第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

习 题 课

主 要 内 容

x+y= 典 型 例 题

测　验　题

帮助　返回

1 矩阵的初等变换

2 初等矩阵

3 矩阵的等价

4 矩阵的秩

5 矩阵秩的性质及定理

三种初等变换都是可逆的，且其逆变换是同一类型的初等变换.

初　等　变　换	逆　变　换
$r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$	$r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$
$r_i \times k(c_i \times k)$	$r_i \times \frac{1}{k}(c_i \times \frac{1}{k})$
$r_i + k r_j(c_i + k c_j)$	$r_i + (-k) r_j(c_i + (-k) c_j)$

上页　下页　返回

若A为n阶可逆矩阵,则

(1) A的最高阶非零子式为$|A|$;

(2) $R(A)=n$;

(3) A的标准形为单位矩阵E;

(4) $A \sim E$.

9　线性方程组有解判别定理

定理　n元齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩$R(A)<n$.

定理　n元非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b$有解的充分必要条件是系数矩阵A的秩等于增广矩阵$B=(A,b)$的秩.

10　线性方程组的解法

　　齐次线性方程组：把系数矩阵化成行最简形矩阵，写出通解.

　　非齐次线性方程组：把增广矩阵化成行阶梯形矩阵，根据有解判别定理判断是否有解，若有解，把增广矩阵进一步化成行最简形矩阵，写出通解.

11　初等矩阵与初等变换的关系

定理 设 A是一个 $m\times n$矩阵,对A施行一次初等行变换,相当于在A左边乘以相应的m阶初等矩阵;对A施行一次初等列变换,相当于在A的右边乘以相应的n阶初等矩阵.

定理 设A为可逆矩阵,则存在有限个初等矩阵 P_1, $P_2,\cdots,P_l$,使$A=P_1P_2\cdots P_l$.

推论 $m\times n$矩阵$A\sim B$的充分必要条件是:存在m阶可逆矩阵P及n阶可逆矩阵Q,使得$PAQ=B$.

典　型　例　题

- 一、求矩阵的秩
- 二、求解线性方程组
- 三、求逆矩阵的初等变换法
- 四、解矩阵方程的初等变换法

一、求矩阵的秩

例 1　求下列矩阵的秩

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 10 \\ 1 & 11 & 3 & 6 & 16 \\ 1 & -19 & -7 & -14 & -34 \end{pmatrix}.$$

解　对 A 施行初等行变换化为阶梯形矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 6 & 2 & 4 & 10\\ 1 & 11 & 3 & 6 & 16\\ 1 & -19 & -7 & -14 & -34\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 6 & 2 & 4 & 10\\ 0 & 9 & 3 & 6 & 15\\ 0 & -21 & -7 & -14 & -35\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B,$$

因此, $R(A)=R(B)=2.$

注意　在求矩阵的秩时，初等行、列变换可以同时兼用，但一般多用初等行变换把矩阵化成阶梯形.

二、求解线性方程组

例２　求非齐次线性方程组的通解.

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\
5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \qquad = 2.
\end{cases}
\qquad (1)
$$

解　对方程组的增广矩阵 B 进行初等行变换，使其成为行最简单形.

上页　下页　返回

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3&-1&1\\3&2&1&-1&1\\2&3&1&1&1\\2&2&2&-1&1\\5&5&2&0&2\end{pmatrix}\underset{\substack{r_4+r_3\\ r_5-r_2}}{\overset{\substack{r_1+r_3\\ r_2+r_3}}{\sim}}\begin{pmatrix}3&5&4&0&2\\5&5&2&0&2\\2&3&1&1&1\\4&5&3&0&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4-r_2}{\overset{r_1-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}-2&0&2&0&0\\5&5&2&0&2\\2&3&1&1&1\\-1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{r_4-r_1}{\overset{\substack{r_1\div 2\\ r_2-2r_3}}{\sim}}\begin{pmatrix}-1&0&1&0&0\\1&-1&0&-2&0\\2&3&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3+2r_1+3r_2}{\overset{r_2+r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3\div 6}{\overset{\substack{r_1\div(-1)-\frac{r_3}{6} \\ r_2\div(-1)-\frac{r_3}{6}}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 7/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知$R(A)=R(B)=3$，而方程组(1)中未知量的个数是$n=4$，故有一个自由未知量.

令自由未知量$x_4=k$,可得方程组(1)的通解是

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/6\\1/6\\1/6\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}5/6\\-7/6\\5/6\\1\end{pmatrix},$$

k取任意常数.

