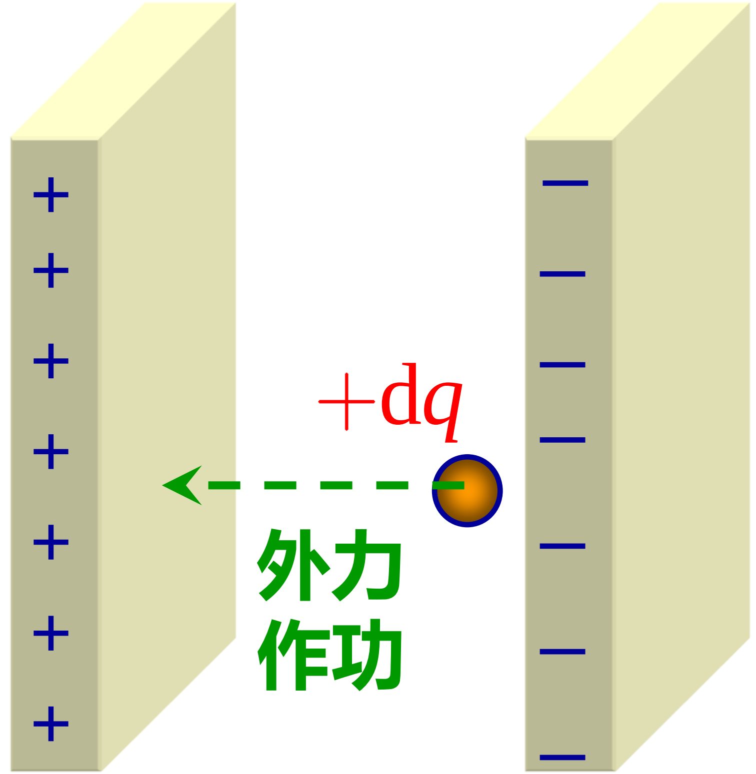
§10-8 静电场的能量

在电场中电荷移动电场力对电荷作功，说明电场蕴藏着能量——静电能。电容器充放电过程中的现象则是电场能和其它能量相互转化的结果。

静电场的能量特征

如图，电容器充电过程是把微小电荷$+\mathrm{d}q$移到另一个极板，形成两极板带等量异种电荷的分布。

设电容器极板带电荷量为q，极板间电势差为 $u_1'-u_2'$

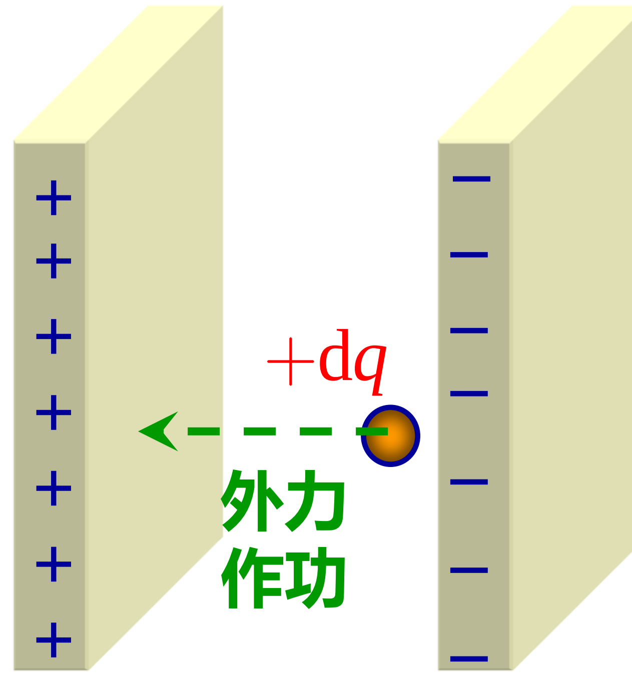


把微小电荷 $+\mathrm{d}q$ 移到另一个极板外力克服电场力作功

$$\mathrm{d}A=\left(u_1'-u_2'\right)\mathrm{d}q$$

电容器电容为C，此时带电量为q，

$$u_1'-u_2'=\frac{q}{C}$$ **所以** $$\mathrm{d}A=\frac{q}{C}\mathrm{d}q$$



当电容器由 $q=0$ 到 $q=Q$

$$A=\int\mathrm{d}A=\int_0^Q\frac{q}{C}\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

这个功应等于电容器的静电能。

$$Q=CU$$

则电容器的静电能为

$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU$$

下面说明静电能也就是电场的能量，且分布在电场所占的整个空间之中。

设平行板面积为 S 两极板间距为 d

极板间电势差为 $U=Ed$ 又 $C=\varepsilon_0 S/d$

$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \boxed{Sd}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V$$

电场所占体积

由上式可见，静电能可用表征电场性质的电场强度 E 表示，且与电场所占体积成正比。这表明电能储存在电场中。

静电场的能量

匀强电场的能量 $W=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V$

匀强电场的电场能量密度为 $w_{\mathrm{e}}=\frac{W}{V}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

任一带电体系的电场总能量

$$\boxed{W=\int w_{\mathrm{e}}\mathrm{d}V=\iiint_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}V}$$

