第三章　多维随机变量及其分布

习 题 课

一、重点与难点

二、主要内容

三、典型例题

一、重点与难点

1.重点

二维随机变量的分布

有关概率的计算和随机变量的独立性

2.难点

条件概率分布

随机变量函数的分布

二、主要内容

二维随机变量

推广

随机变量的相互独立性

定义

联合分布律

联合分布函数

联合概率密度

条件分布

定义

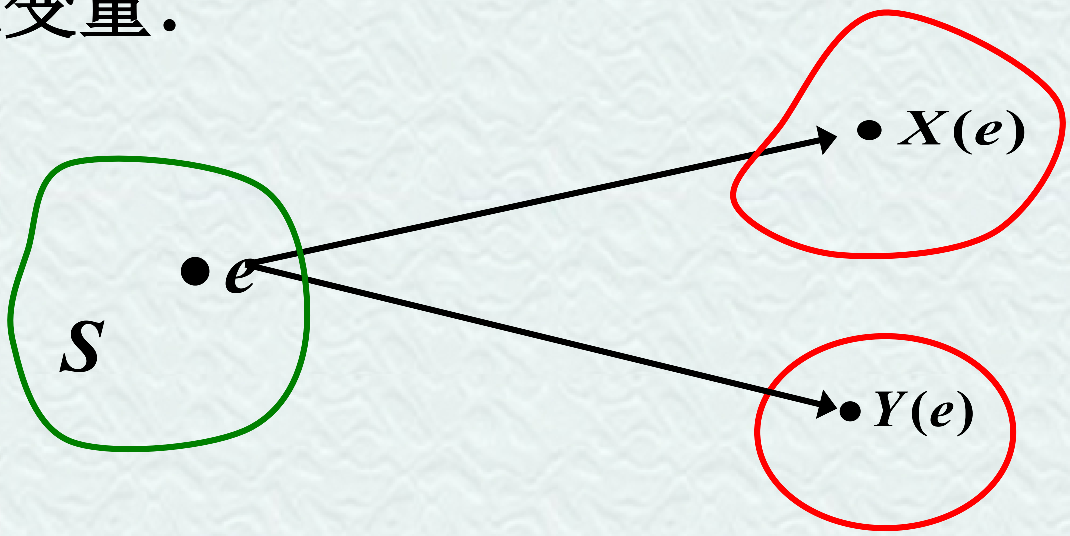
性质

边缘分布

两个随机变量的函数的分布

二维随机变量

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个向量 (X,Y)，叫作二维随机向量或二维随机变量.



二维随机变量的分布函数

(1) 定义

设 (X,Y) 是二维随机变量,对于任意实数 x, y ,二元函数:

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}=P\{X\le x, Y\le y\}$$

称为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数,或称为随机变量X 和 Y 的联合分布函数.

(2) 性质

1^0 $F(x,y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数,即对于任意固定的 y, 当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$;

对于任意固定的x,当$y_2 > y_1$时$F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$.

2^0 $0 \leq F(x,y) \leq 1$, 且有

对于任意固定的 y, $F(-\infty,y) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$;

对于任意固定的 x, $F(x,-\infty) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$;

$$F(-\infty,-\infty) = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0;$$

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,y)=1.$$

3^0 $F(x,y)=F(x+0,y), F(x,y)=F(x,y+0),$

即 $F(x,y)$ 关于 x 右连续,关于 y 也右连续.

4^0 对于任意 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, $x_1<x_2$, $y_1<y_2$,

有 $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geq 0.$

(3) n 维随机变量的概念

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X_1=X_1(e), X_2=X_2(e),\cdots,X_n=X_n(e)$，是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个 n 维向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 叫做 n 维随机向量或 n 维随机变量。

对于任意 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，n 元函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n\}$$

称为随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的**联合分布函数**。

二维离散型随机变量的分布律

设二维离散型随机变量(X,Y)所有可能取的值为$(x_i,y_j),i,j=1,2,\cdots$,记

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,$$

称此为二维离散型随机变量(X,Y)的分布律,或随机变量X和Y的联合分布律.

二维随机变量(X,Y)的分布律也可表示为:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

离散型随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij},$$

其中和式是对一切满足 $x_i \le x, y_j \le y$ 的 i,j 求和.

