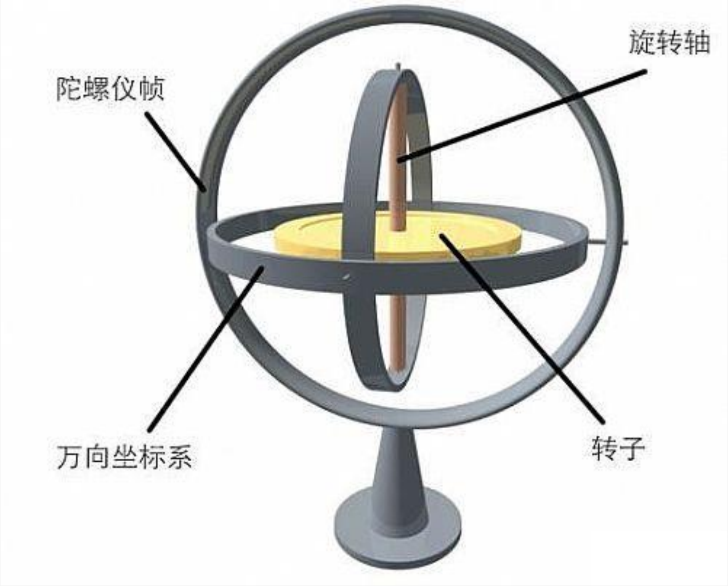
CONTENTS





旋转轴
陀螺仪帧
万向坐标系
转子

5.4 动量矩和动量矩守恒定律

力的时间累积效应 ⇨

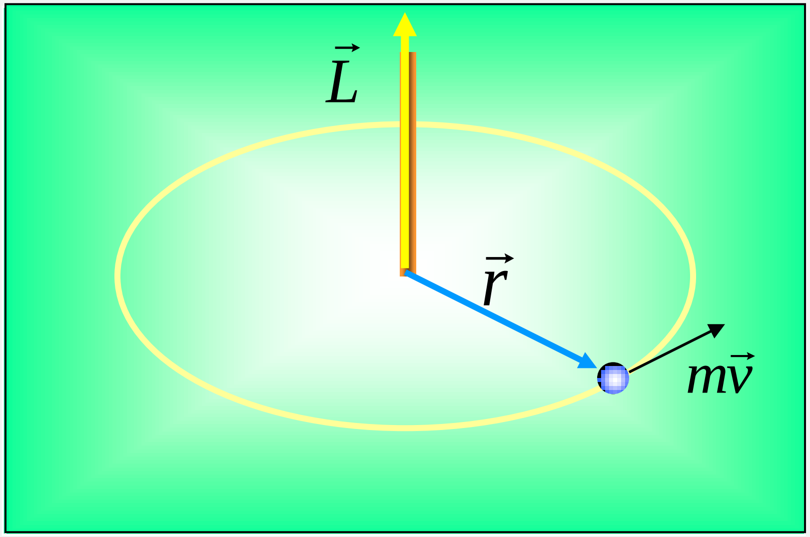
冲量、动量、动量定理。

力矩的时间累积效应 ⇨

冲量矩、动量矩、动量矩定理。

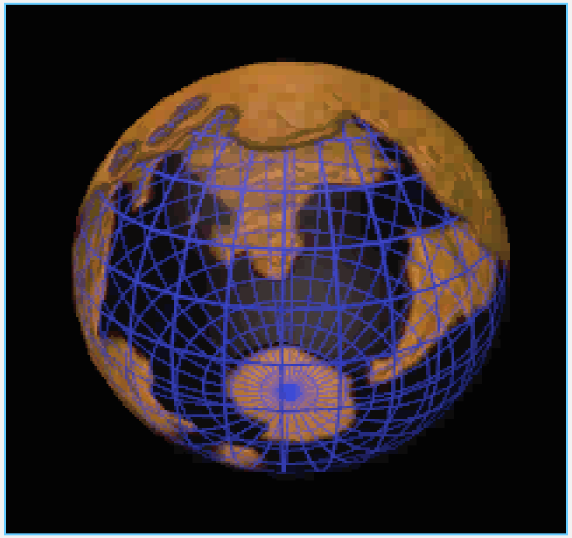
动量矩的引入：

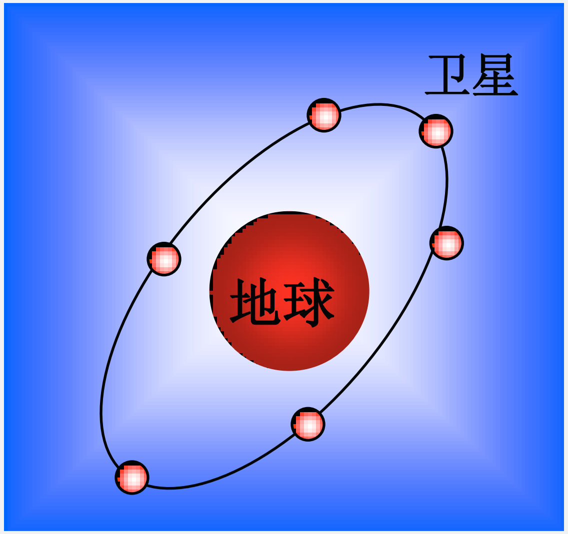
在质点的匀速圆周运动中，动量 $m\vec{v}$不守恒。

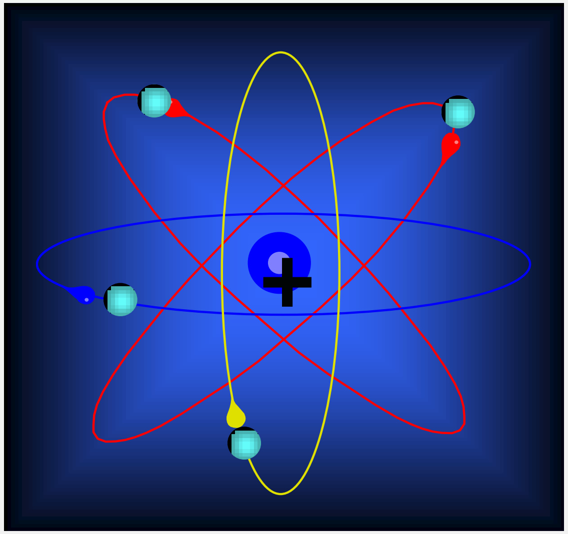


但是 $\vec{r}\times m\vec{v}=$常数

$\vec{r} \times m\vec{v}$ 在描述行星的轨道运动, 自转运动,卫星的轨道运动及微观粒子的运动中都具有独特作用。 因此， 必须引入一个新的物理量 — 动量矩 L, 来描述这一现象。







➢ 动量矩(角动量）

