第5章

刚体力学基础动量矩

CONTENTS

- **5.1 刚体和刚体的基本运动**
- **5.2 力矩　刚体绕定轴转动微分方程**
- **5.3 绕定轴转动刚体的动能　动能定理**
- **5.4 动量矩和动量矩守恒定律**

CONTENTS

- 5.1 刚体和刚体的基本运动
- 5.2 力矩　刚体绕定轴转动微分方程
- 5.3 绕定轴转动刚体的动能　动能定理
- 5.4 动量矩和动量矩守恒定律

质点的理想模型不适用啦！

用什么物理模型来描述
这些物体的运动呢？

◆刚体的概念

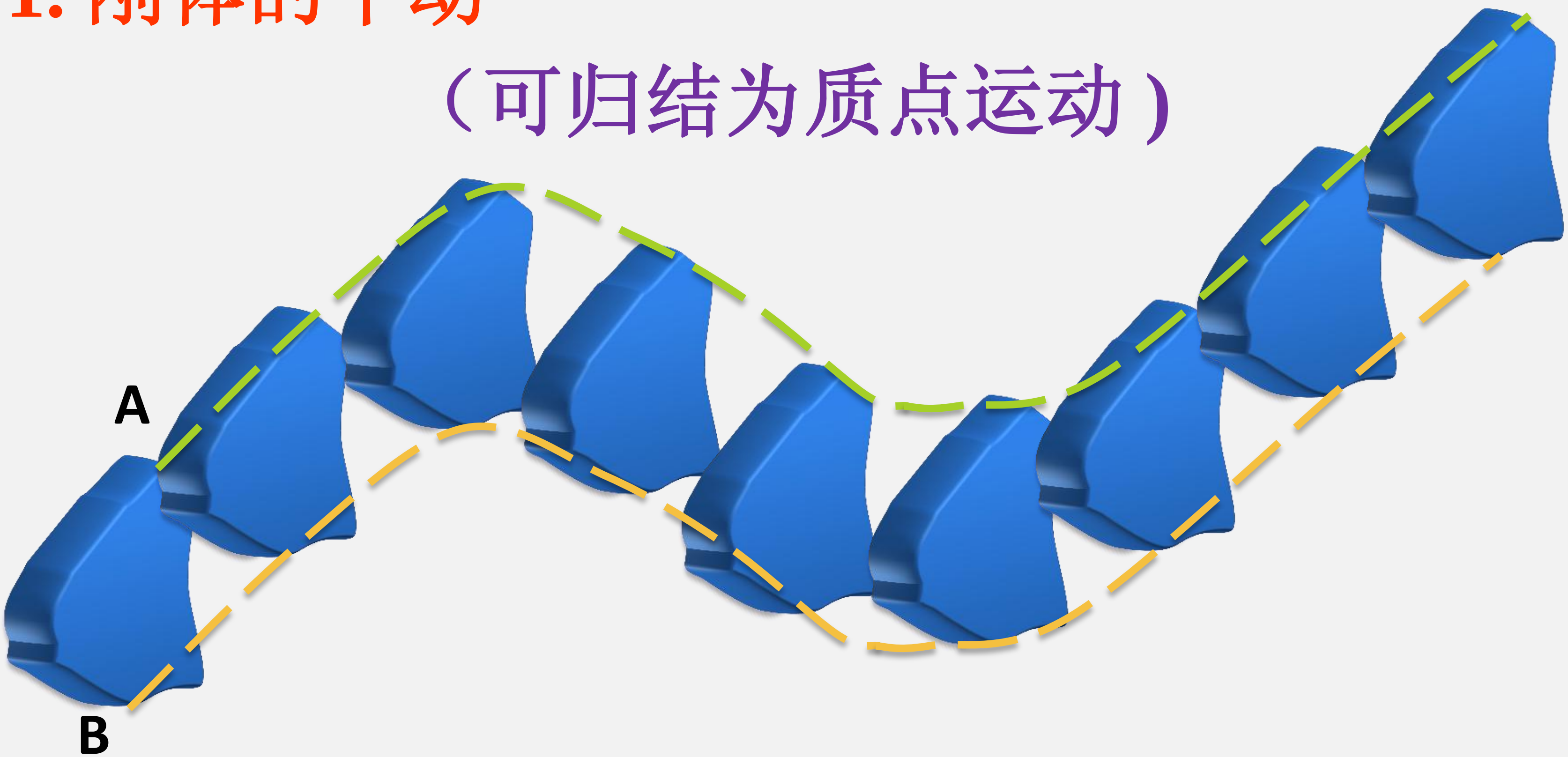
质点	刚体
有质量	有质量
无大小	有大小
	大小和形状不变

刚体是理想模型
是特殊的质点系

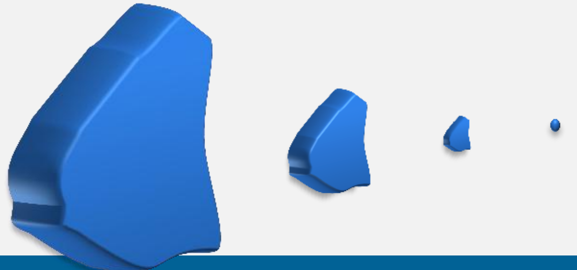
◆刚体的平动和定轴转动

1. 刚体的平动

（可归结为质点运动）

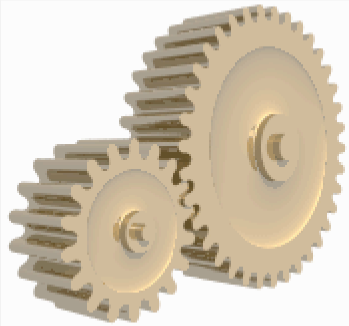


刚体各点运动状态一样，如：$\bar{v}$、$\bar{a}$ 都相同。

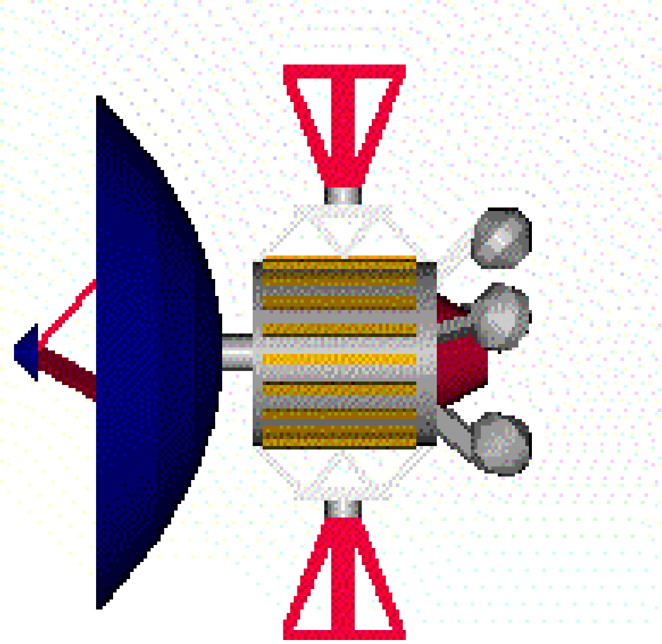


即刚体中的每一点都可以代表整个刚体的运动

2. 刚体的转动

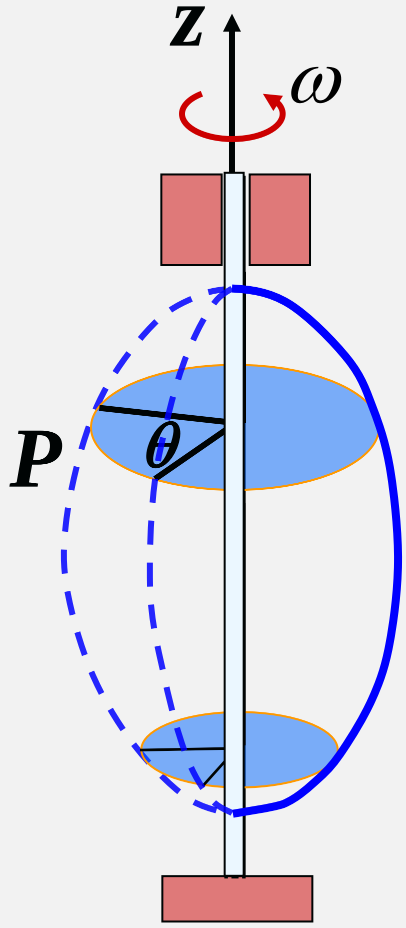


分定轴转动和非定轴转动.



