第6章 特殊的图

6.1 二部图

- 二部图
- 完全二部图
- 匹配

  极大匹配,最大匹配,完美匹配,完备匹配
- Hall定理

二部图

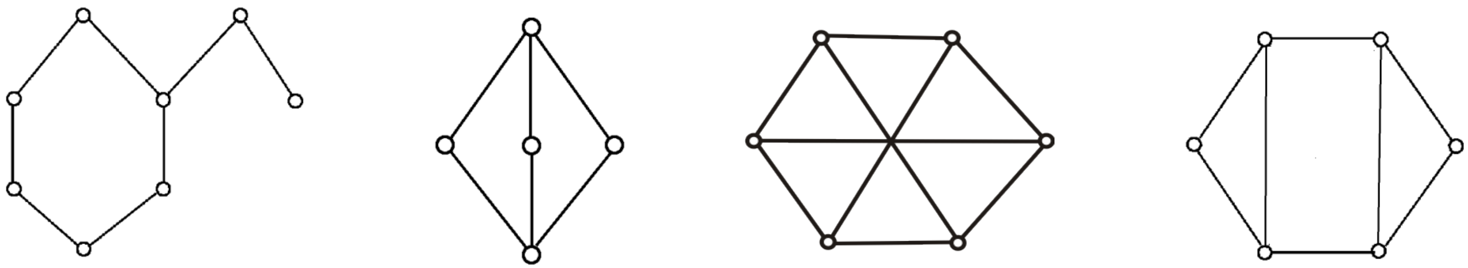
定义　设无向图 $G=<V,E>$, 若能将V划分成V_1和 V_2 $(V_1 \cup V_2=V,\ V_1 \cap V_2=\varnothing)$, 使得$G$中的每条边的两个端点都一个属于$V_1$, 另一个属于$V_2$, 则称$G$为二部图, 记为$<V_1,V_2,E>$, 称$V_1$和$V_2$为互补顶点子集.

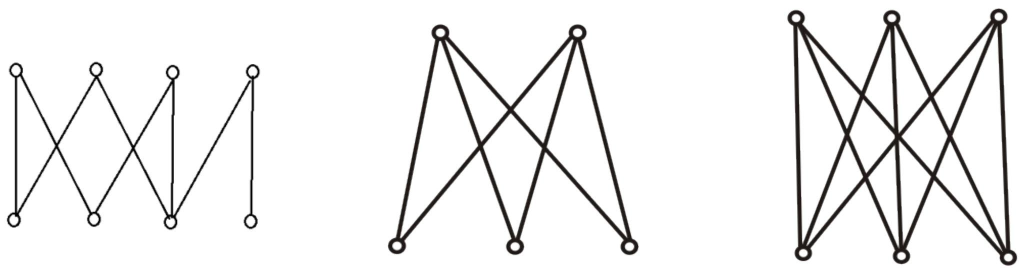
又若G是简单图, 且V_1中每个顶点都与V_2中每个顶点相邻,则称G为完全二部图, 记为$K_{r,s}$, 其中 $r=|V_1|$, $s=|V_2|$.

注意: n 阶零图为二部图.

二部图(续)

例 下述各图是否是二部图?





不是

定理 无向图G=<V,E>是二部图当且仅当G中无奇圈

匹配

设$G=<V,E>$,

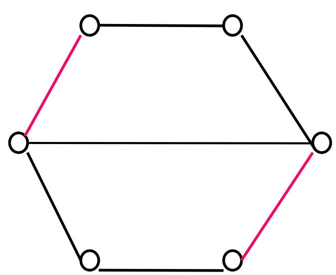
匹配(边独立集): 任2条边均不相邻的边子集

极大匹配: 添加任一条边后都不再是匹配的匹配

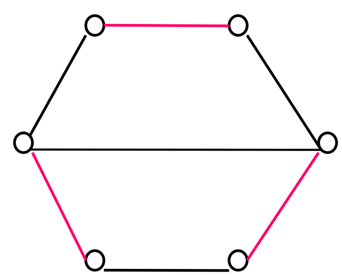
最大匹配: 边数最多的匹配

匹配数: 最大匹配中的边数, 记为β_1

例



极大匹配



最大匹配 $\beta_1=3$

匹配 (续)