例题： 计算均匀带电球体的电场能量，设球半径为R，带电量为q，球外为真空。

解：均匀带电球体内外的电场强度分布为

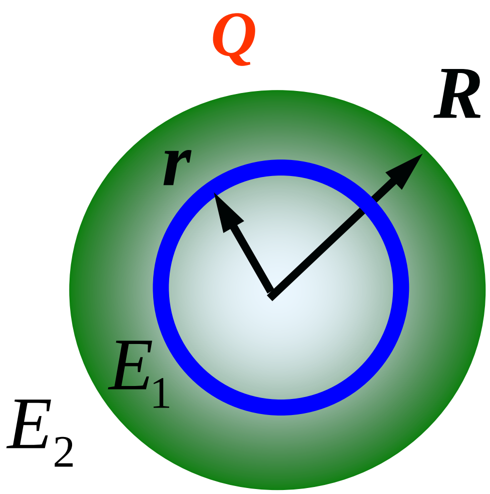
$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad (r < R) \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}}{r^3}, \quad (r \geq R)$$

相应的，球内外的电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 = \frac{q^2 r^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^6} \qquad (r < R)$$

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} \qquad (r \geq R)$$

在半径为*r*厚度为d*r*的球壳内的电场能量



$$w_e \mathrm{d}V = w_e 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

整个带电球体的电场能量

$$W = \int w_\mathrm{e} \mathrm{d}V$$

$$= \int_0^R \frac{q^2 r^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 R^6} 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \int_R^\infty \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4} 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{q^2}{40\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

§10-9 电介质的极化 束缚电荷

电介质 (Dielectric)，就是绝缘体。电中性的分子中，带负电的电子(或负离子)与带正电的原子核(或正离子)束缚得很紧，不能自由运动 —束缚电荷，无自由电荷，不导电。

电介质极化特点：内部场强一般不为零。

本节讨论：

在电场作用下，电介质的电荷如何分布?

电介质如何影响电场?

如何计算有电介质存在时的电场分布?