3. 刚体的定轴转动

刚体内各点都绕同一直线(转轴)转动,而 转轴固定不动。



描述刚体绕定轴转动的角量

角坐标 $\theta = \theta(t)$

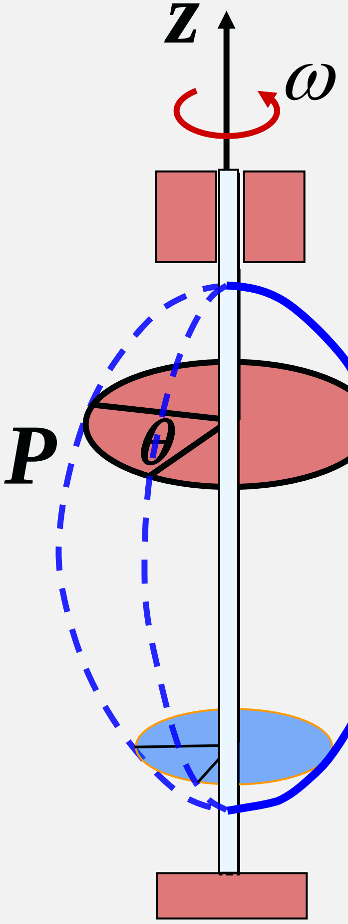
角位移 $\Delta\theta$

角速度 $$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

角加速度 $$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

刚体定轴转动的特点：

- ✓ 刚体上每一质点均作圆周运动，运动圆面垂直转轴；
- ✓ 刚体上每一质点运动的角量 $\Delta\theta, \vec{\omega}, \vec{\alpha}$ 相同。



由于

$$v = r\omega$$

$$a_n = r\omega^2$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\alpha$$

离转轴不同距离质点的线量 $\vec{v}, \vec{a}$ 不同。

4. 刚体绕定轴的匀速和匀变速转动

若 $\omega=$常数，刚体绕定轴做匀速转动。

若 $\alpha=$常数，刚体绕定轴做匀变速转动。

匀速转动 $\theta=\theta_0+\omega t$

匀变速转动
$$\begin{cases}\omega=\omega_0+\alpha t\\ \theta-\theta_0=\omega_0 t+\dfrac{1}{2}\alpha t^2\\ \omega^2-\omega_0^2=2\alpha(\theta-\theta_0)\end{cases}$$

5. 绕定轴转动刚体内各点的速度和加速度

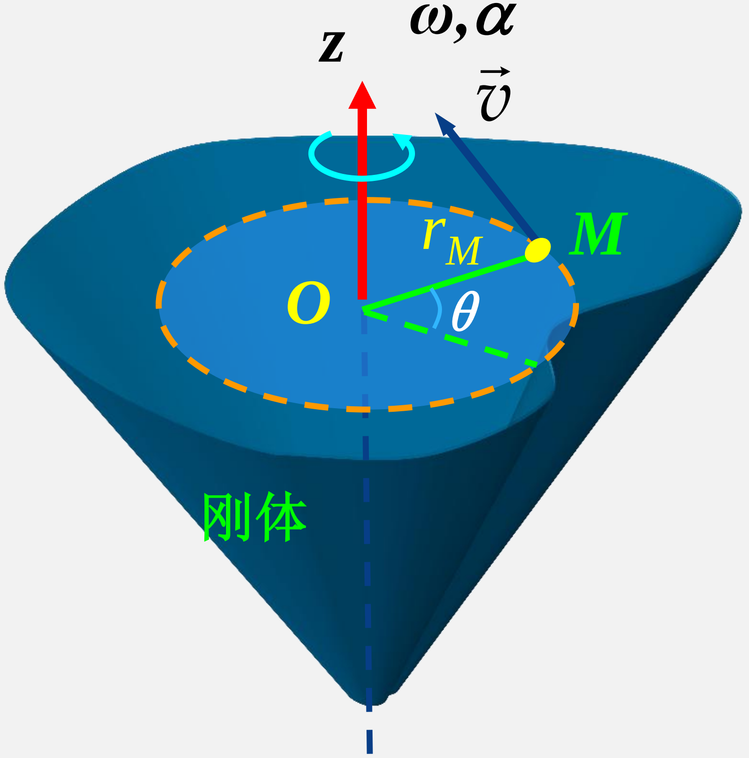
因为刚体上的任意点都绕同一轴作圆周运动，且 ω，α 都相同。

由角量与线量关系

$$v = r_M \omega$$

$$a_n = r_M \omega^2$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r_M \alpha$$



6.刚体作定轴转动时，角速度与角加速度的方向

角速度ω 的方向由右手定则确定。

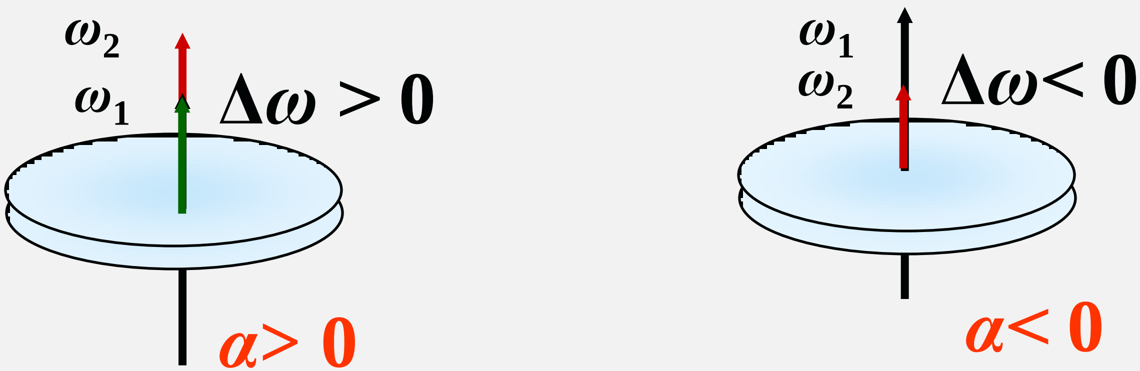
规定：

逆时针转动,$\theta > 0$,
ω沿转轴向上,$\omega > 0$ 。

顺时针转动,$\theta < 0$,
ω沿转轴向下,$\omega < 0$ 。

角加速度α的方向用正负表示。

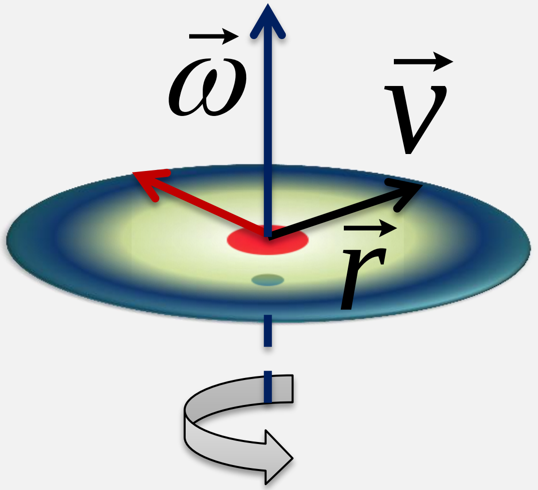
设ω_1 ,ω_2 同向，$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ 。



加速转动　　减速转动

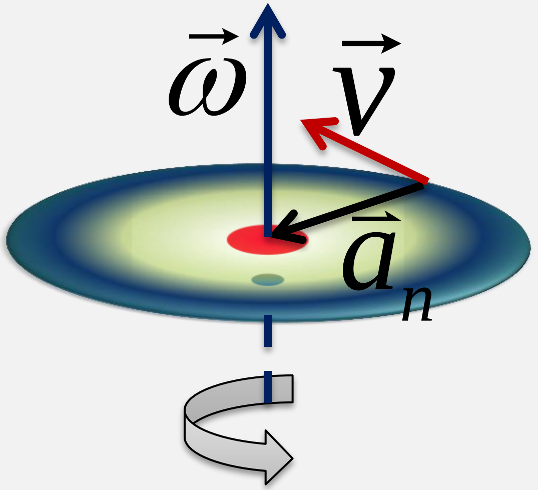
角量与线量的矢量关系

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$



$$\vec{a}_n=\vec{\omega}\times\vec{v}$$

$$\vec{a}_\tau=\vec{\alpha}\times\vec{r}$$



例1一飞轮的半径为 0.2m, 转速为150转 / 分，经30s均匀减速后停止。

求: (1)角加速度和飞轮转的圈数。

(2) t = 6s时的角速度;飞轮边缘上一点的线速度、切向加速度和法向加速度。

解:（1）
$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

$$\because \ \omega_0 = \frac{2\pi \times 150}{60} = 5\pi \cdot \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

$$\therefore \ \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 5\pi}{30} = -\frac{\pi}{6} \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

飞轮在30s内转过的角度： $$\theta=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\alpha}=75\pi\cdot\text{rad}$$

飞轮在30s内转过的圈数： $$N=\frac{\theta}{2\pi}=\frac{75\pi}{2\pi}=37.5\text{圈}$$

(2) $t=6$ s 时的角速度：

$$\omega=\omega_0+\alpha t=4\pi\cdot\text{rad/s}$$

飞轮边缘上一点

线速度： $$v=r\omega=2.5\text{m/s}$$

切向加速度： $$a_\tau=r\alpha=-0.105\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

法向加速度： $$a_n=v^2/r=r\omega^2=31.6\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

例2 设圆柱型电机转子由静止经300s后达18000r/min 已知转子的角加速度α与时间成正比。

求: 转子在这段时间内转过的圈数。

解: 因角加速度α 随时间而增大,

设 $\alpha = ct$

由定义，得 $$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = ct$$

$$\mathrm{d}\omega = ct\mathrm{d}t$$

两边积分 $\int_0^{\omega} \mathrm{d}\omega = c\int_0^{t} t\mathrm{d}t$　　$\omega = \frac{1}{2}ct^2$

