CONTENTS

- 牛顿运动定律的应用

1.受力分析是关键

牛顿第一、第三定律为受力分析提供依据。

2.第二定律是核心

力与加速度的瞬时关系：$\vec{F}=m\vec{a}$

微分形式：$$\vec{F}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

（具有更广泛的适用范围）

3.选择合适的坐标系

分量式：

$$\left.\begin{aligned} F_x &= ma_x \\ F_y &= ma_y \end{aligned}\right\} \text{直角坐标系}$$

自然坐标系：

$$\left\{\begin{aligned} F_\tau &= ma_\tau = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ F_\mathrm{n} &= ma_\mathrm{n} = m\,{v^2}/{R} \end{aligned}\right.$$

解题的基本思路(做题步骤)

（1）确定研究对象

（2）进行受力分析；（隔离物体，画受力图）

（3）建立坐标系；

（4）由牛顿定律列出方程（一般用分量式）；

（5）利用其它的约束条件列补充方程；

（6）求解，先用符号求解，后带入数据计算结果。

两类常见问题

（1）已知力求运动方程　$\vec{F} \rightarrow \vec{a} \rightarrow \vec{r}$

（2）已知运动方程求力　$\vec{r} \rightarrow \vec{a} \rightarrow \vec{F}$

例1 质量为M的楔B，置于光滑水平面上，质量为 m 的物体A沿楔的光滑斜面自由下滑，如图(a)。试求楔相对地面的加速度和物体A相对楔的加速度。

解 （确定研究对象）

分别选A 和B为研究对象

(分析受力）受力如图(b)

(根据牛顿第二定律)

对A：

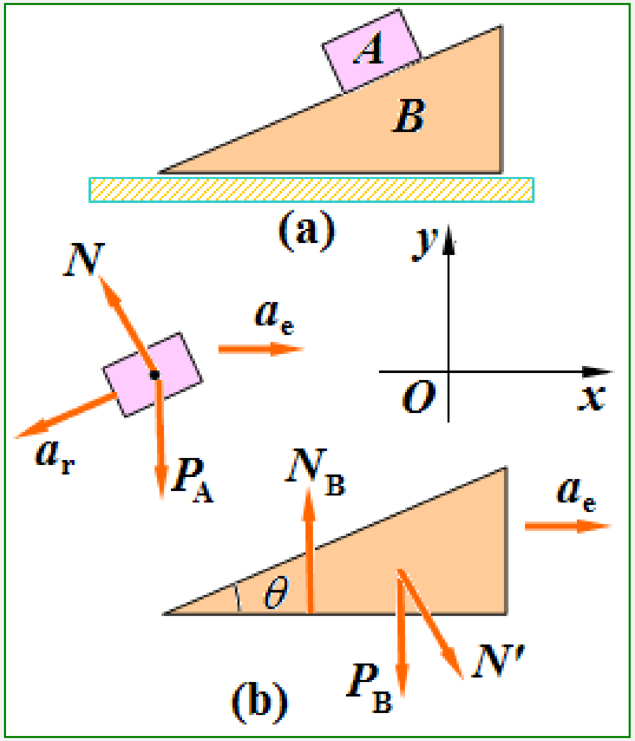
$$-N\sin\theta = ma_{Ax}$$

$$N\cos\theta - mg = ma_{Ay}$$

对B：

$$N'\sin\theta = Ma_{Bx} = Ma_e$$

$$N_B - Mg - N'\cos\theta = 0$$

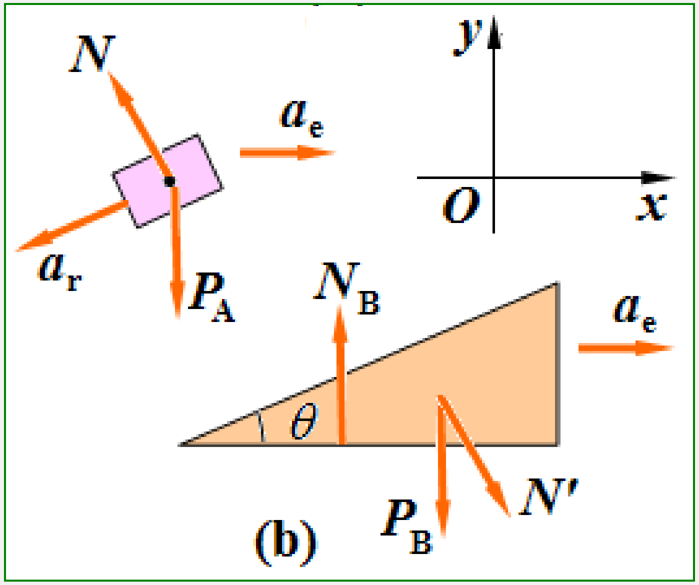


a_r 为A相对B的加速度

a_e为B相对地面的加速度

$$\because\ \vec{a}_A = \vec{a}_{\mathrm{r}} + \vec{a}_{\mathrm{e}}$$

(添加其它约束条件)



$$\therefore\ a_{Ax} = -a_{\mathrm{r}}\cos\theta + a_{\mathrm{e}}$$

$$a_{Ay} = -a_{\mathrm{r}}\sin\theta$$

对A：

$$-N\sin\theta = m(-a_{\mathrm{r}}\cos\theta + a_{\mathrm{e}})$$

$$N\cos\theta - mg = m(-a_{\mathrm{r}}\sin\theta)$$

对B：

$$N'\sin\theta = Ma_{\mathrm{e}} \qquad N_B - Mg - N'\cos\theta = 0$$

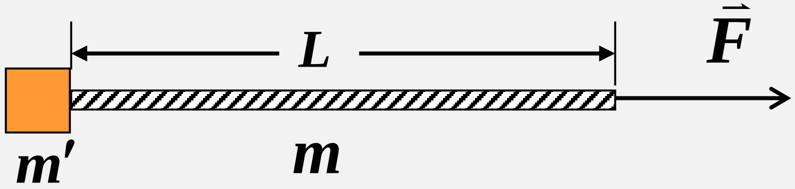
解以上方程组，并注意到 $N'=N$，可得

$$a_{\mathrm{e}} = \frac{m\cos\theta\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}g \qquad a_{\mathrm{r}} = \frac{(m+M)\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}g$$