请关注：电介质和导体在电学机制上的区别。

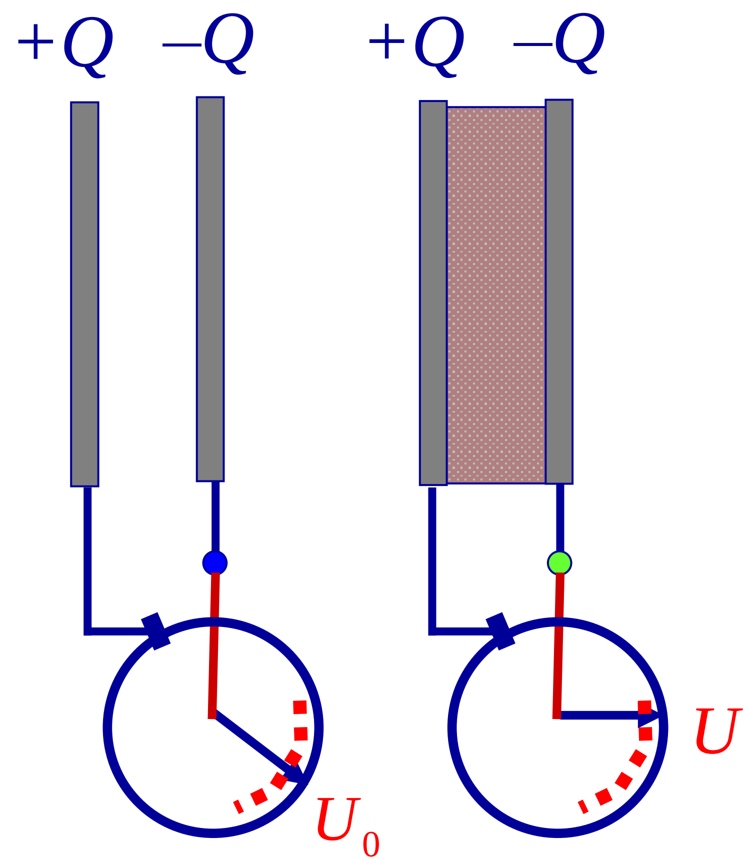
1. 电介质　电容器的电容

平板电容器两极板间无电介质和有电介质，其上的电压值不同。

无电介质时，两极板间的电压为U_0；

加入电介质后两极板间的电压为U。

测量可得：$U=\dfrac{1}{\varepsilon_r}U_0 \quad \varepsilon_r>1$



静电计测电压

电介质电容器

$$C = \varepsilon_r C_0$$

充满介质时电容

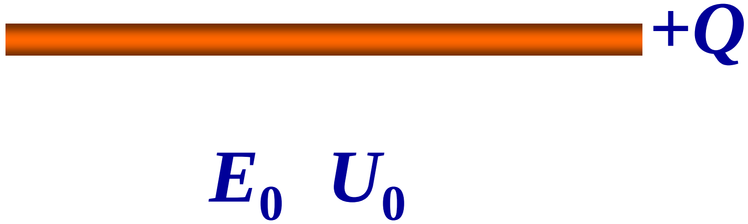
相对介电常数

真空中电容

一些电介质的相对介电常数

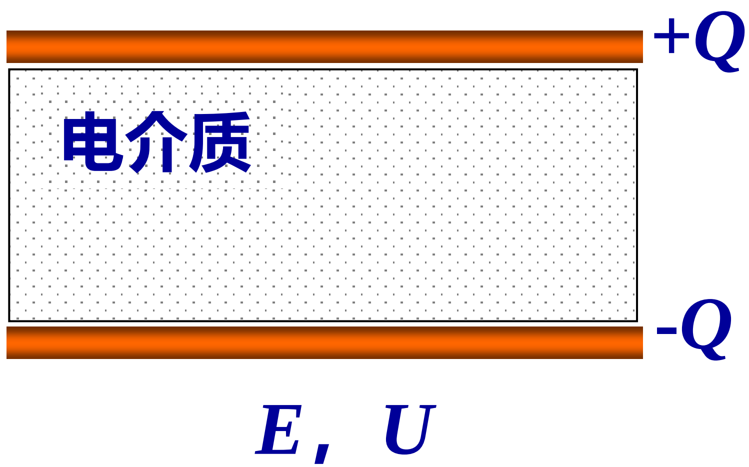
电介质	ε_r	电介质	ε_r	电介质	ε_r
真空	1	变压器油	3	氧化钽	11.6
空气	1.000585	云母	3~6	二氧化钛	100
纯水	80	普通陶瓷	5.7~6.8	电木	7.6
玻璃	5~10	聚乙烯	2.3	石蜡	2.2
纸	3.5	聚苯乙烯	2.6	钛酸钡	10^2~10^4

加入电介质后两极板间电压减小了，表明其间电场减弱了。



$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_0}{\varepsilon_r d} = \frac{1}{\varepsilon_r} E_0$$