由题意　在 $t = 300\,\mathrm{s}$ 时

$$\omega = 18000\ \mathrm{r\cdot min^{-1}}$$

$$= \frac{18000 \times 2\pi}{60} = 600\pi\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

所以　$c = \frac{2\omega}{t^2} = \frac{2\times 600\pi}{300^2} = \frac{\pi}{75}\,\mathrm{rad\cdot s^{-3}}$

任意时刻的角速度

$$\omega=\frac{1}{2}ct^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{75}\cdot t^2=\frac{\pi}{150}\cdot t^2\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

由角速度的定义： $$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi}{150}\cdot t^2\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

得到： $$\int_0^\theta \mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{150}\int_0^t t^2\mathrm{d}t \qquad \theta=\frac{\pi}{450}t^3\mathrm{rad}$$

转子300s内转过的圈数：

$$N=\frac{\theta}{2\pi}=\frac{\pi}{2\pi\times450}(300)^3=3\times10^4\text{圈}$$

例3 一半径为 r =0.5m的飞轮以α=3rad/s^{2}的恒定角速度由静止开始转动，试计算它边缘上一点M在2s末时的速度、切向加速度和法向加速度；问位于半径中点处速度、切向加速度和法向加速度的大小等于多少？

解 由刚体匀变速转动的公式，t=2s 时，

$$\omega = \alpha t = 6.00 \ \ \text{rad/s}$$

（1）边缘上一点M在2s末时的速度的大小

$$v = r\omega = 0.50 \times 6.00 = 3.00\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

（**2**）M点2s末时的切向加速度和法向加速度

$$a_{\mathrm{t}} = r\alpha = 0.50 \times 3.00 = 1.50\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$a_{\mathrm{n}} = r\omega^2 = 0.5 \times (6.00)^2 = 18.0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

（**3**）半径中点为$r' = r/2 = 0.25\mathrm{m}$

$$v' = r'\omega = 0.25 \times 6.00 = 1.50\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

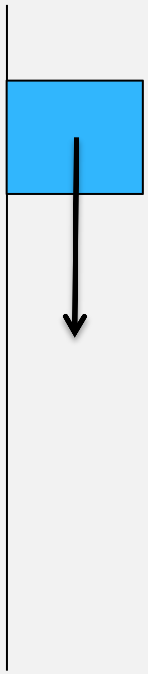
$$a'_{\mathrm{t}} = r'\alpha = 0.25 \times 3.00 = 0.75\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

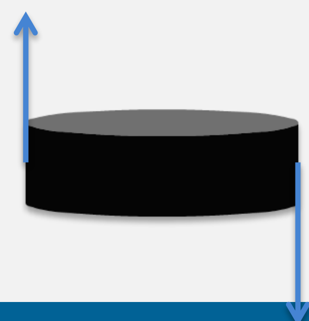
$$a'_{n} = r'\omega^2 = 0.25 \times (6.00)^2 = 9.0\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

CONTENTS

- 5.1 刚体和刚体的基本运动
- **5.2 力矩 刚体绕定轴转动微分方程**
- 5.3 绕定轴转动刚体的动能 动能定理
- 5.4 动量矩和动量矩守恒定律

➢ 力矩





力	力矩
• 改变质点的运动状态 • 获得加速度	• 改变刚体的转动状态 • 获得角加速度

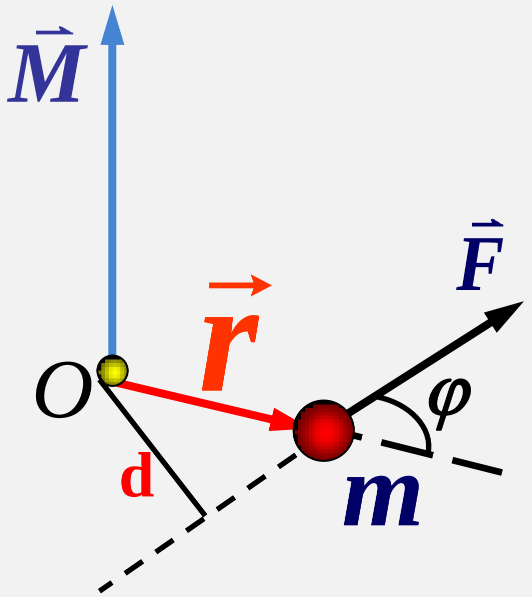
力对参考点的力矩

定义： $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

力矩大小为： $\left|\vec{M}\right| = rF\sin\varphi$
$= F \cdot d$

力矩方向为：由右手法则确定。

单位：牛顿.米



注：(1)相同的力对不同的参考点的力矩不同。

(2)空间矢量

➢ 力对于定轴的力矩

若力F不在转动平面内，

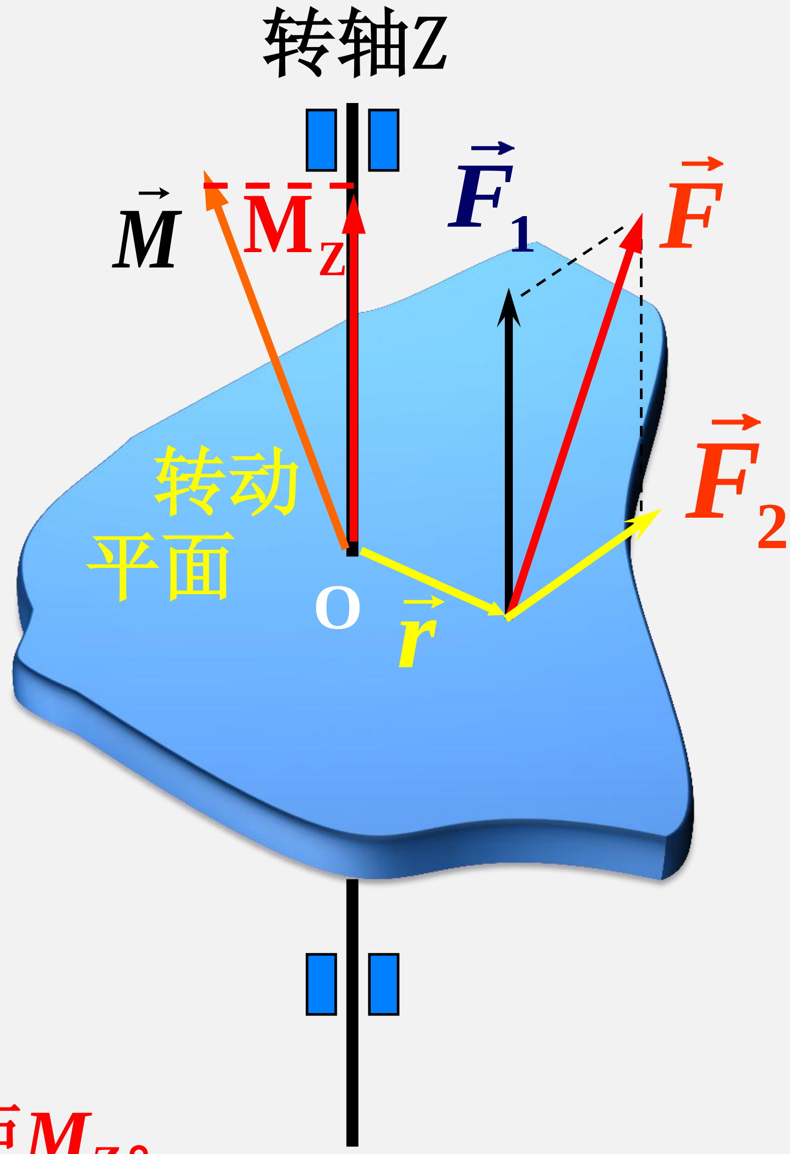
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$F1$ // 转轴，**对定轴转动无贡献**

