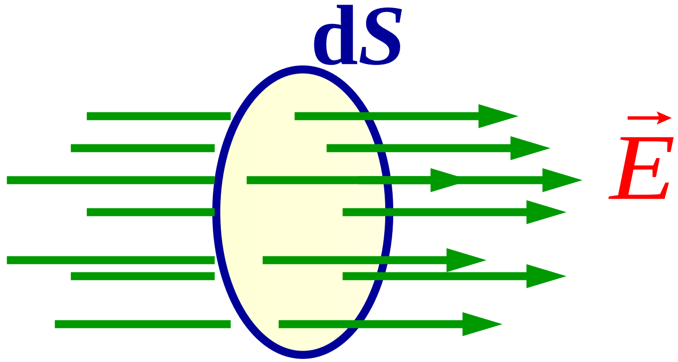
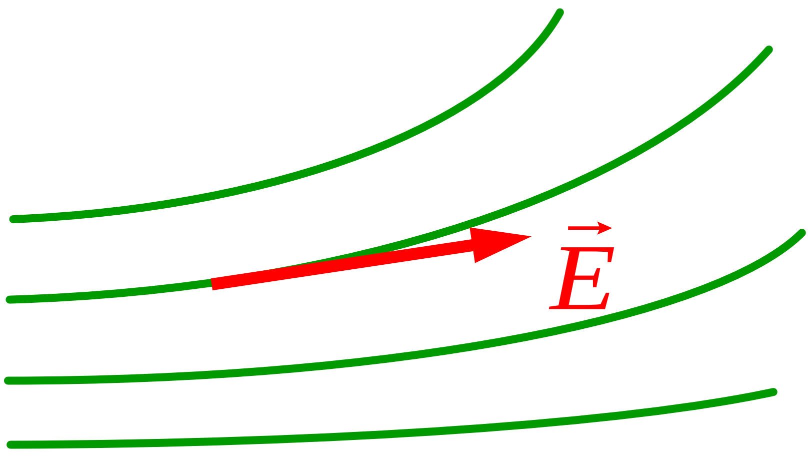
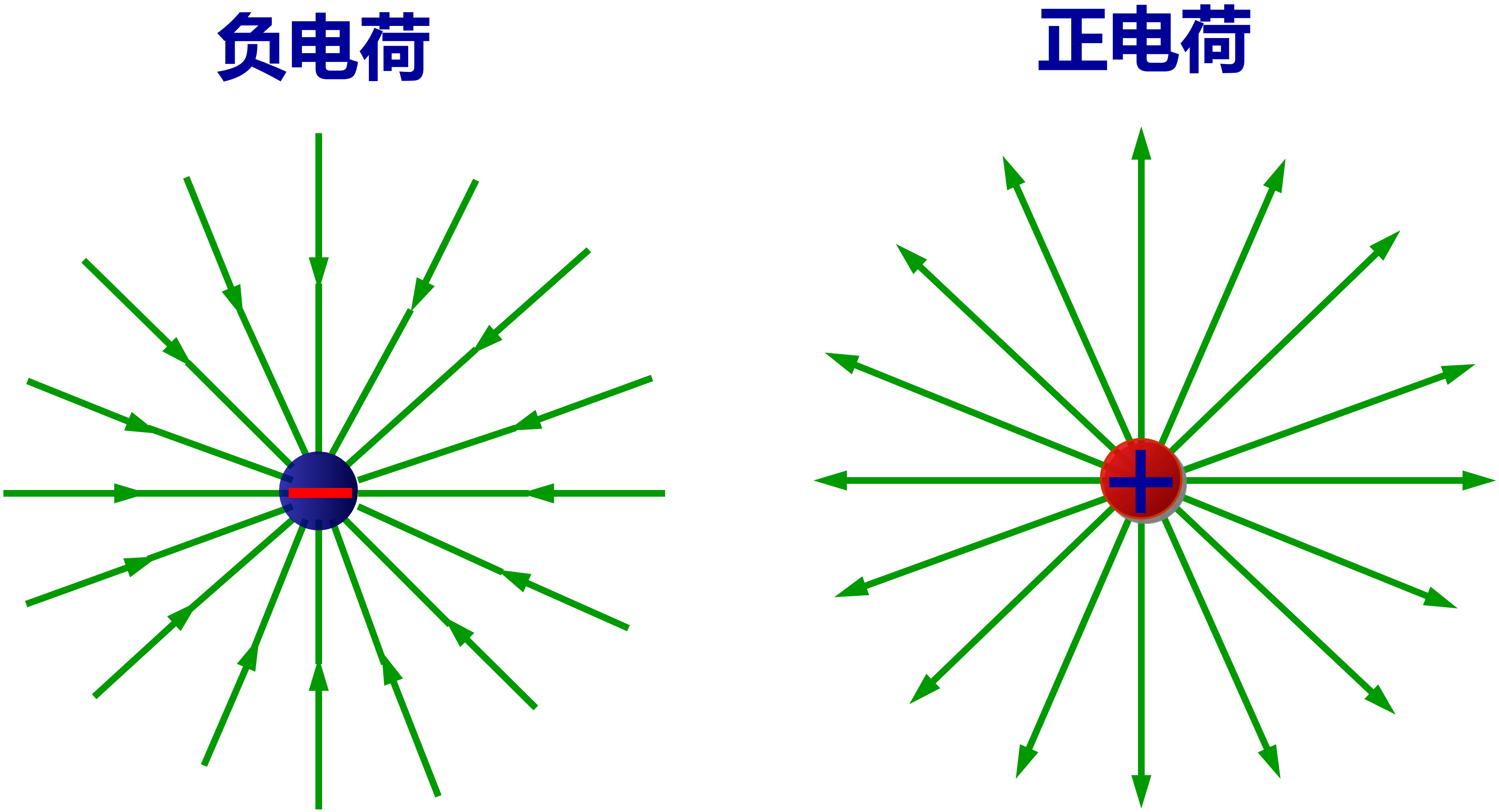
§10-3 电通量　高斯定理

1. 电场线（电力线）

电场线（E）线：在电场中画一组曲线，曲线上每一点的切线方向与该点的电场方向一致，这一组曲线称为电场线。电场线的画法规定：在电场中任一点处，通过垂直于电场强度E单位面积的电场线数等于该点的电场强度的数值。

