

集合论

集合论部分

- 第3章 集合的基本概念和运算
- 第4章 二元关系和函数

第3章 集合的基本概念和运算

- 3.1 集合的基本概念
- 3.2 集合的基本运算
- 3.3 集合中元素的计数

3.1 集合的基本概念

- 集合的定义与表示
- 集合与元素
- 集合之间的关系
- 空集
- 全集
- 幂集

集合定义与表示

集合 没有精确的数学定义

理解：一些离散个体组成的全体

组成集合的个体称为它的元素或成员

集合的表示

列元素法 $A = \{ a, b, c, d \}$ (枚举法)

谓词表示法 $B = \{ x \mid P(x) \}$

B 由使得 $P(x)$ 为真的 x 构成

常用数集

N, Z, Q, R, C 分别表示自然数、整数、有理数、实数和复数集合，注意 0 是自然数.

集合与元素

元素与集合的关系：隶属关系

属于 \in ，不属于 \notin

实例

$$A = \{ x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 1 = 0 \}, A = \{-1, 1\}$$

$$1 \in A, 2 \notin A$$

注意：对于任何集合 A 和元素 x (可以是集合)，
 $x \in A$ 和 $x \notin A$ 两者成立其一，且仅成立其一。

隶属关系的层次结构

例 3.1

$$A = \{ a, \{b, c\}, d, \{\{d\}\} \}$$

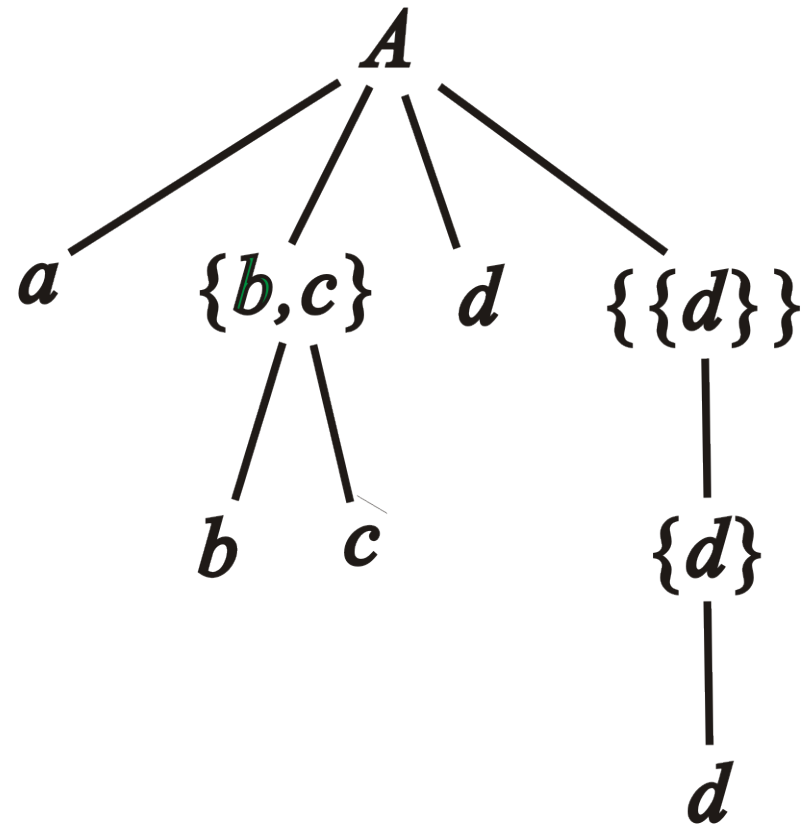
$$\{b, c\} \in A$$

$$b \notin A$$

$$\{\{d\}\} \in A$$

$$\{d\} \notin A$$

$$d \in A$$



集合之间的关系

包含（子集） $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$

不包含 $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge x \notin B)$

相等 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

不相等 $A \neq B$

真包含 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

不真包含 $A \not\subset B$

思考： \neq 和 $\not\subset$ 的定义

注意 \in 和 \subseteq 是不同层次的问题

空集与全集

空集 \emptyset 不含任何元素的集合

实例 $\{x \mid x^2+1=0 \wedge x \in \mathbf{R}\}$ 就是空集

定理 空集是任何集合的子集

$$\emptyset \subseteq A \Leftrightarrow \forall x (x \in \emptyset \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T$$

推论 空集是惟一的.