$F2\perp$转轴，**对定轴转动有贡献**

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2$$



沿Z 轴分量，$\vec{F}$ 对Z轴的力矩M_Z。

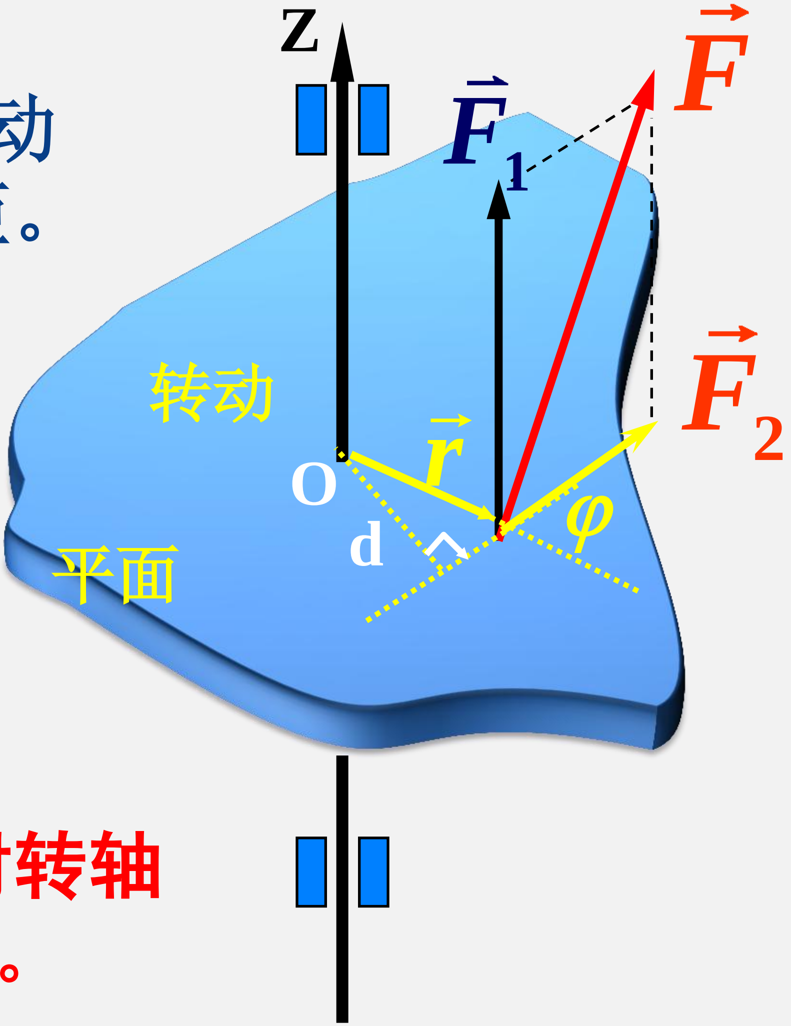
- 在定轴转动问题中，F_1对转轴的力矩为零，在定轴转动中不予考虑。

- 如不加说明，力矩即指在转动面内的分力F_2对转轴的力矩。

$$\vec{M}_Z = \vec{r} \times \vec{F}_2$$

- $$M_Z = F_2 r \sin\varphi$$
  $$= F_2 d \quad （d：力臂）$$

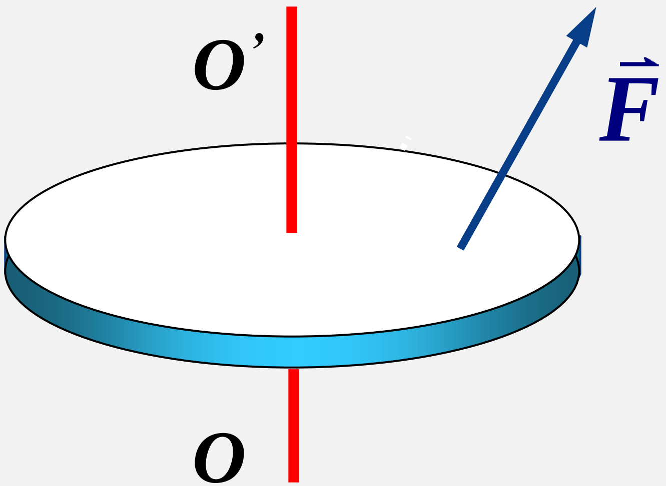
- **在转轴方向Oz确定后，力对转轴的力矩方向可用+、-号表示。**



◆ 思考：

当外力F 的大小一定时，怎样才能使这个力最有效的改变刚体的转动状态？

$$M_Z = F_2 r \sin\varphi$$



力矩：全面考虑力的3要素

（大小、方向、作用点）

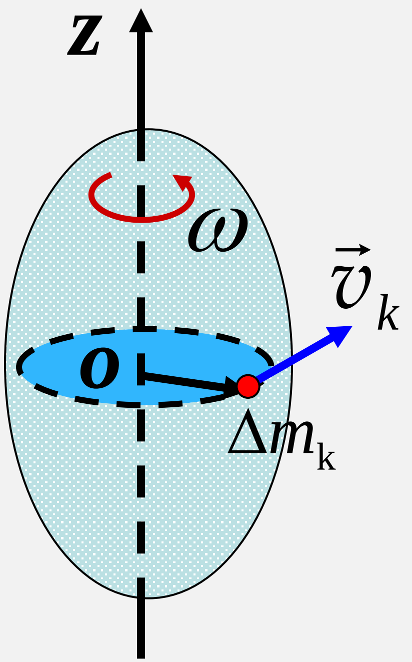
◆ 多个力同时作用时：

$$M_Z = M_{Z1} + M_{Z2} + M_{Z3} + \cdots$$

➢ 刚体绕定轴转动微分方程（转动定律）

作用在 Δm_k 上的外力 $\vec{F}_k$ ，内力 $\vec{f}_k$

$$\Delta m_k \frac{\mathrm{d}\vec{v}_k}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_k + \vec{f}_k$$



在圆轨迹切线方向

$$\Delta m_k a_{k\tau} = \Delta m_k r_k \alpha = F_{k\tau} + f_{k\tau}$$

两边乘以$\boldsymbol{r_k}$，并对整个刚体求和

$$(\sum_k \Delta m_k r_k^2)\alpha = \sum_k F_{k\tau} r_k + \sum_k f_{k\tau} r_k$$

$$(\sum_k \Delta m_k r_k^2)\alpha = \sum_k F_{k\tau} r_k + \sum_k f_{k\tau} r_k$$

其中 $\sum_k F_{k\tau} r_k = M_z$ 称为合外力矩；

$\sum_k f_{k\tau} r_k = 0$ 内力矩之和为零；

令 $J_z = \sum_k \Delta m_k r_k^2$，称为刚体对z轴的**转动惯量**。

则 $J_z \alpha = M_z$ 或 $J_z \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_z$

$$M_z = J_z \alpha$$

刚体绕定轴转动时，刚体对该轴的转动惯量与角加速度的乘积等于作用在刚体上所有外力对该轴力矩的代数和。

刚体定轴转动的角加速度与它所受的合外力矩成正比,与刚体的转动惯量成反比。

$$\vec{M} = J\ \vec{\alpha}$$

— 刚体绕定轴转动微分方程，或转动定律。

转动定律		牛顿第二定律
M		F
刚体的转动惯性 J		m 质点的平动惯性
α		a
$M = J\alpha = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$	$\Leftrightarrow$	$F = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

两个定律在形式上对应, 都是反映瞬时效应的。

➢ 转动惯量

刚体质量不连续分布 $J = \sum_i \Delta m_\mathrm{i} r_\mathrm{i}^2$

刚体质量连续分布 $J = \int r^2 \mathrm{d}m$

确定转动惯量的三个要素:

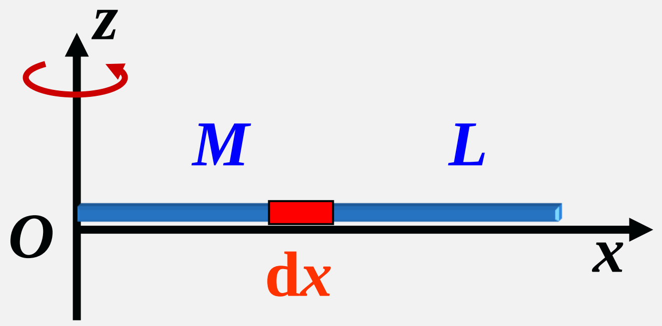
(1) 总质量;

(2) 质量分布;

(3) 转轴的位置。

1. J 与刚体的总质量有关

例如, 求等长的细木棒和细铁棒绕端点轴转动惯量。



解： 取微小段细棒dx,

$$dm = \lambda dx$$

由公式 $J = \int r^2 \mathrm{d}m$

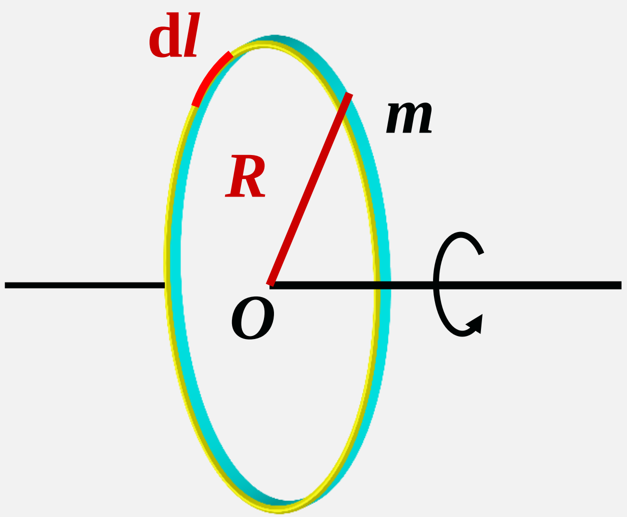
$$J = \int_0^L x^2 \lambda \mathrm{d}x = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} \mathrm{d}x = \frac{1}{3} ML^2$$

$$J_{铁} > J_{木}$$

2. *J* 与质量分布有关

例如，圆环绕中心轴旋转的转动惯量。

解：　取微小段dl，



$$dm = \lambda dl$$

由公式　$J = \int r^2 \mathrm{d}m$

$$J = \int_0^L R^2 \mathrm{d}m = \int_0^{2\pi R} R^2 \lambda \mathrm{d}l$$

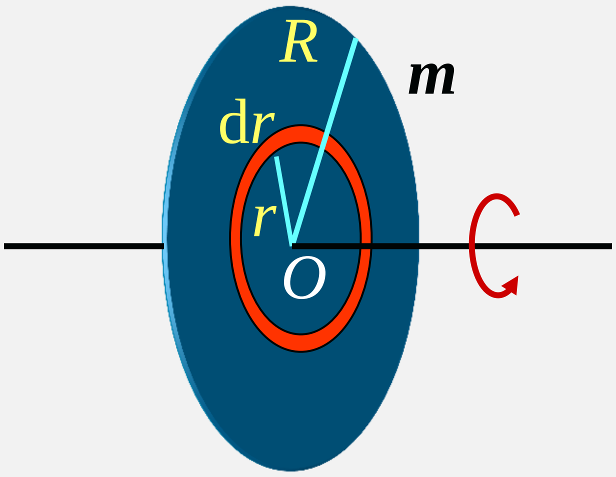
$$= R^2 \lambda \int_0^{2\pi R} \mathrm{d}l = 2\pi R^3 \frac{m}{2\pi R} = mR^2$$

