

4.3 关系的性质

- 自反性
- 反自反性
- 对称性
- 反对称性
- 传递性

自反性与反自反性

定义 设 R 为 A 上的关系,

- (1) 若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$, 则称 R 在 A 上是**自反的**.
- (2) 若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$, 则称 R 在 A 上是**反自反的**.

实例:

自反关系: A 上的全域关系 E_A , 恒等关系 I_A

小于等于关系 L_A , 整除关系 D_A

反自反关系: 实数集上的小于关系

幂集上的真包含关系

实例

例1 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3 是 A 上的关系, 其中

$$R_1 = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle \}$$

$$R_2 = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 1,2 \rangle \}$$

$$R_3 = \{ \langle 1,3 \rangle \}$$

R_2 自反,

R_3 反自反,

R_1 既不是自反也不是反自反的

对称性与反对称性

定义 设 R 为 A 上的关系,

(1) 若 $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$, 则称 R 为 A 上**对称**的关系.

(2) 若 $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x = y)$, 则称 R 为 A 上的**反对称**关系.

实例:

对称关系: A 上的全域关系 E_A , 恒等关系 I_A 和空关系 \emptyset

反对称关系: 恒等关系 I_A , 空关系是 A 上的反对称关系.

实例

例2 设 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3 和 R_4 都是 A 上的关系,
其中

$$R_1=\{<1,1>, <2,2>\}, \quad R_2=\{<1,1>, <1,2>, <2,1>\}$$

$$R_3=\{<1,2>, <1,3>\}, \quad R_4=\{<1,2>, <2,1>, <1,3>\}$$

R_1 对称、反对称.

R_2 对称, 不反对称.

R_3 反对称, 不对称.

R_4 不对称、也不反对称.

传递性

定义 设 R 为 A 上的关系, 若

$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$,
则称 R 是 A 上的**传递**关系.

实例:

A 上的全域关系 E_A , 恒等关系 I_A 和空关系 \emptyset

小于等于关系, 小于关系, 整除关系, 包含关系,
真包含关系

实例

例3 设 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3 是 A 上的关系, 其中

$$R_1=\{<1,1>, <2,2>\}$$

$$R_2=\{<1,2>, <2,3>\}$$

$$R_3=\{<1,3>\}$$

R_1 和 R_3 是 A 上的传递关系

R_2 不是 A 上的传递关系

关系性质的充要条件

设 R 为 A 上的关系, 则

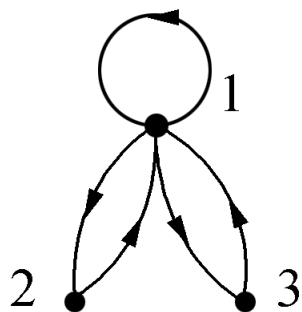
- (1) R 在 A 上**自反**当且仅当 $I_A \subseteq R$
- (2) R 在 A 上**反自反**当且仅当 $R \cap I_A = \emptyset$
- (3) R 在 A 上**对称**当且仅当 $R = R^{-1}$
- (4) R 在 A 上**反对称**当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
- (5) R 在 A 上**传递**当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

关系性质判别

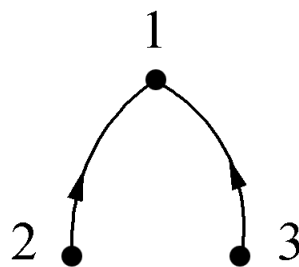
	自反	反自反	对称	反对称	传递
表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \emptyset$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R^\circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij}=1$, 且 $i \neq j$, 则 $r_{ji}=0$	对 M^2 中1所在位置, M 中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边, 是一对方向相反的边 (无单边)	如果两点之间有边, 是一条有向边 (无双向边)	如果顶点 x_i 连通到 x_k , 则从 x_i 到 x_k 有边

实例

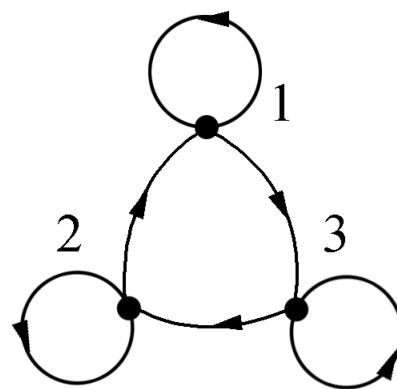
例8 判断下图中关系的性质, 并说明理由.



(a)



(b)



(c)

(a)不自反也不反自反; 对称, 不反对称; 不传递.

(b)反自反, 不是自反的; 反对称, 不是对称的;
是传递的.

(c)自反, 不反自反; 反对称, 不是对称; 不传递.

自反性证明

证明模式 证明 R 在 A 上自反

任取 x ,

$x \in A \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$

前提

推理过程

结论

例4 证明若 $I_A \subseteq R$, 则 R 在 A 上自反.