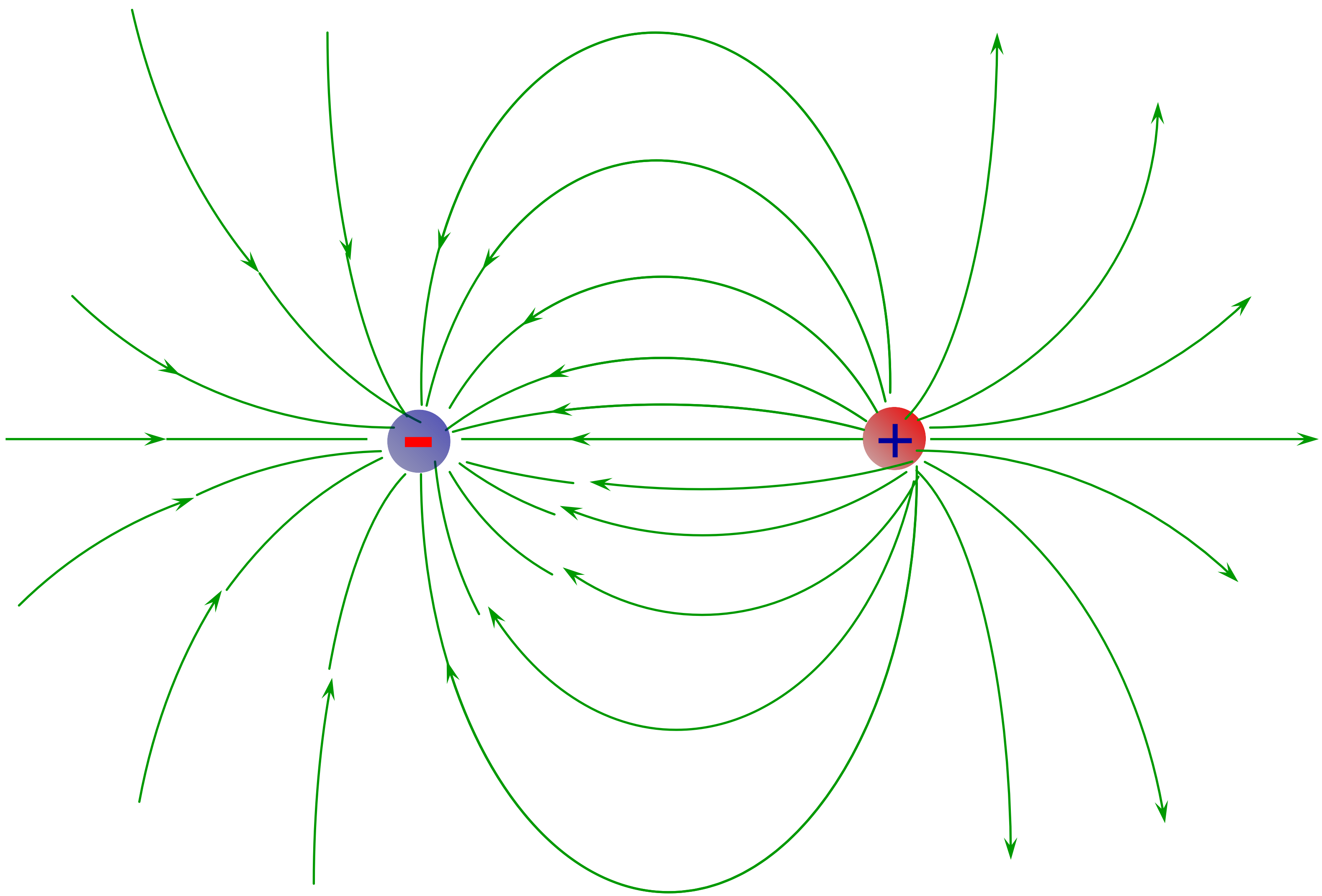




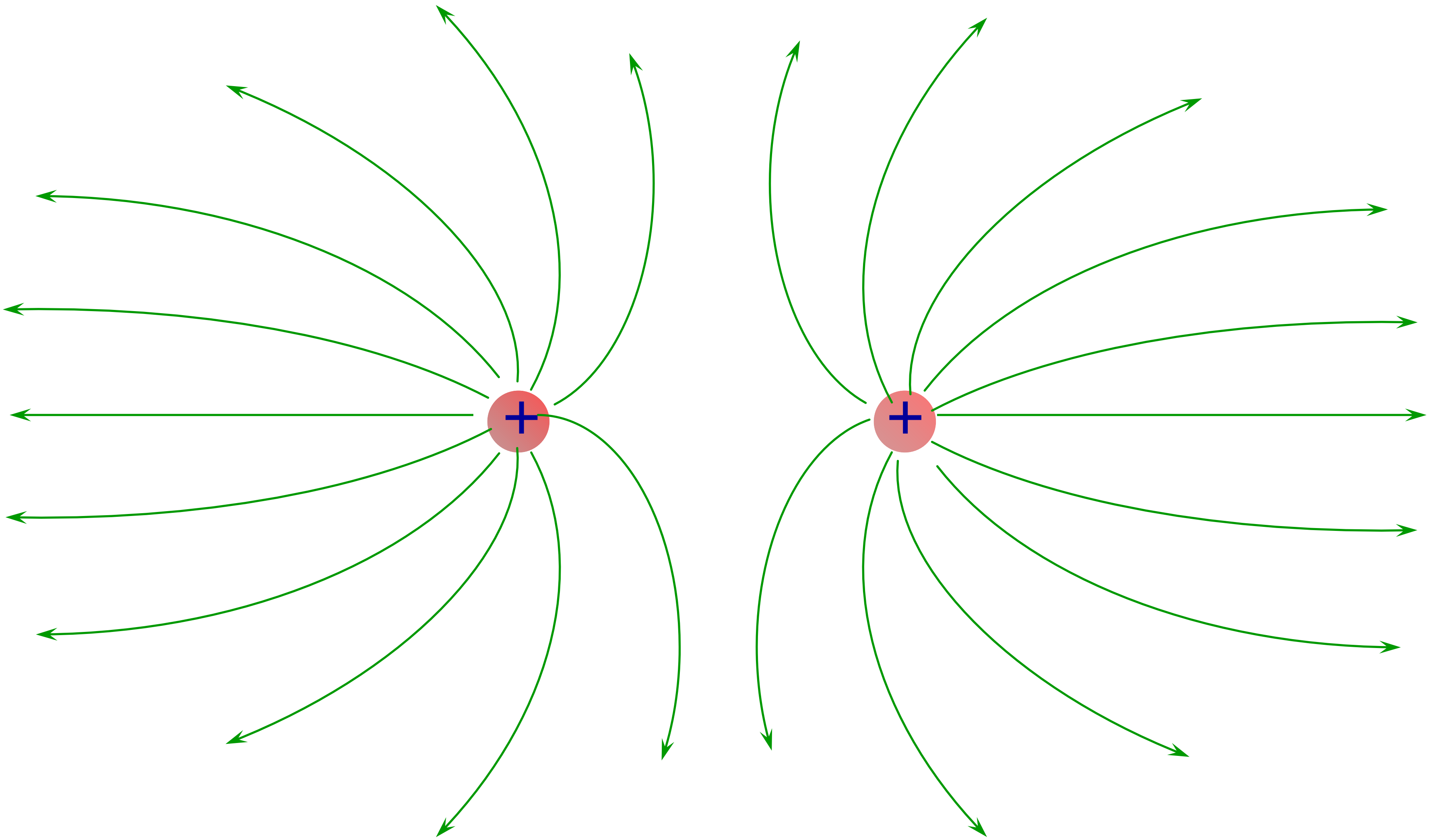


点电荷的电场线

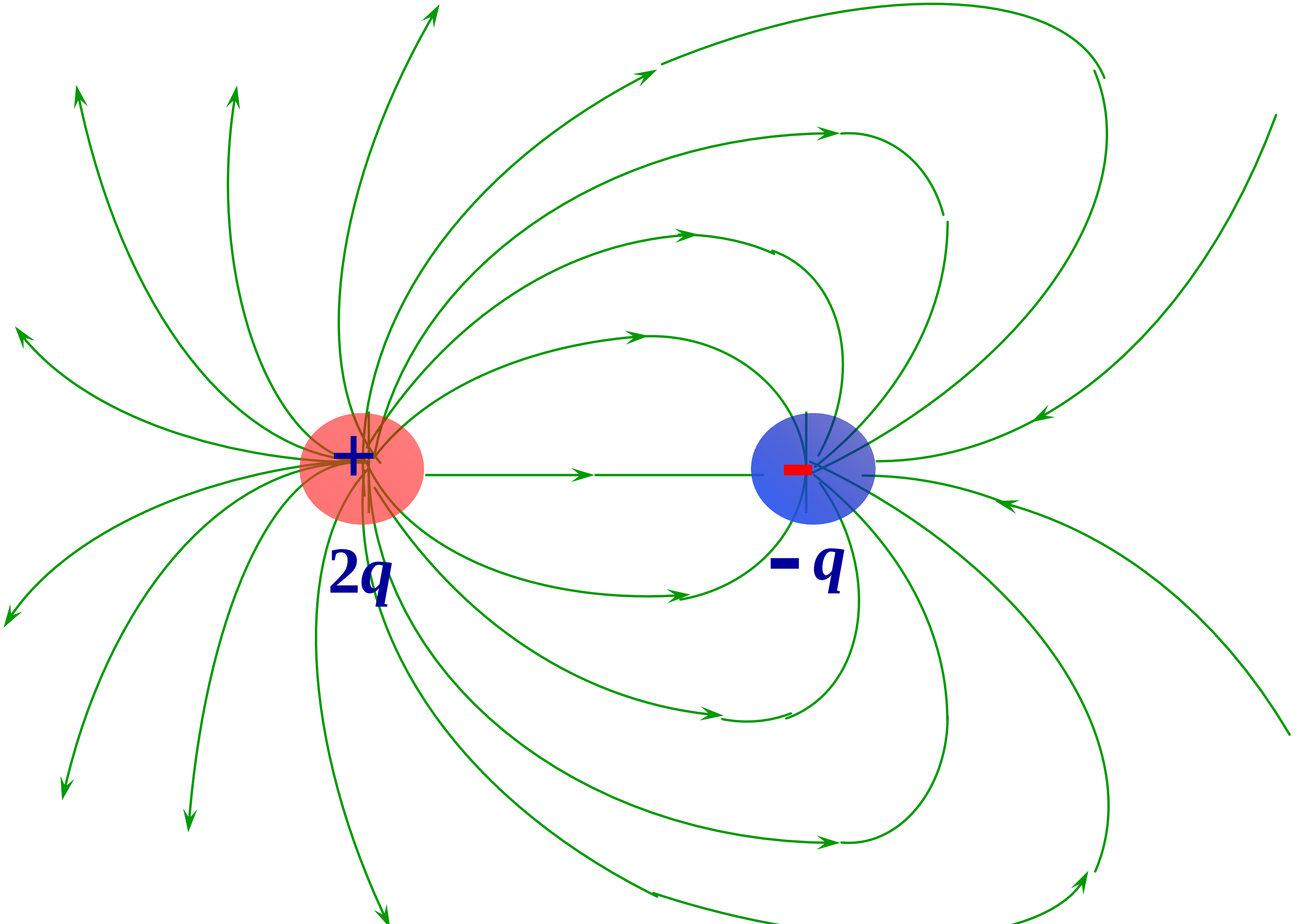
一对等量异号电荷的电场线



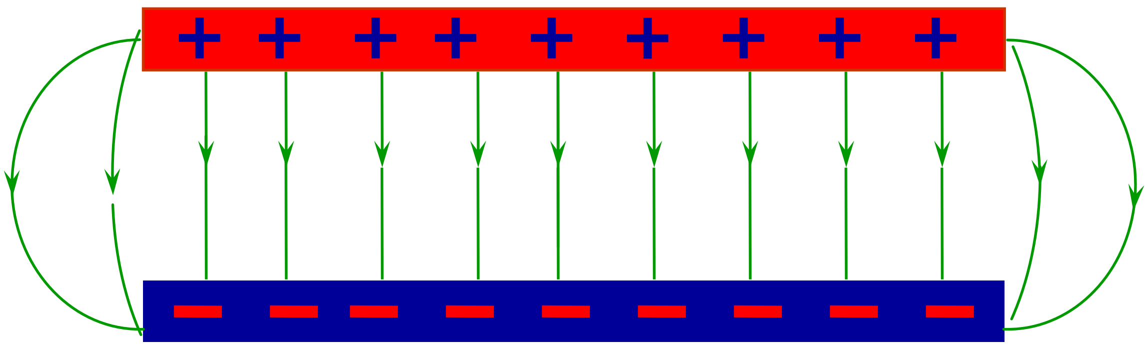
一对等量正点电荷的电场线



一对异号不等量点电荷的电场线



带电平行板电容器的电场

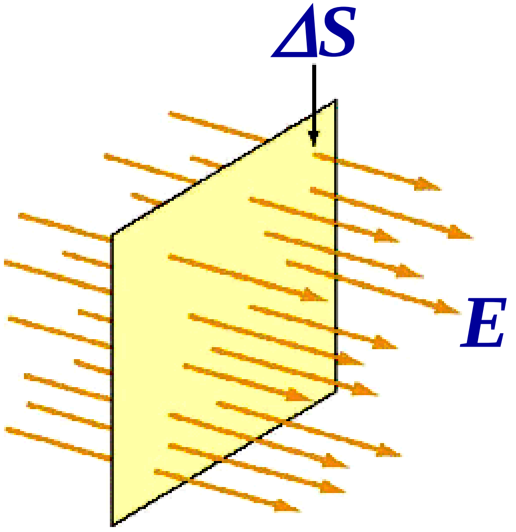


2. 电通量（电场强度通量）

电场中，穿过面积 S 的电场线的总条数， $(\Delta N = E\ \Delta S_{\perp})$

——（穿过该面的）电通量Φe

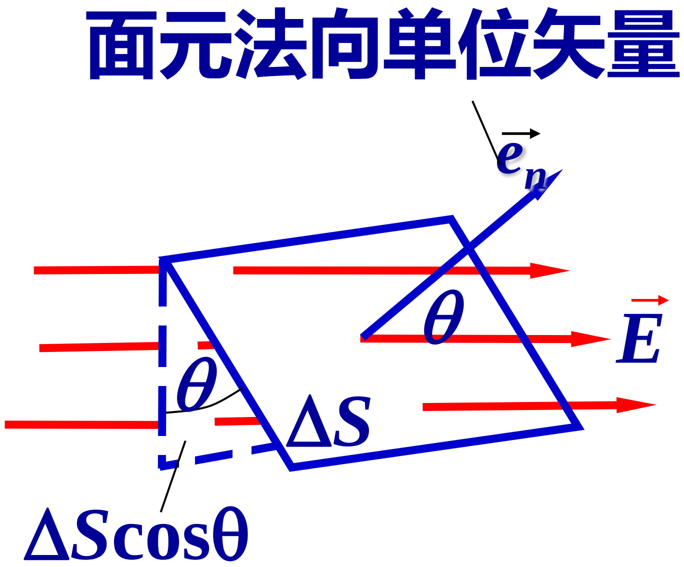
（1）均匀电场通过垂直面积元ΔS：



$$\Phi e = \Delta N = E\Delta S_{\perp}$$

$$= E\Delta S$$

（2）均匀电场与面积元的法线成θ角：



$$\Phi_e = \Delta N = E\Delta S_{\perp}$$

$$= E\Delta S\cos\theta$$

$$= \vec{E}\cdot\Delta S\hat{e}_n$$

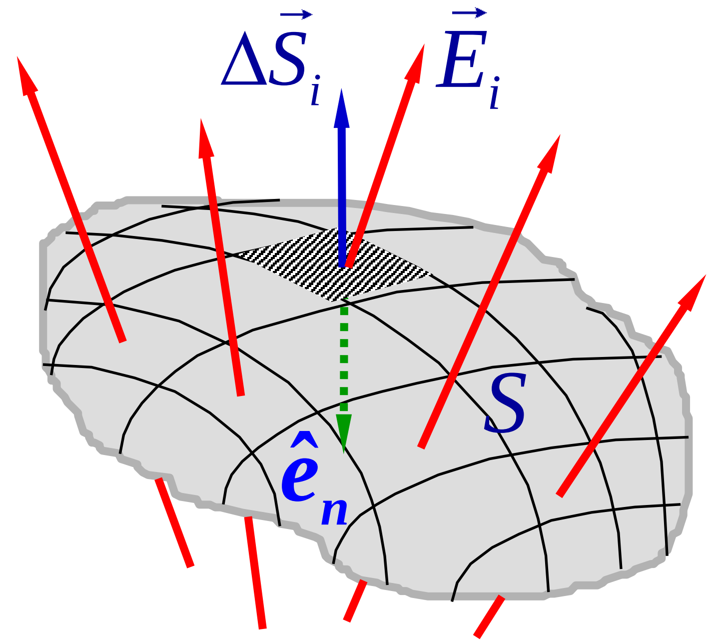
定义面元矢量 $\Delta\vec{S} = \Delta S\hat{e}_n$ **，则有** $\boxed{\Phi_e = \vec{E}\cdot\Delta\vec{S}}$

