2014-2015 线性代数(A)卷参考答案

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

（1）解：$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-ab & ac & ae\\ bd & -cd & de\\ bf & cf & -ef\end{vmatrix}=df\begin{vmatrix}-b & c & e\\ b & -c & e\\ b & c & -e\end{vmatrix}=abcdef\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$

$$=abcdef\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=4abcdef$$

（2）解：$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=0\Leftrightarrow(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=-4\boldsymbol{E}$，即$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\dfrac{3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}}{4}=\boldsymbol{E}$，故

$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=\dfrac{3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}}{4}$

（3）解：$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\ -10 & 5 & 0\\ 2 & -4 & 2\end{pmatrix}$

（4）解：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ -1 & 1 & a\\ 1 & 2 & 6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & a+2\end{pmatrix}$，因$R(\boldsymbol{A})=2$，故$a=0$

（5）解：设$\varphi(\boldsymbol{A})=4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}$，则$\varphi(\lambda)=\dfrac{4}{\lambda}-1$，故$\varphi(1)=3,\varphi(2)=1$

故$|\varphi(\boldsymbol{A})|=|4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}|=\varphi(1)\varphi(2)\varphi(2)=3$

二、解答题（共 7 小题，共 80 分）

1.解：

$$D_n=D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1+a & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 2 & 2+a & \cdots & 2\\ 0 & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-2r_1\\ \cdots\\ r_{n+1}-nr_1}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & a & 0 & \cdots & 0\\ -2 & 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & a\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{c_1+\frac{1}{a}c_2\\ \cdots\\ c_1+\frac{n}{a}c_{n+1}}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{a} & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a & \cdots & 0\\ 0 & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a\end{vmatrix}=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{a}\right)a^n=a^n+\frac{n(n+1)}{2}a^{n-1}$$

2.解：根据 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}$，可知 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$，对增广矩阵作初等变换

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-2&2&6\\0&1&0&2&0&-3\\0&0&1&2&-1&-3\end{pmatrix}$$

显然 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，从而可得 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-2&2&6\\2&0&-3\\2&-1&-3\end{pmatrix}$

3.解：$|\boldsymbol{P}|=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$，故矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$

由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，显然可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$

故 $\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{PB}^5\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\4&0&-1\end{pmatrix}$

4.解：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3k\\0&2k-2&3k-3\\0&2k-2&3-3k^2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3k\\0&2k-2&3k-3\\0&0&-(k+2)(k-1)\end{pmatrix}$

若 $R(\boldsymbol{A})=2$，则 $-(k+2)(k-1)=0$、 $2k-2,3k-3$ 不能同时为 0，故 $k=-2$

5.解：对矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$ 作初等变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\3&-3&5&-4&1\\2&-2&3&-2&0\\3&-3&4&-2&-1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-r_4\\r_3-2r_1\\r_4-3r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\0&0&1&-2&2\\0&0&-3&6&-6\\0&0&-5&10&-10\end{pmatrix}\overset{\substack{r_4+5r_2\\r_3+3r_2\\r_1-3r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0&2&-3\\0&0&1&-2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

显然 $R(\boldsymbol{A})=2$，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个最大无关组含有 2 个列向量，可选择 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个最大无关组，此时 $\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5=-3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$

6.证明：由于 $R(\boldsymbol{A})=3$，$R(\boldsymbol{B})=3$，故 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以由向量组 $\boldsymbol{A}$ 唯一表示，由于 $R(\boldsymbol{A})=3$，故 $R(\boldsymbol{D})=3$ 或 4

假设 $R(\boldsymbol{D})=3$，则 $\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以由由向量组 $\boldsymbol{A}$ 唯一表示，又因 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以由向量组 $\boldsymbol{A}$ 唯

一表示，故$\boldsymbol{\alpha}_5$可以由向量组$\boldsymbol{A}$唯一表示，显然这与向量组$\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$的秩为 4 矛盾，因此$R(\boldsymbol{D})=4$，即向量组$\boldsymbol{D}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$的秩为 4

7.解：设方程有唯一解，则系数行列式不等于 0，即

$$\begin{vmatrix} 2+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2+\lambda \end{vmatrix} = (4+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2+\lambda \end{vmatrix} = (4+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1+\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(4+\lambda)(1+\lambda)^2 \neq 0$$

