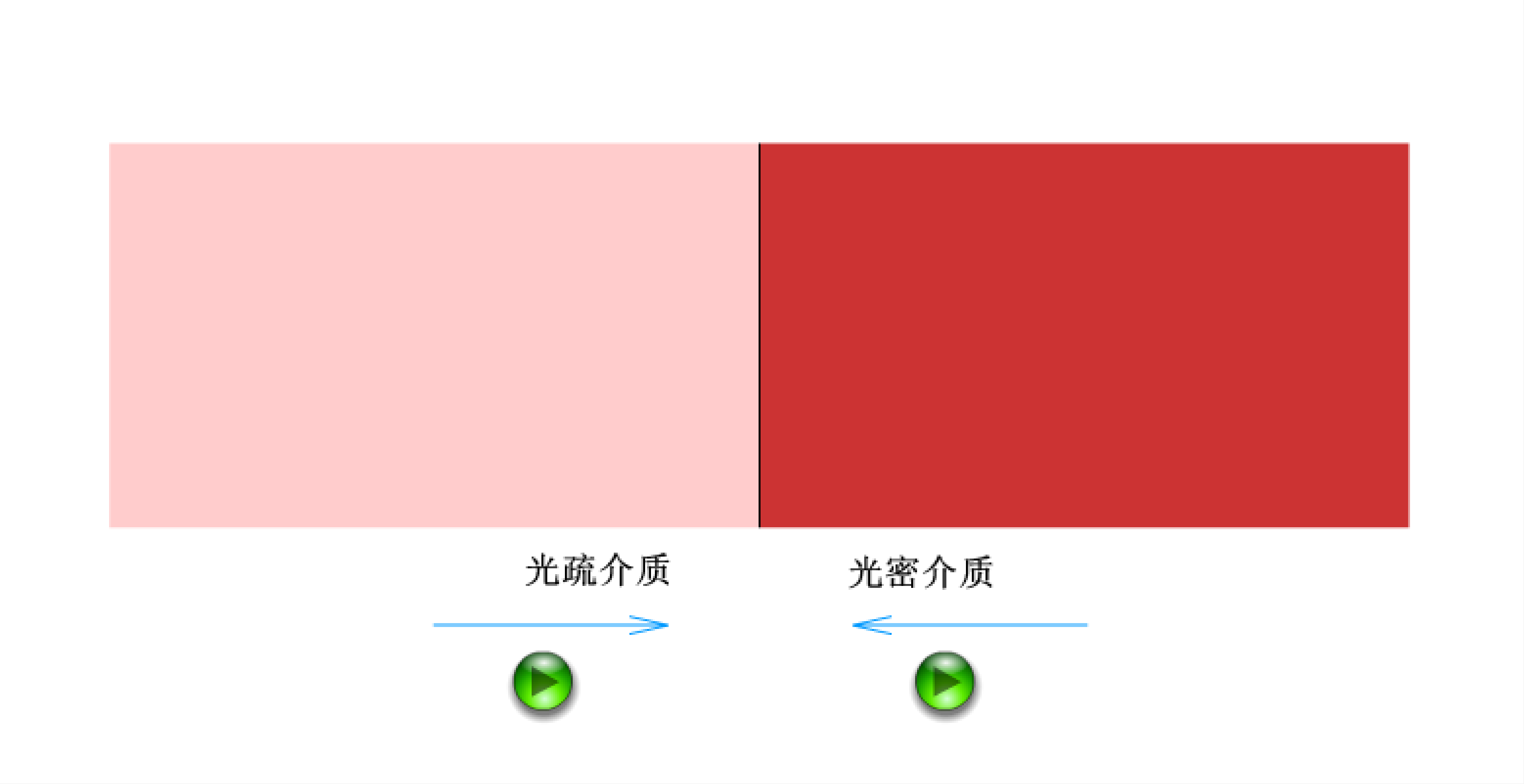
波密介质 ρu 较大

当波从波疏介质垂直入射到波密介质，被反射到波疏介质时形成波节。入射波与反射波在此处的相位时时相反，即反射波在分界处产生π的相位跃变，相当于出现了半个波长的波程差，称半波损失。



当波从波密介质垂直入射到波疏介质，被反射到波密介质时形成波腹。入射波与反射波在此处的相位时时相同，即反射波在分界处不产生相位跃变。




光疏介质
光密介质

例题　两人各执长为 l 的绳的一端，以相同的角频率和振幅在绳上激起振动，右端的人的振动比左端的人的振动相位超前ϕ，试以绳的中点为坐标原点描写合成驻波。由于绳很长，不考虑反射。绳上的波速设为u。

解　左端的振动 $y_1 = A\cos\omega t$

右端的振动 $y_2 = A\cos(\omega t + \phi)$

右行波表达式：$y_1 = A\cos\left[\omega\left(t - x/u\right) + \phi_1\right]$

左行波表达式：$y_2 = A\cos\left[\omega\left(t + x/u\right) + \phi_2\right]$

$x = -l/2$时，$y_1 = A\cos\omega t$，即

$$A\cos\left[\omega\left(t + \frac{l}{2u}\right) + \phi_1\right] = A\cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \phi_1 = -\frac{\omega l}{2u}$$

