第四章 向量组的线性相关性

本章内容——线性代数的几何理论

- 向量组:线性组合,线性相关性,秩
- 向量空间

  →线性方程组解的结构,解空间

学习本章的关键:

抓住向量组,矩阵,线性方程组的联系与互相转化

§1 向量组及其线性组合

一. n 维向量

二. 线性表示, 线性组合与等价的概念

引例1.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$$(1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{matrix} (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, b_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}, b_m) \end{matrix}$$

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

引例2. 飞机的运行状态

$$(x, y, z, v_x, v_y, v_z, a_x, a_y, a_z, t)^T$$

一. n 维向量

定义1. n 个有序数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的数组称为 n 维向量，a_i 称为第 i 个分量.

分类 $\begin{cases} \text{实向量} \\ \text{复向量} \end{cases}$

表示法：$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\vec{a}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

列向量　　行向量

约定：$\vec{a}$ 与 $\vec{a}^T$ 表示两个不同的向量.

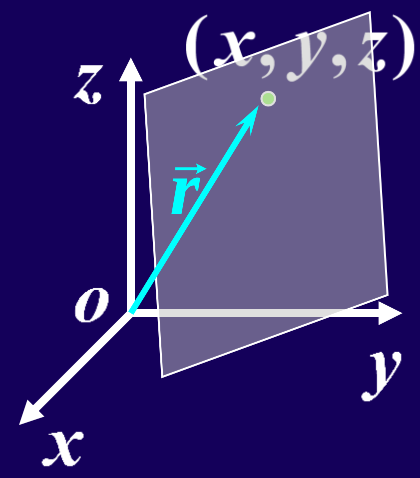
运算：同矩阵运算

几何意义:

空间解析几何中 点 $(x,y,z) \xleftrightarrow{1-1}$ 向量 $\vec{r}=(x,y,z)^T$

$$R^3=\{\vec{r}=(x,y,z)^T \mid x,y,z\in R\}$$

三维向量空间



$$\Pi=\{\vec{r}=(x,y,z)^T \mid ax+by+cz=d\}$$

R^3中的平面

推广:

$$R^n=\{\vec{r}=(x_1,\cdots,x_n)^T \mid x_1,\cdots,x_n\in R\}$$ n **维向量空间**

$$\Pi=\{\vec{r}=(x_1,\cdots,x_n)^T \mid a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b\}$$

R^n中的 $n-1$ 维超平面

向量组 — 若干个同维数的**列**(**行**)向量之集.

有限个向量的向量组与矩阵的关系:

n 维列向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$

$$\longleftrightarrow \quad A_{n\times m} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)$$

n 维行向量组 $\vec{\beta}_1^T, \vec{\beta}_2^T, \cdots, \vec{\beta}_m^T$

$$\longleftrightarrow \quad B_{m\times n} = \begin{pmatrix} \vec{\beta}_1^T \\ \vdots \\ \vec{\beta}_m^T \end{pmatrix}$$

因此, 可以用矩阵研究向量组, 也可用向量组研究矩阵.

二. 线性表示, 线性组合与等价的概念

引例1. 设$A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m)$, $A\vec{x}=\vec{b}$有解

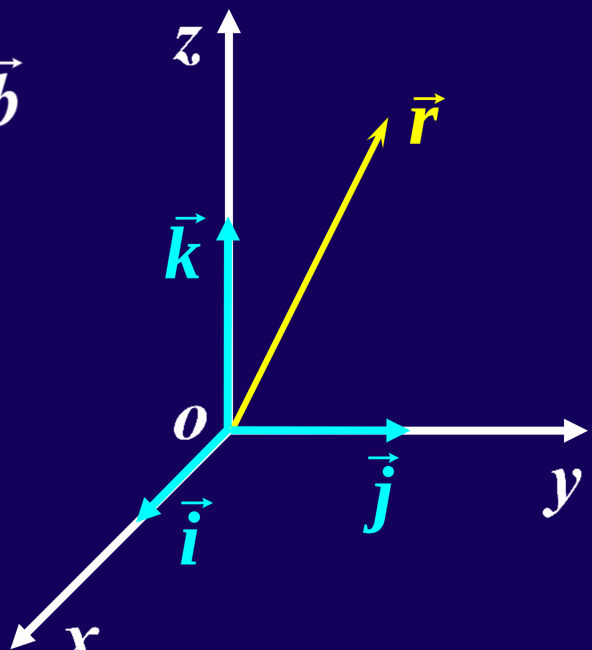
$$\vec{x}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}$$

则

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_m\vec{a}_m=\vec{b}$$

引例2. R^3中

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$



定义2. 给定向量组 $A:\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m$，对任意一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，称

$$k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\cdots+k_m\vec{a}_m$$

为向量组 A 的一个**线性组合**，$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为**组合系数**.

