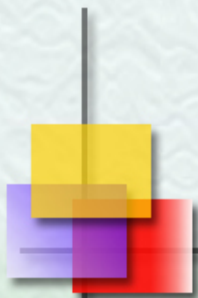


## 第二节 边缘分布

- 一、边缘分布函数
- 二、离散型随机变量的边缘分布律
- 三、连续型随机变量的边缘分布
- 四、小结



# 一、边缘分布函数

问题: 已知  $(X, Y)$  的分布, 如何确定  $X, Y$  的分布?



$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}, F(x) = P\{X \leq x\},$$

$$P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < \infty\} = F(x, \infty) = F_X(x)$$



$(X, Y)$  关于  $X$  的边缘分布函数.



**定义** 设  $F(x, y)$  为随机变量  $(X, Y)$  的分布函数, 则  $F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$ .

令  $y \rightarrow \infty$ , 称  $P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < \infty\} = F(x, \infty)$  为随机变量  $(X, Y)$  关于  $X$  的边缘分布函数.

记为  $F_X(x) = F(x, \infty)$ .

同理令  $x \rightarrow \infty$ ,

$F_Y(y) = F(\infty, y) = P\{X < \infty, Y \leq y\} = P\{Y \leq y\}$

为随机变量  $(X, Y)$  关于  $Y$  的边缘分布函数.





## 二、离散型随机变量的边缘分布律

**定义** 设二维离散型随机变量  $(X, Y)$  的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots.$$

记

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = P\{Y = y_j\}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

分别称  $p_{i\cdot}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 和  $p_{\cdot j}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) 为  $(X, Y)$  关于  $X$  和关于  $Y$  的边缘分布律.



$Y \backslash X$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_i$	$\cdots$
$y_1$	$p_{11}$	$p_{21}$	$\cdots$	$p_{i1}$	$\cdots$
$y_2$	$p_{12}$	$p_{22}$	$\cdots$	$p_{i2}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$y_j$	$p_{1j}$	$p_{2j}$	$\cdots$	$p_{ij}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, i = 1, 2, \cdots;$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, j = 1, 2, \cdots.$$



因此得离散型随机变量关于 $X$ 和 $Y$ 的边缘分布函数分别为

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \sum_{y_j \leq y} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}.$$





例1 已知下列分布律求其边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{16}{49}$	$\frac{12}{49}$
1	$\frac{12}{49}$	$\frac{9}{49}$



解

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\}$
0	$\frac{12}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{4}{7}$
	$\frac{12}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{3}{7}$
1	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

注意

联合分布



边缘分布





**例2** 一整数  $N$  等可能地在  $1, 2, 3, \dots, 10$  十个值中取一个值. 设  $D = D(N)$  是能整除  $N$  的正整数的个数,  $F = F(N)$  是能整除  $N$  的素数的个数. 试写出  $D$  和  $F$  的联合分布律, 并求边缘分布律.

**解**

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
$F$	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

由此得  $D$  和  $F$  的联合分布律与边缘分布律:



$F \backslash D$	1	2	3	4	$P\{F = j\}$
0	1/10	0	0	0	1/10
1	0	4/10	2/10	1/10	7/10
2	0	0	0	2/10	2/10
$P\{D = i\}$	1/10	4/10	2/10	3/10	1

或将边缘分布律表示为

$D$	1	2	3	4
$p_k$	1/10	4/10	2/10	3/10

$F$	0	1	2
$p_k$	1/10	7/10	2/10



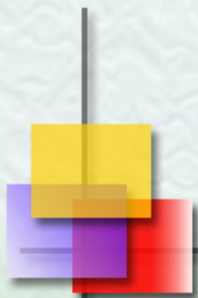
### 三、连续型随机变量的边缘分布

**定义** 对于连续型随机变量  $(X, Y)$ , 设它的概率密度为  $f(x, y)$ , 由于

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \mathrm{d} y \right] \mathrm{d} x,$$

记  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \mathrm{d} y,$

称其为随机变量  $(X, Y)$  关于  $X$  的边缘概率密度.





同理可得  $Y$  的边缘分布函数

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^y \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

$Y$  的边缘概率密度.