通过面元的电通量的正负，与面元矢量方向的定义有关。

(3) 电场不均匀，几何面 S 为任意曲面：

将曲面分割为无限多个面积元，

面积元ΔS_i： $\boxed{(\Phi_e)_i = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i}$



$$\Phi_e = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_i (\Phi_e)_i$$

$$= \lim_{\Delta S \to 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = \iint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

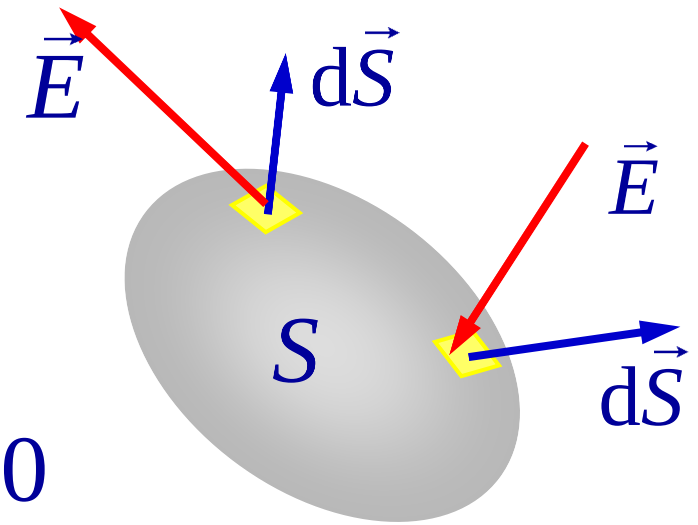
Φ_e 的正负依赖于面元指向的定义。

(对于不闭合曲面，面元法线方向可取任一侧)

（4）通过闭合曲面S 的电通量：

通常规定 $d\vec{S}$ 的方向从内指向外为正。

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



①若电场线从内向外穿出曲面，

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad d\Phi_{e1} = \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 > 0$$

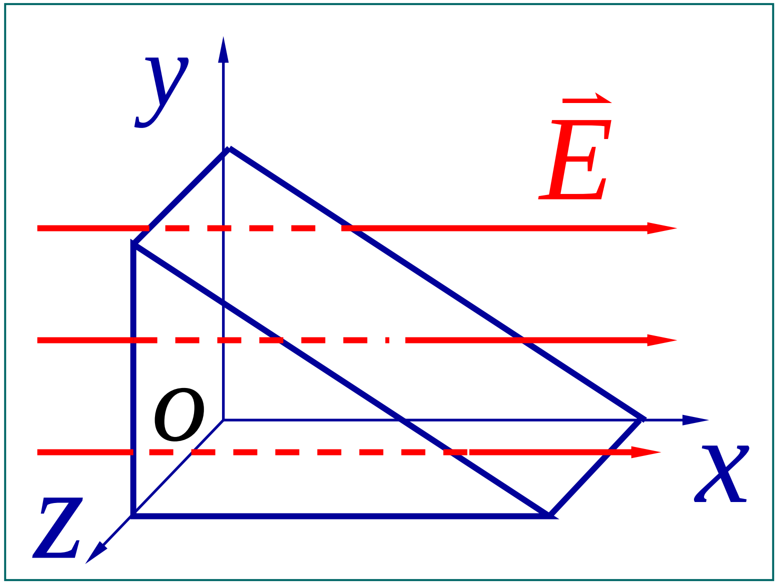
电通量为正，电通量向外“流”

②若电场线从外部穿入曲面，

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \qquad d\Phi_{e2} = \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 < 0$$

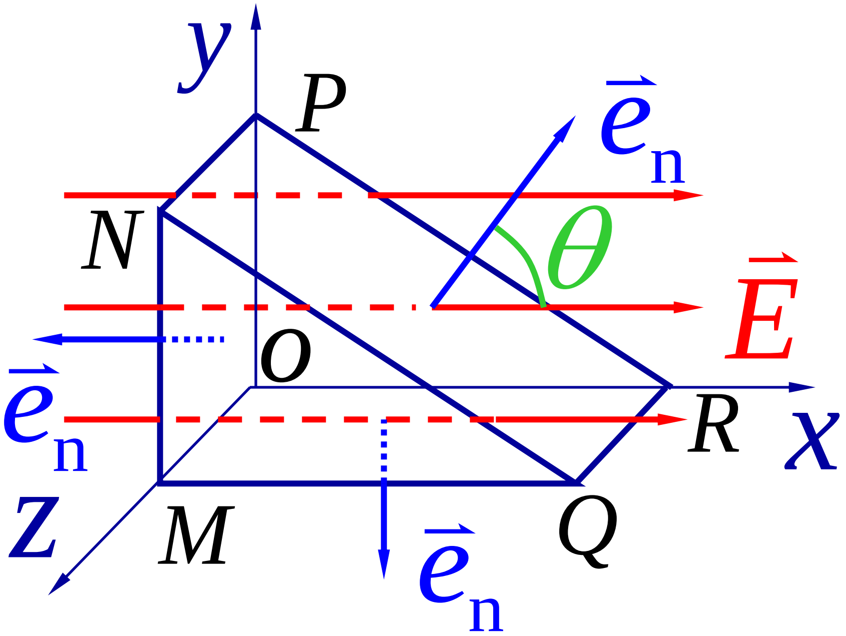
电通量为负，电通量向内“流”

例：如图所示，有一个三棱柱体放置在电场强度为$\vec{E}=200\vec{i}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{C}^{-1}$的匀强电场中．求通过此三棱柱体的电场强度通量．



解: $\Phi_{\text{e}}=\Phi_{\text{e前}}+\Phi_{\text{e后}}$

$+\Phi_{\text{e左}}+\Phi_{\text{e右}}+\Phi_{\text{e下}}$

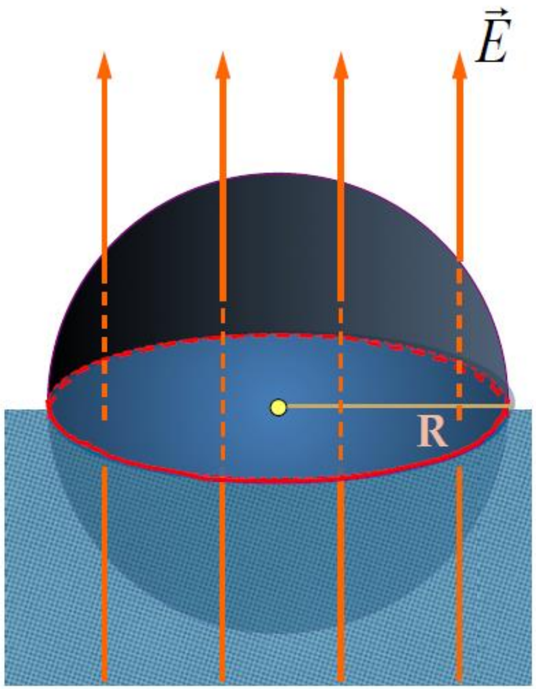


$$\begin{cases}\Phi_{\text{e前}}=\Phi_{\text{e后}}=\Phi_{\text{e下}} \\ \quad=\iint_{S}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0 \\ \Phi_{\text{e左}}=\iint_{S左}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=ES_{左}\cos\pi=-ES_{左} \\ \Phi_{\text{e右}}=\iint_{S右}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=ES_{右}\cos\theta=ES_{左}\end{cases}$$

$$\Phi_{\text{e}}=\Phi_{\text{e前}}+\Phi_{\text{e后}}+\Phi_{\text{e左}}+\Phi_{\text{e右}}+\Phi_{\text{e下}}=0$$

例 均匀电场中有一个半径为 R 的半球面，求通过此半球面的电通量。

解 方法1 $\Phi_e = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$



通过 dS 面元的电通量

$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= E\mathrm{d}S\cos\left(90^\circ - \theta\right)$$

$$\mathrm{d}S = 2\pi r \cdot \mathrm{d}l$$

$$r = R\cos\theta$$

$$\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$$

$$\Phi_e = \int \mathrm{d}\Phi_e = \int_0^{\pi/2} E\pi R^2 \sin 2\theta \mathrm{d}\theta = \pi R^2 E$$

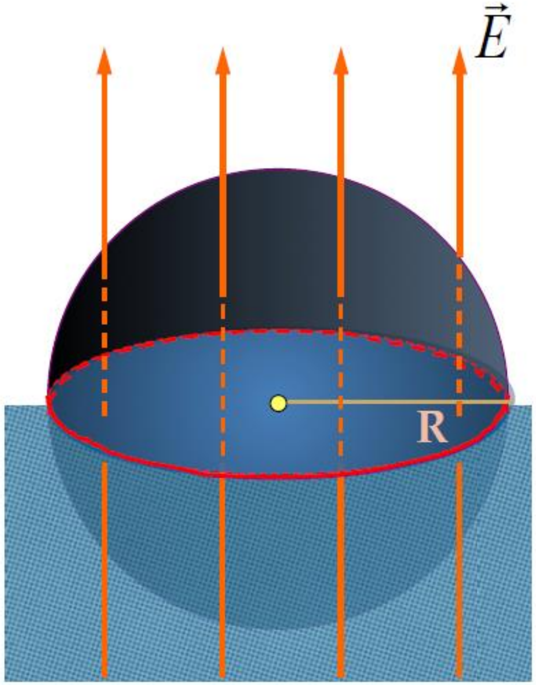
例　均匀电场中有一个半径为 R 的半球面，求通过此半球面的电通量。

解 方法2

半球面和底面构成一闭合面，电通量

$$\Phi_e = \int_{\text{半球面}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{\text{底面}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\int_{\text{半球面}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = -\int_{\text{底面}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \pi R^2 E$$