$x = l/2$时，$y_2 = A\cos(\omega t + \phi)$，即

$$A\cos\left[\omega\left(t + \frac{l}{2u}\right) + \phi_2\right] = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \quad \phi_2 = \phi - \frac{\omega l}{2u}$$

右行波、左行波表达式：

$$y_1 = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u} - \frac{l}{2u}\right)\right]$$

$$y_2 = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u} - \frac{l}{2u}\right) + \phi\right]$$

合成波

$$y = y_1 + y_2 = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u} - \frac{l}{2u}\right)\right] + A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u} - \frac{l}{2u}\right) + \phi\right]$$

$$\Rightarrow\quad y = 2A\cos\left(\frac{\omega x}{u} + \frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\omega l}{2u} + \frac{\phi}{2}\right)$$

当$\phi = 0$，$x = 0$处为波腹；
当$\phi = \pi$时，$x = 0$处为波节。

例题　在弦线上有一简谐波，其表达式是：

$$y_1 = 2.0\times10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02}-\frac{x}{20})+\frac{\pi}{3}](\mathrm{SI})$$

为了在此弦线上形成驻波，并且在$x = 0$处为一波节，此弦线上应有另一简谐波，试求其表达式。

解：设在弦线上的另一简谐波的表达式为：

$$y_2 = 2.0\times10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02}+\frac{x}{20})+\phi_{20}]$$

两波在$x = 0$处的振动相位，必须时刻相反，才可使相干波在此处为波节：

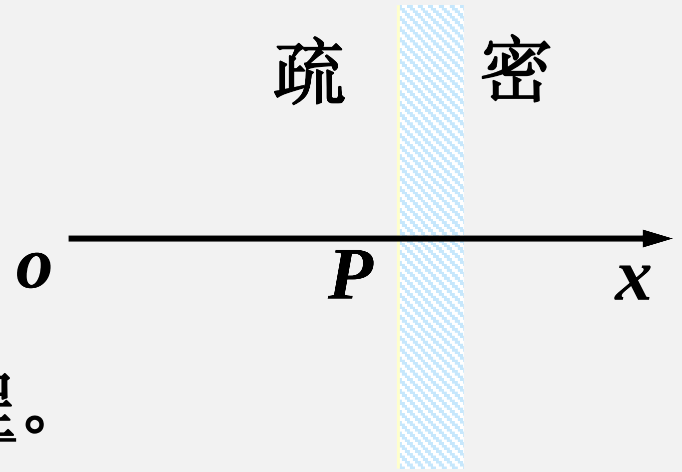
$$\phi_{20}=\phi_{10}+\pi=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4}{3}\pi.$$

将ϕ_{20}的结果代入y_2的表达式，即得。

例　一平面简谐波沿x轴正向传播，波动方程为：

$$Y = A\cos[2\pi\nu(t-\frac{x}{u})+\frac{11\pi}{6}]$$

在$x = 3\lambda/4$处有反射面如图。



求：在考虑半波损失时，反射波的波动表式。

解：先求入射波在P点的振动方程。

由已知条件，可知：

$$Y_{入射}(x=\frac{3\lambda}{4},t) = A\cos[2\pi\nu(t-\frac{3\lambda}{4u})+\frac{11\pi}{6}]$$

$$= A\cos[2\pi\nu t-\frac{3\pi}{2}+\frac{11\pi}{6}] = A\cos[2\pi\nu t+\frac{\pi}{3}]$$

再求反射波在P点的振动方程。

由题意，在*P*点入射波与反射波相差**相位π**，

$$\therefore Y_{反射}(P)=A\cos[2\pi\nu t+\frac{\pi}{3}+\pi]=A\cos[2\pi\nu t+\frac{4\pi}{3}]$$

