第二章

导数与微分

(习题课)

题组一　概念

1.已知

$$f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)+(x^2-1)\arcsin\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x^2+1}$$

求 $f'(1)$.

解: 利用导数的定义

显然 $f(1)=0$.

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left[x(x-2)\cdots(x-n)+(x+1)\arcsin\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x^2+1}\right]$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)!+0$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

3.设 $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0 \quad , x=0 \end{cases}$，证明：$f(x)$ 在 $x=0$

处连续、可导，但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 不可导.

证明： $\because \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^3\sin\dfrac{1}{x} = 0 = f(0)$,

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0$$

$\therefore f'(0)=0$

接3.

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(3x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})$$

因 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在　所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。

4. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & ,x\le 0 \\ b(1+2x) & ,x>0 \end{cases}$,

试确定常数 a,b,使 $f(x)$ 处处可导,并求 $f'(x)$.

解: 因为可导函数必连续，而可导的充要条件是左导数等于右导数，故

$$\begin{cases} f(0^+)=f(0^-)=f(0) \\ f'_+(0)=f'_-(0) \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} b=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{b(1+2x)-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{ax}-1}{x-0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=2 \end{cases} \Longrightarrow f'(0)=2$$

于是 $$f'(x)=\begin{cases} 2e^{2x} & ,x<0 \\ 2 & ,x\ge 0 \end{cases}.$$

5. 设 对任意实数 x 和 y，有 $f(x+y)=f(x)f(y)$，

且 $f'(0)=1$， 证明： $f'(x)=f(x)$

证明： 取 x, y 均为0有： $f(0+0)=f(0)f(0)$

$\Longrightarrow$ $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$.

若 $f(0)=0$，则 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0)\cdot f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0\neq 1$$

所以 $f(0)=1$.

接5.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\cdot f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}$$

$$=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)f'(0)$$

$$=f(x).$$

题组二：计算

1. 设 $y = x^{\cos x} + \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$ 求 y'.

解：利用对数求导法。

设 $y_1 = x^{\cos x}$， $y_2 = \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x\sqrt{x}}} = x^{\frac{3}{4}}$.

则 $$y_1' = x^{\cos x}(\cos x \ln x)'$$

$$= x^{\cos x}(-\sin x\cdot\ln x + \cos x\cdot\frac{1}{x})$$

$$y_2' = (x^{\frac{3}{4}})' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}.$$

所以 $$y' = y_1' + y_2' = \cdots.$$

2 . 设 $y=\cos^2\ln x+\ln\cos^2 x$，求 $dy\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解：$dy=d(\cos^2\ln x)+d(\ln\cos^2 x)$

$$=2\cos(\ln x)\cdot(-\sin(\ln x))\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$+\frac{1}{\cos^2 x}2\cos x\cdot(-\sin x)dx$$

$$=(-\frac{\sin(2\ln x)}{x}-2\tan x)dx$$

$$dy\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=-[\frac{4}{\pi}\sin(\ln\frac{\pi^2}{16})+2]dx$$

3 . 设$y=\sqrt[3]{6-x}(tgx)^x+\sin^3\frac{2}{5}\pi$， 求 y' .

解: 设 $y_1=\sqrt[3]{6-x}(tgx)^x$ 则

$$\ln y_1=\frac{1}{3}\ln(6-x)+x\ln(\tan x)$$

$$\therefore \frac{y_1'}{y_1}=\frac{1}{3}\frac{-1}{6-x}+\ln(\tan x)+x\frac{1}{\tan x}\sec^2 x$$

$$\therefore y_1'=\sqrt[3]{6-x}(tgx)^x\left[\frac{1}{3}\frac{-1}{6-x}+\ln(\tan x)+x\frac{1}{\tan x}\sec^2 x\right]$$

$$\therefore y'=y_1'=\cdots$$

4. 设 $f(x)$ 可导，且 $y = f(e^{-x^2})e^{f(x)}$ ，求 y'.

解： $y' = (f(e^{-x^2}))' \cdot e^{f(x)} + f(e^{-x^2}) \cdot (e^{f(x)})'$

$$= f'(e^{-x^2}) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot e^{f(x)}$$

$$+ f(e^{-x^2}) \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

5. 设 $y = y(x)$ 由方程 $\arctan\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

所确定, 求 $y''|_{y=0}$.

解: 由方程 $\arctan\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ 可以知道

$y = 0$ 时, $x = 1$ 或 $x = -1$.

将原方程两边同时关于 x 求导得

$$\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{y'\cdot x - y}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$$

整理得 $y'x - y = x + yy' \cdots\cdots (*)$

接5.

所以 $x=1$，$y=0$ 时， $y'\big|_{\substack{x=1\\y=0}}=1.$

再对(*)式两边关于x求导得

$$y''(x-y)=1+(y')^2$$

$$\Downarrow\quad x=1,\ y=0,\ y'\big|_{\substack{x=1\\y=0}}=1.$$

$$y''\big|_{\substack{x=1\\y=0}}=2.$$

$x=-1, y=0$ 的情况同理.