证 任取 x ,

$x \in A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$

因此 R 在 A 上是自反的.

对称性证明

证明模式 证明 R 在 A 上对称

任取 $\langle x, y \rangle$

$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$

前提

推理过程

结论

例5 证明若 $R=R^{-1}$, 则 R 在 A 上对称.

证 任取 $\langle x, y \rangle$

$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R^{-1} \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$

因此 R 在 A 上是对称的.

反对称性证明

证明模式 证明 R 在 A 上反对称

任取 $\langle x, y \rangle$

$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \Rightarrow$	$\dots\dots\dots \Rightarrow$	$x=y$
前提	推理过程	结论

例6 证明若 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$, 则 R 在 A 上反对称.

证 任取 $\langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R^{-1} \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \cap R^{-1} \Rightarrow \langle x, y \rangle \in I_A \Rightarrow x=y \end{aligned}$$

因此 R 在 A 上是反对称的.

传递性证明

证明模式 证明 R 在 A 上传递

任取 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle$

$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R$	$\Rightarrow \dots \Rightarrow$	$\langle x, z \rangle \in R$
前提	推理过程	结论

例7 证明若 $R \circ R \subseteq R$, 则 R 在 A 上传递.

证 任取 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle$

$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \circ R \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$

因此 R 在 A 上是传递的.

运算与性质的关系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

4.4 关系的闭包

- 闭包定义
- 闭包的构造方法
 - 集合表示
 - 矩阵表示
 - 图表示
- 闭包的性质

闭包定义

定义 设 R 是非空集合 A 上的关系, R 的**自反（对称或传递）闭包**是 A 上的关系 R' ,使得 R' 满足以下条件:

- (1) R' 是自反的（对称的或传递的）
- (2) $R \subseteq R'$
- (3) 对 A 上任何包含 R 的自反（对称或传递）关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.

一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$, 对称闭包记作 $s(R)$, 传递闭包记作 $t(R)$.

闭包的构造方法

定理1 设 R 为 A 上的关系, 则有

$$(1) r(R) = R \cup R^0$$

$$(2) s(R) = R \cup R^{-1}$$

$$(3) t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

说明:

- 对于有穷集合 A ($|A|=n$) 上的关系, (3)中的并最多不超过 R^n .
- 若 R 是自反的, 则 $r(R)=R$; 若 R 是对称的, 则 $s(R)=R$; 若 R 是传递的, 则 $t(R)=R$.

闭包的构造方法（续）

设关系 R , $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系矩阵分别为 M , M_r , M_s 和 M_t , 则

$$M_r = M + E$$

$$M_s = M + M'$$

$$M_t = M + M^2 + M^3 + \dots$$

E 是和 M 同阶的单位矩阵, M' 是 M 的转置矩阵.
注意在上述等式中矩阵的元素相加时使用逻辑加.

闭包的构造方法（续）

设关系 R , $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图分别记为 G , G_r , G_s , G_t , 则 G_r , G_s , G_t 的顶点集与 G 的顶点集相等. 除了 G 的边以外, 以下述方法添加新边:

考察 G 的每个顶点, 如果没有环就加上一个环, 最终得到 G_r . 考察 G 的每条边, 如果有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i \neq j$, 则在 G 中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边, 最终得到 G_s . 考察 G 的每个顶点 x_i , 找从 x_i 出发的每一条路径, 如果从 x_i 到路径中任何结点 x_j 没有边, 就加上这条边. 当检查完所有的顶点后就得到图 G_t .

实例

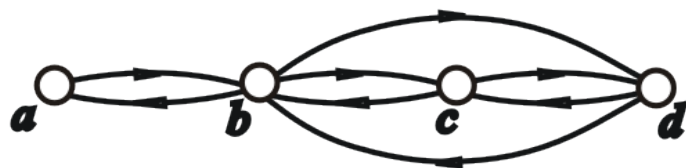
例1 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>, <b,a>, <b,c>, <c,d>, <d,b>\}$, R 和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图如下图所示.



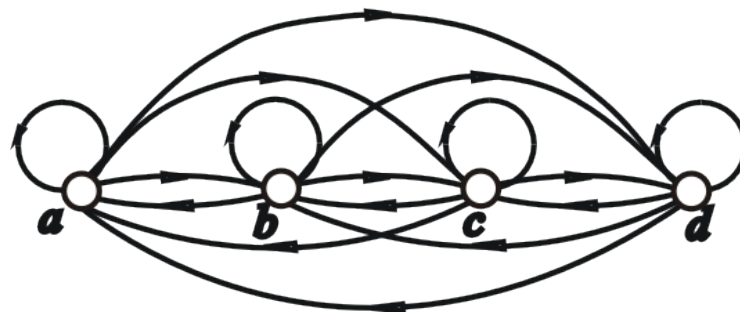
R



$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$