设M为G中一个匹配

v_i与v_j被M匹配: $(v_i,v_j)\in M$

v为M饱和点: M中有边与v关联

v为M非饱和点: M中没有边与v关联

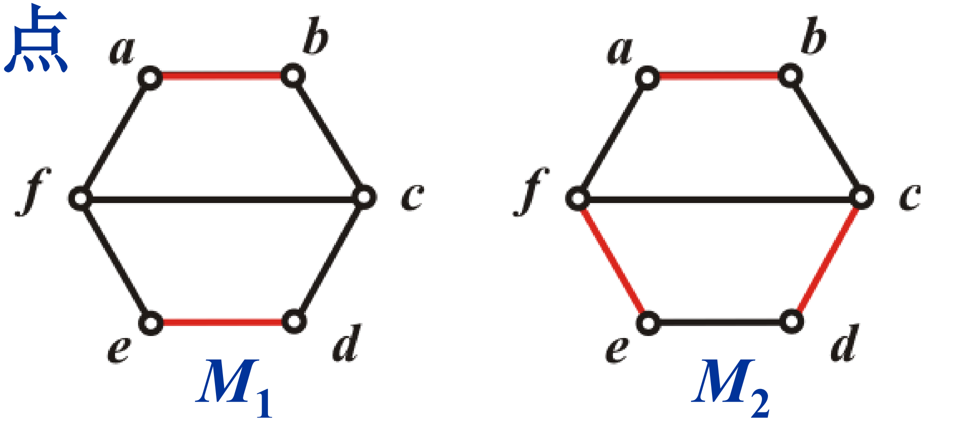
M为完美匹配: G的每个顶点都是M饱和点

例 关于M_1, a,b,e,d是饱和点

f,c是非饱和点

M_1不是完美匹配

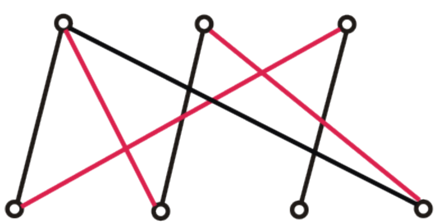
M_2是完美匹配



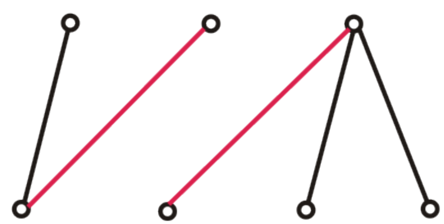
二部图中的匹配

定义 设G=<V_1,V_2,E>为二部图, $|V_1|\le|V_2|$, M是G中最大匹配, 若V_1中顶点全是M饱和点, 则称M为G中V_1到V_2的完备匹配. 当$|V_1|=|V_2|$时, 完备匹配变成完美匹配.

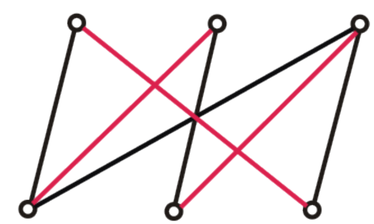
例



完备,不完美



不完备



完美

Hall定理

定理(Hall定理) 设二部图$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$中，$|V_1|\le|V_2|$. G中存在从V_1到V_2的完备匹配当且仅当V_1中任意k 个顶点至少与V_2中的k个顶点相邻($k=1,2,\ldots,|V_1|$).   —相异性条件

由Hall定理, 上一页第2个图没有完备匹配.

定理 设二部图$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$中, 如果存在$t\ge1$, 使得$V_1$中每个顶点至少关联 t 条边, 而V_2中每个顶点至多关联t条边，则G中存在V_1到V_2的完备匹配.   —t 条件

证 V_1中任意k个顶点至少关联kt条边, 这kt条边至少关联V_2中的k个顶点, 即V_1中任意k个顶点至少邻接V_2中的k个顶点. 由Hall定理, G中存在V_1到V_2的完备匹配.

