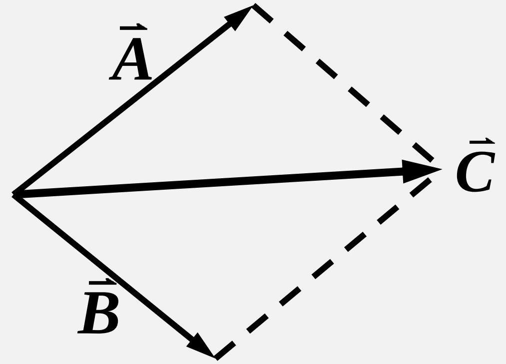
数学基础补充

数学知识补充——矢量

1.标量和矢量

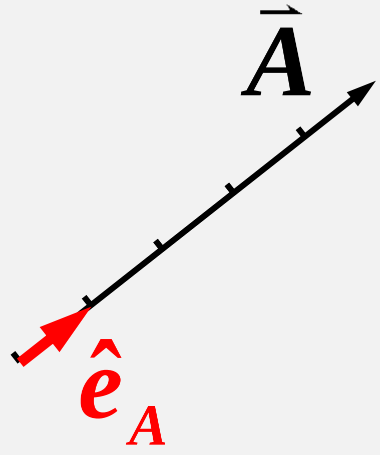
- 标量：只有大小，没有方向。
- 矢量：既有大小又有方向，且：
- 矢量的表示：$\vec{A}$

