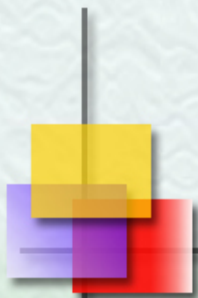


## 第二节 中心极限定理

- 一、问题的引入
- 二、基本定理
- 三、典型例题
- 四、小结



# 一、问题的引入



**实例：**考察射击命中点与靶心距离的偏差。

这种偏差是大量微小的偶然因素造成的微小误差的总和, 这些因素包括: 瞄准误差、测量误差、子弹制造过程方面 (如外形、重量等) 的误差以及射击时武器的振动、气象因素 (如风速、风向、能见度、温度等) 的作用, 所有这些不同因素所引起的微小误差是相互独立的, 并且它们中每一个对总和产生的影响不大。

**问题：**某个随机变量是由大量相互独立且均匀小的随机变量相加而成的, 研究其概率分布情况。

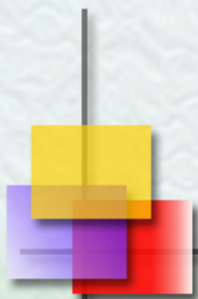


## 二、基本定理

### 定理四（独立同分布的中心极限定理）

设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  相互独立, 服从同一分布, 且具有数学期望和方差:  $E(X_k) = \mu$ ,  $D(X_k) = \sigma^2 > 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), 则随机变量之和的

标准化变量  $Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n} \sigma}$





的分布函数  $F_n(x)$  对于任意  $x$  满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n} \sigma} \leq x \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

**定理四表明:**

当  $n \rightarrow \infty$ , 随机变量序列  $Y_n$  的分布函数收敛于标准正态分布的分布函数.



## 定理五 (李雅普诺夫定理)

李雅普诺夫

设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  相互独立, 它们具有数学期望和方差:

$$E(X_k) = \mu_k, \quad D(X_k) = \sigma_k^2 \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

记 
$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2,$$

若存在正数  $\delta$ , 使得当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n E\{|X_k - \mu_k|^{2+\delta}\} \rightarrow 0,$$

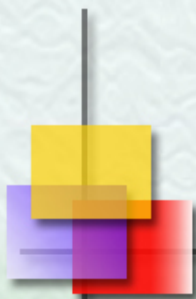


则随机变量之和的标准化变量

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \mu_k}{B_n}$$

的分布函数  $F_n(x)$  对于任意  $x$  满足

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \mu_k}{B_n} \leq x \right\} \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x). \end{aligned}$$





## 定理五表明:

无论各个随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  服从什么分布, 只要满足定理的条件, 那么它们的和  $\sum_{k=1}^n X_k$  当  $n$  很大时, 近似地服从正态分布.

(如实例中射击偏差服从正态分布)

下面介绍的定理六是定理四的特殊情况.



## 定理六(德莫佛—拉普拉斯定理)

德莫佛

拉普拉斯

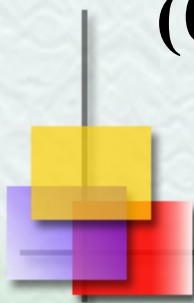
设随机变量  $\eta_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 服从参数为  $n, p$  ( $0 < p < 1$ ) 的二项分布, 则 对于任意  $x$ , 恒有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

证明 根据第四章第二节例题可知  $\eta_n = \sum_{k=1}^n X_k$ ,

其中  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是相互独立的、服从同一 (0—1) 分布的随机变量, 分布律为

$$P\{X_k = i\} = p^i (1-p)^{1-i}, \quad i = 0, 1.$$





$$\because E(X_k) = p, \quad D(X_k) = p(1-p) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