一个应用实例

例 某课题组要从*a*, *b*, *c*, *d*, *e* 5人中派3人分别到上海、广州、香港去开会. 已知*a*只想去上海，*b*只想去广州，*c*, *d*, *e*都表示想去广州或香港. 问该课题组在满足个人要求的条件下，共有几种派遣方案？

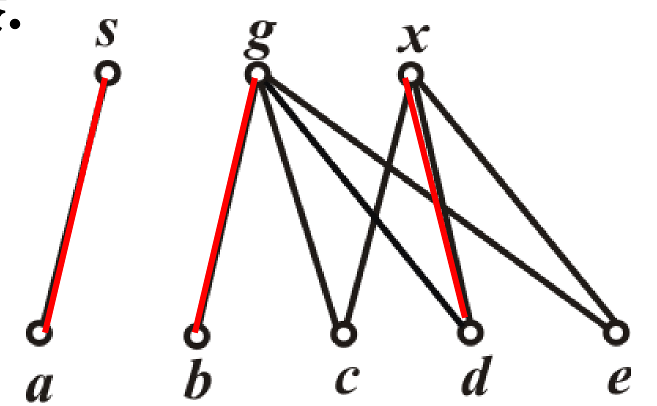
解 令$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$, 其中$V_1=\{s, g, x\}$, $V_2=\{a, b, c, d, e\}$,

$E=\{(u,v) \mid u\in V_1, v\in V_2, v想去u\}$,

其中*s*, *g*, *x*分别表示上海、广州和香港.

G 满足相异性条件，红边是一个完备匹配, 对应的派遣方案:

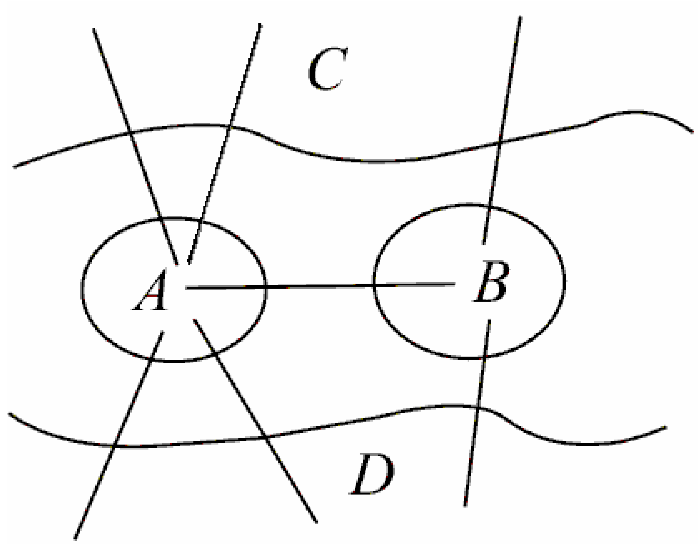
a–上海, b–广州, d–香港

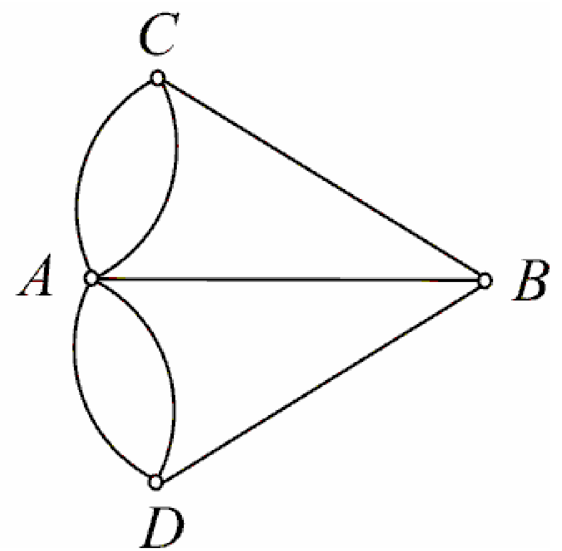


6.2 欧拉图

- 欧拉通路与欧拉回路
- 存在欧拉通路和欧拉回路的充分必要条件

哥尼斯堡七桥问题





要求边不重复地一笔画出整个图

欧拉图

欧拉通路：图中行遍所有顶点且恰好经过每条边一次的通路.

欧拉回路：图中行遍所有顶点且恰好经过每条边一次的回路.

欧拉图: 有欧拉回路的图.

半欧拉图: 有欧拉通路,但无欧拉回路的图.