（教科书上为黑体）



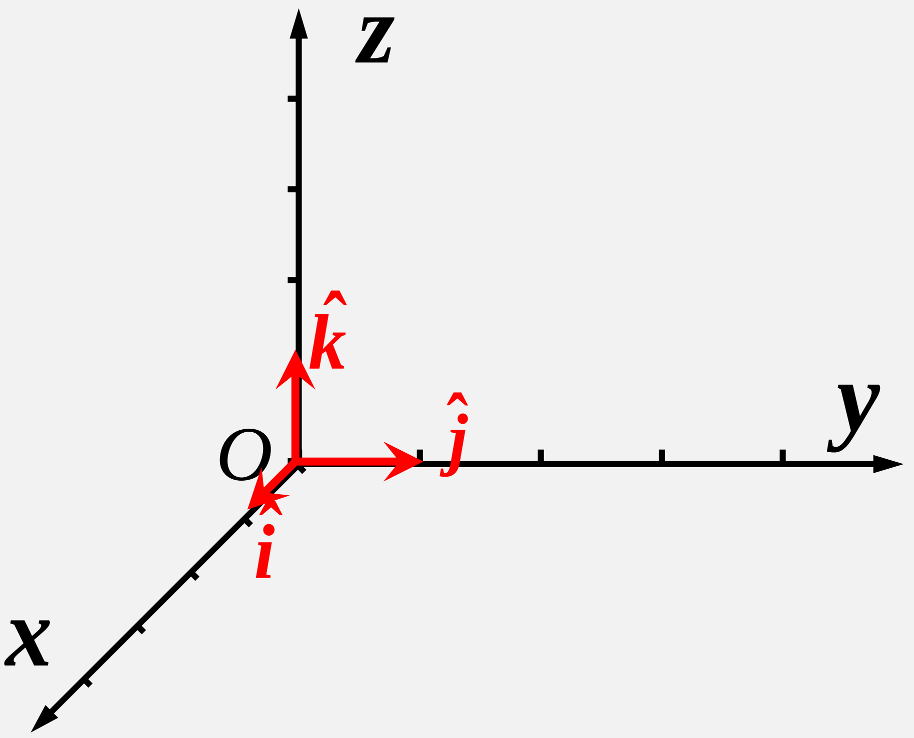
2. 矢量的模和单位矢量

- 模：矢量的大小，表示为 A或$|\vec{A}|$。
- 单位矢量：模等于1的矢量。
- $\vec{A}=|\vec{A}|\ \hat{e}_A$,



数学知识补充——单位矢量

- 空间直角坐标系（Oxyz）中，
  沿x、y、z 三个坐标轴正方向的单位矢量



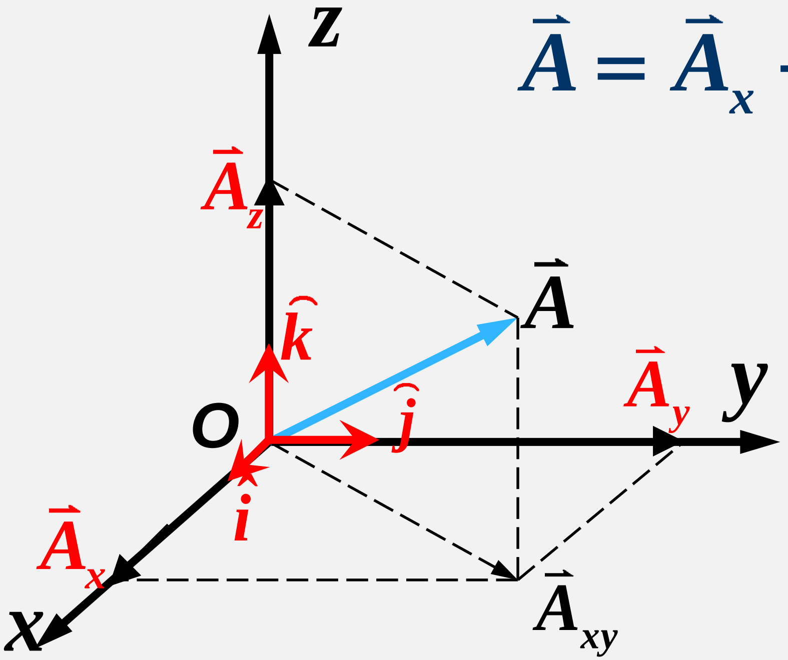
x轴单位矢量 $\hat{i}$，
y轴单位矢量 $\hat{j}$，
z轴单位矢量 $\hat{k}$，