例3 设随机变量  $X$  和  $Y$  具有联合概率密度

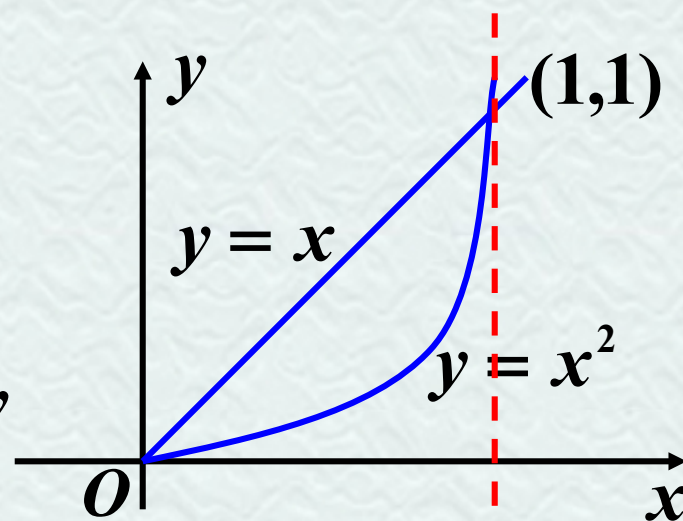
$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & x^2 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求边缘概率密度  $f_X(x)$ ,  $f_Y(y)$ .

解  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$

当  $0 \leq x \leq 1$  时,

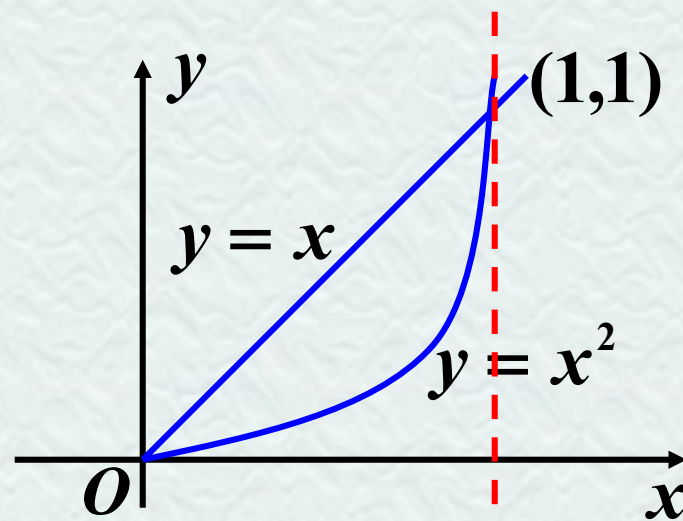
$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \\ &= \int_{x^2}^x 6 dy \end{aligned}$$



$$= 6(x - x^2).$$

当  $x < 0$  或  $x > 1$  时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = 0.$$



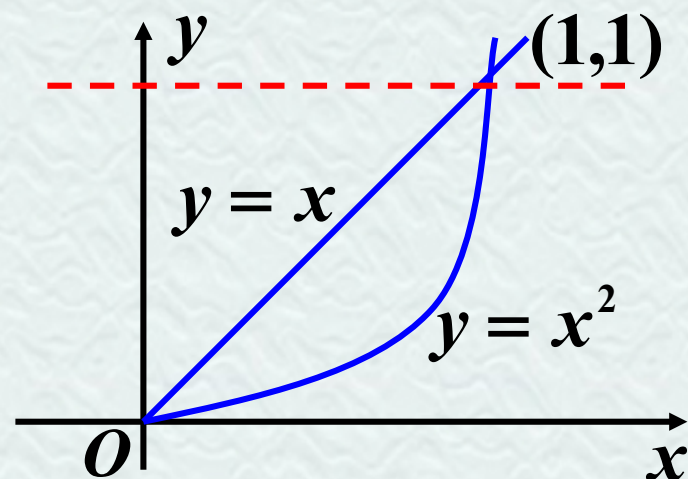
因而得 
$$f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$





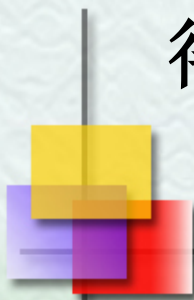
当  $0 \leq y \leq 1$  时,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \\ &= \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx \\ &= 6(\sqrt{y} - y). \end{aligned}$$



当  $y < 0$  或  $y > 1$  时,  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = 0$ .