3. 高斯定理

高斯

1777-1855

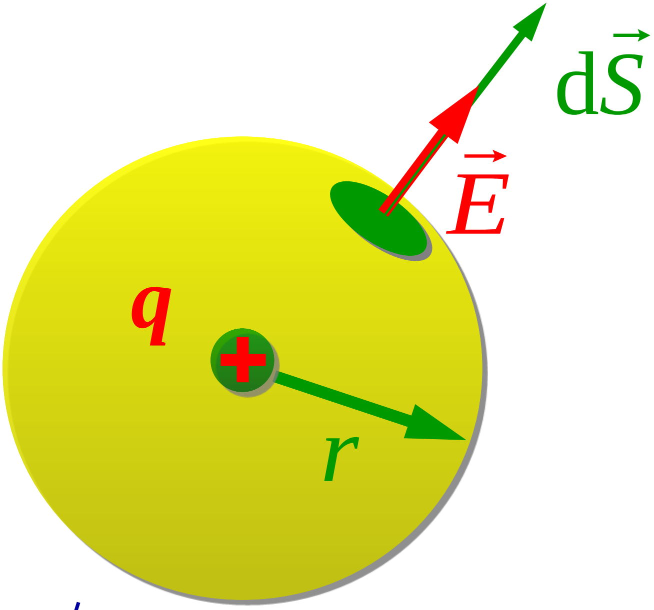
(1) 当点电荷在球心时

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \oiint_S \mathrm{d}S$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0}$$



穿过球面的电场线条数为 q/ε_0

（1） 当点电荷在球心时

$$\Phi_e = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

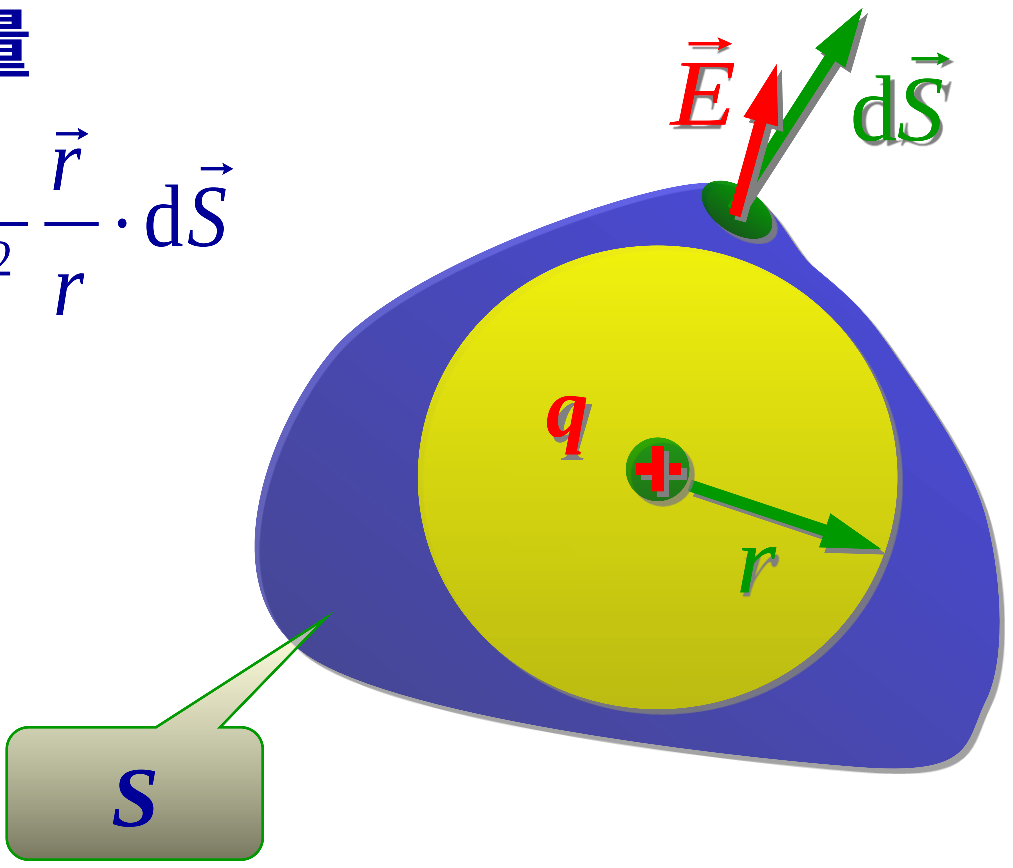
（2） 任一闭合曲面S包围该电荷

在闭合曲面上任取一面积元dS，通过面元的电场强度通量

$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

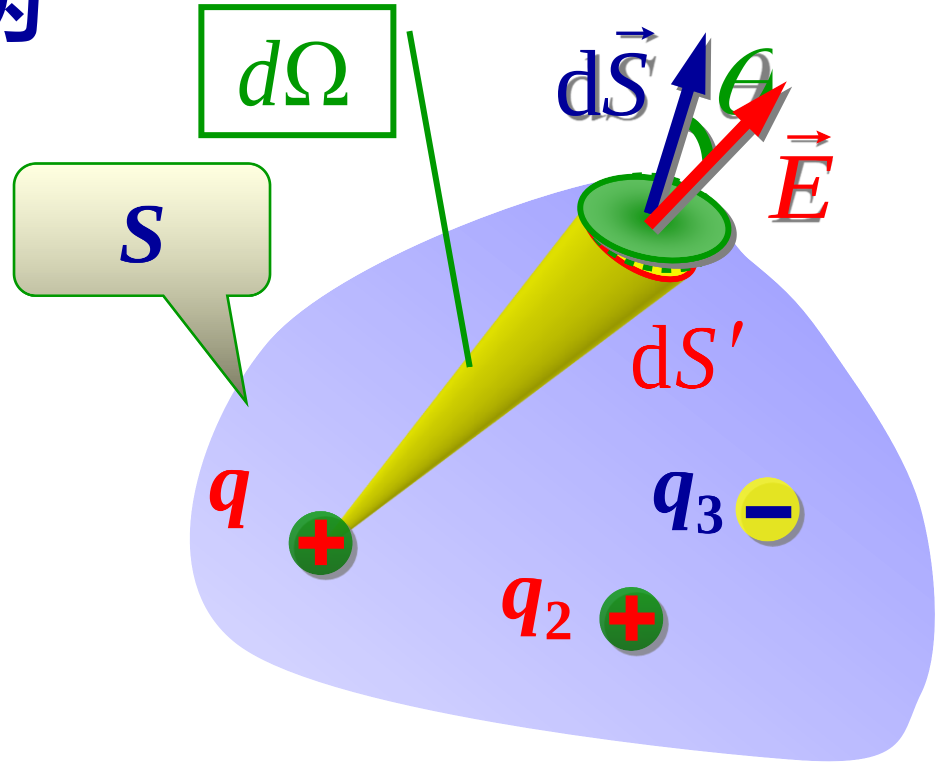
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta\,\mathrm{d}S$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}S'}{r^2}$$



$\mathrm{d}S' = \mathrm{d}S\cos\theta$ **是d*S*在垂直于电场方向的投影。**

d*S*对电荷所在点的立体角为



$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S'}{r^2}$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}\Phi_e = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega$$

$$\Phi_e = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\oint_S \mathrm{d}\Omega$$

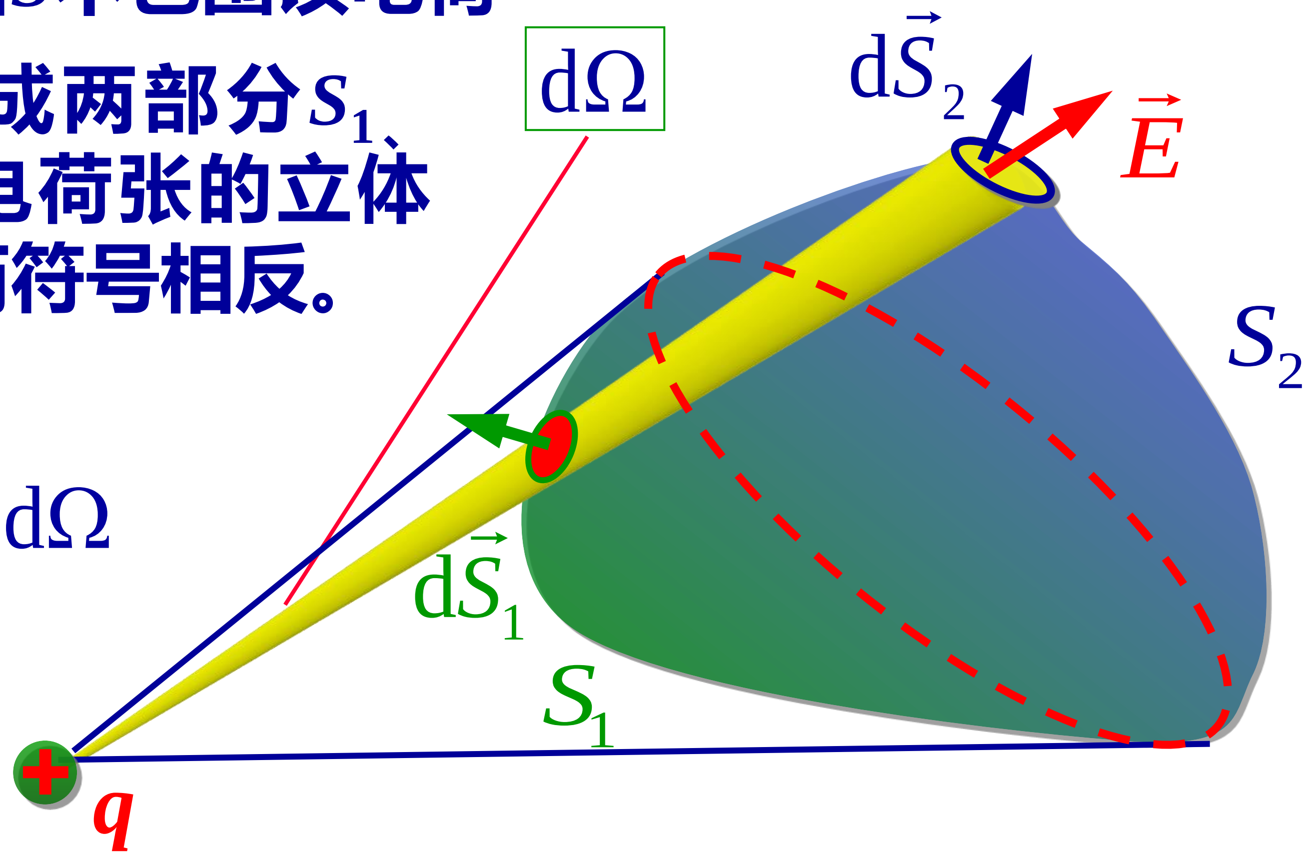
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times 4\pi \quad = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