反射波以*P*点为波源，沿x轴负方向传播。

$$Y_{反射}(x,t)=A\cos[2\pi\nu(t+\frac{x-x_0}{u})+\phi_0]$$

$x_0=3\lambda/4$

$$=A\cos[2\pi\nu(t+\frac{x-3\lambda/4}{u})+\frac{4\pi}{3}]$$

$$=A\cos[2\pi\nu(t+\frac{x}{u})-\frac{\pi}{6}]$$

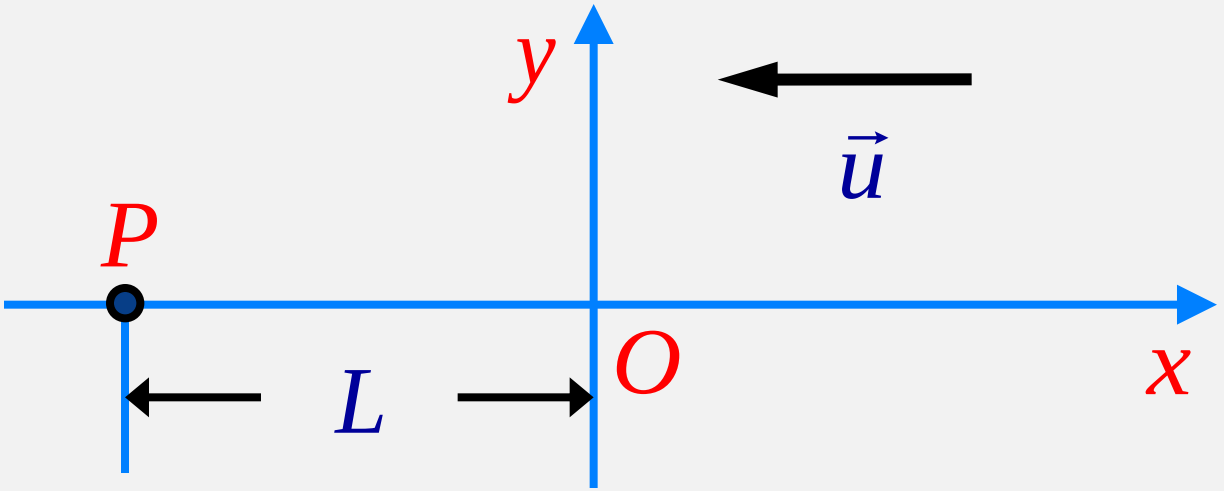
讨论：波节和波腹的 *x* 坐标？课后。

1．如图，已知*P*点的振动方程为

$$y = A\cos(\omega t + \varphi)$$

写出以*O*点为坐标原点的波动表示

写出*O*点质元的振动方程

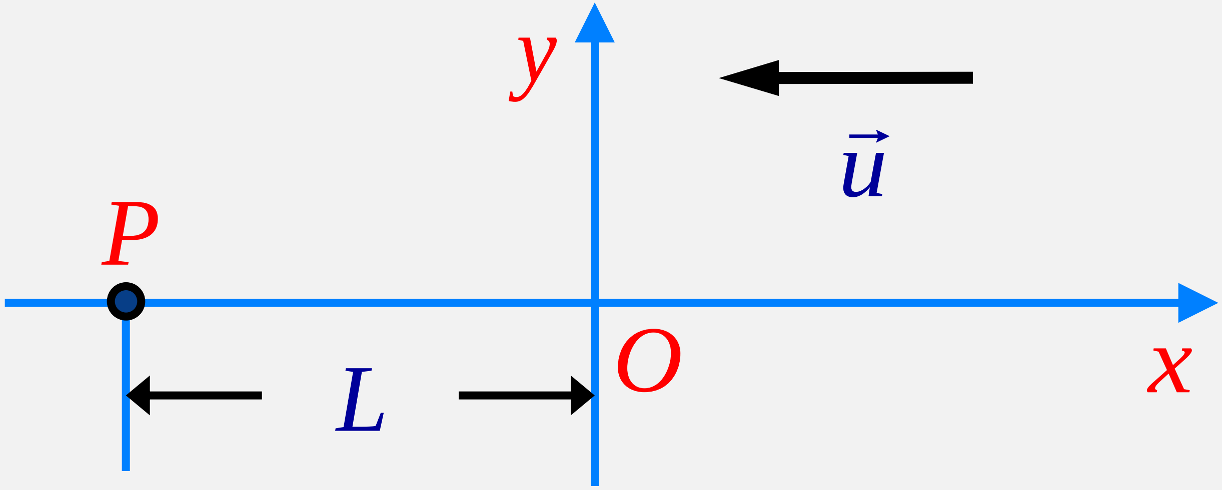


解：左行波，**P**点相位落后，故有

$$y = A\cos[\omega(t+\frac{L}{u}+\frac{x}{u})+\varphi]$$

O点质元的振动方程

$$y = A\cos[\omega(t+\frac{L}{u})+\varphi]$$



检查方法：将**P**点坐标代入波动表示，看是否和已知条件一致。

2．设有一波沿着绳子传播，其波函数为

$$y = A\cos 2\pi(t/T - x/\lambda)$$

(1) 若此波在x = 0处发生反射，反射点为自由端，求反射波波函数

(2) 若此波在x = 0处发生反射，反射点为固定点，求反射波波函数

设有一波沿着绳子传播，其波函数为

$$y = A\cos 2\pi(t/T - x/\lambda)$$

(1) 若此波在$x = 0$处发生反射，反射点为自由端，求反射波波函数为

$$y' = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

(2) 若此波在$x = 0$处发生反射，反射点为固定点，求反射波波函数

$$y' = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \pi\right]$$

例 一沿x方向传播的入射波在 $x=0$处发生反射，反射点为一波节。已知波函数为

$$y_1 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$$

求 (1) 反射波的波函数；

(2) 求合成波（驻波）的波函数；

(3) 各波腹和波节的位置坐标。

解：(1)反射点为波节，说明波反射时有π的相位跃变，所以反射波的波函数为

$$y_2 = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})-\pi]$$

(2) 合成波（驻波）的波函数为

$$y=y_1+y_2=A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+A\cos[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})-\pi]$$

$$=2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda}-\frac{\pi}{2})\cdot\cos(2\pi\frac{t}{T}-\frac{\pi}{2})$$

$$=2A\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}\cdot\sin 2\pi\frac{t}{T}$$