证 假设存在 \emptyset_1 和 \emptyset_2 , 则 $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$ 且 $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$, 因此 $\emptyset_1 = \emptyset_2$

全集 E

相对性

在给定问题中, 全集包含任何集合, 即 $\forall A (A \subseteq E)$

幂集

定义 $P(A) = \{ x \mid x \subseteq A \}$

实例

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\},$$

$$P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$P(\{1, \{2, 3\}\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{2, 3\}\}, \{1, \{2, 3\}\}\}$$

计数

如果 $|A| = n$, 则 $|P(A)| = 2^n$

3.2 集合的基本运算

- 集合基本运算的定义

$$\cup \cap - \sim \oplus$$

- 文氏图 (John Venn)

- 例题

- 集合运算的算律

- 集合包含或恒等式的证明

集合基本运算的定义

并 $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$

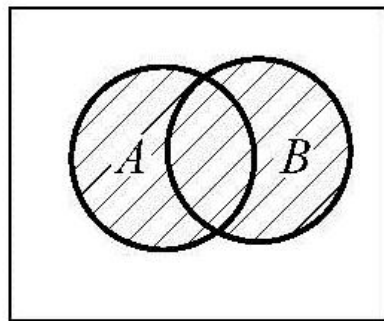
交 $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

相对补 $A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$

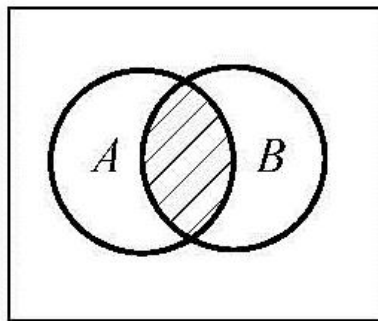
对称差
$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

绝对补 $\sim A = E - A$

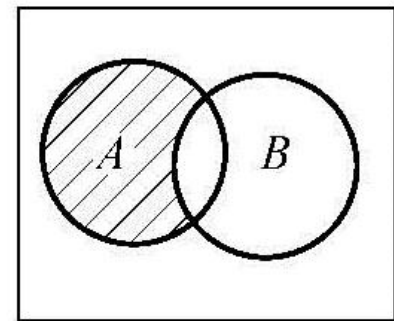
文氏图表示



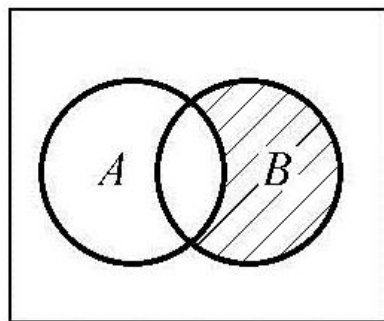
$$A \cup B$$



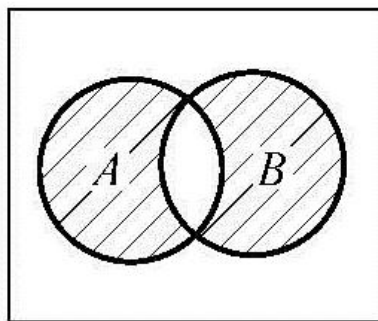
$$A \cap B$$



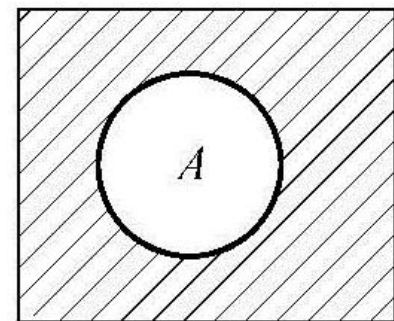
$$A - B$$



$$B - A$$



$$A \oplus B$$



$$\sim A$$

关于运算的说明

- 运算顺序：~和幂集优先，其他由括号确定
- 并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n\}$$