得 
$$f_Y(y) = \begin{cases} 6(\sqrt{y} - y), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



例4 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty,$$

其中  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$  都是常数, 且  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$ .

试求二维正态随机变量的边缘概率密度.



解  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy,$

由于 
$$\frac{(y - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho \frac{(x - \mu_1)(y - \mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$$
$$= \left[ \frac{y - \mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right]^2 - \rho^2 \frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2},$$

于是

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right]^2} dy,$$

令  $t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left( \frac{y - \mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right),$





则有 
$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

即 
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

同理可得

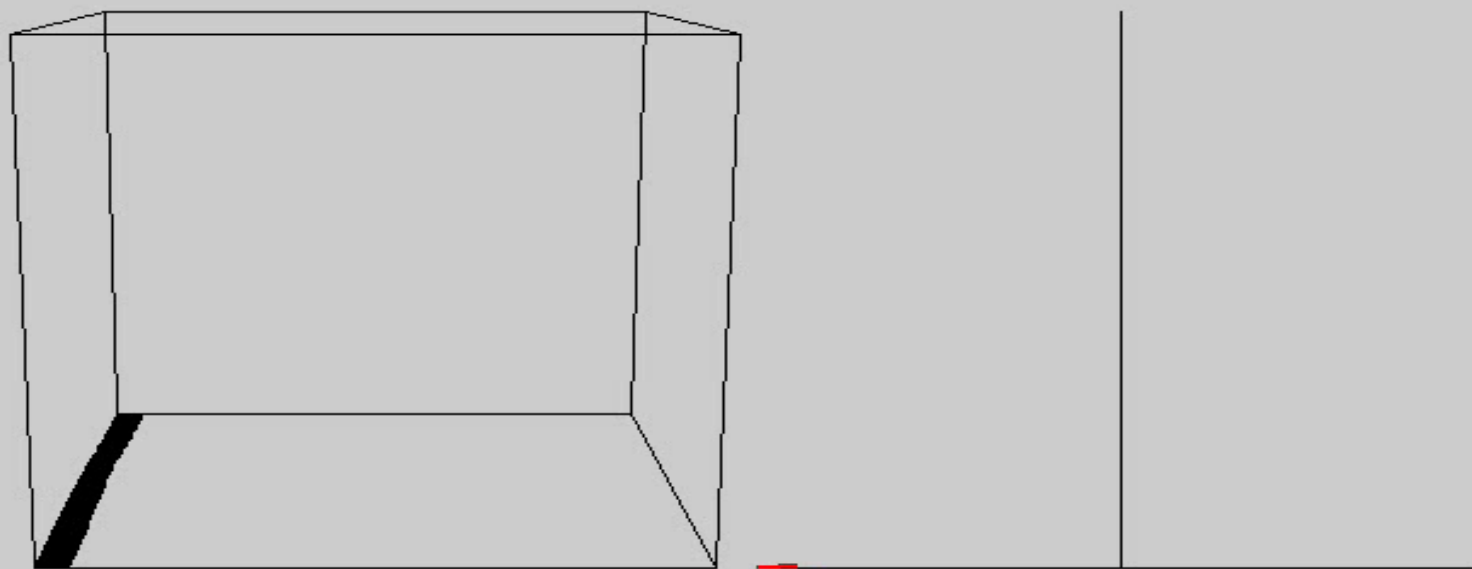
$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，并且都不依赖于参数  $\rho$ .



## 二维正态分布和其边缘分布的关系

单击图形播放/暂停 ESC键退出



## 请同学们思考

边缘分布均为正态分布的随机变量,其联合分布一定是二维正态分布吗?

答 不一定. 举一反三例以示证明.





令  $(X, Y)$  的联合密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1 + \sin x \sin y),$$

显然,  $(X, Y)$  不服从正态分布, 但是

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

因此边缘分布均为正态分布的随机变量, 其联合分布不一定是二维正态分布.



## 四、小结

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d} y \right] \mathrm{d} x.$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d} y.$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^y \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d} x \right] \mathrm{d} y.$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d} x.$$

联合分布  $\longleftrightarrow$  边缘分布

