

第 2 章 电路的瞬态分析

2.1 瞬态分析的基本概念

2.2 储能元件

2.3 换路定律

2.4 RC 电路的瞬态分析

2.5 RL 电路的瞬态分析

2.6 一阶电路瞬态分析
的三要素法

2.7 应用实例

2.1 瞬态分析的基本概念

一、稳态和瞬态

电路的结构和元件的参数一定时，电路的工作状态一定，电压和电流不改变。这时电路所处的状态称为**稳定状态**，简称**稳态**。

换路

当电路在**接通、断开、改接以及参数和电源发生突变时**，都会引起电路工作状态的变化。



换路后，旧的工作状态被破坏、新的工作状态在建立，电路将从一个稳态变化到另一个稳态，这种变化往往不能瞬间完成，而是有一个**瞬态过程**。

电路在瞬态过程中所处的状态称为**瞬态状态**，简称**瞬态**。

● 换路后为什么会有瞬态过程？

换路是引起瞬态过程的**外因**。

电容中的电场能和电感中的磁场能的不能突变是引起瞬态过程的**内因**。



二、激励和响应

- 电路从电源（包括信号源）输入的信号统称为激励。激励有时又称输入。
- 电路在外部激励的作用下，或者在内部储能的作用下产生的电压和电流统称为响应。响应有时又称输出。
- 按照产生响应原因的不同，响应可分为：
 - (1) **零输入响应**
电路在无外部激励的情况下，仅由内部储能元件中所储存的能量引起的响应。



(2) 零状态响应

在换路时储能元件未储存能量的情况下，由激励所引起的响应。

(3) 全响应

在储能元件已储有能量的情况下，再加上外部激励所引起的响应。

● 在线性电路中：

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

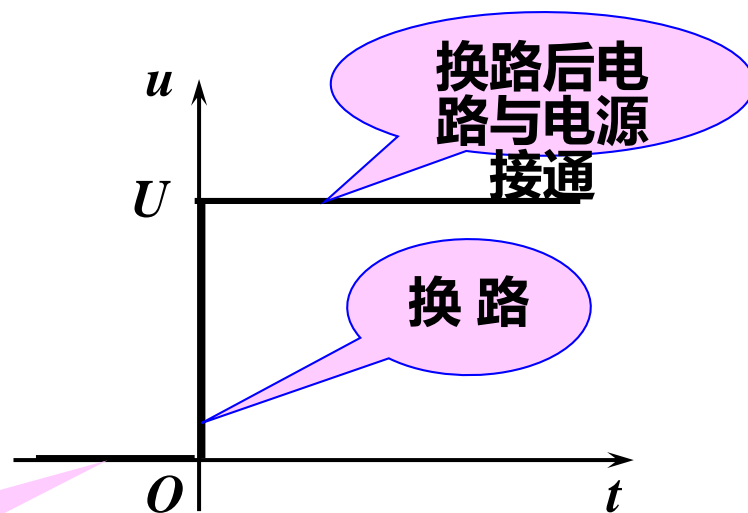


按照激励波形的不同，零状态响应和全响应可分为阶跃响应、正弦响应和脉冲响应等。

● 阶跃响应即在直流电源作用下的响应。

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{当 } t < 0 \text{ 时} \\ U, & \text{当 } t > 0 \text{ 时} \end{cases}$$

阶跃激励

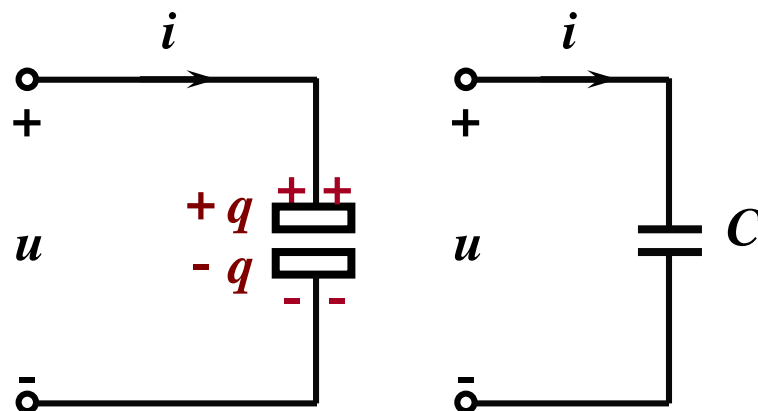


● 在阶跃激励作用下的响应称为阶跃响应。

2.2 储能元件

一、电容

电容是用来表征电路中电场能量储存这一物理性质的理想元件。



$$C = \frac{q}{u}$$

——电荷量，单位为库[仑](C)

