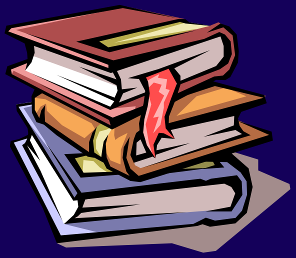
§2 方阵的特征值与特征向量

一. 特征值与特征向量的概念

二. 特征值与特征向量的性质



一. 特征值与特征向量的概念

定义6. 给定n 阶方阵 A, 若存在数 λ 和非零向量 $\vec{x}$, 使

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

则称 λ 为 A 的**特征值**, $\vec{x}$ 为A的对应于λ 的**特征向量**.

$|A-\lambda E| = 0$ 称为 A 的**特征方程**

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

称为 A 的**特征多项式**

注意:

λ 为A的特征值 $\Longleftrightarrow$ λ 使$(A-\lambda E)\vec{x} = \vec{0}$ 有非零解

$\Longleftrightarrow$ λ 满足 $|A-\lambda E| = 0$

思考题　(1) A的特征值与A^T的特征值有何关系?

(2) 下述矩阵的特征值与特征多项式有何特点

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

提示:

Λ的特征多项式: $f(\lambda) = (a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda)\cdots(a_n - \lambda)$

A的特征多项式: $f(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda)$

3. 在复数范围内,n 阶方阵有n 个特征值.

4. 特征值与特征向量的求法:

第一步. 由 $|A - \lambda E| = 0$ 求λ_i

第二步. 由$(A - \lambda_i E)\vec{x} = \vec{0}$ 求对应于λ_i 的特征向量

例1. 求 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解: $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=0$

得 $\lambda_1=2, \lambda_2=4$

对 $\lambda_1=2$, 解方程组 $(A-2E)\vec{x}=\vec{0}$

$$A-2E=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\overset{r_2+r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 $x_1=x_2$, 故可取特征向量: $\vec{p}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

对 $\lambda_2=4$, 解方程组 $(A-4E)\vec{x}=\vec{0}$,

$$A-4E=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\underset{-1\times r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 $x_1=-x_2$

故可取特征向量: $\vec{p}_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

注: $\vec{p}$ 是 A 的特征向量 $\Rightarrow$ $k\vec{p}\ (k\neq 0)$ 也是 A 的特征向量

例2. 求 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值与全部特征向量.

解: $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$

得 $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

对 $\lambda_1 = 2$, 解方程组 $(A-2E)\vec{x} = \vec{0}$

$$A-2E = \begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2+4r_1\\ r_3+3r_1-r_2}]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

基础解系: $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, 对应 $\lambda_1=2$ 的全部特征向量为

$k\,\vec{p}_1\ (k \neq 0)$

对 $\lambda_2=\lambda_3=1$, 解方程组 $(A-E)\vec{x}=\vec{0}$

$$A-E=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

基础解系: $\vec{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$,

对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量为 $k\vec{p}_2\ (k\neq 0)$

注意: 此题重特征值对应的线性无关特征向量个数少于特征值重数.

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}}$$

例3. 求 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值与全部特征向量.

解: $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & \boxed{2-\lambda} & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2$

得 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=2$

对 $\lambda_1=-1$, 解方程组 $(A+E)\vec{x}=0$

$$A+E=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -4 & 1 & 4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

基础解系: $\vec{p}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, 对应 $\lambda_1=-1$ 的全部特征向量为

$k\,\vec{p}_1\ (k\neq 0)$

对 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, 解方程组 $(A-2E)\vec{x} = \vec{0}$

$$A-2E = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基础解系: $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 的全部特征向量为

$k_2\vec{p}_2 + k_3\vec{p}_3$ (k_2, k_3 不同时为0)

注意: 从以上两例可见,重特征值对应的线性无关特征向量个数可能与重数相等, 也可能少于重数.

例4. 设λ为方阵 A的特征值, 证明

(1) λ^2 为A^2 的特征值;

(2) A 可逆时, $\lambda \neq 0$, $\dfrac{1}{\lambda}$为A^{-1}的特征值.

证: 设A 对应于λ 的特征向量为 $\vec{p}$, 即

$$A\vec{p} = \lambda\vec{p} \quad (\vec{p} \neq \vec{0})$$

(1) $$A^2\vec{p} = A(\lambda\vec{p}) = \lambda^2\vec{p} \qquad (\vec{p} \neq \vec{0})$$

故 λ^2 为A^2 的特征值 , 特征向量仍为 $\vec{p}$.

(2) A 可逆时, $\vec{p} = A^{-1}(\lambda\vec{p})$, $\because\ \vec{p} \neq \vec{0}$, 故

$$\lambda \neq 0, \quad A^{-1}\vec{p} = \frac{1}{\lambda}\vec{p} \quad (\vec{p} \neq \vec{0})$$

所以$\lambda \neq 0$, $\dfrac{1}{\lambda}$为A^{-1}的特征值, 特征向量仍为 $\vec{p}$.

