高等数学
单元自测(五)

一、填空（每小题4分，共20分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]=$ $\underline{\dfrac{\pi}{6}}$

析：原式=

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{\pi}{6}$$

2. $y=\int_0^x (1+t)\arctan t dt$ 的极小值点为 $\underline{\quad 0 \quad}$，极小值为 $\underline{0 \quad}$。

析： 由 $y'=(1+x)\arctan x$

得驻点 $x=0 \quad x=-1$

$$y''=\arctan x+\frac{1+x}{1+x^2}$$

$$y''(0)=1>0 \qquad y''(-1)<0$$

3.若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，则

$$\int_{-a}^{a} x\left[f(x)+f(-x)\right]dx = \underline{\quad 0 \quad}$$

提示：被积函数 $x\left[f(x)+f(-x)\right]$ 为奇函数

4. 当 $x>0$ 时 $f(x)$ 连续，且 $\int_1^{x^2} f(t)dt = x^2(1+x)$，

则 $f(2) = \underline{1+\frac{3}{2}\sqrt{2}}$

分析：对式子两边同时求导可得：

$$f(x^2)\cdot 2x = 2x + 3x^2$$

整理得：

$$f(x^2) = \frac{2+3x}{2}$$

代值即得答案

5.设 $f(x)$ 连续，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(x)dx$ ，

则 $f(x)=$ $\underline{\ x-1\ }$

析：设 $A=\int_0^1 f(x)dx$

$$\Rightarrow \quad A=\int_0^1(x+2A)dx=\frac{1}{2}+2A$$

$$\therefore \quad A=-\frac{1}{2}$$

二、选择题（每小题4分，共16分）

1.广义积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = $（A）

（A）1； （B）-1； （C）e； （D）发散。

析：原式 $= -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$

$$= -e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= 1$$

2.设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x+\cos^4 x\right)dx$

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2\sin^3 x-\cos^4 x\right)dx$ 则有（D）。

（A）$N<P<M$; （B）$M<P<N$;

（C）$N<M<P$; （D）$P<M<N$.

析：由被积函数的奇偶性 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx=0$

$N=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx>0$ $P=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx<0$

3.若 $f(x)$ 连续且满足 $f(x)=\int_0^{2x} f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$

则 $f(x)$=(C)

（A） $e^x \ln 2$； （B） $e^{2x}\ln 2$；

（C） $e^x+\ln 2$； （D）$e^{2x}+\ln 2$.

析: $f'(x)=2f(x) \Rightarrow \ln|f(x)|=2x+c_1 \Rightarrow |f(x)|=ce^{2x}$

由 $f(0)=\ln 2 \Rightarrow c=\ln 2$

$\therefore\ f(x)=ce^{2x}=e^{2x}\ln 2$

4. 设 $f(x)$ 为连续函数，$I = t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)\,dx$ $(t>0, s>0)$，则I的值（D）

（A）依赖于x和t；

（B）依赖于s,t,x；

（C）依赖于t，不依赖于s；

（D）依赖于 s ，不依赖于t；

析： $I = t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)\,dx$

$$= \int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)\,dtx = \int_0^{s} f(u)\,du$$

首 页 上一页 下一页 尾 页 结 束 返 回

5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， 且 $\varphi(x)=(x-b)\int_a^x f(t)dt$，

则在 (a,b) 内必存在 ξ 使 $\varphi'(\xi)=$（A）

（A）0；　（B）1；（C）$\frac{1}{2}$；　（D）2.

析：

$$\left.\begin{aligned}\varphi(a)&=(a-b)\int_a^a f(t)dt=0\\ \varphi(b)&=(b-b)\int_a^b f(t)dt=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\varphi(a)=\varphi(b)=0$$

由罗尔定理可得结论

三、计算下列定积分（20分）

1. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

解： 原式$= 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}d\sqrt{x}$

$$= 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \arcsin\sqrt{x}\, d\arcsin\sqrt{x}$$

$$= \left(\arcsin\sqrt{x}\right)^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{7\pi^2}{144}$$

2． $\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x}\,dx$

解：利用等式 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

原式 $= \pi\int_0^{\pi/2} |\cos x| \sin x dx$

$$= \frac{\pi}{2}\sin^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

3 . $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$

解： 原式 $= \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$

$$= \arcsin(x-1)\Big|_0^2$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin(-1)$$

$$= \pi$$

4 .已知 $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & (x<0)\\ e^{-x} & (x\geq 0)\end{cases}$ ，求$\int_1^3 f(x-2)dx$

解: 设 $t=x-2$

原式 $=\int_{-1}^{1} f(t)dt$

$$=\int_{-1}^{0}\left(1+t^2\right)dt+\int_0^1 e^{-t}dt$$

$$=\left(t+\frac{1}{3}t^3\right)\Bigg|_{-1}^{0}-e^{-t}\Big|_0^1$$

$$=\frac{7}{3}-\frac{1}{e}$$

四、解下列各题（20分）

1. 已知 $f(x)$ 连续且 $f(1)=1$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_1^{\cos x} f(t)dt}{1+x-e^x}$

