学号：

姓名：

专业年级：

学院：

中国矿业大学(北京)

08～09 学年二学期《高等数学 A2》(A 卷)

得分：__________

题号	一	二	三	四	五	六
得分						
阅卷人						

一、填空题（本题满分共 18 分，每小题 3 分）

（1）过点 $(1,2,3)$ 在平面 $x+y+z=9$ 的投影为 $(2,3,4)$；

（2）函数 e^x 在 $x=0$ 处的幂级数展开为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$；

（3）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$ 绝对收敛，则 p 的取值范围为 $p>1$；

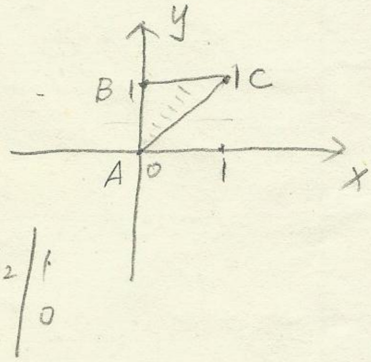
（4）设 L 为圆周 $x^2+y^2=1$，曲线积分 $\oint_L(ax+by)^2ds=$ $\pi(a^2+b^2)$；

(5) 设 $\Phi(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(x,y)$ 是由方程 $\Phi(x-2z,y-2z)=0$ 所确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$ $\frac{1}{2}$；

（6）点 $(0,2,4)$ 到直线 $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{2}$ 的距离为 1．

二、计算题（本题满分共 42 分，每小题 7 分）

(1) 计算二重积分 $I=\iint_D e^{-y^2}dxdy$，其中 D 是以 $A(0,0),B(0,1),C(1,1)$ 为顶点的三角形闭区域.



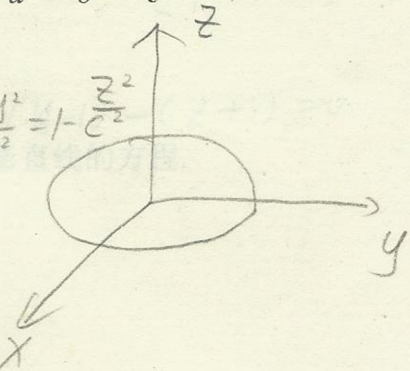
$$I=\int_0^1 e^{-y^2}dy\int_0^y dx$$

$$=\int_0^1 e^{-y^2}\cdot y\,dy$$

$$=\frac{1}{-2}\int_0^1 e^{-y^2}d(-y^2)=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^1$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-1}-1)$$

（2）计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dxdydz$，其中$\Omega$为椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$所围成的空间闭区域.



$$I=\int_{-c}^{c} z^2 dz \iint\limits_{D_z} dxdy \qquad D_z = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$$

$$=\int_{-c}^{c} z^2\cdot \pi ab\cdot\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz$$

$$=\pi ab\int_{-c}^{c}\left(z^2-\frac{z^4}{c^2}\right)dz$$

$$=\pi ab\left(\frac{z^3}{3}-\frac{1}{c^2}\frac{z^5}{5}\right)\Big|_{-c}^{c}$$

$$=\pi ab\left[\frac{c^3}{3}-\frac{1}{\cancel{c^2}}\cdot\frac{c^3}{5}+\frac{c^3}{3}-\frac{1}{\cancel{c^2}}\cdot\frac{c^3}{5}\right]$$

$$=\pi abc^3\left[\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right]$$

$$=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

学院： 专业年级： 姓名： 学号：

装 订 线

密 封 线

(3) 抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 截成一椭圆，求原点到这椭圆的最短距离.

$P(x,y,z)$ $\quad d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$F = x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+y+z-1)$

$$\begin{cases} F_x = 2x-2x\lambda+\mu \\ F_y = 2y-2y\lambda+\mu=0 \\ F_z = 2z+\lambda+\mu=0 \\ z-x^2-y^2=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \\ z = 2\mp\sqrt{3} \end{cases}$$

$d_{最短} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big|_{\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}\right)} = \sqrt{9-5\sqrt{\ }}$

(4) 计算曲线积分 $I = \oint_L (e^x \sin y - y)dx + (e^x \cos y - 2)dy$，其中 L 为圆周 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$，沿逆时针方向.