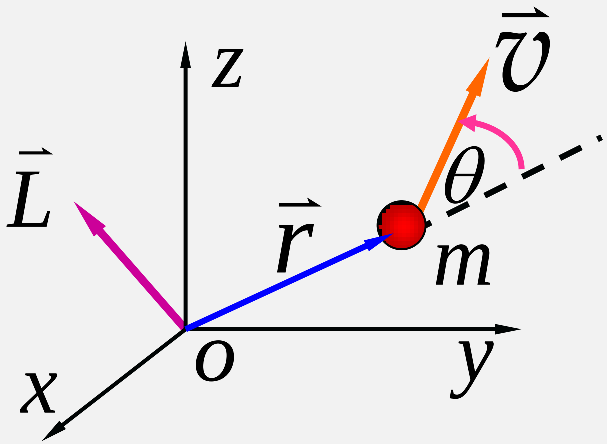
1. 质点对参考点的动量矩(对O点)

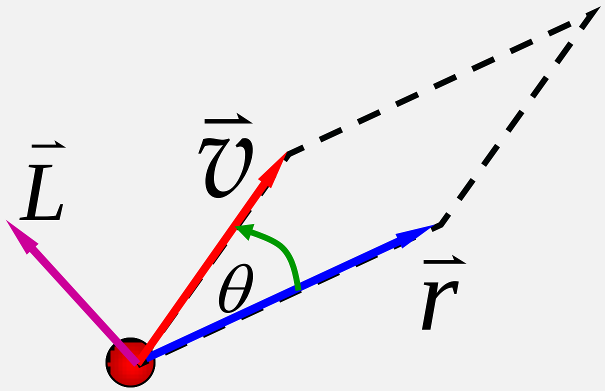
质量为 m 的质点以速度 $\vec{v}$ 在空间运动, 某时刻相对原点O的位矢为 $\vec{r}$, 质点相对于原点的动量矩

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

大小： $L=rmv\sin\theta$

方向: 符合右手螺旋法则。





(1) 质点的动量矩与质点的动量及位矢有关 (取决于固定点的选择) 。

(2) 动量矩为空间矢量，在直角坐标系中的分量式

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$m\vec{v} = mv_x\vec{i} + mv_y\vec{j} + mv_z\vec{k}$$

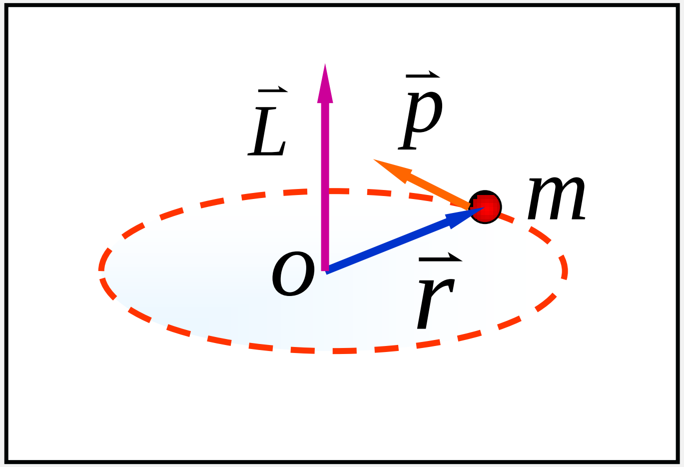
$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