故$\lambda \neq -4$或$\lambda \neq -1$时，方程有唯一解

当$\lambda=-1$时，增广矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

显然$R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{B})$，故方程组无解

当$\lambda=-4$时，增广矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

显然$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2<3$，故方程组有无穷多解

根据最简形矩阵可得通解：$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

8.解：二次型矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

而$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 4-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & 8-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(9-\lambda)$

解得：$\lambda_1=9, \lambda_2=\lambda_3=0$

当$\lambda_1=9$时，解方程$(\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$，由$\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-8&-2&2\\-2&-5&-4\\2&-4&-5\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得基础解系$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$，将$\boldsymbol{\xi}_1$单位化为$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

当$\lambda_2=\lambda_3=0$时，解方程$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$，由$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

得基础解系$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}$，显然$\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$已经正交

将其单位化得：$\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_3=\frac{3\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}$

将$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$构成正交矩阵$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{6\sqrt{5}}{25}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{12\sqrt{5}}{25}\\\frac{2}{3}&0&\frac{3\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$

有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

于是有正交变换 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\\\boldsymbol{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{6\sqrt{5}}{25}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{12\sqrt{5}}{25}\\\frac{2}{3}&0&\frac{3\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

把二次型f化为标准型 $f=9y_1^2$

2014-2015 线性代数(B)卷参考答案

一、（1）0　　（2）$-A-E$　　（3）2^{2n-1}　　（4）2　　（5）-288

二、解：$D_n = D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 2+a_1 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 \\ 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-r_1 \\ \cdots \\ r_{n+1}-r_1}]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ c_1+\frac{1}{a_n}c_{n+1}}]{c_1+\frac{1}{a_1}c_2} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)a_1a_2\cdots a_n$$

三、解：由 $AB+E=A^2+B$ 可得：$(A-E)B=A^2-E$

而 $A-E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A^2-E=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

因 $(A-E, A^2-E)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

因 $A-E \overset{r}{\sim} E$ 故 $A-E$ 可逆，因此 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

四、解：由于 $|P|=3\neq 0$，因此 P 可逆，且 $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

由 $P^{-1}AP=D$ 可得：$A=PDP^{-1}$，故

$$A^5=PD^5P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 43 & 44 \\ -11 & -12 \end{pmatrix}$$

五、解：因 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

故 $R(A)=2$，$R(B)=2$,而 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\\0&a&b\end{pmatrix}$，要使 $R(B)=2$

则 $a=3\lambda, b=\lambda$（λ 为任意实数）

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&3&9&\lambda\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&5&2\\0&-2&-4&-3\\0&0&0&\lambda-5\end{pmatrix}$$

要使 β_3 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则 $\lambda=5$

因此 $a=15, b=5$

六、解：对矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 作初等变换

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\4&9&0&10\\1&-1&-3&-7\\0&-3&-1&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&-4&-2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

显然 $R(A)=3$，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个最大无关组含有 3 个列向量，可选择 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个最大无关组，此时 $\alpha_4=-2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$

七、证明：因 α_1,α_2 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，因此 α_3 可以由向量组 α_1,α_2 唯一表示,假设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3-\beta$ 线性相关，则 $\alpha_3-\beta$ 可以由向量组 α_1,α_2 唯一表示,由上述两个结论可知：β 可以由向量组 α_1,α_2 唯一表示，即 $R(\alpha_1,\alpha_2,\beta)=2$,这显然与题设条件相矛盾，因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3-\beta$ 线性无关

八、解:设方程有唯一解,则系数行列式不等于 0,即 $\begin{vmatrix}1&1&1+\lambda\\1&1+\lambda&1\\1+\lambda&1&1\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda+3)\neq0$

故 $\lambda\neq0$ 或 $\lambda\neq-3$ 时，方程有唯一解

当 $\lambda=-3$ 时，增广矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&1&-2&0\\1&-2&1&-3\\-2&1&1&9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&0\\0&1&-1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

显然 $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{B})$，故方程组无解

当 $\lambda = 0$ 时，增广矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

显然 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 2 < 3$，故方程组有无穷多解

根据最简形矩阵可得通解：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

九、略