(3) 形成波腹的各点，振幅最大，即

$$\left|\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|=1 \qquad 2\pi\frac{x}{\lambda}=\pm(k+\frac{1}{2})\pi$$

$$x_k = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

形成波节的各点，振幅为零，即

$$\left|\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| = 1 \qquad 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm k\pi$$

$$x_k = \pm k\frac{\lambda}{2} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

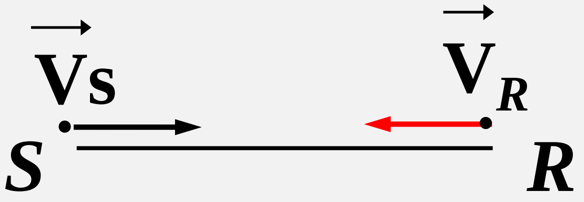
§7-7 多普勒效应

当波源S或观察者R相对于介质运动时，观察者所接收的频率 ν_R不等于波源振动频率 ν_S的现象。

§ 7-7 多普勒效应

当波源*S*或观察者*R*相对于介质运动时，观察者所接收的频率ν_R不等于波源振动频率ν_S的现象。

机械波的多普勒效应



参考系：介质

ν_S：波源振动频率；

ν_R：观察者接收频率；

ν_w：波的频率（单位时间内通过介质中某点的波的数目）

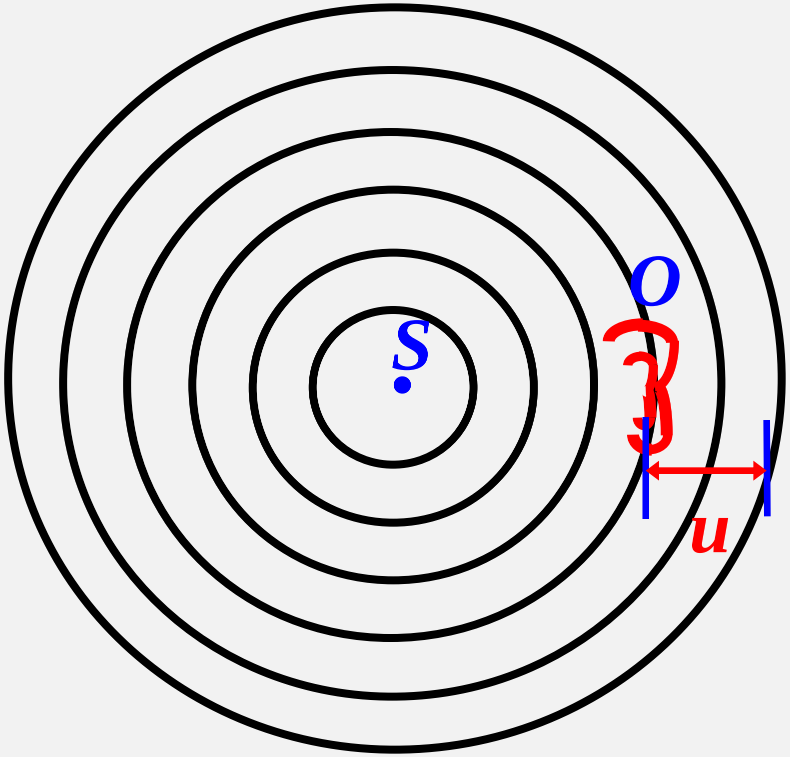
当波源和观察者都静止 ($V_S=0$，$V_R=0$)

