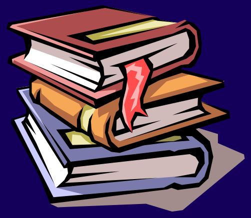
§2 初等矩阵

一. 初等矩阵

二. 方阵A可逆的充要条件

三. 用初等变换求逆及解矩阵方程



一. 初等矩阵

定义2. 由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

三种初等矩阵:

(1) 对调第 i 行与第j 行两行(或两列) $E(i,j)$

$$E(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots\cdots\cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & & & \\ & & & 1 & \cdots\cdots\cdots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

作用:

$E_m(i,j)A_{m\times n}$

对调 A 的第 i 行与第j 行

$A_{m\times n}E_n(i,j)$

对调 A 的第 i 列与第j 列

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j)$$

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘第i 行或第i 列 $E(i(k))$

$$E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

作用:

$E_m(i(k))A_{m\times n}$ — 对 A 施行运算 $r_i \times k$

$A_{m\times n}E_n(i(k))$ — 对 A 施列运算 $c_i \times k$

$$E(i(k))^{-1} = E(i(\tfrac{1}{k}))$$

(3) 以数 k 乘第 j 行(i 列)加到第 i 行(j 列)上 $E(i\,j(k))$

$$E(i\,j(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

作用:

$E_m(i\,j(k))A_{m\times n}$ — 对 A 施行运算 $r_i + r_j \times k$

$A_{m\times n}E_n(i\,j(k))$ — 对 A 施列运算 $c_j + c_i \times k$

$$E_m(i\,j(k))^{-1} = E(i\,j(-k))$$

归纳以上的讨论,可得

性质1. 对 $A_{m\times n}$ **施行一次初等行变换相当于用一个相应的初等矩阵左乘** A；

对 $A_{m\times n}$ **施行一次初等列变换相当于用一个相应的初等矩阵右乘** A .

简言之:

用初等矩阵左乘 $A \leftrightarrow$ **对** A **作行变换**

用初等矩阵右乘 $A \leftrightarrow$ **对** A **作列变换**

二. 方阵A 可逆的充要条件

性质2. 方阵 A 可逆 $\Longleftrightarrow$ 存在有限个初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots P_l$, 使 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$.

证: "$\leftarrow$". 设 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$, 因为初等矩阵可逆, 所以 A 可逆 .

"$\rightarrow$". 设 A 可逆, 其标准形为 F, 则 $F \sim A$, 即存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots P_l$, 使

$$A = P_1 P_2 \cdots P_s F\, P_{s+1} \cdots P_l$$

因 A 可逆, 所以 F 也可逆, 设 $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

若 $r < n$, 则 $|F| = 0$, 与 F 可逆矛盾, 所以 $F = E$,

从而 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$ 证毕

推论1. 方阵 A 可逆 $\Longleftrightarrow A \overset{r}{\sim} E$

证： 由定理2方阵 A 可逆的充要条件是

$$A = P_1 P_2 \cdots P_l \quad (P_i\text{为初等矩阵})$$

$$= P_1 P_2 \cdots P_l E$$

此式表明 E 经有限次初等行变换可变为 A，即

$$A \overset{r}{\sim} E$$

推论2. $A_{m\times n}, B_{m\times n}$ 等价 $\Longleftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵P 与 n 阶可逆矩阵 Q，使

$$PAQ = B$$

(上节定理1(iii))

三. 用初等变换求逆矩阵

给定n阶可逆方阵A，如何求 A^{-1}.

分析： A **可逆** $\longrightarrow$ $P_l \cdots P_2 P_1 A = E$ （P_i为初等矩阵）

$\longrightarrow$ $P_l \cdots P_2 P_1 E = A^{-1}$

$\longrightarrow$ $P_l \cdots P_2 P_1 (A, E) = (E, A^{-1})$

上式表明：若 $(A, E) \overset{r}{\sim} (E, X)$ **，则 A 可逆，且 X 即为**

A的逆，即 $X = A^{-1}$.

用初等变换解矩阵方程

给定n 阶可逆方阵 A 及 $n\times s$ 阶矩阵 B, 如何解 $AX=B$?

