第七章

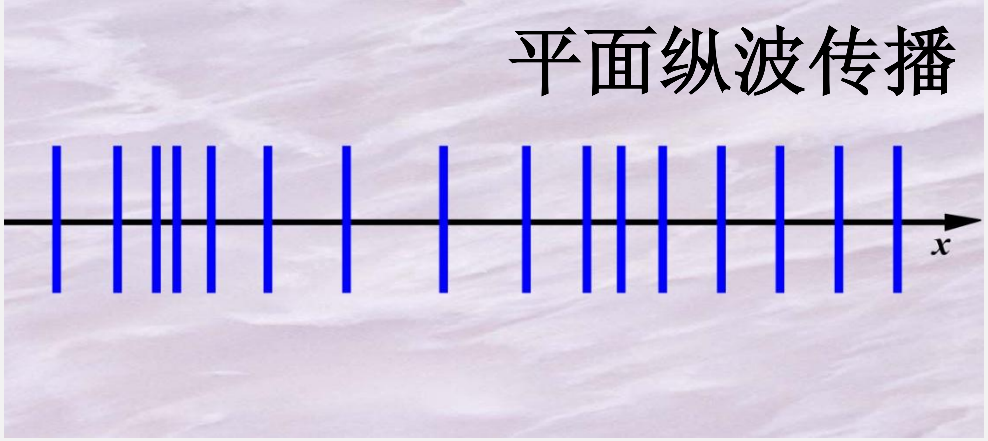
机械波

§ 7-3 波的能量

视频：日本海啸

弹性波传播到介质中的某处，该处将具有动能和势能。在波的传播过程中，能量从波源向外传播。

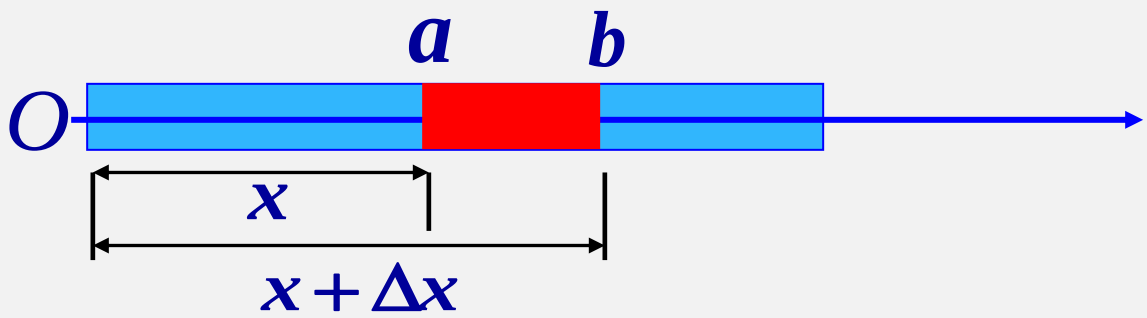
初始静止→→发生振动→→ 获得动能；
平衡位置→→发生形变→→获得势能。



振动状态在介质中由近及远传播，能量从波源向外传播出去。—— 波动的重要特征

1. 波的能量和能量密度

考虑介质中的体积ΔV，其质量为Δm ($\Delta m = \rho\Delta V$)。当波动传播到该体积元时，将具有动能ΔE_k和弹性势能ΔE_p。



平面简谐波 $y(x,t) = A\cos\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$

可以证明

$$\boxed{\Delta E_k = \Delta E_p = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)}$$

体积元的总机械能W

$$\Delta E=\Delta E_k+\Delta E_p=\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

对单个谐振子$\Delta E_k \neq \Delta E_p$

在波的传播过程中，任一体积元都在不断地接受和放出能量，其值是时间的函数。与振动情形相比，波动传播能量，振动系统并不传播能量。

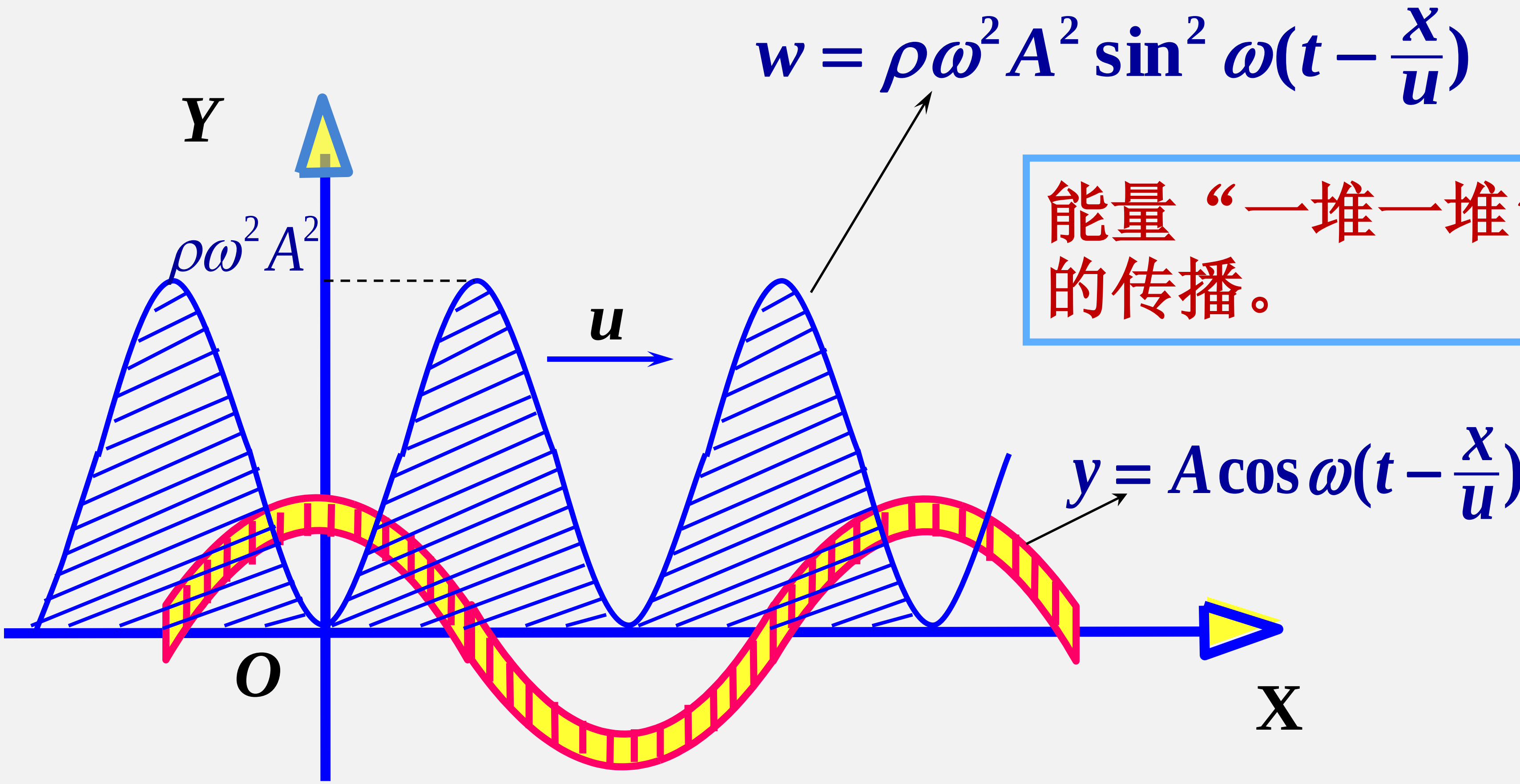
波的**能量密度**w：介质中单位体积的波动能量。

$$w=\frac{\Delta E}{\Delta V}=\rho A^2\omega^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

通常取能量密度在一个周期内的平均值 $\overline{w}$

$$\overline{w}=\rho A^2\omega^2/2$$

对于波动的任一体积元，$W_k = W_p$ ， $W_k + W_p \neq \text{const}.$



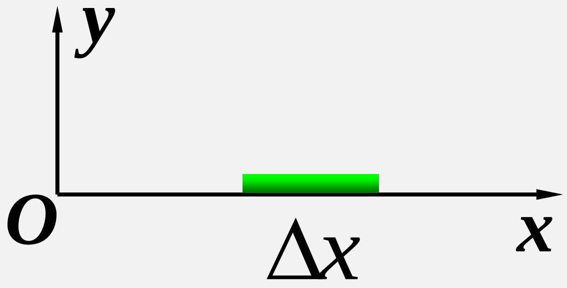
能量“一堆一堆”的传播。

每个质元都与周围媒质交换能量。表明：波动传播能量，将能量从体积元传到另一体积元。

波动能量的推导（横波为例）

设绳子的横截面积为ΔS，波的传播速度为u。取波的传播方向为 x 轴，绳子的振动方向为 y 轴，则简谐波的波函数为。

$$y = A\cos[\omega(t - x/u) + \phi_0]$$



在绳子上x处取线元Δx，则

$$\Delta m = \mu \Delta x$$

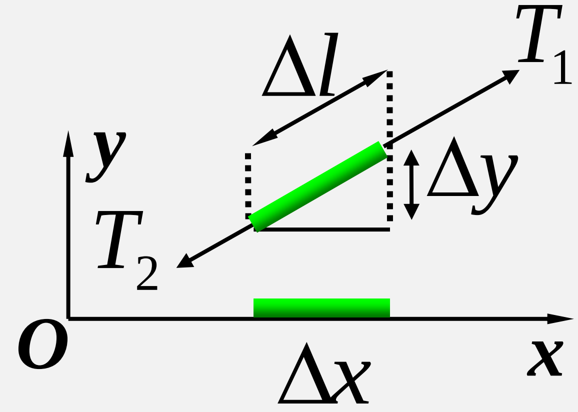
μ为绳子的质量线密度。

该线元的振动速度为 $$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\sin[\omega(t - \frac{x}{u}) + \phi_0]$$

(1) 线元的动能

$$W_k = \frac{1}{2}\Delta m v^2 \quad = \frac{1}{2}\mu \Delta x A^2 \omega^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi_0]$$

在波的传播过程中，由原长**Δ*x***变成**Δ*l***，形变为**Δ *l* – Δ*x***，线两端受张力$\boldsymbol{T = T_1 = T_2}$。



张力做的功等于线元的势能

$$W_p = T(\Delta l - \Delta x)$$

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x[1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2]^{1/2}$$

$$\approx \Delta x[1+(\frac{\partial y}{\partial x})^2]^{1/2}$$

用二项式定理展开，并略去高此项，得

$$\Delta l \approx \Delta x[1+\frac{1}{2}(\frac{\partial y}{\partial x})^2]$$

$$\therefore W_{\mathrm{p}} = T(\Delta l - \Delta x) = \frac{1}{2}T(\frac{\partial y}{\partial x})^2 \Delta x$$