$$L_x = yp_z - zp_y$$

$$L_y = zp_x - xp_z$$

$$L_z = xp_y - yp_x$$

(3) 当质点作圆周运动时：　质点以角速度ω作半径为r 的圆运动，相对圆心的动量矩的大小



$$L = rp = mrv$$
$$= mr^2\omega = J\omega$$

(4) 动量矩的定义并没有限定质点只能作曲线运动而不能作直线运动。

(5) 单位：kgm²/s

2. 刚体绕定轴转动的动量矩

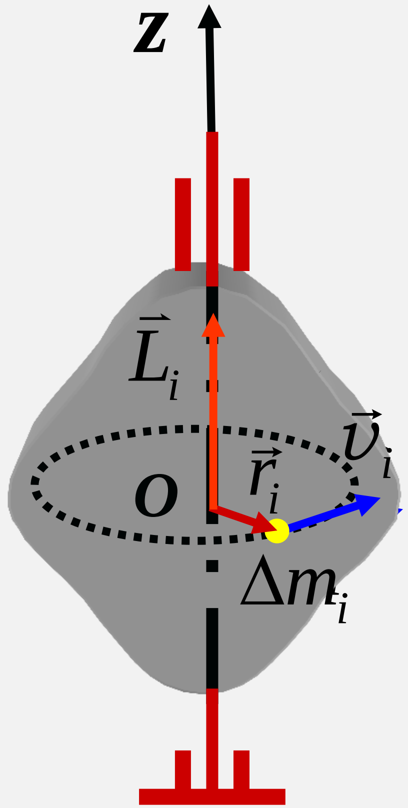
质点对 z 轴的动量矩

$$L_z = mvr = mr^2\omega$$

刚体上任一质量元对 z 轴的动量矩为

$$L_{zi} = \Delta m v_i r_i$$

$$= \Delta m r_i^2 \omega$$



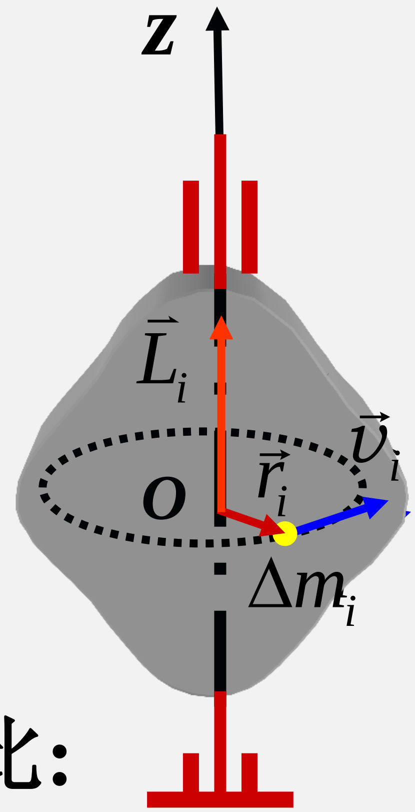
刚体上任一质量元对 z 轴的动量矩具有相同的方向。

刚体对 z 轴的动量矩

$$L_z = \sum_i \Delta m_i v_i r_i$$

$$= \sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega = J_Z \omega$$

(所有质元对 z 轴的角动量之和)



说明 动量矩与质点动量 $\vec{P} = m\vec{v}$ 对比:

J_z—— m， ω—— v 。

➢ 质点的动量矩定理和动量矩守恒定律

1.质点的动量矩定理

已知 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$， $\vec{P}=m\vec{v}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right)$$

$$=\vec{r}\times\frac{d(m\vec{v})}{dt}+\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{v}\times m\vec{v}=0}$$

$$=\vec{r}\times\vec{F}\ =\vec{M}$$

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$ —— 质点动量矩定理的微分形式。

作用在质点上的力矩等于质点动量矩对时间的变化率。此即质点对固定点的动量矩定理。

$$\vec{M}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{L}$$

冲量矩

积分，得 $$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\cdot\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1$$

——质点动量矩定理的积分形式。

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} \cdot \mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

质点所受合力矩的冲量矩等于质点的角动量的增量。

说明

(1) 冲量矩是力矩的时间积累,是质点动量矩变化的原因。

(2) 质点动量矩的变化是力矩对时间的积累结果。

2. 质点动量矩守恒定律

质点动量矩定理 $\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

若 $\vec{M} = 0$，则

$$\vec{L} = \text{常矢量}$$

——质点动量矩守恒定律。

讨论

(1) 守恒条件 $\vec{M}=0$ $\begin{cases}\vec{F}=0\\ \vec{F}\text{过}O\text{点}\end{cases}$

(2) 向心力的角动量守恒。$\vec{F}$过O点

(3) 自然界普遍适用的一条基本规律。

(4) **质点对轴的动量矩守恒定律:** 若 $M_z=0$, 则$L_z=$常数。即若力矩在某轴上的分量为零(或力对某轴的力矩为零)，则质点对该轴的动量矩守恒。

➢ 刚体绕定轴转动下的动量矩定理和动量矩守恒定律

1. 动量矩定理

质点的动量矩定理 $\vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

刚体内任一质量元所受力矩

$$\vec{M}_i=\vec{M}_{i外}+\vec{M}_{i内}$$

刚体内所有质量元所受力矩 $\sum_i \vec{M}_i=\sum_i \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}$

$$\sum_i \vec{M}_i=\sum_i (\vec{M}_{i外}+\vec{M}_{i内})=\vec{M}_{外}+\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{M}_{ij}$$

而 $\vec{M}_{ij}=-\vec{M}_{ji}$ $\Rightarrow$ $\sum_{i}\sum_{j\neq i}\vec{M}_{ij}=0$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}=\vec{M}_{外}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}_z}{\mathrm{d}t}$$

对定轴转动的刚体, J_z 为常量, $L_z=J_z\omega$

$$\frac{\mathrm{d}L_Z}{\mathrm{d}t}=J_Z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=J_Z\alpha=M_z$$

$$\frac{\mathrm{d}L_Z}{\mathrm{d}t}=M_z \quad 或 \quad M_z\mathrm{d}t=\mathrm{d}L_z=\mathrm{d}(J\omega)$$

