如何学习线性代数？

1. 认识线性代数的重要性, 培养浓厚的学习兴趣

索菲娅·格梅茵
(德国数学家)

代数不过是书写的几何,
而几何不过是图形的代数.

线性代数在现代科学技术中的作用不可忽视

2. 学数学最好的方式是做数学

华罗庚

聪明在于学习，天才在于积累.
学而优则用，学而优则创.
由薄到厚，由厚到薄.

线性代数知识体系

线性方程组

向量空间 → 线性空间 $\xrightarrow{\text{二次型}}$ 内积空间

矩　阵 → 线性变换 → 正交变换

行列式　刻画方阵是否可逆的一个重要指标

第一章 行列式

行列式是线性代数的重要工具.

本章基本要求:

1) 了解 n 阶行列式的概念,掌握其性质;

2) 会计算行列式 ;

3) 会用克拉默(Cramer) 法则.

§1　二、三阶行列式

一. 二元线性方程组与二阶行列式

二. 三阶行列式的定义

行列式是研究线性代数的一个工具，它的初期是为求线性方程组而引进的。

本节主要讨论行列式的概念。

一、二阶行列式

首先考察用消元法求解二元一次方程组，从中引出二阶和三阶行列式的概念，然后把这些概念推广，得出高阶行列式的概念。

二元线性代数方程组解的公式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 分别表示未知数的系数，简记为

$a_{ij}(i=1,2. \quad j=1,2).$ a_{ij} 下标 i, j分别表明是 i个方程中

第 j 个未知数x_j的系数；b_1, b_2 表示常数项。

例如：a_{21} 表示方程组中第二个方程，

第一个未知数x_1的系数。

二元线性代数方程组解的公式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

解: 用高斯消去法 $(1)-(2)\dfrac{a_{12}}{a_{22}}$

$$(a_{11} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{22}})x_1 = (b_1 - b_2\frac{a_{12}}{a_{22}}) \qquad x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$(2)-(1)\frac{a_{21}}{a_{11}}$$

$$(a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}})x_1 = (b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}}) \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

二元线性代数方程组解的公式中

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2) \end{cases}$$

解: 当分母 $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，

方程组得唯一解：

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

由于 x_1, x_2 的表达式只依赖系数和常数，并且分母均为D。为了便于记忆，我们引进二阶行列式的概念。

二阶行列式定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{12} \\ & \times & \\ a_{21} & & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$- \qquad\qquad +$$

它含有两行，两列。行列式中的**数** $a_{ij}(i=1,2.\quad j=1,2)$.

称为行列式中的**元素**；i 表示a_{ij}所在的行数；j 表示 a_{ij}所在的列数；a_{ij}表示位于行列式第i行j 列上的**数**。

利用行列式的定义可以计算出行列式的值。

例如 $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=4\times 7-(-2)\times 3=34$

二元一次方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}$$

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}$$

这样方程组的解可用二阶行列式的商来表示，

其**分母**都是只依赖于方程组的四个系数。按顺序排列

称为系数行列式，记为 D ,称为方程组的系数行列式。

x_1的系数**分子**是把 D 中的第一列 a_{11}, a_{21} 换成常数项 b_1, b_2. 记为D_1； x_2的系数分子是把 D 中的第二列 a_{12}, a_{22} 换成常数项 b_1, b_2. 记为D_2。

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

这样求解二元一次方程组归结为求三个二阶行列式的值。同样用此方法可解三元一次方程组。

例1 求解二元一次方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 6 \\ 2x_1 + 9x_2 = 5 \end{cases}$

解 系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 3\times 9 - 7\times 2 = 13$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 6\times 9 - 5\times 7 = 19$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\times 5 - 6\times 2 = 3$$

方程组的唯一解为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{19}{13} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{13}$$

例2 设 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

问: （1）当λ为何值时$D=0$;

（2）当λ为何值时$D\neq 0$。

解 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda=\lambda(\lambda-3)\overset{令}{=\!=}0$

则 $\lambda=0;\quad \lambda=3$

可得: （1）当λ＝0 或 λ＝3 时 $D=0$;

（2）当$\lambda\neq 0$ 且$\lambda\neq 3$ 时 $D\neq 0$。

返回 上页 下页 结束

二、三阶行列式

我们用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

不同行不同列元素乘积之代数和

加减号的规律:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

或

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

例3 计算

$$D=\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=0+8+(-3)-(-8)-12-0=1$$