- 某些重要结果

$$\emptyset \subseteq A - B \subseteq A$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset \quad (\text{后面证明})$$

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A - B = A$$

例1

F:一年级大学生的集合

R: 计算机系学生的集合

T: 选修离散数学的学生的集合

L: 爱好文学学生的集合

S: 二年级大学生的集合

M: 数学系学生的集合

P: 爱好体育运动学生的集合

所有计算机系二年级学生都选修离散数学

数学系一年级的学生都没有选修离散数学

数学系学生或爱好文学或爱好体育运动

只有一、二年级的学生才爱好体育运动

除去数学和计算机系二年级学生外都不选修离散数学

$$T \subseteq (M \cup R) \cap S$$

$$R \cap S \subseteq T$$

$$(M \cap F) \cap T = \emptyset$$

$$M \subseteq L \cup P$$

$$P \subseteq F \cup S$$

$$S - (M \cup R) \subseteq P$$

例2

分别对条件(1)到(5)，确定 X 集合与下述那些集合相等。

$$S_1 = \{ 1, 2, \dots, 8, 9 \}, S_2 = \{ 2, 4, 6, 8 \}, S_3 = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \},$$

$$S_4 = \{ 3, 4, 5 \}, S_5 = \{ 3, 5 \}$$

(1) 若 $X \cap S_3 = \emptyset$, 则 $X = S_2$

(2) 若 $X \subseteq S_4, X \cap S_2 = \emptyset$, 则 $X = S_5$

(3) 若 $X \subseteq S_1, X \not\subseteq S_3$, 则 $X = S_1, S_2, S_4$

(4) 若 $X - S_3 = \emptyset$, 则 $X = S_3, S_5$

(5) 若 $X \subseteq S_3, X \not\subseteq S_1$, 则 X 与 S_1, \dots, S_5 都不等

集合运算的算律

	\cup	\cap	\oplus
交换	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	$A \oplus B = B \oplus A$
结合	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
幂等	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	

	\cup 与 \cap	\cap 与 \oplus
分配	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
吸收	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	

吸收律的前提： \cup 、 \cap 可交换

集合运算的算律（续）

	$-$	\sim
<i>D.M</i> 律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

	\emptyset	E
补元律	$A\cap\sim A=\emptyset$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\emptyset=\emptyset$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\emptyset=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\emptyset=E$	$\sim E=\emptyset$

集合包含或相等的证明方法

■ 证明 $X \subseteq Y$

- 命题演算法
- 包含传递法
- 等价条件法
- 反证法
- 并交运算法

■ 证明 $X=Y$

- 命题演算法
- 等式代入法
- 反证法
- 运算法

以上的 X, Y 代表集合公式

命题演算法证 $X \subseteq Y$

任取 x ,

$$x \in X \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in Y$$

例3 证明 $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

任取 x

$$x \in P(A) \Rightarrow x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq B \Rightarrow x \in P(B)$$

任取 x

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow \{x\} \subseteq A \Rightarrow \{x\} \in P(A) \Rightarrow \{x\} \in P(B) \\ &\Rightarrow \{x\} \subseteq B \Rightarrow x \in B \end{aligned}$$

包含传递法证 $X \subseteq Y$

找到集合 T 满足 $X \subseteq T$ 且 $T \subseteq Y$, 从而有 $X \subseteq Y$

例4 $A - B \subseteq A \cup B$

证 $A - B \subseteq A$

$A \subseteq A \cup B$

所以 $A - B \subseteq A \cup B$

利用包含的等价条件证 $X \subseteq Y$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \phi$$

例5 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证 $A \subseteq C \Rightarrow A \cup C = C$

$$B \subseteq C \Rightarrow B \cup C = C$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C$$

$$(A \cup B) \cup C = C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$$

命题得证

反证法证 $X \subseteq Y$

欲证 $X \subseteq Y$, 假设命题不成立, 必存在 x 使得 $x \in X$ 且 $x \notin Y$. 然后推出矛盾.