例2 质量m，长为L的柔软细绳，一端系着放在光滑桌面上质量为m'的物体。在绳的另一端加力$\vec{F}$。绳被拉紧时会有伸长(形变)，很小略去不计。现设绳的长度不变，质量分布均匀。

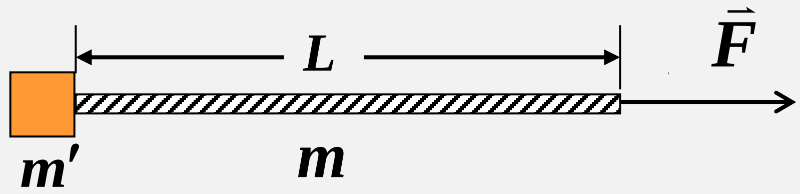
求: (1) 绳作用在物体上的力。

(2) 绳上任意点的张力。

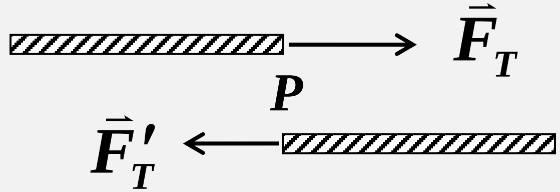


解

(a)



(b)

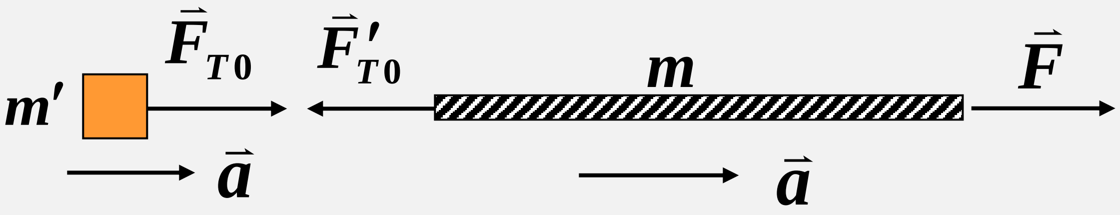


图(b)，在绳上取一点P，将绳分为两段，它们之间有拉力 $\vec{F}_T$ 和 $\vec{F}_T'$ 作用，这一对拉力称为张力，它们大小相等，方向相反。

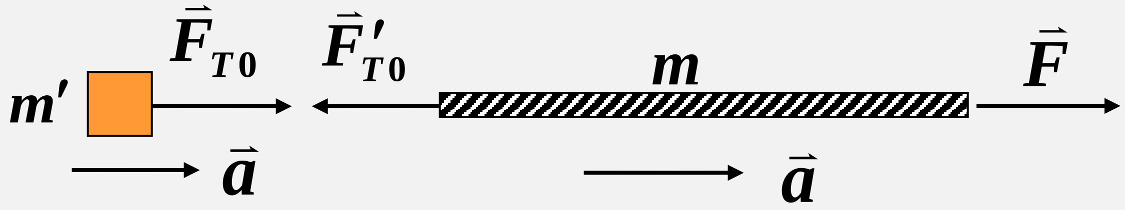
(1)只研究在水平方向的受力情况。作为一个整体，m 和 m' 具有相同的加速度。

设绳作用在物体上的拉力为$\vec{F}_{T0}$，
物体作用在绳端的力为 $\vec{F}'_{T0}$

有：$\vec{F}_{T0} = -\vec{F}'_{T0}$



由牛顿第二定律，有



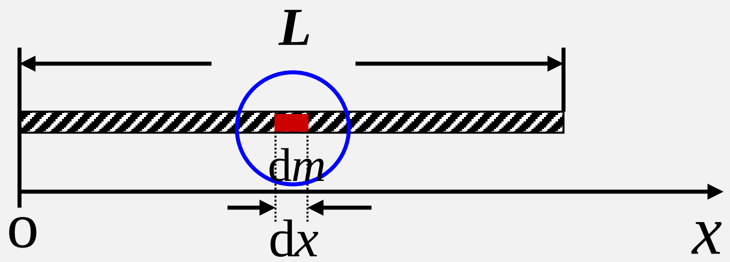
对m'：$F_{T0}=m'a$

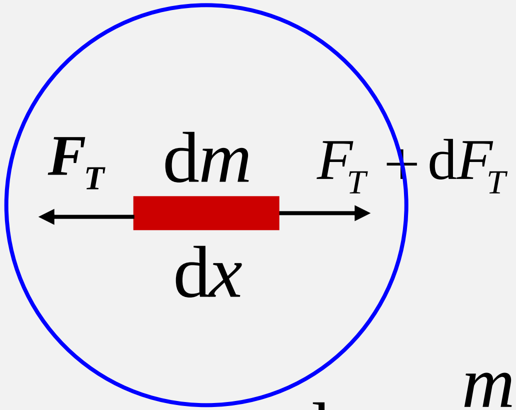
对m：$F-F'_{T0}=ma$ $\qquad$ $F_{T0}=F'_{T0}$

解得： $a=\dfrac{F}{m+m'}$ $\qquad$ $F_{T0}=\dfrac{m'}{m+m'}F$

当$m \ll m'$时，$F_{T0}=F$

(2) 求绳上任意点的张力。





$$\mathrm{d}m=\frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

建立所示坐标系,在 x 处取一线元 $\mathrm{d}x$

由牛顿第二定律:

$$(F_T+\mathrm{d}F_T)-F_T=(\mathrm{d}m)a=\frac{m}{l}a\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}F_T=\frac{m}{l}a\mathrm{d}x=\frac{mF}{m+m'}\mathrm{d}x$$