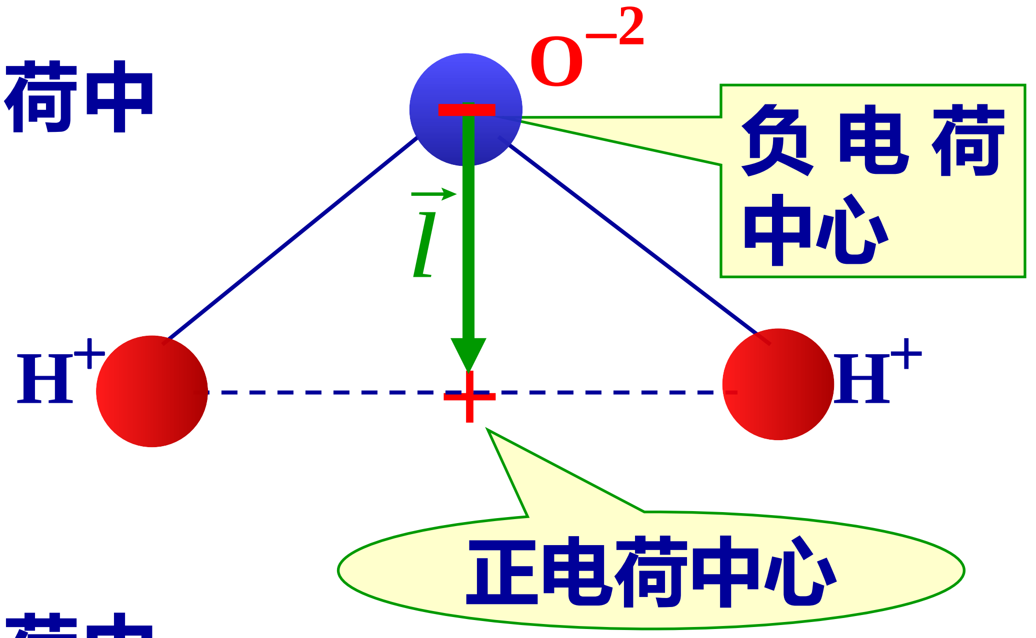
电场减弱的原因是电介质的微观结构与外电场的相互影响。



2. 电介质分子的电结构

有极分子：分子的正电荷中心与负电荷中心不重合。

$$\vec{p}_e = q\vec{l}$$



无极分子：分子的正电荷中心与负电荷中心重合。

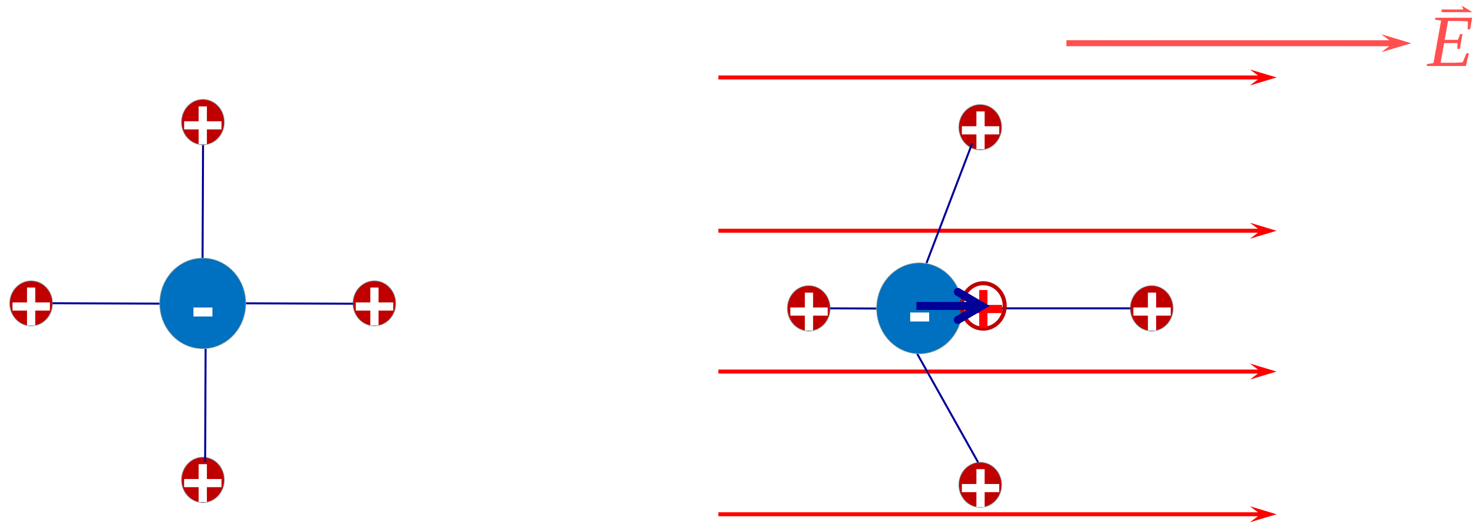
例如 He、N_2、CH_4 等

等效电偶极矩：$\vec{p}_e = 0$

3. 电介质的极化　束缚电荷

（1）无极分子的位移极化

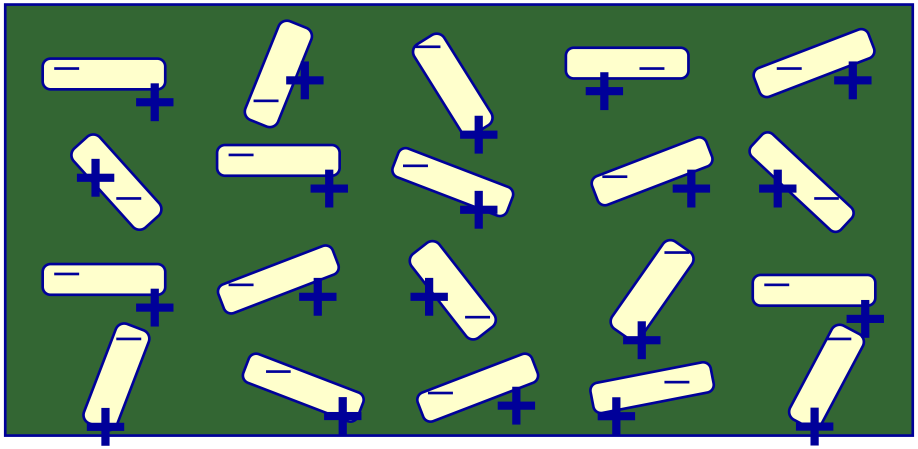
加上外电场后，在电场作用下介质分子正负电荷中心不再重合，出现分子电矩。



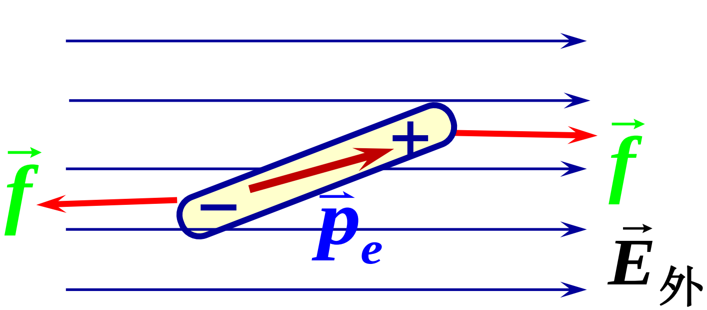
对于均匀电介质，内部各处仍然为电中性。但是在电介质与外电场垂直的两个表面上出现正电荷和负电荷。这种不能在电介质内自由移动，也不能离开电介质表面的电荷，就是**束缚电荷**。

（2）有极分子的取向极化

无外电场时，有极分子电矩取向不同，整个介质不带电。



在外电场中有极分子的固有电矩要受到一个力矩作用，电矩方向转向和外电场方向趋于一致。



$\vec{p}_e$ 转向外电场

(3) 束缚电荷与自由电荷的区别

束缚电荷：在外电场中，均匀介质内部各处仍呈电中性，但在介质**表面会出现电**荷。这种**电荷不能离开电介质**到其它带电体，也**不能在电介质内部自由移动**，称它为束缚电荷或极化电荷。

