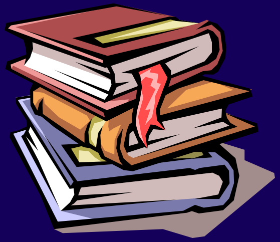
§4 线性方程组的解的结构

一. 齐次线性方程组解的结构

二. 非齐次线性方程组解的结构



线性方程组理论包括:

1. 解的存在唯一性条件 (上章已解决)

(1) $A_{m\times n}\vec{x}=\vec{0}$ 有非零解 $\Longleftrightarrow R(A)<n$

(2) $A_{m\times n}\vec{x}=\vec{b}$ 有唯一解 $\Longleftrightarrow R(A)=R(A,\vec{b})=n$

(3) $A_{m\times n}\vec{x}=\vec{b}$ 有无穷多解 $\Longleftrightarrow R(A)=R(A,\vec{b})<n$

2. 求解方法 (1) 初等变换法 (上章)

(2) Crame法则(第一章, 仅对A为方阵适用)

(理论意义大于计算意义)

3. 解的结构 (本章)

齐次线性方程组解的结构

非齐次线性方程组解的结构

一. 齐次线性方程组解的结构

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

写成向量方程: $A\vec{x} = \vec{0}$ (2)

(2) 的解 $\vec{x} = \vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix}$ 称为解向量.

性质1. $\vec{x} = \vec{\xi}_1, \vec{x} = \vec{\xi}_2$ 都是(2)的解

$\Longrightarrow \vec{x} = \vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2$ 也是(2)的解

性质2. $\vec{x} = \vec{\xi}_1$, 是(2)的解, k 为实数

$\Longrightarrow \vec{x} = k\vec{\xi}_1$ 也是(2)的解

- 记方程(2)的所有解之集为S，设S 的一个最大无关组为

$$S_0: \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \cdots, \vec{\xi}_t \qquad (*)$$

则(2)的通解为 $\vec{x} = k_1\vec{\xi}_1 + k_2\vec{\xi}_2 + \cdots + k_t\vec{\xi}_t$

$(k_1, k_2, \cdots, k_t \in \mathrm{R})$ (P95)

称 (*) 为齐次方程组(1)的**基础解系**.

- 基础解系的求法: 初等变换法

设 $R(A) = r$，无妨设

$$A \overset{r}{\sim} B = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n-r} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

一种方法是写出等价方程组:

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1n-r}x_n \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \cdots - b_{2n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{rn-r}x_n \end{cases} \quad (3)$$

令 $x_{r+1} = C_1, \cdots, x_n = C_{n-r}$, **得通解:**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + C_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= C_1\vec{\xi}_1 + C_2\vec{\xi}_2 + \cdots + C_{n-r}\vec{\xi}_{n-r} \quad (C_1, C_2, \cdots, C_{n-r} \in R)$$

$\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \cdots, \vec{\xi}_{n-r}$ **即为(1) 的基础解系（上一章就用这种方法).**

另一种方法:

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1n-r}x_n \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \cdots - b_{2n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{rn-r}x_n \end{cases}$$

取: $$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

得: $$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

由上述讨论可得

定理7. $R(A_{m\times n})=r$

$\Longrightarrow A\vec{x}=\vec{0}$ 的解集 S 的秩 $R_S=n-r$

由此定理可见:

(1) 当 $R(A)=n$ 时, $A\vec{x}=\vec{0}$ 只有零解 ,无基础解系.

(2) 当 $R(A)=r<n$ 时, $A\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系含 $n-r$ 个向量

例1. 求下述齐次线性方程组的基础解系与通解:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0 \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$$

(P97 例12)

解: $$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-5&3&2\\7&-7&3&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{2}{7}&-\frac{3}{7}\\0&1&-\frac{5}{7}&-\frac{4}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得: $$\begin{cases}x_1=\frac{2}{7}x_3+\frac{3}{7}x_4\\x_2=\frac{5}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4\end{cases}$$

令 $$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}$$

得基础解系: $$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{5}{7}\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\\frac{4}{7}\\0\\1\end{pmatrix}$$