——刚体定轴转动的动量矩定理微分形式。

刚体定轴转动动量矩定理积分形式:

$$\int_{t_1}^{t_2} M_z \,\mathrm{d}t = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \mathrm{d}(J\omega)$$

$$= J\omega_2 - J\omega_1 = L_2 - L_1 = \Delta L$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M_z \,\mathrm{d}t = \Delta L$$

定轴转动刚体所受合外力矩的冲量矩等于其动量矩的增量。

讨论

J 不变时 $\Delta L = J\omega_2 - J\omega_1$

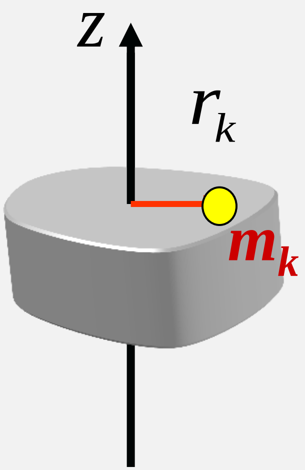
J 改变时 $\Delta L = J_2\omega_2 - J_1\omega_1$

2. 刚体绕定轴转动的动量矩守恒定律

对定轴转动刚体

若 $M_z = 0$ ⟶ $\Delta L_z = 0$　$J\omega =$ 常量　即 $\Delta L = 0$

动量矩 L 不变的含义:



刚体: J 不变 , 则 ω 不变。

非刚体:因 J 可变,则 $J\omega$ 乘积不变。

变形体绕某轴转动时, 若 $M_z = 0$

则变形体对该轴的动量矩 $L_z = \sum_k J_k \omega_k = C$

动量矩守恒举例

$J(t)\omega =$常量 $\Rightarrow$ $J(t)\uparrow \ \omega\downarrow$ $J(t)\downarrow \ \omega\uparrow$

花样滑冰、跳水、芭蕾舞等.

例1一质点m,速度为$\vec{v}$,如图所示, A、B、C分别为三个参考点,此时m相对三个点的距离分别为d_1、d_2、d_3。

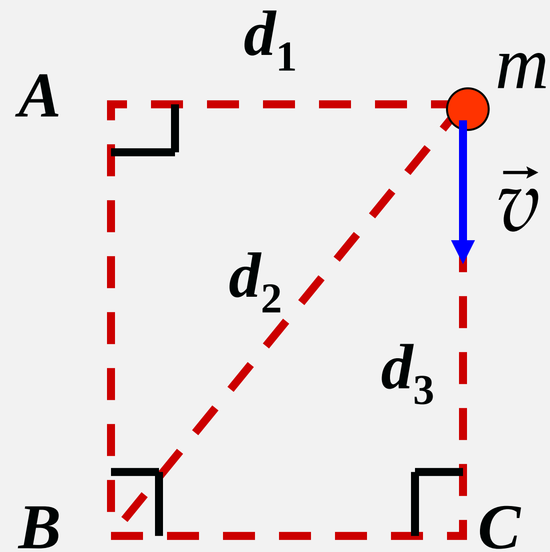
求: 此时质点对三个参考点的动量矩的大小。

解: 公式 $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$

$$\therefore \quad L_A = d_1 m v$$

$$L_B = d_1 m v$$

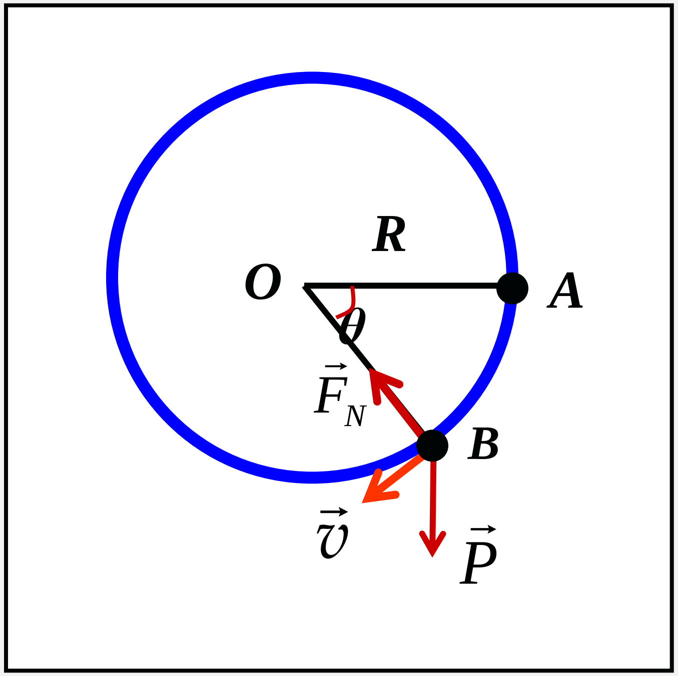
$$L_C = 0$$



例2 半径为R的光滑圆环上A点有一质量为m的小球，从静止开始下滑，若不计摩擦力。

求：小球到达B点时对O的动量矩和角速度。

解：小球为研究对象，受力分析如图所示



小球受重力矩作用，由动量矩定理：

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

$$M = mgR\cos\theta = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

$$L = mvR = mR^2\omega = mR^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

