高等数学
单元自测(十二)

一、填空题（每小题4分）

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$ 的收敛域为<u>(-e，e)</u>

析：$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n!}{n^n}\times\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=(1+\frac{1}{n})^n\to e$ 则 R=e

再考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n(\pm1)^n}{n^n}$， $\because (1+\frac{1}{n})^n \nearrow\longrightarrow e$

则 $\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!e^n}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1$

$\therefore u_{n+1}>u_n$ 即 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq0$

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛，则p的取值

范围为 $0<p\leq 1$.

析： $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$在$P>1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$在$p\leq 1$时收敛

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=$ $\underline{\quad 2 \quad}$

析：$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$,

$$s_n-\frac{1}{2}s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k+1}}=(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k})-\frac{n}{2^{n+1}},$$

$$\therefore s_n\to 2 \qquad (n\to\infty)$$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数为 $\dfrac{x}{(1-x)^2}$, $|x|<1$

析: $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{n}{n+1} \to 1, \therefore R = 1$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x(\sum_{n=1}^{\infty} x^n)' = x(\frac{x}{1-x})' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

5. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为3，则幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^{n+1}$ 的收敛区间为 （-1，5）.

析： $(a_n x^n)' = n a_n x^{n-1}, \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

与$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$有相同的收敛半径

则 $|x-2| < 3 \Rightarrow -1 < x < 5$

二、选择题（每题4分）

1. 设 $a_n > 0\ (n=1,3\ldots)$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，常数 $\lambda \in (0,\frac{\pi}{2})$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}$ （A）

A 绝对收敛；　　　　B 条件收敛；

C 发散；　　　　D 收敛性与λ无关.

析：$\because \delta_n = a_2 + a_4 + \cdots a_{2n} \le a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = s_{2n}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s \quad \therefore \delta_n < M$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛，而 $\dfrac{n\tan\frac{\lambda}{n}a_{2n}}{\lambda a_{2n}} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 1$

2. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^2}$ 的收敛域为（B）

A [-1， 1]；　　B [-3， -1]；

C [-1， 1)；　　D [1， 3).

析：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^2}{(n+1)^2}\to 1,$

且当$x+2=\pm 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^2}$收敛

3. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ (C)

A 绝对收敛；　　B 发散；

C 不一定收敛；　　D 一定条件收敛.

析：

$$\text{例如} \sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

4. 已知幂函数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0$点收敛，

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R\left(R > 0\right)$，则（C）

A $0 \le x_0 \le R$

B $x_0 > R$

C $\left|x_0\right| \le R$

D $\left|x_0\right| > R$

5. 设 $f(x)=x^2,\ 0\le x\le\pi$，而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ $(-\infty<x<\infty)$，其中 $b_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$ $(n=1,3,\cdots)$，则 $S\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 等于（B）。

A $-\dfrac{1}{2}$　　B $-\dfrac{1}{4}$

C $\dfrac{1}{4}$　　D $\dfrac{1}{2}$

三、 计算题 （每题8分）

1. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n^2-n+1}{2^n}$ 的和。

解:（1）判断级数收敛

$$\because \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

$\therefore$级数收敛

（2）$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= s_1(x) + \frac{1}{1-x}, |x| < 1$$

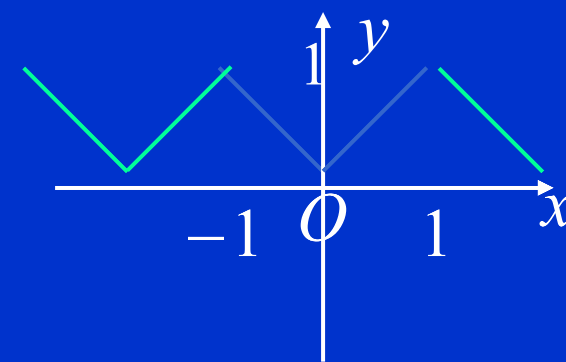
$$s_1(x) = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (x^n)'' = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

$$\text{原式} = S_1\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{22}{27}$$