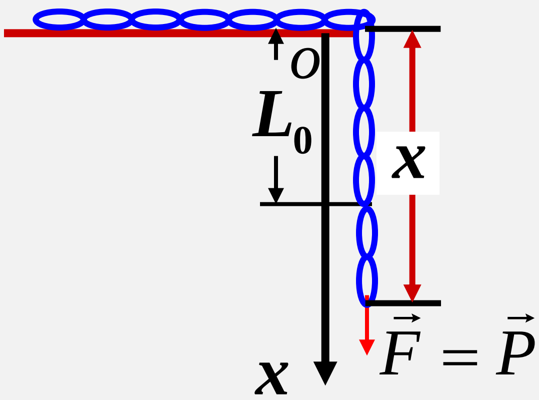
$x=l$时，$F_T=F$： $\int_{F_T}^{F}\mathrm{d}F_T=\dfrac{mF}{(m+m')l}\int_x^l\mathrm{d}x$

或 $x=0$时，$F_T=F_{T0}$： $\int_{F_{T0}}^{F_T}\mathrm{d}F_T=\dfrac{mF}{(m+m')l}\int_0^x\mathrm{d}x$

积分，得 $F-F_T=\dfrac{mF}{(m+m')l}(l-x)$

化简，得 $F_T=(m'+m\dfrac{x}{l})\dfrac{F}{m+m'}$

例3 有一链子在光滑的桌面上下滑，质量为 m，长为L，初始下垂的长度为L_0。求链子完全脱离桌面时的速度。



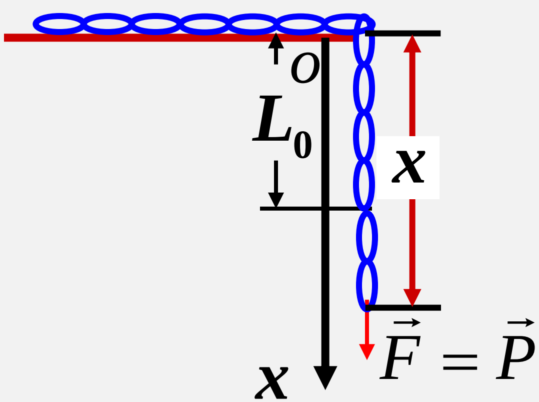
解 建立如图所示坐标系。设某时刻下落长度为x，此时速度为v，取下落部分为研究对象，其质量 $\dfrac{m}{L}x$。

由牛顿定律：
$$F=\frac{m}{L}xg=ma=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$F=\frac{m}{L}xg=ma=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

变量代换

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$



$$\therefore \frac{m}{L}gx\mathrm{d}x=mv\mathrm{d}v$$

两边积分 $$\frac{g}{L}\int_{L_o}^{L}x\mathrm{d}x=\int_0^v v\mathrm{d}v$$

$(t=0$时，$v=0, x=L_0)$ $$v=\sqrt{\frac{g(L^2-L_0^2)}{L}}$$

例4 一质量为m的质点在 x 轴上运动，质点只受指向原点的引力作用，引力大小与质点离原点的距离x的平方成反比 $f = -k / x^2$，k是比例常数，设质点在 $x = A$时的速度为零。

求$x = A/2$ 处的速度的大小。

解 利用 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$，得

$$-\frac{k}{x^2} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$-\frac{k}{x^2}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

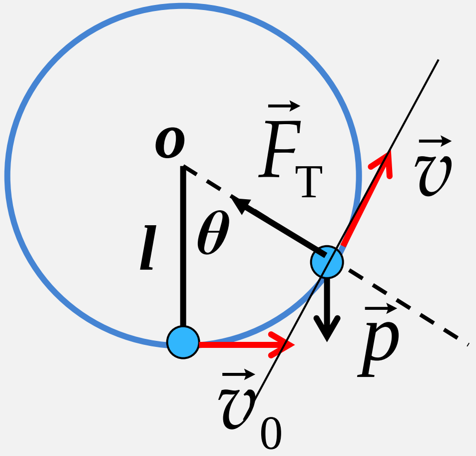
即 $-\frac{k}{x^2}\mathrm{d}x=mv\mathrm{d}v$

积分 $\int_A^{A/2}-\frac{k}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^v mv\mathrm{d}v$

∴ $v=\sqrt{\frac{2k}{mA}}$

例5 长为l 的轻绳固定于O点, 另一端系质量为m的小球, 开始时小球由最低点以初速v_0在铅直平面内作圆周运动， 求小球在任意位置的速率和绳的张力。

解 由牛顿定律知:



$$\vec{F}_T + m\vec{g} = m\vec{a} \qquad （1）$$

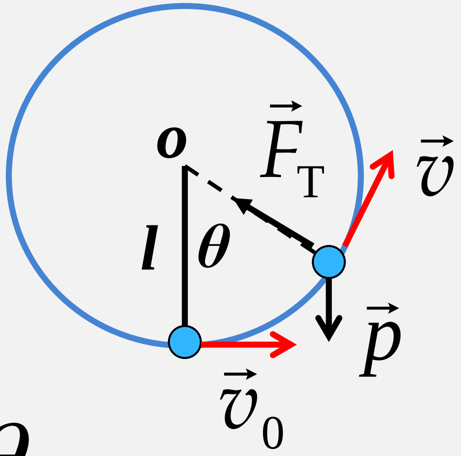
选自然坐标系写出分量式:

$$F_T - mg\cos\theta = ma_n = m\frac{v^2}{l} \qquad （2）$$

$$-mg\sin\theta = ma_\tau = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad (3)$$

$$\because \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t};\ v = l\omega;\qquad \therefore \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v\mathrm{d}v}{l\mathrm{d}\theta} \qquad (4)$$