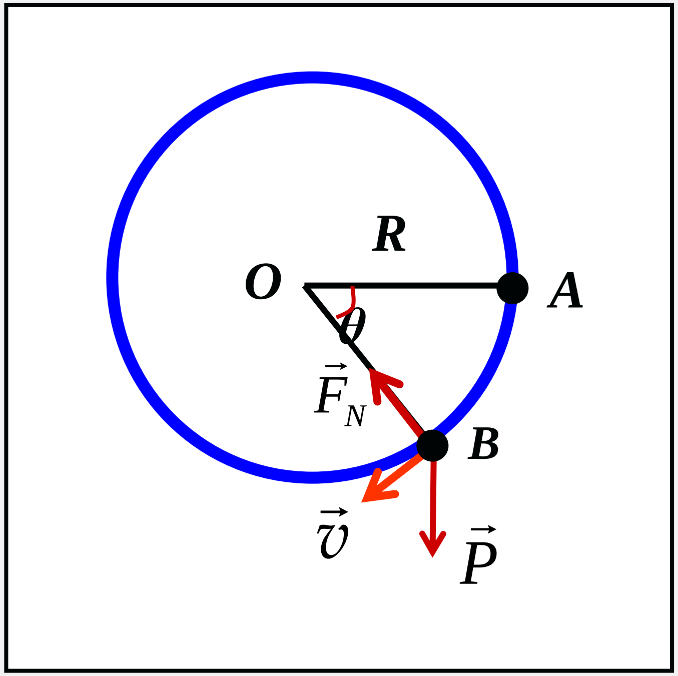
则 $$\frac{dL}{dt} = mR^2\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = mR^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\frac{d\theta}{d\theta}$$

$$= mR^2\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} = \omega\frac{dL}{d\theta}$$

$$\therefore mgR\cos\theta = \omega\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = \frac{mR^2\omega}{mR^2}\frac{dL}{d\theta} = \frac{L}{mR^2}\frac{dL}{d\theta}$$

即

$$L\mathrm{d}L = m^2 g R^3 \cos\theta \mathrm{d}\theta$$



积分

$$\int_0^L L\mathrm{d}L = m^2 g R^3 \int_0^\theta \cos\theta \mathrm{d}\theta$$

$$L = mR^{3/2}(2g\sin\theta)^{1/2}$$

$$\because \quad L = mR^2\omega$$

$$\therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{R}\sin\theta}$$

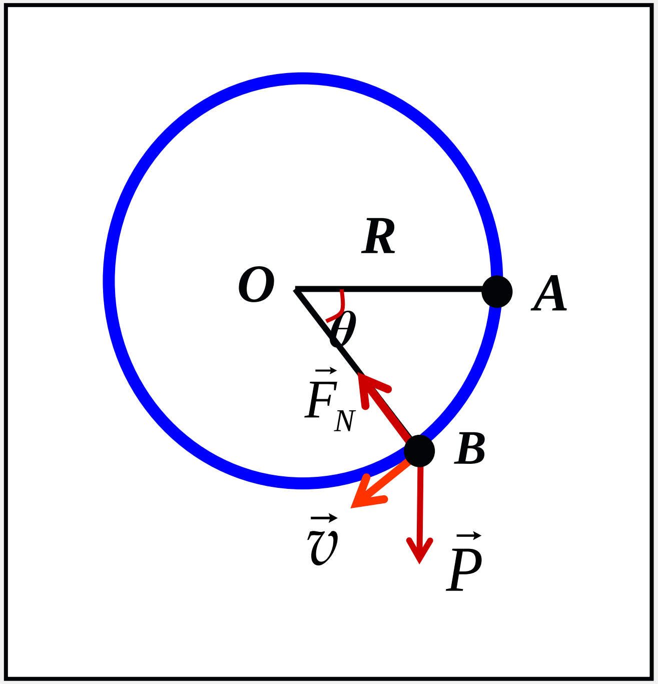
方法二;机械能守恒

B点为零势点

$$mgR\sin\theta = \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}mR^2\omega^2$$

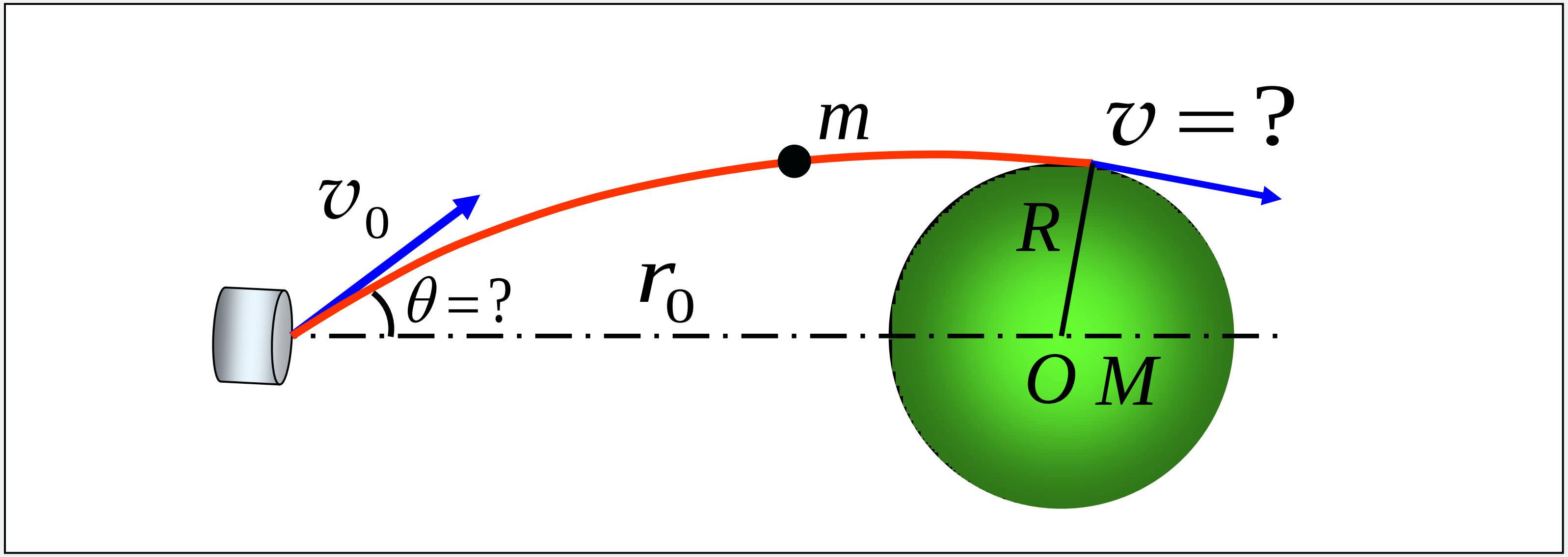
$$\therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{R}\sin\theta}$$



