第五章 相似矩阵及二次型

本章内容

- 线性代数的几何理论

  (向量的内积、长度、正交等)

- 方阵的特征值与特征向量
- 方阵的相似对角化
- 二次型的化简

§1 向量的内积、长度及正交性

一. 向量的内积

二. 向量的长度(范数)

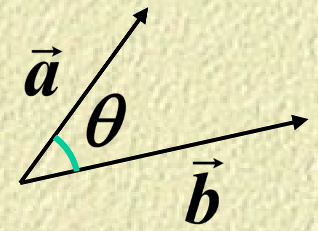
三. 向量的正交

四. 向量空间的规范正交基

五. 正交矩阵与正交变换

上页 下页 返回

高等数学中:



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$$

$$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$\xrightarrow{\text{推 广}}$ R^n (对象: 列向量)

上页 下页 返回

一. 向量的内积

定义1. 设 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, 称 $[\vec{x},\vec{y}]=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k$

为向量 $\vec{x},\vec{y}$ 的内积.

注:

$[\vec{x},\vec{y}]=\vec{x}^T\vec{y}$

性质: (1) $[\vec{x},\vec{y}]=[\vec{y},\vec{x}]$ (对称性)

(2) $\forall\lambda\in\mathbf{R}, [\lambda\vec{x},\vec{y}]=\lambda[\vec{x},\vec{y}]$

(3) $[\vec{x}+\vec{y},\vec{z}]=[\vec{x},\vec{z}]+[\vec{y},\vec{z}]$

(双线性性)

(4) $[\vec{x},\vec{x}]\geq 0$, 且 $[\vec{x},\vec{x}]=0 \Longleftrightarrow \vec{x}=\vec{0}$ (非负性)

一个重要的不等式—施瓦兹不等式

$$[\vec{x},\vec{y}]^2\leq[\vec{x},\vec{x}]\,[\vec{y},\vec{y}]$$

证明提示: $\forall\lambda\in\mathbf{R}, [\vec{x}+\lambda\vec{y},\vec{x}+\lambda\vec{y}]\geq 0$

二. 向量的长度(范数)

定义2. $\|\vec{x}\| = \sqrt{[\vec{x}, \vec{x}]}$ 称为向量 $\vec{x}$ 的 **长度 (或范数)**,

若 $\|\vec{x}\| = 1$, 则称 $\vec{x}$ 为**单位向量**.

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

性质: (1) **非负性** $\|\vec{x}\| \geq 0$, **且**

$$\|\vec{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

(2) **齐次性** $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$

(3) **三角不等式** $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

证(3) $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = [\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}] = [\vec{x}, \vec{x}] + 2[\vec{x}, \vec{y}] + [\vec{y}, \vec{y}]$

施瓦兹不等式 $|[\vec{x}, \vec{y}]| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$

$$\leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$$

故三角不等式成立.

上页 下页 返回

三. 向量的正交

1. 向量 $\vec{x}, \vec{y}$ **的夹角:**

$$\theta = \arccos \frac{[\vec{x}, \vec{y}]}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} \quad (\|\vec{x}\| \neq 0, \|\vec{y}\| \neq 0)$$

2. 若 $[\vec{x}, \vec{y}] = 0$, 则称向量 $\vec{x}, \vec{y}$ **正交.**

$$\vec{x}^T \vec{y} = 0$$

注意: $\vec{0}$ 与任何向量正交.

高等数学中:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

上页 下页 返回

例1. 已知 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, 求 $\vec{a}_3$, 使 $\vec{a}_3$ 与 $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ 正交.

解: 设 $\vec{a}_3=(x_1,x_2,x_3)^T$, **则** $\vec{a}_3$ **满足齐次方程组:**

$$\begin{pmatrix}\vec{a}_1^T\\ \vec{a}_2^T\end{pmatrix}\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}_1^T\vec{a}_3&=0\\ \vec{a}_2^T\vec{a}_3&=0\end{aligned}}$$

$$A=\begin{pmatrix}\vec{\alpha}_1^T\\ \vec{\alpha}_2^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_2]{r_2\div(-3)}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

得 $\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=0\end{cases}$ **基础解系:** $\vec{\xi}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

可见 $\vec{a}_3$ 不唯一, 可取 $\vec{a}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{x}^T\vec{y}=0\\ \Longleftrightarrow\ &\vec{x},\vec{y}\ \text{正交}\end{aligned}}$$

上页 下页 返回

3. 正交向量组的性质

定理1. $\left.\begin{array}{l}\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r \in \mathrm{R}^n\text{，两两正交} \\ \vec{a}_i \neq \vec{0},\ (i=1,\cdots,r)\end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ 线性无关