解：$P = e^x \sin y - y \quad Q = e^x \cos y - 2$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y \quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - 1$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$

$I = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy = \pi a^2$

（5）求曲面 $x^2+2y^2+z^2=4$ 的平行于平面 $x-2y+z=1$ 的切平面方程.

解：设切点 (x_0, y_0, z_0)

切平面法向量为：$(2x_0, 4y_0, 2z_0)=2(x_0, 2y_0, z_0)$

$x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$

$x-2y+z=1$ 法向量 $(1,-2,1)$

$x_0=\dfrac{2y_0}{-2}=\dfrac{z_0}{1}$

$\begin{cases} x_0=\dfrac{2y_0}{-2}=\dfrac{z_0}{1} \\ x_0^2+2y_0^2+z_0^2=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_0+y_0=0 \\ x_0^2+y_0^2=2 \end{cases}$ $(-1,1,-1)$ $(1,-1,1)$

切平面方程：$(x+1)+2(y-1)-(z+1)=0$

（6）求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程.

解：过直线的平面为

$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$

$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(\lambda-1)z-1+\lambda=0$

平面 $x+y+z=0$ 法向量 $(1,1,1)$

$1+\lambda+(1-\lambda)+(\lambda-1)=0$

$\lambda=-1$.

直线方程

$\begin{cases} 2y-2z-2=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

三、(满分 10 分) 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中 Σ 为抛物面 $z=2-x^2-y^2$ 在 xoy 面上方的部分.

$$dS=\sqrt{1+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}\,dxdy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$I=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$D_{xy}:\{x^2+y^2\le 2\}$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt2}r\cdot r^2\sqrt{1+4r^2}\,dr$$

$$=\cancel{4}\pi\int_0^{\sqrt2}r^2\sqrt{1+4r^2}\,dr^2$$

令 $r^2=t$

$$=\pi\int_0^2 t\sqrt{1+4t}\,dt$$

令 $m=\sqrt{1+4t}$

$$=\pi\int_1^3\frac{m^2-1}{4}\cdot m\cdot\frac{m}{2}dm$$

$$=\frac{\pi}{8}\int_1^3(m^4-m^2)dm$$

$$=\frac{\pi}{8}\Big[\frac{m^5}{5}$$

$$=\frac{596}{15}\cdot\frac{\pi}{8}$$

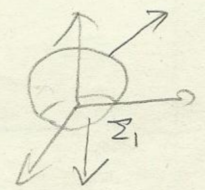
四、(满分 10 分) 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中 Σ 为半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

$x^2+y^2+z^2=a^2$

$P=x,\quad Q=y,\quad R=z$

$\Sigma_1: x^2+y^2\le a^2$

作补平面 $z=0$，取下侧



$$I=\iiint_{\Omega}3dv-\iint_{\Sigma_1}0$$

$$=3\cdot\frac{4}{3}\pi a^3\cdot\frac{1}{2}$$

$$=2\pi a^3$$

学号：

姓名：

专业年级：

学院：

装 订 线

密 封 线

五、(满分 10 分) 求微分方程的 $y''-2y'+y=x^2$ 通解.

解：齐次方程 $y''-2y'+y=0$ 的解为：

$\lambda^2-2\lambda+1=0 \quad \lambda=\pm 1$

$y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$

设特解 $y^*=ax^2+bx+c$ 代入方程 $y''-2y'+y=x^2$ 得：

$y^{*\prime}=2ax+b \quad y^{*\prime\prime}=2a$

$$2a-2(2ax+b)+ax^2+bx+c=x^2 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ -4+b=0 \quad b=4 \\ 2-8+c=0 \quad c=6 \end{cases}$$

m

∴通解 $Y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+x^2+4x+6$

$\frac{m^3}{3}\Big|_1^{73}$ 六、(满分 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的和函数，并求收敛域.

$a_n=\frac{1}{n}$

$=\frac{149}{30}\pi$

~~R=~~ $R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$

$x=-1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛 $\quad x=1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

收敛域： $[-1,1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}\,dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\,dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}\,dx$$

$$=-\int_0^x(1-x)^{-1}\,d(1-x)$$

$$=-\ln|1-x|\Big|_0^x$$

$$=-\ln|1-x|=-\ln(1-x)$$