（3） 闭合曲面S不包围该电荷

闭合曲面可分成两部分S_1、S_2，它们对点电荷张的立体角绝对值相等而符号相反。

$$\Phi_e = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oiint_S \mathrm{d}\Omega$$

$$= 0$$

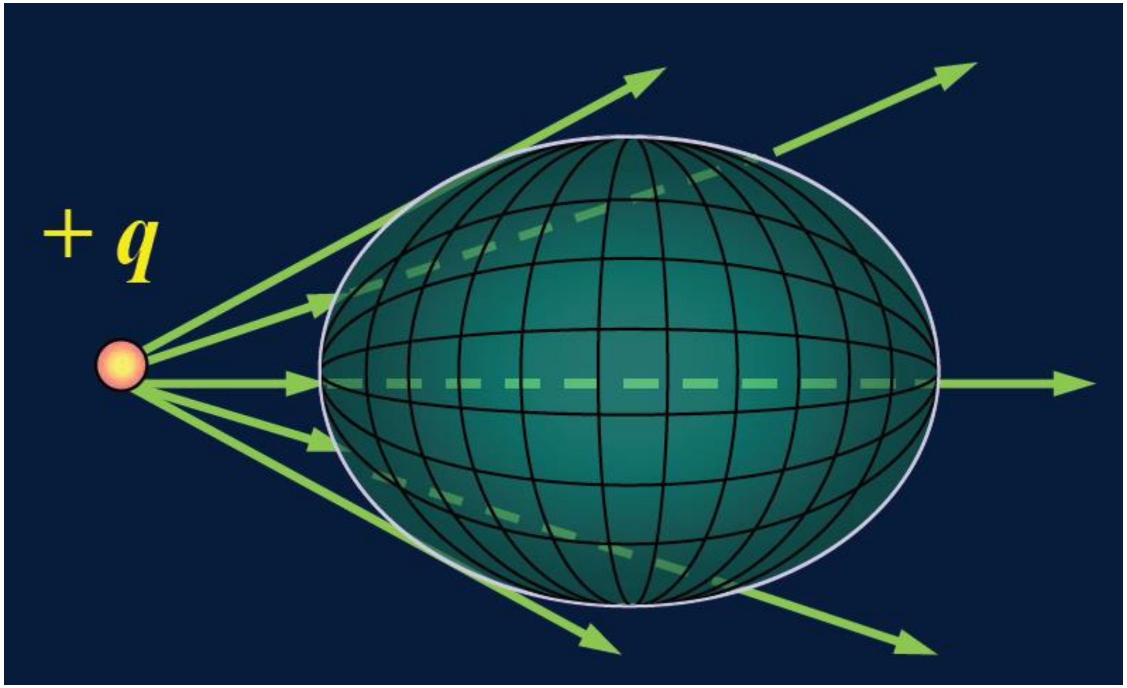


I. 当点电荷在球心或任一闭合曲面S包围该电荷时

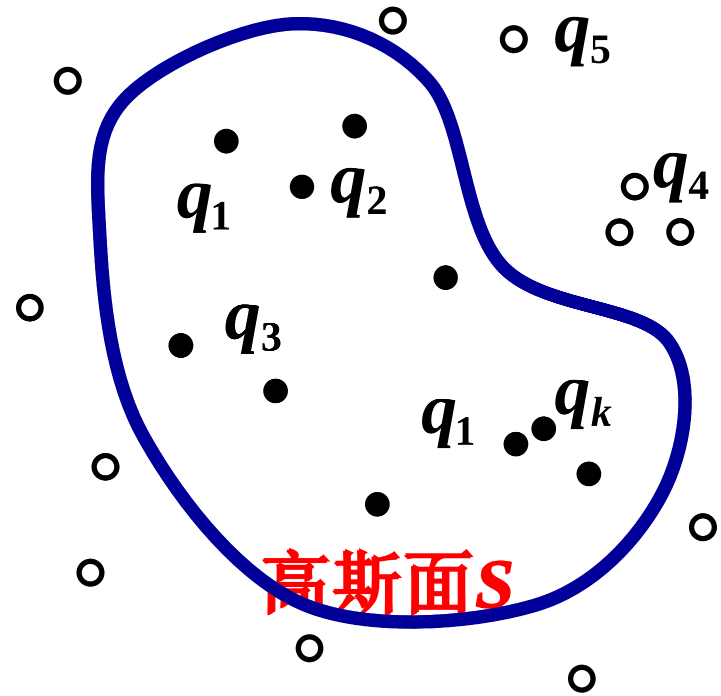
$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

II. 闭合曲面S不包围该电荷

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$



（4） 闭合曲面S内包围多个电荷q_1-q_k，同时面外也有多个电荷q_{k+1}-q_n



由叠加原理，曲面上的场强：

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 + \vec{E}_5$$

$$\Phi_E = \oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \oint\!\!\oint_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_5) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \oint\!\!\oint_S \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \oint\!\!\oint_S \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \ldots + \oint\!\!\oint_S \vec{E}_5 \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + \frac{q_3}{\varepsilon_0} + 0 + 0 = \sum_{S内} q_i / \varepsilon_0$$

高斯定理: 在真空中，静电场通过任意闭合曲面的电通量，等于面内所包围的电荷电量代数和除以真空介电常数。

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$ **点电荷系**

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \cdot \mathrm{d}V$$ **连续分布带电体**

注意：

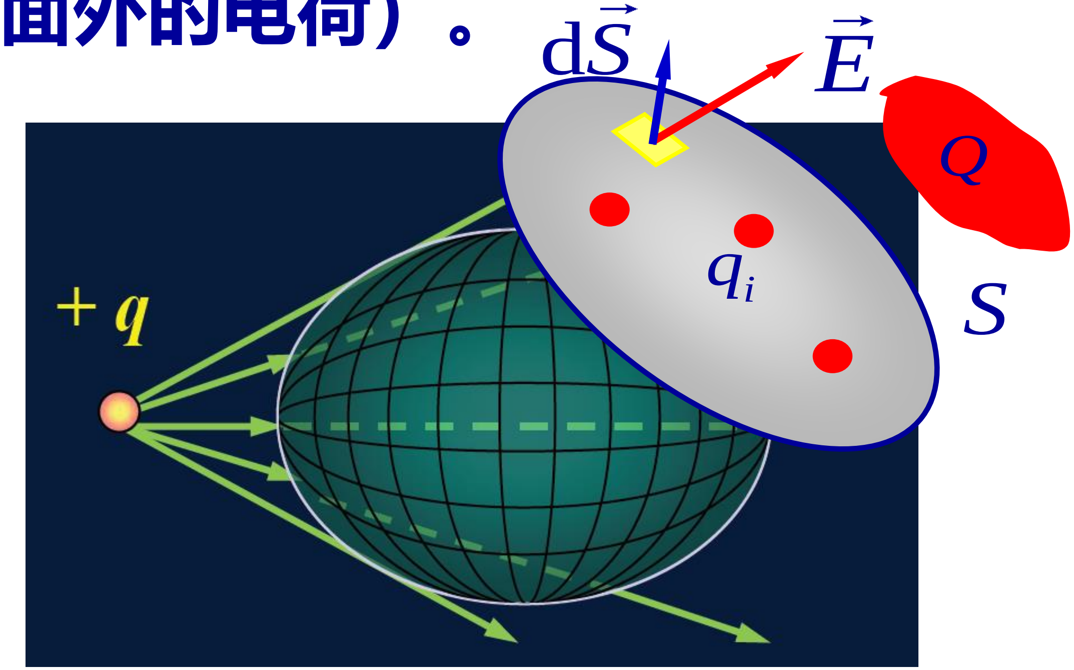
$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

（1） 电通量Φe只与闭合面内的电量有关。

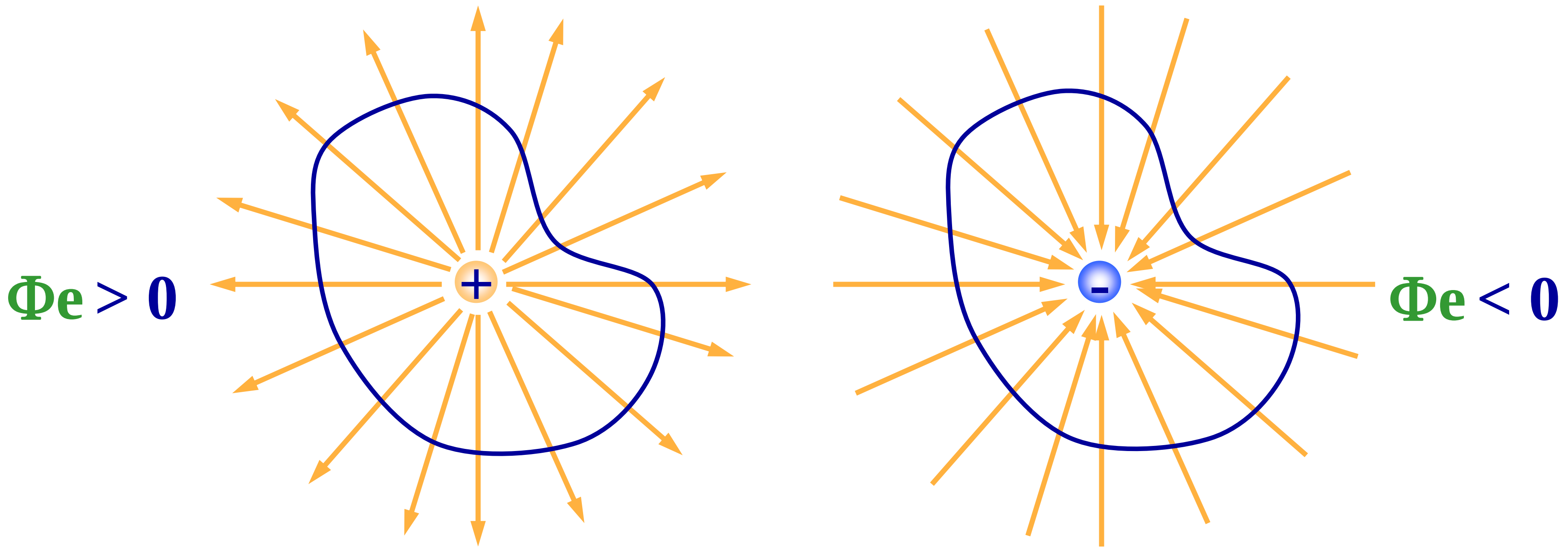
（2） E 为合场强，是由全部电荷所激发的电场（包括闭合面内的电荷和面外的电荷）。