自由电荷：是在外电场作用下**可以自由运动**的宏观电荷

补充 3. 电极化强度矢量

(1) 电极化强度矢量

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}$$

单位体积内分子电偶矩的矢量和。

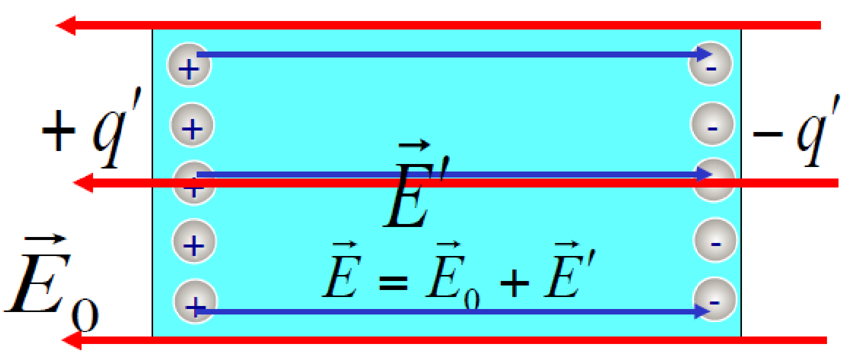
束缚电荷电场

总电场

空间任一点总电场

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

外电场



(2) 电极化强度与总电场的关系

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

极化率

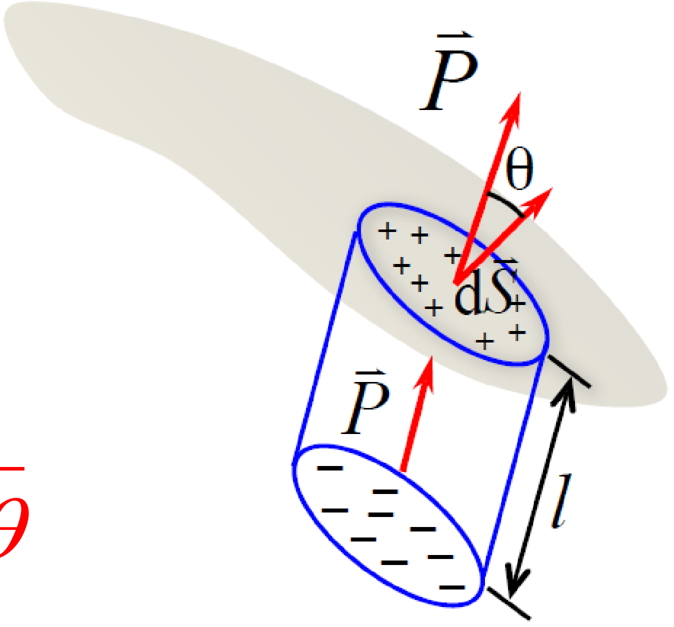
补充 4. 电极化强度与极化电荷的关系

在均匀电介质中取一圆柱体，体积为ΔV

$$\Delta V = \Delta S \cdot l\cos\theta$$

$$q'\vec{l} = \sigma'\Delta S\vec{l} = \sum \vec{p}_i$$

$$\left|\vec{p}\right| = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V} = \frac{\sigma' \cdot \Delta S \cdot l}{\Delta S \cdot l \cdot \cos\theta} = \frac{\sigma'}{\cos\theta}$$



束缚电荷面密度

$$\sigma' = \left|\vec{P}\right|\cos\theta = \vec{P}\cdot\vec{n} = P_n$$

均匀电介质表面产生的极化电荷面密度等于该处电极化强度沿表面外法线方向的投影。

§10-10 电介质内的电场强度

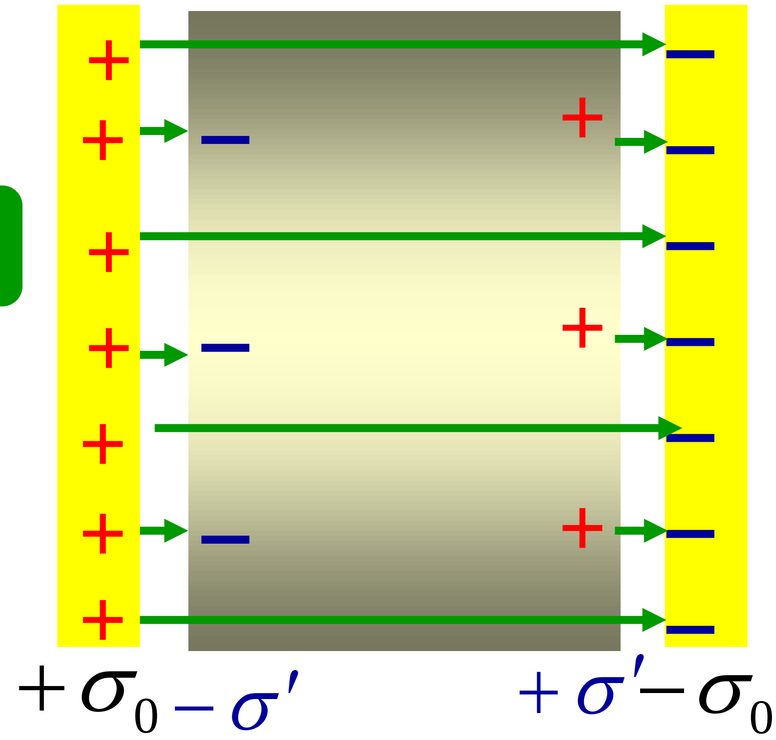
空间任一点总电场

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

总电场

外电场

束缚电荷电场



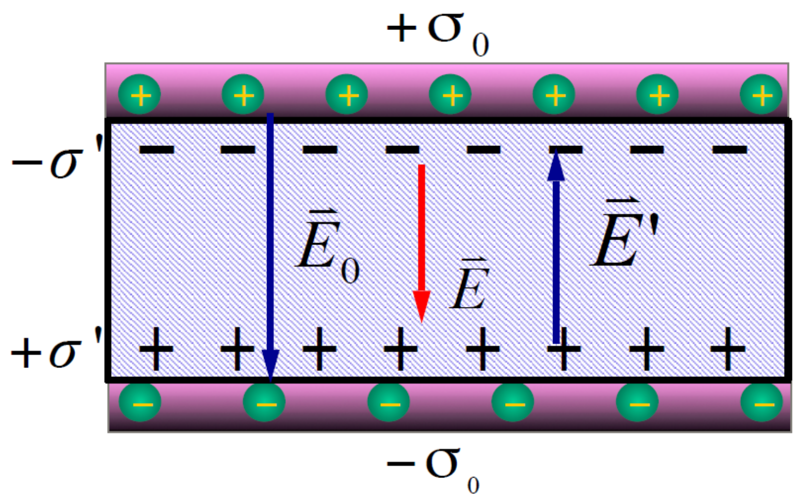
电介质内电场

$$E = E_0 + E'$$

$$= \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$E = E_0 + E'$$

$$= \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$



由实验

$$U = \frac{1}{\varepsilon_r} U_0 \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{\varepsilon_r} E_0}$$