利用（3）和（4）两式得到：



$$v\mathrm{d}v = -gl\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

积分：$\displaystyle\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = -gl\int_{0}^{\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta$

小球的速率为：

$$v=\sqrt{v_0^2+2gl(\cos\theta-1)} \qquad （5）$$

将（5）式带入（2）式

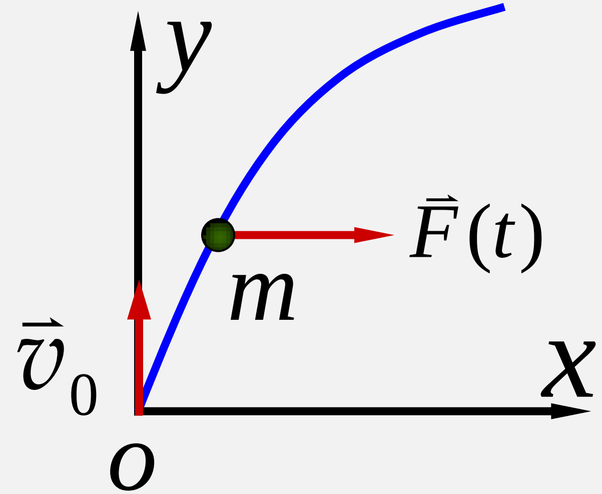
$$F_T-mg\cos\theta=ma_n=m\frac{v^2}{l}$$

得，绳中张力：$F_T=m\left(\dfrac{v_0^2}{l}-2g+3g\cos\theta\right)$

本题也可以用能量守恒方法解出，这里要特别注意积分的技巧。

例6 设一高速运动的带电粒子沿竖直方向以 v_0 向上运动，从时刻 $t=0$ 开始粒子受到 $F=F_0 t$ 水平力的作用，F_0 为常量，粒子质量为 m。

求 粒子的运动轨迹。



解: 由题意 $\vec{F} = m\vec{a}$

水平方向

$$\because a_x = \frac{F_0 t}{m} \qquad a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

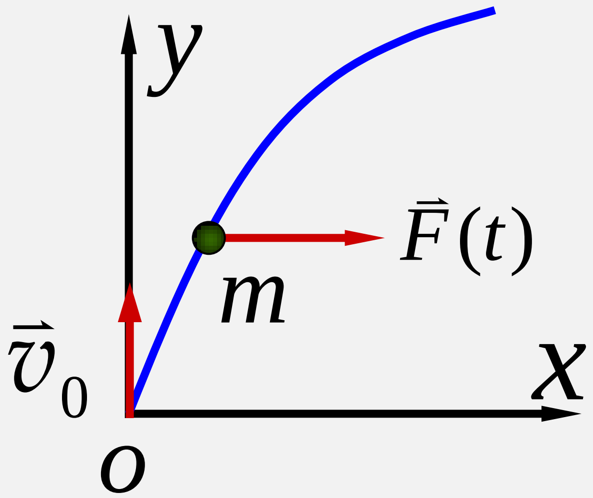
$$\therefore \int_0^{v_x} \mathrm{d}v_x = \int_0^t \frac{F_0 t}{m}\mathrm{d}t \qquad v_x = \frac{F_0 t^2}{2m}$$

$$v_x = \frac{F_0 t^2}{2m} \quad 而 \quad v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t \frac{F_0 t^2}{2m}\mathrm{d}t \qquad x = \frac{F_0}{6m}t^3$$

竖直方向

$$a_y = 0 \qquad y = v_0 t$$

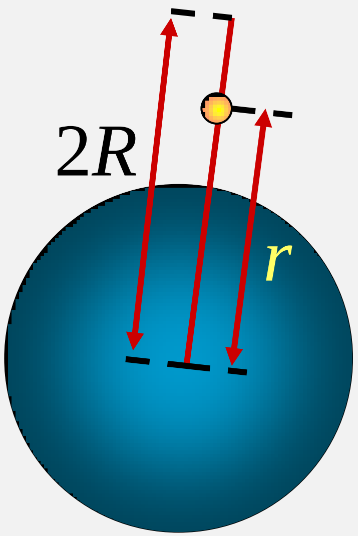


运动轨迹 $$x = \frac{F_0}{6mv_0^3}y^3$$

例7 有一废弃卫星在离地面上空高度等于地球半径处由静止落下。求它到达地面时的速度(不计空气阻力和地球的自转)。

解 由加速度a 求得距离 r 和速度v 的关系。

$$F=-G\frac{Mm}{r^2}$$

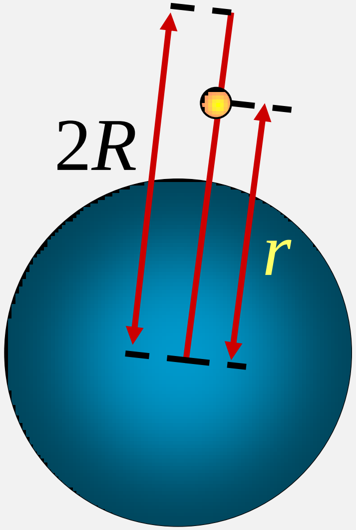


地面 $$G\frac{Mm}{R^2}=mg \qquad GM=gR^2$$

$$F=-g\frac{R^2m}{r^2}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g\frac{R^2}{r^2} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$$

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -g\frac{R^2}{r^2}$$



$$\int_0^v v\mathrm{d}v = \int_{2R}^{r} -gR^2\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2gR^2}{r} - gR} \qquad r = R \qquad v = \sqrt{gR}$$

