离散数学

理学院　　翟文广

引子

- 离散到连续
- 连续到离散

主要内容

- 数理逻辑
- 集合论
- 图论
- 代数系统简介

教材与教学参考书

- 教材：
  - 耿素云、屈婉玲、张立昂，离散数学（第五版），清华大学出版社, 2013.
- 教学参考书：
  - 屈婉玲、耿素云、张立昂，离散数学题解（第五版），清华大学出版社，2013.

数理逻辑部分

- 逻辑：是干什么的？
- 历史上的伟大侦探：福尔摩斯
- 数理逻辑创立人：莱布尼兹

- 第1章 命题逻辑
- 第2章 一阶逻辑

第1章 命题逻辑

1.1 命题符号化及联结词

1.2 命题公式及分类

1.3 等值演算

1.4 范式

1.5 联结词全功能集

1.6 组合电路

1.7 推理理论

1.1 命题符号化及联结词

- 命题与真值
- 原子命题
- 复合命题
- 命题常项
- 命题变项
- 联结词

命题与真值

命题: 判断结果惟一的陈述句

命题的真值: 判断的结果

真值的取值: 真与假

真命题: 真值为真的命题

假命题: 真值为假的命题

注意：感叹句、祈使句、疑问句都不是命题

陈述句中的悖论以及判断结果不惟一确定的也不是命题

例 下列句子中那些是命题？

(1) $\sqrt{2}$是无理数. 真命题

(2) $2+5=8$. 假命题

(3) $x+5>3$. 真值不确定

(4) 你有铅笔吗？ 疑问句

(5) 这只兔子跑得真快呀！ 感叹句

(6) 请不要讲话！ 祈使句

(7) 我正在说谎话. 悖论

(3)~(7)都不是命题

命题的分类

简单命题(原子命题)：

简单陈述句构成的命题

复合命题：

由简单命题按一定规则复合而成的命题

简单命题符号化

用小写英文字母 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i\ (i \geqslant 1)$ 表示简单命题

用"1"表示真，用"0"表示假。

例如，令

p: $\sqrt{2}$ 是有理数，则 p 的真值为 0。

q: $2+5=7$，则 q 的真值为 1。

联结词与复合命题

1.否定式与否定联结词“$\neg$”

定义 设p为命题，复合命题 “非p”(或 “p的否定”)称为p的否定式，记作$\neg p$. 符号$\neg$称作否定联结词，并规定$\neg p$ 为真当且仅当p为假.

真值表：？

联结词与复合命题

2.合取式与合取联结词“∧”

定义　设p, q为二命题, 复合命题“p并且q”(或“p与q”)称

为p与q的合取式，记作$p\wedge q$.　∧称作合取联结词，并规

定 $p\wedge q$为真当且仅当p与q同时为真。

真值表：？

注意：a. 描述合取式的灵活性与多样性(不但，而且；一边，一边)；

b. 分清简单命题与复合命题；

c.　上述两个命题之间可以毫无关系。

例 将下列命题符号化.

(1) 王晓既用功又聪明.

(2) 王晓不仅聪明，而且用功.

(3) 王晓虽然聪明，但不用功.

(4) 张辉与王丽都是三好生.

(5) 张辉与王丽是同学.

解 令 p：王晓用功，q：王晓聪明，则

(1) $p \wedge q$

(2) $p \wedge q$

(3) $\neg p \wedge q$.

例 (续)

令 r : 张辉是三好学生， s :王丽是三好学生

(4) $r \wedge s$.

(5) 令 t : 张辉与王丽是同学， t 是简单命题 .

说明:

(1)~(4)说明描述合取式的灵活性与多样性.

(5) 中“与”联结的是两个名词，整个句子是一个简单命题.

联结词与复合命题(续)

3.析取式与析取联结词“$\vee$”

定义 设 p, q为二命题，复合命题“p或q”称作p与q 的析取式，记作$p\vee q$. $\vee$称作析取联结词，并规定$p\vee q$为假当且仅当p与q同时为假.（真值表）

例 将下列命题符号化

(1) 2或4是素数.

