第五节 正态总体均值与方差的区间估计

一、单个总体$N(\mu,\sigma^2)$的情况

设给定置信水平为$1-\alpha$, 并设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本, $\overline{X},S^2$分别是样本均值和样本方差.

1. 均值μ的置信区间

(1) σ^2为已知, 由上节例2可知:

μ的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间$\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$.

例1 包糖机某日开工包了12包糖, 称得质量(单位:克)分别为506, 500, 495, 488, 504, 486, 505, 513, 521, 520, 512, 485. 假设重量服从正态分布, 且标准差为$\sigma=10$, 试求糖包的平均质量 μ的$1-\alpha$置信区间(分别取$\alpha=0.10$和$\alpha=0.05$).

解 $\sigma=10,\quad n=12,$

计算得 $\bar{x}=502.92,$

(1) 当$\alpha=0.10$时, $1-\dfrac{\alpha}{2}=0.95,$

查表得 $z_{\alpha/2}=z_{0.05}=1.645,$

附表2-1

$$\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}=502.92-\frac{10}{\sqrt{12}}\times1.645=498.17,$$

$$\overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}=502.92+\frac{10}{\sqrt{12}}\times1.645=507.67,$$

即μ的置信度为90%的置信区间为

(498.17, 507.67).

(2) 当$\alpha=0.05$时， $1-\dfrac{\alpha}{2}=0.975,$

查表得

附表2-2

$$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96,$$

同理可得 μ 的置信度为 95% 的置信区间为

$$(497.26,\ 508.58).$$

从此例可以看出,

当置信度 $1-\alpha$ 较大时, 置信区间也较大;

当置信度 $1-\alpha$ 较小时, 置信区间也较小.

(2) σ^2为未知,

μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间$\left(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$.

推导过程如下:

由于区间$\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$中含有未知参数$\sigma$,不能

直接使用此区间,

但因为S^2是σ^2的无偏估计,可用$S=\sqrt{S^2}$替换σ,

又根据第六章定理三知 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

则 $P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

即 $P\left\{\overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \overline{X} + \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

于是得μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right).$$

例2 有一大批糖果,现从中随机地取16袋, 称得重量(克)如下:

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量服从正态分布, 试求总体均值 μ 的置信度为 0.95 的置信区间.

解 $\alpha = 0.05, \quad n-1=15,$

附表3-1

查 $t(n-1)$ 分布表可知: $t_{0.025}(15) = 2.1315,$

计算得 $\bar{x} = 503.75, \quad s = 6.2022,$

得μ的置信度为95%的置信区间

$$\left(503.75 \pm \frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315\right) \text{ 即 } (500.4, \quad 507.1).$$

就是说估计袋装糖果重量的均值在500.4克与507.1克之间,这个估计的可信程度为95%.

若依此区间内任一值作为μ的近似值,

其误差不大于 $\dfrac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315 \times 2 = 6.61$ (克).

这个误差的可信度为95%.

例3（续例1）如果只假设糖包的重量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，试求糖包重量 μ 的95%的置信区间.

解 此时 σ 未知，$n = 12$,

$\alpha = 0.05$, $\bar{x} = 502.92$, $s = 12.35$,

附表3-2

查 $t(n-1)$ 分布表可知：$t_{0.025}(11) = 2.201$,

于是 $\dfrac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) = \dfrac{12.35}{\sqrt{12}} \times 2.201 = 7.85$,

得 μ 的置信度为95%的置信区间 (495.07, 510.77).

例4 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，其中 σ^2 和 μ 为未知参数，设随机变量 L 是关于 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间的长度，求 $E(L^2)$.

解 当 σ^2 未知时，

μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right),$$

置信区间长度 $L = \dfrac{2S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1),$

$$L^2 = \frac{4S^2}{n}[t_{\alpha/2}(n-1)]^2,$$

又 $$E(S^2) = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]$$

$$= E\left\{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\overline{X}^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) - nE(\overline{X}^2)\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}[D(X_i)+E(X_i)^2]-n[D(\overline{X})+E^2(\overline{X})]\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}[\sigma^2+\mu^2]-n\left[\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right]\right\}=\sigma^2,$$

于是 $E(L^2)=E\left(\frac{4S^2}{n}[t_{\alpha/2}(n-1)]^2\right)$

$$=\frac{4}{n}[t_{\alpha/2}(n-1)]^2E(S^2)=\frac{4}{n}[t_{\alpha/2}(n-1)]^2\sigma^2.$$

2. 方差 σ^2 的置信区间

根据实际需要, 只介绍 μ 未知的情况.