大小？
方向？

数学知识补充——矢量的坐标表示

3.矢量的坐标表示

空间直角坐标系Oxyz中，任一矢量都可分解为沿坐标轴方向的3个分矢量。



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

大小： $|A| = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2} + A_z^{\ 2}}$

方向：

$$\cos\alpha = A_x / |A|$$

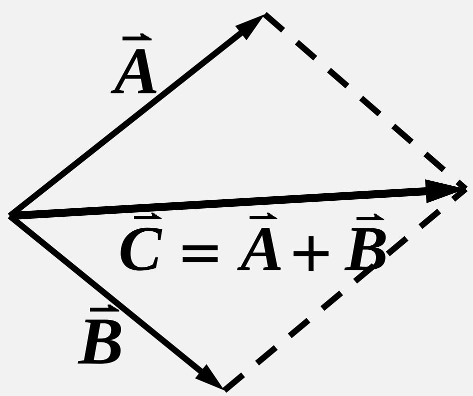
$$\cos\beta = A_y / |A|$$

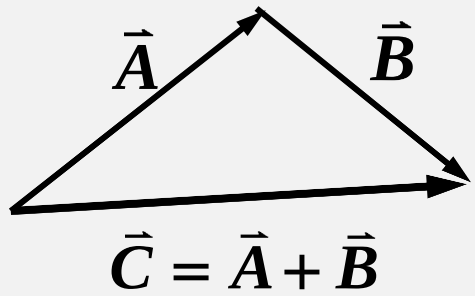
$$\cos\gamma = A_z / |A|$$

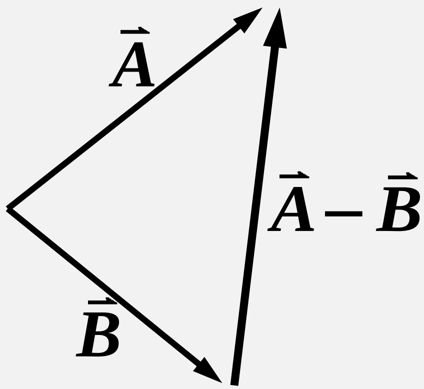
数学知识补充—矢量的加减法

4.矢量加减法

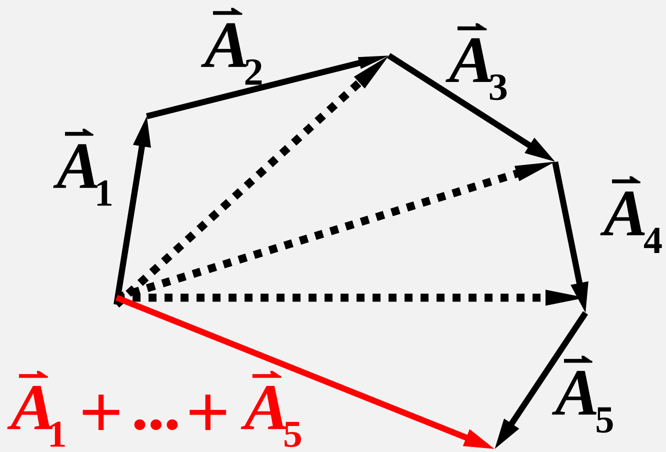
（1）矢量加减法的图示法







N个矢量的加法



具体数值用余弦定理或正玄定理

数学知识补充—矢量的加减法

（2）.矢量加减法的直角坐标表示

（简洁，清晰的数学）

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{A} \pm \vec{B} = \left(A_x \pm B_x\right)\hat{i} + \left(A_y \pm B_y\right)\hat{j} + \left(A_z \pm B_z\right)\hat{k}$$

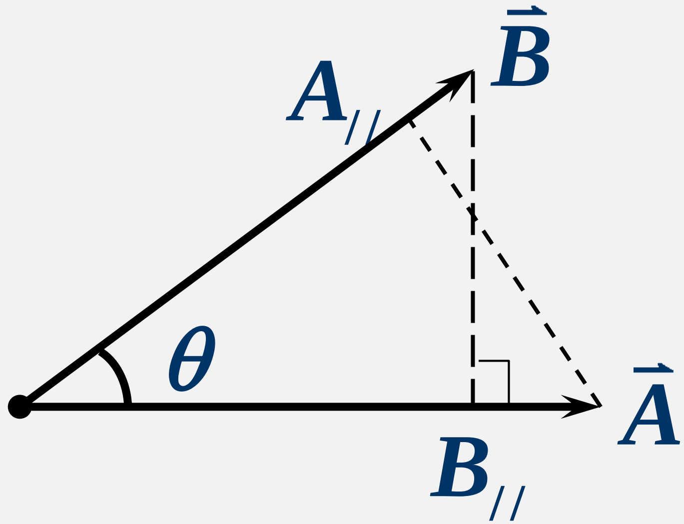
数学知识补充——两矢量的标积

5.矢量的乘法：

标积 $\vec{A}\cdot\vec{B} \equiv AB\cos\theta$

$$= AB_{//} = A_{//}B$$

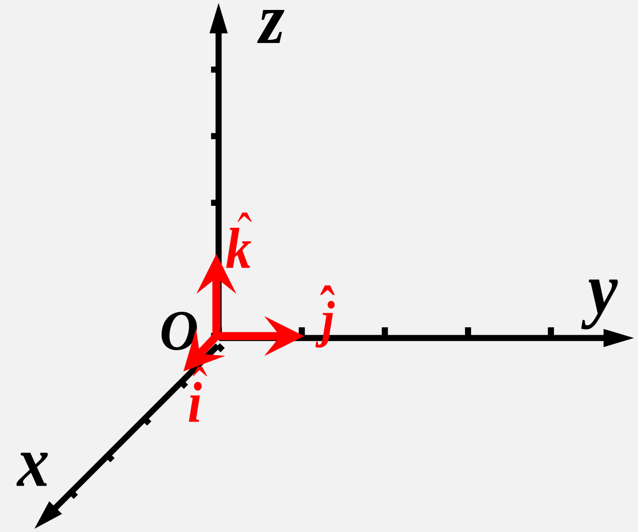
若θ=0, 或 θ=π/2， $\vec{A}\cdot\vec{B} = ?$



