

## §10.1 电荷 库仑定律

### 一、电荷的基本性质

1. 同性相斥，异性相吸；
2. 电量量子化（最小带电量为电子电量  $e=1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ ）；
3. 电荷守恒定律：在一个封闭系统内，不论进行怎样的变化过程，系统内正、负电荷量的代数和保持不变。

### 二、库伦定律

1. 点电荷模型：电荷自身线度  $d \ll$  两电荷之间距离  $r$
2. 库伦定律：

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}^0$$

其中  $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$  为真空电容率。

- (1) 自动包括同性相斥、异性相吸的结果；
- (2) 符合牛顿第三定律  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ 。

## §10.2 电场 电场强度

### 一、电场



电场的传播速度为光速。

试验电荷：为不干扰源电荷产生的电场，在是点电荷的基础上，还要求带电量很小。

### 二、电场强度

#### 1. 电场强度的定义：

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0}$$

电场中某点电场强度的大小等于单位电荷在该点受力的大小，其方向为正电荷在该点受力的方向。反过来，带电量为  $q_0$  的物体在电场  $E$  中收到的力为  $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ 。

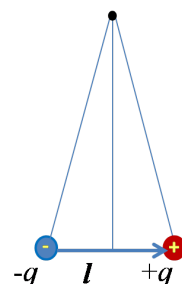
#### 2. 点电荷的电场强度公式

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}^0$$

3. **电场强度叠加原理**：对于点电荷系，总电场强度为每一个点电荷单独在该点产生的电场强度的矢量和。

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

4. **电偶极子**：两个大小相等的正负电荷  $+q$  和  $-q$ ，当两者之间的距离较所考察的场点到它们的距离小得多时，这个电荷系统就称为电偶极子， $\vec{p} = q\vec{l}$  为**电偶极**



矩（其中 $\vec{l}$ 表示从负电荷指向正电荷的矢量）。

5. 对于连续带电体，取电荷元视作点电荷，总场强为

$$\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{r}^0$$

一维带电体：  $dq = \lambda dl$ ；二维带电体：  $dq = \sigma ds$ ；三维带电体：  $dq = \rho dV$ 。



### ★用叠加原理求解电场强度

必看例题：10.4，10.6

解题步骤：

（1）建立适当坐标系，在带电体上取电荷元  $dq$ ；

（2）写出电荷元在所求点的电场强度  $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{r}^0$ （其中  $r$  为电荷元到所求点的距离）；

（3）对  $d\vec{E}$  进行矢量分解，  $d\vec{E} = dE_x \vec{i} + dE_y \vec{j} + dE_z \vec{k}$ ；（注：在做这一步的时候，要先对所求带电体进行对称分析，判断是否有积分后为 0 的分量。）

（4）对每一个分量进行积分  $E_i = \int dE_i$ ，  $i = x, y, z$ ，得出总场强

$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$ 。（注：在积分的时候，要注意观察题目给出的上下限，然后进行变量代换以便求积分，尤其注意线段  $dx$  或者  $dr$  和角  $d\theta$  之间的代换。对于直线型题目，如果题目给出的上下限是与  $x$  相关，则直接进行积分；如果是与  $\theta$  相关，则利用三角函数关系将  $x$  与  $\theta$  对应。对于圆周型题目，通常都用  $dr = R d\theta$  来进行代换。）

例 10.4，10.6，作业题 10.4，10.9 为典型题。

对于二维题目，需要利用一维题目的结果再进行一次积分。例 10.5，作业题 10.5，10.6，10.12 为典型题。为节省时间，也可记住几种常见带电体的电场强度（课本 P12）

均匀带电细圆环轴线上一点：  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$

无限大平面：  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

无限长直导线：  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}$

### §10.3 电通量 高斯定理

#### 一、电场线

1. 描述电场的人为画出的线；2. 切向对应电场方向，疏密对应电场大小；3. 起于正电荷终于负电荷；4. 不会在没有电荷的地方中断或相交，不会形成闭合曲线。

#### 二、电通量

定义：通过电场中某一个面的电场线总数叫做通过这个面的电场强度通量，用  $\Phi_e$  表示。

$$\Phi_e \equiv \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

为标量，有正负。对应封闭曲面，定义向外的方向为正。

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



#### 三、高斯定理

内容：在任何静电场中，通过任一闭合曲面的电通量等于这闭合曲面所包围的自由电荷的代数和乘以  $1/\epsilon_0$ 。

分立源电荷：

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{内}} q_i$$

连续源电荷：

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \frac{1}{\epsilon_0} \rho dV$$