二维连续型随机变量的概率密度

(1) 定义

对于二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$, 如果存在非负的函数 $f(x,y)$ 使对于任意 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

则称 (X,Y) 是连续型的二维随机变量, 函数 $f(x,y)$ 称为二维随机变量 (X,Y) 的概率密度, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

(2) 性质

1^0 $f(x,y) \geq 0.$

2^0 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = F(\infty,\infty) = 1.$

3^0 若$f(x,y)$在(x,y)连续,则有$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$

4^0 设G是xoy平面上的一个区域,点(X,Y)落在G内的概率是

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(3) 说明

几何上, $z = f(x,y)$ 表示空间的一个曲面.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$$

表示介于 $f(x,y)$和 xoy 平面之间的空间区域的全部体积等于1.

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$P\{(X,Y)\in G\}$的值等于以G为底,以曲面$z = f(x,y)$为顶面的柱体体积.

(4) 两个常用的分布

设 D 是平面上的有界区域, 其面积为 S, 若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则称(X,Y)在D上服从均匀分布.

若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$为常数,$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1,$ 则称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布.记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布.

边缘分布函数

设$F(x,y)$为随机变量(X,Y)的分布函数,则

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\},$$

令 $y\to\infty$, 称

$$P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<\infty\}=F(x,\infty)$$

为随机变量 (X,Y) 关于 X 的边缘分布函数.

记为 $F_X(x)=F(x,\infty)$.

同理令 $x\to\infty$,

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=P\{X<\infty,Y\le y\}=P\{Y\le y\}$$

为随机变量 (X,Y) 关于 Y 的边缘分布函数.

离散型随机变量的边缘分布

设二维离散随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots.$$

记

$$p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\},\quad i=1,2,\cdots,$$

$$p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=P\{Y=y_j\},\quad j=1,2,\cdots,$$

分别称 $p_{i\bullet}\ (i=1,2,\cdots)$ 和 $p_{\bullet j}\ (j=1,2,\cdots)$ 为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

联合分布 **边缘分布**

随机变量关于X 和 Y的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},$$

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\sum_{y_j\le y}\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}.$$

连续型随机变量的边缘分布

对于连续型随机变量 (X,Y), 设它的概率密度为 $f(x,y)$, 由于

$$F_X(x) = F(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}\,x,$$

记
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

称为随机变量 (X,Y) 关于 X 的的边缘概率密度.

同理得 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x.$

随机变量的条件分布

(1) 离散型随机变量的条件分布

设 (X,Y) 是二维离散型随机变量,对于固定的 j, 若 $P\{Y=j\}>0$, 则称

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

$$i=1,2,\cdots,$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律.

同理可定义

对于固定的 i, $P\{X = x_i\} > 0$, 则称

$$P\{Y = y_j \mid X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

$$j = 1, 2, \cdots,$$

为在 $X = x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律.

(2) 连续型随机变量的条件分布

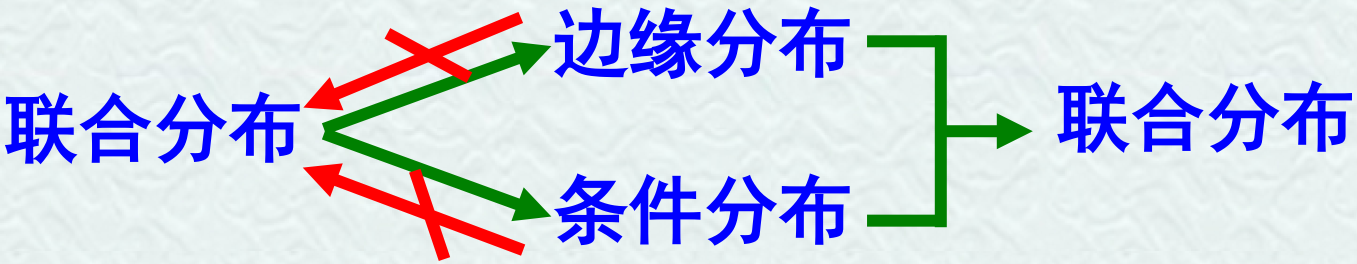
设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为$f_Y(y)$.若对于固定的 y, $f_Y(y)>0$, 则称 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在$Y=y$的条件下 X 的条件概率密度,记为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

在给定 $X=x$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

联合分布、边缘分布、条件分布的关系



随机变量的相互独立性

设 $F(x,y)$及$F_X(x),F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布 函数.若对于所有x, y有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},$$

即
$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量 X 和 Y 是**相互独立**的.

说明

(1) 若离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$

$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$ 即 $p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}.$

(2) 设连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 边缘概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$, 则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$

(3) X 和 Y 相互独立, 则 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立.

二维随机变量的推广

(1) n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**分布函数为**

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\},$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为任意实数.