$$\nu_R=\nu_w=\nu_S$$

(1) 波源不动，观察者以速度V_R相相对于介质运动

波源速度$V_S = 0$，观察者向波源运动的速度为$V_R(>0)$

波源S 静止，观察者O 以速度V_R相对介质运动

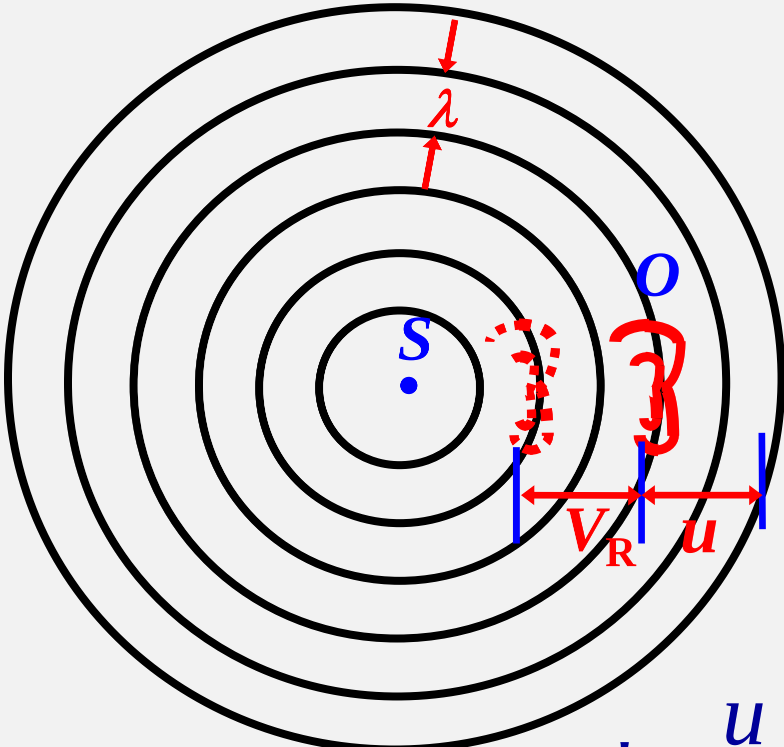


单位时间内，位于观察者左边的波源发出的波向右传播了距离u，

$\nu_w = \nu_S$,

$\nu_R \neq \nu_w$

波源S 静止，观察者O 以速度V_R相对介质运动



单位时间内，位于观察者左边的波源发出的波向右传播了距离u，同时观察者向左移动了距离V_R，这相当于波通过观察者的距离为$u+V_R$。

单位时间内，通过观察者的完整波的个数(频率)为：

$$\nu' = \frac{u+V_R}{\lambda} = \frac{u+V_R}{uT}$$

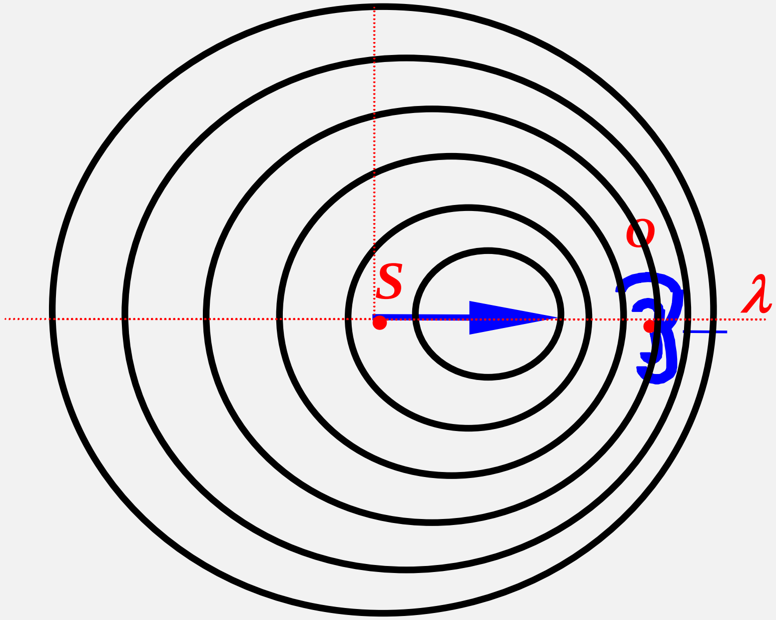
$\nu_w = \nu_S$,

$\nu_R \neq \nu_w$

$$\Rightarrow \quad \nu' = \frac{u+V_R}{u}\nu$$

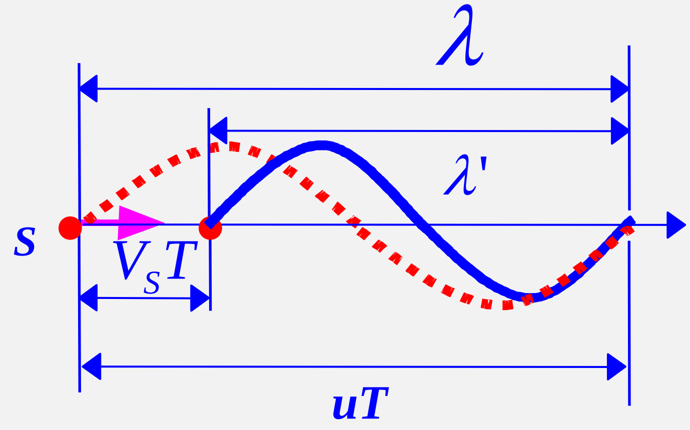
若O背离S 运动，则以$-V_R$代替V_R。

(2)观察者不动，波源以速度v_S相对于介质运动



$\nu_R = \nu_w$

$\nu_w \neq \nu_S$



S 运动的前方波长缩短

观察者O 相对介质静止，波源S 以速度V_S相对介质运动，观察者测得的波长：$\lambda' = \lambda - V_S T$。

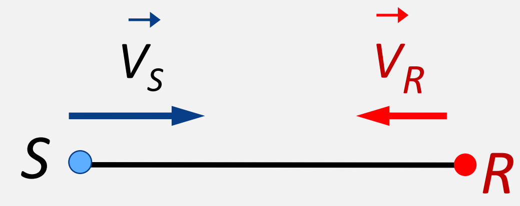
单位时间内通过观察者O 的完整的波的个数(频率)：

$$\nu' = \frac{u}{\lambda - V_S T} = \frac{u}{(u - V_S)T} \Rightarrow \nu' = \frac{u}{u - V_S}\nu$$