#### ★用高斯定理求解电场强度

必看例题：10.8，10.10，10.11

解题步骤：

- (1) 分析带电体的对称性；
- (2) 过所求点，做适当的高斯面；
- (3) 计算高斯面内包含的电荷代数和；
- (4) 根据高斯定理，求出电场强度。

思路：先进行对称性分析是要找到电场强度大小相同的面作为高斯面（或者其一部分），以便于积分时将  $E$  提出。而这种  $E$  都相等的面的法线方向通常与电场强度向同，因此有  $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E dS = E \int_S dS$ 。若此时面还不封闭，再找到面法线方向与  $E$  垂直的面（电通量为 0）将它补齐就行。因此可得

$$E = \frac{\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV}{\int_S dS}$$

其中  $\int_V \rho dV$  不难算，对于均匀带电物体为  $\rho \int_V dV$ ， $\int_S dS$  则为该面的面积，也不难算，根据它们可以简单求得电场强度  $E$ 。

其实对称性是一条非常强的要求，能用高斯定理求解的模型并不多，下面进行具

体分析。

### (1) 球对称性

均匀带电球体，球壳，或者同心组合等。不管什么样子，其电场强度的方向都沿着球的径向，高斯面通常都取半径为  $r$  的同心球面，面上电场强度相同，且面的法线方向与电场强度方向相同，则有

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E \times 4\pi r^2$$

因此电场强度为

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \text{ 不同区域中 } \int_V \rho dV \text{ 不同, 因此需要根据题目给出的已知球}$$

半径进行分段讨论。例 10.9, 10.11 为典型题。

### (2) 轴对称性

无限长带电直导线，无限长圆柱体，圆柱面，或者同轴组合等。不管什么样子，其电场强度都沿着同轴圆柱的径向。高斯面通常都取半径为  $r$ ，长为  $l$  的同轴圆柱体，则在圆柱的侧面上电场强度大小相等且方向与侧面法线相同，则有

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E dS = E \int_S dS = E \times 2\pi r l$$

而由于圆柱的上下底与电场强度方向一致（法线与  $E$  垂直），因此电通量为 0。则有

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{上下}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{侧}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 + E \int_{\text{侧}} dS = E \times 2\pi r l$$

因此电场强度为

$$E \times 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \text{ 不同区域中 } \int_V \rho dV \text{ 不同, 因此需要根据题目给出的已知圆}$$

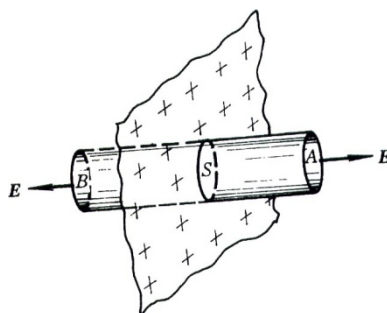
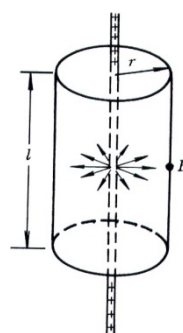
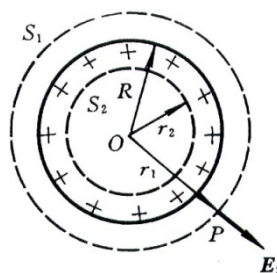
柱半径进行分段讨论。例 10.8, 作业题 10.22 为典型题。