(2) n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**概率密度函数**

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) =$$

$$\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

(3) n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的边缘**分布函数**

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \infty, \cdots, \infty)$$

称为 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于 X_1的**边缘分布函数**.

$$F_{X_1, X_2}(x_1) = F(x_1, x_2, \infty, \infty, \cdots, \infty)$$

称为n维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于(X_1, X_2)的**边缘分布函数**.

其它依次类推.

(4) n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的边缘概率密度

若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度，则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于 X_1，关于 (X_1, X_2) 的边缘概率密度分别为

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n,$$

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4\cdots\mathrm{d}x_n,$$

同理可得 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的 $k(1 \le k < n)$ 维边缘概率密度.

(5) 随机变量相互独立的定义的推广

若对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的.

若对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n) = F_1(x_1, x_2, \cdots, x_m) F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

其中 F_1, F_2, F 依次为随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 和 $(X_1, X_2, \cdots, X_m, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 的分布函数, 则称随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 与 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 是相互独立的.

定理　设$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立. 则$X_i(1,2,\cdots,m)$和$Y_j(j = 1,2,\cdots,n)$相互独立.又若h, g是连续函数.则$h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$和$g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立.

随机变量函数的分布

(1)离散型随机变量函数的分布

若二维离散型随机变量的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots$$

则随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布律为

$$P\{Z=z_k\}=P\{g(X,Y)=z_k\}=\sum_{z_k=g(x_i,y_j)} p_{ij},$$

$$k=1,2,\cdots.$$

(2)连续型随机变量函数的分布

$Z = X + Y$ 的分布

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,则$Z = X + Y$的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)\,\mathrm{d}y.$$

当 X, Y 独立时, $f_Z(z)$也可表示为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

$Z = \dfrac{X}{Y}$ 的分布

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,则$Z = \dfrac{X}{Y}$的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| \, f(yz, y) \, \mathrm{d}\, y.$$

当 X, Y 独立时,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| \cdot f_X(yz) \cdot f_Y(y) \, \mathrm{d}\, y.$$

$M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$ 的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

则有

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

推广

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 是 n 个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i), (i = 1,2,\cdots,n)$ 则$M = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$及$N = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数分别为

$$F_{\max}(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)]\cdots[1 - F_{X_n}(z)].$$

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且具有相同的分布函数 $F(x)$,则

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n, F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n.$$

三、典型例题

例1 在10件产品中有2件一等品、7件二等品和一件次品,从10件产品中不放回地抽取3件,用 X 表示其中的一等品数,Y 表示其中的二等品数.求:

(1) (X,Y) 的联合分布律;

(2) X,Y 的边缘分布律;

(3) X 和 Y 是否独立;

(4) 在 $X=0$ 的条件下,Y 的条件分布律.

解 由题设知 X 只能取 0, 1, 2,

Y 只能取 0, 1, 2, 3.

当 $i+j<2$ 或 $i+j>3$ 时,有

$$P\{X=i,Y=j\}=0.$$

当 $2\le i+j\le 3$ 时,由古典概率知

$$P\{X=i,Y=j\}=\binom{2}{i}\binom{7}{j}\binom{1}{3-i-j}\Big/\binom{10}{3},$$

$$(i=0,1,2,\ j=0,1,2,3).$$

因此的 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{21}{120}$	$\frac{35}{120}$
1	0	$\frac{14}{120}$	$\frac{42}{120}$	0
2	$\frac{1}{121}$	$\frac{7}{120}$	0	0

(2) X, Y 的边缘分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$P_{i\bullet}$
0	0	0	$\frac{21}{120}$	$\frac{35}{120}$	$\frac{56}{120}$
1	0	$\frac{14}{120}$	$\frac{42}{120}$	0	$\frac{56}{120}$
2	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{120}$	0	0	$\frac{8}{120}$
$P_{\bullet j}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$	1

(3) 因为 $P\{X=0,Y=0\}=0,$

$$P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{56}{120}\times\frac{1}{120}\neq 0,$$

所以 X 与 Y 不相互独立.

(4) 在 $X=0$ 的条件下,Y 的条件概率为

$$P\{Y=j|X=0\}=\frac{P\{X=0,Y=j\}}{P\{X=0\}},\quad j=0,1,2,3.$$

因此 Y 的条件分布律为

$Y = j \mid X = 0$	2	3
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

例2 设 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4独立同分布,且

$$P\{\xi_i=0\}=0.6,\quad P\{\xi_i=1\}=0.4,\quad i=1,2,3,4.$$

求:(1) 行列式 $\xi=\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \xi_3 & \xi_4\end{vmatrix}$的概率分布;

(2) 方程组 $\begin{cases}\xi_1x_1+\xi_2x_2=0\\ \xi_3x_1+\xi_4x_2=0\end{cases}$只有零解的概率.