例6 证明 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证 假设 $A \cup B \subseteq C$ 不成立,

则 $\exists x (x \in A \cup B \wedge x \notin C)$

因此 $x \in A$ 或 $x \in B$, 且 $x \notin C$

若 $x \in A$, 则与 $A \subseteq C$ 矛盾;

若 $x \in B$, 则与 $B \subseteq C$ 矛盾.

利用已知包含式并交运算

由已知包含式通过运算产生新的包含式

$$X \subseteq Y \Rightarrow X \cap Z \subseteq Y \cap Z, X \cup Z \subseteq Y \cup Z$$

例7 证明 $A \cap C \subseteq B \cap C \wedge A - C \subseteq B - C \Rightarrow A \subseteq B$

证 $A \cap C \subseteq B \cap C, A - C \subseteq B - C$

上式两边求并，得

$$(A \cap C) \cup (A - C) \subseteq (B \cap C) \cup (B - C)$$

$$\Rightarrow (A \cap C) \cup (A \cap \sim C) \subseteq (B \cap C) \cup (B \cap \sim C)$$

$$\Rightarrow A \cap (C \cup \sim C) \subseteq B \cap (C \cup \sim C)$$

$$\Rightarrow A \cap E \subseteq B \cap E$$

$$\Rightarrow A \subseteq B$$

命题演算法证明 $X=Y$

任取 x ,

$$x \in X \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in Y$$

$$x \in Y \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in X$$

或者

$$x \in X \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in Y$$

例8 证明 $A \cup (A \cap B) = A$ (吸收律)

证 任取 x ,

$$x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \cap B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A$$

等式替换证明 $X=Y$

不断进行代入化简，最终得到两边相等

例9 证明 $A \cup (A \cap B) = A$ （吸收律）

证（假设交换律、分配律、同一律、零律成立）

$$\begin{aligned} & A \cup (A \cap B) \\ &= (A \cap E) \cup (A \cap B) && \text{同一律} \\ &= A \cap (E \cup B) && \text{分配律} \\ &= A \cap (B \cup E) && \text{交换律} \\ &= A \cap E && \text{零律} \\ &= A && \text{同一律} \end{aligned}$$

反证法证明 $X=Y$

假设 $X=Y$ 不成立, 则存在 x 使得 $x \in X$ 且 $x \notin Y$, 或者存在 x 使得 $x \in Y$ 且 $x \notin X$, 然后推出矛盾.

例10 证明以下等价条件

$$\begin{array}{cccc} A \subseteq B & \Leftrightarrow & A \cup B = B & \Leftrightarrow & A \cap B = A & \Leftrightarrow & A - B = \emptyset \\ (1) & & (2) & & (3) & & (4) \end{array}$$

证明顺序:

$$(1) \Rightarrow (2), (2) \Rightarrow (3), (3) \Rightarrow (4), (4) \Rightarrow (1)$$

(1) \Rightarrow (2)

显然 $B \subseteq A \cup B$, 下面证明 $A \cup B \subseteq B$.

任取 x ,

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B$$

因此有 $A \cup B \subseteq B$. 综合上述 (2) 得证.

(2) \Rightarrow (3)

$$A = A \cap (A \cup B) \Rightarrow A = A \cap B$$

(将 $A \cup B$ 用 B 代入)

(3) \Rightarrow (4)

假设 $A-B \neq \emptyset$, 即 $\exists x \in A-B$, 那么 $x \in A$ 且 $x \notin B$. 而

$$x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B.$$

从而与 $A \cap B = A$ 矛盾.

(4) \Rightarrow (1)

假设 $A \subseteq B$ 不成立, 那么

$$\exists x (x \in A \wedge x \notin B) \Rightarrow x \in A-B \Rightarrow A-B \neq \emptyset$$

与条件 (4) 矛盾.