6.设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解: $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}=\frac{3t^2+2t}{1-\dfrac{1}{1+t}}=(1+t)(3t+2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\dfrac{dy}{dx})}{dx}=\frac{d(\dfrac{dy}{dx})}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}=\frac{6t+5}{1-\dfrac{1}{1+t}}$$

$$=\frac{(1+t)(6t+5)}{t}.$$

7.设 $y=y(x)$ 由$\begin{cases} xe^t+t\cos x=\pi \\ y=\sin t+\cos^2 t \end{cases}$所确定，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解: 由参数方程可知 $x=0$ 时, $t=\pi$.

将参数方程中两方程两边同时关于t 求导得

$$\begin{cases} e^t\dfrac{dx}{dt}+xe^t+\cos x-t\sin x\cdot\dfrac{dx}{dt}=0 \\ \dfrac{dy}{dt}=\cos t-2\cos t\cdot\sin t \end{cases}$$

将 $x=0$ 时, $t=\pi$. 分别代入以上两方程得

接7.

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\substack{x=0\\t=\pi}} = -e^{-\pi}, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\pi} = -1$$

于是 $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{dy}{dt}\middle/\frac{dx}{dt}\right|_{\substack{x=0\\t=\pi}} = -1/(-e^{-\pi}) = e^{\pi} .$$

8.设 $y=e^{x}\sin x$, 求$y^{(n)}$

解: 令 $u=e^{x}, v=\sin x$

则 $u^{(k)}=e^{x}, v^{(k)}=\sin(x+k\cdot\frac{\pi}{2})$

利用莱布尼兹公式.

$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}c_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}c_n^k e^{x}v^{(k)}=e^{x}\sum_{k=0}^{n}c_n^k v^{(k)}$$

$$=e^{x}\sum_{k=0}^{n}c_n^k\sin(x+k\cdot\frac{\pi}{2})$$

9.设 $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$，求 $y^{(n)}(0)$

解法1: $y=\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{1+x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=(1+x)^{\frac{2}{3}}-(1+x)^{-\frac{1}{3}}$

$$y^{(n)}(0)=(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})\cdots(-\frac{1}{3}-n+2)n$$

解法2: 利用莱布尼兹公式.

设 $u=(1+x)^{-\frac{1}{3}}, v=x$,

则 $v'=1$，$v^{(k)}=0\ (k=2,3,\cdots)$

$\therefore y^{(n)}=\cdots\cdots.$

10.设 $y=\sin^4 x-\cos^4 x$，求 $y^{(n)}(x)$.

解: $y=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)$

$$=-\cos 2x$$

$$\therefore\ y^{(n)}(x)=-2^n\cos(2x+\frac{n\pi}{2}).$$

题组三：应用

1.设 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导,

求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2 f(a)-a^2 f(x)}{x-a}$.

解: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2 f(a)-a^2 f(x)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x^2 f(a)-a^2 f(a)+a^2 f(a)-a^2 f(x)}{x-a}.$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-a^2)f(a)}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{a^2(f(x)-f(a))}{x-a}$$

$$=2af(a)-a^2 f'(a).$$

2.设 $f'(0)$ 存在且 $f(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}$.

解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x-0}\cdot\frac{1-\cos x}{\tan x^2}$$

$$=f'(0)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan x^2}$$

$$=f'(0)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\quad =f'(0)\cdot\frac{1}{2}.$$

3.设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导且 $f'(x_0)\neq 0$，

求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-dy}{\Delta x}$.

解: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-dy}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-f'(x_0)\Delta x}{\Delta x}$$

$$=f'(x_0)-f'(x_0)$$

$$=0.$$

4.设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导且周期为4,

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=1$, 求曲线 $y=f(x)$

在点 $(5,f(5))$ 处的切线方程.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=1,$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=1,$$

$$\Downarrow$$

$$f'(1)=2$$

又知 $f(1)=f(5)$,

接4.

而

$$f'(5)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(5+\Delta x)-f(5)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=f'(1)$$

$$=2$$

于是所求切线方程为 $y-f(5)=2(x-5)$.

5.求对数螺线 $r = e^{\theta}$ 在点 $(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线方程.

解: 由直角坐标与极坐标的关系得对数螺线的参数方程

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = e^{\theta}\cos\theta \\ y = r\sin\theta = e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

且 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = 0$, $y = e^{\frac{\pi}{2}}$. 于是

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{e^{\theta}(\sin\theta + \cos\theta)}{e^{\theta}(\cos\theta - \sin\theta)}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1$$

因此所求切线方程为: $y - e^{\frac{\pi}{2}} = (-1)(x - 0)$.

6. 设曲线方程为 $x^3+y^3+(x+1)\cos\pi y+9=0$

求曲线在 $x=-1$ 处的法线方程.

解: 对曲线方程两边关于 x 求导得

$$3x^2+3y^2y'+\cos\pi y+(x+1)(-\sin\pi y)\pi y'=0$$

又知 $x=-1$ 时, $y=-2$, 代入上式得

$$y'\big|_{x=-1}=-\frac{1}{3}$$

于是所求法线方程为:

$$y+2=3(x+1)$$