### (3) 无限大均匀带电面

无限大均匀带电薄面，或有一定厚度的无限大均匀带电面等。无论是哪种，其电场强度都是沿着与面垂直的方向（带正电指向外侧，带负电则反向）。高斯面通常先在面的左右各取一个与面（对于有厚度的面，则是与中心面）距离相等的点 A 和 B，再以这两个点为圆心在与平面平行的面上做面积为  $S$  的圆。由于通过这两个圆的电场强度都向外（电通量都为正）且都与它们垂直，并且在圆上的电场强度大小都相等，因此有

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E dS = E \int_S dS = E \times 2S$$

为了形成封闭曲面，再通过两个圆面做圆柱，由于其面的方向与电场强度方向相



同，则电通量为 0。因此有，

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{左右}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{侧}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \int_{\text{左右}} dS + 0 = E \times 2S$$

因此电场强度为

$$E \times 2S = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

这里对于薄面， $\int_V \rho dV = \sigma S$ ，则  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ；对于厚度为  $b$  的带电面，在面外有

$$E = \frac{b\rho}{2\epsilon_0}，\text{在面内有 } E = \frac{\rho x}{\epsilon_0} \text{ (} x \text{ 为待测点到中心面的距离)。例 10.10, 作业题 10.12}$$

为典型题。

## §10.4 静电场的环路定理 电势能

### 一、静电力的功 环路定理

由点电荷的电场强度公式可得

$$A_{ab} = \int q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

结论：静电力对试验电荷所做的功之与始末位置有关，与路径无关，为**保守场**。根据高斯定理和环路定理可知，**静电场是有源无旋场**。

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

**环路定理**：在静电场中，电场强度沿任一闭合路径的线积分（称为电场强度的环流）恒为零。

### 二、电势能

下面从功和能的角度来对静电场进行讨论。对比重力势能，引入**电势能**。

$$W_a = A_{a \rightarrow 0} = \int_a^{0} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电荷在电场中某点的电势能，在量值上等于把电荷从该点移动到电势能**零参考点**时，静电力所做的功。电势能与零参考点的选取有关。对于有限大物体，常选无穷远为零参考点；对于无限大物体，选特定点为零参考点。两点之间的电势能差则与零参考点的选取无关。

## §10.5 电势 电势差

### 一、电势 电势差

#### 1. 电势的定义

除去电势能中试验电荷的效应，得出电势的定义

$$u_a \equiv \frac{A_{a \rightarrow 0}}{q_0} = \int_a^{0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电场中某点的电势，量值等于把单位正电荷从该点沿任意路径移动到电势能零参

考点时静电力所做的功。电势是**标量**，只有大小没有方向。反过来，点电荷在场中某点的电势能为该点电势与电量的乘积。 $W_a = qu_a$

2. 电势差：

$$U_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电势差与零参考点无关。反过来，静电力对点电荷所做的功，等于电荷电量与移动始末位置电势差的乘积。 $A_{ab} = q(u_a - u_b)$ 。

电偶极子的电势能： $W = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

二、电势叠加原理

1. 点电荷的电势

$$u_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

前提：选无穷远为零参考点。

2. 电势叠加原理

$$u_a = \sum u_i$$

在点电荷系产生的电场中，某点的电势为每一个点电荷单独在该点产生的电势的代数和。

3. 连续带电体的电势

$$u_a = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$

### ★从电荷分布求电势

必看例题：10.15，10.16

解题步骤（其他具体细节可参考用叠加原理求电场强度的部分）：

（1）建立适当的坐标系，在带电体上选电荷元  $dq$ ；

（2）写出  $dq$  所产生电场中待测点的电势  $du = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$ ；

（3）（由于是代数和，不用进行矢量分解）直接进行积分得出总电势  $u = \int du$ 。

注：本方法使用前提是可选**无穷远为零参考点**，因此只适用于**有限大的带电体**，不适用于无限大的带电体。例 10.15，10.16，作业题 10.34 为典型题。

### ★从电场强度分布求电势

必看例题：10.17，10.18，10.19

解题步骤：

（1）分析对称性，用高斯定理求出电场强度；

（2）选择适当的零参考点，经过积分求出待测点的电势。

以下还是对于三种特殊情况进行具体讨论。

### (1) 球对称性

参考用高斯定理求解电场强度中的球对称性部分。用高斯定理求出电场强度分布后，为了使下一步积分不混淆，建议对于不同区域（按题目中给出的半径划分）中的电场强度进行**区别编号**（如  $r < R$  时用  $E_1$ ， $r > R$  时用  $E_2$ ）。由于带电体有限，通常**取无穷远为零参考点**（当然也可以取其他点作为零参考点），然后对于每一个区域进行分段积分。例 10.19，作业题 10.33 为典型题。