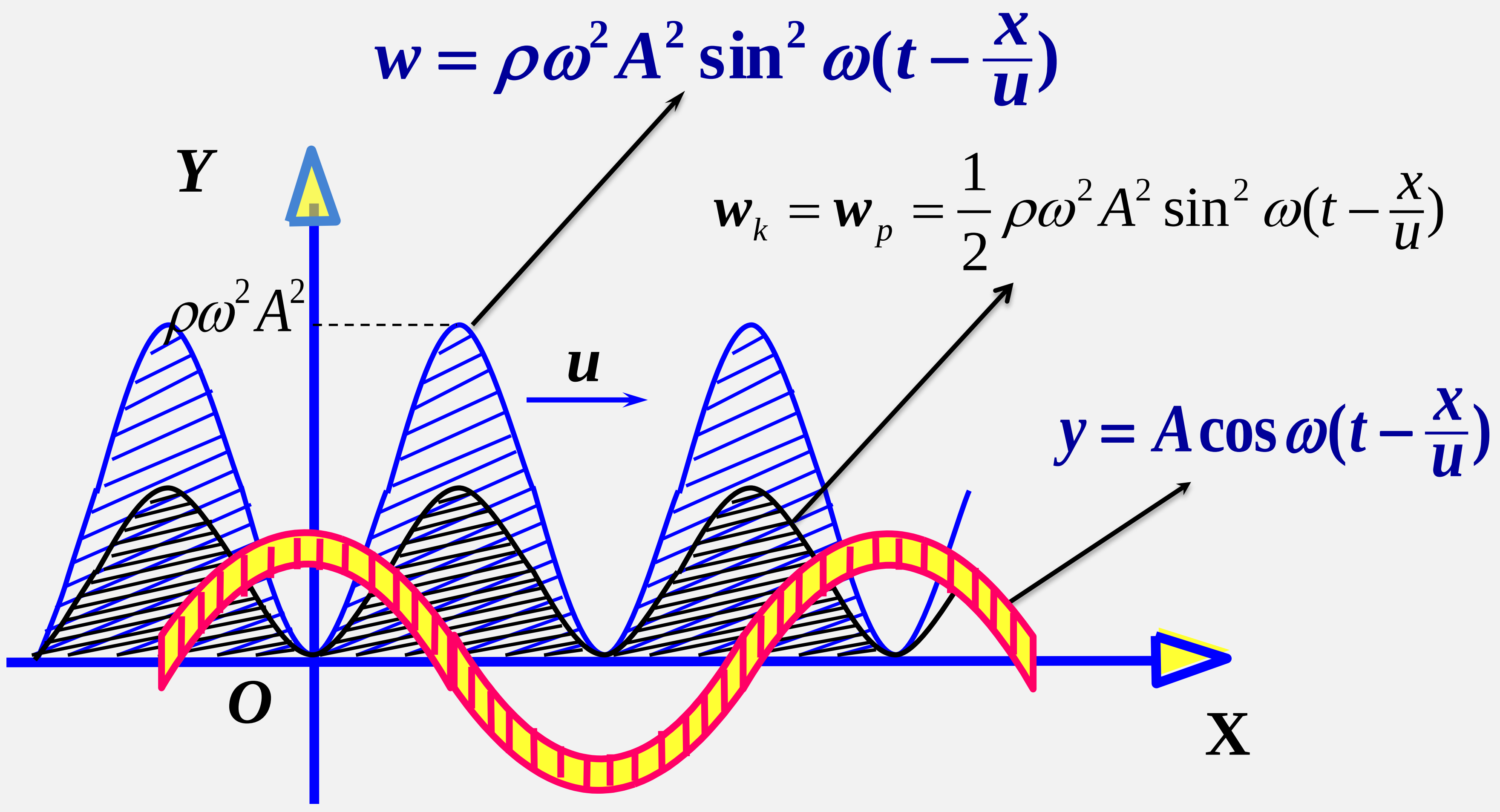
$$\frac{\partial y}{\partial x} = A\frac{\omega}{u}\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi_0]$$

(2) 线元的势能

$$W_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\mu\Delta x A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi_0] = W_{\mathrm{k}}$$

(3) 线元的总机械能

$$W = W_{\mathrm{k}} + W_{\mathrm{p}} = \mu\Delta x A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi_0]$$



$w=\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$
Y
$w_k=w_p=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$
$\rho\omega^2A^2$
u
$y=A\cos\omega(t-\frac{x}{u})$
O
X

讨论

(1) 在波动传播的媒质中，任一线元的动能、势能、总机械能均随 x, t 作周期性变化，且变化是同相位的。

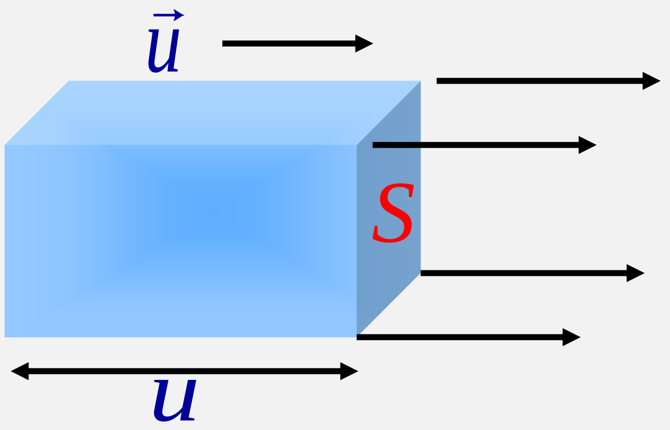
(2) 体积元在平衡位置时，动能、势能和总机械能均最大。

(3) 体积元的位移最大时，三者均为零。

(4) 任一线元都在不断地接收和放出能量，即不断地传播能量。 任一线元的机械能不守恒，随 t 作周期性变化，所以，波动过程是能量的传播过程。

2. 能流密度（波的强度）

能流　在介质中垂直于波速方向取一面积S，在单位时间内通过S 的能量。



$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{wSu\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}=wSu$$

$$=uS\rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-x/u)$$

平均能流：$\overline{P}=\overline{w}Su=\frac{1}{2}uS\rho A^2\omega^2$

平均能流密度或波的强度　通过与波传播方向垂直的单位面积的平均能流，用I 来表示，即

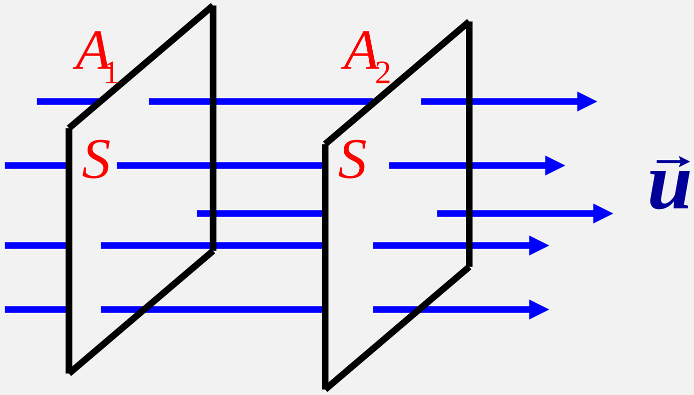
$$\boxed{I=\overline{w}u=\rho u\omega^2A^2/2=z\omega^2A^2/2}$$

介质的特性阻抗 $z = \rho u$ 。

$I = \bar{w}u = z\omega^2 A^2 / 2$　　　**I 的单位：瓦特/米^2 ($\mathrm{W \cdot m^{-2}}$)**

平面余弦行波振幅不变的意义：

$$y = A\cos\omega\,(t - x/u)$$



$$\overline{P}_1 = \overline{w}_1 uS = \frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 uS \qquad \overline{P}_2 = \overline{w}_2 uS = \frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 uS$$

若 $\overline{P}_1 = \overline{P}_2$，有 $A_1 = A_2$。

对于球面波，$S_1 = 4\pi r_1^2$，$S_2 = 4\pi r_2^2$，介质不吸收能量时，通过两个球面的总能流相等

$$\frac{1}{2}\rho A_1^2 \omega^2 u 4\pi r_1^2 = \frac{1}{2}\rho A_2^2 \omega^2 u 4\pi r_2^2$$

$$\Rightarrow \quad A_1 / A_2 = r_2 / r_1$$

球面波表达式：

$$\xi = \frac{a}{r}\cos\omega\,(t - r/u)$$

式中a为波在离原点单位距离处振幅的数值。

例　用聚焦超声波的方式，可以在液体中产生强度达120kW/cm²的大振幅超声波。设波源作简谐振动，频率为500kHz，液体密度为1g/cm³，声速为1500m/s。

求：这时液体质点振动的振幅。

解：因 $I=\rho u A^2\omega^2/2$

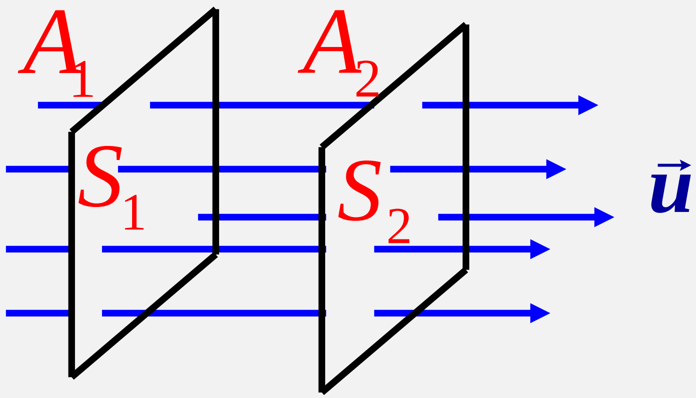
$$\therefore A=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2I}{\rho u}}=\frac{1}{2\pi\times5\times10^5}\sqrt{\frac{2\times120\times10^7}{1\times10^3\times1.5\times10^3}}$$

$$=1.27\times10^{-5}\ \mathrm{m}.$$

可见液体中声振动的振幅实际上是极小的。

3. 平面波和球面波的振幅

平面余弦行波的波函数：$y = A\cos\omega\,(t - x/u)$



垂直于传播方向上两个平面S_1和S_2，面积均为S，且通过S_1的波都通过S_2，振幅分别为A_1和A_2。

通过S_1和S_2的平均能流分别为：

$$\bar{P}_1 = \bar{w}_1 uS = \frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 uS,\quad \bar{P}_2 = \bar{w}_2 uS = \frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 uS$$

若平均能流满足 $\bar{P}_1 = \bar{P}_2$，则有振幅 $A_1 = A_2$ 。

成立条件：波动在介质内传播时，介质不吸收波能量。

平面简谐波在无吸收介质内传播时振幅不变的意义

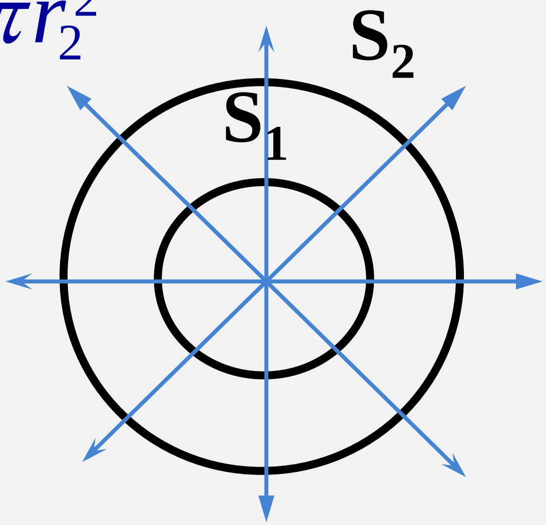
关于球面简谐波振幅的讨论

介质不吸收能量时，通过两个球面的总能流相等，

$$S_1 = 4\pi r_1^2\text{，}\quad S_2 = 4\pi r_2^2\text{，}\quad \overline{P}_1 = \overline{P}_2$$

$$\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 u 4\pi r_1^2 = \frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 u 4\pi r_2^2$$

$$\Longrightarrow \quad A_1/A_2 = r_2/r_1$$



∴振幅***A***与离开波源的距离***r***成反比。

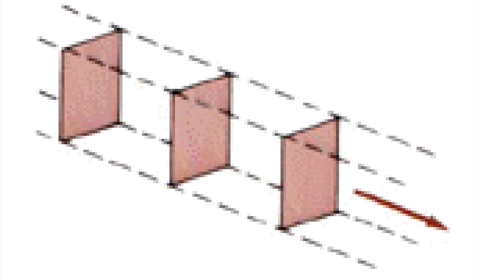
∴ 球面简谐波的表达式可写成：

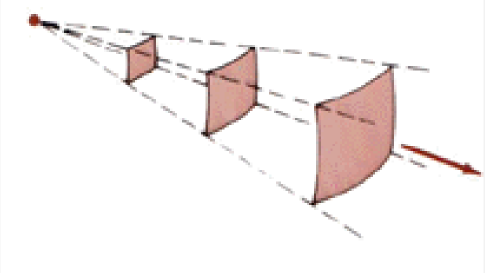
$$\xi = \frac{a}{r}\cos\omega(t - r/u).$$