给定 $\vec{b}$，若存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使

$$\vec{b}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_m\vec{a}_m$$

则称 $\vec{b}$ 能由向量组 A **线性表示.**

注意:

(1) 零向量 $\vec{0}$ 可由任意向量组 $A:\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m$ 线性表示.

(2) n 维单位向量

$$\vec{e}_i = (0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0)^T \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

任给向量$\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$都可由 n 维单位向量线性表示:

$$\vec{\alpha} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \cdots + a_n\vec{e}_n$$

(3) 向量 $\vec{b}$ 能由向量组 $A: \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 线性表示

$\Longleftrightarrow$ 线性方程组 $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_m\vec{a}_m = \vec{b}$ 有解

由P77定理5可得:

定理1. 向量 $\vec{b}$ 能由向量组 $A:\vec{a}_1,\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_n$ 线性表示

$$\Longleftrightarrow R(\vec{a}_1,\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_n)=R(\vec{a}_1,\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_n,\vec{b})$$

例1. 设 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},\vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$, **证明向量** $\vec{b}$ 能由向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性表示.

证: $$B=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $R(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)=R(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{b})=2$

故 $\vec{b}$ 能由向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性表示.

定义3. 给定两个 n 维向量组

$$A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m,\quad B:\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_l$$

若 B 组中每一向量都能由 A 组线性表示，则称向量组 B 能由向量组 A 线性表示；

若向量组 A 与 B 能互相线性表示，则称二者**等价**.

矩阵描述:

组 B 能由组 A 线性表示 $\xleftrightarrow{\text{定义}}$ 存在 $k_{1j},\cdots,k_{mj}$ 使

$$\vec{b}_j=k_{1j}\vec{a}_1+k_{2j}\vec{a}_2+\cdots+k_{mj}\vec{a}_m=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)\begin{pmatrix}k_{1j}\\ \vdots\\ k_{mj}\end{pmatrix}$$

$$(j=1,2,\cdots,l)$$

$\Longleftrightarrow$ 存在矩阵 $K_{m\times l}=(k_{ij})_{m\times l}$，使

$$(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_l)=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1l}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ k_{m1}&k_{m2}&\cdots&k_{ml}\end{pmatrix}$$

即 $B=AK$

思考题 1. 设 $C_{m\times n}=A_{m\times l}B_{l\times n}$

见书P83

(1) C与A 的列向量组之间有何关系?

(2) C与B 的行向量组之间有何关系?

答:

$$C=(\vec{c}_1,\vec{c}_2,\cdots,\vec{c}_n)=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_l)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

C 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示,系数矩阵为 B.

$$C=\begin{pmatrix} \vec{\gamma}_1^T \\ \vdots \\ \vec{\gamma}_m^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\beta}_1^T \\ \vdots \\ \vec{\beta}_l^T \end{pmatrix}$$

C 的行向量组可由B 的行向量组线性表示,系数矩阵为 A.

思考题 2.

(1) 矩阵 A 与矩阵 B 行等价 (即 $A \overset{r}{\sim} B$), 他们的行向量组有何关系?

(2) 矩阵 A 与矩阵 B 列等价 (即 $A \overset{c}{\sim} B$), 他们的列向量组有何关系?

见书P84

答: 矩阵 A 与矩阵 B 行等价

$\longrightarrow$ 矩阵 A 与B 的行向量组等价

矩阵 A 与矩阵 B 列等价

$\longrightarrow$ 矩阵 A 与B 的列向量组等价

注意:

1. 三个重要关系

$A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m,\quad B:\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_l$

$\vec{b}$ 能由 $A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性表示

$\Longleftrightarrow$ 存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$, 使

$$\vec{b}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_m\vec{a}_m$$

$\Longleftrightarrow$ 线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$有解

其中: $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m)$

B 组能由 A 组线性表示

$\Longleftrightarrow$ **存在矩阵 $K_{m\times l}(k_{ij})$, 使**

$$\underbrace{(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_l)}_{\text{记作 } B_{n\times l}}=\underbrace{(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)}_{A_{n\times m}}\underbrace{\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ml} \end{pmatrix}}_{K_{m\times l}}$$