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)\cdot(-\sin x)}{1-e^x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(\cos x)(-x)}{-x}$$

$$=f(1)$$

$$=1$$

2 .已知 $f(2)=\frac{1}{2}$ ，$f'(2)=0$ ，$\int_0^2 f(x)dx=1$，

求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$ 。

解： 设 $t=2x$

$$原式=\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{4}t^2 f''(t)dt=\frac{1}{8}\int_0^2 t^2 f''(t)dt$$

$$=\frac{1}{8}t^2 f'(t)\Big|_0^2-\frac{1}{8}\int_0^2 2tf'(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{4}tf(t)\Big|_0^2+\frac{1}{4}\int_0^2 f(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{4}\cdot 1=0$$

3 .设$f(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$，求 $f(x)$ 的极值并计算

$\int_{-2}^{2} x^2 f'(x)dx$。

解： $f'(x)=e^{-x^4}\cdot 2x$

令 $f'(x)=0$，解得唯一驻点为 $x=0$

$f''(x)=2e^{-x^4}-8x^4e^{-x^4}, f''(0)>0$

$\therefore\ x=0$ 是极小值点。

$$\int_{-2}^{2} x^2 f'(x)dx=\int_{-2}^{2} 2x^3e^{-x^4}dx$$

由奇函数的性质知此式为零。

五、解下列各题（20）

1.设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, $F(x)=\int_0^x (x-2t) f(t) dt$

试证:（1）若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 亦为偶函数;

（2）若 $f(x)$ 单调递减，则 $F(x)$ 单调递增。

证:（1）$F(-x)=\int_0^{-x} (-x-2t) f(t) dt$

令 $t=-u$,

$$原式=\int_0^x (-x+2u) f(-u)(-du)$$

$$=\int_0^x (x-2u) f(u) du$$

$$=F(x)$$

（2）$F(x)=x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt$

$$F'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-2xf(x)$$

$$=\int_0^x f(t)dt-xf(x)$$

$$=x\left[f(\xi)-f(x)\right]\quad(0<\xi<x)$$

$\because$ $f(x)$ 单调递减

$\therefore$ $f(\xi)-f(x)>0$

$\therefore$ $F'(x)>0 \Rightarrow F(x)$ 单调递增

2 .设函数$f(x)$在区间 $[0,1]$上可导，且满足

$f(1)=2\int_0^{1/2} xf(x)dx$。试证：至少存在一点$\xi\in(0,1)$

使 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$ 。

证：令 $F(x)=xf(x)$ 由条件知 $F(x)$在$[0,1]$

上连续可导且 $F(0)=0$

$$F(1)=f(1)=2\left(\frac{1}{2}-0\right)\eta f(\eta)=\eta f(\eta)=f(\eta)$$

$\therefore$ $F(x)$ 在$[\eta,1]$上满足罗尔定理条件。

$\therefore$ 至少存在一点 $\xi \in (\eta, 1) \subset (0,1)$

使 $F'(\xi) = 0$ 即 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$

六、附加题（20分）

1.设 $f(x)$ 是以 π 为周期的连续函数，证明：

$$\int_0^{2\pi}(\sin x+x)f(x)dx=\int_0^{\pi}(2x+\pi)f(x)dx$$

证：$\int_0^{2\pi}(\sin x+x)f(x)dx=\int_0^{\pi}\ +\int_{\pi}^{2\pi}$

只要证

$$\int_{\pi}^{2\pi}(\sin x+x)f(x)dx=\int_0^{\pi}(x+\pi-\sin x)f(x)dx$$

令 $x=u+\pi$ 则 $f(u+\pi)=f(x)$

$$\because \int_{\pi}^{2\pi}(\sin x+x)f(x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left[\sin(u+\pi)+u+\pi\right]f(u+\pi)du$$

$$=\int_0^{\pi}(x+\pi-\sin x)f(x)dx$$

即得证

2 .证明不等式 $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0$

证：令 $x=\sqrt{u}$ ，则有

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du$$

又令 $t = u - \pi$

$$\because \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du = -\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{\pi + t}} dt = -\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{\pi + u}} du$$

$$\therefore \text{原式} = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{\pi + u}} \right) du > 0$$

3 .设 $f(x)$ 在$[0,1]$ 上具有连续的导数， 且

$0 < f'(x) < 1$ ， $f(0) = 0$

证明:$\left[\int_0^1 f(t)dt\right]^2 > \int_0^1 f^3(t)dt$

证： 令 $F(x) = \left[\int_0^x f(t)dt\right]^2 - \int_0^x f^3(t)dt$

$$F'(x) = 2\int_0^x f(t)dt \cdot f(x) - f^3(x)$$

$$= f(x)\left[\int_0^x 2f(t)dt - f^2(x)\right]$$

令 $\varphi(x) = \int_0^x 2f(t)dt - f^2(x)$

则 $\varphi'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x)$

$$= 2f(x)\left[1 - f'(x)\right]$$

$\because \quad f'(x) > 0$

$\therefore \quad f(x)$ 单调递增，$f(x) > f(0) = 0$

又 $\quad f'(x) < 1 \Rightarrow \varphi'(x) > 0$

$\therefore \quad \varphi(x)$ 单调递增，$\varphi(x) > \varphi(0) = 0$

$\therefore \quad F'(x) > 0$

$\therefore \quad F(x)$ 单调递增，$F(x) > F(0)$

$\Rightarrow \quad F(1) > F(0)$

即 $F(1) = \left[\int_0^1 f(t)\,dt\right]^2 - \int_0^1 f^3(t)\,dt > F(0) = 0$

原式得证