几点说明：上述定义对无向图和有向图都适用.

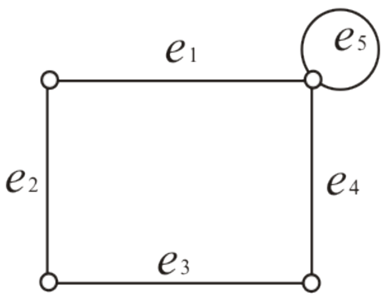
规定平凡图为欧拉图.

欧拉通路是简单通路, 欧拉回路是简单回路.

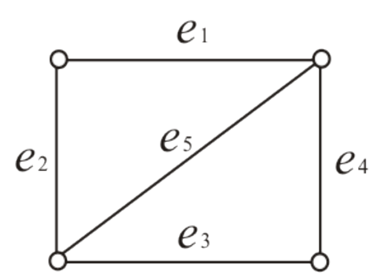
环不影响图的欧拉性.

欧拉图实例

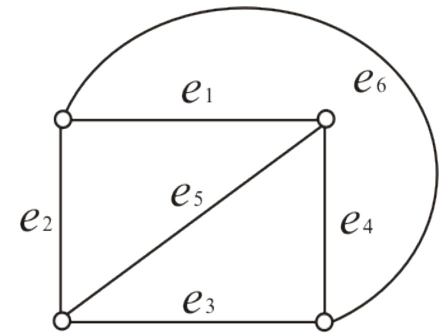
例 是否是欧拉图或半欧拉图?



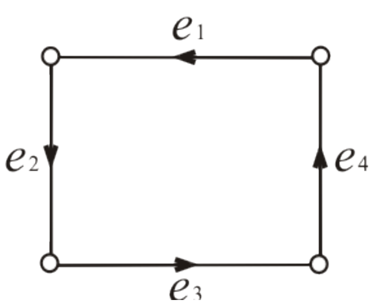
欧拉图



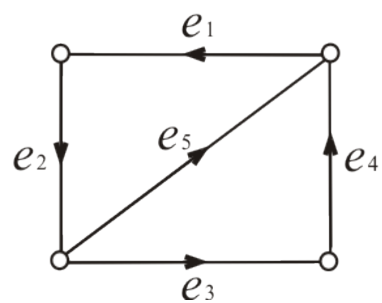
半欧拉图



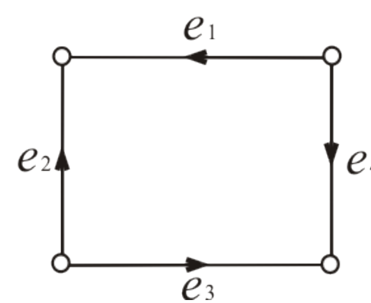
不是



欧拉图



半欧拉图



不是

欧拉图的判别法

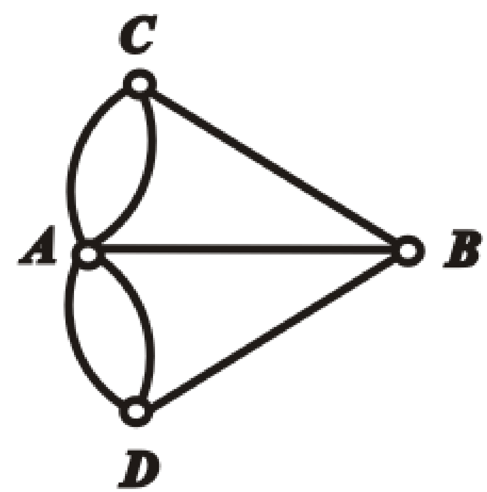
定理 无向图G为欧拉图当且仅当G连通且无奇度顶点. G是半欧拉图当且仅当G连通且恰有两个奇度顶点.

定理 有向图D是欧拉图当且仅当D连通且每个顶点的入度都等于出度. D是半欧拉图当且仅当D连通且恰有两个奇度顶点, 其中一个入度比出度大1, 另一个出度比入度大1, 其余顶点的入度等于出度.