### (2) 轴对称性

参考用高斯定理求解电场强度中的轴对称性部分。同样的，用高斯定理求出电场强度分布后，为了使下一步积分不混淆，建议对于不同区域（按题目中给出的半径划分）中的电场强度进行**区别编号**（如  $r < R$  时用  $E_1$ ， $r > R$  时用  $E_2$ ）。这里由于带电体是无限长，**不能取无穷远为零参考点**，需要人为选择特定点（除无穷远以外，随意选即可），然后计算待测点与该点之间的电势差作为电势的最终结果（不管哪个区域，零参考点一旦选定就必须统一）。例 10.18，作业题 10.35 为典型题。

### (3) 无限大带电平面

首先系统是无限大，**不能取无穷远为零参考点**，需要人为的取特定点。由于在无限大带电平面系统中，面外的电场强度处处相同，因此电势只需要用电场强度乘以待测点与零参考点的距离即可；对于有厚度的面内部，则利用  $E = \rho x / \epsilon_0$  进行积分即可。

## §10.6 等势面

一、定义：电场中电势相等的点所构成的面，叫做等势面。等势面上的任一曲线叫做等势线。

二、性质：

(1) 电荷沿等势面移动，电场力不作功。

(2) 电场线与等势面正交。

(3) 电场线的方向指向电势降落的方向。因沿电场线方向移动正电荷时场力做正功，电势能减少。

(4) 等势面的疏密程度同样可以表示场强的大小

规定：在画等势面时，电场中任意两相邻等势面之间的电势差相等。因此，等势面较密集的地方，场强较大。等势面较稀疏的地方，场强较小。

## §10.7 静电场中的导体 电容

一、导体的静电平衡

当导体内部和表面上任何一部分都没有宏观电荷运动，称导体处于**静电平衡**状态。

二、静电平衡条件

1. 导体内部场强为零  $\vec{E}_{\text{内}} = 0$ （否则还会有电荷移动）；导体表面场强方向与表面垂直（若存在切向分量的话电荷还会移动） $\vec{E}_{\text{表}} \perp \text{表面}$ ；

帮助记忆：想象小河豚是个导体，刺代表电场（或电场线）。



肚子里面没有刺， $\vec{E}_{\text{内}} = 0$ ；表面上的刺与表面垂直， $\vec{E}_{\text{表}} \perp \text{表面}$ 。

2. 导体是等势体，导体表面为等势面。

3. 当导体达到静电平衡时，电荷都分布在导体表面上，内部各处的净电荷为零。

三、静电平衡时导体表面附近的场强与表面电荷的关系

由高斯定理可得

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

其中 $\vec{n}$ 为表面法线方向。

四、孤立导体的电容

根据点电荷的电势公式，去掉外部量 $q$ ，可给出**电容的定义**。

$$C \equiv \frac{Q}{u}$$

孤立导体所带的电量与其电势的比值叫做孤立导体的电容，即使导体升高单位电势所需的电量。电容是导体本身的一种性质，与导体是否带电无关；是反映导体储存电荷或电能的能力的物理量；只与导体本身的性质有关。

五、电容器的电容

定义：由彼此绝缘相距很近的两导体构成电容器，使两导体极板带等量异号电荷 $\pm Q$ ，两导体之间电势差为 $U_1 - U_2$ ，则电容器的电容为，

$$C = \frac{Q}{U_1 - U_2}$$

**计算电容的一般步骤为：**（1）假设电容器的两极板带有等量异号电荷；（2）求出两极板之间的电场强度的分布；（3）计算两极板之间的电势差；（4）根据电容器电容的定义求得电容。

$$Q \longrightarrow E \xrightarrow{U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}} U \xrightarrow{C = Q/U} C$$

