高等数学
单元自测(七)

一、填空（20分）

1.设$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则

$|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|=$ __24__

析: $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|$

$=2(\vec{a}\times\vec{b})$

$=2\times3\times4$

$=24$

2.设向量$\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{b}=4\vec{i}-2\vec{j}+\lambda\vec{k}$，则当 $\lambda=$ <u>-10</u> 时，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直；当 $\lambda=$ <u>2</u> 时，$\vec{a}$与 $\vec{b}$ 平行。

析: $\because \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

即: $2\times4+2+\lambda=0, \lambda=-10$；

而 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行;

则有: $\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{\lambda}$; $\lambda=2$

3.方程 $x^2-2y^2+3z^2+1=0$ 表示 <u>双叶双</u> 曲面，

它的对称轴在 <u>y</u> 轴上。

4.空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=64 \\ y+z=0 \end{cases}$ 的参数方程是

$$\begin{cases} x=8\cos t \\ y=4\sqrt{2}\sin t \\ z=-4\sqrt{2}\sin t \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$$

析： 由 $y+z=0$ 得：$z=-y$

代入 $x^2+y^2+z^2=64$ 得：$x^2+2y^2=64$

令：$x=8\cos t;\sqrt{2}y=8\sin t\left(0\le t\le 2\pi\right)$ 即：$y=4\sqrt{2}\sin t$

$\therefore z=-4\sqrt{2}\sin t$

$\therefore$ 曲线的参数方程是：$\begin{cases} x=8\cos t \\ y=4\sqrt{2}\sin t \\ z=-4\sqrt{2}\sin t \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$

5.旋转曲面$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$是由曲线

$\begin{cases} z=2-y \\ x=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} z=2-x \\ y=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一圈而得。

析：旋转曲面是以$(0,0,2)$为顶点的.以z轴为中心的

当 $x=0$时，在yoz平面的$y>0$半平面有：$z=2-y$

当 $y=0$时，在xoz平面的$x>0$半平面有：$z=2-x$

$\therefore$ 曲面是由曲线$\begin{cases} z=2-y \\ x=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} z=2-x \\ y=0 \end{cases}$

绕 z轴旋转一圈得到的.

二、（10分）已知平行四边形$ABCD$的两条邻边 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}-2\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{a}-3\vec{b}$，其中$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$(\vec{a}\hat{,}\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$，求此平行四边形的面积$S$及向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AD}$上的投影。

解：① $S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\left|\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\right|$

$$=\left|-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$$

② $\because\ \left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)=61$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)=40$$

$$\mathrm{Pr}\,j_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{40}{\sqrt{61}}$$

三、（10分）已知单位向量 $\overrightarrow{OA}$ 与三坐标轴正方向夹角相等且为钝角，B是点$M(1,-3,2)$关于点$N(-1,2,1)$ 的对称点，求 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ 。

解：设 $\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 　则由

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 与 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$

解得 $3\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

又设 $B(x,y,z)$ 为MN延长线上的点，则N点可视为BM的中点，于是有

$$-1=\frac{1+x}{2}\quad 2=\frac{-3+y}{2}\quad 1=\frac{2+z}{2}\ \Rightarrow \begin{cases} x=-3\\ y=7\\ z=0\end{cases}$$

$\therefore\ \overrightarrow{OB}=(-3,7,0)$

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -3 & 7 & 0 \end{vmatrix}=(\frac{7\sqrt{3}}{3},-\sqrt{3},-\frac{7\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3})$$

四、（10分）求过直线$\dfrac{x}{2}=y+2=\dfrac{z+1}{3}$ 与平面 $x+y+z+15=0$的交点，且与平面 $2x-3y+4z+5=0$ 垂直的直线方程。

解：将L的参数式方程：$x=2t, y=t-2, z=3t-1$

代入平面 $x+y+z+15=0$ 得 $t=-2$

从而交点为$(-4,-4,-7)$

取　直线的方向向量为：

$$\vec{s}=\vec{n}=(2,-3,4)$$

由点向式得直线方程：

$$\frac{x+4}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z+7}{4}$$

五、（10分）已知直线$L:\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$与平面 $\pi: x-4y-8z-9=0$ ，求直线L在平面 π 上的投影直线方程。

析：只要在过L的平面中求一平面，此平面与平面 π 垂直，两平面交线即为所求。

解：作平面束方程：$x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0$

$$\Rightarrow \vec{n}_\lambda=(1+\lambda,5,1-\lambda),$$

又 $\vec{n}=(1,-4,-8)$ ，由 $\vec{n}\perp\vec{n}_\lambda \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{n}_\lambda=0$

即 $\lambda=3$ 代入平面束方程，得

$$\pi_3: 4x+5y-2z+12=0$$

$$\therefore\ L':\begin{cases} 4x+5y-2z+12=0 \\ x-4y-8z-9=0 \end{cases}$$

六（10分）在过直线 $\frac{x-1}{0}=y-1=\frac{z+3}{-1}$ 的所有平面中求一平面，使它与原点的距离最远。

解：已知直线为 $\begin{cases} x-1=0 \\ y+z+2=0 \end{cases}$，则过L的平面束方程为 $y+z+2+\lambda(x-1)=0$,

即 $\lambda x+y+z+2-\lambda=0$ 故 $d=\frac{|2-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+2}}$,