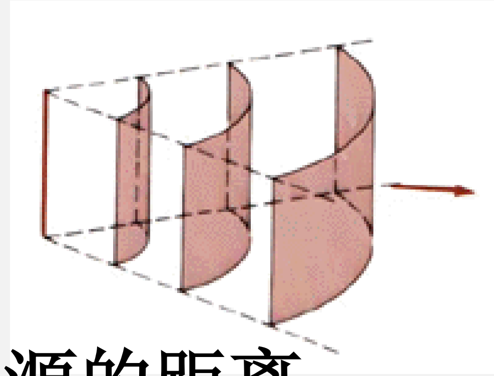
式中***a*** 为波在离原点单位距离处振幅的数值。

利用 $I=\frac{1}{2}z\omega^2A^2$ 和能量守恒，可以证明，

对无吸收介质，有：

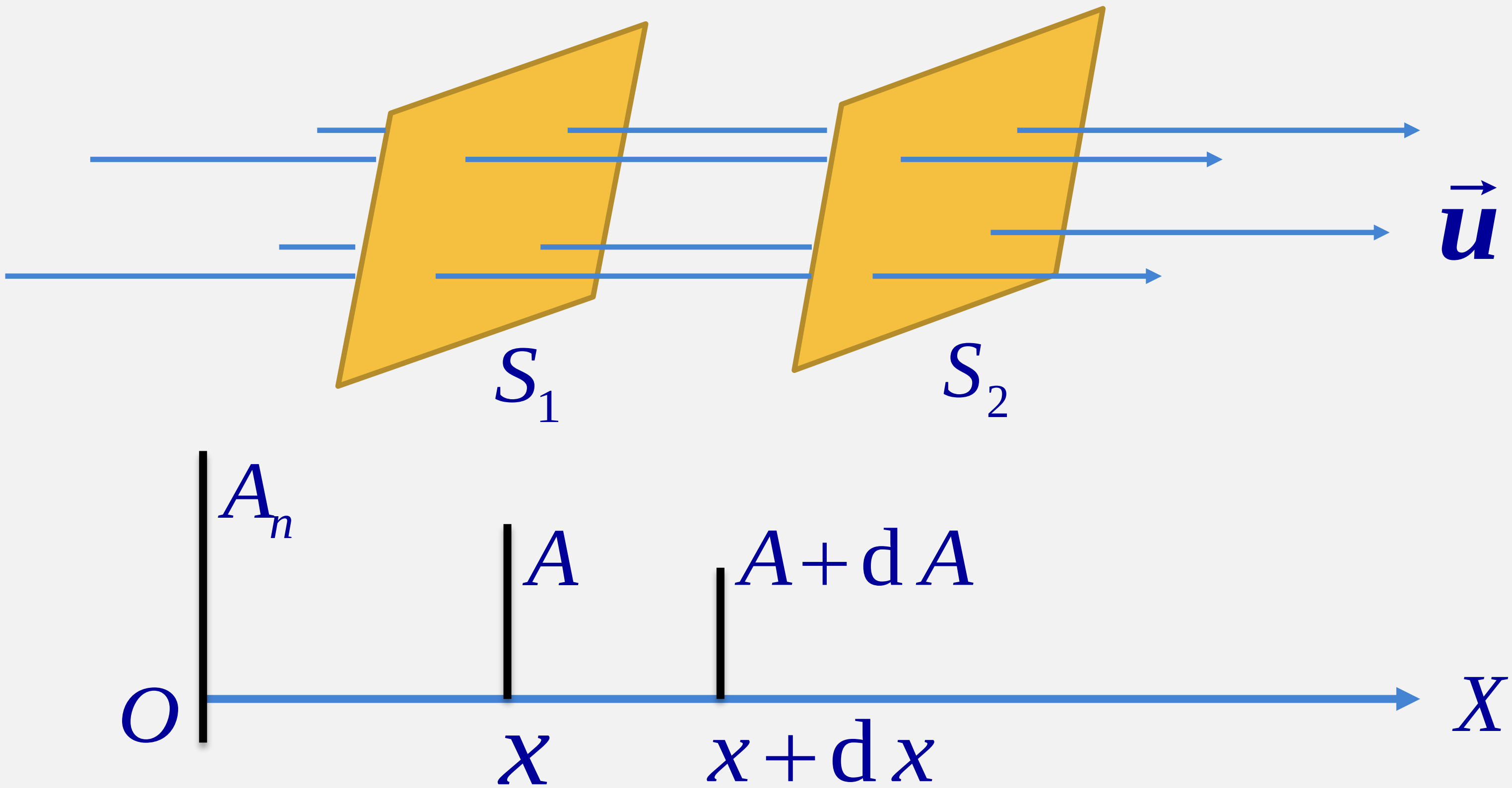
平面波  $A=\text{const.}$

球面波  $A\propto\frac{1}{r}$

柱面波  $A\propto\frac{1}{\sqrt{r}}$

$\boldsymbol{r}$ —场点到波源的距离

4.波的吸收

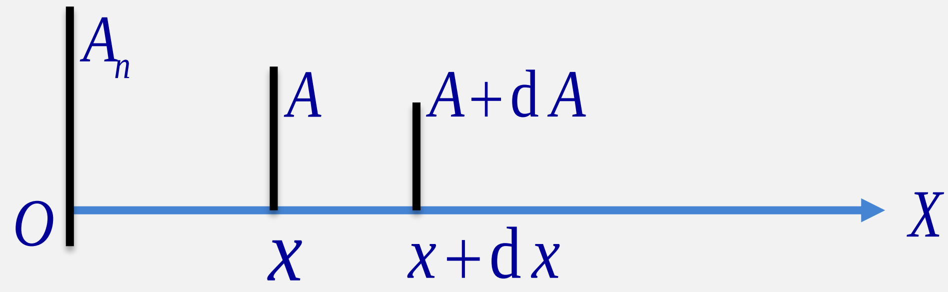


若波不被介质吸收，对于平面简谐波，S_1 和S_2 处振幅相同。若介质吸收机械波的能量，则波线上不同点处振幅是不相同的。上图的 $\mathrm{d}A < 0$。

$-\mathrm{d}A = \alpha A\mathrm{d}x$, α ---介质的吸收系数。

若α为常数，则有

$$A = A_0 e^{-\alpha x}$$



A_0为$x=0$ 处的振幅。

$$\begin{cases} I = \frac{1}{2}u\rho A^2\omega^2 = \frac{1}{2}u\rho A_0^2\omega^2 e^{-2\alpha x} \\ I_0 = \frac{1}{2}u\rho A_0^2\omega^2 \end{cases} \Rightarrow I = I_0 e^{-2\alpha x}$$

式中的I_0和I 分别为$x = 0$ 和$x = x$ 处的波的强度。

例题　空气中声波吸收系数为$\alpha_1 = 2\times10^{-11}\nu^2\text{m}^{-1}$，钢中的吸收系数为$\alpha_2 = 4\times10^{-7}\nu\ \text{m}^{-1}$，式中$\nu$ 代表声波频率的数值。问5MHz的超声波透过多少厚度的空气或钢后，其声强减为原来的1%？

解 据题意，空气和钢的吸收系数分别为

$$\alpha_1 = 2\times10^{-11}\times(5\times10^6)^2\text{m}^{-1} = 500\text{m}^{-1}$$

$$\alpha_2 = 4\times10^{-7}\times(5\times10^6)\text{m}^{-1} = 2\text{m}^{-1}$$

把α_1、α_2分别代入$I = I_0 e^{-2\alpha x}$或下式，

$$x = \frac{1}{2\alpha}\ln\frac{I_0}{I}$$

据题意有$I_0/I = 100$，得空气的厚度

$$x_1 = \frac{1}{1000} \ln 100 \, \mathrm{m} = 0.0046 \, \mathrm{m}$$

钢的厚度为

$$x_2 = \frac{1}{4} \ln 100 \, \mathrm{m} = 1.15 \, \mathrm{m}$$

可见高频超声波很难透过气体，但极易透过固体。

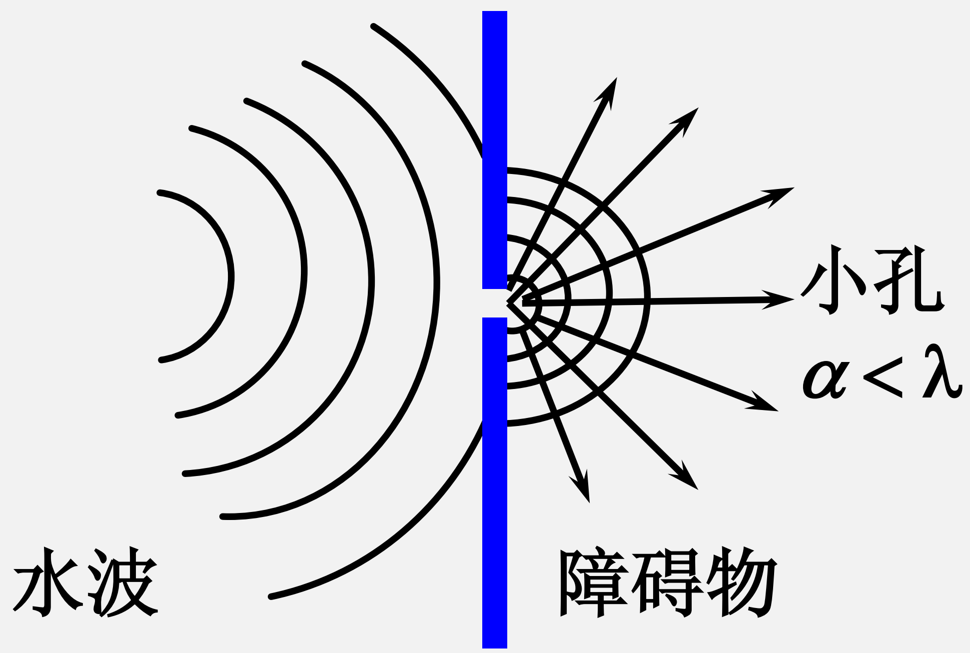
§ 7-4 惠更斯原理　波的衍射反射和折射

1、惠更斯原理（Huygens principle）

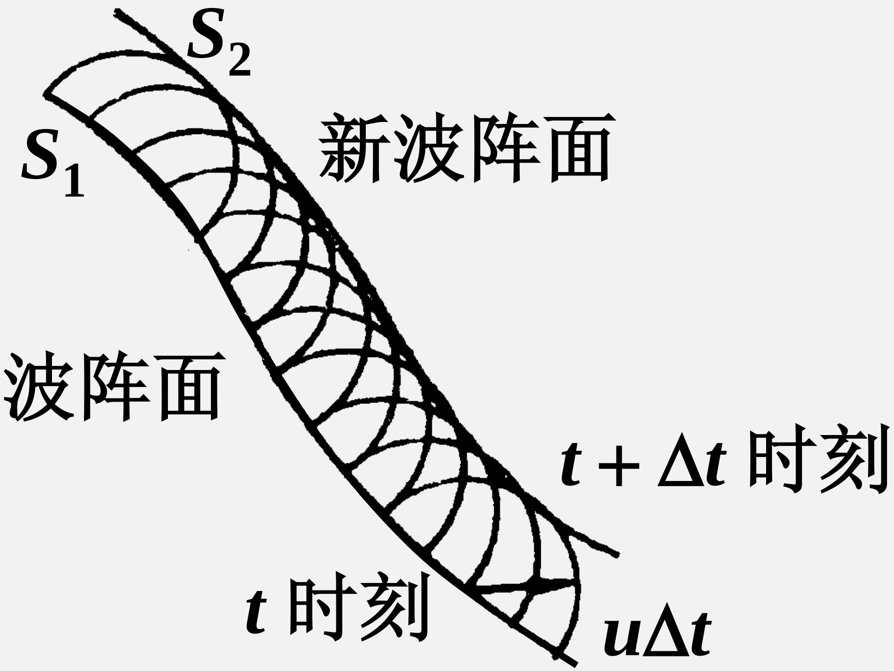
波在弹性介质中传播时，任一点*P* 的振动，将会引起邻近质点的振动。就此特征而言，振动着的 *P* 点与波源相比，除了在时间上有延迟外，并无其他区别。