- 直角坐标系单位矢量的标积

归一性：$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = \underline{1}$;

正交性：$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0.$



数学知识补充——两矢量的标积

- 两矢量标积的坐标表式

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})$$

$$\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ 1 & (i=j)\end{cases}$$

$$=A_x\hat{i}\cdot B_x\hat{i}+\cancel{A_x\hat{i}\cdot B_y\hat{j}}+\cancel{A_x\hat{i}\cdot B_z\hat{k}}$$

$$+\cancel{A_y\hat{j}\cdot B_x\hat{i}}+A_y\hat{j}\cdot B_y\hat{j}+A_y\hat{j}\cdot B_z\hat{k}$$

$$+\cancel{A_z\hat{k}\cdot B_x\hat{i}}+\cancel{A_z\hat{k}\cdot B_y\hat{j}}+A_z\hat{k}\cdot B_z\hat{k}$$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

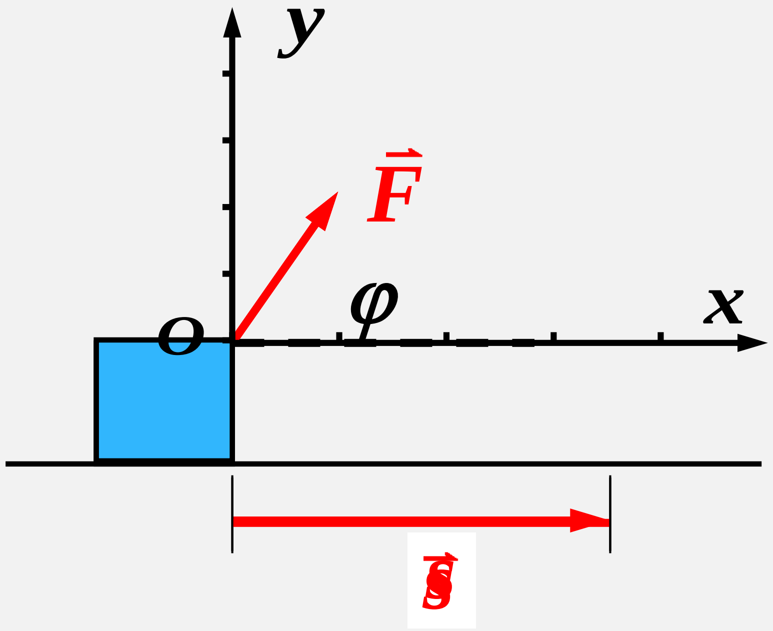
- 思考？ $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$ ？

矢量标积的例子

力对物体做的功：

力在位移方向上的投影和位移大小的乘积。

$$A = F \cdot s \cdot \cos\varphi$$



引入两个矢量： $\vec{F}$，$\vec{s}$

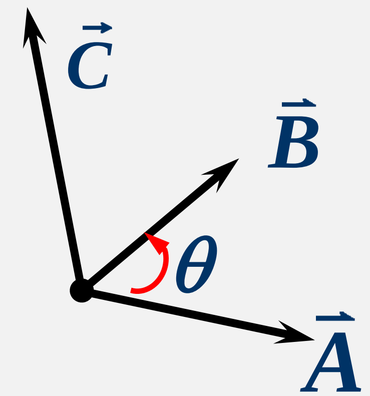
则：$A = \vec{F} \cdot \vec{s}$ 可以写成两个矢量的标积(点积)。

$$\text{eg}，\quad \vec{F} = 3\hat{i} + 4\hat{j},\quad \vec{s} = 7\hat{i},$$

$$\therefore A = \vec{F} \cdot \vec{S} = (3\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot 7\hat{i} = 21J.$$