$$\sigma' = (1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\sigma_0$$

不同材料中，束缚电荷和自由电荷之间的关系

结论：电介质内部，合电场强度总是小于自由电荷产生的电场强度。

§10-11 电介质中的高斯定理 电位移矢量D

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

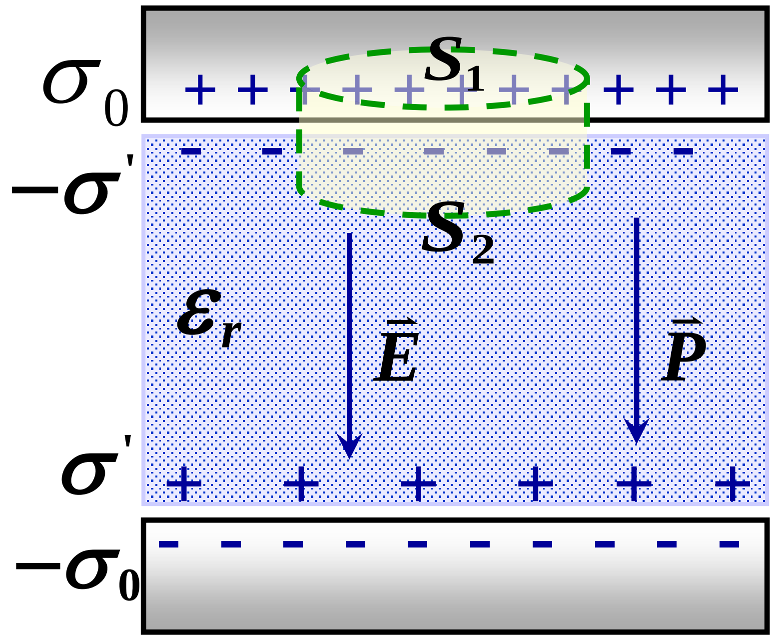
在电介质存在时，应同时考虑自由电荷q_0和束缚电荷q'，以及产生的电场

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内}(q_0 + q')$$

总电场 $(\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}\,')$ 自由电荷 束缚电荷

平行板电容器：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内}(q_0 + q')$$



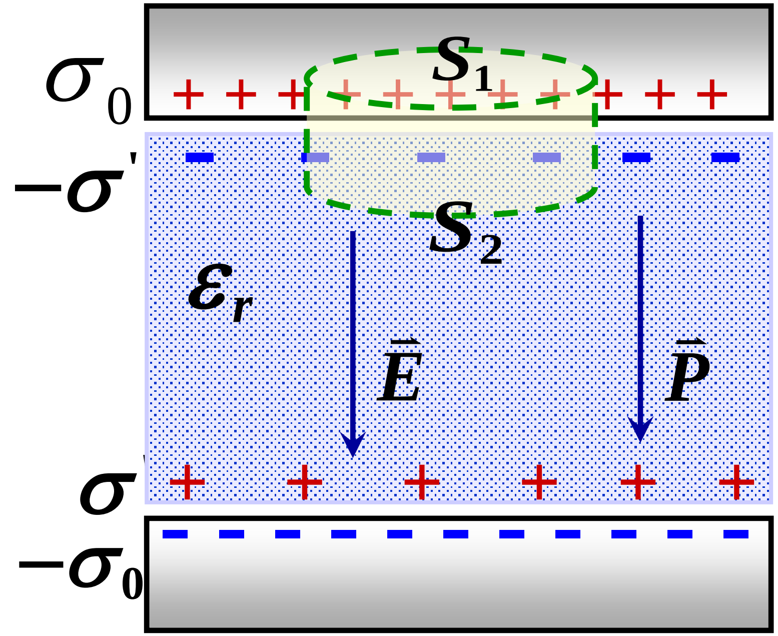
$$q' \sim \sigma' \sim \vec{P} \sim \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

不方便！

本节目的：

导出另一形式的高斯定理，等式右边不含q’，只含自由电荷q_0。

加入电介质后



$$\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} (q_0 + q')$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\sigma_0 S_1 - \sigma' S_2 \right).$$

$$\sigma' = (1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\sigma_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$\therefore \oiint_S \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sigma_0 S_1 = q_0$$

$$\oiint_S \underline{(\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E})} \cdot d\vec{S} = q_0$$

定义(引入)电位移矢量：

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}}$$

D **的（有电介质）高斯定理：**

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

通过任意封闭曲面的电位移矢量的通量，等于该封闭面所包围的自由电荷的代数和

两个高斯定理比较

电场强度通量 Vs 电量　　电位移通量Vs自由电荷电量

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

$$(q_0 + q')$$

$$\Phi_D = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S内} q_0$$

电场线，源自正电荷，终于负电荷，（包括自由电荷和束缚电荷）

电位移线，源自正自由电荷，终于负自由电荷。

*D*由极化电荷和自由电荷共同决定，不能认为*D*仅由自由电荷决定，但*D*的通量仅由自由电荷决定。

$\vec{D}$、$\vec{E}$、$\vec{P}$ 三矢量之间关系

$$\left.\begin{aligned}\vec{D} &\equiv \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\\ \vec{P} &= \chi_e\varepsilon_0\vec{E}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{D}=\varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

$$(\varepsilon_r = 1+\chi_e)$$

$$= \varepsilon\vec{E} \qquad (\varepsilon:\text{介质的电容率})$$

ε_0 真空中介电常数;

ε_r 相对介电常数;

ε 介电常数;