$$\Phi_e = 0$$

但曲面上 $\vec{E} \neq 0$



(3)　当闭合面内电荷q为正,电场线从q发出并穿出闭合面。正电荷是静电场的“源头”。



若闭合曲面内q为负，电场线穿入闭合面终止于负电荷。负电荷是静电场的“汇”。

静电场是有源场

高斯定理的应用：求解电场强度

$$\Phi_e \equiv \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{内} q_i$$

解题步骤：

1. 进行对称性分析，（常见的对称性有球、轴、面对称性等）

目的：取具有相同电场强度的高斯面，求积分时才可以将 E 以标量形式提取出来

2. 根据场强分布的特点，作适当的高斯面，要求：

①待求场强的场点应在此高斯面上，

②穿过该高斯面的电通量容易计算。

3. 计算电通量和高斯面内所包围的电荷的代数和，最后由高斯定理求出场强。

4. 高斯定理的应用

解题所需条件： 电荷分布具有较高的空间对称性

（1） 均匀带电球面的电场

（2） 均匀带电圆柱面的电场

（3） 均匀带电无限大平面的电场

（4） 均匀带电球体的电场

（5） 均匀带电球体空腔部分的电场

例1. 均匀带电球面的电场，球半径为R，带电为q。求空间电场强度分布。

解：电场分布也应有球对称性，方向沿径向。

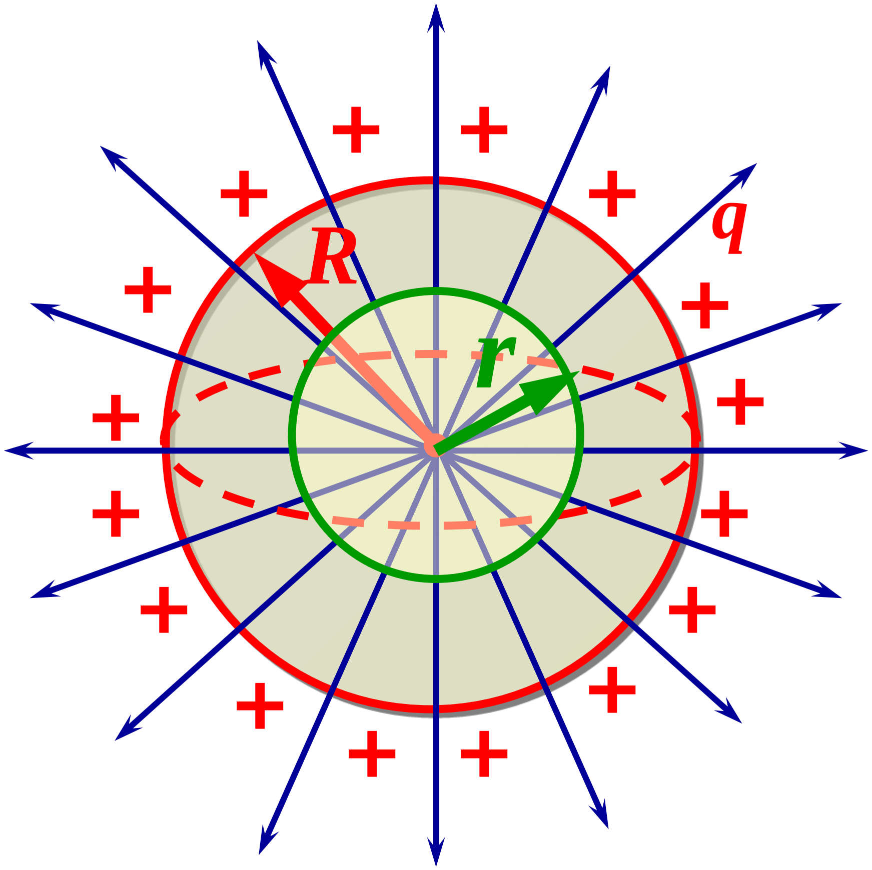
作同心且半径为r的高斯面。

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\Sigma q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

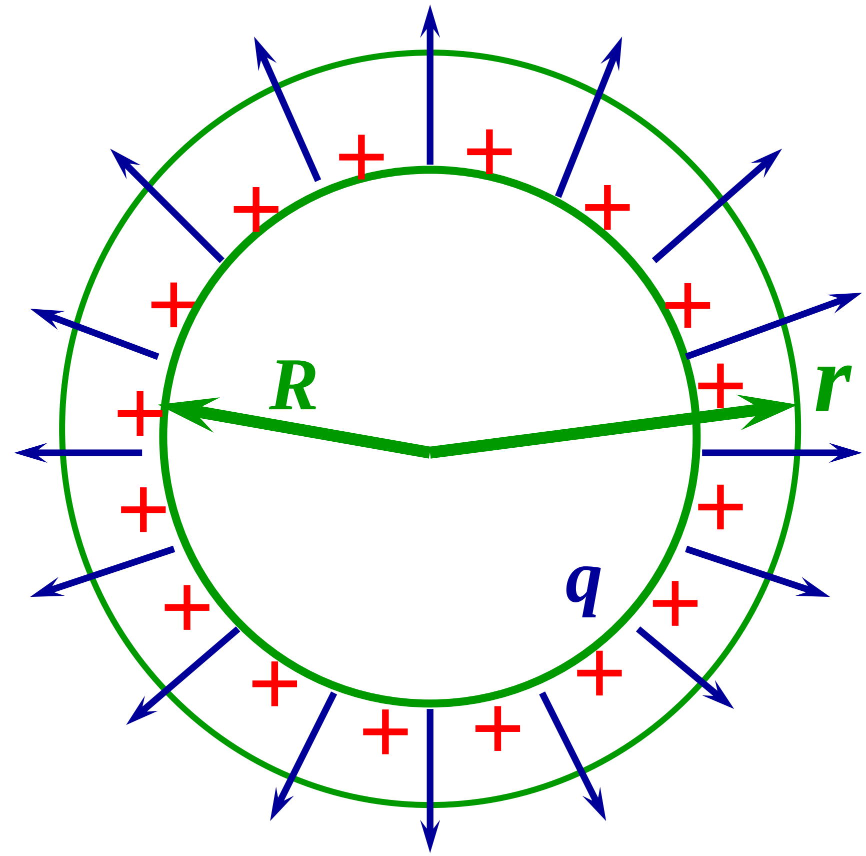
$r < R$时，高斯面内无电荷，

$$E = 0$$

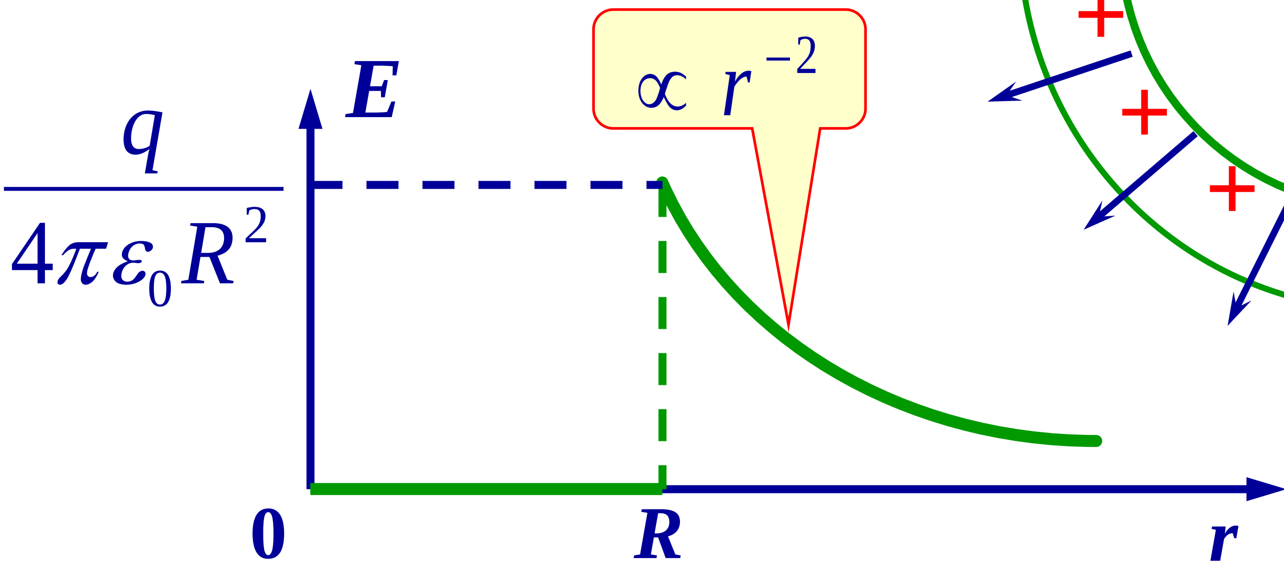


$r > R$时，高斯面包围电荷q，

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



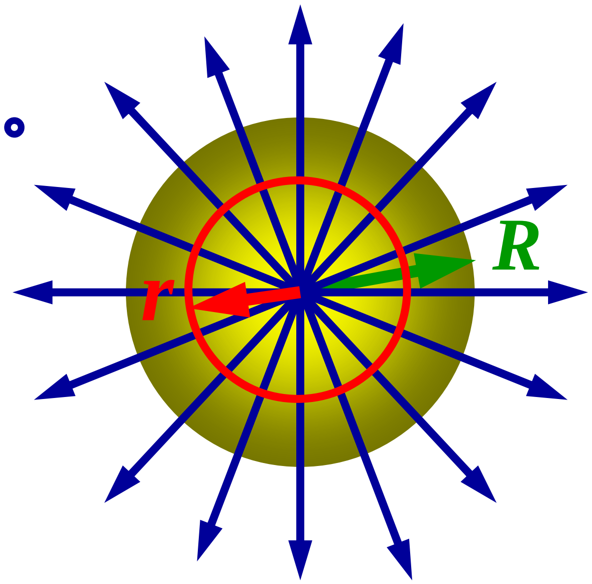
均匀带电球面的电场分布



E—r 关系曲线

例：均匀带电球体的电场。球半径为R，体电荷密度为ρ。求周围空间电场强度E的分布。

解：电场分布有球对称性，方向沿径向。



作同心且半径为r的高斯面

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

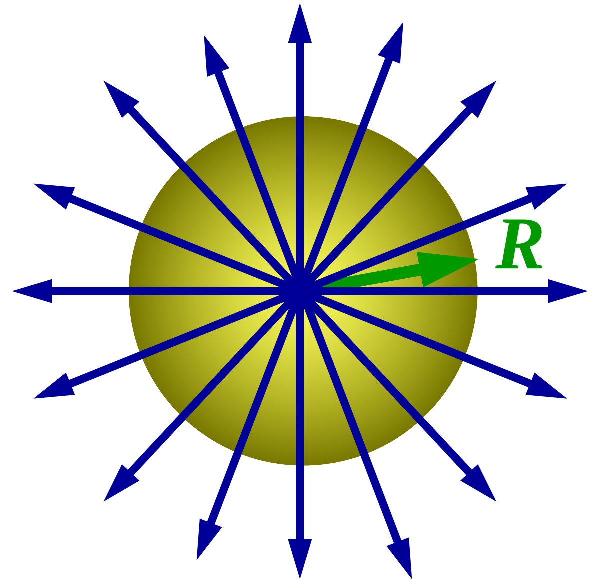
$$E = \frac{\sum q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