——电压，单位为伏[特](V)

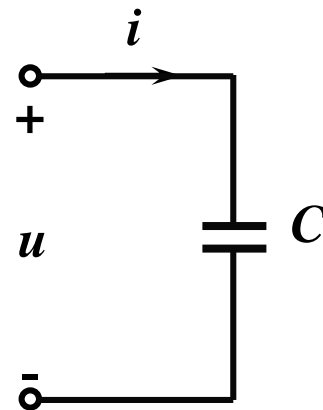
——电容，单位为法[拉](F)



$$i = C \frac{du}{dt}$$

电容的瞬时功率

$$p = ui = Cu \frac{du}{dt}$$



u 的绝对值增大时, $u \frac{du}{dt} > 0$, $p > 0$, 电容从外部输入功率, 把电能转换成了电场能。

u 的绝对值减小时, $u \frac{du}{dt} < 0$, $p < 0$, 电容向外部输出功率, 电场能又转换成了电能。

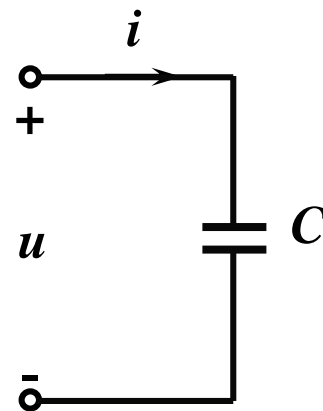


$$t = 0 \rightarrow t = \xi$$

$$u = 0 \rightarrow u = U$$

从外部输入的电能

$$\int_0^\xi p \, dt = \int_0^\xi ui \, dt = \int_0^U C u \, du = \frac{1}{2} CU^2$$



电容中储存的电场能

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2$$

单位为焦[耳](J)

由于

$$p = \frac{dW_e}{dt}$$

- 若外部不能向电容提供无穷大的功率,电场能就不可能发生突变。因此, **电容的电压 u 不可能发生突变。**

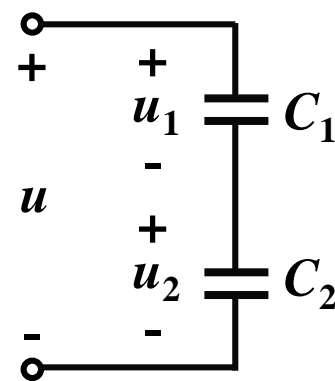


电容串联时

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

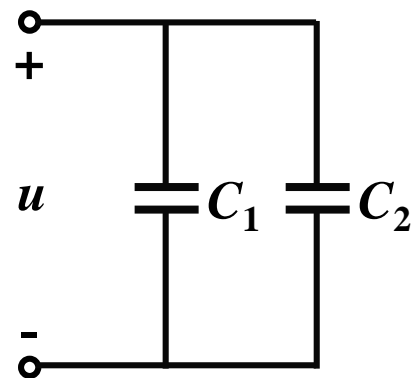
$$u_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} u$$