根据定理四得

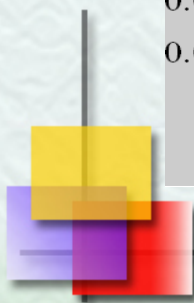
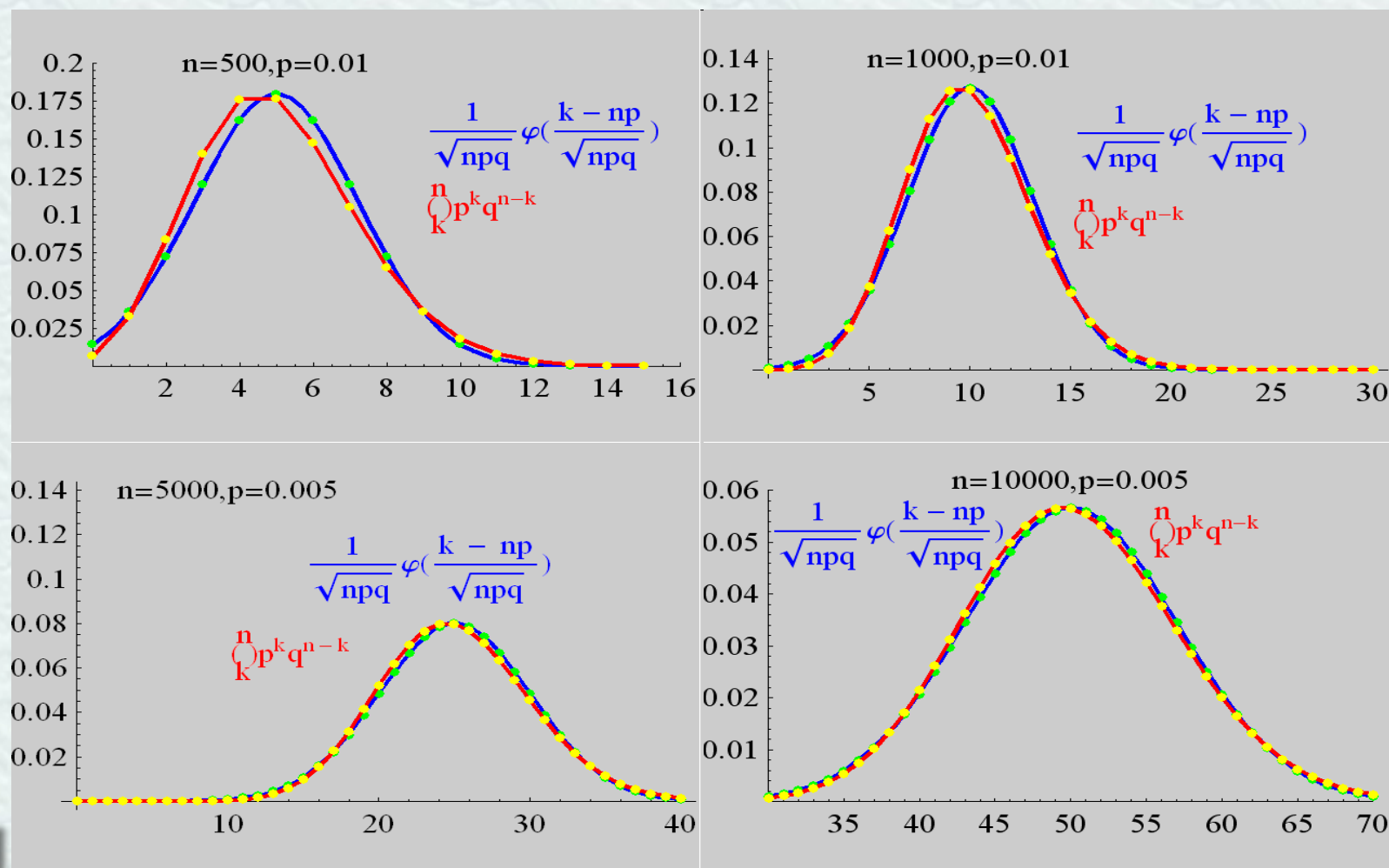
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n X_k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right\} \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x). \end{aligned}$$

**定理六表明:**

正态分布是二项分布的极限分布, 当 $n$ 充分大时, 可以利用该定理来计算二项分布的概率.



下面的图形表明:正态分布是二项分布的逼近.



### 三、典型例题

**例1** 一加法器同时收到 20 个噪声电压  $V_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 20$ ), 设它们是相互独立的随机变量, 且都在区间  $(0, 10)$  上服从均匀分布, 记  $V = \sum_{k=1}^{20} V_k$ , 求  $P\{V > 105\}$  的近似值.

**解**  $\because E(V_k) = 5, \quad D(V_k) = \frac{100}{12} \quad (k = 1, 2, \dots, 20).$

由定理四, 随机变量  $Z$  近似服从正态分布  $N(0, 1)$ ,





$$\text{其中 } Z = \frac{\sum_{k=1}^{20} V_k - 20 \times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}} \sqrt{20}} = \frac{V - 20 \times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}} \sqrt{20}}$$

$$\therefore P\{V > 105\} = P\left\{\frac{V - 20 \times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}} \sqrt{20}} > \frac{105 - 20 \times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}} \sqrt{20}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{V - 20 \times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}} \sqrt{20}} > 0.387\right\} = 1 - P\left\{\frac{V - 100}{\sqrt{\frac{100}{12}} \sqrt{20}} \leq 0.387\right\}$$

$$\approx 1 - \int_{-\infty}^{0.387} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \Phi(0.387) = 0.348.$$



**例2** 一船舶在某海区航行, 已知每遭受一次海浪的冲击, 纵摇角大于  $3^\circ$  的概率为  $1/3$ , 若船舶遭受了 90 000 次波浪冲击, 问其中有 29 500 ~ 30 500 次纵摇角大于  $3^\circ$  的概率是多少?

**解** 将船舶每遭受一次海浪的冲击看作一次试验,  
并假设各次试验是独立的,



在 90 000 次波浪冲击中纵摇角大于  $3^\circ$  的次数为  $X$ ,

则  $X$  是一个随机变量, 且  $X \sim b(90\,000, \frac{1}{3})$ .



分布律为  $P\{X = k\} = \binom{90000}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{90000-k}$  ,  
 $k = 1, \dots, 90000$ .