χ_e 叫电极化率，是一个无量纲化纯数。

有电介质存在时的高斯定理的应用

（1）分析自由电荷分布的对称性，选择适当的高斯面，求出电位移矢量（$\vec{D}$）。

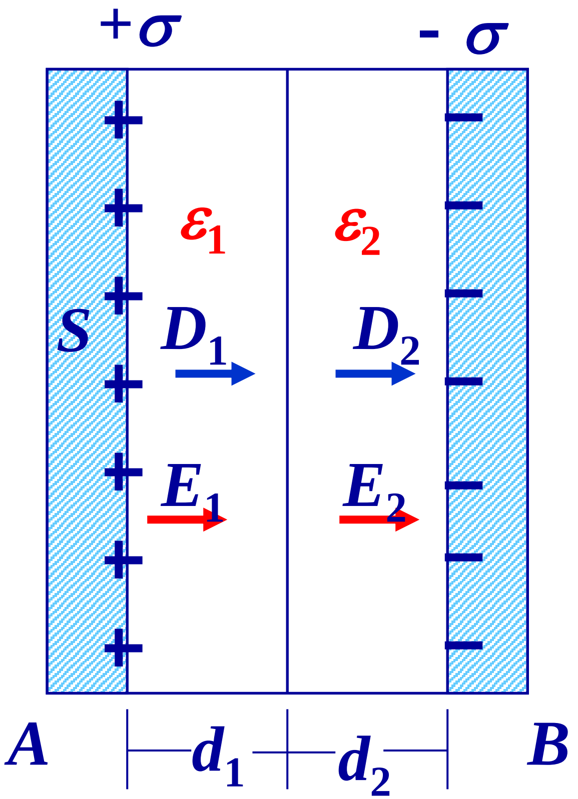
（2）根据电位移矢量与电场的关系，求出电场（$\vec{E}$）。

（3）根据电极化强度与电场，求出电极化强度（$\vec{P}$）。

（4）根据束缚电荷与电极化强度，求出束缚电荷（σ'）。

例题： 平行板电容器两板极的面积为S，如图。两板极间充有两层电介质，电容率分别为ε_1 和 ε_2，厚度分别为d_1 和d_2，电容器两板极上自由电荷面密度为±σ。

求（1）各层电介质内的电位移和场强，（2）电容器的电容.



解：（1）设场强分别为E_1 和E_2，电位移分别为D_1 和D_2，E_1和E_2 与板极面垂直，都属均匀场。

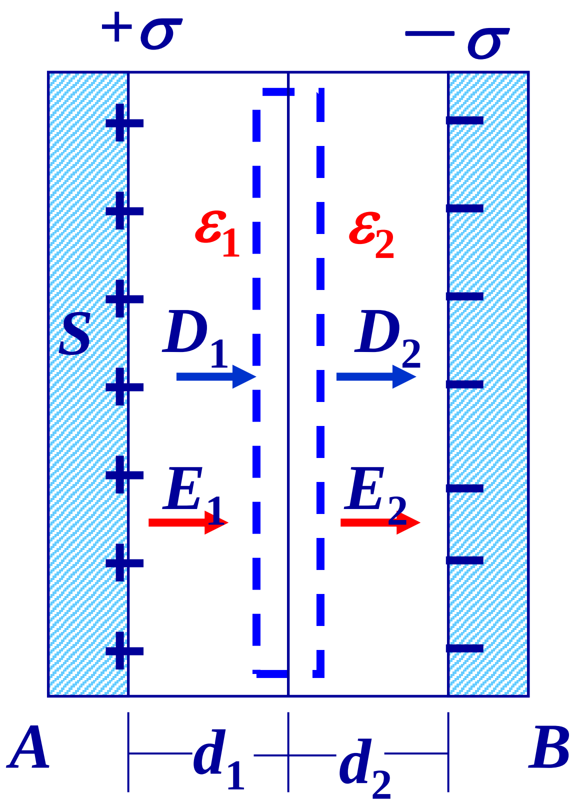
在两层电介质交界面处作一闭合高斯面S₁，在此高斯面内的自由电荷为零。

$$\therefore \oiint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} = -D_1 S + D_2 S = 0$$

$$\therefore D_1 = D_2$$

$$\because \vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1 \ , \vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2$$

$$\therefore \frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} .$$



可见在这两层电介质中场强并不相等，而是和电容率（或相对电容率）成反比。

另作一个闭合高斯面S$_2$，如图。

高斯面内的自由电荷等于正极板上的电荷。

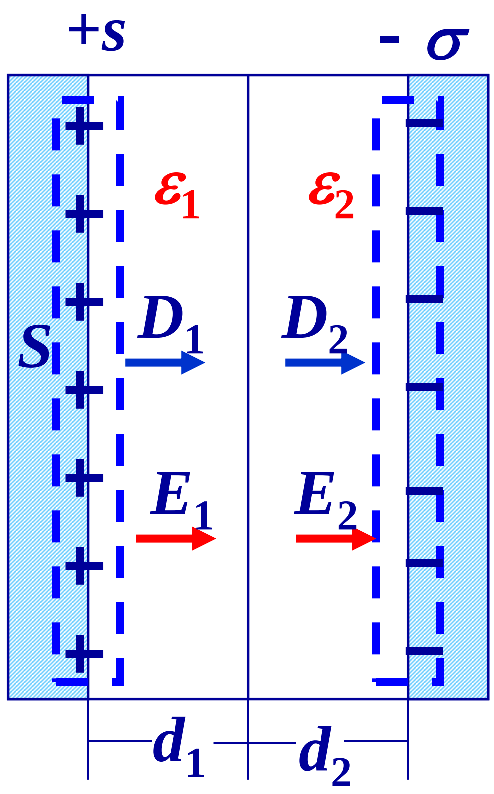
$$\oiint_{S_1} \vec{D}\cdot\vec{S} = \sigma S \qquad \therefore D_1 S = \sigma S$$

