第一章

函数 极限 连续

(习题课)

4. 设 $f(x)=\begin{cases}0, x<0\\1, x\geq 0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|<1\\|x|-2, & 1\leq|x|<3\end{cases}$,

求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

解: $f(x)=\begin{cases}0, x<0\\1, x\geq 0\end{cases} \rightarrow f[g(x)]=\begin{cases}0, g(x)<0\\1, g(x)\geq 0\end{cases}$

$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|<1\\|x|-2, & 1\leq|x|<3\end{cases} \rightarrow \begin{cases}g(x)<0 \rightarrow 1\leq|x|<2\\g(x)\geq 0 \rightarrow |x|<1 \text{ 或 } 2\leq|x|<3\end{cases}$

$\rightarrow f[g(x)]=\begin{cases}0, & 1\leq|x|<2\\1, & |x|<1\text{或}2\leq|x|<3\end{cases}$.

接4.

解: $$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|<1\\ |x|-2, & 1\le|x|<3\end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f^2(x), & |f(x)|<1\\ |f(x)|-2, & 1\le|f(x)|<3\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}|f(x)|<1 \longrightarrow x<0\\ 1\le|f(x)|<3 \longrightarrow x\ge 0\end{cases}$$

$$\longrightarrow g[f(x)]=\begin{cases}2-f^2(x), & x<0\\ |f(x)|-2, & x\ge 0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$$

$$\longrightarrow g[f(x)]=\begin{cases}2, & x<0\\ -1, & x\ge 0\end{cases}$$

题组二：极限

1. 设 $a>0$ 且 $x_1>0$, $x_{n+1}=\frac{1}{4}(3x_n+\frac{a}{x_n^3})(n=1,2,3,\cdots)$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解: 先证明数列的极限存在.

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}(x_n+x_n+x_n+\frac{a}{x_n^3})\geq\frac{1}{4}\cdot 4\cdot\sqrt[4]{x_n\cdot x_n\cdot x_n\cdot\frac{a}{x_n^3}}=\sqrt[4]{a}$$

$\Downarrow$

x_n 有下界.

$\cdots\leq x_{n+1}\leq x_n\leq\cdots\leq x_1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{4}(3+\frac{a}{x_n^4})$$

$$x_n\geq\sqrt[4]{a}$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n}\leq\frac{1}{4}(3+\frac{a}{a})=1$$

接1.

再求数列的极限值.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A$，则

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}(3x_n + \frac{a}{x_n^3})$$

得 $$A = \frac{1}{4}(3A + \frac{a}{A^3})$$

解得 $$A = \sqrt[4]{a}$$

即 $$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[4]{a}.$$

2. 设 $a_n > 0$， 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1$，证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

解: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ 可知，$\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, N > 0$，当$n > N$时，

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| < \varepsilon \;\longrightarrow\; r - \varepsilon < \underline{\frac{a_{n+1}}{a_n} < r + \varepsilon}$$

取 $\varepsilon > 0$， 使 $1 > r + \varepsilon \overset{\text{记为}}{=\!=} q$

$$\longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$$

$$\longrightarrow \underline{0 <} a_{n+1} < q a_n < q^2 a_{n-1} < \cdots \underline{< q^n a_1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

解: 设 $t=\dfrac{1}{x}\to+\infty\ (x\to 0^+)$

于是 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{[t]}{t}$

因 $t-1<[t]\le t$

故 $t>0$时, $1\leftarrow\dfrac{t-1}{t}<\dfrac{[t]}{t}\le 1\quad (t\to+\infty)$

因此 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{[t]}{t}=1=\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$

4. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}[\sin x\tan\dfrac{1}{x}+\dfrac{(2x+1)^5(x+3)^{10}}{(x-5)^{15}}]$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(\sin x\cdot\tan\dfrac{1}{x})+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^5(x+3)^{10}}{(x-5)^{15}}$

$$=0+2^5 \quad =2^5$$

5. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}}_{\text{有界量}}\cdot\sin\underbrace{\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}}_{\text{无穷小量}}=0$$

6. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}$.

解: $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sim \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x\to 0)$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}{(\sqrt{1+\sin x})^2-(\sqrt{1-\sin x})^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}{2\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{2\sqrt{1-x^2}}=1.$$

7. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x\ln(1-2x^2)}$.

解: $\ln(1-2x^2) \sim -2x^2 \quad (x\to 0)$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}{x(-2x^2)}$$

$$\boxed{e^{\tan x-\sin x}-1 \sim \tan x-\sin x \quad (x\to 0)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(\tan x-\sin x)}{-2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\tan x(1-\cos x)}{-2x^3}$$

$$\boxed{\tan x \sim x,\quad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad (x\to 0)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}x}{-2x^3}\cdot\frac{x^2}{2} \quad =-\frac{1}{4}.$$

8. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{1+\cos\pi x}+\dfrac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right]$.