[思路] 要求行列式 ξ 的分布律,先要将 ξ 的所有可能值找到,然后利用独立性将取这些值的概率计算出来,而第二问就是求系数行列式 $\xi\neq 0$ 的概率.

解 (1) 记 $\eta_1 = \xi_1\xi_4, \eta_1 = \xi_2\xi_3,$

则 $\xi = \xi_1\xi_4 - \xi_2\xi_3 = \eta_1 - \eta_2,$

由于 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$相互独立，故$\eta_1, \eta_2$也相互独立，

且η_1, η_2都只能取 0, 1 两个值，

而 $P\{\eta_1 = 1\} = P\{\eta_2 = 1\} = P\{\xi_2 = 1, \xi_3 = 1\}$

$$= P\{\xi_2 = 1\}P\{\xi_3 = 1\} = 0.16,$$

$$P\{\eta_1 = 0\} = P\{\eta_2 = 0\} = 1 - 0.16 = 0.84.$$

随机变量 $\xi = \eta_1 - \eta_2$ 有3个可能取值 $-1, 0, 1.$

$$P\{\xi = -1\} = P\{\eta_1 = 0, \eta_2 = 1\} = P\{\eta_1 = 0\}P\{\eta_2 = 1\}$$

$$= 0.84 \times 0.16 = 0.1344,$$

$$P\{\xi = 1\} = P\{\eta_1 = 1, \eta_2 = 0\}$$

$$= P\{\eta_1 = 1\}P\{\eta_2 = 0\}$$

$$= 0.16 \times 0.84 = 0.1344,$$

$$P\{\xi = 0\} = 1 - P\{\xi = -1\} - P\{\xi = 1\} = 0.7312.$$

于是行列式 ξ 的分布律为

ξ	-1	0	1
P	0.1344	0.7312	0.1344

(2) 由于齐次方程

$$\begin{cases} \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0 \\ \xi_3 x_1 + \xi_4 x_2 = 0 \end{cases}$$

只有零解的充要条件是系数行列式不为0，等价于

$$P\{\xi \neq 0\} = 1 - P\{\xi = 0\} = 1 - 0.7312 = 0.2688.$$

例3 设随机变量 (X,Y) 服从

$D=\{(x,y)\,|\,y\geq 0, x^2+y^2\leq 1\}$ 上的均匀分布, 定义

随机变量 U,V 如下

$$U=\begin{cases}0, & X<0,\\ 1, & 0\leq X<Y,\\ 2, & X\geq Y.\end{cases}\quad V=\begin{cases}0, & X\geq\sqrt{3}Y,\\ 1, & X<\sqrt{3}Y.\end{cases}$$

求 (U,V) 的联合概率分布, 并计算 $P\{UV\neq 0\}$.

[思路] 写出 (U,V) 的所有可能取值, 并利用均匀分布的特征计算其取值的概率.

解 由题设知 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

(U,V) 有6个可能取值：

$$(0,0)\quad(0,1)\quad(1,0)\quad(1,1)\quad(2,0)\quad(2,1)$$

$$P=\{U=0,V=0\}=P(\varnothing)=0,$$

$$P=\{U=1,V=0\}=P(\varnothing)=0,$$

$$P=\{U=1,V=1\}=P\{0\le X<Y,X<\sqrt{3}Y\}$$

$$= P\{0 \le X < Y\} = \iint\limits_{0 \le x < y} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{0 \le x < y} \frac{2}{\pi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}.$$

$$P = \{U = 0, V = 1\} = P\{X < 0, X < \sqrt{3}Y\}$$

$$= P\{X < 0\} = \frac{1}{2},$$

$$P = \{U = 2, V = 0\} = P\{Y \le X, X \ge \sqrt{3}Y\}$$

$$= P\{X \ge \sqrt{3}Y\} = \frac{1}{6},$$

$$P=\{U=2,V=1\}=P\{Y\le X, X<\sqrt{3}Y\}$$

$$=P\{Y\le X<\sqrt{3}Y\}=\frac{1}{12}.$$

所以 (U,V) 的联合概率分布为

$V \backslash U$	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

从而

$$P\{UV \neq 0\}$$

$$= P\{U = 1, V = 1\} + P\{U = 2, V = 1\}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

例4 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} cxe^{-y}, & 0<x<y<+\infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求常数 c;

(2) X 与 Y 是否独立?为什么?

(3) 求 $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$;

(4) 求 $P\{X<1|Y<2\}, P\{X<1|Y=2\}$;

(5) 求 (X,Y) 的联合分布函数;

(6) 求 $Z=X+Y$ 的密度函数;

(7) 求 $P\{X+Y<1\}$; (8) 求 $P\{\min(X,Y)<1\}$.