(2) 2或3是素数.

(3) 4或6是素数.

(4) 小元元只能拿一个苹果或一个梨.

(5) 王晓红生于1975年或1976年.

解 令 p:2是素数, q:3是素数, r:4是素数, s:6是素数,

则 (1), (2), (3) 均为相容或.

分别符号化为: $p \vee r$, $p \vee q$, $r \vee s$,

它们的真值分别为 1, 1, 0.

(4), (5) 为排斥或.

令 t:小元元拿一个苹果，u:小元元拿一个梨,

则 (4) 符号化为 $(t \wedge \neg u) \vee (\neg t \wedge u)$.

令v:王晓红生于1975年, w:王晓红生于1976年,

则 (5) 既可符号化为 $(v \wedge \neg w) \vee (\neg v \wedge w)$, 又可符号化为 $v \vee w$.

联结词与复合命题(续)

4.蕴涵式与蕴涵联结词“$\to$”

定义 设 p, q为二命题，复合命题“如果p, 则q”称作p与q的**蕴涵式**，记作$p\to q$，并称p是蕴涵式的**前件**，q为蕴涵式的**后件**. $\to$称作**蕴涵联结词**，并规定，$p\to q$为假当且仅当 p 为真 q 为假.

或称**条件式**

真值表：

联结词与复合命题(续)

$p \to q$ 的逻辑关系：q 为 p 的必要条件， p是 q 的充分条件。

“如果 p，则 q”的不同表述法很多：

1. 若 p，就 q
2. 只要 p，就 q
3. p 仅当 q
4. 只有 q 才 p
5. 除非 q, 才 p 或
6. 除非 q, 否则非 p.

当 p 为假时，$p \to q$ 为真

常出现的错误：不分充分与必要条件

例 设 p:天冷， q:小王穿羽绒服，

将下列命题符号化

(1) 只要天冷，小王就穿羽绒服. $p \to q$

(2) 因为天冷，所以小王穿羽绒服. $p \to q$

(3) 若小王不穿羽绒服，则天不冷. $p \to q$

(4) 只有天冷，小王才穿羽绒服. $q \to p$

(5) 除非天冷，小王才穿羽绒服. $q \to p$

(6) 除非小王穿羽绒服，否则天不冷. $p \to q$

(7) 如果天不冷，则小王不穿羽绒服. $q \to p$

(8) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候. $q \to p$

注意： $p \to q$ 与 $\neg q \to \neg p$ 等值（真值相同）

联结词与复合命题(续)

5. 等价式与等价联结词“$\leftrightarrow$”

定义 设p，q为二命题，复合命题 “p当且仅当q”称作p与q的等价式，记作$p\leftrightarrow q$. $\leftrightarrow$称作等价联结词. 并规定$p\leftrightarrow q$为真当且仅当p与q同时为真或同时为假.

说明:

(1) $p\leftrightarrow q$ 的逻辑关系:p与q互为充分必要条件

(2) $p\leftrightarrow q$为真当且仅当p与q同真或同假

例

例 求下列复合命题的真值

(1) 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 3 + 3 ＝ 6. 1

(2) 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 3 是偶数. 0

(3) 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 太阳从东方升起. 1

(4) 2 + 2 ＝ 4 当且仅当 美国位于非洲. 0

(5) 函数 $f(x)$ 在x_0 可导的充要条件是它在 x_0 连续. 0

联结词与复合命题(续)

以上给出了5个联结词：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$，组成一个联结词集合$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，

联结词的优先顺序为：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$; 如果出现的联结词同级，又无括号时，则按从左到右的顺序运算；若遇有括号时，应该先进行括号中的运算.

注意：本书中使用的 括号全为圆括号.