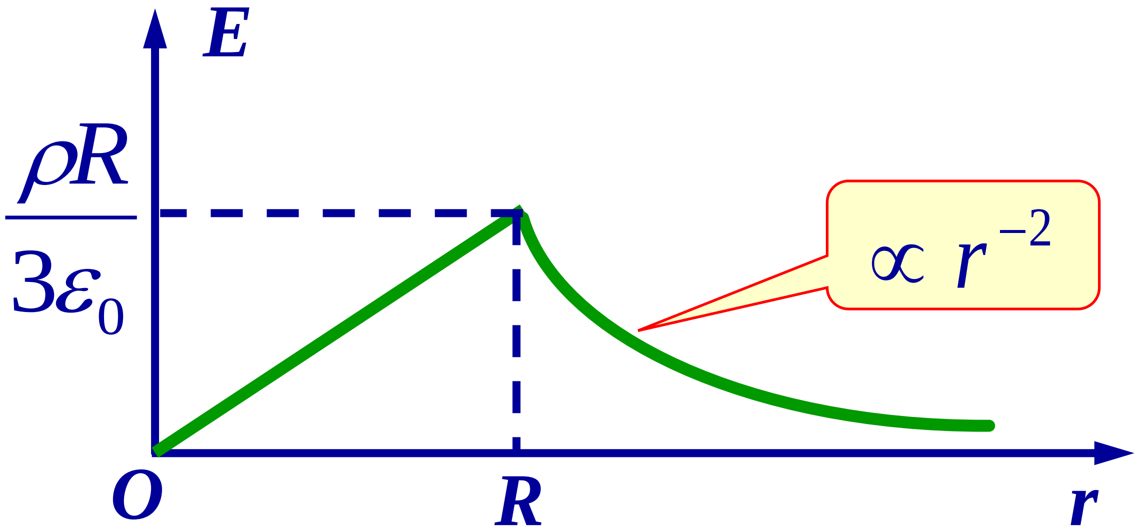
a. $r<R$时， $\sum q = \int \rho \mathrm{d}V = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$

b. $r>R$时， $\sum q = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$ $\quad E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$

均匀带电球体的电场分布

$$E=\begin{cases}\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}r & r<R\\[2ex] \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & r>R\end{cases}$$

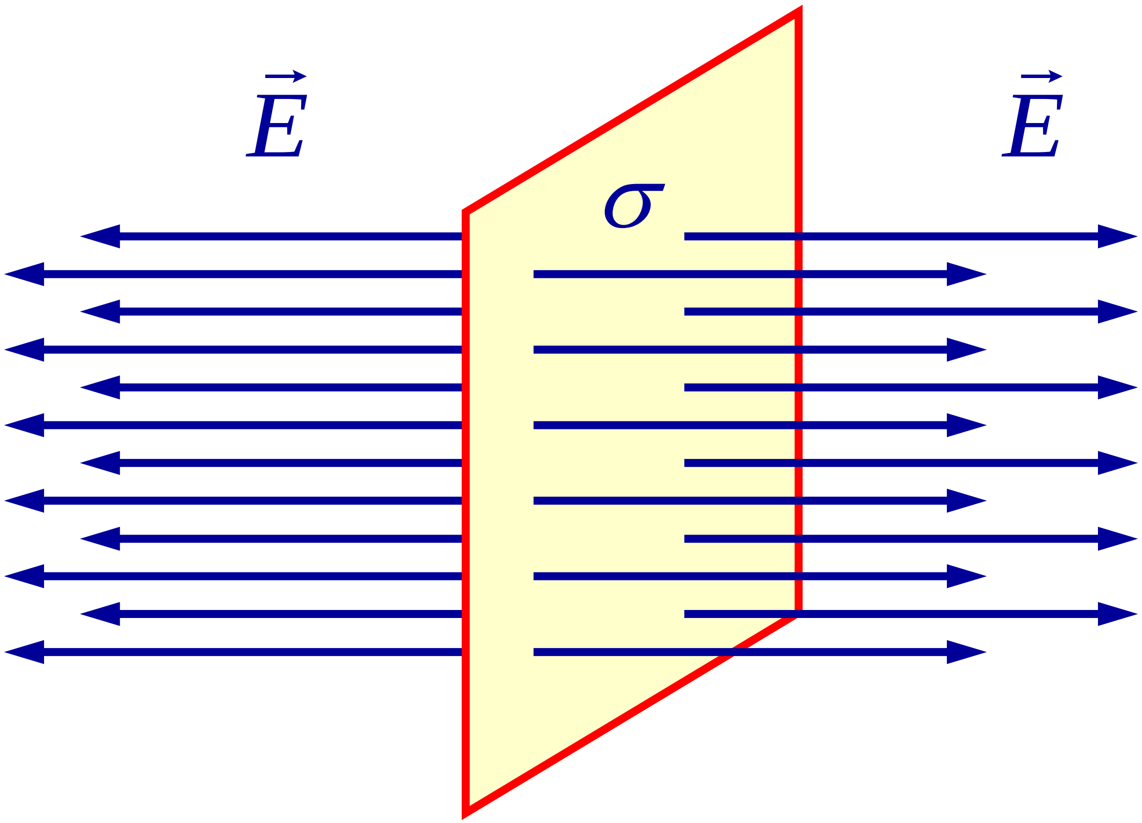




E—*r* 关系曲线

例：　均匀带电无限大平面的电场。

解：电场分布也应有面对称性，方向沿法向。



作轴线与平面垂直的圆柱形高斯面，底面积为S，两底面到带电平面距离相同。

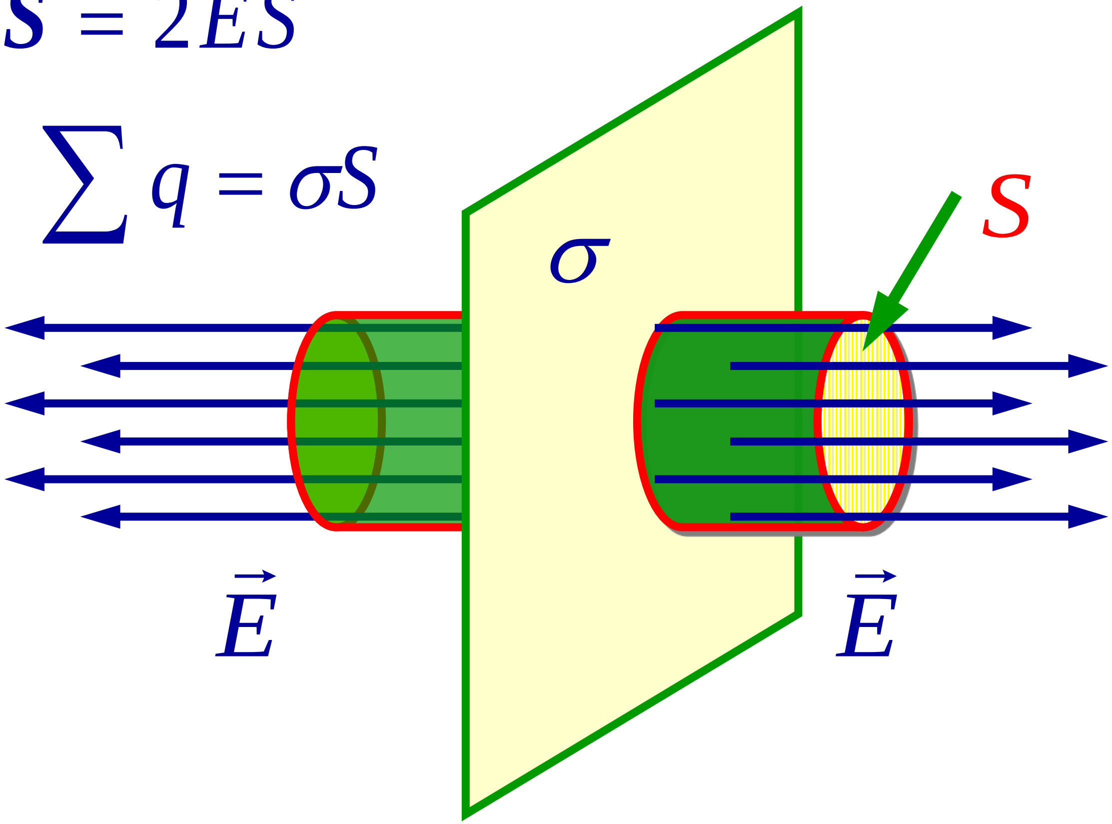
$$\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_{两底}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=2ES$$

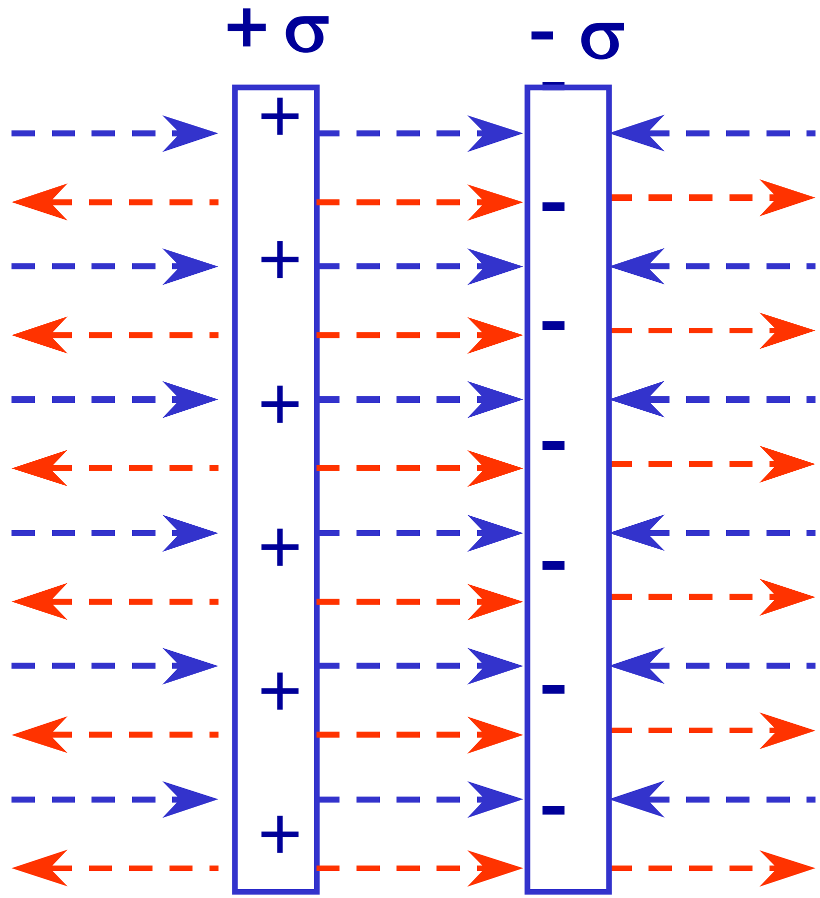
圆柱形高斯面内电荷 $\sum q=\sigma S$

由高斯定理得

$$2ES=\sigma S/\varepsilon_0$$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$