波源背离观察者运动时，以 $-V_S$ 代 V_S 即可。

(3) 观察者与波源同时相对介质而运动

讨论波源与观察者相向运动的情形。



由于波源的运动，介质中波的频率：

$$\nu_w = \frac{u}{u - V_S}\nu_S$$

$$\nu_S \neq \nu_w \neq \nu_R$$

由于观察者的运动，观察者接收的频率：

$$\nu_R = \frac{u + V_R}{u}\nu_w = \frac{u + V_R}{u - V_s}\nu_S$$

当波源与观察者背离而去时，上式的 V_R 和 V_S 分别用 $-V_R$ 和 $-V_S$ 代替。

多普勒效应的应用

1）测量天体相对地球的视线速度

远处星体发光有红移现象--- 宇宙大爆炸

由红移可得恒星的退行速度

2）技术上，测量运动物体的视线速度

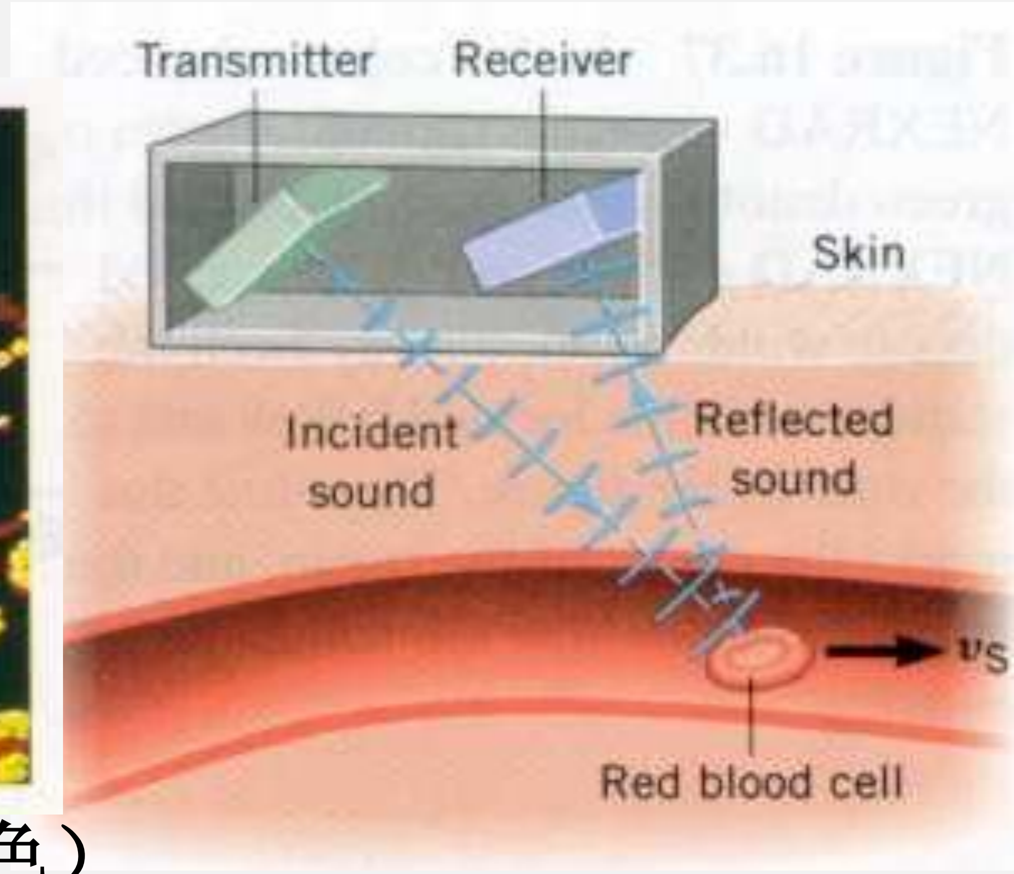
如飞机接近雷达的速度、汽车的行驶速度、人造卫星的跟踪、流体的流速。

警察用多普勒测速仪测速

3）医学上“超”

利用超声波的多普勒效应体检

胎儿的超声波影像（假彩色）



超声多普勒效应测血流速

例：一固定的超声源发出频率为**100MHz**的超声波。一汽车向超声源迎面驶来，在超声源处接收到从汽车反射回来的超声波，其频率为**110MHz**，设空气中的声速为**330m/s**，试计算汽车的行驶速度。

解：设汽车相对于空气速度为$\mathbf{V_B}$，汽车接收到从超声源发来的超声波频率是：

$$\nu_1 = \frac{u + V_B}{u}\nu = \frac{330 + V_B}{330} \times 100$$

（观察者运动的情况）

超声波从汽车反射时，汽车又作为新的超声波源（惠更斯原理），这超声源相对于空气的运动速度是$\mathbf{V_B}$。

又因为接收器相对于空气静止，所以其接收到的超声波频率是：

$$\nu_2 = \frac{u}{u - V_B}\nu_1 = \frac{330}{330 - V_B} \cdot \frac{330 + V_B}{330} \times 100$$