例8 以初速度v_0 竖直向上抛出一质量为m 的苹果, 苹果除受重力外, 还受一个大小为 $\alpha m v^2$ 的粘滞阻力。求小球上升的最大高度。

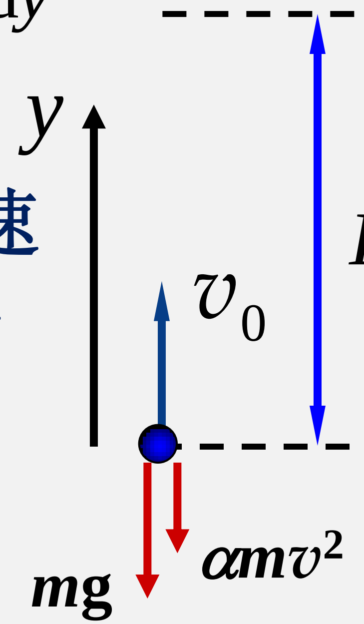
解 $$-(mg+\alpha m v^2)=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}v$$

$$\frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=-g-\alpha v^2$$

$$\int_{v_0}^{0}\frac{\mathrm{d}(v^2)}{(g+\alpha v^2)}=\int_0^H -2\mathrm{d}y$$

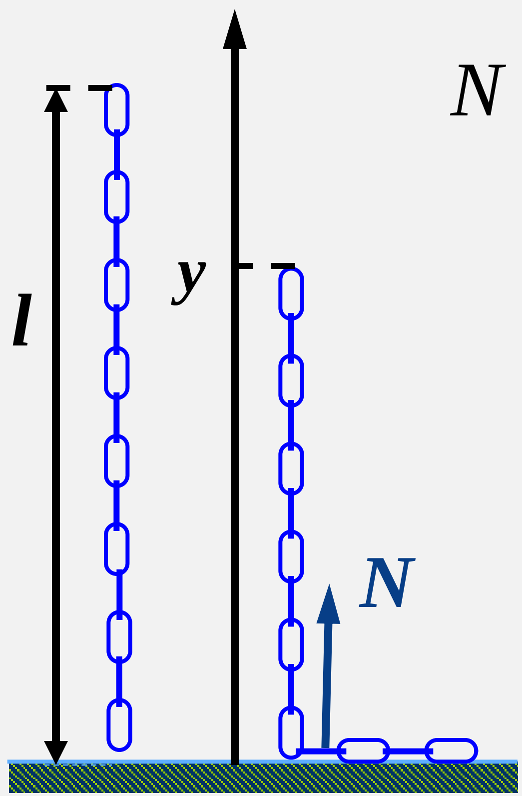
$$H=\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{g+\alpha v_0^2}{g}\right)$$

最高处速度为零



例9 一柔软绳长 l，线密度 ρ，一端着地开始自由下落。**求**下落到任意长度 y 时刻，给地面的压力N为多少？

解： 取整个绳为研究对象　受力分析如图所示



$$N-\rho g l=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{d}p=\mathrm{d}(\rho y v)+0$$

$$N=\rho g l+\rho\frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}v+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}y=v^2-yg$$