推广: 设λ为A 的特征值, 对应特征向量为 $\vec{p}$

给定多项式 $\varphi(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_mt^m$

$$\varphi(A)\vec{p}=(a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m)\vec{p}$$
$$=(a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m)\vec{p}$$
$$=\varphi(\lambda)\vec{p} \qquad (\vec{p}\neq\vec{0})$$

$\varphi(\lambda)$为$\varphi(A)$ 的特征值, 对应特征向量仍为 $\vec{p}$

若 A 可逆,

$$\psi(A)=a_{-1}A^{-1}+a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$$

有类似结论, 即 $\psi(\lambda)=a_{-1}\lambda^{-1}+a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$

为$\psi(A)$ 的特征值, 对应特征向量仍为$\vec{p}$

二.特征值与特征向量的性质

1. 定理2. $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 为 A 的**互不相等**的特征值

$\vec{p}_1,\cdots,\vec{p}_m$ 依次为对应的特征向量

$\Longrightarrow \vec{p}_1,\cdots,\vec{p}_m$ **线性无关**

证: 设 $x_1\vec{p}_1+x_2\vec{p}_2+\cdots+x_m\vec{p}_m=\vec{0}$ ☆

依次用 $A, A^2, \dots, A^{m-1}$ 左乘☆式, 得

$$\begin{cases} x_1\vec{p}_1+x_2\vec{p}_2+\cdots+x_m\vec{p}_m=\vec{0} \\ \lambda_1(x_1\vec{p}_1)+\lambda_2(x_2\vec{p}_2)+\cdots+\lambda_m(x_m\vec{p}_m)=\vec{0} \\ \lambda_1^2(x_1\vec{p}_1)+\lambda_2^2(x_2\vec{p}_2)+\cdots+\lambda_m^2(x_m\vec{p}_m)=\vec{0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{m-1}(x_1\vec{p}_1)+\lambda_2^{m-1}(x_2\vec{p}_2)+\cdots+\lambda_m^{m-1}(x_m\vec{p}_m)=\vec{0} \end{cases}$$

即

$$(x_1\vec{p}_1, x_2\vec{p}_2, \cdots, x_m\vec{p}_m)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix}}_{F} = (\vec{0}, \vec{0}, \vec{0}, \cdots, \vec{0})$$

$|F|$ 为范德蒙行列式的转置, $\therefore\ |F| = \prod\limits_{1 \le j < i \le m} (\lambda_i - \lambda_j)$

$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 互不相等 $\Longrightarrow |F| \neq 0 \Longrightarrow F$ 可逆

$$\Longrightarrow x_i\vec{p}_i = \vec{0} \quad (i = 1, \cdots, m)$$

$$\xrightarrow{\vec{p}_i \neq \vec{0}} x_i = 0 \quad (i = 1, \cdots, m)$$

$\Longrightarrow \vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m$ 线性无关

2. 设 n 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 则

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\mathrm{tr}(A)$ (称为矩阵A 的迹)

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$ (利用特征多项式可证)

可见: A 非奇 $\Longleftrightarrow$ A 的特征值全不为 0

例5. 设3 阶矩阵的特征值为 1, –1, 2, 求 $|A^*+3A-2E|$

解: 因A 的特征值全不为0, 故 A 可逆,

$$A^*=|A|A^{-1}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3A^{-1}=-2A^{-1}$$

$$A^*+3A-2E=-2A^{-1}+3A-2E\overset{\text{记}}{=\!=}\varphi(A)$$

则 $\varphi(\lambda)=-\dfrac{2}{\lambda}+3\lambda-2$

$$|A^*+3A-2E|=\varphi(1)\varphi(-1)\varphi(2)$$
$$=9$$

思路: 求矩阵 $B=A^*+3A-2E$ 的所有特征值

例6. 设 λ_1, λ_2是矩阵A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量依次为 $\vec{p}_1, \vec{p}_2$, 证明 $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$不是 A 的特征向量.

证: 由题意,

$$A\vec{p}_1 = \lambda_1\vec{p}_1, \quad A\vec{p}_2 = \lambda_2\vec{p}_2, \quad (\vec{p}_1 \neq \vec{0}, \vec{p}_2 \neq \vec{0})$$

因此 $$A(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \lambda_1\vec{p}_1 + \lambda_2\vec{p}_2 \qquad ①$$

反证法. 假设 $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ 是A的特征向量, 则存在λ, 使

$$A(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \lambda(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \qquad ②$$

由 ①, ② 两式得 $(\lambda_1 - \lambda)\vec{p}_1 + (\lambda_2 - \lambda)\vec{p}_2 = \vec{0}$

据定理2 $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ 线性无关, 故由上式得 $\lambda_1 - \lambda = \lambda_2 - \lambda = 0$,

于是 $\lambda_1 = \lambda_2$, 与题设矛盾! 故假设不真.

小结

1. 概念：方阵的特征值与特征向量 $A\vec{x}=\lambda\vec{x}\quad(\vec{x}\neq\vec{0})$

特征多项式 $|A-\lambda E|$，特征方程 $|A-\lambda E|=0$

2. 特征值与特征向量的求法

由 $|A-\lambda E|=0$ 求 λ_i

由 $(A-\lambda_i E)\vec{x}=\vec{0}$ 求对应于 λ_i 的特征向量

3. 特征值与特征向量的性质

① A 的互不相等的特征值对应的特征向量线性无关

② $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\mathrm{tr}(A)$

③ $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

作业

P134

6(1), (2)；7；9；10；12；13