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$，得

$$1 = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}y \int_0^y cx\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x = \frac{c}{2}\int_0^{+\infty} y^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{c}{2}\Gamma(3) = c,$$

$$\Rightarrow c = 1.$$

(2) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_x^{+\infty} x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \int_0^y x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

由于在 $0 < x < y < +\infty$上, $f(x,y) \ne f_X(x) \cdot f_Y(y)$,

故 X 与 Y 不独立.

(3) $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2x}{y^2}, & 0<x<y<+\infty,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\begin{cases}\mathrm{e}^{x-y}, & 0<x<y<+\infty,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(4) $$P\{X<1 \mid Y<2\}=\frac{P\{X<1, Y<2\}}{P\{Y<2\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{2} f_Y(y)\,\mathrm{d}y}=\frac{\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{2} x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y}{\int_{0}^{2}\frac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{1-2\mathrm{e}^{-1}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}}{1-5\mathrm{e}^{-2}}.$$

又由条件密度的性质知

$$P\{X<1 \mid Y=2\}=\int_{-\infty}^{1} f_{X|Y}(x|2)\,\mathrm{d}x,$$

而 $f_{X|Y}(x|2) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

从而有

$$P\{X < 1 | Y = 2\} = \int_0^1 \frac{x}{2} \mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

(5) 由于 $F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$, 故有：

当 $x < 0$ 或 $y < 0$ 时, 有 $F(x, y) = 0$.

当 $0 \le y < x < +\infty$ 时, 有

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$

$$=\int_0^y \mathrm{d}v\int_0^v u\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^y v^2\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v$$

$$=1-\left(\frac{y^2}{2}+y+1\right)\mathrm{e}^{-y}.$$

当 $0\le x<y<+\infty$ 时，有

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\int_0^x \mathrm{d}u\int_u^y u\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^x u(\mathrm{e}^{-u}-\mathrm{e}^{-y})\,\mathrm{d}u$$

$$=1-(x+1)\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-y}.$$

故得

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{ 或 }y<0,\\ 1-(\frac{y^2}{2}+y+1)e^{-y}, & 0\le y<x<\infty,\\ 1-(x+1)e^{-x}-\frac{1}{2}x^2e^{-y}, & 0\le x<y<\infty.\end{cases}$$

(6)　根据 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,\mathrm{d}x$,

由于要被积函数 $f(x,z-x)$ 非零,只有当

$0<x<z-x$,即 $0<x<\frac{z}{2}$ 时，从而有:

当 $z<0$ 时, $f_Z(z)=0$;

当 $z\geq 0$ 时, $f_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}} x\mathrm{e}^{-(z-x)}\,\mathrm{d}\,x$

$$=\mathrm{e}^{-z}\int_0^{\frac{z}{2}} x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\mathrm{e}^{-z}+(\frac{z}{2}-1)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}};$$

因此 $$f_Z(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-z}+\left(\dfrac{z}{2}-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}} & z\geq 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

(7) $P\{X+Y<1\}=\int_{-\infty}^{1} f_Z(z)\,\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1 [\mathrm{e}^{-z}+(\frac{z}{2}-1)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}]\,\mathrm{d}z=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-1}.$$

(8) $P\{\min(X,Y)<1\}=1-P\{\min(X,Y)\geq 1\}$

$$=1-P\{X\geq 1, Y\geq 1\}$$

$$=1-\int_1^{+\infty}\mathrm{d}v\int_0^{v} u\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}u$$

$$=1-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} v^2\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v=1-\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1}.$$

例5 设随机变量 (X,Y) 在矩形

$$G=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\}$$

上服从均匀分布，试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 S 的概率密度 $f(s)$.

解 由题设知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{若 } (x,y)\in G,\\ 0, & \text{若 } (x,y)\notin G.\end{cases}$$

$S=X\cdot Y$，设 $F(s)=P\{S\le s\}$ 为 S 的分布函数，

则当 $s<0$ 时，$F(s)=P\{XY\le s\}=0$，

当 $s \geq 2$ 时, $F(s) = P\{XY \leq s\} = 1,$

当 $0 \leq s < 2$ 时,

$$F(s) = P\{S \leq s\} = P\{XY \leq s\} = 1 - P\{XY > s\}$$

$$= 1 - \iint\limits_{xy>s} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1 - \int_s^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{s}{x}}^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{s}{2}(1 + \ln 2 - \ln s).$$

故 $$f(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln s), & 0 \leq s < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$