2. 将函数 $f(x)=|x|\ (-1\le x\le 1)$ 展开成以2为周期的傅立叶级数，并求此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和。

解：$f(x)$为偶函数，$\therefore b_n=0$



$$a_0=2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=1$$

$$a_n=2\int_0^1\ 2\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]$$

因 $f(x)$ 偶延拓后在 $(-\infty,+\infty)$上连续，故得

$$|x|=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x,\quad x\in[-1,1]$$

令 $x=0$, 得

$$0=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

故 $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}}$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

3. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m)}$ 之和。$(m\geq 1)$

解：

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m)}$$

$$=\frac{1}{m}\left[\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\right]$$

接3

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$$

$$=\frac{1}{m}\left[\left(\frac{1}{(1+1)(1+2)\cdots(1+m-1)}-\frac{1}{2\cdot 3\cdots(1+m)}\right)\right.$$

$$+\left(\frac{1}{2\cdot 3\cdots(m+1)}-\frac{1}{3\cdot 4\cdots(m+2)}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}$$

$$=\frac{1}{m}\left[\frac{1}{m!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}\right]$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{m\cdot m!} \qquad \therefore S=\frac{1}{m\cdot m!}$$

4. 求 $f(x)=\cos^2 x$ 的麦克劳林展开式。

解：

$$f(x)=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!} \qquad |x|<+\infty$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}2^{2n-1}x^{2n}$$

5. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(n+1)}$ 的收敛半径和收敛域。

解: 令 $y=x^2$ $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n y^n$$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ $\therefore R=1,$ 当y=1时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$收敛

当y=−1时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$收敛 $\therefore\ y\in[-1,1]\Rightarrow 0\le x^2\le 1$

$\therefore$ 收敛域为[-1，1]

首 页 上一页 下一页 尾 页 结 束 返 回

四、证明题（10分）

设$u_n>0, v_n>0, n=1,2,3\ldots$，且对一切$n$都有

$$v_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-v_{n+1}\geq a>0,$$ 其中a为常数，证明级数

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

证：由条件有 $v_nu_n-v_{n+1}u_{n+1}\geq au_{n+1}>0$

（n=1，2，3，…），则

n=1时，$\sigma_1=v_1u_1-v_2u_2\geq au_2$

n=2时， $\sigma_2 = v_2 u_2 - v_3 u_3 \geq a u_3$

n= … ， …

n=k时， $\sigma_k = v_k u_k - v_{k+1} u_{k+1} \geq a u_{k+1}$

$$\therefore \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_k \geq a(u_2 + u_3 + \cdots + u_{k+1})$$

即 $a\sum_{k=2}^{n+1} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} \sigma_k = v_1 u_1 - v_{n+1} u_{n+1} < v_1 u_1$

$$\therefore s_n = u_2 + \cdots + u_{n+1} < \frac{v_1 u_1}{a}$$

即正项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ 的部分和有界

故 $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

五、(10分) 求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$收敛域（$a>0,b>0$）

解： 法1. $u_n=\frac{1}{a^n+b^n}$

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\begin{cases} a & a\geq b \\ b & a<b \end{cases}$$

$$\therefore R=\max(a,b)=c$$

当$x=\pm c$时,

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{a^n+b^n}=\begin{cases} 1, a\neq b \\ \frac{1}{2}, a=b \end{cases}$$

$\therefore$级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm c)^n}{a^n+b^n}$ 发散.

$\therefore$收敛域为（$-c,c$）.

法2. 记$c=max(a,b)$显然

$$\sqrt[n]{c^n}\le\sqrt[n]{a^n+b^n}\le\sqrt[n]{c^n+c^n}$$

由夹逼准则有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=c \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a^n+b^n}}=\frac{1}{c}$$

$\therefore$由根值法$R=c$