1

2012-2013

学号：　　　　姓名：　　　　专业年级：　　　　学院：

线　　　订　　　装　　　封　　　密　　　线

中国矿业大学(北京)

《高等数学 A2》试卷 A 卷

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得　分									
阅卷人									

一、　填空题（每空 3 分，共 30 分）

1. 已知方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 有三个特解 $y_1=x, y_2=e^x, y_3=e^{2x}+e^x$，则该方程的通解为 $y=c_1(x-e^x)+c_2(x-e^{2x}-$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\big/(\sqrt{1+xy}-1)=$ 2。

3. 设函数 $z=f(x^2+y^2,x^2-y^2)$ 具有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ $2x(2yf''_{11}-2yf''_{22})$。

4. 函数 $u=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}+z$ 在点 $P(2,1,1)$ 沿直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{2}$ 方向的方向导数 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_P=$ $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$。

5. 曲线 $\begin{cases} x=t^2-1 \\ y=t+1 \\ z=t^2 \end{cases}$ 在点 $(0,2,1)$ 处的切线方程为 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$

6. 曲面 $z=0, x+y+z=1, x^2+y^2=1$ 所围立体的体积可用二重积分表示为 $\iint\limits_D (1-x-y)dxdy$。 $D=\{x^2+y^2\le 1\}$

7. 设曲线段 L： $y=x\,(0\le x\le 1)$ 的密度为 e^{x+y}，则 L 的质量等于 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(e^2-1)$

8. 设有向区域Ω由光滑闭曲面Σ围成，V为其体积，α,β,γ为Σ的外法线方向角，则$\iint\limits_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS=$ $3V$ 。

9. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(1+n)]^n}$的敛散性为 收敛. 。

10. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{n!}$在$(-\infty,+\infty)$上的和函数为 $x(1-e^{-x^2})$ 。

二、（10分）求微分方程$y''-4y'+4y=16e^{-2x}$的通解。

解：$r^2-4r+4=0 \quad r_1=r_2=2$

齐次的通解为： $e^{2x}(c_1+c_2x)$

设特解为： $y^*=Ae^{-2x}$ 代入方程得：

$y^{*\prime}=-2Ae^{-2x} \quad y^{*\prime\prime}=4Ae^{-2x}$

$4Ae^{-2x}+8Ae^{-2x}+4Ae^{-2x}=16e^{-2x} \Rightarrow A=1$

$\therefore \; y=(c_1+c_2x)e^{2x}+e^{-2x}$.

三、（10 分）求直线 $L:\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 在球面 $x^2+y^2+z^2-2x-2=0$ 上点 $(2,1,1)$ 处的切平面上的投影直线 L' 的方程。

球面 $x^2+y^2+z^2-2x-2=0$ 上点 $(2,1,1)$ 处的切平面为：

法向量 $(2x-2,\ 2y,\ 2z)\Big|_{(2,1,1)}=(2,2,2)\ //\ (1,1,1)$

$(x-2)+(y-1)+(z-1)=0$. 即：$x+y+z=4$.

过直线 L 的平面束方程为：

$$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$$

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(\lambda-1)z+\lambda-1=0.$$

垂直于平面 $x+y+z=4$ 的平面需满足

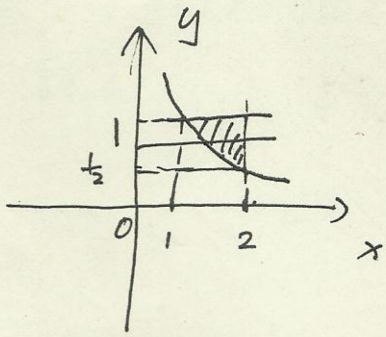
$$1+\lambda+1-\lambda+\lambda-1=0 \qquad \lambda=-1.$$

代入平面束方程并化简得：$y-z=1$

$\therefore L':\begin{cases}y-z=1\\x+y+z=4\end{cases}$

四、 （共 12 分）解下列各题：

1. （6 分）计算累次积分 $I=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{1} ye^{xy}dy$



交换积分次序得：$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{1}{y}}^{2} y e^{xy}dx$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{1} y\,dy\int_{\frac{1}{y}}^{2} e^{xy}dx$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{1} y\cdot\frac{1}{y}e^{xy}\Big|_{\frac{1}{y}}^{2}dy$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(e^{2y}-e)dy=\frac{1}{2}e^{2y}-ey\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$

$=\frac{1}{2}e^2-e-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e=\frac{1}{2}e^2-e$

2. （6 分）计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$，其中立体 Ω 由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 所围成。

解：$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi\,dr$

$=2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^a r^4dr$

$=2\pi\cdot(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\cdot\frac{r^5}{5}\Big|_0^a$

$=4\pi\cdot\frac{a^5}{5}=\frac{4}{5}\pi a^5$

学号：

姓名：

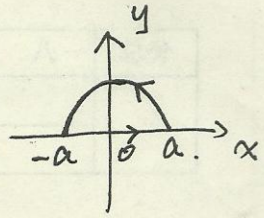
专业年级：

学院：

装 订 线

密 封 线

五、（10分）计算曲线积分 $\int_L (\overset{P}{x^2+y})dx+(\overset{Q.}{y^2-x})dy$ ，其中L沿逆时针方向且为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的上半部分.



解： $\frac{\partial Q}{\partial x}=-1$ $\frac{\partial P}{\partial y}=1.$

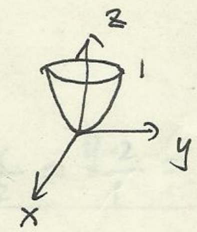
添加辅助线 L' $(-a\to a)$

$$\int_L (x^2+y)dx+(y^2-x)dy=\int_{L\cup L'}-\int_{L'}=\iint_D(-1-1)dxdy-\int_{-a}^{a}x^2dx$$

$$=-2\frac{\pi a^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-a}^{a}=-\pi a^2-\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{3}=-\pi a^2-\frac{2}{3}a^3.$$

六、（10分）计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma (2x+y)dydz+zdxdy$ ，

其中Σ为有向曲面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$，其法向量与z轴正向夹角为锐角。



解： $z-x^2-y^2=0$ 法向量为： $(-2x,-2y,1)$

$\cos\alpha=\frac{-2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$ $\cos\beta=\frac{-2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$

$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$

$$\iint_\Sigma(2x+y)dydz=\iint_\Sigma(2x+y)\cdot\cos\alpha\, dS=\iint_\Sigma(2x+y)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy$$

$$=\iint_\Sigma[(2x+y)\cdot -2x]dxdy$$

原式 $=\iint_\Sigma[(2x+y)\cdot(-2x)+z]dxdy=\iint_\Sigma(-4x^2-2xy+x^2+y^2)dxdy.$

七、（**10** 分）把 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数。

八、（**8** 分）证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\ln(2+\frac{1}{n})}{\sqrt{9n^2-4}}$ 条件收敛。