所求概率为

$$P\{29500 < X \leq 30500\} = \sum_{k=29501}^{30500} \binom{90000}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{90000-k} .$$

直接计算很麻烦，利用**德莫佛—拉普拉斯定理**

$$P\{29500 < X \leq 30500\}$$

$$= P\left\{ \frac{29500 - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{30500 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right\}$$





$$\approx \int_{\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \Phi\left(\frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$\because n = 90000, \quad p = \frac{1}{3},$$

$$\therefore P\{29500 < X \leq 30500\} \approx \Phi\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 0.9995.$$



**例3** 某保险公司的老年人寿保险有1万人参加,每人每年交200元. 若老人在该年内死亡,公司付给家属1万元. 设老年人死亡率为0.017,试求保险公司在一年内的这项保险中亏本的概率.

**解** 设  $X$  为一年中投保老人的死亡数,

则  $X \sim B(n, p)$ ,

其中  $n = 10000$ ,  $p = 0.017$ ,

由德莫佛—拉普拉斯定理知,



保险公司亏本的概率

$$P\{10000X > 10000 \times 200\} = P\{X > 200\}$$

$$= P\left\{ \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{200 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right\}$$

$$= P\left\{ \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} > 2.321 \right\}$$

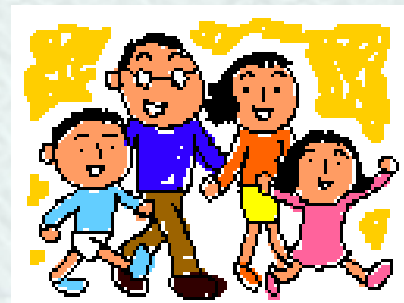
$$\approx 1 - \Phi(2.321) \approx 0.01 .$$





**例4** 对于一个学生而言,来参加家长会的家长人数是一个随机变量. 设一个学生无家长、1名家长、2名家长来参加会议的概率分别为0.05, 0.8, 0.15. 若学校共有400名学生, 设各学生参加会议的家长数相互独立, 且服从同一分布. (1) 求参加会议的家长数  $X$  超过450的概率; (2) 求有1名家长来参加会议的学生数不多于340的概率.

**解** (1) 以  $X_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 400$ ) 记第  $k$  个学生来参加会议的家长数,



则  $X_k$  的分布律为

$X_k$	0	1	2
$p_k$	0.05	0.8	0.15

易知  $E(X_k) = 1.1$ ,  $D(X_k) = 0.19$ , ( $k = 1, 2, \dots, 400$ )

而  $X = \sum_{k=1}^{400} X_k$ , 根据独立同分布的中心极限定理,

随机变量 
$$\frac{\sum_{k=1}^{400} X_k - 400 \times 1.1}{\sqrt{400} \sqrt{0.19}} = \frac{X - 400 \times 1.1}{\sqrt{400} \sqrt{0.19}}$$

近似服从正态分布  $N(0, 1)$ ,



于是  $P\{X > 450\}$

$$= P\left\{\frac{X - 400 \times 1.1}{\sqrt{400} \sqrt{0.19}} > \frac{450 - 400 \times 1.1}{\sqrt{400} \sqrt{0.19}}\right\}$$

$$= 1 - P\left\{\frac{X - 400 \times 1.1}{\sqrt{400} \sqrt{0.19}} \leq 1.147\right\}$$

$$\approx 1 - \Phi(1.147) = 0.1357;$$





(2) 以  $Y$  记有一名家长来参加会议的学生数,  
则  $Y \sim b(400, 0.8)$ , 由德莫佛—拉普拉斯定理知,

$$\begin{aligned} & P\{Y \leq 340\} \\ &= P\left\{\frac{Y - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}} \leq \frac{340 - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}}\right\} \\ &= P\left\{\frac{Y - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}} \leq 2.5\right\} \approx \Phi(2.5) = 0.9938. \end{aligned}$$



**例5** 设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 且  $X_i$  在区间  $(-1, 1)$  上服从均匀分布 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 试证当  $n$  充分大时, 随机变量  $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$  近似服从正态分布, 并指出其分布参数.

**证** 记  $Y_i = X_i^2$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$E(Y_i) = E(X_i^2) = D(X_i) = \frac{1}{3},$$

$$D(Y_i) = E(Y_i^2) - [E(Y_i)]^2 = E(X_i^4) - [E(Y_i)]^2.$$



因为  $E(X_i^4) = \int_{-1}^1 x_i^4 \cdot \frac{1}{2} dx_i = \frac{1}{5},$

所以  $D(Y_i) = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{45},$

因为  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立,

所以  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  相互独立.

根据独立同分布的中心极限定理,





$$n \cdot Z_n = \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n Y_i$$

近似服从正态分布  $N\left(\frac{n}{3}, \frac{4n}{45}\right)$ ,

故  $Z$  近似地服从正态分布  $N\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{45n}\right)$ .



## 四、小结

三个中心极限定理 { 独立同分布的中心极限定理  
李雅普诺夫定理  
德莫佛—拉普拉斯定理

中心极限定理表明, 在相当一般的条件下, 当独立随机变量的个数增加时, 其和的分布趋于正态分布.