例如 圆盘绕中心轴旋转的转动惯量。

$$\mathrm{d}m=\sigma\mathrm{d}s=\frac{m}{\pi R^2}2\pi r\mathrm{d}r=\frac{2mr}{R^2}\mathrm{d}r$$

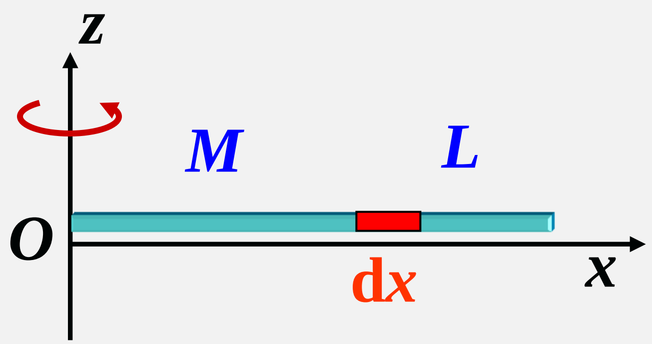
$$J=\int_0^m r^2\mathrm{d}m$$

$$=\int_0^R\frac{2m}{R^2}r^3\mathrm{d}r=\frac{m}{2}R^2$$

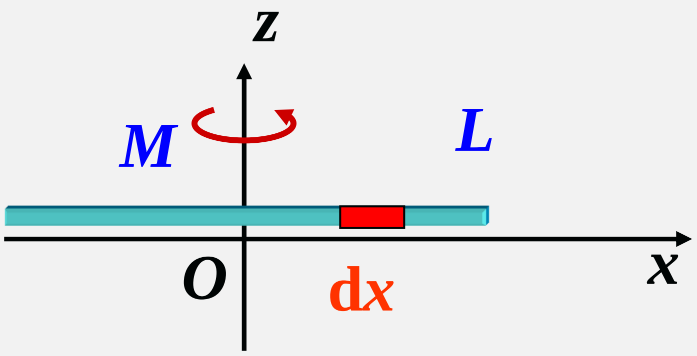


3. *J* 与转轴的位置有关

$$J=\int_0^L x^2\lambda\mathrm{d}x=\frac{1}{3}ML^2$$

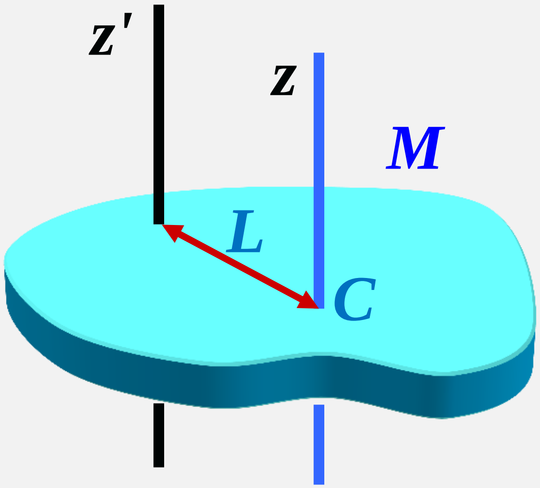


$$J=\int_{-L/2}^{L/2} x^2\lambda\mathrm{d}x=\frac{1}{12}ML^2$$



4. 平行轴定理

$$J_{z'} = J_{cz} + ML^2$$



$J_{z'}$ 刚体绕任意轴的转动惯量；

J_{cz} 刚体绕通过质心的轴的转动惯量；

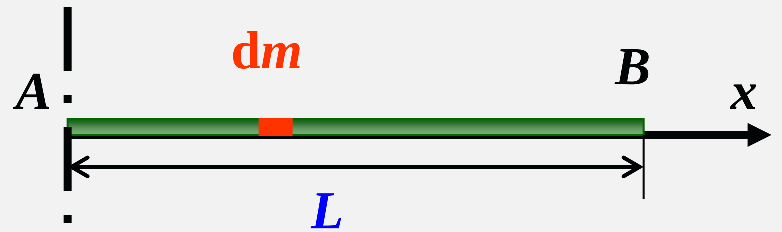
L 两轴间垂直距离。

5. 转动惯量J 的计算

- 按定义计算

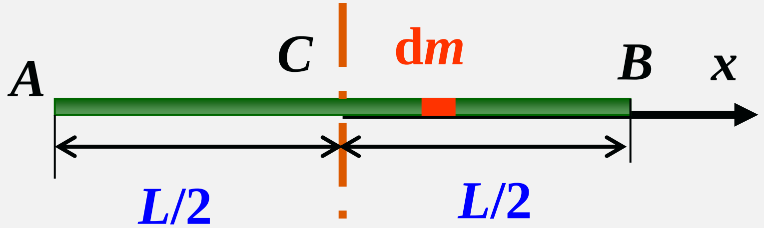
例1 求长为L质量为m 的均匀细棒对图中不同轴的转动惯量。

解: 取如图坐标，$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}x$



$$J_A = \int_0^L x^2 \lambda \mathrm{d}x = mL^2/3$$

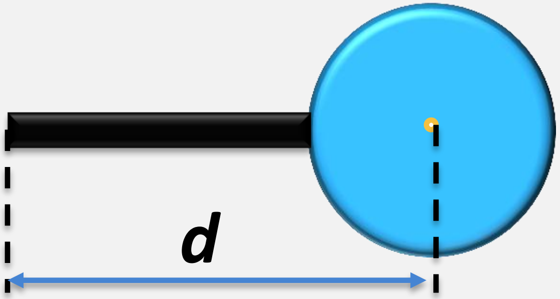
$$J_C = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \lambda \mathrm{d}x = mL^2 / 12$$



$$J_C + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} mL^2 + \frac{1}{4} mL^2 = \frac{1}{3} mL^2 = J_A$$

- 用平行轴定理、迭加法

求图所示刚体对经过棒端且与棒垂直的轴的转动惯量如何计算？(棒长为L质量$\boldsymbol{m_L}$、圆盘半径为R质量$\boldsymbol{m_0}$）



$$J_{L1}=\frac{1}{3}m_L L^2$$ (棒对边缘轴)

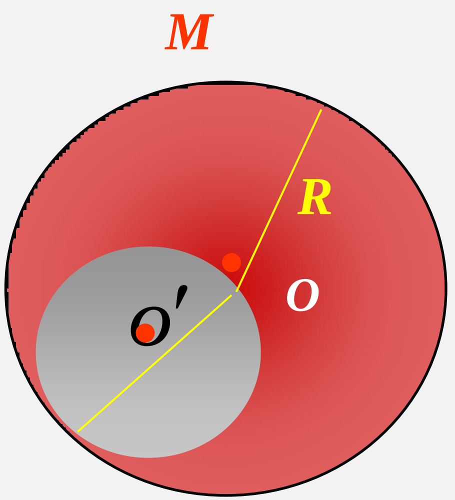
$$J_o=\frac{1}{2}m_o R^2$$ (圆盘对中心轴)

$$J_{L2}=J_0+m_0 d^2$$ (圆盘对棒边缘轴)