即 $B=AK$

$\Longleftrightarrow$ **矩阵方程** $AX=B$有解

2. 几个重要结论

	等价关系	充要条件	必要条件
向量组的关系	组B 能由组A 线性表示	$R(A)=R(A,B)$	$R(B)\le R(A)$
矩阵间的关系	$\Updownarrow$ 存在矩阵 K $AK=B$	$R(A)=R(A,B)$	$R(B)\le R(A)$
矩 阵 方 程	$\Updownarrow$ $AX=B$ 有解	$R(A)=R(A,B)$	$R(B)\le R(A)$

定理2. 组 B 能由组 A 线性表示 $\Longleftrightarrow R(A)=R(A,B)$

推 论. 组B 与组 A 等价 $\Longleftrightarrow R(A)=R(B)=R(A,B)$

定理3. $A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m,\ B:\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_l$

组 B 能由组 A 线性表示 $\Rightarrow$ $R(B)\le R(A)$

例2. 设

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\vec{a}_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix},\quad \vec{b}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\vec{b}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\vec{b}_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix},$$

证明向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 与向量组 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 等价．

证: 记 $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2),\ B=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3),$

$$(A,B)=\left(\begin{array}{cc|ccc}1&3&2&1&3\\-1&1&0&1&-1\\1&1&1&0&2\\-1&3&1&2&0\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&3&2&1&3\\0&2&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

可见 $R(A)=R(B)=R(A,B)=2$

所以二向量组等价.

例3. 设 n 维向量组 $A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$, 构成 $n\times m$ 矩阵

$$A=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)$$

证明 n 维单位坐标向量 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n$ 能由组 A 线性表示的充要条件是 $R(A)=n.$

证: $E=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n)$ 为单位矩阵

$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n$ 能由组 A 线性表示

$\Longleftrightarrow R(A)=R(A,E)$

(A,E) 只有 n 行, 且 n 阶子式 $|E|=1\neq 0$

$\therefore R(A,E)=n$

$\Longleftrightarrow R(A)=n$

***说明:** 本例的几种表述方式

几何语言	$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n$ 能由 $A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性表示 $\Longleftrightarrow R(A)=n$
方程语言	矩阵方程 $A_{n\times m}X=E$ 有解 $\Longleftrightarrow R(A)=n$
矩阵语言	① 对 $A_{n\times m}$，存在 $Q_{m\times n}$，使 $AQ=E_n$ $\Longleftrightarrow R(A)=n$ ② 对 $B_{n\times m}$，存在 $P_{n\times m}$，使 $PB=E_m$ $\Longleftrightarrow R(B)=n$ **说明:** 当 $m=n$ 时，P,Q 即为A^{-1}，所以①,②可看作逆矩阵概念的推广.

小结

1. 线性表示的概念与充要条件

$$A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m,\quad B:\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_l$$

$\vec{b}$能由 A 组线性表示

$\Longleftrightarrow$ 存在$k_1,\ldots,k_m$,使

$$\vec{b}=k_1\vec{a}_1+\cdots+k_m\vec{a}_m$$

$$=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow$ $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解

$\Longleftrightarrow$ $R(A,\vec{b})=R(A)$

B 组能由 A 组线性表示

$\Longleftrightarrow$ 存在 $K_{m\times l}(k_{ij})$, 使

$$(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_l)$$

$$=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)\begin{pmatrix}k_{11}&\cdots&k_{1l}\\ \vdots&&\vdots\\ k_{m1}&\cdots&k_{ml}\end{pmatrix}$$

即 $B=AK$

$\Longleftrightarrow$ $AX=B$有解

$\Longleftrightarrow$ $R(A,B)=R(A)$

2. 组B 能由组A 线性表示 $\Longrightarrow$ $R(B) \le R(A)$

注意: 反之不真. 反例: 三维向量组 $A: \vec{e}_1, \vec{e}_2$; $B: \vec{b} = \vec{e}_3$

$$R(B) = 1 < R(A) = 2$$

但组 B 不能由组A 线性表示

3. 组A与组B等价的概念；

组A与组B等价 $\Longleftrightarrow$ $R(B) = R(A) = R(A,B)$

4. 线性表示,线性组合等概念可推广到线性方程组中