三元一次方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

其解法类似于二元一次方程组

若系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

三元一次方程组 $\begin{cases} ax_1 + ax_2 + ax_3 = b_1 \\ ax_1 + ax_2 + ax_3 = b_2 \\ ax_1 + ax_2 + ax_3 = b_3 \end{cases}$

其解法类似于二元一次方程组

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

方程组的惟一解为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

例3 解三元一次方程组 $\begin{cases} 3x_1+5x_2+7x_3=6 \\ 2x_1 \qquad\quad +3x_3=5 \\ x_1+6x_2+8x_3=0 \end{cases}$

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 8 \end{vmatrix}=-35$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix}=-98 \qquad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}=7$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}=7 \qquad x_1=\frac{98}{35} \qquad x_2=-\frac{1}{5} \qquad x_3=-\frac{1}{5}$$

例4 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

解 **方程左端**

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12$$

$$= x^2 - 5x + 6,$$

由 $x^2 - 5x + = 0$ 解得

$$x = 2 \text{ 或 } x = 3.$$

§2 全排列及其逆序数

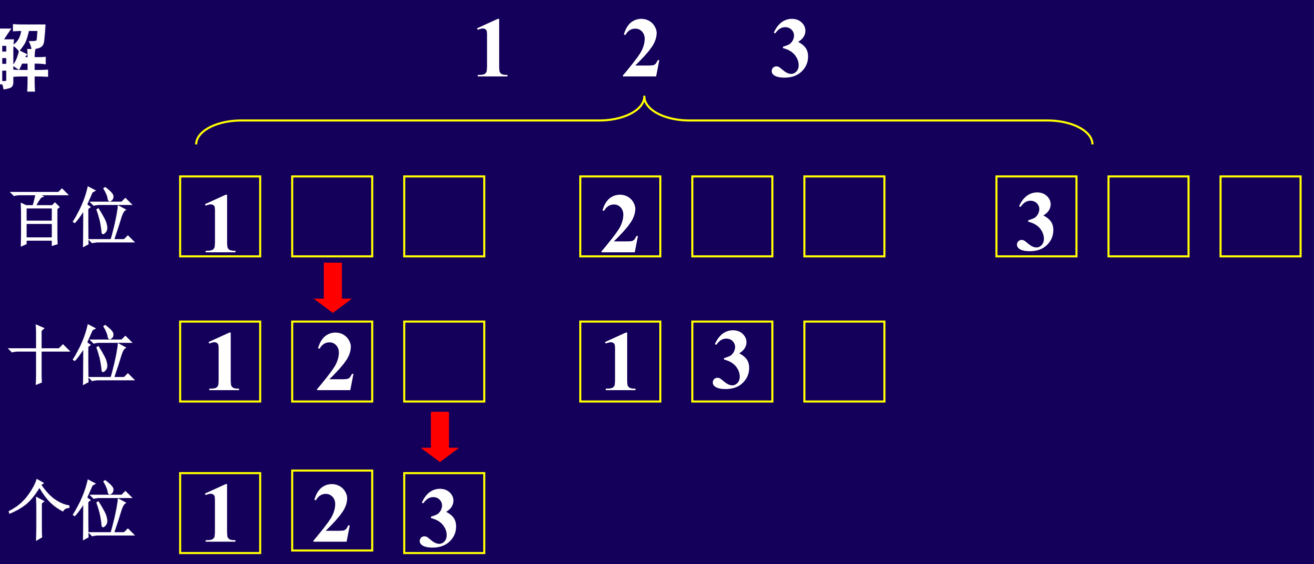
一. 概念的引入

二.全排列及其逆序数

一、概念的引入

引例 用1、2、3三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解



共有 $3\times2\times1=6$ 种放法.

二、全排列及其逆序数

问题 把 n 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？

定义 把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（或排列）.

n 个不同的元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示.

引例 $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$

同理 $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$

排列的逆序数

我们规定各元素之间有一个标准次序, n 个不同的自然数，规定由小到大为**标准次序.**

定义 在一个排列 $\left(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n\right)$ 中，若数 $i_t > i_s$ 则称这两个数组成一个逆序.

例如 排列32514 中,

逆序

3 2 5 1 4

逆序 逆序

定义 一个排列中所有逆序的总数称为此排列的逆序数.

例如 排列32514 中，

0 0 1

3 2 5 1 4

1 逆序数为3

故此排列的逆序数为3+1+0+1+0=5.