集合运算法证明 $X=Y$

由已知等式通过运算产生新的等式

$$X=Y \Rightarrow X \cap Z = Y \cap Z, X \cup Z = Y \cup Z, X - Z = Y - Z$$

例11 证明 $A \cap C = B \cap C \wedge A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$

证 由 $A \cap C = B \cap C$ 和 $A \cup C = B \cup C$ 得到

$$(A \cup C) - (A \cap C) = (B \cup C) - (B \cap C)$$

从而有 $A \oplus C = B \oplus C$

因此

$$\begin{aligned} A \oplus C = B \oplus C &\Rightarrow (A \oplus C) \oplus C = (B \oplus C) \oplus C \\ &\Rightarrow A \oplus (C \oplus C) = B \oplus (C \oplus C) \Rightarrow A \oplus \emptyset = B \oplus \emptyset \Rightarrow A = B \end{aligned}$$

3.3 集合中元素的计数

- 集合的基数与有穷集合
- 包含排斥原理
- 有穷集的计数

集合的基数与有穷集合

集合 A 的**基数**：集合 A 中的元素数，记作 $\text{card}A$

有穷集 A ： $\text{card}A=|A|=n$ ， n 为自然数.

有穷集的实例：

$$A=\{a,b,c\}, \text{card}A=|A|=3;$$

$$B=\{x \mid x^2+1=0, x \in R\}, \text{card}B=|B|=0$$

无穷集的实例：

N, Z, Q, R, C 等

包含排斥原理

定理 设 S 为有穷集, P_1, P_2, \dots, P_m 是 m 种性质, A_i 是 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集, $i=1, 2, \dots, m$. 则 S 中不具有性质 P_1, P_2, \dots, P_m 的元素数为

$$\begin{aligned} & |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_m}| \\ &= |S| - \sum_{i=1}^m |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\ &+ (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| \end{aligned}$$

证明

证明要点：任何元素 x ，如果不具有任何性质，
则对等式右边计数贡献为 1，否则为 0

证 设 x 不具有性质 P_1, P_2, \dots, P_m ,

$$x \notin A_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$x \notin A_i \cap A_j, 1 \leq i < j \leq m$$

...

$$x \notin A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m,$$

x 对右边计数贡献为

$$1 - 0 + 0 - 0 + \dots + (-1)^m \cdot 0 = 1$$

证明（续）

设 x 具有 n 条性质, $1 \leq n \leq m$

x 对 $|S|$ 贡献为 1

x 对 $\sum_{i=1}^m |A_i|$ 贡献为 C_n^1

x 对 $\sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j|$ 贡献为 C_n^2

....

x 对 $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|$ 贡献为 C_n^m

x 对右边计数贡献为

$$1 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^m C_n^m = \sum_{i=0}^n C_n^i = 0$$

推论

S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m|$$

$$= \sum_{i=1}^m |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots$$

$$+ (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|$$

证明 $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m|$

$$= |S| - |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m}|$$

$$= |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_m}|$$

将定理 1 代入即可

应用

例1 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被5或6整除，也不能被8整除的数有多少个？

解： $S = \{ x \mid x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 1000 \}$,
如下定义 S 的 3 个子集 A, B, C :
 $A = \{ x \mid x \in S, 5 \mid x \}$,
 $B = \{ x \mid x \in S, 6 \mid x \}$,
 $C = \{ x \mid x \in S, 8 \mid x \}$

例1（续）

对上述子集计数：

$$|S|=1000,$$

$$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor =200, \quad |B|=\lfloor 1000/6 \rfloor =133,$$

$$|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor =125,$$

$$|A \cap B|=\lfloor 1000/30 \rfloor =33, \quad |B \cap C|=\lfloor 1000/40 \rfloor =25,$$