数学知识补充——矢量的矢积

矢积 $\vec{C} \equiv \vec{A} \times \vec{B}$

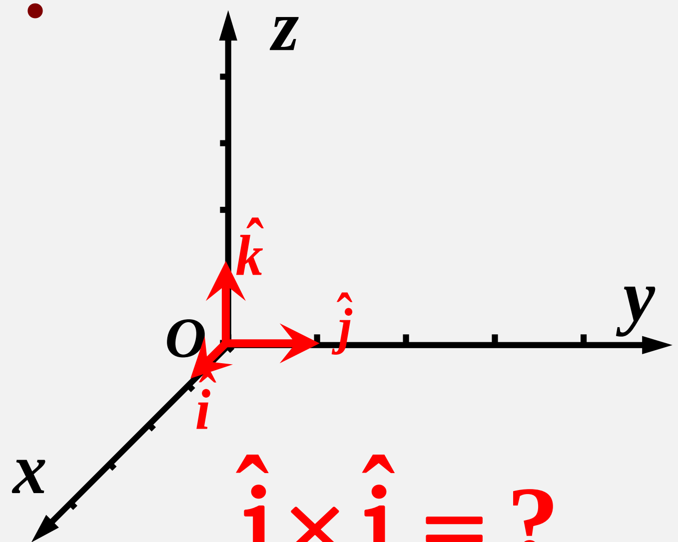


矢量 $\begin{cases} \text{大小：} C = AB\sin\theta; \\ \text{方向：}\quad \text{由右手法则确定} \end{cases}$

若θ=0, 或θ= π/2 ,　$\vec{A} \times \vec{B} = ?$

- 直角坐标系的

  单位矢量间的矢积



$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}},\ \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = ?$$

数学知识补充——矢量的矢积

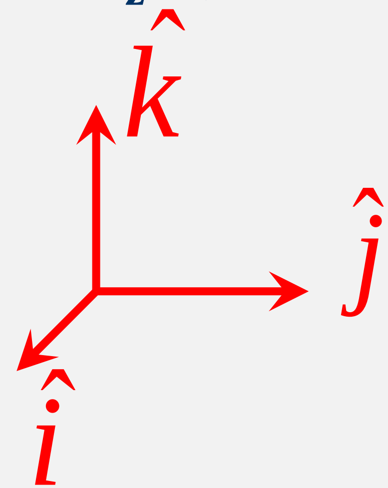
- 两矢量矢积的坐标表式

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})$$

$$=\cancel{A_x\hat{i}\times B_x\hat{i}}+A_x\hat{i}\times B_y\hat{j}+A_x\hat{i}\times B_z\hat{k}$$

$$+A_y\hat{j}\times B_x\hat{i}+\cancel{A_y\hat{j}\times B_y\hat{j}}+A_y\hat{j}\times B_z\hat{k}$$

$$+A_z\hat{k}\times B_x\hat{i}+A_z\hat{k}\times B_y\hat{j}+\cancel{A_z\hat{k}\times B_z\hat{k}}$$



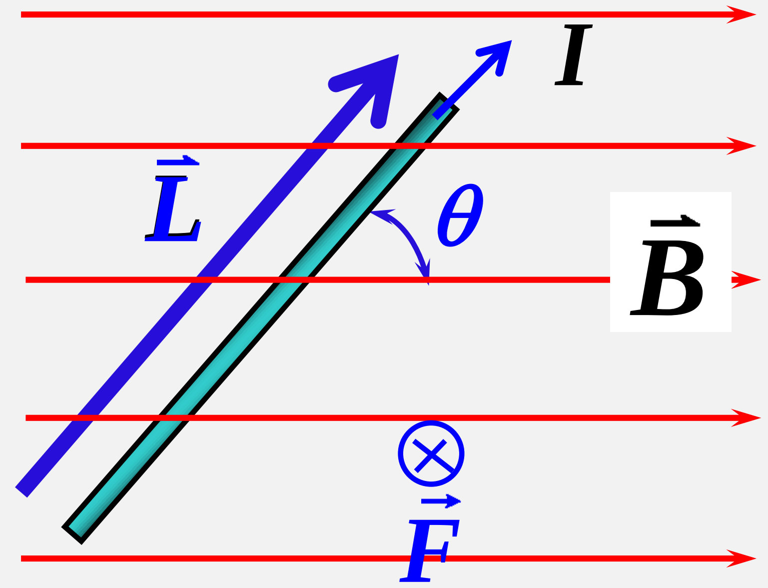
$$=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}$$

- 思考?