$$u_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u$$



电容并联时

$$C = C_1 + C_2$$



● 电容图片



复合介质电容



钽电解电容



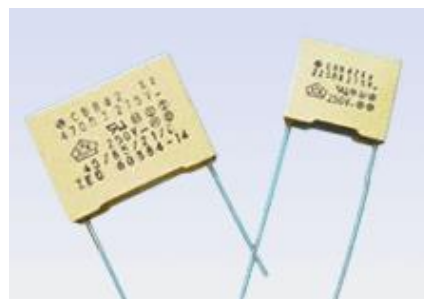
铝电解电容



真空电容



陶瓷电容



薄膜电容



云母电容

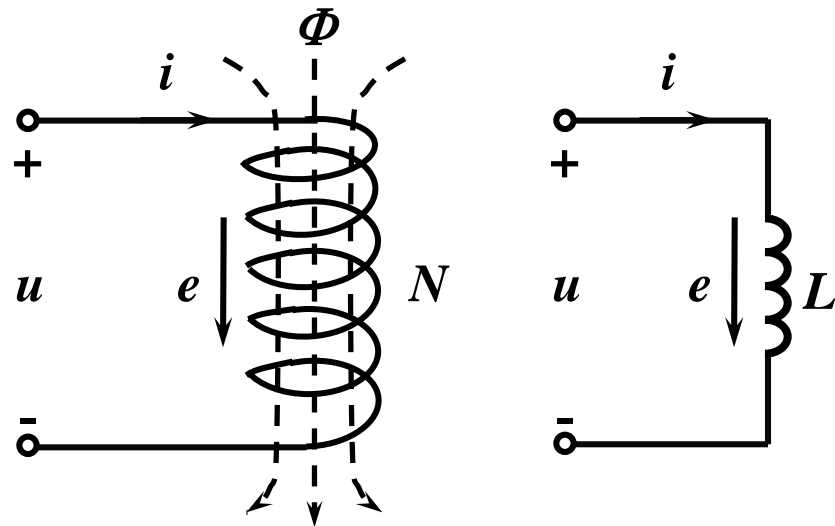


二、电感

电感是用来表征电路中磁场能量储存这一物理性质的理想元件。

线圈的磁链

$$\Psi = N\Phi$$



$$L = \frac{\Psi}{i}$$

——磁链，单位为韦[伯](Wb)
 ——电流，单位为安[培](A)
 ——电感，单位为亨[利](H)



规定： e 的方向与磁感线的方向符合右手螺旋定则时， e 为正，否则为负。

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

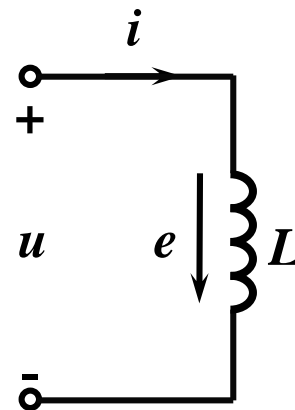
$$\underline{L} = \frac{\Psi}{i} \quad \frac{di}{dt}$$

由基尔霍夫电压定律

$$u = -e$$

于是

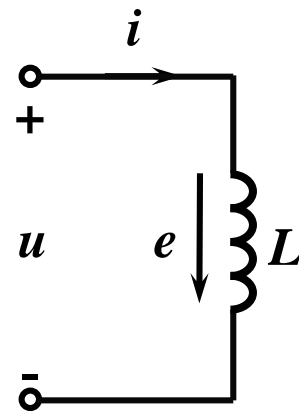
$$u = L \frac{di}{dt}$$



$$u = L \frac{di}{dt}$$

电感的瞬时功率

$$p = ui = Li \frac{di}{dt}$$



i 的绝对值增大时, $i \frac{di}{dt} > 0$, $p > 0$, 电感从外部输入功率, 把电能转换成了磁场能。

i 的绝对值减小时, $i \frac{di}{dt} < 0$, $p < 0$, 电感向外部输出功率, 磁场能又转换成了电能。



$$t = 0 \rightarrow t = \xi$$

$$i = 0 \rightarrow i = I$$

从外部输入的电能

$$\int_0^{\xi} p \, dt = \int_0^{\xi} ui \, dt = \int_0^I L i \, di = \frac{1}{2} LI^2$$

电感中储存的磁场能

$$W_L = \frac{1}{2} LI^2$$

单位为焦[耳](J)