$$\therefore D_1 = \sigma \quad \Rightarrow D_2 = \sigma$$

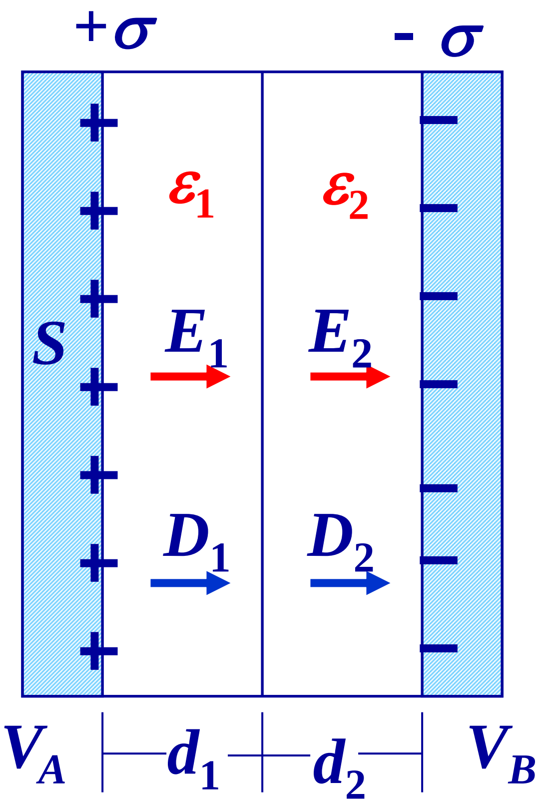
再利用 $\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1 , \vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2$, 可得:

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0},$$

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}.$$ **方向都是由左指向右。**



(2）求：电容器的电容.



正、负极板A、B间的电势差为:

$$u_A - u_B = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

$$= \frac{\sigma d_1}{\varepsilon_1} + \frac{\sigma d_2}{\varepsilon_2} = \frac{q}{S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right).$$

∴电容器的电容为:

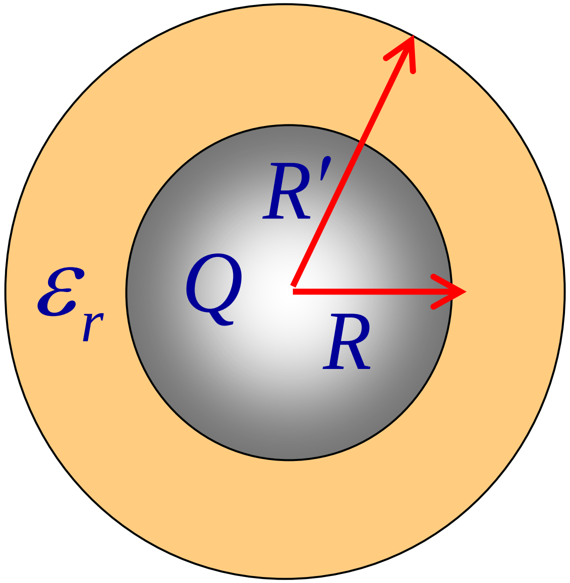
$$C = \frac{q}{u_A - u_B} = \frac{S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2}}.$$

上述结果可推广到极板间有任意多层电介质的情况。

例： 在半径为R的金属球之外有一层半径为R'的均匀介质层,设电介质相对电容率为ε_r, 金属球带电量为Q。求:

(1） 介质层内、外的场强;

(2） 介质层内、外的电势。



解： (1）由介质中的高斯定理

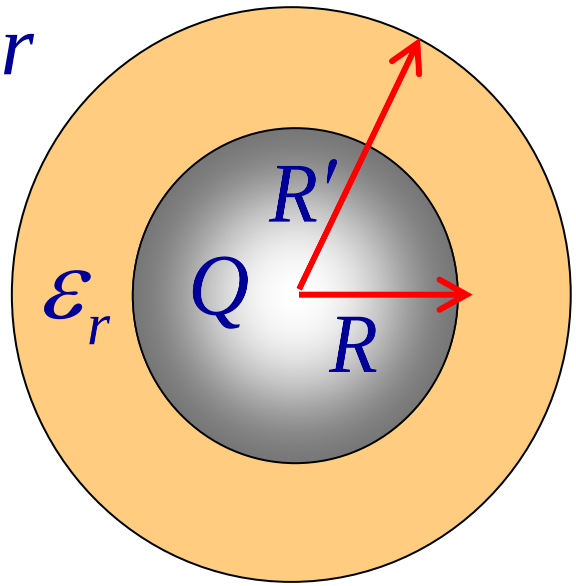
$$R < r < R'$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q \qquad D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\vec{E}_{\text{in}} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{r}_0$$

$r > R'$

$$\vec{E}_{外} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \quad u_{外} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



(2) $$u_{in} = \int_r^{R'} \vec{E}_{in} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{R'}^{\infty} \vec{E}_{外} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{r} + \frac{\varepsilon_r - 1}{R'}\right)$$

作业：第10章 9，10