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{B}\times\vec{A}\quad ??$$

矢量矢积的例子

载流导线在均匀磁场中的受力：



受力大小：

$$F = BIL\sin\underline{\theta}$$

受力方向：

垂直纸面向里

利用“矢量的矢积”运算符号，可将 力矢量 $\vec{F}$ 简单表示为：

$$\vec{F} = I\ \vec{L}\underline{\times}\vec{B}$$

大小：

方向：

数学知识补充——矢量的矢积

- 两矢量矢积的行列式表示

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \mathrm{A_x} & \mathrm{A_y} & \mathrm{A_z}\\ \mathrm{B_x} & \mathrm{B_y} & \mathrm{B_z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \mathrm{A_x} & \mathrm{B_x}\\ \hat{j} & \mathrm{A_y} & \mathrm{B_y}\\ \hat{k} & \mathrm{A_z} & \mathrm{B_z}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}$$

数学知识补充——标量函数的微积分

6.标量函数的导数（微商）

若 $y = f(x)$，

d， d

则 $$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

数学知识补充——标量函数不定积分

7.不定积分

即 求原函数！

- 常用公式：

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int e^{x} dx = e^{x} + C$$

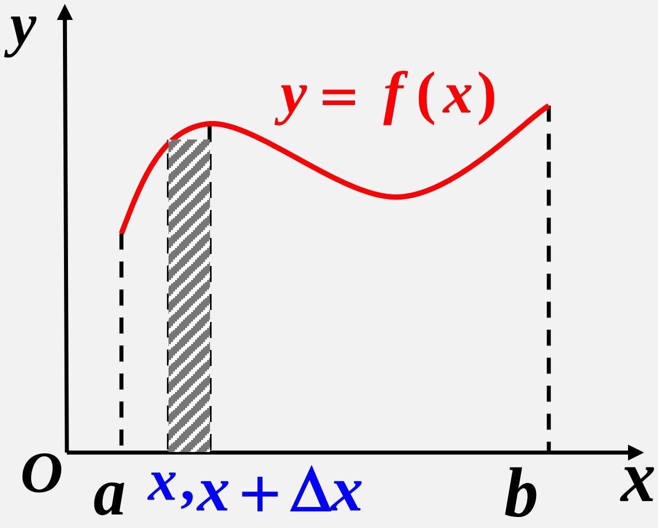
……

数学知识补充——标量函数定积分

8.定积分

即 求和运算！

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=b} f(x)\Delta x$$



牛顿—莱布尼兹公式

若$F'(x) = f(x)$，称 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}F(x) = F(x_2) - F(x_1)$$