$$J=\frac{1}{3}m_L L^2+\frac{1}{2}m_o R^2+m_o(L+R)^2$$

例如

$$J = J_{大} - J_{小}$$



- 实验法

如三线扭摆法。

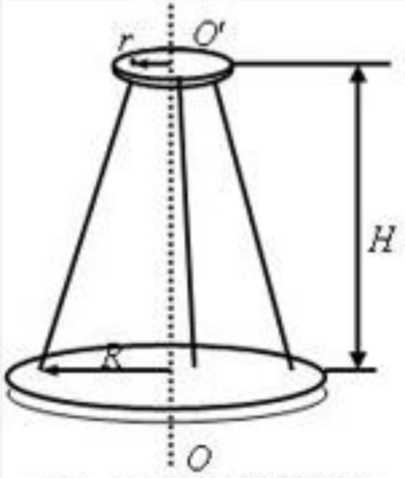


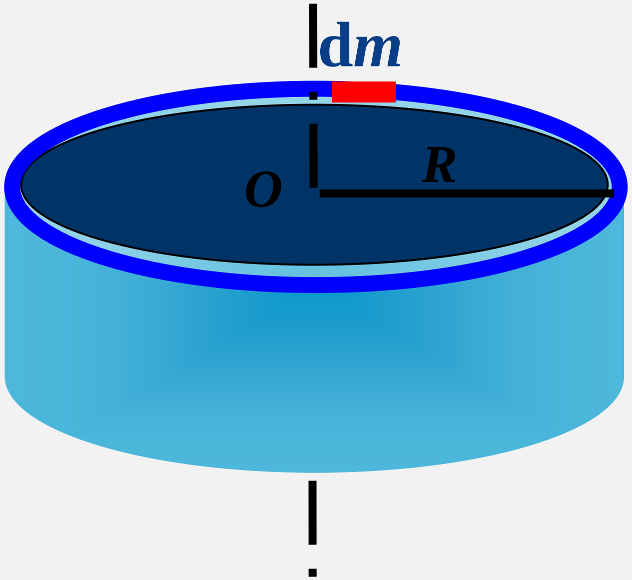
图 1 三线摆实验装置图

例 求质量为m、半径为R 的均匀圆环的转动惯量。轴与圆环平面垂直并通过圆心。

解： $J=\int R^2 \mathrm{d}m$

$$=R^2\int_0^{2\pi R}\lambda \mathrm{d}l$$

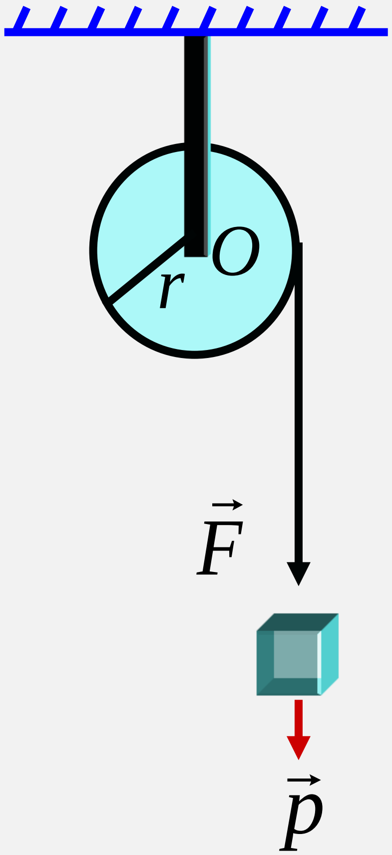
$$=mR^2$$



J 是可加的,若为薄圆筒（不计厚度）结果相同。

• 转动定律的应用举例

例1一轻绳绕在半径 r =20 cm 的飞轮边缘，在绳端施以F=98 N 的拉力，飞轮的转动惯量 J=0.5 kg·m^2，飞轮与转轴间的摩擦不计 。



求: **(1)** 飞轮的角加速度。

(2) 如以重为P =98 N的物体挂在绳端,试计算飞轮的角加速度。

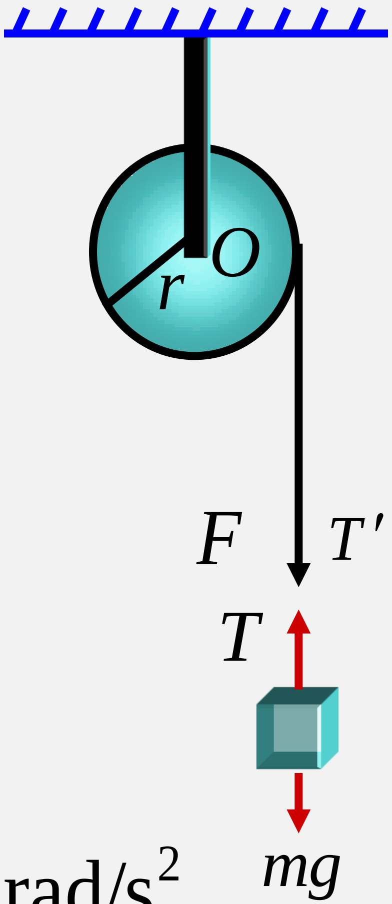
解 **(1)** 由公式 $J\alpha = M$

$$Fr = J\alpha$$

$$\therefore \alpha = \frac{Fr}{J} = \frac{98\times 0.2}{0.5} = 39.2\ \mathrm{rad/s^2}$$

(2)
$$\begin{cases} mg - T = ma \\ Tr = J\alpha \\ a = r\alpha \end{cases}$$

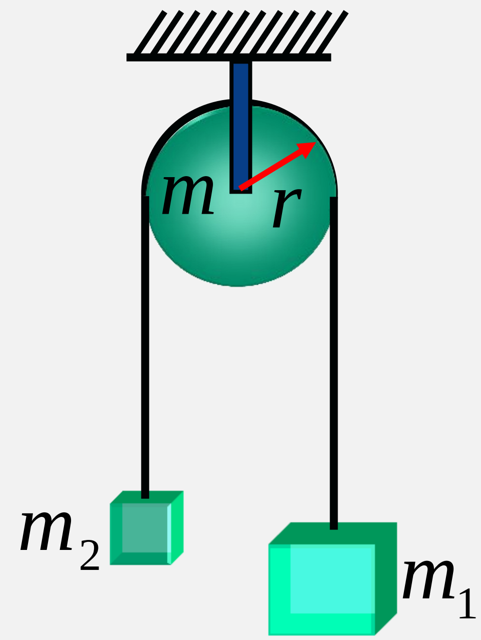
两者区别?



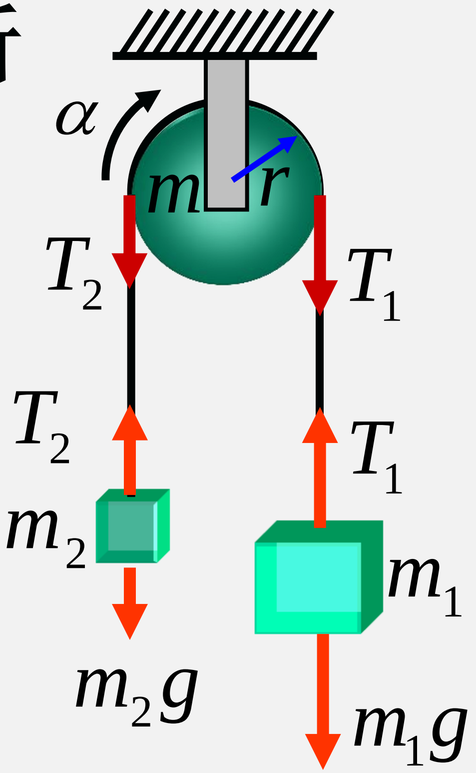
$$\therefore \alpha = \frac{mgr}{J + mr^2} = \frac{98\times 0.2}{0.5+10\times 0.2^2} = 21.8\ \mathrm{rad/s^2}$$

例2 一定滑轮质量为 m，半径为 r，不能伸长的轻绳两边分别系 m_1 和 m_2 的物体挂于滑轮上，$m_1 > m_2$，绳与滑轮间无相对滑动。设轮轴光滑无摩擦，滑轮的初角速度为零。

求:滑轮转动角速度随时间变化的规律。



解: 以 m_1, m_2, m 为研究对象,受力分析



m_1:　$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$

m_2:　$T_2 - m_2 g = m_2 a_2$

滑轮 m:　$T_1 r - T_2 r = J\alpha = \frac{1}{2} m r^2 \alpha$

$$a_1 = a_2 = a = r\alpha$$

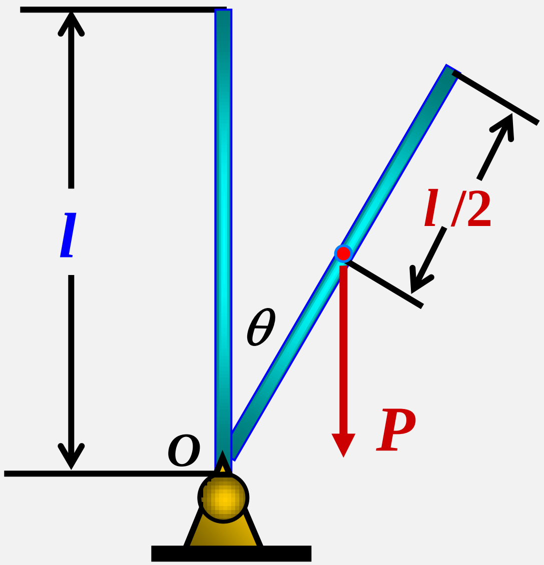
$$\alpha = \frac{(m_1 - m_2)g}{\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m\right)r}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