任意*P* 点均可视为一个新的波源。

Eg，障碍物上的小孔成为新的波源



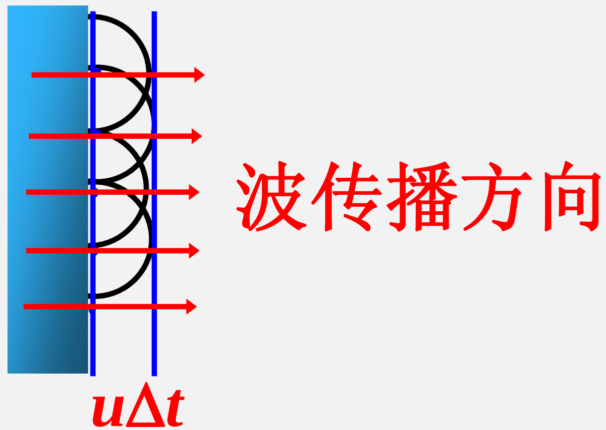
1678年，惠更斯总结出了以其名字命名的惠更斯原理：介质中波阵面（波前）上的每个点，都可看成是产生**球面子波**的波源；在其后的任一时刻，这些**子波的包络面构成新的波阵面。**



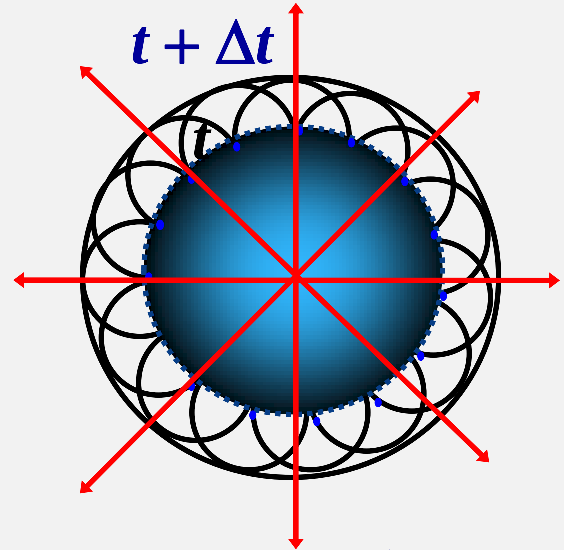
惠更斯
1629-1695

注：惠更斯原理对任何波动过程均适用；可帮助解决波的传播问题，解释波的衍射反射折射规律。

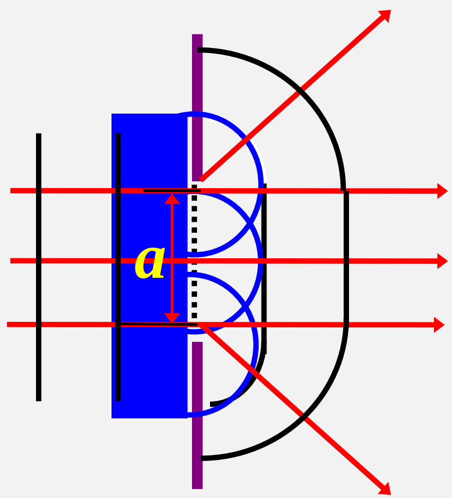
t 时刻波面　$t+\Delta t$ 时刻波面

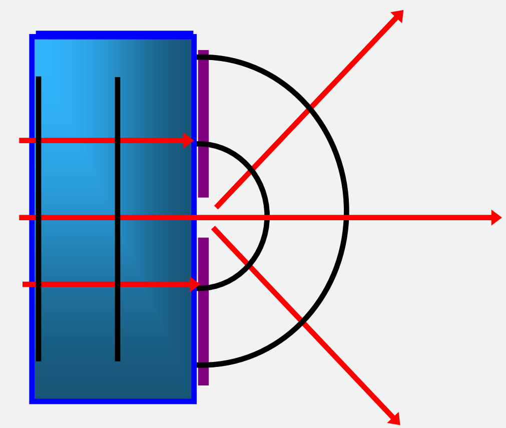


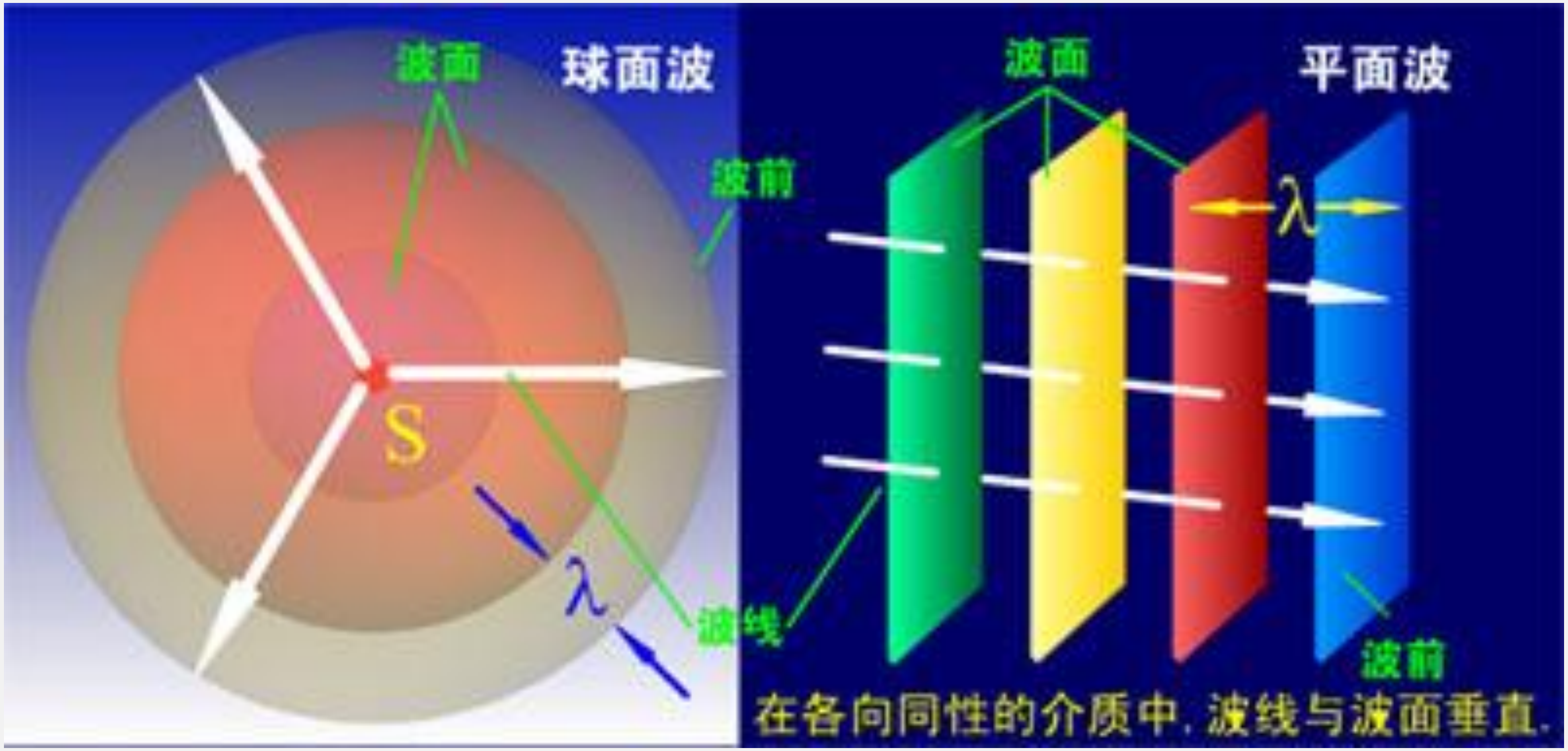
平面波



球面波

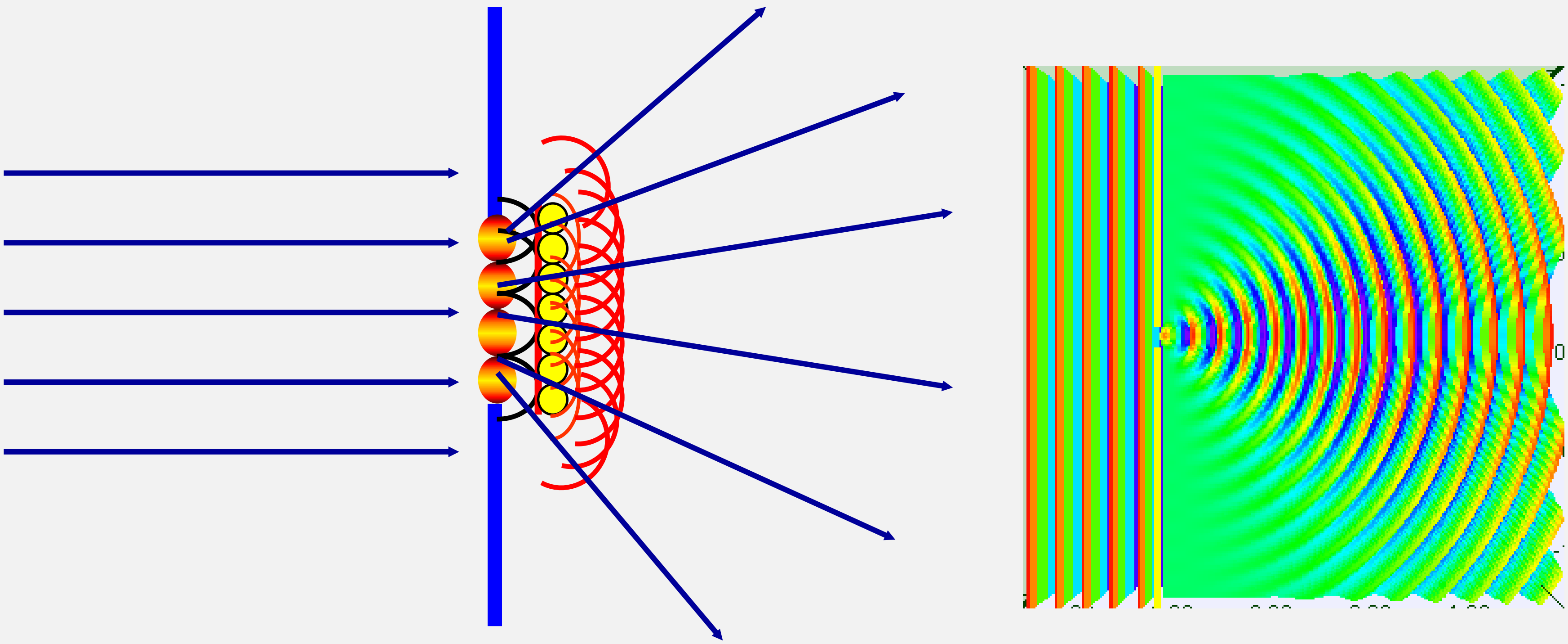





波面
球面波
波前
S
λ
波线
波面
平面波
λ
波前
在各向同性的介质中，波线与波面垂直.

