第六节 $(0-1)$分布参数的区间估计

一、置信区间公式

二、典型例题

一、置信区间公式

设有一容量 $n > 50$ 的大样本，它来自 $(0-1)$ 分布的总体 X，X 的分布律为 $f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x}$，$x = 0, 1$，其中 p 为未知参数，则 p 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right),$$

其中 $a = n + z_{\alpha/2}^2$，$b = -(2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^2)$，$c = n\overline{X}^2$.

推导过程如下:

因为(0–1)分布的均值和方差分别为

$$\mu = p, \quad \sigma^2 = p(1-p),$$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本，因为容量n较大,

由**中心极限定理**知 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \dfrac{n\overline{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

近似地服从 $N(0,1)$ 分布,

$$P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{n\overline{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}\right\} \approx 1-\alpha,$$

不等式 $-z_{\alpha/2} < \dfrac{n\overline{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}$

等价于 $(n + z_{\alpha/2}^2)p^2 - (2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^2)p + n\overline{X}^2 < 0,$

令 $p_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $p_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

其中 $a = n + z_{\alpha/2}^2$, $b = -(2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^2)$, $c = n\overline{X}^2$.

则 p 的近似置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$(p_1,\ p_2).$$

二、典型例题

例1 设从一大批产品的100个样品中，得一级品60个，求这批产品的一级品率 p 的置信水平为0.95的置信区间.

解 一级品率 p 是(0-1)分布的参数,

$$n = 100, \quad \bar{x} = \frac{60}{100} = 0.6,$$

$$1 - \alpha = 0.95, \quad z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96,$$

则 $a = n + z_{\alpha/2}^2 = 103.84,$

$$b = -(2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^2) = -(2n\overline{x} + z_{\alpha/2}^2) = -123.84,$$

$$c = n\overline{X}^2 = n\overline{x}^2 = 36,$$

于是 $p_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.50,$

$$p_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.69,$$

p 的置信水平为0.95的置信区间为 (0.50, 0.69).

例2 设从一大批产品的120个样品中, 得次品9个, 求这批产品的次品率 p 的置信水平为0.90的置信区间.

解 $n = 120,\quad \bar{x} = \dfrac{9}{100} = 0.09,\quad 1-\alpha = 0.90,$

则 $a = n + z_{\alpha/2}^2 = 122.71,$

$$b = -(2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^2) = -(2n\bar{x} + z_{\alpha/2}^2) = -24.31,$$

$$c = -n\overline{X}^2 = -n\bar{x}^2 = 0.972,$$

于是 $$p_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0.056,$$

$$p_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0.143,$$

p 的置信水平为0.90的置信区间为 (0.056, 0.143).