自由落体 $v^2=(l-y)2g$

$$N=3\rho g(l-y)$$

CONTENTS

- # 牛顿运动定律的适用范围

❖惯性参照系

牛顿定律适用的参照系

——惯性系

凡相对于惯性系作匀速直线运动的一切参考系都是惯性系。

定义

牛顿运动定律

惯性参照系

适用范围

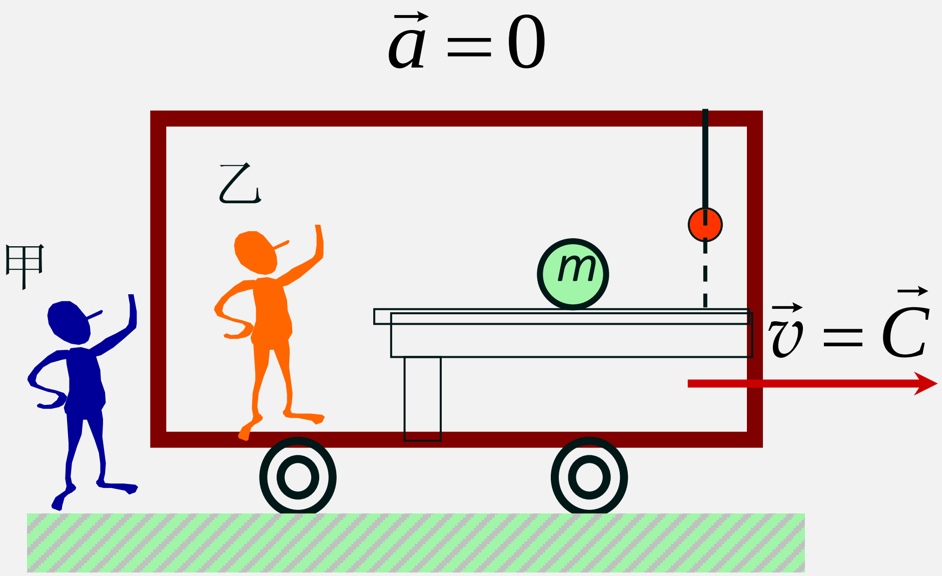
作为其他一切惯性系的第一个惯性参考系如何确定？

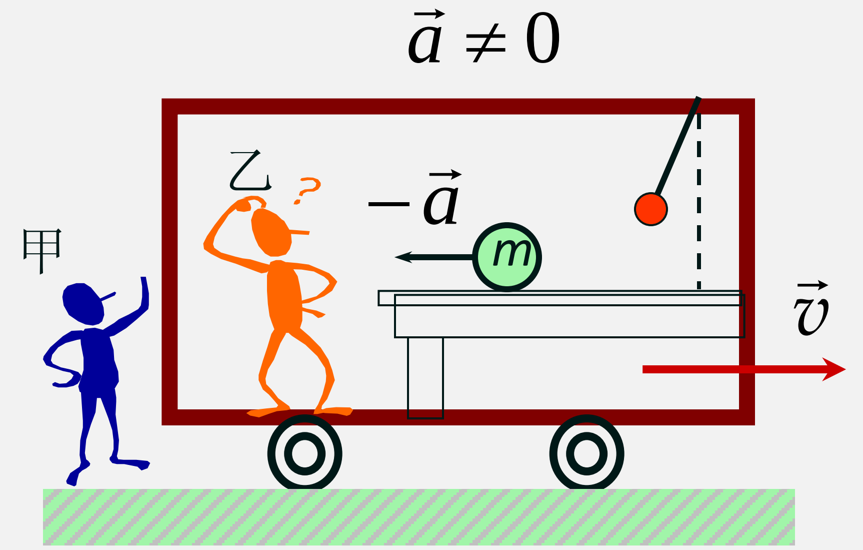
牛一

朗道在《场论》中这样描述惯性系：

在惯性参考系中，一个不受相互作用的物体将保持相对静止或匀速直线运动。

地球是个不错的惯性系





甲和乙观察单摆和小球的状态都符合牛顿定律。

—— **惯性系**

甲观察单摆和小球的状态符合牛顿定律。

—— **惯性系**

乙观察单摆和小球的状态不符合牛顿定律。

—— **非惯性系**

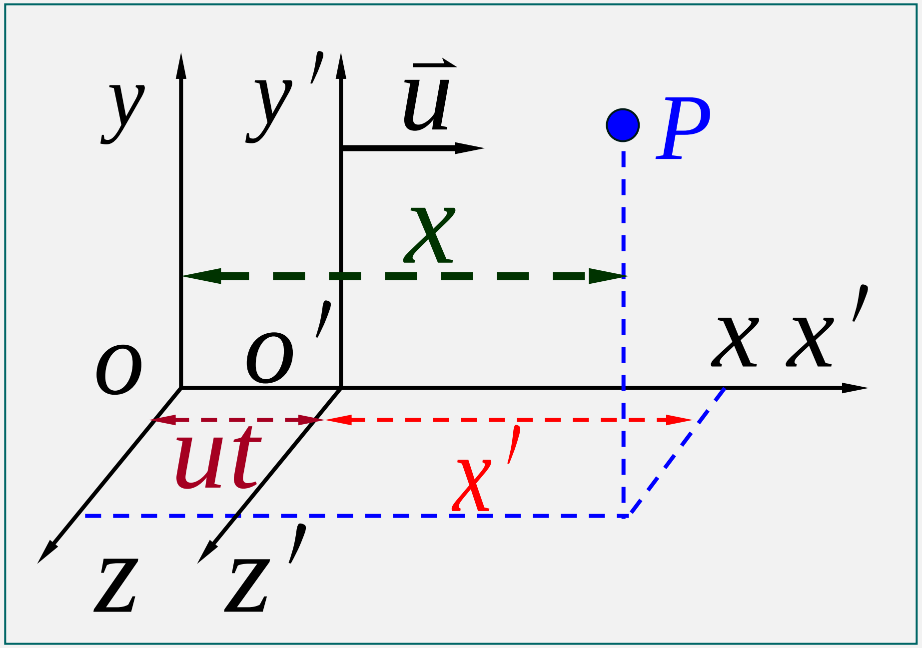
❖ 力学相对性原理

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

$\because$ $\vec{u}$ 为常量