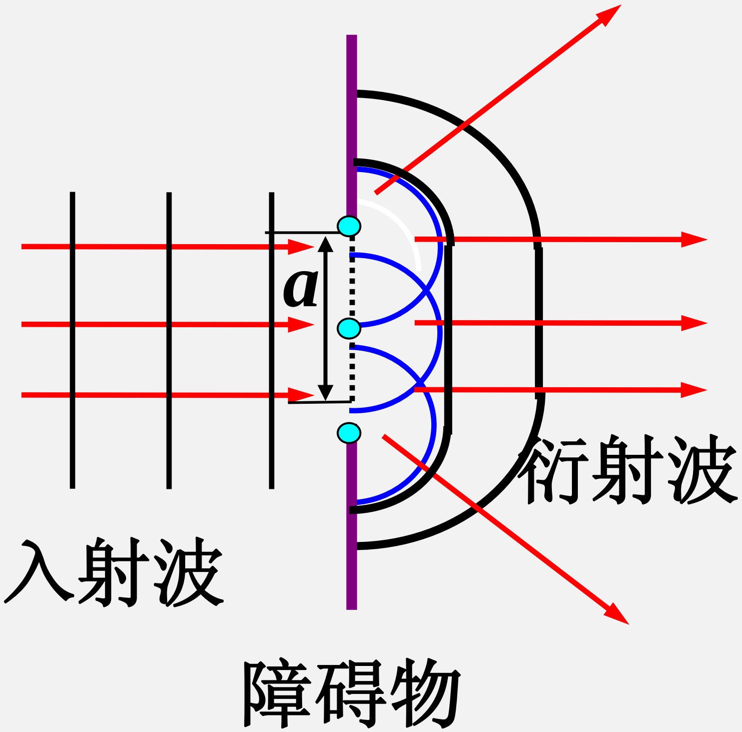
应用举例： 波的衍射

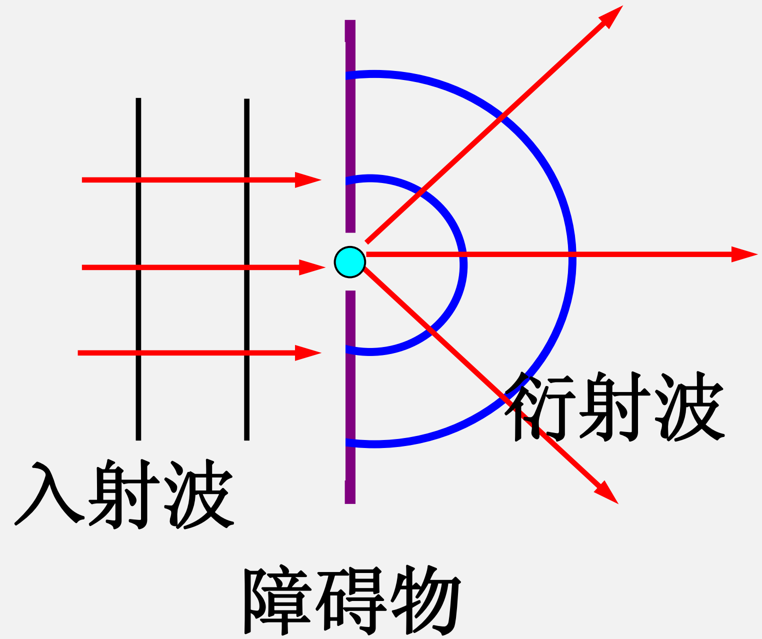
当波在传播过程中遇到障碍物时，其传播方向绕过障碍物发生偏折的现象，称为波的衍射。



波在窄缝的衍射效应

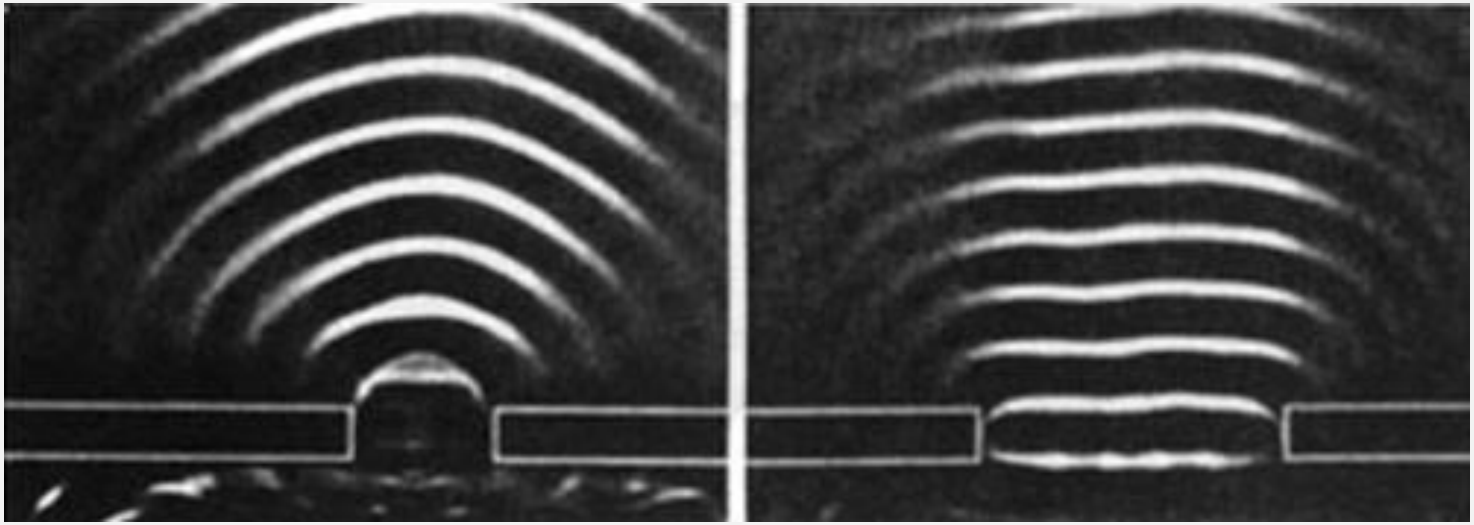
波的衍射 VS. 障碍物线度

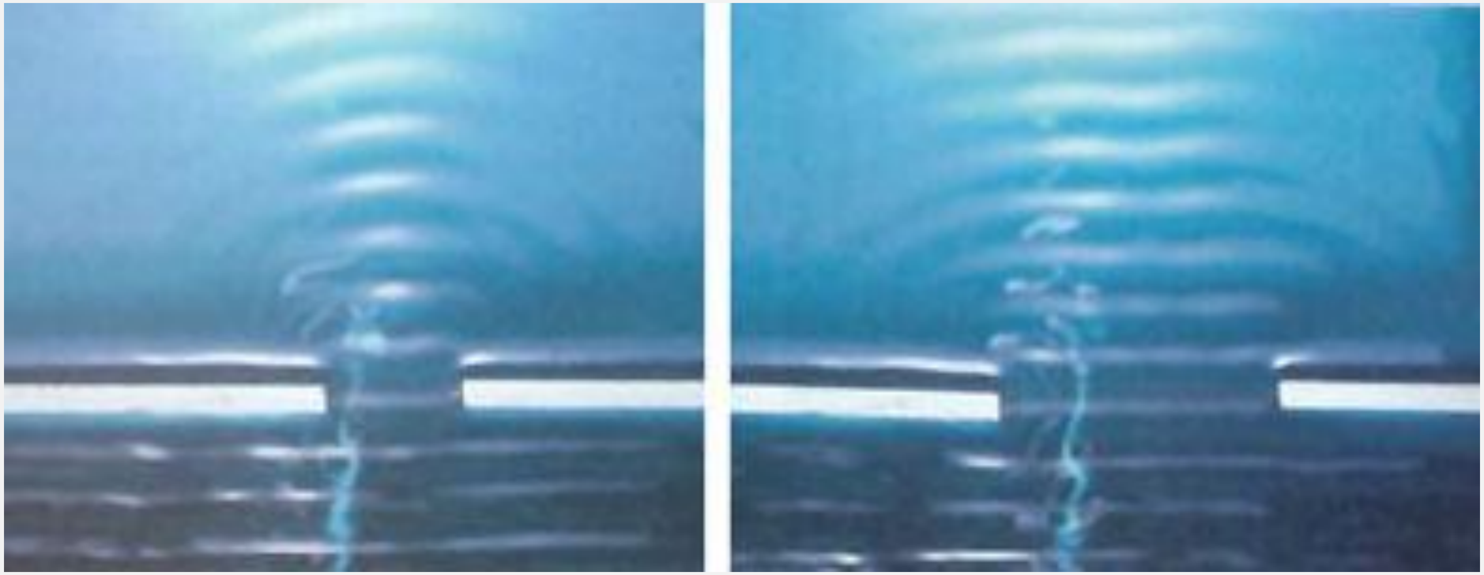




相对于波长而言，障碍物的线度越大衍射现象越不明显，障碍物的线度越小衍射现象越明显。

实例：水波通过狭缝的衍射图样





*应用举例：波的反射和折射

反射与折射也是波的特征。

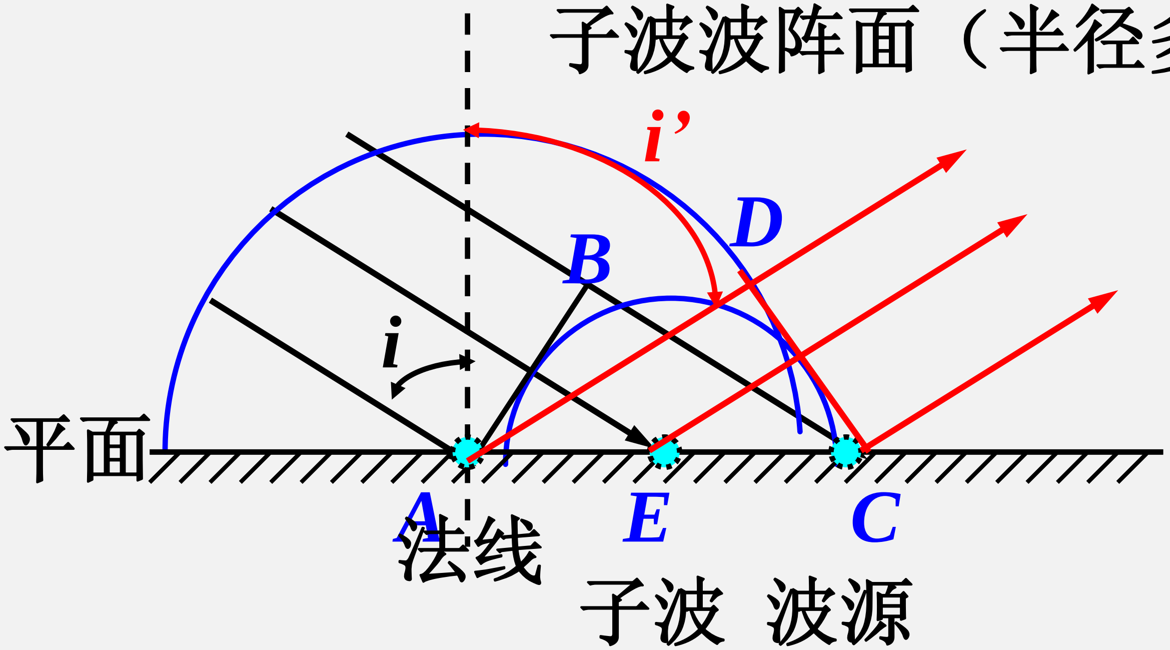
当波传播到两种介质的分界面时，波的一部分在界面返回，形成反射波，另一部分进入另一种介质形成折射波。