证：设 $\lambda_1\vec{a}_1+\cdots+\lambda_r\vec{a}_r=\vec{0}$

$$\Big\downarrow \text{两边对 } \vec{a}_i \text{ 作内积，注意正交性}$$

$$\lambda_i[\vec{a}_i,\vec{a}_i]=0$$

$$\Big\downarrow \vec{a}_i \neq \vec{0}$$

$$\lambda_i=0 \qquad (i=1,\cdots,r)$$

$\therefore\ \vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ **线性无关**　　　　**证毕**

四. 向量空间的规范正交基

1. 定义3. **设** $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_r$ **是向量空间** V ($V\subset \mathrm{R}^n$) **的一组基,**

若 $[\vec{\varepsilon}_k,\vec{\varepsilon}_i]=\begin{cases}0, & i\neq k \quad \text{(两两正交)}\\ 1, & i=k \quad \text{(都是单位向量)}\end{cases}$

则称 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_r$ **为** V **的一个规范正交基.**

例如, $V=\{(a_1,a_2,0)^T \mid a_1,a_2\in \mathrm{R}\}\subset \mathrm{R}^3$

$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ **是** V **的一个规范正交基**

$\vec{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},\vec{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ **也是** V **的一个规范正交基**

y

x

P116 给出了 R^4 **的一个规范正交基**

上页 下页 返回

2. V 中任一向量 $\vec{a}$ 可用规范正交基 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_r$ 表示:

$$\vec{a}=\lambda_1\vec{\varepsilon}_1+\lambda_2\vec{\varepsilon}_2+\cdots+\lambda_r\vec{\varepsilon}_r$$

$$[\vec{\varepsilon}_k,\vec{\varepsilon}_i]=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases}$$

其中: $\lambda_k=[\vec{\varepsilon}_k,\vec{a}]\quad k=1,\cdots,r$

证: $[\vec{\varepsilon}_k,\vec{a}]=\lambda_1[\vec{\varepsilon}_k,\vec{\varepsilon}_1]+\cdots+\lambda_r[\vec{\varepsilon}_k,\vec{\varepsilon}_r]=\lambda_k[\vec{\varepsilon}_k,\vec{\varepsilon}_k]=\lambda_k$

例如, $\vec{a}=(1,2,3,4)^T$ 用 P116 中的 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4$ 表示为

$$\vec{a}=\frac{3}{\sqrt{2}}\vec{e}_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2+\frac{7}{\sqrt{2}}\vec{e}_3-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_4$$

3. 求规范正交基的方法 — Schimidt正交化法

设 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ 是 V 的一个基,

第一步. 正交化

第二步. 单位化

设 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ 是 V 的一个基.

第一步. 正交化:

取 $\vec{b}_1=\vec{a}_1$

$$\vec{b}_2=\vec{a}_2-\boxed{\frac{[\vec{b}_1,\vec{a}_2]}{[\vec{b}_1,\vec{b}_1]}}\vec{b}_1 \qquad \boxed{\frac{[\vec{b}_1,\vec{a}_2]}{\|\vec{b}_1\|^2}}$$

$$\vec{b}_3=\vec{a}_3-\frac{[\vec{b}_1,\vec{a}_3]}{[\vec{b}_1,\vec{b}_1]}\vec{b}_1-\frac{[\vec{b}_2,\vec{a}_3]}{[\vec{b}_2,\vec{b}_2]}\vec{b}_2$$

…………………

$$\vec{b}_r=\vec{a}_r-\frac{[\vec{b}_1,\vec{a}_r]}{[\vec{b}_1,\vec{b}_1]}\vec{b}_1-\frac{[\vec{b}_2,\vec{a}_r]}{[\vec{b}_2,\vec{b}_2]}\vec{b}_2-\cdots-\frac{[\vec{b}_{r-1},\vec{a}_r]}{[\vec{b}_{r-1},\vec{b}_{r-1}]}\vec{b}_{r-1}$$

分析: 令

$$\vec{b}_2=\vec{a}_2+\lambda\vec{b}_1$$

$$\Big\downarrow\ [\vec{b}_1,\vec{b}_2]=0$$

$$[\vec{b}_1,\vec{a}_2]+\lambda[\vec{b}_1,\vec{b}_1]=0$$

第二步. 规范化: $\vec{e}_k=\vec{b}_k\Big/\|\vec{b}_k\| \qquad (k=1,\cdots,r)$

注意: 对任意的 $k\ (1\le k\le r)$, $\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_k$ 与 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_k$ **等价.**

例2. 设 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\vec{a}_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\vec{a}_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix},$

用Schimidt正交化法将其正交规范化.