上页 下页 返回

例３ 当 a 取何值时，下述齐次线性方程组有非零解，并且求出它的通解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + a x_3 - x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + a x_4 = 0. \end{cases}$$

解法一 系数矩阵 A 的行列式为

$$
|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ -3 & 2 & 3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & a+1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & a+3 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = (a+1)(a-2)
$$

当$a=-1$或者$a=2$时,$|A|=0$,方程组有非零解.

当$a=-1$时,把系数矩阵A化成最简形:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

从而得到方程组的通解

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k\text{为任意常数}.$$

当$a=2$时,由计算$|A|$之变换可把A化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而得到方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

k为任意常数.

上页 下页 返回

解法二　用初等行变换把系数矩阵 A 化为阶梯形

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 2\\ 1 & -1 & a & -1\\ -3 & 2 & 3 & a\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & a+1 & -2\\ 0 & 5 & 0 & a+3\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

当$a=-1$或者$a=2$时,$R(A)<4$,此时方程组有非零解,可仿照解法一求出它的解.

三、求逆矩阵的初等变换法

要求可逆矩阵A的逆矩阵,只需对分块矩阵$(A|E)$施行初等行变换,当把A变成E时,原来的E就变成了A^{-1}.

或者对分块矩阵$\begin{pmatrix} A \\ \hline E \end{pmatrix}$施行初等列变换,当把$A$变成$E$时,原来的$E$就变成了$A^{-1}$.

例 4 求下述矩阵的逆矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

解 作分块矩阵$(A|E)$,施行初等行变换.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\overset{r_3+r_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\overset{r_2+r_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\overset{r_1+(-2)\times r_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\overset{r_2\times\frac{1}{2}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\overset{r_1+(-1)\times r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1/2 & -3/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & -3/2 & -5/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

注意　用初等行变换求逆矩阵时，必须始终用行变换，其间不能作任何列变换．同样地，用初等列变换求逆矩阵时，必须始终用列变换，其间不能作任何行变换．

例5 已知矩阵A的伴随矩阵 A^*=diag(1,1,1,8)，

且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$， 求 B

解 由已知 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$ 两边右乘A得

$$AB=B+3A$$

两边左乘A^*得 $A^*AB=A^*B+3A^*A$

即 $|A|B=A^*B+3|A|E$

由题设, $|A|\neq 0$

根据 $AA^*=|A|E$ **得** $|A|=2$

所以 $$2B = A^* B + 6E$$

即 $$(2E - A^*)B = 6E$$

$$\because \; diag(2E - A^*) = -6 \neq 0$$

$$\therefore \; B = 6(2E - A^*)^{-1}$$

$$= 6diag(1,1,1,-\frac{1}{6})$$

$$= diag(6,6,6,-1)$$

P80 19. 证明 $R(A)=1$ **的充分必要条件是存在非零列向量** $\vec{\alpha}$ **及非零行向量** $\vec{\beta}^T$，**使** $A=\vec{\alpha}\vec{\beta}^T$.

证明: **"必要性"**

已知 $R(A)=1$

$$\therefore \exists\text{可逆矩阵}P\text{和}Q\text{使}A=P\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}_{m\times n}Q$$

而

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}_{m\times n}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}_{m\times 1}\begin{pmatrix}1, & 0, & \cdots & 0\end{pmatrix}_{1\times n}$$

$$\therefore A=[P\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_{m\times 1}][(1,\quad 0,\quad \cdots\quad 0)_{1\times n}B]=\vec{\alpha}\vec{\beta}^{T}$$

其中

$$\vec{\alpha}=P\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_{m\times 1}\neq\vec{0},\quad \vec{\beta}^{T}=(1,\quad 0,\quad \cdots\quad 0)_{1\times n}Q\neq\vec{0}$$

P80 20 设A为列满秩矩阵，$AB = C$，

证明线性方程 $B\vec{x} = \vec{0}$ 与 $C\vec{x} = \vec{0}$ 同解.

证明 若 $\vec{x}$ 满足 $B\vec{x}=\vec{0}$，**则有** $A(B\vec{x}) = \vec{0}$

即 $(AB)\vec{x} = \vec{0}$ $\therefore$ $C\vec{x}=\vec{0}$.

若 $\vec{x}$ 满足 $C\vec{x}=\vec{0}$，即 $A(B\vec{x}) = \vec{0}$

因为A是列满秩矩阵，上面的方程只有零解

因此 $B\vec{x} = \vec{0}$

综上可知 $B\vec{x} = \vec{0}$ 与 $C\vec{x} = \vec{0}$ 同解.