1.2 命题公式及分类

- 命题变项与合式公式
- 公式的赋值
- 真值表
- 命题的分类

  重言式

  矛盾式

  可满足式
- 真值函数

命题变项与合式公式

命题常项：简单命题

命题变项：真值不确定的陈述句

定义 合式公式 (命题公式, 公式) 递归定义如下：

(1) 单个命题常项或变项 $p,q,r,\ldots,p_i,q_i,r_i,\ldots,0,1$ 是合式公式

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式

(4) 只有有限次地应用(1)~(3)形成的符号串才是合式公式

说明：外层括号可以省去

合式公式的层次

定义

(1) 若公式A是单个的命题变项, 则称A为0层公式.

(2) 称A是n+1(n≥0)层公式是指下面情况之一:

(*a*) $A=\neg B$, B是n层公式;

(*b*) $A=B\wedge C$, 其中B,C分别为i层和j层公式，且 $n=\max(i, j)$;

(*c*) $A=B\vee C$, 其中B,C的层次及n同(*b*);

(*d*) $A=B\rightarrow C$, 其中B,C的层次及n同(*b*);

(*e*) $A=B\leftrightarrow C$, 其中B,C的层次及n同(*b*).

合式公式的层次 (续)

例如 公式

p	0层
$\neg p$	1层
$\neg p \rightarrow q$	2层
$\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$	3层
$((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$	4层

公式的赋值

定义 给公式A中的命题变项 $p_1, p_2, \dots, p_n$指定一组真值称为对A的一个赋值或解释

成真赋值: 使公式为真的赋值

成假赋值: 使公式为假的赋值

说明:

赋值$\alpha=\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$之间不加标点符号，$\alpha_i=0$或1.

A中仅出现 $p_1, p_2, \dots, p_n$，给A赋值$\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$是指 $p_1=\alpha_1, p_2=\alpha_2, \dots, p_n=\alpha_n$

A中仅出现 $p, q, r, \dots$, 给A赋值$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$是指 $p=\alpha_1, q=\alpha_2, r=\alpha_3 \dots$

含n个变项的公式有2^n个赋值.

真值表

真值表: 公式A在所有赋值下的取值情况列成的表

例 给出公式的真值表

$A = (q \to p) \wedge q \to p$ 的真值表

p q	$q \to p$	$(q \to p) \wedge q$	$(q \to p) \wedge q \to p$
0 0	1	0	1
0 1	0	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	1	1

实例

例 $B = \neg(\neg p \vee q) \wedge q$ 的真值表

p q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$\neg(\neg p \vee q) \wedge q$
0 0	1	1	0	0
0 1	1	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	1	0	0

例 $C = (p \vee q) \rightarrow \neg r$ 的真值表

p q r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \rightarrow \neg r$
0 0 0	0	1	1
0 0 1	0	0	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	0	0
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

公式的类型

定义 设A为一个命题公式

(1) 若A无成假赋值，则称A为重言式(也称永真式)

(2) 若A无成真赋值，则称A为矛盾式(也称永假式)

(3) 若A不是矛盾式，则称A为可满足式

注意：重言式是可满足式，但反之不真.

上例中A为重言式，B为矛盾式，C为可满足式

$A=(q\to p)\land q\to p$，$B=\neg(\neg p\lor q)\land q$，$C=(p\lor q)\to\neg r$

真值函數

问题：含n个命题变项的所有公式共产生多少个互不相同的真值表？

定义 称定义域为{00…0, 00…1, …, 11…1}，值域为{0,1}的函数是n元真值函数，定义域中的元素是长为n的0,1串. 常用F:$\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 表示F是n元真值函数.

共有 2^{2^n} 个n元真值函数.

例如 F:$\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$，且$F(00)=F(01)=F(11)=0$，$F(01)=1$，则F为一个确定的2元真值函数.

命题公式与真值函数

对于任何一个含n个命题变项的命题公式A，都存在惟一的一个n元真值函数F为A的真值表.

等值的公式对应的真值函数相同.

下表给出所有2元真值函数对应的真值表, 每一个含2个命题变项的公式的真值表都可以在下表中找到.

例如：$p \to q$, $\neg p \lor q$, $(\neg p \lor q) \lor (\neg(p \to q) \land q)$ 等都对应表中的 $F_{13}^{(2)}$

2元真值函数对应的真值表

p	q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
p	q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1