排列的奇偶性

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**;

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

计算排列逆序数的方法

方法

分别计算出排列中每个元素前面比它大的数码个数之和，即算出排列中每个元素的逆序数，这每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

例1　求排列32514的逆序数.

解　在排列32514中,

3排在首位,逆序数为0;

2的前面比2大的数只有一个3,故逆序数为1;

5的前面没有比5大的数,其逆序数为0;

1的前面比1大的数有3个,故逆序数为3;

4的前面比4大的数有1个,故逆序数为1;

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}$$

于是排列32514的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5.$$

例2 计算下列排列的逆序数，并讨论它们的奇偶性.

(1) 217986354

解 2 1 7 9 8 6 3 5 4

$$t = 5 + 4 + 4 + 3 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0$$

$$= 18$$

此排列为偶排列.

返回 上页 下页 结束

(2) $n(n-1)(n-2)\cdots 321$

解 $t=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$

$$=\frac{n(n-1)}{2},$$

当 $n=4k,4k+1$ 时为偶排列;

当 $n=4k+2,4k+3$ 时为奇排列.

(3) $(2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)\cdots(k+1)k$

解 $(2k)\,1\,(2k-1)\,2\,(2k-2)\,3\,(2k-3)\cdots(k+1)\,k$

$0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad \cdots \quad k$

$$t = 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + (k-1) + (k-1) + k$$

$$= \frac{[2(1+k-1)(k-1)]}{2} + k = k^2,$$

当 k 为偶数时，排列为偶排列，

当 k 为奇数时，排列为奇排列.

第三节　n 阶行列式的定义

一、概念的引入

观察：三阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

说明

（1）三阶行列式共有6 项，即 $3!$ 项．

（2）每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积．

（3）每项的正负号都取决于位于不同行不同列的三个元素的下标排列.

例如 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 列标排列的逆序数为

$$t(312)=1+1=2,$$ 偶排列 $+$正号

$a_{11}a_{23}a_{32}$ 列标排列的逆序数为

$$t(132)=1+0=1,$$ 奇排列 $-$负号,

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

二、n阶行列式的定义

定义 由n^2个数组成的n阶行列式等于所有取自不同行不同列的n个元素的乘积的代数和 $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

记作
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作$\det(a_{ij})$. 数a_{ij}称为行列式$\det(a_{ij})$的元素.

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数1,2,⋯, n 的一个排列，t 为这个排列的逆序数.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

说明

1、行列式是一种特定的算式，它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的;

2、 n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和;

3、 n 阶行列式的每项都是位于不同行、不同列 n 个元素的乘积;

4、 一阶行列式 $|a| = a$ 不要与绝对值记号相混淆;

5、 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号为 $(-1)^t$.

例1 计算对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 分析

展开式中项的一般形式是 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$

若 $p_1 \neq 4 \Rightarrow a_{1p_1} = 0$, 所以 p_1只能等于4,

从而这个项不为零, 同理可得 $p_2 = 3, p_3 = 2, p_4 = 1$

即行列式中不为零的项为 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{t(4321)} 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$$

$$= 24.$$

例2　计算上三角行列式
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　分析

展开式中项的一般形式是 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

$p_n = n,\ p_{n-1} = n-1,$

所以不为零的项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{t(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例3 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}=?$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=1\cdot 4\cdot 5\cdot 8=160.$$

返回 上页 下页 结束

同理可得**下三角行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例4 证明对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证明 第一式参照例2,下面证第二式.

若记 $\lambda_i = a_{i,n-i+1}$, 则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{t[n(n-1)\cdots 21]} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n .$$

证毕

例5　计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

解 $D_n = (-1)^t a_{1,n-1} a_{2,n-2} \cdots a_{n-1,1} a_{nn}$

$$= (-1)^t 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = (-1)^t n!,$$

$$t = (n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1$$

$$= (n-1)(n-2)/2$$

$$\therefore D_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!.$$

三、小结

1、行列式是一种特定的算式，它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的.

2、n 阶行列式共有 $n!$ 项，每项都是位于不同行、不同列 的 n 个元素的乘积,正负号由下标排列的逆序数决定.即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

思考题

已知 $$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

求 x^3 的系数.

思考题解答

解　含 x^3 的项有两项,即

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

对应于

$$(-1)^{t} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \;+ (-1)^{t(1234)} a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$$

$$(-1)^t a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = x^3,$$

$$(-1)^{t(1234)} a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} = -2x^3$$

故 x^3 的系数为-1.

作业

- P21
- 1(3);　2(5),(6);　4（4）；5（1）