波的反射定律

波的折射定律

反射定律和折射定律可以利用惠更斯原理进行证明

利用惠更斯原理推导反射定律

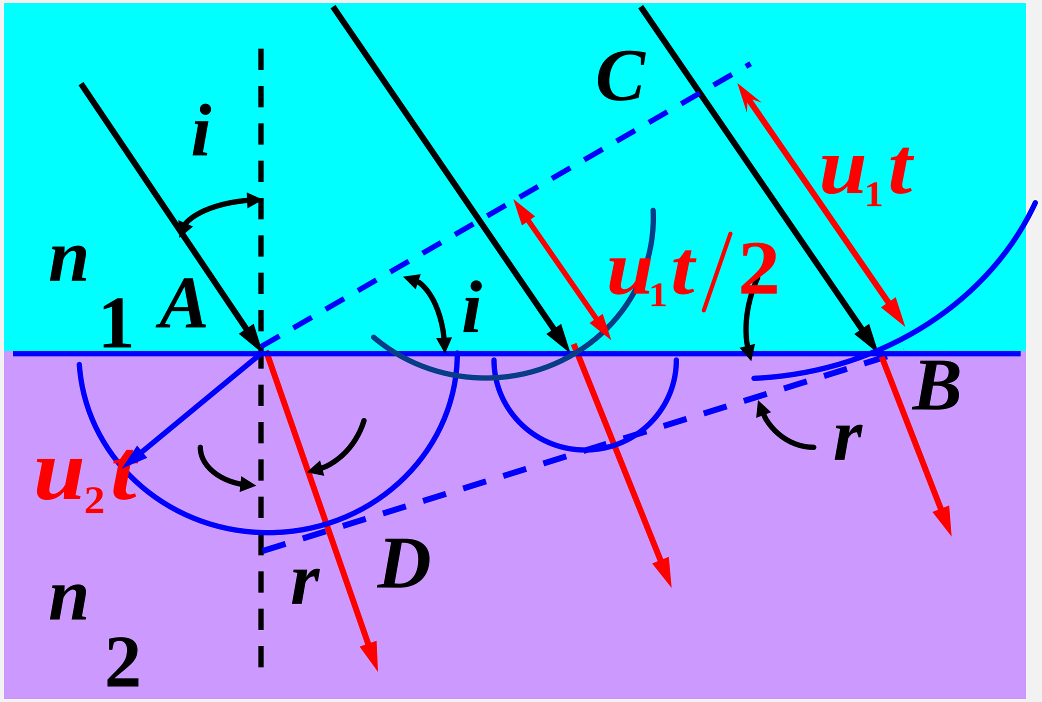


入射波波阵面AB，
反射波波阵面CD，
入射角i，反射角i'

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{\sin \angle BAC}{\sin \angle DCA} = \frac{BC}{AC} \Big/ \frac{AD}{AC} \xlongequal[]{(BC = u_1 \Delta t,\ AD = u_1 \Delta t)} 1$$

$\therefore\ i = i'$ 反射角等于入射角。

利用惠更斯原理推导折射定律



入射波波阵面AC，
折射波波阵面BD，
入射角i，折射角r

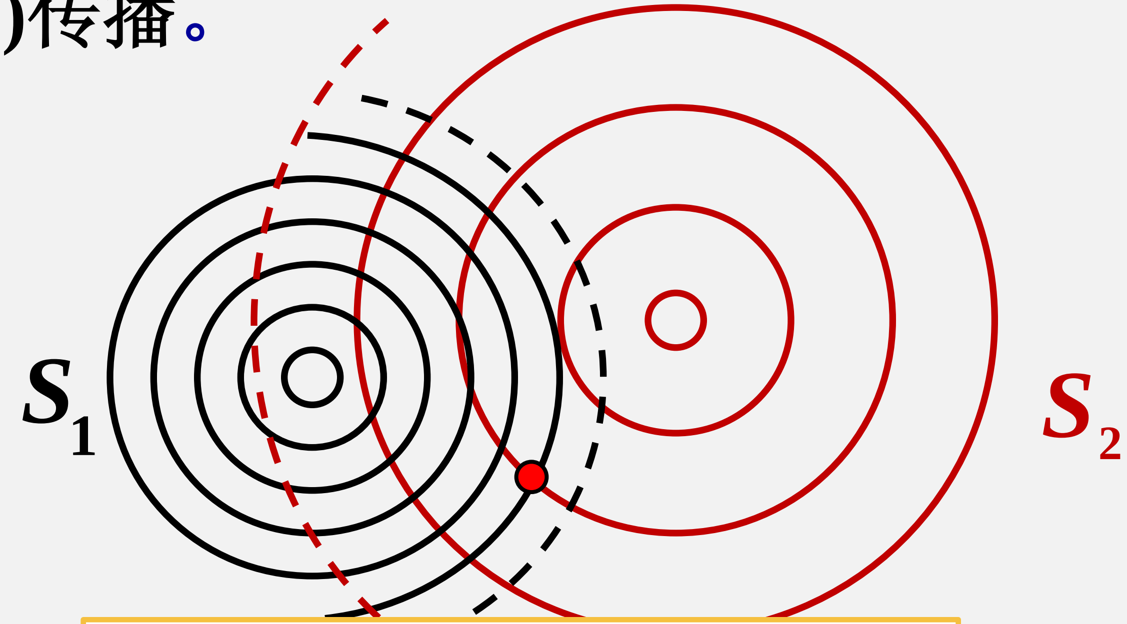
$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{\sin\angle CAB}{\sin\angle ABD}=\frac{CB}{AB}\Big/\frac{AD}{AB}=u_1t/u_2t=u_1/u_2=n_2/n_1.$$