令 $f(\lambda)=\frac{(2-\lambda)^2}{\lambda^2+2}$ 由 $f'(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=-1, \lambda_2=2$

判断知 $f(-1)$ 为唯一极大值，故 $\lambda=-1$

从而 $\pi: x-y-z-3=0$

七、（10分）求两直线 $L_1: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+2}{1}$ 与

$L_2: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+17}{4}$ 之间的距离。

解：$\vec{S}_1 = (-1, 2, 1)$，$\vec{S}_2 = (2, 1, 4)$

取 $M_1(1, 0, -2)$，$M_2(-1, 2, -17)$

则 L_1 与 L_2 公垂线的方向向量为

$$\vec{S} = \vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = (7, 6, -5)$$

而 $\overrightarrow{M_1M_2} = (-2, 2, -15)$

故 $d = \left| prj_{\vec{s}} \overrightarrow{M_1M_2} \right| = \dfrac{73}{\sqrt{110}}$

首 页 上一页 下一页 尾 页 结 束 返 回

八、（10分）画出旋转曲面 $z=8-x^2-y^2$ 与平面 $z=2y$ 所围立体的图形，并画出此立体在xoy坐标面与yoz坐标面上投影区域D的图形。

解：① 旋转曲面$z=8-x^2-y^2$ 的顶点为$(0,0,8)$ 开口向下。

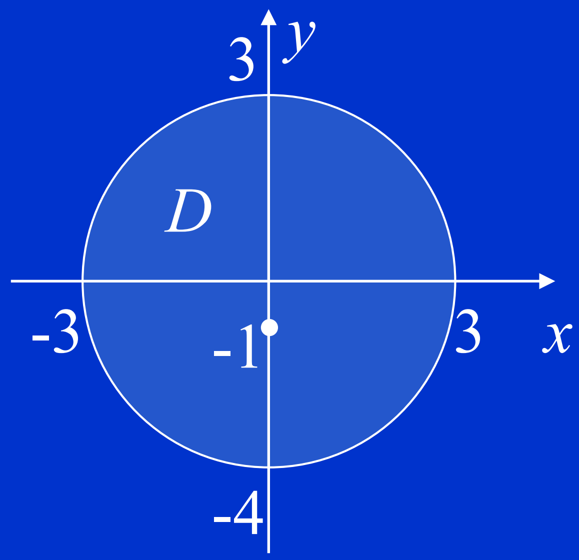
平面 $z=2y$ 过x轴，分别作图得立体图。

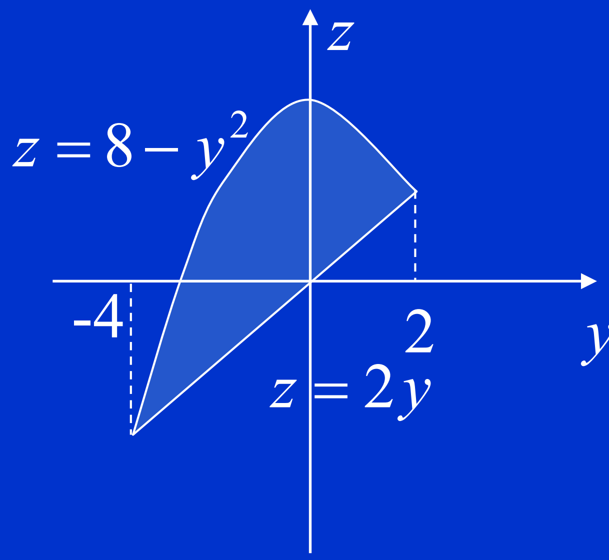
② 确定 $\begin{cases} z=8-x^2-y^2 \\ z=2y \end{cases}$，消去$z$得投影柱面

$x^2+(y+1)^2=9$

则立体在xoy面上的投影区域D为圆域

$x^2+(y+1)^2\le 9$





接八

③ 在 $z=8-x^2-y^2$ 中，令 $x=0$

得 $z=8-y^2$，这是抛物面与yoz平面的交线

平面 $z=2y$ 与yoz面的交线为直线 $z=2y$

因此，在yoz面内，区域D由 $z=8-y^2$ 与 $z=2y$

围成，即立体在yoz面的投影D如图所示

九、（10分）已知点 $A(1,0,0)$ 与点 $B(0,1,1)$，且线段 AB 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面为 Σ，求由 Σ 及两平面 $z=0$ 和 $z=1$ 所围成立体的体积。

析：先写出直线 AB 的方程，平面 $z=c(0\le c\le 1)$ 与旋转体的截面为圆面，写出圆截面方程表达式，由定积分得旋转体体积。

解：直线 AB 方程为: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ 　即：$\begin{cases} x=1-z \\ y=z \end{cases}$

在Z轴上截距为z的水平面截此旋转体所得截面为一圆面，此截面与z轴交于点 $Q(0,0,z)$，

首 页 上一页 下一页 尾 页 结 束 返 回

与直线交于点 $M(1-z,z,z)$，故圆截面半径

$$r(z)=|MQ|=\sqrt{1-2z+2z^2}$$

从而 $S(z)=\pi r^2$

$\therefore$ 体积

$$V(z)=\int_0^1 \pi r^2 dz$$

$$=\int_0^1 \pi\left(1-2z+2z^2\right)dz$$

$$=\frac{2}{3}\pi$$