方差 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

推导过程如下:

因为 S^2 是 σ^2 的无偏估计,

根据第六章第二节定理二知 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

则 $P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha,$

即 $P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}<\sigma^2<\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\}=1-\alpha,$

于是得方差σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间

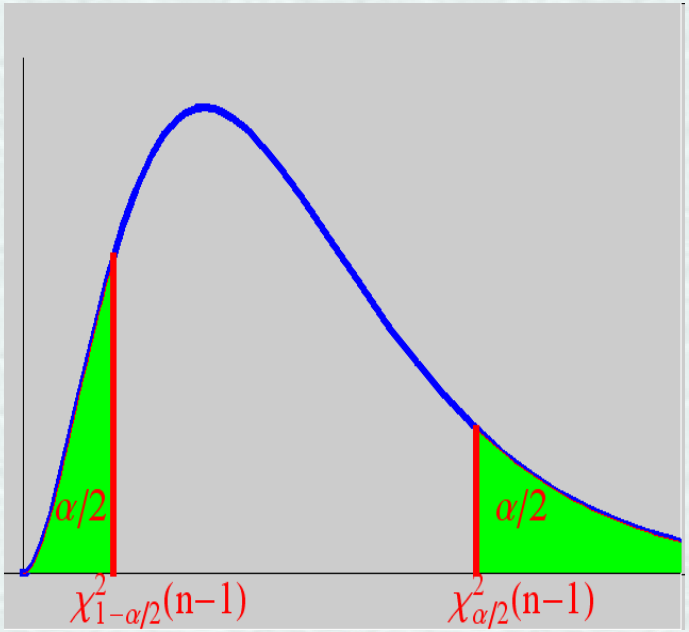
$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

进一步可得:

标准差σ的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\ \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right).$$

注意: 在密度函数不对称时,
如 χ^2 分布和 F分布,
习惯上仍取对称的分位点来
确定置信区间(如图).



例5 (续例2) 求例2中总体标准差 σ的置信度为0. 95的置信区间.

解 $\dfrac{\alpha}{2}=0.025,\qquad 1-\dfrac{\alpha}{2}=0.975,\qquad n-1=15,$

查 $\chi^2(n-1)$ 分布表可知: 附表4-1 附表4-2

$\chi^2_{0.025}(15)=27.488,\qquad \chi^2_{0.975}(15)=6.262,$

计算得 $s=6.2022,$

代入公式得标准差的置信区间$(4.58,\ 9.60)$.

例6 (续例1) 求例1中总体方差 σ^2 和标准差 σ 的置信度为0.95的置信区间.

解 $\dfrac{\alpha}{2}=0.025,\quad 1-\dfrac{\alpha}{2}=0.975,\quad n-1=11,$

查 $\chi^2(n-1)$ 分布表可知：

$$\chi^2_{0.025}(11)=21.920,\qquad \chi^2_{0.975}(11)=3.816,$$

方差 σ^2 的置信区间 (78.97, 453.64);

标准差 σ 的置信区间 (8.87, 21.30).

二、两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况

设给定置信度为 $1-\alpha$, 并设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为第一个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的样本, $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 为第二个总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本, $\overline{X},\overline{Y}$ 分别是第一、二个总体的样本均值, S_1^2,S_2^2 分别是第一、二个总体的样本方差.

讨论两个整体总体均值差和方差比的估计问题.

1. 两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

(1) σ_1^2 和 σ_2^2 均为已知

$\mu_1-\mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

推导过程如下:

因为 $\overline{X}, \overline{Y}$ 分别是 μ_1, μ_2 的无偏估计,

所以 $\overline{X}-\overline{Y}$ 是 $\mu_1-\mu_2$ 的无偏估计,

由 $\overline{X}, \overline{Y}$ 的独立性及

$$\overline{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right), \qquad \overline{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$$

可知 $\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$

或 $$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1),$$

于是得 $\mu_1-\mu_2$ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^{\,2}}{n_1}+\frac{\sigma_2^{\,2}}{n_2}}\right).$$

(2) $\sigma_1^{\,2}$ 和 $\sigma_2^{\,2}$ 均为未知,

只要 n_1 和 n_2 都很大(实用上 >50 即可), 则有

$\mu_1-\mu_2$ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的近似置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^{\,2}}{n_1}+\frac{S_2^{\,2}}{n_2}}\right).$$

(3) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, 但 σ^2 为未知,

$\mu_1-\mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

其中 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$, $\quad S_w=\sqrt{S_w^2}$.

例7 为比较I, II两种型号步枪子弹的枪口速度，随机地取I型子弹10发，得到枪口速度的平均值为 $\overline{x}_1 = 500(\mathrm{m/s})$,标准差 $s_1 = 1.10(\mathrm{m/s})$, 随机地取II型子弹20发，得枪口速度平均值为 $\overline{x}_2 = 496(\mathrm{m/s})$, 标准差 $s_2 = 1.20(\mathrm{m/s})$, 假设两总体都可认为近似地服从正态分布,且由生产过程可认为它们的方差相等，求两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.95的置信区间.