1. 平行板电容器  $C = \frac{q}{U_{AB}} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$

2. 球形电容器  $C = \frac{q}{U_{12}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

3. 柱形电容器  $C = \frac{q}{U_{AB}} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(R_B/R_A)}$

六、电容器的串并联

1. 电容器的串联  $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$



当几个电容器串联时，其等效电容的倒数等于几个电容器电容的倒数之和；等效电容小于任何一个电容器的电容，但可以提高电容的耐压能力。

2. 电容器的并联  $C = \sum_i C_i$

当几个电容器并联时，其等效电容等于几个电容器电容之和；各个电容器的电压相等，耐压程度不改变；并联使总电容增大。

对比记忆：串并联的规律刚好与电阻相反。

使用串联可以提高耐压能力；使用并联可以提高容量。

## §10.8 静电能

### 一、电容器中储存的静电能

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2$$

### 二、静电场的能量密度（单位体积内的能量）

$$w_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

## §10.9 电介质的极化 束缚电荷

### 一、电介质

电介质是指在通常条件下导电性能极差的物质。它的分子中正负电荷结合得比较紧密，几乎没有自由电荷。人们一般把电介质视为**绝缘体**，但在**电场作用下的电极化**是它的一个重要特性。

### 二、电介质对电容的影响 相对介电常数

#### 1、电介质对电容器电容影响

平行板电容器充电后断开电源，使两极板上的电量维持恒定，在两极板间注满各向同性的均匀电介质，再测电容器两极板间的电势差  $U$ ，发现其减小至  $U_0$  的  $1/\epsilon_r$ 。

$$U = \frac{1}{\epsilon_r} U_0 \quad (\text{观测结果})$$

则有

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_0}{U_0 / \epsilon_r} = \epsilon_r C_0$$

极板间充满电介质所电容器的电容为真空电容的  $\epsilon_r$  倍。

#### 2、电介质的相对电容率和电容率

$\epsilon_r$ ：相对介电常数（相对电容率）； $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  介电常数（电容率）。

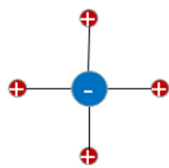
### 三、电介质的极化

电介质的极化：电介质在外场作用下表面上电荷出现两极分化的过程。

**束缚电荷**：不能在电介质内自由移动，也不能离开电介质表面的电荷。

#### 1. 电介质的分类

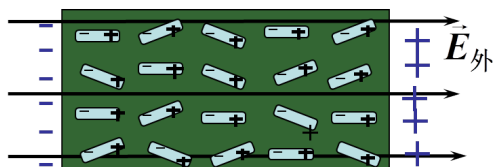
无极分子



有极分子



无论是无极分子（位移极化）还是有极分子（取向极化），在极化过程中都以电偶极子的形式受到外场的作用，并在外场作用下统一方向，在与外场垂直的表面上形成束缚电荷。

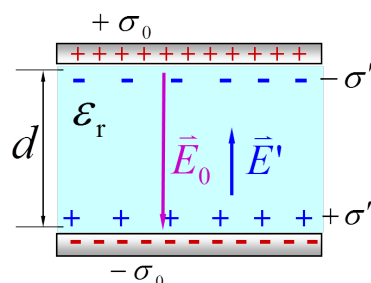


## §10.9 电介质内的电场强度

一、电介质中的电场强度

$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\epsilon_0}$$

电介质内部的合电场强度  $E$  总是小于自由电荷产生的电场强度  $E_0$ 。



二、极化电荷面密度  $\sigma'$  与自由电荷面密度  $\sigma_0$  的关系

$$\sigma' = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \sigma_0$$

## §10-11 电位移矢量 电介质中的高斯定理

一、有电介质时的高斯定理

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\epsilon_0} S$$

根据极化电荷和自由电荷的关系

$$\oiint_S \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sigma_0 S = Q_0$$

电位移矢量定义

$$\boxed{\vec{D} \equiv \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}}$$

介质中的高斯定理

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0}$$

在静电场中，通过任意一个闭合曲面的电位移矢量通量等于该面所包围的自由电荷的代数和。