由于

$$p = \frac{d W_L}{dt}$$

- 若外部不能向电感提供无穷大的功率,磁场能就不可能发生突变。因此, **电感的电流 i 不可能发生突变。**



无互感存在的两电感线圈串联时,等效电感为

$$L = L_1 + L_2$$

无互感存在的两电感线圈并联时,等效电感为

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$



电感图片



双层空心电感线圈



多层空心电感线圈



磁棒电感线圈



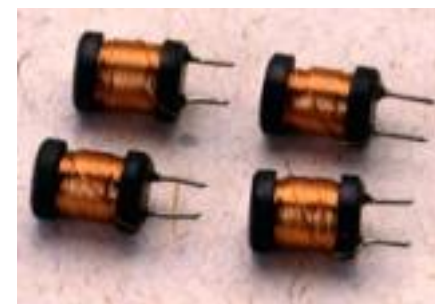
磁珠电感



贴片电感



铁心电感线圈



工字形电感线圈



2.3 换路定律

由于电容中的电场能和电感中的磁场能不能突变,所以换路瞬间,电容上的电压和电感中的电流不可能突变。

换路定律

换路后的初始时刻表示为 $t = 0_+$

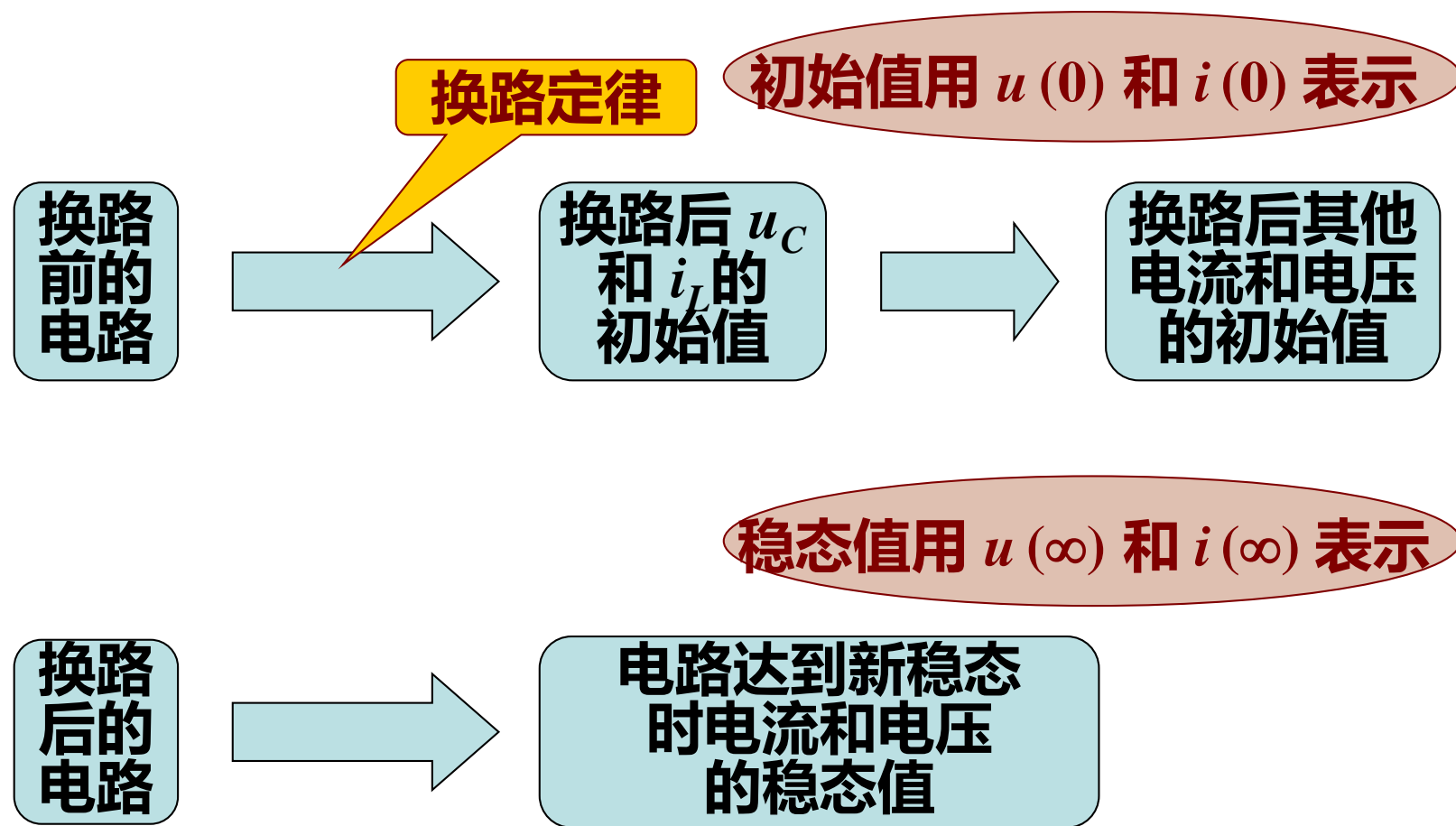
电容电压和电感电流在换路后的初始值应等于换路前的终了值。

换路前的终了时刻表示为 $t = 0_-$

$$\left. \begin{aligned} u_C(0_+) &= u_C(0_-) \\ i_L(0_+) &= i_L(0_-) \end{aligned} \right\}$$