P80 21 设A为矩阵 $m\times n$ 矩阵, 证明方程

$AX=E_m$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=m$

证明 必要性 已知方程 $AX=E_m$ 有解

那么 $R(A)=R(A,E_m)$

而 $R(A,E_m)\geq R(E_m)=m$

$\therefore R(A)\geq m$ 又 $R(A)\leq m$

因此 $R(A)=m$

充分性， 已知 $R(A)=m$

$$\because\ R(A,E_m)\geq R(A)=m$$

而 $R(A,E_m)\leq m$

$$\therefore\ R(A,E_m)=m$$

因 此 $R(A,E_m)=R(A)$

所 以 $AX=E_m$ 有解

四、解矩阵方程的初等变换法

(1) $AX = B$

$$(A|B) \overset{\text{初等行变换}}{\sim} (E|A^{-1}B) \Rightarrow X = A^{-1}B$$

(2) $XA = B$

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline B \end{pmatrix} \overset{\text{初等列变换}}{\sim} \begin{pmatrix} E \\ \hline BA^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow X = BA^{-1}$$ 或者

$$(A^T|B^T) \overset{\text{初等行变换}}{\sim} (E|(A^T)^{-1}B^T) \Rightarrow X^T = (A^T)^{-1}B^T$$

$$\Rightarrow X = BA^{-1}$$

例5 设 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$,且$AX=A+2X$,求矩阵$X$.

解 $\because AX=A+2X$,

$\therefore (A-2E)X=A$,

又 $A-2E=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$, 而 $|A-2E|\neq 0$

所以 $A-2E$ 可逆

$$\text{由于}\left(A-2E \mid A\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3\end{array}\right),$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}5 & -2 & -2\\ 4 & -3 & -2\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

上页 下页 返回

第三章　　测试题

一、填空题(每小题4分，共24分).

1．若 n 元线性方程组有解，且其系数矩阵的秩为 r，则当 ____时，方程组有唯一解；当 ____时，方程组有无穷多解.

2．齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ kx_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

只有零解，则 k 应满足的条件是________.

3. 设$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$,则$AX=0$的解为 ______

4. 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$$

有解的充要条件是__________

5. 设A为4阶方阵,且秩$R(A)=3$,则$R(A^*)=$ ______

6. 矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的秩是 ______

二、计算题(第1题每小题8分，共16分；第2题每小题9分，共18分；第3题12分).

1.讨论λ值的范围,确定矩阵的秩.

$$(1)\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix} \quad (2)\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 4\\ \lambda & 4 & 10 & 1\\ 1 & 7 & 17 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

2．求解下列线性方程组

$$(1)\begin{cases}3x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0\\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 0\\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 8x_4 - 6x_5 = 0\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3-2x_4+x_5=3 \\ 2x_1+6x_2+x_3-3x_4=2 \\ x_1+3x_2-2x_3-x_4-x_5=-1 \\ 3x_1+9x_2+4x_3-5x_4+x_5=5 \end{cases}$$

3. a,b取何值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1+ax_2+x_3=3 \\ x_1+2ax_2+x_3=4 \\ x_1+x_2+bx_3=4 \end{cases}$$

有唯一解、无解或有无穷多解？在有无穷多解时，求其通解.

上页 下页 返回

三、利用矩阵的初等变换，求下列方阵的逆矩阵（每小题7分，共14分）.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

四、证明题（每小题8分，共16分）

1. A, B为两个n阶方阵,且 $ABA = B^{-1}$,证明:

$$秩(E - AB) + 秩(E + AB) = n.$$

2. 设A为$m \times n$实矩阵,证明:秩$\left(A^T A\right) =$ 秩(A).

测试题答案

一、 1.$r=n, r<n$; 2.$k\neq\frac{3}{5}$; 3.零解;

4.$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$; 5.1; 6.2.

二、 1. (1)当$\lambda\neq 3$时,秩为3;当$\lambda=3$时,秩为2;

(2)当$\lambda\neq 0$时,秩为4;当$\lambda=0$时,秩为2.

2. (1) $X=k_1\begin{pmatrix}9/4\\-3/4\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3/4\\7/4\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1/4\\-5/4\\0\\0\\1\end{pmatrix}$;

上页 下页 返回

$$(2)X=\begin{pmatrix}3/5\\0\\4/5\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}7/5\\0\\1/5\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1/5\\0\\-2/5\\0\\1\end{pmatrix}.$$

3.当 $a\neq 0$ 且 $b\neq 1$ 时,方程组有唯一解;

当 $a=\dfrac{1}{2}$ 且 $b=1$ 时,方程组有无穷多解;

其余情形,方程组无解.

上页 下页 返回

通解为$x=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},k\in R.$

三、 1.$A^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&-2\\-3&2&-1\end{pmatrix};$

2. $A^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}.$