解 由题意，两总体样本独立且方差相等(但未知),

$$\frac{\alpha}{2}=0.025,\quad n_1=10,\quad n_2=20,\quad n_1+n_2-2=28,$$

查 $t(n-1)$ 分布表可知：$t_{0.025}(28)=2.0484,$

$$s_w^{\ 2}=\frac{9\times 1.10^2+19\times 1.20^2}{28},\quad s_w=\sqrt{S_w^{\ 2}}=1.1688,$$

于是得 $\mu_1-\mu_2$的一个置信度为0.95的置信区间

$$\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2\pm S_w\times t_{0.025}(28)\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}}\right)=(4\pm 0.93),$$

即所求置信区间为 $(3.07,\ 4.93)$.

例8 为提高某一化学生产过程的得率，试图采用一种新的催化剂，为慎重起见，在试验工厂先进行试验。设采用原来的催化剂进行了$n_1=8$次试验，得到得率的平均值$\bar{x}_1=91.73$。样本方差$s_1^2=3.89$，又采用新的催化剂进行了$n_2=8$次试验，得到得率的平均值$\bar{x}_2=93.75$，样本方差$s_2^2=4.02$，假设两总体都可认为近似地服从正态分布，且方差相等，求两总体均值差$\mu_1-\mu_2$的置信水平为0.95的置信区间。

解 由题意，两总体样本独立且方差相等(但未知)，

且 $s_w{}^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1{}^2 + (n_2-1)S_2{}^2}{n_1+n_2-2} = 3.96,$

于是得 $\mu_1-\mu_2$的一个置信水平为0.95的置信区间

$$\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2 \pm s_w \times t_{0.025}(14)\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}\right) = (-2.02 \pm 2.13),$$

即所求置信区间为 $(-4.15,\ 0.11)$.

2.两个总体方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

仅讨论总体均值 μ_1, μ_2 为未知的情况.

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right).$$

推导过程如下:

由于 $\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1)$, $\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1)$,

且由假设知 $\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}$ 与 $\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}$ 相互独立,

根据F分布的定义, 知 $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$,

即 $$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\Big/(n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\Big/(n_2-1)} \sim F(n_1-1, n_2-1),$$

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right\}$$

$$=1-\alpha,$$

$$P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right\}$$

$$=1-\alpha,$$

于是得 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right).$$

例9 研究由机器 A 和机器 B 生产的钢管内径, 随机抽取机器 A 生产的管子 18 只, 测得样本方差为 $s_1^2=0.34(\mathrm{mm}^2)$; 抽取机器$B$生产的管子 13 只, 测得样本方差为 $s_2^2=0.29(\mathrm{mm}^2)$. 设两样本相互独立,且设由机器 A 和机器 B 生产的钢管内径分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)$, $\mu_i,\sigma_i^2(i=1,2)$ 均未知, 求方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信度为 0.90 的置信区间.

解 $n_1=18,\quad n_2=13,\quad \alpha=0.10,$

$s_1^2=0.34(\mathrm{mm}^2),\quad s_2^2=0.29(\mathrm{mm}^2),$

$$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.05}(17,12)=2.59,$$

$$F_{1-\alpha/2}(17,12)=F_{0.95}(17,12)=\frac{1}{F_{0.05}(12,17)}=\frac{1}{2.38},$$

于是得 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的一个置信度为0.90的置信区间

$$\left(\frac{0.34}{0.29}\times\frac{1}{2.59},\ \frac{0.34}{0.29}\times 2.38\right)=(0.45,\ 2.79).$$

例10 甲、乙两台机床加工同一种零件, 在机床甲加工的零件中抽取9个样品, 在机床乙加工的零件中抽取6个样品,并分别测得它们的长度(单位:mm),由所给数据算得 $s_1^2 = 0.245$, $s_2^2 = 0.357$,在置信度 0.98下, 试求这两台机床加工精度之比 σ_1/σ_2 的置信区间. 假定测量值都服从正态分布, 方差分别为 σ_1^2, σ_2^2.

解 $n_1 = 9,\quad n_2 = 6,\quad \alpha = 0.02,$

$$F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.99}(8, 5) = 10.3,$$

$$F_{\alpha/2}(8,5)=F_{0.01}(8,5)=\frac{1}{F_{0.99}(5,8)}=\frac{1}{6.63},$$

于是得 $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ 的一个置信度为0.98的置信区间

$$\left(\sqrt{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}},\ \sqrt{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}}\right)$$

$$=\left(\sqrt{\frac{0.245}{0.357\times 10.3}},\ \sqrt{\frac{0.245\times 6.63}{0.357}}\right)=(0.258,\ 2.133).$$

三、小结

1. 单个总体均值 μ 的置信区间

$$\begin{cases} (1)\ \sigma^2\text{为已知}, & \left(\overline{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right). \\ (2)\ \sigma^2\text{为未知}, & \left(\overline{X} \pm \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right). \end{cases}$$

2. 单个总体方差 σ^2 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

3. 两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

σ_1^2 和 σ_2^2 均为已知, $\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$.

σ_1^2 和 σ_2^2 均为未知, $\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}\right)$.

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, 但 σ^2 为未知,

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

4. 两个总体方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

总体均值 μ_1, μ_2 为未知

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right).$$