通解: $$\vec{x}=C_1\vec{\xi}_1+C_2\vec{\xi}_2\quad(C_1,C_2\in\mathrm{R})$$

说明: (1) 自由未知量取值不同得不同的基础解系,通解形式也不同

(2) 非自由未知量的选取可灵活掌握. 例如

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & -5 & 3 & 2\\ 7 & -7 & 3 & 1\end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix}-5 & 2 & 0 & 1\\ 4 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ (见P97)

得: $\begin{cases} x_3=-4x_1+3x_2 \\ x_4=5x_1-2x_2 \end{cases}$ 令 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

得基础解系: $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -4\\ 5\end{pmatrix},\ \vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 3\\ -2\end{pmatrix}$

通解: $\vec{x}=C_1\vec{\xi}_1+C_2\vec{\xi}_2 \quad (C_1,C_2\in \mathrm{R})$

定理7 在理论证明中的应用举例

定理7

例2. 设 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$, 证明 $R(A)+R(B)\le n$. (P100 例13)

证: 设 $B=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_l)$, 则

$$A(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_l)=(\vec{0},\vec{0},\cdots,\vec{0})$$

即 $A\vec{b}_i=\vec{0}\quad(i=1,2,\cdots,l)$

设 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的解集为 S, 则 $\vec{b}_i\in S$, 故

$$R(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_l)\le R_S=n-R(A)\qquad \text{(据定理7)}$$

$$\therefore\quad R(A)+R(B)\le n$$

经验: 看到矩阵关系 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$

想到矩阵方程 $AX=O$ 有解 B

想到齐次方程 $A\vec{x}=\vec{0}$ 有解 $\vec{b}_i\,(i=1,2,\cdots,l)$

例3. 证明：矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$ 的行向量组等价 $\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 与 $B\vec{x}=\vec{0}$ 同解

证: “$\Rightarrow$” 设 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$ 的行向量组等价，

则存在矩阵 $P_{m\times l}$ 和 $Q_{l\times m}$ 使得

$$A_{m\times n}=P_{m\times l}B_{l\times n} \quad \text{和} \quad B_{l\times n}=Q_{l\times m}A_{m\times n}$$

所以,满足方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的解 $\vec{x}$ 也满足 $B\vec{x}=\vec{0}$

满足方程组 $B\vec{x}=\vec{0}$ 的解 $\vec{x}$ 也满足 $A\vec{x}=\vec{0}$

$$\therefore\ A\vec{x}=\vec{0},\ B\vec{x}=\vec{0} \text{ 同解}$$

例3. **证明：矩阵** $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$ **的行向量组等价** $\Longleftrightarrow$ **齐次线性方程组** $A\vec{x}=\vec{0}$ 与 $B\vec{x}=\vec{0}$ 同解

"$\Leftarrow$" **设** $A\vec{x}=\vec{0}$ 与 $B\vec{x}=\vec{0}$ 同解，**则它们也与**

$$\begin{cases} A\vec{x}=\vec{0} \\ B\vec{x}=\vec{0} \end{cases} \quad \text{即} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0} \text{ 同解}$$

设解集 S **的秩为** t，**则**

$$R(A)=R(B)=R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=n-t \qquad \textbf{(据定理7)}$$

因此 $R(A^T)=R(B^T)=R(A^T,B^T)$

根据P84定理2的推论， A^T 与 B^T 的列向量组等价，

亦即 A 与 B 的行向量组等价． **证毕**

例4. 证明 $R(A^T A) = R(A)$. (P102 例15)

证: 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, $\vec{x}$ 为 n 维列向量.