$$\because \quad L = mR^2\omega \qquad \therefore L = mR^{3/2}(2g\sin\theta)^{1/2}$$

例3 发射一宇宙飞船去考察一 质量为 M，半径为R的行星。当飞船静止于空间距行星中心 $4R$ 时，以速度 v_0发射一质量为 m 的仪器。要使该仪器恰好掠过行星表面。

求：发射角θ及着陆滑行时的速度v 多大?



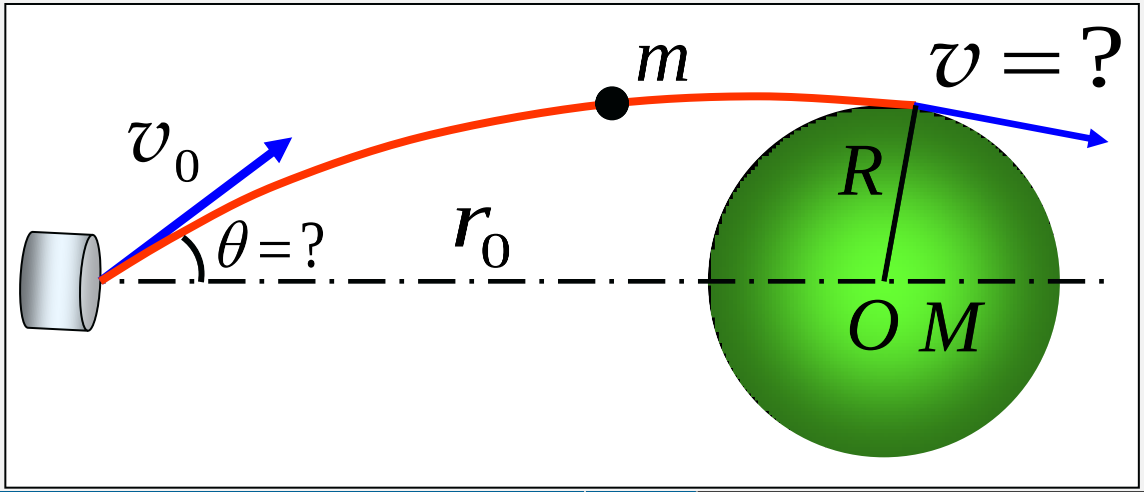
解: 引力场（有心力）

系统的机械能守恒 $\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}-\frac{GMm}{r_0}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R}$

质点的动量矩守恒 $mv_0r_0\sin(\pi-\theta)=mvR$

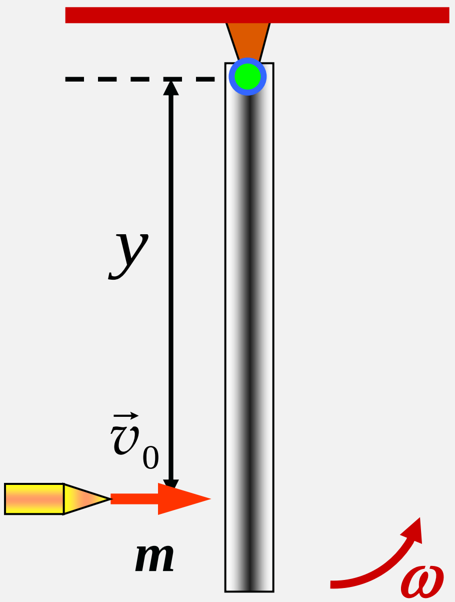
$$\sin\theta=\frac{1}{4}\left(1+\frac{3GM}{2Rv_0^{\ 2}}\right)^{1/2} \qquad v=\frac{v_0r_0\sin\theta}{R}=4v_0\sin\theta$$