换路定律仅适用于换路瞬间。



[例2.3.1] 在图示电路中，已知 $U_S = 5\text{ V}$ ， $I_S = 5\text{ A}$ ， $R = 5\ \Omega$ 。开关 S 断开前电路已稳定。求开关 S 断开后 R 、 C 、 L 的电压和电流的初始值和稳态值。

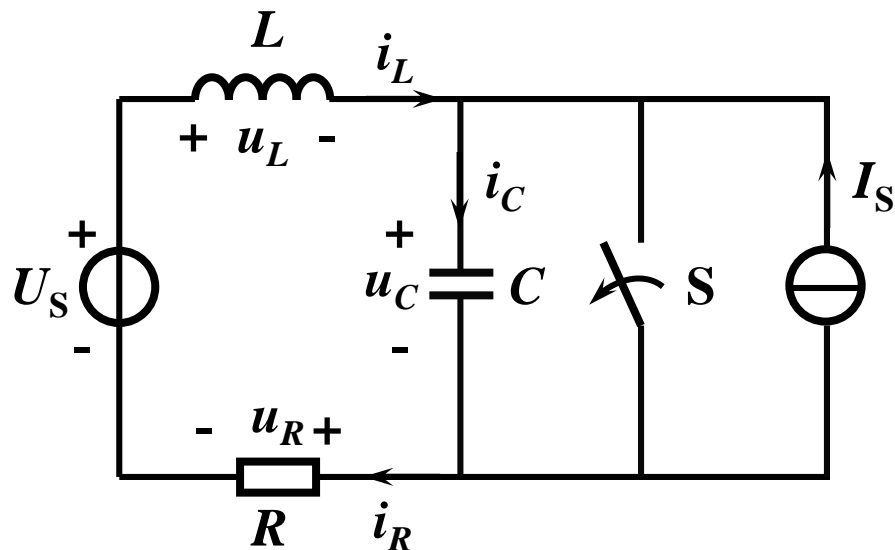
[解]

(1) 求初始值

根据换路定律，
由换路前的电路
求得：

$$u_C(0) = 0$$

$$i_L(0) = \frac{U_S}{R} = \frac{5}{5}\text{ A} = 1\text{ A}$$



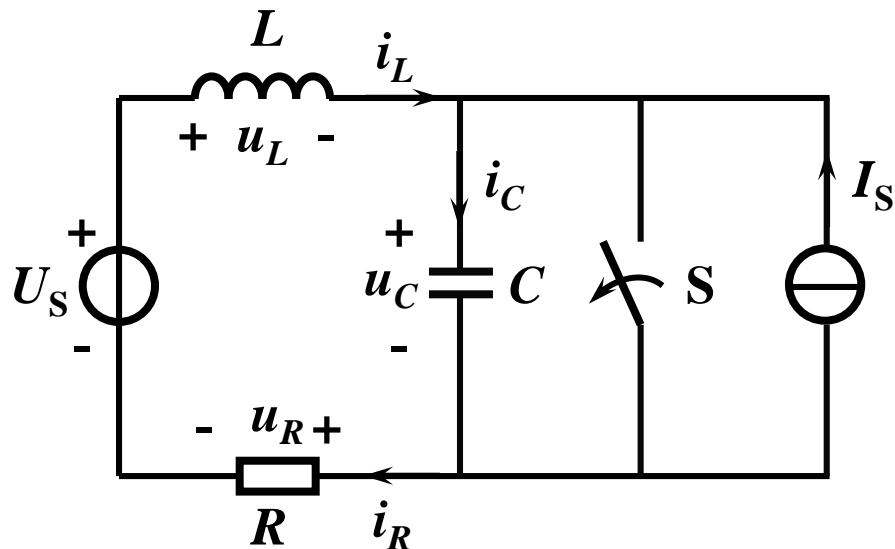
根据 $u_C(0)$ 和 $i_L(0)$ ，由换路后的电路求得：

$$i_R(0) = i_L(0) = 1 \text{ A}$$

$$u_R(0) = Ri_R(0) = (5 \times 1) \text{ V} = 5 \text{ V}$$

$$i_C(0) = I_S + i_L(0) = (5 + 1) \text{ A} = 6 \text{ A}$$

$$\begin{aligned} u_L(0) &= U_S - u_R(0) - u_C(0) \\ &= (5 - 5 - 0) \text{ V} = 0 \text{ V} \end{aligned}$$