入射角的正弦与折射角的正弦之比等于波动在入射介质内的波速与在折射介质内的波速的比值。

§ 7-5 波的干涉

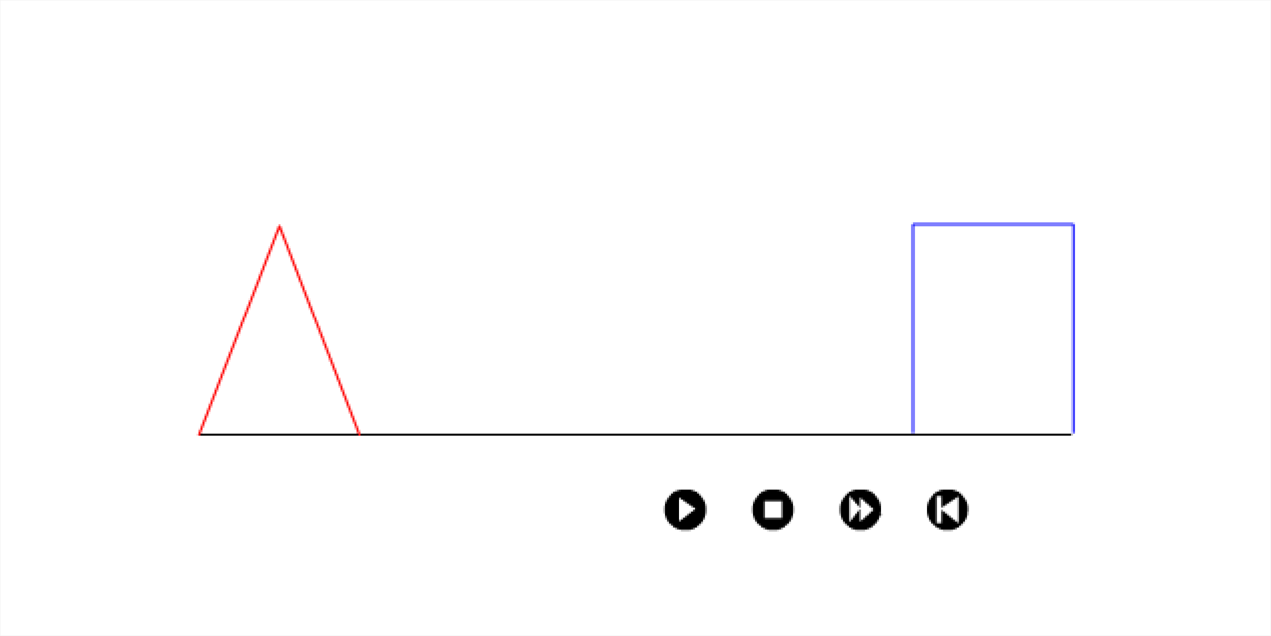
1. 波的叠加原理

波传播的独立性：几个波源产生的波，同时在一介质中传播，如果这几列波在空间某点处相遇，那么每一列波都将独立地保持自己原有的特性(频率、波长、振动方向等)传播。

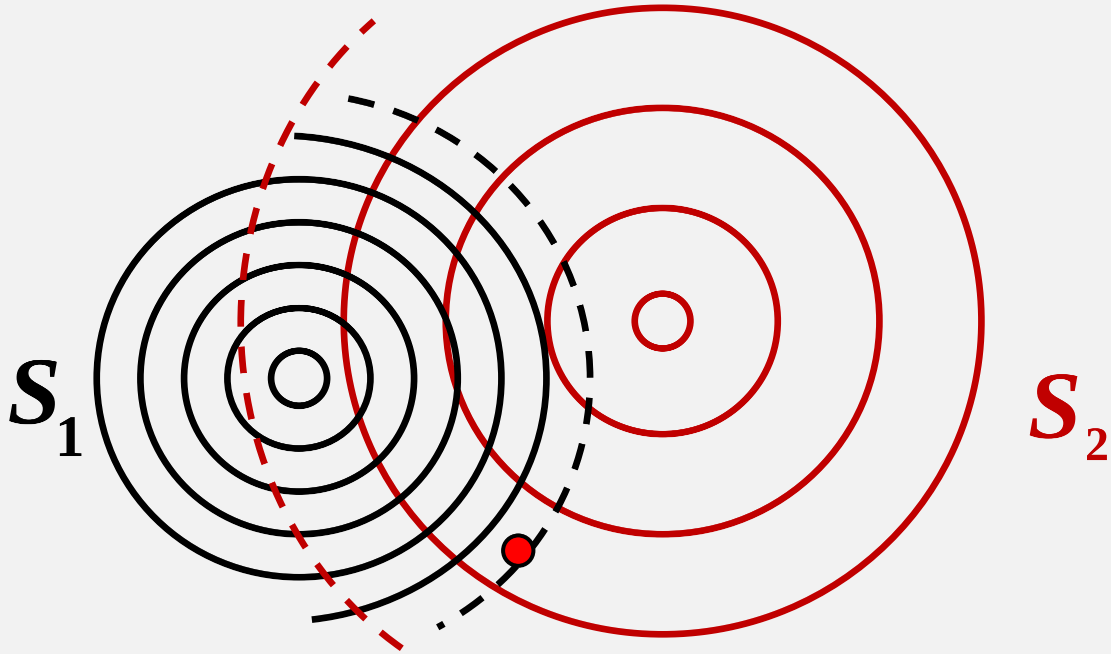


交叉区域内质点的振动状态？

波的叠加原理：有几列波同时在媒质中传播时，它们的传播特性（波长、频率、波速、波形）不会因其它波的存在而发生影响。在相遇区域，合振动是分振动的叠加。



叠加原理表明，可将任何复杂的波分解为一系列简谐波的组合。



交叉区域内质点的振动状态？

在相遇区域内，任一处质点的合振动是各列波单独在该点引起的分振动的叠加；

位移为各列波单独存在时在该点所引起的振动位移的矢量和。

2. 波的干涉

相干波

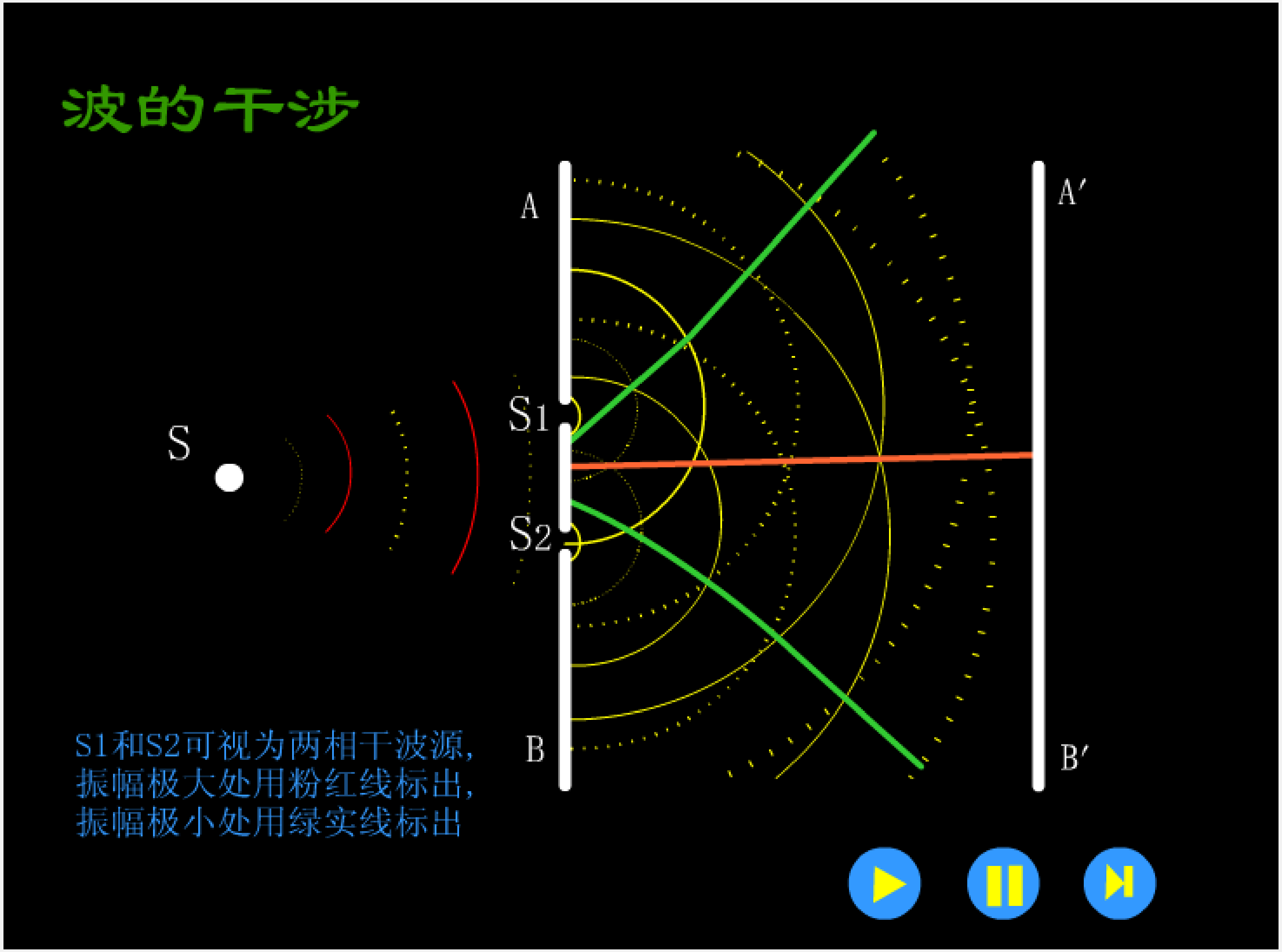
相干条件：

- 振动方向相同
- 频率相同
- 相位相同或相位差恒定

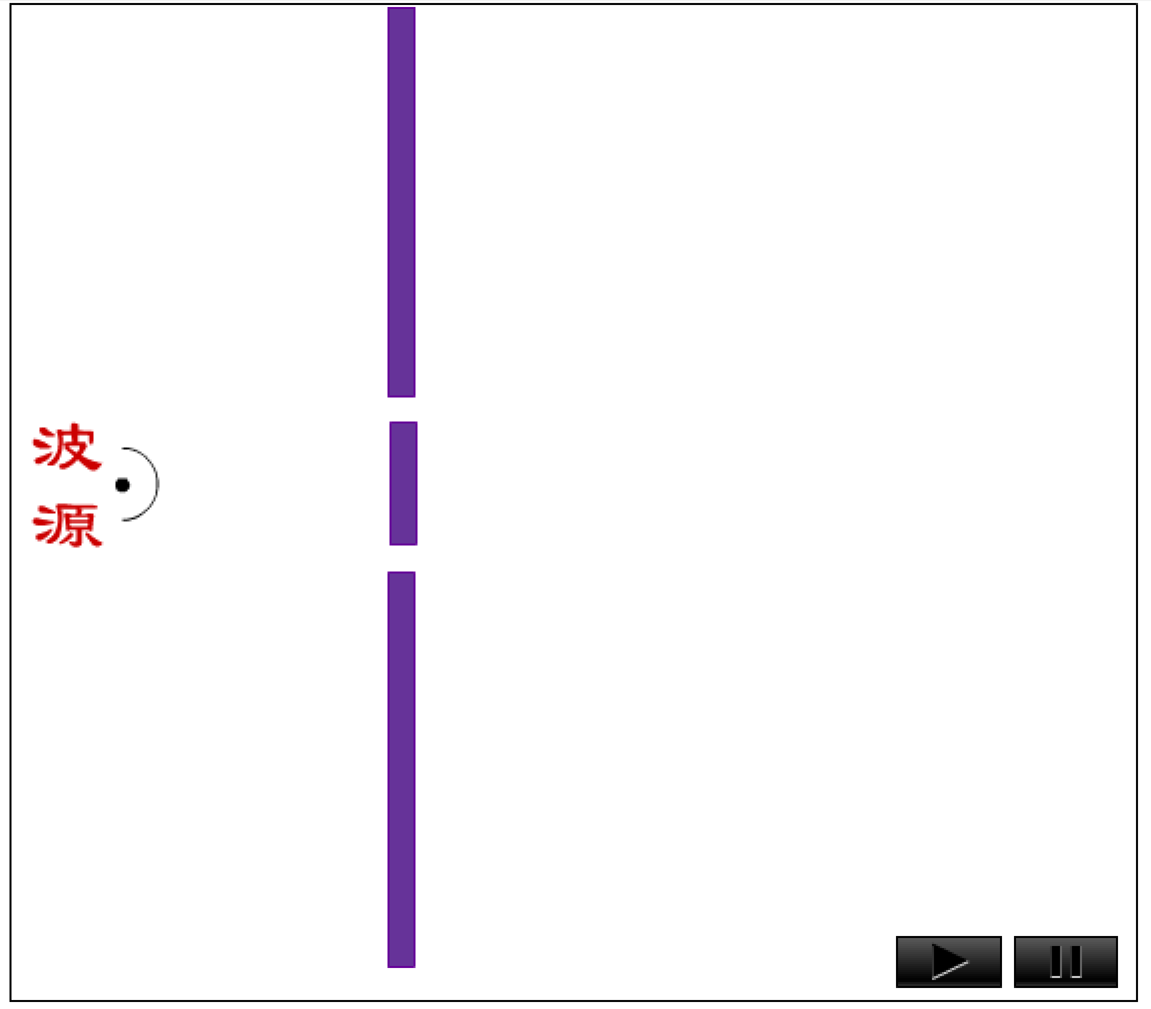
相干波：满足相干条件的几列波称为相干波。

相干波源：能发出相干波的波源称为相干波源。

波的干涉



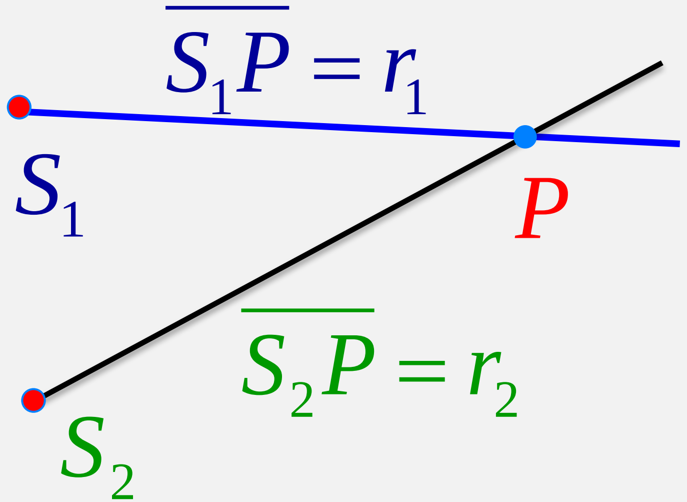
波的干涉



频率相同、振动方向平行、相位相同或相位差恒定的两列波相遇时，使某些地方振动始终加强，而使另一些地方振动始终减弱的现象，称为**波的干涉现象**。

强弱分布规律

两个相干波源S_1和S_2的振动方程分别为：



$$y_{S1}=A_{10}\cos(\omega t+\phi_{10})$$

$$y_{S2}=A_{20}\cos(\omega t+\phi_{20})$$

S_1和S_2单独存在时，在P点引起的振动的方程为：

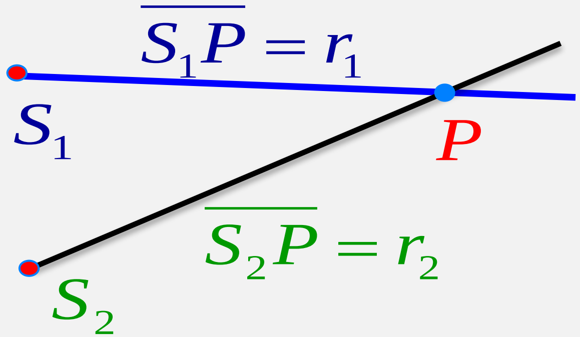
$$y_1=A_1\cos(\omega t+\phi_{10}-2\pi r_1/\lambda)$$

$$y_2=A_2\cos(\omega t+\phi_{20}-2\pi r_2/\lambda)$$

P **点的合方程为：**

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

振幅*A*和相位$\boldsymbol{\phi_0}$



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left[\phi_{20} - \phi_{10} - 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda\right]}$$