$$|B \cap C|=\lfloor 1000/24 \rfloor =41,$$

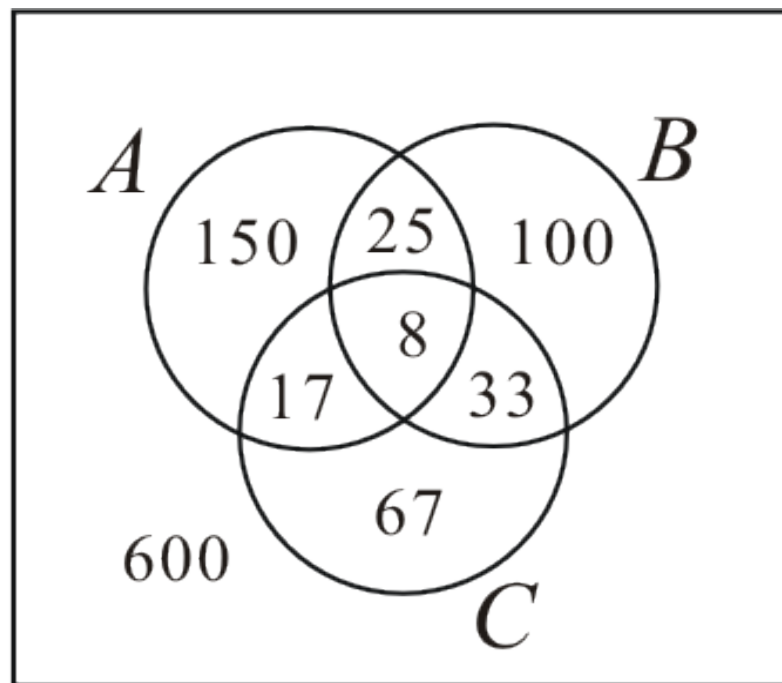
$$|A \cap B \cap C|=\lfloor 1000/120 \rfloor =8,$$

代入公式

$$N = 1000 - (200 + 133 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600$$

文氏图法

求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 或6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个？



例2

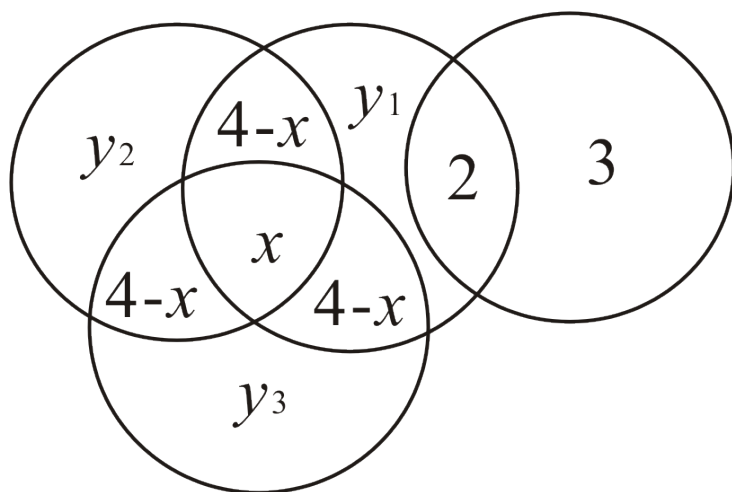
24名科技人员，每人至少会1门外语。

英语：13； 日语：5； 德语：10； 法语：9

英日：2； 英德：4； 英法：4； 法德：4

会日语的不会法语、德语

求：只会1种语言人数，会3种语言人数



$$x+2(4-x)+y_1+2=13$$

$$x+2(4-x)+y_2=10$$

$$x+2(4-x)+y_3=9$$

$$x+3(4-x)+y_1+y_2+y_3=19$$

$$x=1, y_1=4, y_2=3, y_3=2$$

例3 求欧拉函数的值

欧拉函数: $\phi(n)$

表示 $\{0,1,\dots,n-1\}$ 中与 n 互素的数的个数.

$\phi(12)=4$, 与12互素的数有1, 5, 7, 11.

解: n 的素因子分解式

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

$$A_i = \{ x \mid 0 \leq x < n-1 \text{ 且 } p_i \text{ 整除 } x \}$$

$$\phi(n) = | \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_k} |$$

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad 1 \leq i < j \leq k$$

...

$$|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| = \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k}$$

$$\phi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_k}|$$

$$= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \dots + \frac{n}{p_k} \right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \dots + \frac{n}{p_{k-1} p_k} \right)$$

$$- \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k}$$

$$= n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k} \right)$$

实例

与 60 互素的正整数有 16 个：

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,
31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59.

$$\begin{aligned}\phi(60) &= 60\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \\ &= 60 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 16\end{aligned}$$