微积分应用举例

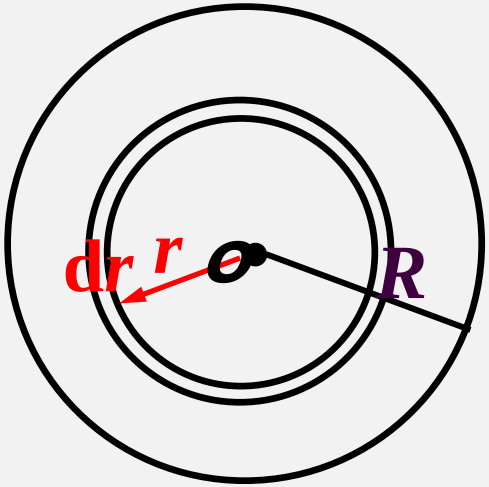
<u>微元分割</u> & <u>定积分</u>的思想，贯穿课程始终！！

Eg1，求半径为 R 的圆的面积。

Step1，微元分割；

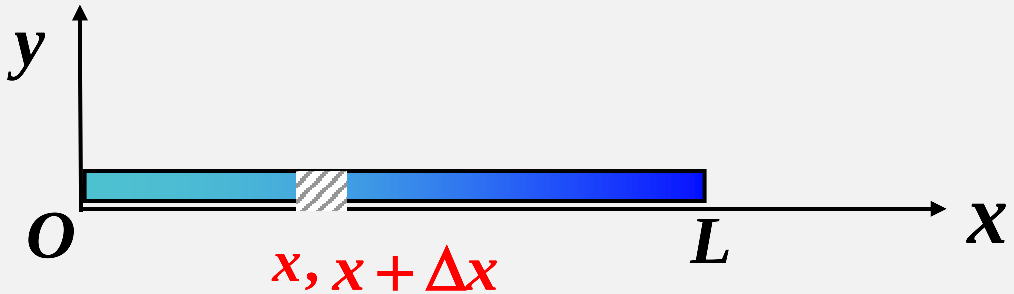
Step2，求和，取极限；

Step3，转变成定积分计算。



$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{r=0}^{r=R} 2\pi r \Delta r = \int_0^R 2\pi r \, \mathrm{d}r = \pi R^2.$$

微积分应用举例 2



若细杆质量均匀分布，每单位长度的质量为λ_0，

则细杆的总质量为： $m=\lambda_0 L$。

若质量分布不均匀，$\lambda(x)=2x+1$，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{x=x1}^{x=x2}\lambda(x)\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{x=x1}^{x=x2}(2x+1)\Delta x=\int_0^L(2x+1)\mathrm{d}x$$

$$=L^2+L.$$

数学知识补充——矢量函数的导数

9. 一元矢量函数： $\vec{A}=\vec{A}(t),,...$

可分解为： $\vec{A}(t)=A_x(t)\hat{i}+A_y(t)\hat{j}+A_z(t)\hat{k}$

一元矢量函数的导数（微商）

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\hat{i}+\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\hat{j}+\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

Eg, $\vec{r}(t)=2t^2\hat{i}+e^{-t}\hat{j}+5\hat{k}$

则 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=4t\,\hat{i}-e^{t}\hat{j}+0\hat{k}=4t\,\hat{i}-e^{t}\hat{j}.$

数学知识补充— 矢量函数的积分

- 矢量函数积分的坐标表式

若 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}=\vec{B}(t)$, 且 $\vec{A}(t)=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$,

$$\vec{B}(t)=B_x(t)\hat{i}+B_y(t)\hat{j}+B_z(t)\hat{k}$$

则: $\vec{A}(t)=\int\vec{B}(t)\mathrm{d}t$,

且满足:

$$A_x=\int B_x(t)\mathrm{d}t,\ A_y=\int B_y(t)\mathrm{d}t,\ A_z=\int B_z(t)\mathrm{d}t$$

数学知识补充——矢量函数的积分

- 矢量函数的定积分

若 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{B}(t)$,

则 $\vec{B}(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{A}(t)$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{B}(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\vec{A}(t) = \vec{A}(t)\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= \vec{A}(t_2) - \vec{A}(t_1)$$

作业

练习题：

已知：$\vec{A} = 3e^{-t}\hat{i} - (4t^3 - t)\hat{j} + t\,\hat{k}$， $\vec{B} = 4\hat{i} + 3t\,\hat{j}$,

求： $\vec{A}\cdot\vec{B} = ?$ $\vec{A}\times\vec{B} = ?$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = ? \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\times\vec{B}) = ?$$

$$\int_0^1 (\vec{A}\cdot\vec{B})\mathrm{d}t = ? \qquad \int_0^1 (\vec{A}\times\vec{B})\mathrm{d}t = ?$$

作业和考试中的书写规定

$\vec{A}$　　上面的**箭头**不能丢！

$\vec{A}\cdot\vec{B}$

$\vec{A}\times\vec{B}$

中间的**点乘符号、叉乘符号**不能丢！

辨析：$\vec{A}\times\vec{B}=AB\sin\theta$　　？

$\vec{v}=10m/s$　　？　　$\left|\vec{v}\right|=10m/s,$

$v=10m/s$

THANKS

FOR YOUR ATTENTION

Last Page