解: 取 $\vec{b}_1=\vec{a}_1$, **则** $\|\vec{b}_1\|^2=6$

$$\vec{b}_2=\vec{a}_2-\frac{[\vec{b}_1,\vec{a}_2]}{\|\vec{b}_1\|^2}\vec{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\|\vec{b}_2\|^2=\frac{25}{3}$$

$$\vec{b}_3=\vec{a}_3-\frac{[\vec{b}_1,\vec{a}_3]}{\|\vec{b}_1\|^2}\vec{b}_1-\frac{[\vec{b}_2,\vec{a}_3]}{\|\vec{b}_2\|^2}\vec{b}_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad \|\vec{b}_3\|^2=8$$

规范化, 得

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{b}_3}{\|\vec{b}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \quad \|\vec{b}_1\|^2 = 6$$

$$\vec{b}_2 = \frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \|\vec{b}_2\|^2 = \frac{25}{3}$$

$$\vec{b}_3 = 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \|\vec{b}_3\|^2 = 8$$

例3. 已知 $\vec{a}_1=(1,1,1)^T$，求非零向量 $\vec{a}_2,\vec{a}_3$，使三者两两 正交.

解：与 $\vec{a}_1$ 正交的向量 $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$ 应满足：

$$\vec{a}_1^{\,T}\vec{x}=0,\quad \text{即}\quad x_1+x_2+x_3=0$$

解一： 其基础解系可取为：$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

将它们正交化即得

$$\vec{a}_2=\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \|\vec{a}_2\|^2=2$$

$$\vec{a}_3=\vec{\xi}_2-\frac{[\vec{a}_2,\vec{\xi}_2]}{\|\vec{a}_2\|^2}\vec{a}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

解二： 其基础解系也可取为

$$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

它们已经正交，因此得

$$a_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ a_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

五. 正交矩阵与正交变换

定义4. **若 n 阶方阵 A 满足**

$$A^T A = E \qquad (\text{即 } A^{-1} = A^T)$$

则称 A 为正交矩阵.

说明:

(1). A 为正交阵 $\Longleftrightarrow$ A 的列向量为单位正交向量组

$\Longleftrightarrow$ A 的行向量为单位正交向量组

(2). 正交矩阵的列向量构成 R^n 的一个规范正交基

$$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vdots \\ \vec{a}_n^T \end{pmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n) = E \Longleftrightarrow \vec{a}_i^T \vec{a}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

例如, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是正交阵.

A 为正交阵 $\Longleftrightarrow A^T A = E$

又如P119 例4.

思考: (1) A为正交阵, $|A| = ?$

$$\because \left|A^T A\right| = |E| = 1, \text{ 即 } |A|^2 = 1, \therefore |A| = 1 \text{或} -1$$

(2) 设 A,B 均为正交方阵, 问 AB 是否为正交阵?

$$\because (AB)^T(AB) = (B^T A^T)(AB)$$

$$= B^T(A^T A)B$$

$$= B^T B = E$$

所以 AB 是正交阵.

定义5. 若 P 为正交阵, 则称线性变换 $\vec{y}=P\vec{x}$ 为正交变换.

正交变换的特点: 保向量长度不变

保三角形形状不变

$$\|\vec{y}\|^2=\vec{y}^T\vec{y}=(P\vec{x})^T(P\vec{x})=\vec{x}^T(P^TP)\vec{x}$$
$$=\vec{x}^T\vec{x}=\|\vec{x}\|^2$$

小结

1. 向量的内积 , 长度, 正交

2. 规范正交向量组的求法 — 施米特正交化方法

3. 正交矩阵

A为正交矩阵 $\Longleftrightarrow A^T A = E \Longleftrightarrow A^{-1} = A^T$

$\Longleftrightarrow A$ 的列(行)向量组单位正交

4. 正交变换: $\vec{y} = P\vec{x}$ (P 为正交阵)

优点：保向量长度不变, 即 $\| P\vec{x} \|^2 = \| \vec{x} \|^2$

作业

P161　1；2；3

思考题

求一单位向量，使它与

$$\alpha_1=(1,1,-1,1),\ \ \alpha_2=(1,-1,-1,1),\ \ \alpha_3=(2,1,1,3)$$

正交.

思考题解答

解 设所求向量为$x=(a,b,c,d)$,则由题意可得:

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}=1,\\ a+b-c+d=0,\\ a-b-c+d=0,\\ 2a+b+c+3d=0.\end{cases}$$

解之可得:$x=(-2\sqrt{\dfrac{2}{13}},0,-\dfrac{1}{\sqrt{26}},\dfrac{3}{\sqrt{26}})$

或 $x=(2\sqrt{\dfrac{2}{13}},0,\dfrac{1}{\sqrt{26}},-\dfrac{3}{\sqrt{26}})$.