$$v=v_0\left(1+\frac{3GM}{2Rv_0^{\ 2}}\right)^{1/2}$$



例4 一均质棒,长度为 L,质量为M,现有一子弹在距轴为 y 处水平射入细棒,子弹的质量为 m,速度为 v_0。

求: 子弹细棒共同的角速度 ω。



解:子弹、细棒系统的动量矩守恒

$$mv_0 y = J\omega$$

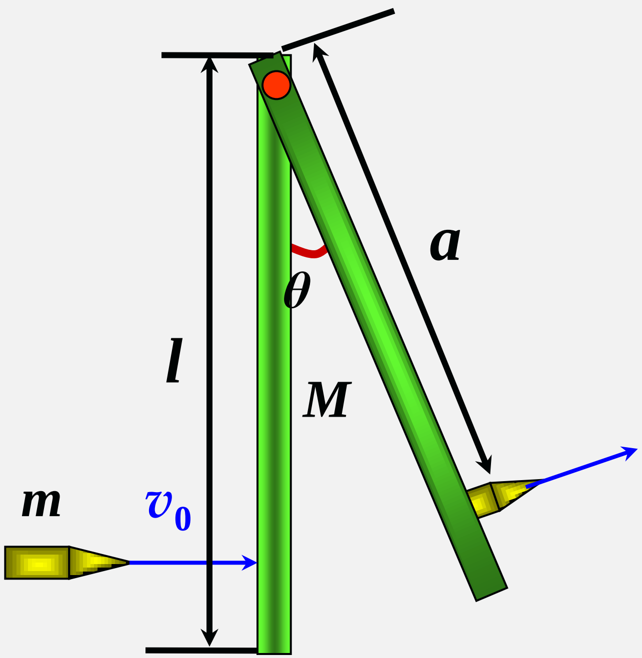
其中 $J = J_{棒} + J_{子} = \frac{1}{3}ML^2 + my^2$

$$\omega = \frac{mv_0 y}{\frac{1}{3}ML^2 + my^2}$$

例7 如图所示，一质量为 m 的子弹以水平速度射入一静止悬于顶端长棒的 a 处，使棒偏转 30°，已知棒长为 l，质量为 M。

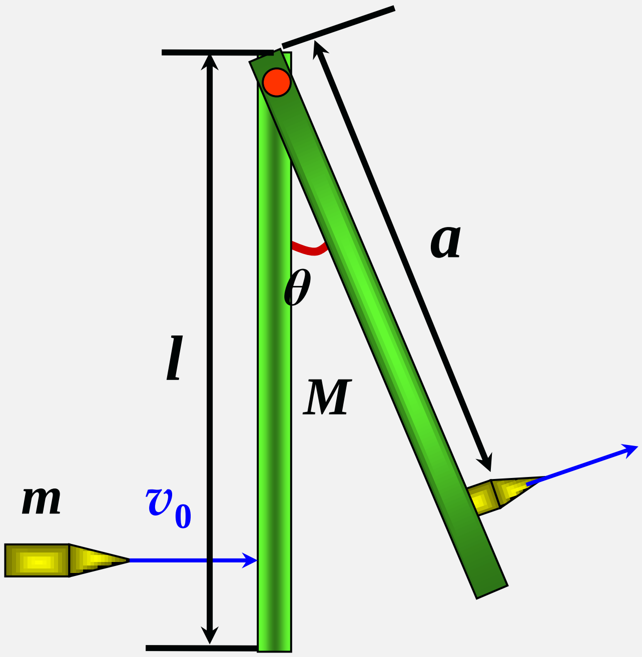
求：子弹的初速度 v_0。

解：将子弹和棒看作一个系统，在极短时间内系统动量矩守恒。



$$mv_0a=\left(\frac{1}{3}Ml^2+ma^2\right)\omega \qquad (1)$$

子弹射入棒后,以子弹、棒、地球为一系统，机械能守恒。



取棒轴点为系统重力势能零点，则

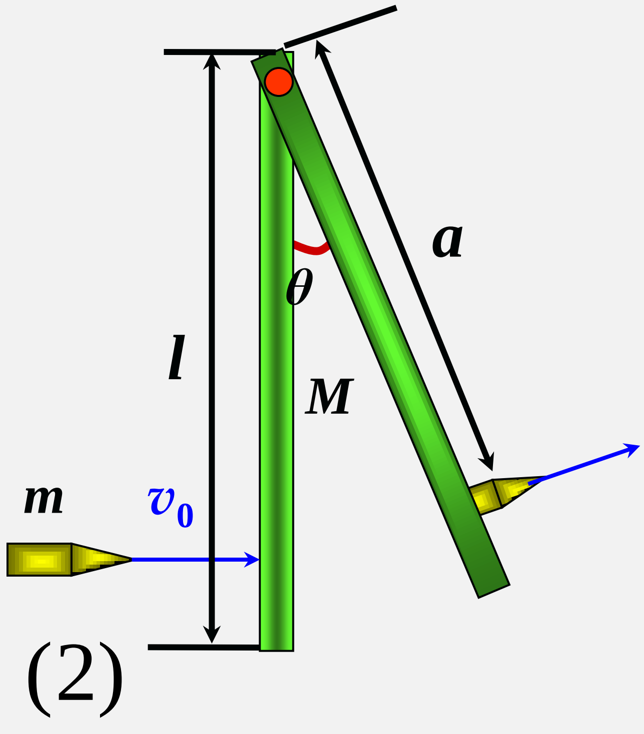
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2+ma^2\right)\omega^2-mga-Mg\frac{l}{2}$$

$$=mga(\cos\theta)+Mg\frac{l}{2}(\cos\theta)\quad(2)$$

整理，得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2+ma^2\right)\omega^2=$$