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t}$$

$\therefore$ $\vec{a} = \vec{a}'$

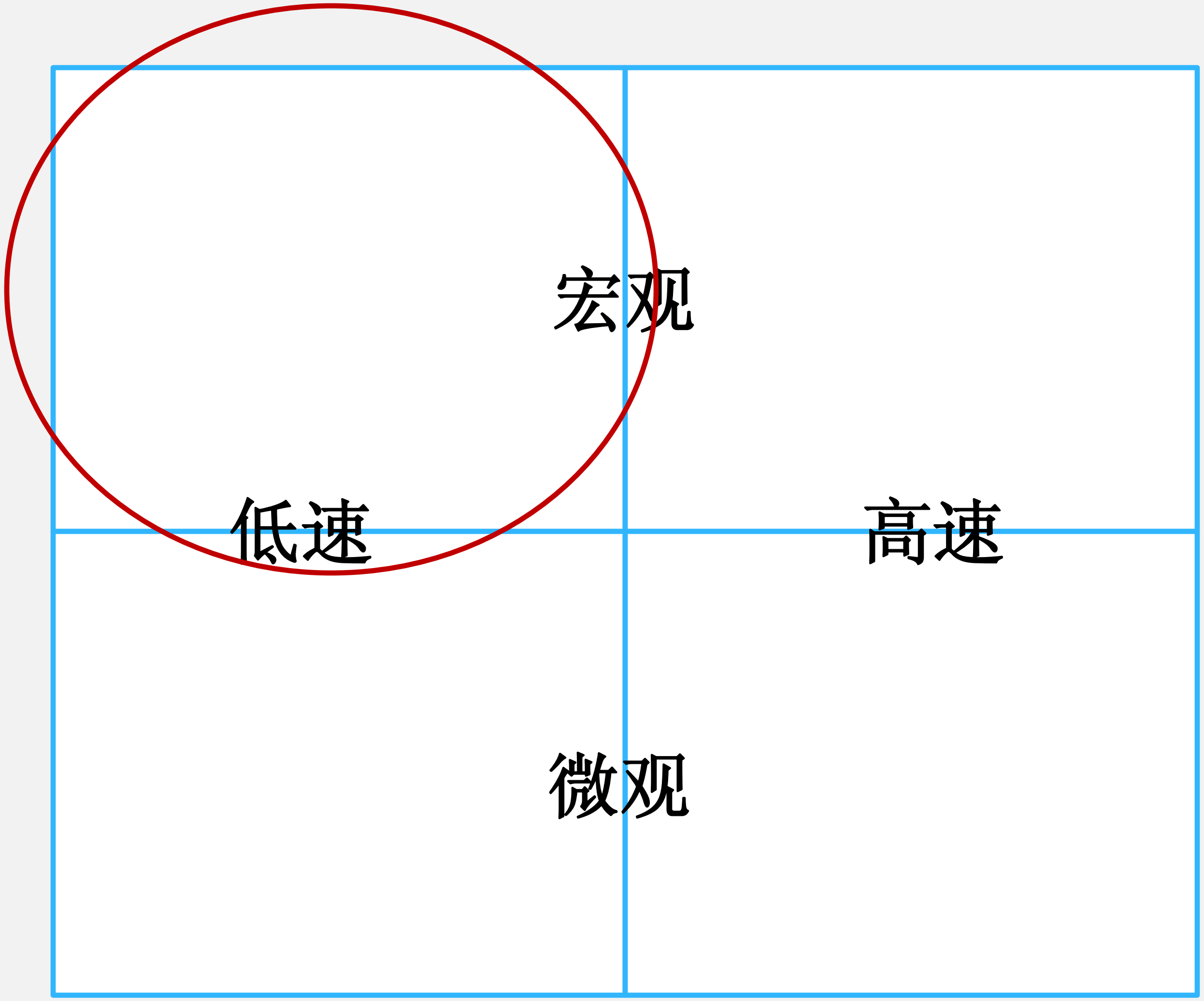


$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' = \vec{F}'$$

伽利略相对性原理

对于不同惯性系，牛顿力学的规律都具有相同的形式，与惯性系的运动无关。

❖牛顿运动定律适用范围



本章小结

牛一： 惯性

$$\vec{F}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}=C$$

牛二： 力加倍，加速度加倍；质量加倍，加速度减半

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}$$

牛三：相互作用，同时、等大、反向。

$$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$$

牛小二：
只适用于惯性系，
其他地方不包(shì)
邮(yòng)哦，亲!