解:

$$\text{原式}=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{1+\cos\pi x}}_{(1)}+\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}}_{(2)}$$

$$(1)\text{ 式}=\lim_{x\to 1}\frac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\,[1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2]}{(1+\sqrt{x})\,[1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2](1+\cos\pi x)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1-x)}{(1+\sqrt{x})[1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2](1+\cos\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{6}\frac{(1-x)^2}{1+\cos\pi x}$$

$$\xlongequal{\boxed{t=x-1}}\lim_{t\to 0}\frac{1}{6}\frac{t^2}{1-\cos\pi t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{6}\frac{t^2}{\frac{1}{2}(\pi t)^2}=\frac{1}{3\pi^2}.$$

接8.

(2) 式 $= \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

因此　原式 $= \dfrac{1}{3\pi^2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$.

解:

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & |x|<1\\ \infty, & |x|>1\\ 0, & x=-1\\ \infty, & x=1\end{cases}.$$

10. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$. 求常数 a , b .

解:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}$$

所以 $1-a=0, a+b=0$

故 $a=1$, $b=-1$.

11. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x-1}$ 存在，求常数 a 及其极限值.

解: 因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$,

所以 $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-ax^2-x+4)=4-a=0$

即 $a=4$

这样 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2-x+4}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}(x^2-3x-4)=-6 .$$

题组三：连续

1. 讨论函数的连续性，若有间断点判断其类型.

(1) $f(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\Big/\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)$

解： $f(x)=\frac{x(x-1)}{x(x+1)}=\frac{x-1}{x+1}$

间断点为：$x=0$, $x=1$, $x=-1$.

其中 $x=0$, $x=1$ 为可去间断点,

$x=-1$ 为无穷间断点.

(2) $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$

解: $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(1+\dfrac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}} = e^{\frac{x}{\sin x}}$

间断点为：$x=0$，$x=n\pi \quad (n=\pm1,\pm2,\cdots)$

其中 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=e$， $\lim\limits_{x\to n\pi^-} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to n\pi^+} f(x)=\infty$

所以 $x=0$ 是第一类间断点，

$x=n\pi$ 是第二类间断点.

(3) $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2}x, & |x|\le 1\\ |x-1|, & |x|>1\end{cases}$

解:

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x>1\\ 1-x, & x<-1\\ \cos\frac{\pi}{2}x, & -1\le x\le 1\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=2$,

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$,

所以 $x=-1$ 为跳跃间断点.

(4) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-xe^{nx}}{x+e^{nx}}$

解:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-xe^{nx}}{x+e^{nx}}=\begin{cases}-x\ , & x>0\\ 1\ , & x=0\\ \dfrac{1}{x}\ , & x<0\end{cases}$$

显然 $x=0$ 为第二类间断点.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} a+\arccos x, -1<x<1 \\ b \quad , \quad x=-1 \\ \sqrt{x^2-1} \quad , \quad x<-1 \end{cases}$ ，试确定常数 a , b ,

使 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续.

解: $f(-1)=b$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=a+\pi$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=0$,

要使 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续，需有

$$f(-1)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^-} f(x)$$

即 $b=a+\pi=0$

故 $b=0$ ， $a=-\pi$.

4. 试证:方程$x\tan x + 2x^2 = \frac{\pi}{4}$在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内至少有一实根.

解: 设 $f(x) = x\tan x + 2x^2 - \frac{\pi}{4}$，则它在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上连续.

又知 $f(0) = -\frac{\pi}{4} < 0$, $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{8} > 0$,

由零点定理知，至少存在一点 $\xi \in (0, \frac{\pi}{4})$ 使 $f(\xi) = 0$.

而 $(0, \frac{\pi}{4}) \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，因此方程在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

内至少有一实根.

6. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内非负连续,且 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$,

证明:在 (a,b) 内必有 ξ, 使 $f(\xi)=\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}$.

解: 不妨假设 $x_1<x_2<\cdots<x_n\in(a,b)$,

因为 $f(x)$ 在 (a,b) 内非负且连续 ,

所以 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 内非负且连续 .

由闭区间上连续函数的最值定理得:

在该区间上一定存在最大值 M 和最小值 m .

记 $f(\xi_1)=m$, $f(\xi_2)=M$, 于是有

$$m\le f(x_i)\le M \qquad x_i\in\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$$

所以 $m^n\le f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\le M^n$

$$m^n \le f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) \le M^n$$ 接6.

$$f(\xi_1) = m \le \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)} \le M = f(\xi_2)$$

当 $m = M$ 时，$f(x)$ 是常函数，x_1, x_n 之间的任何值即可。

当 $m \ne M$ 时，

由介值定理知，一定存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$

使 $f(\xi) = \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}$

作业

P75　4 (1) , (4) ;　5 ;　8 ;

9 (2) , (3) , (6) ;

10;　11 ;　12 ;　13