（波源运动的情况）

把已知条件 $\nu_2 = 110\text{MHz}$ 代入上式，解得：

$$V_B = \frac{110 - 100}{110 + 100} \times 330 = 15.7 m/s (= 56.6 \ \ km/h)$$

* 电磁波的多普勒效应

电磁波的传播不依赖弹性介质，波源和观测者之间的相对运动速度决定了接听到的频率。电磁波以光速传播，应考虑相对论时空变换关系。

当波源和观测者在同一直线上运动时，得到

$$\nu_R = \sqrt{\frac{c+V}{c-V}}\nu_S$$

V — 波源和接收器之间相对运动的速度。

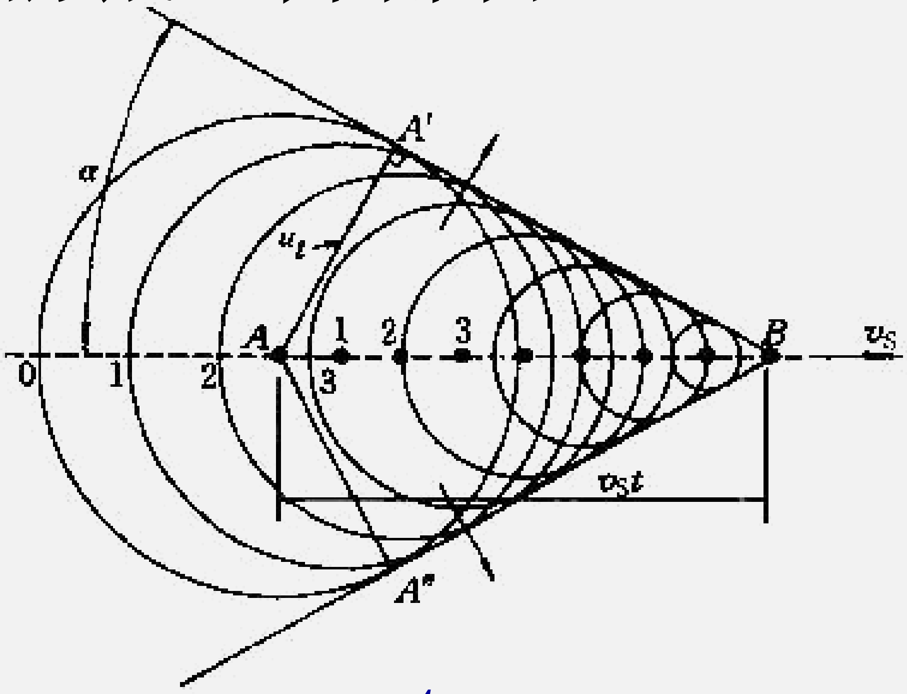
波源与观测者相互接近时，V 取正值；反之，V 取负值。前者接收到的频率比发射频率高，称为紫移；后者接收到的频率比发射频率低，称为红移。


汽车接近时 实际呈微蓝色
is actually very slightly blue as it approaches,

而离开时 则呈微红色
and very slightly red as it goes away.

* 冲击波

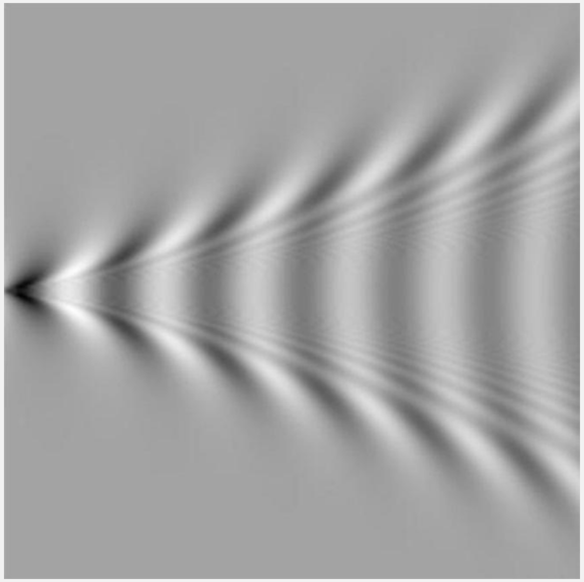
当波源运动的速度v_S超过波速时，波源将位于波前的前方，前述的计算公式不再有意义。波源发出的波的各波前的切面形成一个圆锥面。