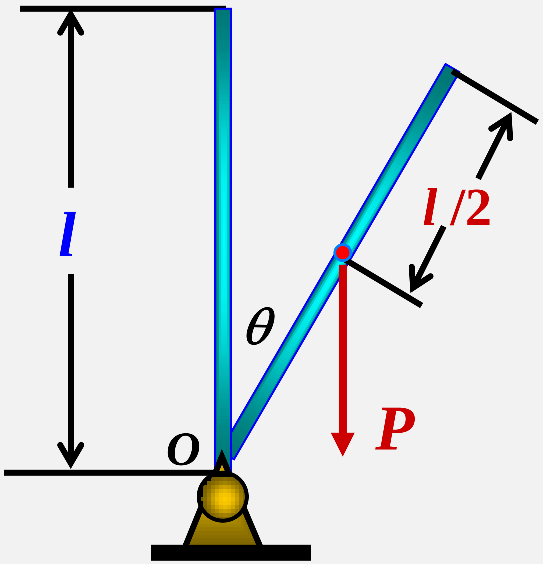
$$= \frac{(m_1 - m_2)gt}{\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m\right)r}$$

例3一根长为l、质量为 m 的均匀细直棒, 其一端有一固定的光滑水平轴，因而可以在竖直平面内转动。最初棒静止在竖直位置，由于微小扰动, 在重力作用下由静止开始转动。

求:它由此下至摆角θ时的角加速度和角速度。



解: 取棒为研究对象，棒下摆为加速过程, 外力矩为重力对O的力矩。重力作用在棒重心, 当棒处在下摆θ角时, 重力矩大小为:



$$M = \frac{1}{2} mgl \sin\theta$$

重力对整个棒的合力矩与全部重力集中作用在质心所产生的力矩一样。

棒绕轴O的转动惯量为:

$$J = \frac{1}{3} ml^2$$

$$\because \quad M = J\alpha$$

$$\boxed{M = \frac{1}{2} mgl\sin\theta} \quad \boxed{J = \frac{1}{3} ml^2}$$

棒处于θ角时：$\alpha = \dfrac{M}{J} = \dfrac{\frac{1}{2} mgl\sin\theta}{\frac{1}{3} ml^2} = \dfrac{3g\sin\theta}{2l}$

而 $\alpha = \mathrm{d}\omega / \mathrm{d}t$ 作变换：$\boxed{\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\omega}$

$$\omega\mathrm{d}\omega = \alpha\mathrm{d}\theta = \frac{3g}{2l}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

两边积分：$\displaystyle\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega = \int_0^{\theta}\frac{3g}{2l}\sin\theta\mathrm{d}\theta$

角速度：$\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$

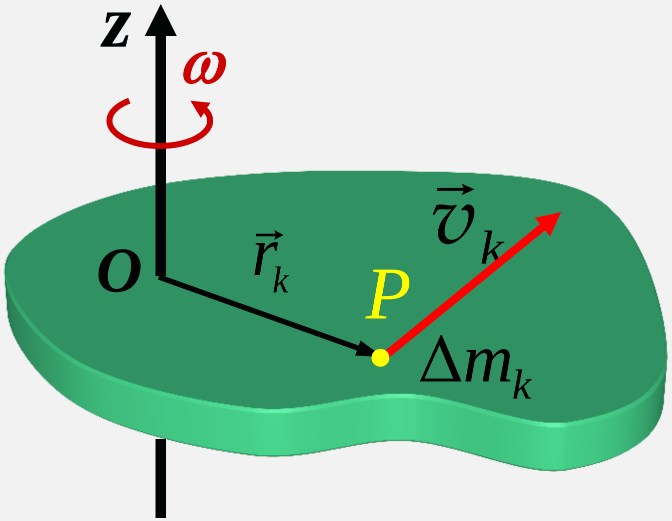
CONTENTS

- 5.1 刚体和刚体的基本运动
- 5.2 力矩 刚体绕定轴转动微分方程
- **5.3 绕定轴转动刚体的动能 动能定理**
- 5.4 动量矩和动量矩守恒定律

5.3 绕定轴转动刚体的动能　动能定理

➢ 定轴转动刚体的动能

$$\begin{cases} \Delta m_1, \Delta m_2, \cdots, \Delta m_k, \cdots, \Delta m_N \\ \vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_k, \cdots, \vec{r}_N \\ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_k, \cdots, \vec{v}_N \end{cases}$$



Δm_k的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}\Delta m_k v_k^{\ 2} = \frac{1}{2}\Delta m_k r_k^{\ 2}\omega^2$$

刚体的总动能

$$E = \sum E_k = \sum \frac{1}{2} \Delta m_k r_k{}^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum \Delta m_k r_k{}^2 \right) \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} J \omega^2$$

质点的动能

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

绕定轴转动刚体的动能等于刚体对转轴的转动惯量与其角速度平方乘积的一半。

➢ 力矩的功

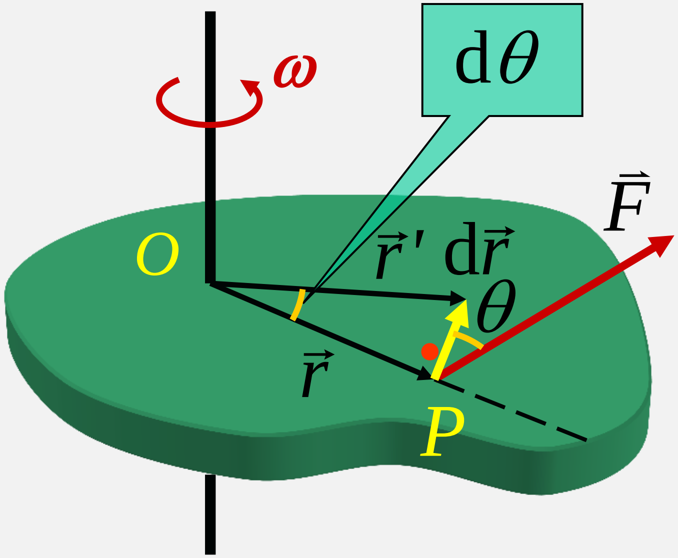
力的空间累积过程 —力矩的空间累积效应。

根据功的定义

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\theta\,\mathrm{d}s$$

$$= F_{\tau} r\,\mathrm{d}\theta = M\mathrm{d}\theta$$

（力矩做功的微分形式）



对一有限过程

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta \xrightarrow{\text{若 } M = C} A = M(\theta_2 - \theta_1)$$

- 合力矩的功

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}(\sum_i M_i)\mathrm{d}\theta=\sum_i\int_{\theta_1}^{\theta_2} M_i\mathrm{d}\theta=\sum_i A_i$$

- 力矩的功就是力的功。
- 绕定轴转动的刚体的内力矩作功之和为零。
- 力矩的功率

$$p=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=M\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=M\omega$$

力矩的功率可以写成力矩与角速度的乘积。

➢ 绕定轴刚体的动能定理（合力矩功的效果）

元功 $\mathrm{d}A = M\mathrm{d}\theta$

$$M = J\alpha = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}A = M\,\mathrm{d}\theta$$

$$= (J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}\theta = J\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\omega = J\omega\mathrm{d}\omega$$

$$= \mathrm{d}(\frac{1}{2}J\omega^2) = \mathrm{d}E_k$$

对于一有限过程

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}A=\int_{\omega_1}^{\omega_2}\mathrm{d}(\frac{1}{2}J\omega^2)$$

