§2 向量组的线性相关性

一. 线性相关与线性无关的概念

二. 线性相关与线性无关的充要条件

三. 线性相关与线性无关的一些有用结论

一. 线性相关与线性无关的概念

定义4. 给定向量组 $A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$, 若存在**不全为 0** 的数 $k_1,\cdots,k_m$, 使

$$k_1\vec{a}_1+\cdots+k_m\vec{a}_m=\vec{0}$$

则称 向量组 A **线性相关**, 否则称它**线性无关**.

说明:

① $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性相关

$\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\vec{a}_1+\cdots+x_m\vec{a}_m=\vec{0}$ 有非零解

② $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 只有 $k_1=\cdots=k_m=0$ 才有 $k_1\vec{a}_1+\cdots+k_m\vec{a}_m=\vec{0}$

$\Longleftrightarrow$ $x_1\vec{a}_1+\cdots+x_m\vec{a}_m=\vec{0}$ 只有零解

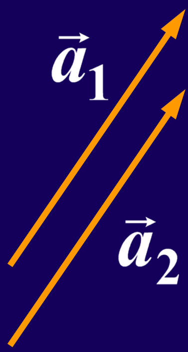
③ **向量组只含一个向量** $\vec{\alpha}$时，

$\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, 向量组 $\vec{\alpha}$ 线性无关

$\vec{\alpha} = \vec{0}$, 向量组 $\vec{\alpha}$ 线性相关

④ $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ **线性相关** $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2$**对应分量成比例**

几何意义: 两向量平行



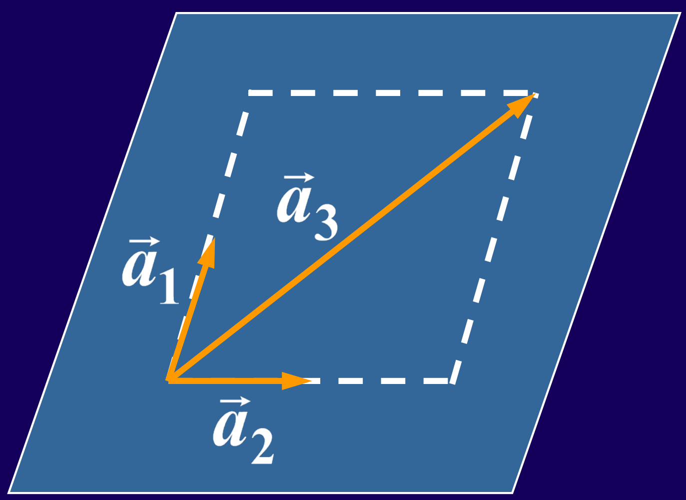
⑤ $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ **线性相关的几何意义 — 三向量共面**

R^3中, $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ **共面,**

$\Updownarrow$ **由平行四边形法则**

$\vec{a}_3 = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2$

即 $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 - \vec{a}_3 = \vec{0}$



推论. $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m\ (m\geq 2)$ 线性相关 $\Longleftrightarrow \vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 中至少有一个向量可由其余向量线性表示.

证: “$\Rightarrow$” 设 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性相关，则存在不全为 0 的 $k_1,\cdots,k_m$，使

P87

$$k_1\vec{a}_1+\cdots+k_m\vec{a}_m=\vec{0}$$

无妨设 $k_m\neq 0$，则

$$\vec{a}_m=-\frac{k_1}{k_m}\vec{a}_1-\cdots-\frac{k_{m-1}}{k_m}\vec{a}_{m-1}$$

“$\Leftarrow$” 设 $\vec{a}_m=k_1\vec{a}_1+\cdots+k_{m-1}\vec{a}_{m-1}$，则

$$k_1\vec{a}_1+\cdots+k_{m-1}\vec{a}_{m-1}-\vec{a}_m=\vec{0}$$

证毕

填空: 若 $A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 中任意一向量都不能由其余向量线性表示，则组 A 线性 __无__ 关.

二. 线性相关与线性无关的充要条件

分析: 给定向量组 $A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$, 令 $A=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)$,

组A 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 有非零解

P77 定理4

$\Longleftrightarrow$ $R(A)<m$ (向量个数)

$A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ $R(A)<m$ (向量个数)

$A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ $R(A)=m$ (向量个数)

例1. 讨论 n 维单位坐标向量组 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 的线性相关性.