实例

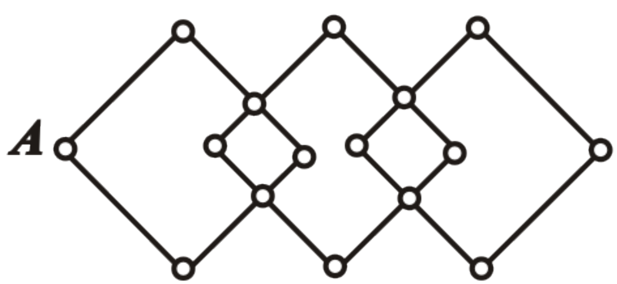
例1 哥尼斯堡七桥问题

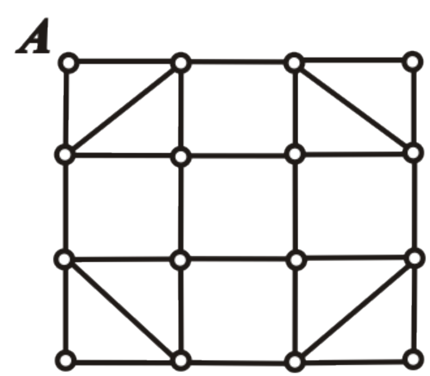
4个奇度顶点, 不存在欧拉通路, 更不存在欧拉回路,



例2 下面两个图都是欧拉图.

从A点出发, 如何一次成功地走出一条欧拉回路来?



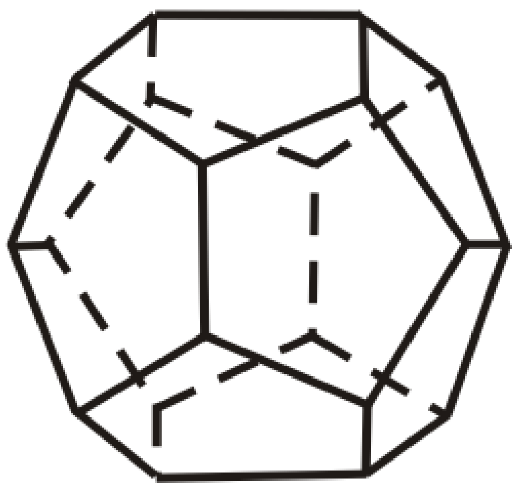


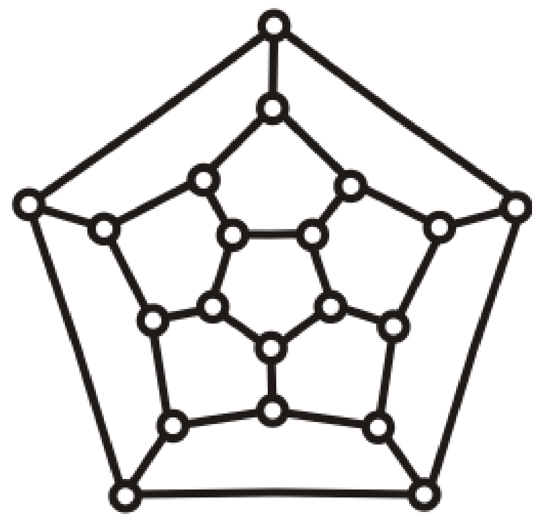
6.3 哈密顿图

- 哈密顿通路和哈密顿回路
- 存在哈密顿通路和哈密顿回路的充分条件与必要条件
- 格雷码

哈密顿周游世界问题

每个顶点是一个城市，有20个城市，要求从一个城市出发，恰好经过每一个城市一次，回到出发点.





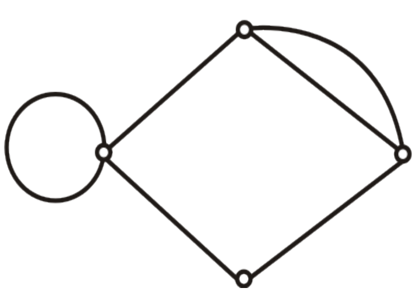
哈密顿图的定义

哈密顿通路：经过图中所有顶点一次且仅一次的通路.
哈密顿回路：经过图中所有顶点一次且仅一次的回路.
哈密顿图：具有哈密顿回路的图.
半哈密顿图：具有哈密顿通路而无哈密顿回路的图.