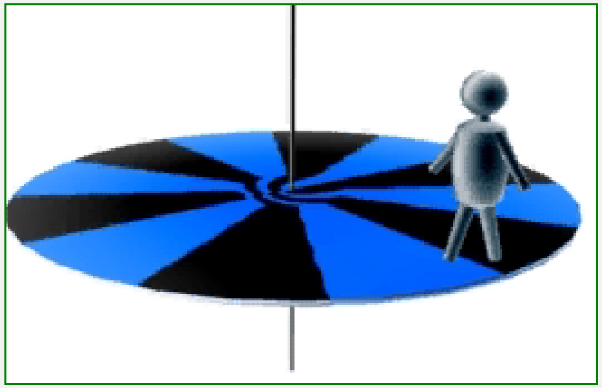
$$mga(1-\cos\theta)+Mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta) \quad (2)$$



由（1）、（2）式解得初速度

$$v_0=\frac{1}{ma}\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(Ml+2ma\right)\left(Ml^2+3ma\right)g/6}$$

例9 质量为M、半径为R的转盘，可绕铅直轴无摩擦地转动。转盘的初角速度为零。一质量为m的人，在转盘上从静止开始沿半径为r的圆周相对转盘匀速走动，如图所示。求当人在转盘上奏一周回到盘上的原位置时，求转盘相对于地面转过了多少角度。



解 以人和转盘组成的系统为研究对象，人相对转盘的速度为v_r，转盘相对于固定转轴(地面）的角速度为ω，则人相对固定转轴的速度为 $v_r + r\omega$。

系统对固定转轴的动量矩守恒，即

$$mr^2\left(\frac{v_r}{r}+\omega\right)+\frac{1}{2}MR^2\omega=0$$

$$\omega=-\frac{mrv_r}{mr^2+\frac{1}{2}MR^2}$$

设在时间 Δt 内，盘相对于地面转过的角度为 θ ，则

$$\theta=\omega\Delta t=-\frac{mrv_r}{mr^2+\frac{1}{2}MR^2}\Delta t$$

$$\theta = -\frac{mrv_r}{mr^2 + \frac{1}{2}MR^2}\Delta t = -\frac{mr^2}{mr^2 + \frac{1}{2}MR^2}\frac{v_r}{r}\Delta t$$

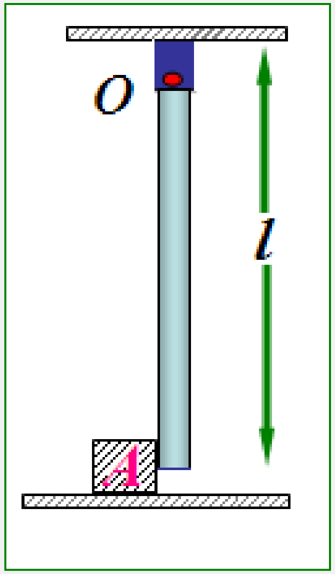
其中 $\frac{v_r}{r}\Delta t$ 为人相对转盘转过的角度

所以，盘相对于地面转过的角度为

$$\theta = -\frac{mr^2}{mr^2 + \frac{1}{2}MR^2}2\pi$$

负号说明人运动的方向和盘相对于地面转动的方向相反

例10 长为 l、质量为M的均质杆，一端悬挂，可绕通过O 点垂直于纸面的轴转动。今杆自水平位置无初速度地下落，在铅垂位置与质量为m，的物体A做完全非弹性碰撞，如图所示，碰撞后物体A沿摩擦系数为μ的水平面滑动。求物体A沿水平面滑动的距离。



解 第一阶段取杆为研究对象，设ω为这一阶段末的角速度，由动能定理或机械能守恒

$$\frac{1}{2}J\omega^2 - 0 = Mg\frac{l}{2} \qquad J = \frac{1}{3}Ml^2$$

解得 $\omega^2 = \dfrac{3g}{l}$ 方向顺时针

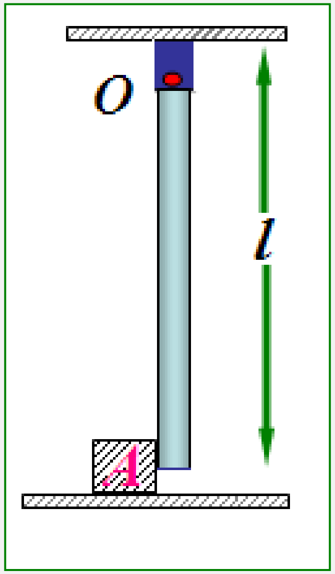
第二阶段取杆和物体A为研究对象，设碰撞结束时杆的角速度为ω'，由动量矩守恒

$$J\omega = J\omega' + ml^2\omega'$$

$$\frac{1}{3}Ml^2\sqrt{\frac{3g}{l}} = \frac{1}{3}Ml^2\omega' + ml^2\omega'$$

$$\omega' = M\sqrt{\frac{3g}{l}}/(M+3m)$$

方向顺时针



第三阶段取物体A为研究对象，设物体 A 滑过的距离为S，根据质点动能定理，有

$$0-\frac{1}{2}m(l\omega')^2=-mg\mu S$$

$$S=\frac{3lM^2}{2\mu(M+3m)^2}$$

如果是完全弹性碰撞,结果如何?

THANKS

FOR YOUR ATTENTION