$$=\frac{1}{2}J\omega_2^{\ 2}-\frac{1}{2}J\omega_1^{\ 2}$$

即 $$A=E_{k2}-E_{k1}$$

绕定轴转动刚体的**动能定理:**

绕定轴转动刚体在任一过程中动能的增量,等于在该过程中作用在刚体上所有外力矩所作功的总和。

- 质点系动能变化取决于所有外力做功及内力做功。（质点系的动能定理）

刚体是质点系，为什么我们忽略内力做功？

- 刚体的内力做功之和为零。

- 刚体动能的增量，等于外力矩的功。

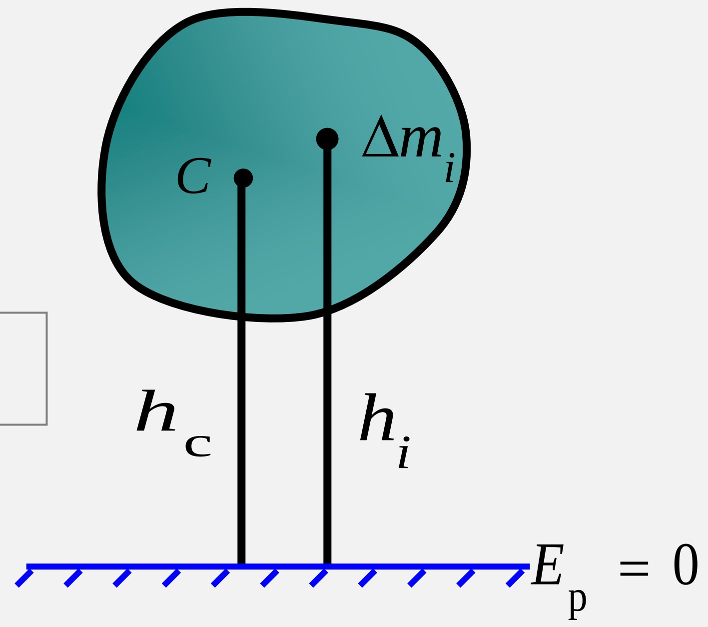
➢ 刚体的机械能

刚体重力势能

$$E_p = \sum \Delta m_i g h_i$$

$$= mg\frac{\sum \Delta m_i h_i}{m} = mgh_c$$

质心的势能

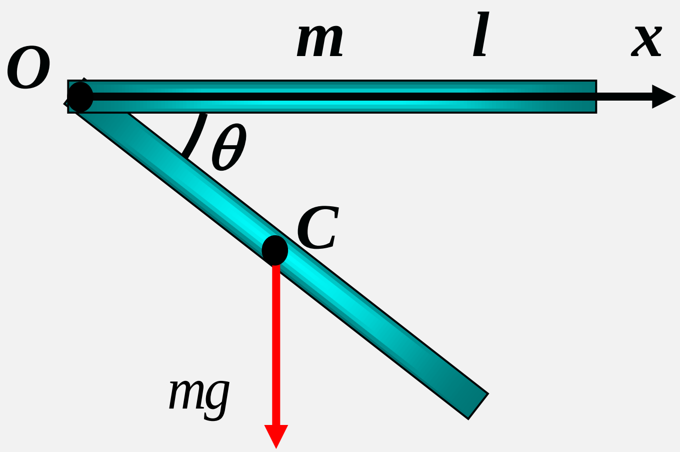


定轴转动刚体的机械能 $E = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgh_c$

对于包括刚体的系统，功能原理和机械能守恒定律仍成立。

例1 长为 l ,质量为 m 的均匀细直棒，可绕轴 O 在竖直平面内转动, 初始时它在水平位置。

求 它由此下摆 θ 角时的 ω 。



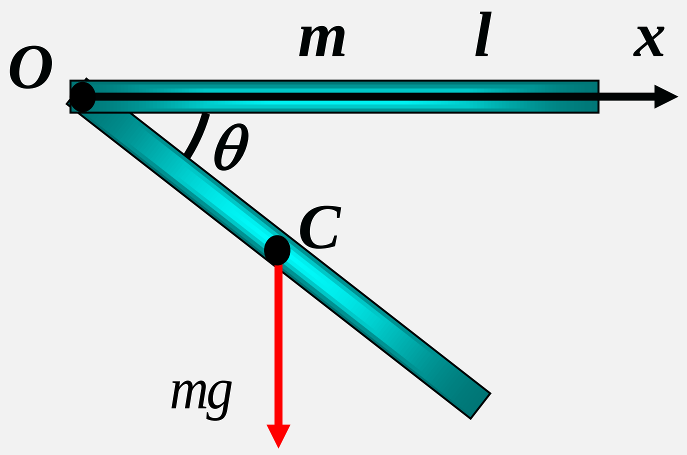
解 $$M=\frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

由动能定理

$$A=\int_0^\theta M\mathrm{d}\theta=\int_0^\theta \frac{l}{2}mg\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{lmg}{2}\sin\theta-0 \quad =\frac{1}{2}J\omega^2-0$$

而 $J=\frac{1}{3}ml^2$



$$\frac{lmg}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\omega^2=\frac{3g\sin\theta}{l}\qquad \omega=\left(\frac{3g\sin\theta}{l}\right)^{1/2}$$

此题也可用机械能守恒定律方便求解。

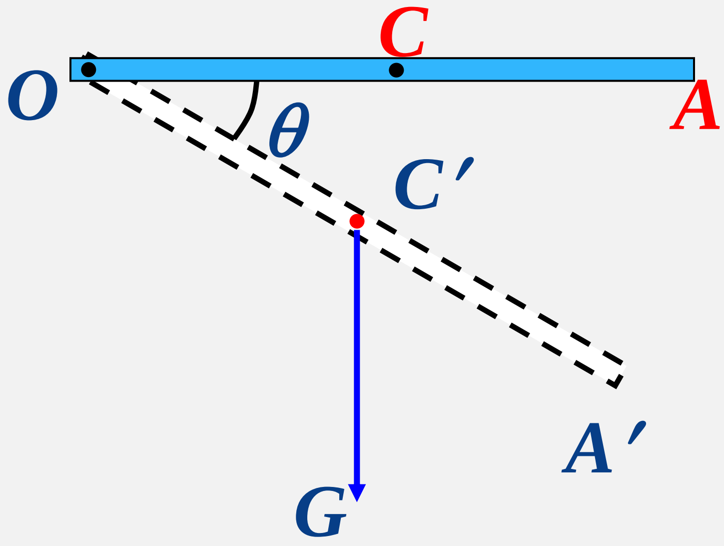
方法二：

细棒＋地球, 系统机械能守恒

选定末状态时重力势能为势能零点。

水平位置：
$$E_1 = E_{P1} + E_{k1} = \frac{1}{2} mgl \sin\theta$$

末状态位置：

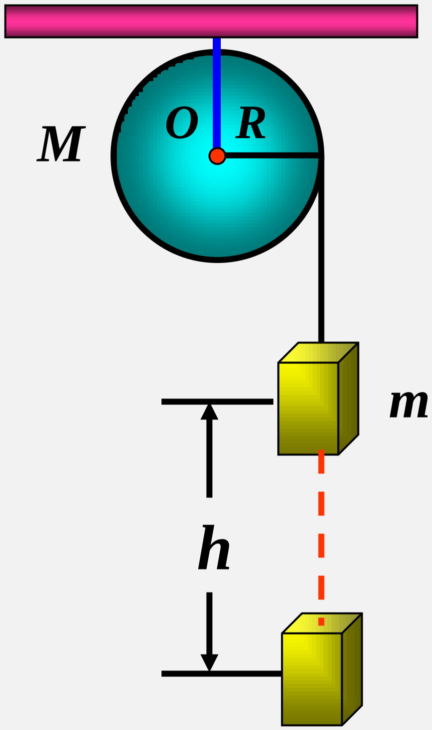


$$E_2 = E_{P2} + E_{k2} = \frac{1}{2} J\omega^2,$$

$$\Rightarrow mg\frac{l}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\therefore \omega = \sqrt{3g\sin\theta / l}$$

例2 一个质量为M，半径为 R 的定滑轮 (当作均匀圆盘) 上面绕有细绳，绳的一端固定在滑轮边上，另一端挂一质量为m的物体而下垂。忽略轴处摩擦。



圆盘对中心轴的转动惯量

$$J = \frac{MR^2}{2}$$

求 物体 m 由静止下落高度 h 时的速度。

解 圆盘受力矩 $F_T R$ 作用

利用刚体的动能定理，得

$$\int_{\theta_0}^{\theta} F_T R \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$$

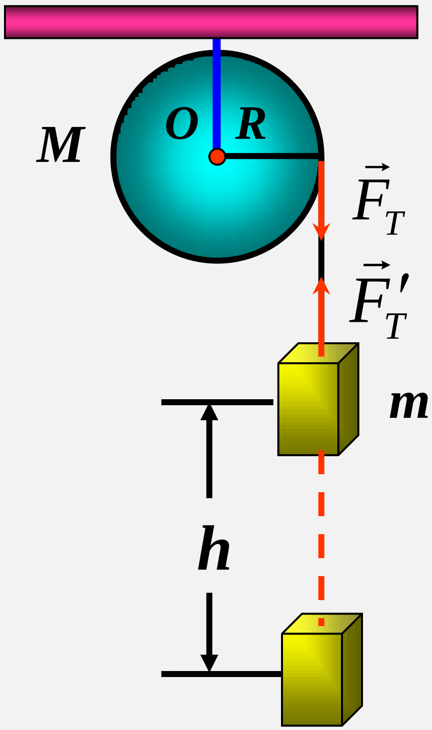
绳与圆盘间无相对滑动 $v = R\omega$

$$\because v_0 = 0 \quad \omega_0 = 0$$

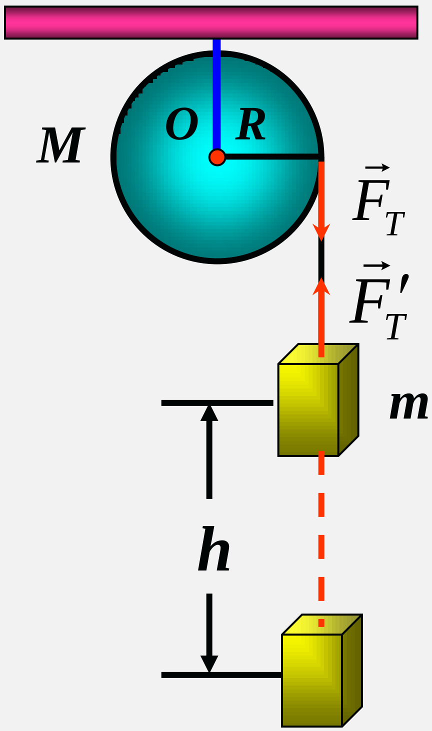
由质点的动能定理：

$$mgh - R\int_{\theta_0}^{\theta} F_T \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{m}{m + J/R^2}2gh} = 2\sqrt{\frac{mgh}{M+2m}}$$



解法2. 根据机械能守恒定律



$$mgh = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = R\omega$$

$$v = 2\sqrt{\frac{mgh}{M+2m}}$$

THANKS

FOR YOUR ATTENTION