若 $\vec{x}$ 满足 $A\vec{x} = \vec{0}$, 则

$$(A^T A)\vec{x} = A^T (A\vec{x}) = \vec{0}$$

若 $\vec{x} \neq \vec{0}$ 满足 $A^T A\vec{x} = \vec{0}$, 则

$$0 = \vec{x}^T (A^T A\vec{x}) = (A\vec{x})^T (A\vec{x})$$

因 A, $\vec{x}$ 的元素均为实数, 所以

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

可见方程组 $A^T A\vec{x} = \vec{0}$ 与 $A\vec{x} = \vec{0}$ 同解, 因此

$$R(A^T A) = R(A).$$

思路: 证明 $A^T A\vec{x} = \vec{0}$ 与 $A\vec{x} = \vec{0}$ 同解

二. 非齐次线性方程组解的结构

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4)$$

写成向量方程: $A\vec{x} = \vec{b}$ (5)

性质3. $\vec{x} = \vec{\eta}_1, \vec{x} = \vec{\eta}_2$ 都是(5)的解 $\Longrightarrow$ $\vec{x} = \vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_1$

是对应齐次线性方程组 $A\vec{x} = \vec{0}$ 的解

性质4. $\left.\begin{array}{l} \vec{x} = \vec{\eta} \text{ 是(5)的解} \\ \vec{x} = \vec{\xi} \text{ 是 } A\vec{x} = \vec{0} \text{ 的解} \end{array}\right\} \Longrightarrow$ $\vec{x} = \vec{\xi} + \vec{\eta}$ **是(5)的解**

推 论: $R(A) = r \Longrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ **的通解为** $\vec{x} = \vec{\xi} + \vec{\eta}^*$

其中: $\vec{\eta}^*$ 是(5)的一个特解

$\vec{\xi} = k_1\vec{\xi}_1 + k_2\vec{\xi}_2 + \cdots + k_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}$ 是 $A\vec{x} = \vec{0}$ 的通解

例5. **求解方程组** $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

提示: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \underset{\sim}{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得等价方程组 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}$

法1. **取** $x_2 = C_1, x_4 = C_2$, **写出通解.**

法2. 令 $x_2 = x_4 = 0$ 得特解: $\vec{\eta}^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)^T$

再求对应齐次方程组 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$ **的基础解系**

写出所求通解.

讨论. 给定方程$A\vec{x}=\vec{b}$, 其中A 为$m\times4$ 矩阵, $R(A)=3$,

(1) 已知 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 是 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的两个不等的特解 ,求其通解.

(2) 已知 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$是 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的三个特解 , 且

$\vec{\alpha}_1=(2,\ 0,\ 5,\ -1)^T$, $\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_3=(1,9,8,6)^T$ 求通解.

(3) 当 $m=3$ 时, $\vec{b}$ 能否用 A 的列向量线性表示?

答: 注意到 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系含 $4-3=1$个解向量

(1) $\vec{x}=\vec{\alpha}_1+C(\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_1),\ C\in\mathrm{R}$

(2) $\vec{x}=\vec{\alpha}_1+C(\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_3),\ C\in\mathrm{R}$

$$=(2,0,5,-1)^T+C(1,9,8,6)^T\quad C\in\mathrm{R}$$

(3) $R(A,\vec{b})=R(A)=3$

故 $\vec{b}$ 能用 A 的列向量线性表示.

小结 设 $R(A_{m\times n})=r$

$A\vec{x}=\vec{0}$的解集 S 的秩 $R_S=n-r$

基础解系 $\vec{\xi}_1,\cdots,\vec{\xi}_{n-r}$ — S **的最大无关组**

通解: $\vec{\xi}=k_1\vec{\xi}_1+k_2\vec{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\vec{\xi}_{n-r}$

$$(k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in \mathrm{R})$$

$A\vec{x}=\vec{b}$ **的通解为** $\vec{x}=\vec{\xi}+\vec{\eta}^*$

齐次方程通解

非齐次方程特解

作业:

P109 ~ 110　　26(2); 27;　28;　30

备用题

设A为3×4 矩阵, 秩$(A)=2$, $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{x}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

是方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ $(\vec{b}\neq\vec{0})$的三个特解, 则它的通解为

$$\underline{\vec{x}=\vec{x}_1+C_1(\vec{x}_1-\vec{x}_2)+C_2(\vec{x}_1-\vec{x}_3)}$$

分析: 对应齐次方程组基础解系含 $\underline{\ 4-2=2\ }$ 个解向量,

$$\vec{x}_1-\vec{x}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix},\quad \vec{x}_2-\vec{x}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$ 线性无关