本章小结（2）

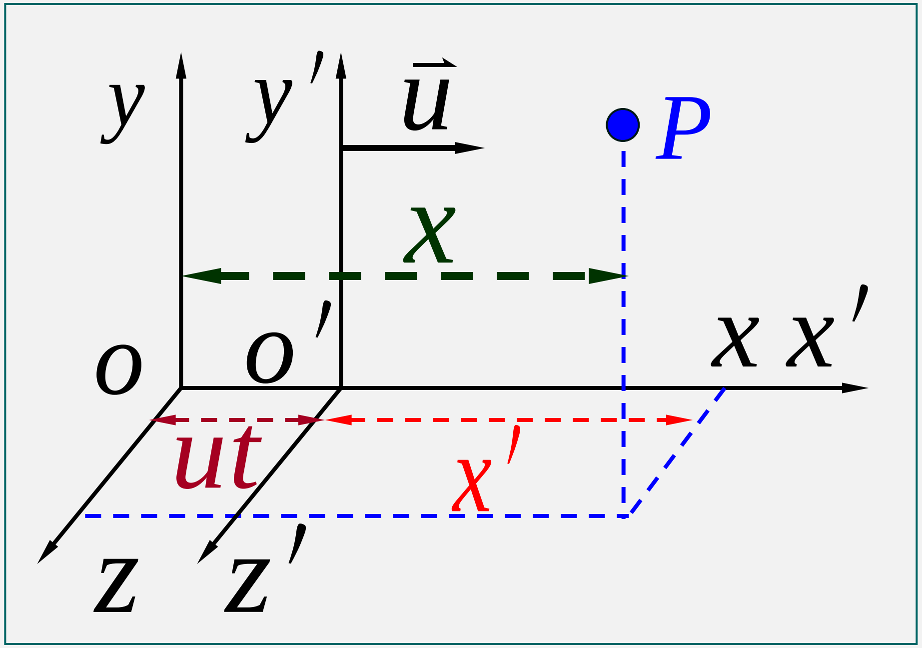
力的相对性原理

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' = \vec{F}'$$

!!!前提：惯性参照系

在惯性参考系中，一个不受相互作用的物体将保持相对静止或匀速直线运动。

凡相对于惯性系作匀速直线运动的一切参考系都是惯性系。



本章小结（3）

常见的力：

重力 $\vec{F}=m\vec{g}$　　$g\approx\dfrac{G_0M}{R^2}$

弹性力 $\vec{F}=-k\vec{v}$

静（滑动）摩擦力 $f_{\max}=\mu_0N$　$f=\mu N$

流体阻力 $F\propto v, v^2 \text{ or } v^3$

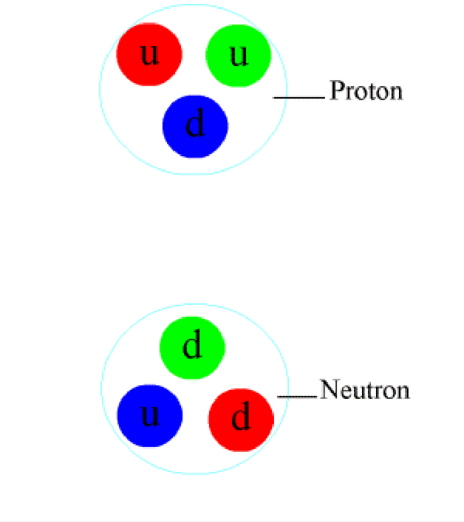
基本作用力：

万有引力

电磁相互作用力

强相互作用力

弱相互作用力



作业： 第二章

2.1 2.2 2.3 2.4

THANKS

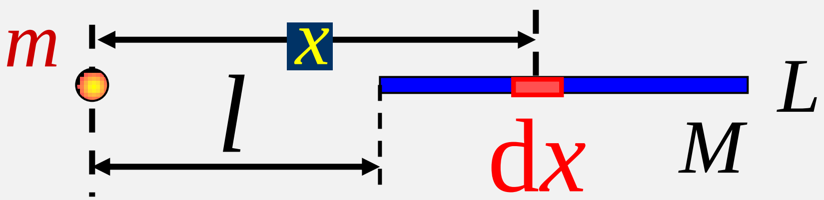
FOR YOUR ATTENTION

Last Page

例 如图所示，一质点m旁边放一长度为L、质量为M的杆，杆离质点近端距离为l。

求该系统的万有引力大小。

问题： 杆能否看作是一质点？

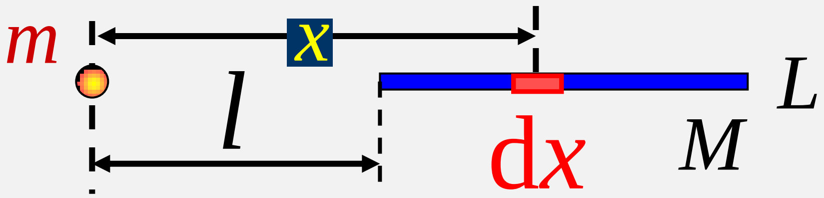


解 质元 $\mathrm{d}M = \lambda\,\mathrm{d}x$

质元、质点间引力 $\mathrm{d}f = G\dfrac{m\mathrm{d}M}{x^2} = G\dfrac{mM\mathrm{d}x}{Lx^2}$

杆、质点间引力

$$f=\int_{l}^{l+L}\mathrm{d}f=\int_{l}^{l+L}G\frac{mM}{Lx^{2}}\mathrm{d}x=G\frac{mM}{l(l+L)}$$



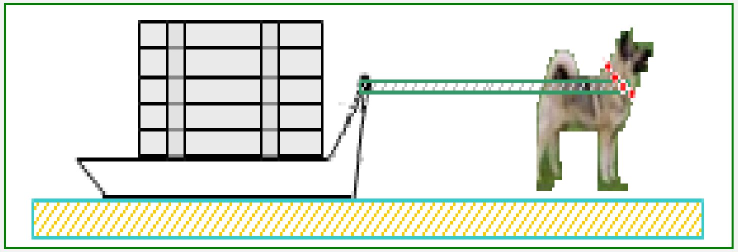
当 ***l* >>*L*** 时

$$G\frac{mM}{l(l+L)}\rightarrow G\frac{mM}{l^{2}}$$

杆可看作是一质点。

例 狗拉着质量为M的雪橇，运载着质量为m的木箱，在水平的雪地上奔跑。已知木箱与撬板之间静摩擦系数为μ_0，雪橇和雪之间的滑动摩擦系数为μ，作用于雪橇的水平拉力为F，试求雪橇的加速度、木板与撬板间相互作用的静摩擦力。问：作用在雪橇上的水平力超过多少才能保证木箱不致往后滑去。

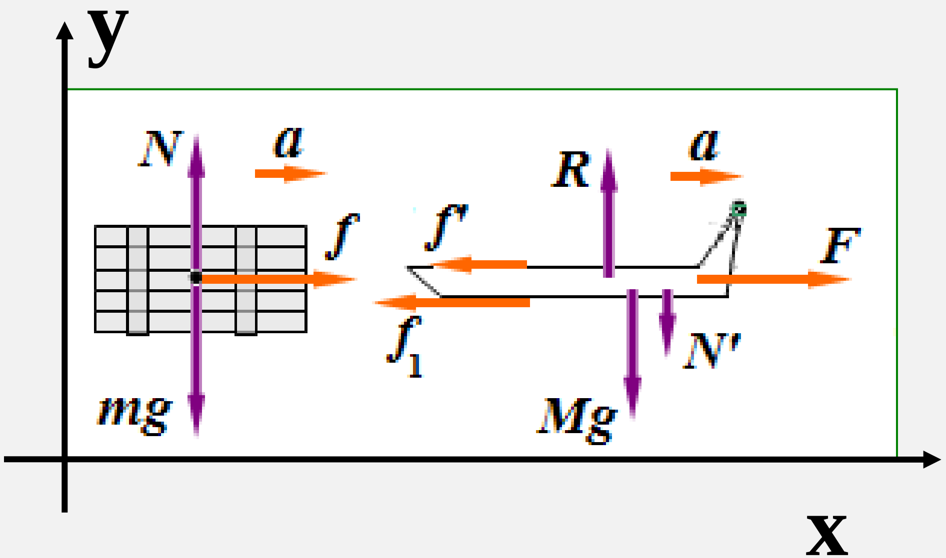
解 分别选木箱和雪橇为研究对象，受力如图。



F 较小时,木箱和撬板之间没有相对滑动。设它们的加速度为a, 取如图的直角坐标系, 根据牛顿第二定律，对m对M，有

$$f = ma$$
$$N - mg = 0$$

$$F - f_1 - f' = Ma$$
$$R - N' - Mg = 0$$



根据牛顿第三定律

$$f = f' \ , N = N', f_1 = \mu R$$

解以上各式，可得

$$a=\frac{F-\mu(M+m)g}{M+m}$$

$$f=f'=ma=m\frac{F-\mu(M+m)g}{M+m}$$

设水平力增加到F_0时，加速度$a=a_0$，摩擦力 $f=f'=\mu_0 N=\mu_0 mg$ 达到最大静摩擦力，有

$$\mu_0 mg=ma_0$$

$$F_0-\mu(M+m)g-\mu_0 mg=Ma_0$$

解上述两式可得

$$a_0 = \mu_0 g$$

$$F_0 = (\mu + \mu_0)(M + m)g$$

如果水平力继续增大，大于F_0时，木箱和撬板之间发生相对滑动。所以要保证木箱不往后滑，作用于撬板的拉力必须满足以下条件

$$F \le (\mu + \mu_0)(M + m)g \quad 或 \quad a \le \mu_0 g$$