解: $E=(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)$为单位阵, $|E|=1\neq 0$, $\therefore R(E)=n$,

故 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 线性无关.

例2. 已知 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{a}_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$, 讨论向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 及向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 的线性相关性.

解: $$(\boxed{\vec{a}_1,\vec{a}_2},\vec{a}_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&5&5\end{pmatrix}\underset{r_3-5r_2}{\overset{r_2\div 2}{\sim}}\left(\boxed{\begin{matrix}1&0\\0&1\\0&0\end{matrix}}\begin{matrix}2\\1\\0\end{matrix}\right)$$

$R(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)=2<3$, $\therefore$ $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性相关

$R(\vec{a}_1,\vec{a}_2)=2$, $\therefore$ $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 线性无关

同理 $\vec{a}_1,\vec{a}_3$ 也线性无关

注意: $A_{n\times m}\overset{r}{\sim}B_{n\times m}\Rightarrow A,B$ 的列向量组 (或对应部分组) 具有相同的线性关系. 可见本例中 $\vec{a}_3=2\vec{a}_1+\vec{a}_2$

例3. 已知向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性无关，$\vec{b}_1=\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{b}_2=\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{b}_3=\vec{a}_3+\vec{a}_1$，试证 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 线性无关.

证法1. 用定义. 设 x_1,x_2,x_3 使

$$x_1\vec{b}_1+x_2\vec{b}_2+x_3\vec{b}_3=\vec{0}$$

即 $$x_1(\vec{a}_1+\vec{a}_2)+x_2(\vec{a}_2+\vec{a}_3)+x_3(\vec{a}_3+\vec{a}_1)=\vec{0}$$

$$(x_1+x_3)\vec{a}_1+(x_1+x_2)\vec{a}_2+(x_2+x_3)\vec{a}_3=\vec{0}$$

$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性无关，故

$$\begin{cases} x_1+\qquad x_3=0 \\ x_1+x_2\qquad=0 \\ \qquad x_2+x_3=0 \end{cases}$$

系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$$

方程组只有零解 $x_1=x_2=x_3=0$，因此 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 线性无关.

返回 上页 下页 结束

例3. 已知向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 线性无关，$\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{b}_2 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3, \vec{b}_3 = \vec{a}_3 + \vec{a}_1$,试证 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ 线性无关.

证法2. 用矩阵表示.

$$(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

记作 $\qquad B = AK$

设 $B\vec{x} = \vec{0}$, 则有 $A(K\vec{x}) = \vec{0}$,

$\Big\downarrow$ A 的列向量线性无关

$K\vec{x} = \vec{0}$

$\Big\downarrow$ $|K| = 2 \neq 0$

$\vec{x} = \vec{0}$

所以 B 的列向量 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ 线性无关.

例3. 已知向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 线性无关, $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{b}_2 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3$, $\vec{b}_3 = \vec{a}_3 + \vec{a}_1$, 试证 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ 线性无关.

证法3. 利用矩阵秩的性质.

$$(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

记作 $B = AK$

$\because |K| = 2 \neq 0$, $\therefore K$ 可逆, 根据矩阵秩的性质

$$R(B) = R(A) = 3$$

所以 B 的列向量 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ 线性无关.

P, Q 可逆 $\Rightarrow R(PAQ) = R(A)$

$R(PA) = R(A) = R(AQ)$

三. 线性相关与线性无关的一些有用结论

(1) 组 $A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性相关

$\Longrightarrow$ 向量组 $B:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m,\ \vec{a}_{m+1}$ 也线性相关.

证: 组 $A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性相关 $\Rightarrow\ R(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)<m$

$\Rightarrow\ R(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m,\vec{a}_{m+1})<m+1$

$\Rightarrow$ 组 B 线性相关

推论. ① 向量组中有线性相关的部分组, 则该向量组线性相关.

② 向量组中含零向量 $\vec{0}$, 则必线性相关.

填空题. $B:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m,\vec{a}_{m+1}$ 线性无关, $A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性__无__关.