旋转矢量

$$\tan\varphi_0 = \frac{A_1\sin\left(\varphi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_2\sin\left(\varphi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)}{A_1\cos\left(\varphi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_2\cos\left(\varphi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)}$$

对于*P*点$\Delta\phi_0 = \phi_{20} - \phi_{10} - 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda$ 为恒量，因此 *A* 也是恒量，并与 *P*点空间位置密切相关。

● 当$\Delta\phi=\phi_{20}-\phi_{10}-2\pi(r_2-r_1)/\lambda=2k\pi$ 时，得

$$A=A_1+A_2$$（合振幅最大）

● 当$\Delta\phi=\phi_{20}-\phi_{10}-2\pi(r_2-r_1)/\lambda=(2k+1)\pi$ 时，得

$$A=\left|A_1-A_2\right|$$（合振幅最小）

● 当$\Delta\phi$为其他值时，合振幅介于

$A=A_1+A_2$ 和 $A=\left|A_1-A_2\right|$ 之间

若$\phi_{10}=\phi_{20}$，上述条件简化为：

$\delta=r_1-r_2=k\lambda\ ,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ （合振幅最大）

$\delta=r_1-r_2=(k+1/2)\lambda\ ,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$（合振幅最小）

波程差

$$\delta = r_1 - r_2$$

两列相干波源同相位时，在两列波叠加的区域内，波程差为零或等于波长整数倍的各点，振幅最大；波程差等于半波长奇数倍的各点，振幅最小。

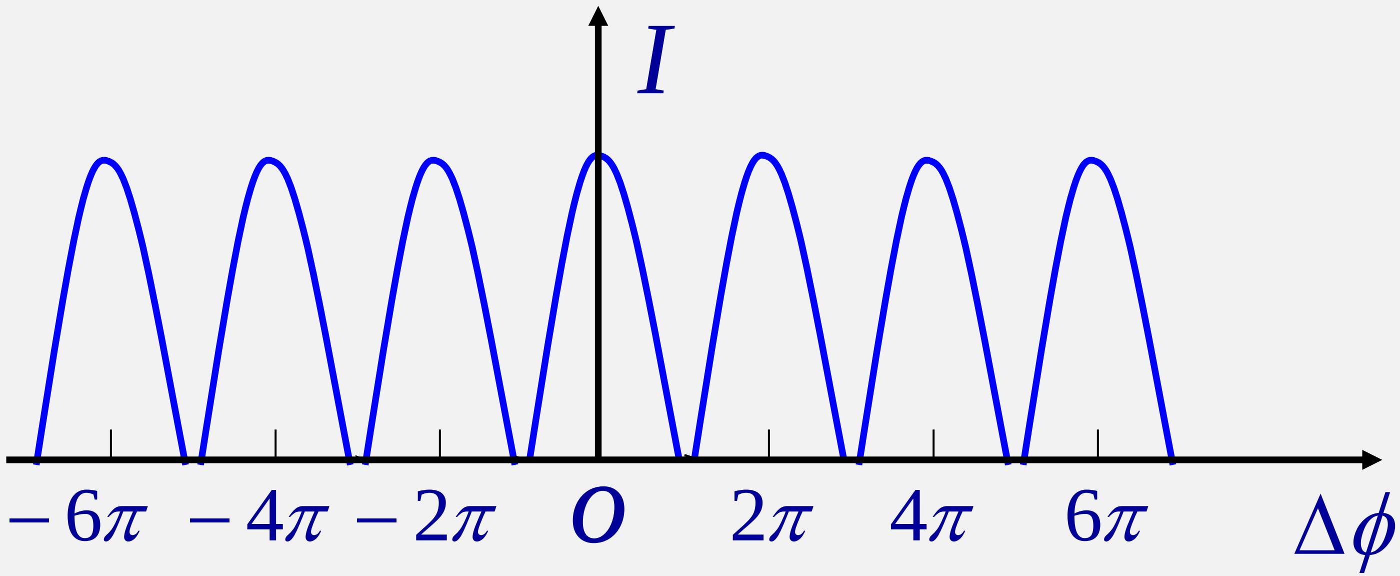
$$I \propto A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\phi$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\phi$$

若$\boldsymbol{I_1 = I_2}$，叠加后波的强度：

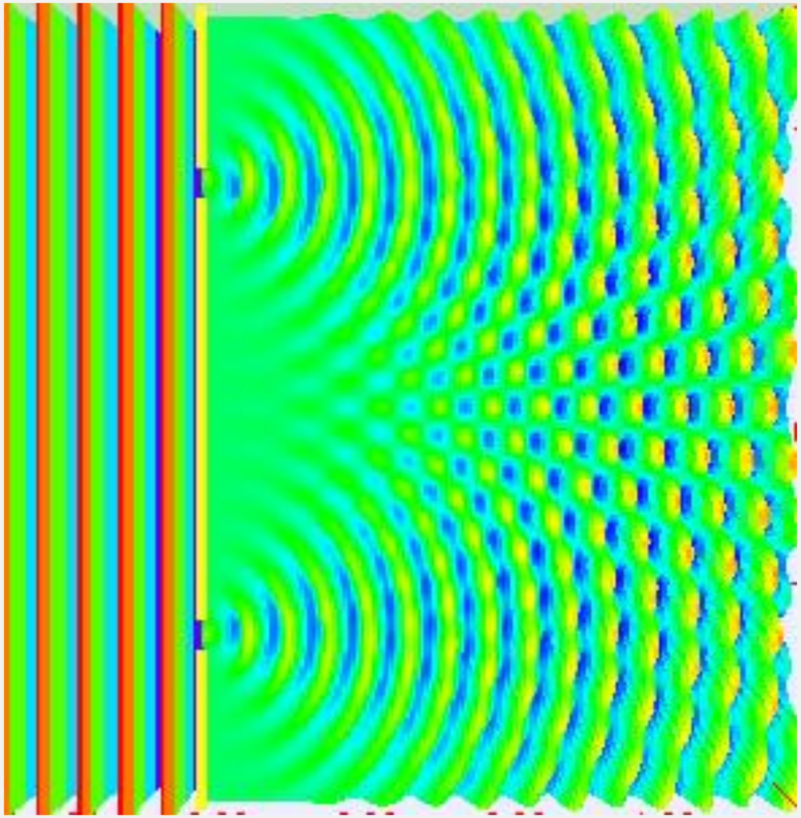
$$I = 2I_1[1+\cos(\Delta\phi)] = 4I_1\cos^2\frac{\Delta\phi}{2}$$

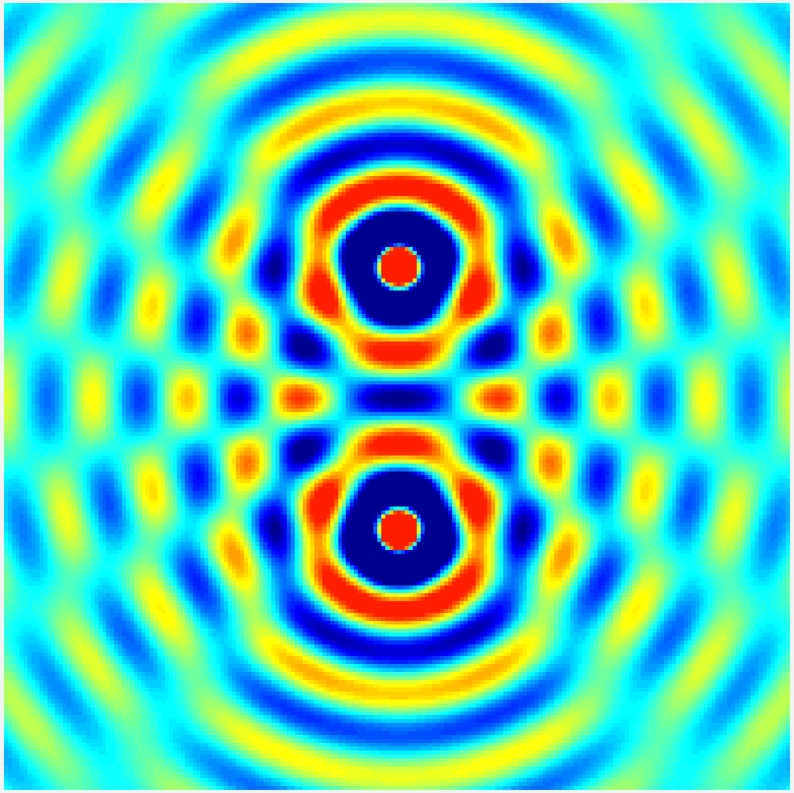
$$\Delta\phi = 2k\pi,\ I = 4I;\ \Delta\phi = (2k+1)\pi,\ I = 0$$



干涉现象的强度分布

同频率、同方向、相位差恒定的两列波，在相遇区域内，某些点处振动始终加强，另一些点处的振动始终减弱，这一现象称为**波的干涉**。

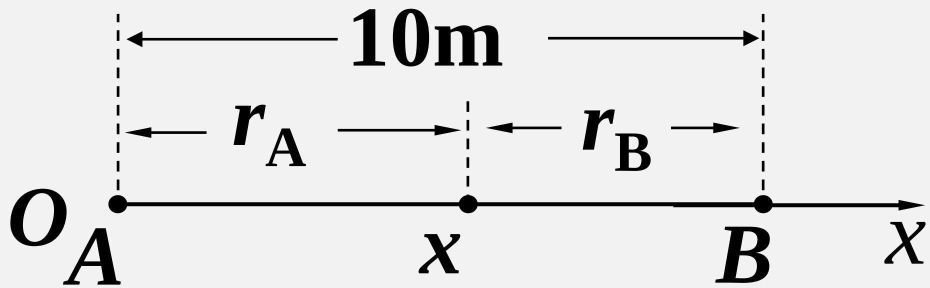




干涉现象的强度分布

例2　两波源分别位于同一介质A和B 处，振动方向相同，振幅相等，频率皆为100Hz，但A 处波源比 B 处波源相位落后π。若 A、B 相距10m，波速为4000m/s，试求由A、B之间连线上因干涉而静止的点。

解　建立所示的坐标系，任取一点x，则两波到该点的波程分别为



$$r_A = x$$

$$r_B = 10 - x$$

两波相位差为　$\Delta\phi = \phi_B - \phi_A - 2\pi \frac{r_B - r_A}{\lambda}$

两波相位差为

$$\Delta\phi = \pi - 2\pi\frac{\nu}{u}[(10-x)-x]$$

$$= \pi - 2\pi\frac{100}{400}(10-2x) = \pi x - 4\pi$$

因干涉而静止的点，满足干涉相消条件

$$\Delta\phi = \pi x - 4\pi = \pm(2k+1)\pi \quad \text{其中} \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\therefore \quad x = 2k' + 1$$

所以，因干涉而静止的点为

$$x = 1, 3, 5, 7, 9, \cdots, \ \mathrm{m}$$

THANKS

FOR YOUR ATTENTION