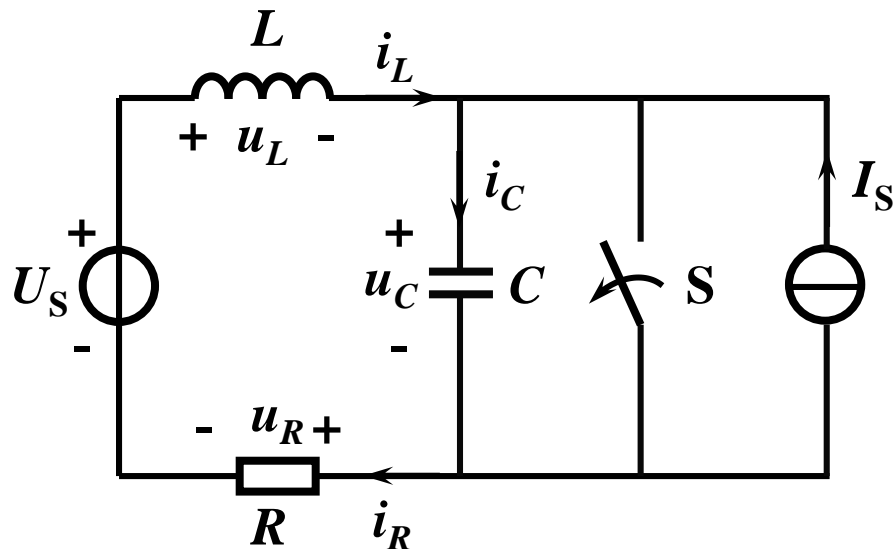


(2) 求稳态值

在稳态直流电路中, **C 相当于开路, L 相当于短路。**

$$i_C(\infty) = 0$$

$$u_L(\infty) = 0$$



由换路后的电路再求得:

$$i_L(\infty) = i_R(\infty) = i_C(\infty) - I_S = (0 - 5) \text{ A} = -5 \text{ A}$$

$$u_R(\infty) = Ri_R(\infty) = [5 \times (-5)] \text{ V} = -25 \text{ V}$$

$$\begin{aligned} u_C(\infty) &= U_S - u_L(\infty) - u_R(\infty) \\ &= [5 - 0 - (-25)] \text{ V} = 30 \text{ V} \end{aligned}$$