(2) 设

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{pmatrix}, \quad b_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{rj} \\ a_{r+1,j} \end{pmatrix}, \quad (j = 1,2,\cdots,m),$$

即α_j添上一个分量后得向量b_j.若向量组$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关,则向量组$B: b_1, b_2, \cdots, b_m$也线性无关.反言之，若向量组$B$线性相关,则向量组$A$也线性相关.

证 记$A_{r\times m}=(\alpha_1,\cdots\alpha_m)$，$B_{(r+1)\times m}=(b_1,\cdots,b_m)$,

有$R(A)\le R(B)$.若向量组A线性无关,则$R(A)=m$,

从而有 $R(B)\ge m$. 但 $R(B)\le m$ (因 B 只有 m 列)，

故$R(B)=m$，因此向量组B线性无关.

说明

结论（2）是对增加一个分量（即维数增加1维）而言的，若增加多个分量,结论也成立.

(3) m 个 $n\ (< m)$ 维向量组成的向量组 $A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 必线性相关. (即: 个数>维数必线性相关)

证: 令 $A_{n\times m}=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)$, 则 $R(A)\le\min\{m,n\}=n<m$

所以组 A 线性相关.

(4) $\left.\begin{array}{l} A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m \text{ 线性无关} \\ B:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m,\vec{b} \text{ 线性相关} \end{array}\right\} \Longrightarrow$ $\vec{b}$ 必能由组 A 线性表示, 且表示式唯一.

证: 记 $A=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)$, $B=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m,\vec{b})$,

组 A 线性无关 $\Rightarrow R(A)=m$

组 B 线性相关 $\Rightarrow R(B)<m+1$

又由 B 的结构可知, $m\le R(B)<m+1$, 因此

$$R(B)=m=R(A)$$

故 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有唯一解 $,\therefore \vec{b}$ 必能由组 A 线性表示, 且表示式唯一.

以上 (1)~(4) 组成了P89 定理5:

定理5.

(1) 组 $A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性相关

$\Longrightarrow$ 向量组 $B:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m,\vec{a}_{m+1}$ 也线性相关.

(2) 组 $A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性无关，每一向量添一个分量后得向量组 B

$\Longrightarrow$ 向量组 B 也线性无关。

(3) m 个 $n\ (<m)$ 维向量组成的向量组必线性相关.

(4) $A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性无关，$B:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m,\vec{b}$ 线性相关

$\Longrightarrow \vec{b}$ 必能由组 A 线性表示，且表示式唯一.

例4. **设向量组**$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$**线性相关**, $\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$**线性无关,证明**

(1) $\vec{a}_1$ 能用$\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性表示 ;

(2) $\vec{a}_4$ 不能用$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性表示 .

证: (1). $\because$ $\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ 线性无关, $\therefore$ $\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性无关,

由定理5 (3) **知** $\vec{a}_1$ 能用$\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性表示

(2) **反证法.**

假设 $\vec{a}_4$ 能用$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性表示 ,

$\Big\downarrow$ $\vec{a}_1$ 能用$\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性表示

$\vec{a}_4$ 能用$\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性表示

与 $\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ **线性无关矛盾, 所以假设不真!**

小结

1. $\underbrace{\text{线性表示, 线性相关, 线性无关}}_{\text{概念, 联系}}$

2.判别线性相 (无) 关的常用方法

n 维向量组 $A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$, 记 $A=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)$,

(1) 齐次线性方程组

$$A\vec{x}=\vec{0}\begin{cases}\text{只有零解, 组}A\text{ 无关}\\ \text{有非零解, 组}A\text{ 相关}\end{cases}$$

(2) $R(A)\begin{cases}=m, \text{ 组}A\text{ 无关}\\ <m, \text{ 组}A\text{ 相关}\end{cases}$ (常用初等变换求秩)

(3) $m=n$ 时, $|A|\begin{cases}\neq 0, \text{ 组}A\text{ 无关}\\ =0, \text{ 组}A\text{ 相关}\end{cases}$

3. 向量个数的增减

组 A 相关 $\Longrightarrow$ 增加向量, 新组 <u>也相关</u> .

组 A 无关 $\Longrightarrow$ 减少向量, 新组 <u>也无关</u> .

作业

P107　5，6，7，9，10