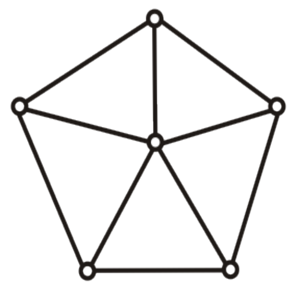
几点说明：
平凡图是哈密顿图.
哈密顿通路是初级通路，哈密顿回路是初级回路.
环与平行边不影响图的哈密顿性.

实例

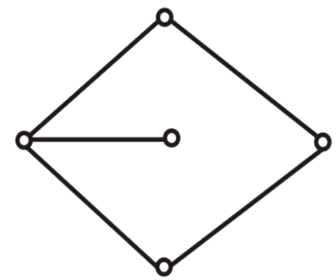
例 是否是哈密顿图,半哈密顿图?



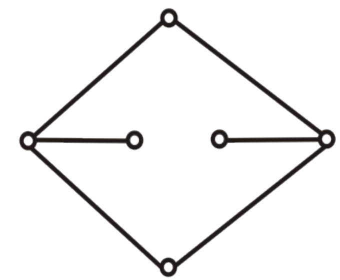
哈密顿图



哈密顿图



半哈密顿图



不是

无向哈密顿图的一个必要条件

定理 设无向图$G=<V,E>$是哈密顿图, 则对于任意$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$, 均有 $p(G-V_1) \le |V_1|$.

证 设C为G中一条哈密顿回路, 有$p(C-V_1) \le |V_1|$. 又因为$C \subseteq G$, 故 $p(G-V_1) \le p(C-V_1) \le |V_1|$.

几点说明

定理中的条件是哈密顿图的必要条件, 但不是充分条件.

可利用该定理判断某些图不是哈密顿图.

由定理可知, $K_{r,s}$当$s \ge r+1$时不是哈密顿图.

当$r \ge 2$时, $K_{r,r}$是哈密顿图, 而$K_{r,r+1}$是半哈密顿图.

实例

例 设G为n阶无向连通简单图, 若G中有割点或桥, 则G不是哈密顿图.

证 (1) 设v为割点, 则$p(G-v) \geq 2>|\{v\}|=1$. 根据定理, G不是哈密顿图.

(2) 若G是K_2(K_2有桥), 它显然不是哈密顿图. 除K_2外, 其他的有桥连通图均有割点. 由(1), 得证G不是哈密顿图.

无向哈密顿图的一个充分条件

定理 设G是n阶无向简单图, 若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于$n-1$, 则G中存在哈密顿通路. 当$n\geq3$时, 若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于n, 则G中存在哈密顿回路.

由定理, 当$n\geq3$时, K_n均为哈密顿图.

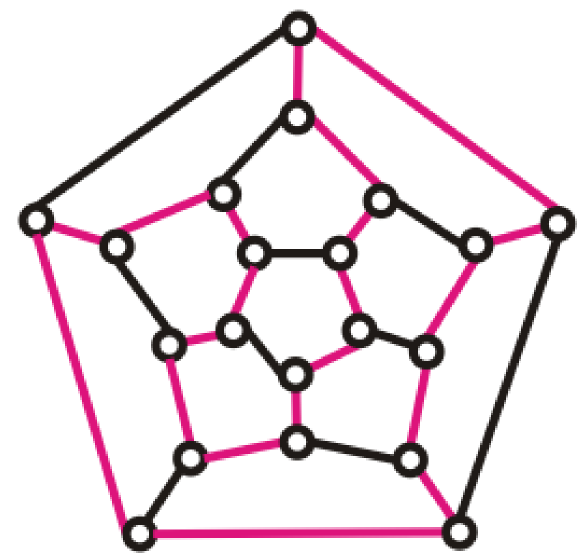
定理中的条件是充分条件, 但不是必要条件.

例如, $n(\geq6)$个顶点的路径存在哈密顿通路, 但不满足条件. $n(\geq5)$个顶点的圈是哈密顿图, 不满足条件.

判断是否是哈密顿图的可行方法

- 观察出一条哈密顿回路

例如 右图(周游世界问题)中红边给出一条哈密顿回路, 故它是哈密顿图.