锥形的顶角满足：$\sin a = \dfrac{ut}{v_S t} = \dfrac{u}{v_S}, v_S / u$—马赫数

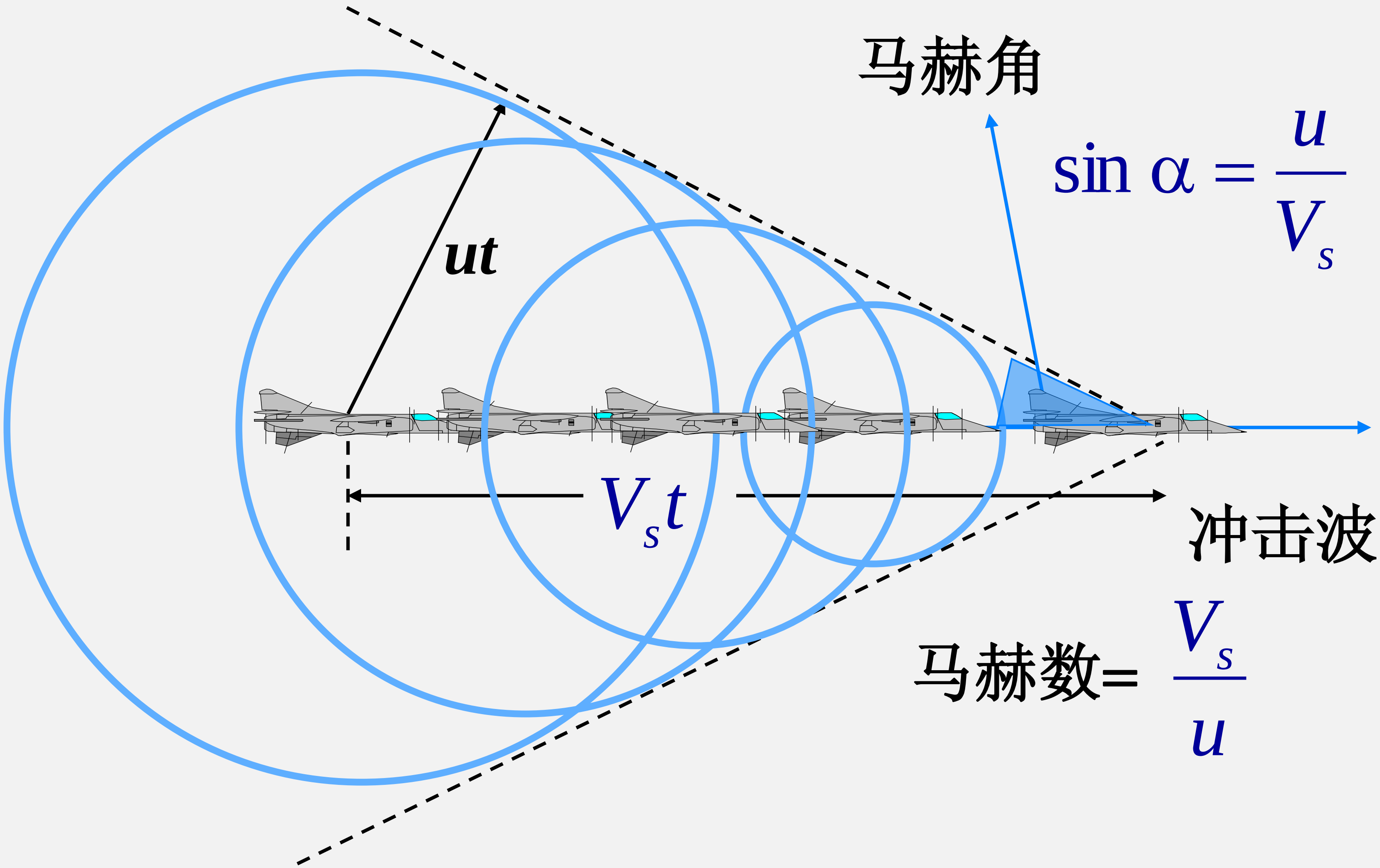
超音速的子弹
在空气中形成
的激波

（马赫数为2）



冲击波的形成过程

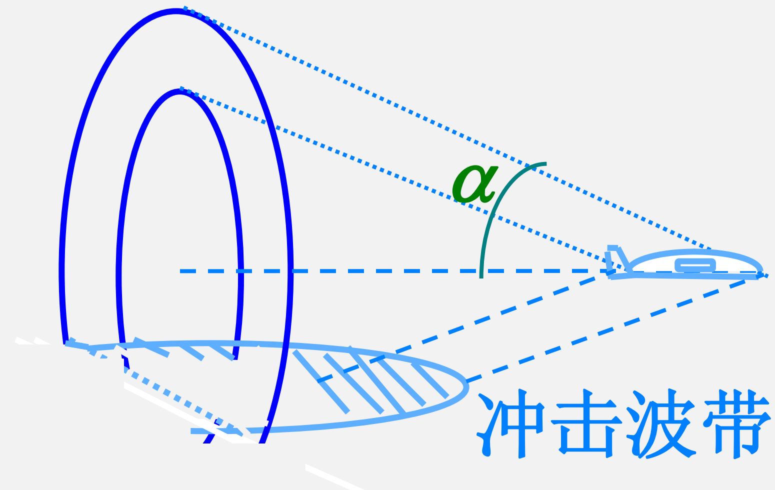
若波源的速度等于或大于波速，波源总在波阵面前面。



飞机冲破声障时将发出巨大声响，造成噪声污染


LINE1
0:50:14

对超音速飞机的最小飞行高度要有一定限制



*电磁激波—切伦柯夫辐射 (Cherenkov radiation)：

高能带电粒子在介质中的速度超过光在介质中的速度时，将发生锥形的电磁波—切伦柯夫辐射。
它发光持续时间短（数量级10^{-10}s）。

THANKS

FOR YOUR ATTENTION