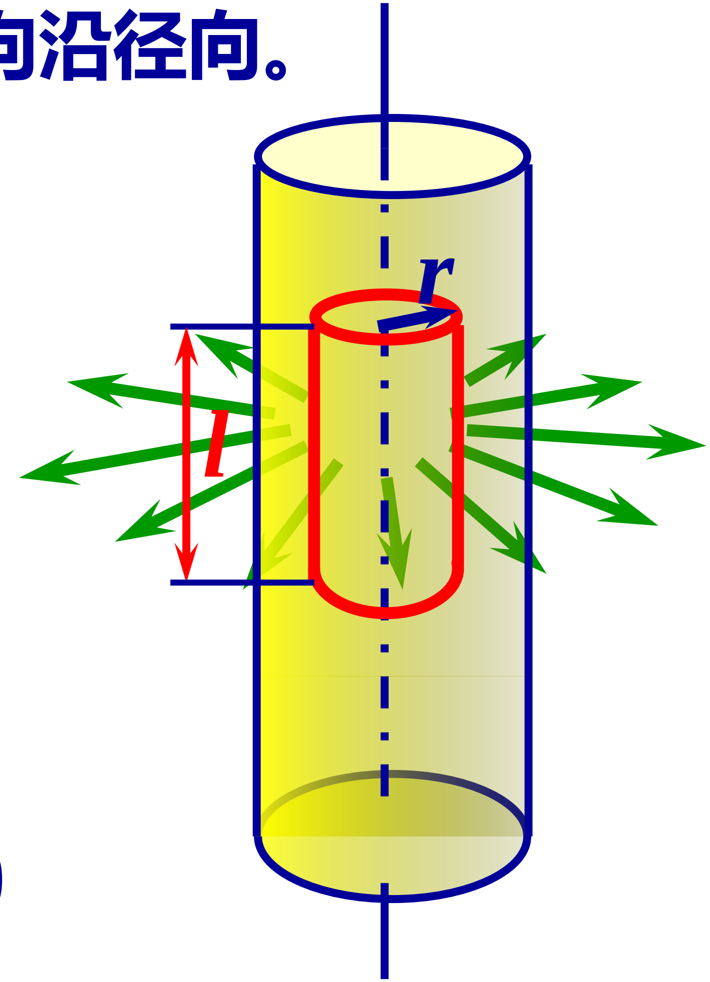
【思考】带等量异号电荷的两个无限大平板之间的电场为 $\underline{\sigma/\varepsilon_0}$，板外电场为 $\underline{0}$。

例：　无限长均匀带电圆柱面的电场。圆柱半径为 R，沿轴线方向单位长度带电量为λ。

解：电场分布也应有柱对称性，方向沿径向。

作与带电圆柱同轴的圆柱形高斯面，

高为l，半径为r



$$\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{侧面} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\cdot 2\pi r l$$

由高斯定理知

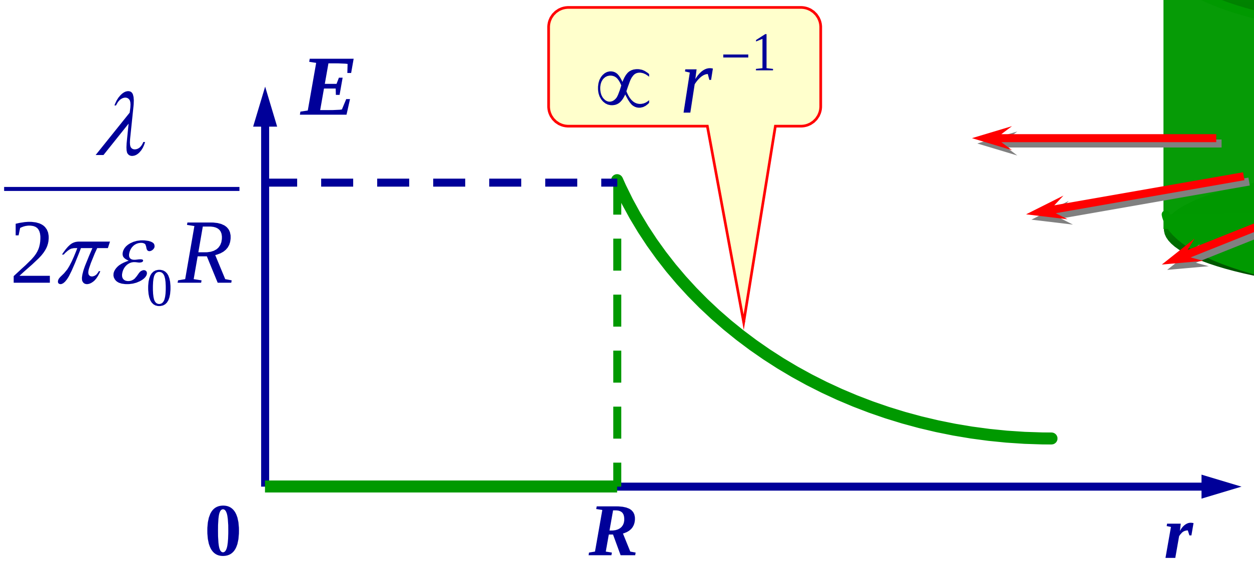
$$E = \frac{\sum q}{2\pi\varepsilon_0 l r}$$

（1）当$r < R$ 时， $\sum q = 0 \quad E = 0$

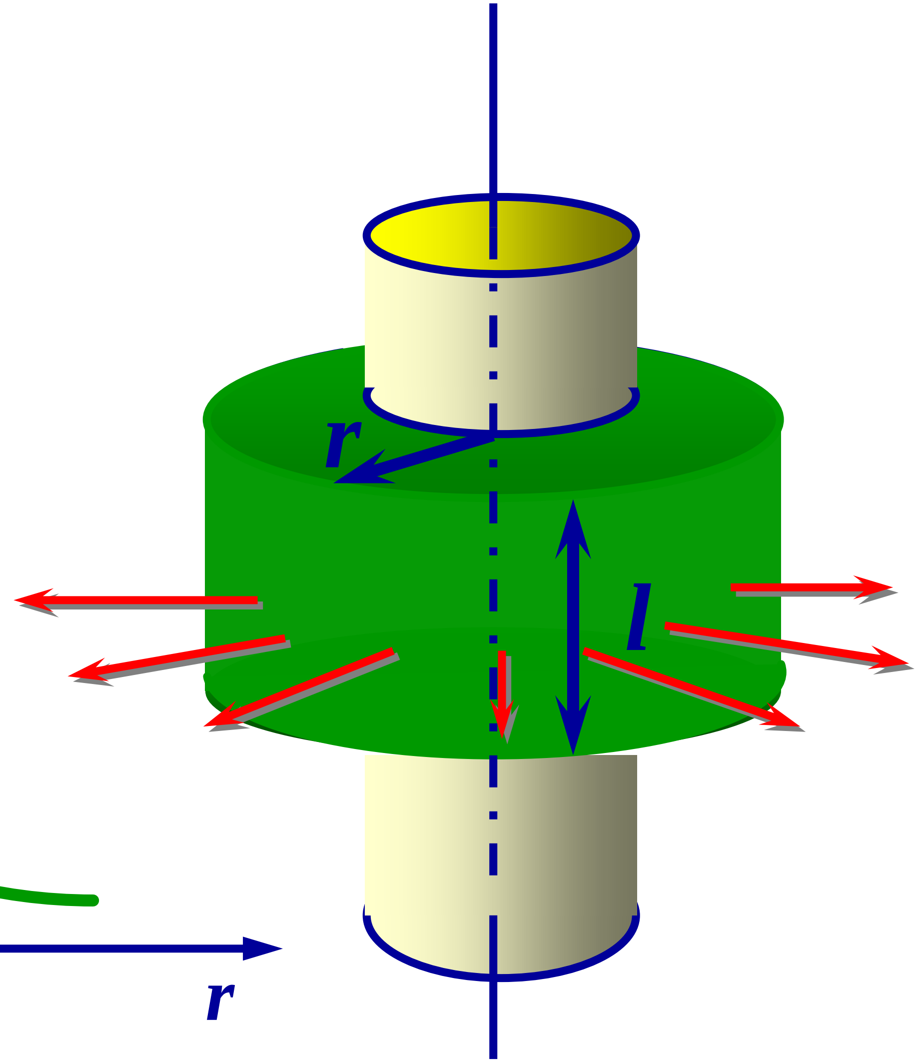
(2) 当 $r > R$ 时,

$$\sum q = \lambda l \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

均匀带电圆柱面的电场分布



E—r 关系曲线



例：均匀带电球体，球半径为R，在球内挖去一个半径为r（$r < R$）的球体。

试证：空腔部分的电场为匀强电场，并求出该电场。

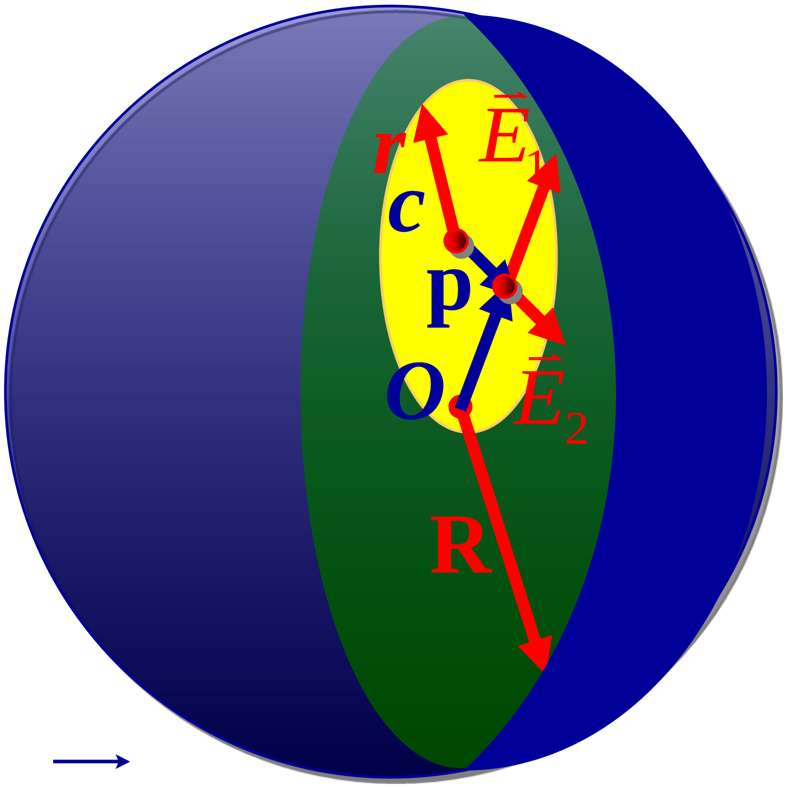
证明：用补缺法证明。

在空腔内任取一点p，

设该点场强为 $\vec{E}$**。**

设想用一半径为r且体电荷密度与大球相同的小球将空腔补上后，p点场强变为 $\vec{E}_1$

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{\mathrm{op}}$$



小球单独存在时，p点的场强为

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{\mathrm{cp}}$$

$$\because \vec{E}_1 = \vec{E}_2 + \vec{E}$$

$$\therefore \vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\overrightarrow{\mathrm{op}} - \overrightarrow{\mathrm{cp}}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{\mathrm{oc}}$$

因为 $\overrightarrow{\mathrm{oc}}$ 为常矢量，所以空腔内为匀强电场。