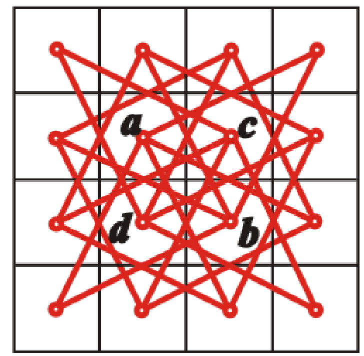
- 满足充分条件

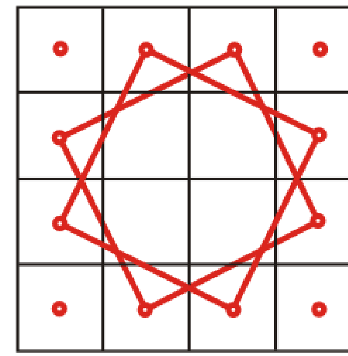
例如 当$n\geq 3$时, K_n中任何两个不同的顶点 u,v, 均有$d(u)+d(v) = 2(n-1) \geq n$, 所以$K_n$为哈密顿图.

判断是否是哈 密顿图的可行方法(续)

- 不满足必要条件

例 4×4国际象棋盘上的跳马问题: 马是否能恰好经过每一个方格一次后回到原处?





解 每个方格看作一个顶点, 2个顶点之间有边当且仅当马可以从一个方格跳到另一个方格, 得到16阶图G, 如左图红边所示. 取$V_1=\{a, b, c, d\}$, 则$p(G-V_1) = 6 >|V_1|$, 见右图. 由定理, 图中无哈密顿回路, 故问题无解.

在8×8国际象棋盘上, 跳马问题是否有解?

应用实例

例 某次国际会议8人参加，已知每人至少与其余7人中的4人有共同语言，问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座，使得每个人都能与两边的人交谈?

解 作无向图$G=\langle V,E\rangle$, 其中$V=\{v|v$为与会者$\}$,

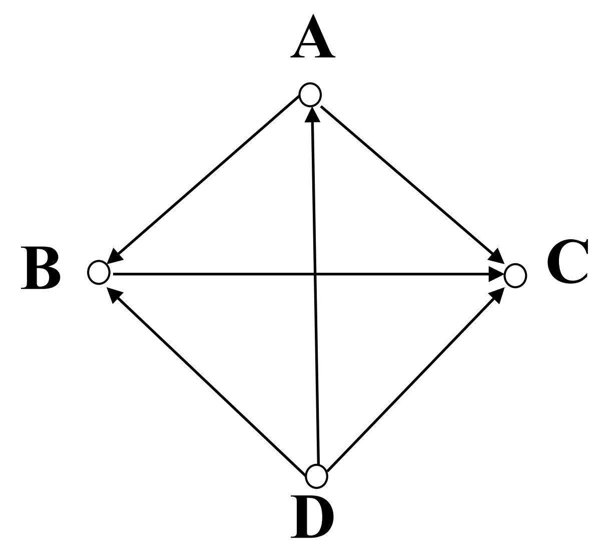
$E=\{(u,v) \mid u,v\in V, u$与$v$有共同语言, 且$u\neq v\}$.

G为简单图. 根据条件, $\forall v\in V$, $d(v)\geq 4$. 于是, $\forall u,v\in V$, 有$d(u)+d(v)\geq 8$. 由定理可知G为哈密顿图. 服务员在G中找一条哈密顿回路C，按C中相邻关系安排座位即可.

竞赛图

竞赛图: 任意两个顶点之间恰好有一条有向边.

在循环赛中, n个参赛队中的任意两个队比赛一次, 假设没有平局, 用有向图描述比赛结果: 顶点表示参赛队, A到B有一条边当且仅当A队胜B队.



竞赛图(续)

定理 在$n(n\geq 2)$阶有向图D中, 如果所有有向边均用无向边代替, 所得无向图中含生成子图K_n, 则有向图D中存在哈密顿通路.

根据定理, 竞赛图中一定有哈密顿通路, 当然也可能有哈密顿回路. 当没有哈密顿回路时, 通常只有一条哈密顿通路, 这条通路给出参赛队的惟一名次.

例如, DABC是一条哈密顿通路, 它没有哈密顿回路, 比赛结果是D第一, A第二, B第三, C第四.