分析: A 可逆

$$\Longrightarrow P_l\cdots P_2P_1A=E\ (P_i\text{为初等矩阵})$$

$$\Longrightarrow P_l\cdots P_2P_1E=A^{-1}$$

$$\Longrightarrow P_l\cdots P_2P_1B=A^{-1}B$$

$$\Longrightarrow P_l\cdots P_2P_1(A,B)=(E,A^{-1}B)$$

上式表明: 若 $(A,B)\overset{r}{\sim}(E,X)$, 则 A 可逆, 且 X 即为 $AX=B$ 的解.

例1. 设 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ 4 & -6 & 2\end{pmatrix}$ 的行最简矩阵为 F，求 F，并求一个可逆矩阵 P，使$PA=F$.

解: 把A用初等行变换化成行最简形，即为F.

但需要求出 P。按上述方法，对 (A, E) 作初等行变换，把 A 化成行最简形，便同时得到 F 和 P. 即 $P(A, E)=(F, P)$

$$(A,E)=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_2\\ r_2-2r_1}]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -4 & 4 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+4r_2]{\substack{r_2-r_3 \\ r_1-r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

故 $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为A的行最简形，而使

$PA = F$ 的可逆矩阵P 为 $P = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 10 & -8 & -3 \end{pmatrix}$

练习：P78 3(1)

例2. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$，证明 A 可逆并求其逆.

解: $$(A,E)=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_3\times 3\\ r_3+2r_1}}{\overset{r_2\leftrightarrow r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 9 & -4 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix}\underset{r_3+9r_2}{\overset{r_3\times 2}{\sim}}\begin{pmatrix}3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2-r_3}{\overset{r_1+2r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 18 & 9 & 12\\ 0 & -2 & 0 & -8 & -4 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6\end{pmatrix}\underset{r_2\div(-2)}{\overset{r_1\div 3}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

所以

(1) $A \overset{r}{\sim} E$ (A与E 行等价)

(2) 计算 $AX = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

(P64例2,上节例1)

例3. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&2&-2\\-1&3&2\end{pmatrix}$, $\vec{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{b}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$, 求解线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}_1$, $A\vec{x}=\vec{b}_2$.

解: 设 $A\vec{x}_1=\vec{b}_1$, $A\vec{x}_2=\vec{b}_2$, $X=(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$, $B=(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$,

则问题转化为解矩阵方程 $AX=B$

$$(A,B)=\begin{pmatrix}2&1&-3&1&-1\\1&2&-2&2&0\\-1&3&2&-2&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2-2r_1\\ r_3+r_1}]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&-3&1&-3&-1\\0&5&0&0&5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\div 5]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&1&0&0&1\\0&-3&1&-3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+3r_2}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2+2r_3}\left(\boxed{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}\begin{matrix}-4&2\\0&1\\-3&2\end{matrix}\right)$$

可见 $A \overset{r}{\sim} E$, 所以 A 可逆，且

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

因此, 线性方程组 $A\vec{x} = \vec{b}_1$, $A\vec{x} = \vec{b}_2$ 有唯一解:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(A,B) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

例4 求解 $AX = A + X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

解: 原方程变形为 $(A - E)X = A$

$$(A - E, A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2 \leftrightarrow r_3}{\overset{r_2 - 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3 \times (-1)}{\overset{r_3 + 4r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-2r_2]{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-2&2&6\\0&1&0&2&0&-3\\0&0&1&2&-1&-3\end{pmatrix}$$

可见 $A-E$ 可逆, 且

$$X=(A-E)^{-1}A=\begin{pmatrix}-2&2&6\\2&0&-3\\2&-1&-3\end{pmatrix}$$

注: 若要求 $Y=CA^{-1}$ (即解 $YA=C$)

法1. $\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}\overset{c}{\sim}\begin{pmatrix}E\\CA^{-1}\end{pmatrix}$

法2. 根据 $Y^{\mathrm{T}}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}C^{\mathrm{T}}$

$$(A^{\mathrm{T}},C^{\mathrm{T}})\overset{r}{\sim}(E,\underbrace{(A^{\mathrm{T}})^{-1}C^{\mathrm{T}}}_{Y^{\mathrm{T}}})$$

思考: 设 A, B 可逆, 如何解矩阵方程 $AXB=C$?

小结

1. 矩阵的初等变换与初等矩阵

注意: 用初等矩阵**左**乘 $A \leftrightarrow$ 对A 作**行**变换

用初等矩阵**右**乘 $A \leftrightarrow$ 对A 作**列**变换

2. 用初等变换法求矩阵的逆

作业

P78　　4（1）；5（2）；10（3）