第七节　克拉默法则

- 一、克拉默法则
- 二、重要定理
- 三、小结　思考题

非齐次与齐次线性方程组的概念

设线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若常数项$b_1, b_2, \cdots, b_n$不全为零，则称此方程组为**非齐次线性方程组**；若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零，此时称方程组为**齐次线性方程组**.

一、Cramer法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式不等于零，即 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

上页 下页 返回

那么线性方程组(1)有解，并且解是唯一的，解可以表为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中D_j是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

上页 下页 返回

证明

用D中第1列元素的代数余子式$A_{11}, A_{21}, \cdots, A_{n1}$依次乘方程组(1)的$n$个方程,得

$$\begin{cases} \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\right)A_{11} = b_1 A_{11} \\ \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n\right)A_{21} = b_2 A_{21} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n\right)A_{n1} = b_n A_{n1} \end{cases}$$

在把 n 个方程依次相加，得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{k1}\right)x_1+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k2}A_{k1}\right)x_j+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{k1}\right)x_n$$

$$=\sum_{k=1}^{n} b_k A_{k1},$$

由代数余子式的性质可知, 上式中x_1的系数等于D,

而其余$x_j\left(j=2,3,\cdots n\right)$的系数均为0; 又等式右端为$D_1$.

于是 $Dx_1=D_1.$

同理 $Dx_j=D_j\left(j=2,\cdots,n\right).$ **(2)**

当$D\neq 0$时,方程组(2)有唯一的一个解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

上页 下页 返回

由于方程组(2)与方程组 (1) 等价，故

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

也是方程组的(1)解.

二、重要定理

定理1　如果线性方程组(1)的系数行列式 $D \neq 0$, 则 (1)一定有解, 且解是唯一的 .

定理2　如果线性方程组(1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

上页　下页　返回

齐次线性方程组的相关定理

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

定理 如果齐次线性方程组(2)的系数行列式 $D \neq 0$ 则齐次线性方程组 (2) 只有零解.

定理　如果齐次线性方程组 (2) 有非零解，则它的系数行列式必为零.

系数行列式 $D = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解.

例1 用Cramer法则解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

上页 下页 返回

$$= -\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -27, \qquad\qquad = 27,$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{81}{27} = 3, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-108}{27} = -4,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-27}{27} = -1, \qquad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{27}{27} = 1.$$

例2 a 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a \\ ax_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+ax_3=1 \end{cases}$ 有唯一解.

解:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}=-(a-1)^2$$

$\therefore a\neq 1$时方程组有惟一解

上页 下页 返回

例3 问 λ 取何值时，齐次方程组

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0, \end{cases}$$

有非零解？

解

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & -3+\lambda & 4\\ 2 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)^3+(\lambda-3)-4(1-\lambda)-2(1-\lambda)(-3+\lambda)$$

$$=(1-\lambda)^3+2(1-\lambda)^2+\lambda-3$$

齐次方程组有非零解，则 $D=0$

所以 $\lambda=0,\lambda=2$ 或 $\lambda=3$时齐次方程组有非零解.

上页 下页 返回

三、小结

1. 用Cramer法则解方程组的两个条件

(1)方程个数等于未知量个数;

(2)系数行列式不等于零.

2. Cramer法则建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系.它主要适用于理论推导.

思考题

当线性方程组的系数行列式为零时,能否用Cramer法则解方程组?为什么?此时方程组的解为何?

思考题解答

不能,此时方程组的解为无解或有无穷多解.

上页 下页 返回

作业

P28　　9；12