2.4 RC 电路的瞬态分析

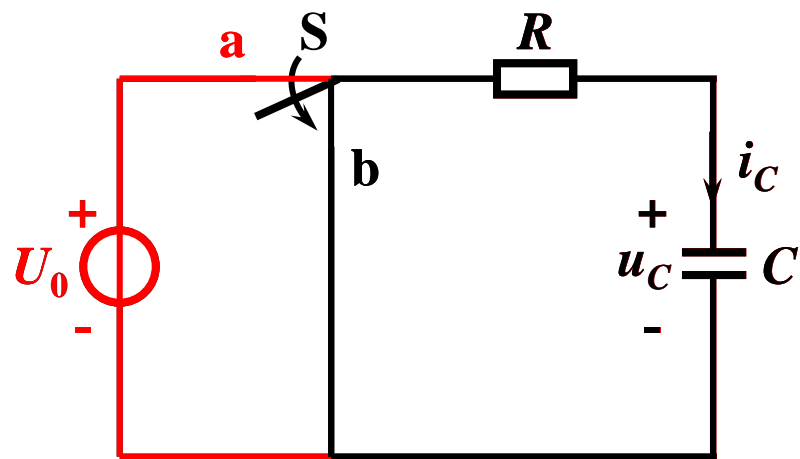
一、RC 电路的零输入响应

换路前，开关 S 合在 a 端，电路已稳定。

$$u_C(0) = U_0$$

换路后，开关 S 合在 b 端。

$$u_C(\infty) = 0$$



零输入响应

换路后外部激励为零，在内部储能作用下电容经电阻放电



根据 KVL，由换路后的电路列出回路方程式

$$Ri_C + u_C = 0$$

而 $i_C = C \frac{du_C}{dt}$

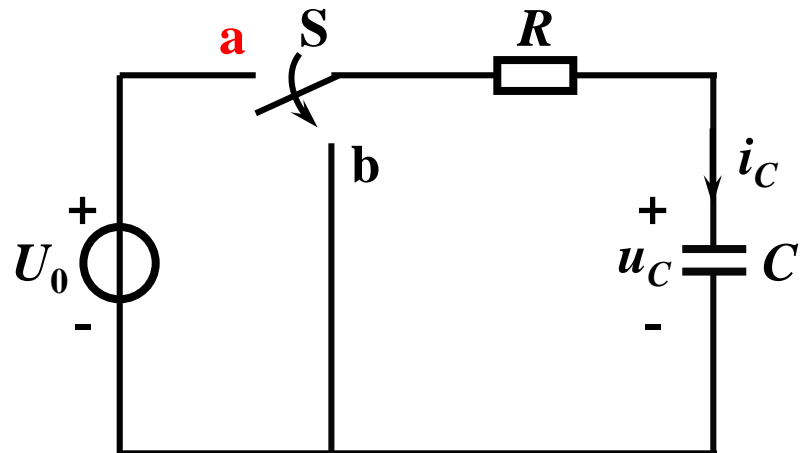
得 $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$

u_C 的通解为

$$u_C = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

将 $t = 0, u_C = U_0$ 代入，得

$$A = U_0$$



$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

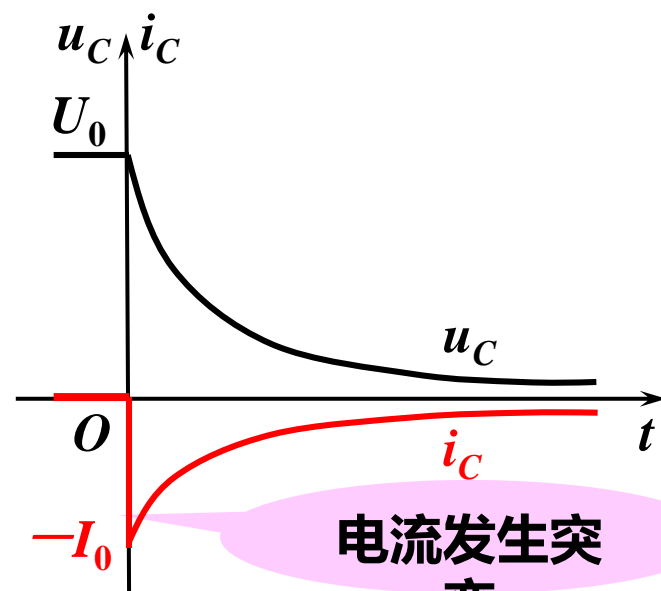
$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = -I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = RC$$

RC电路的时间常数

$$t = \tau \rightarrow u_C = 0.368 U_0$$

$$t = 3\tau \rightarrow u_C = 0.05 U_0$$



工程上通常在 $t \geq 3\tau$ 后, 即可认为瞬态过程基本结束。

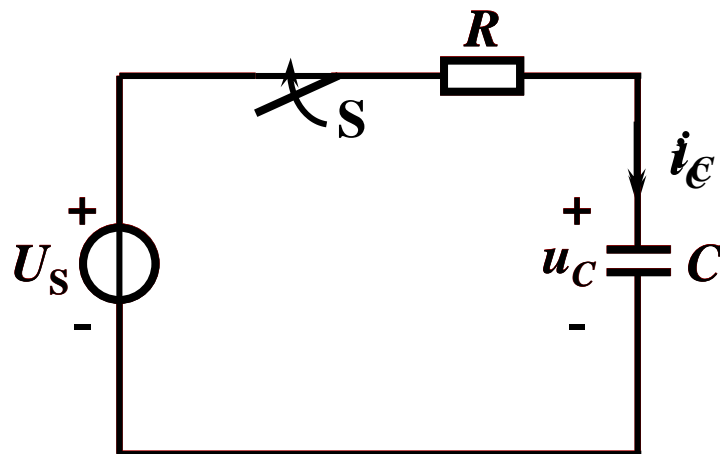
二、RC 电路的零状态响应

换路前，开关 S 断开，
电容中无储能。

$$u_C(0) = 0$$

换路后，开关 S 闭合。

$$u_C(\infty) = U_S$$



阶跃零状态响应

换路前电容中无储能，换路后 RC 两端输入一阶跃电压，
电容开始充电。



根据 KVL，由换路后的电路列出回路方程式

$$Ri_C + u_C = U_S$$

而 $i_C = C \frac{du_C}{dt}$

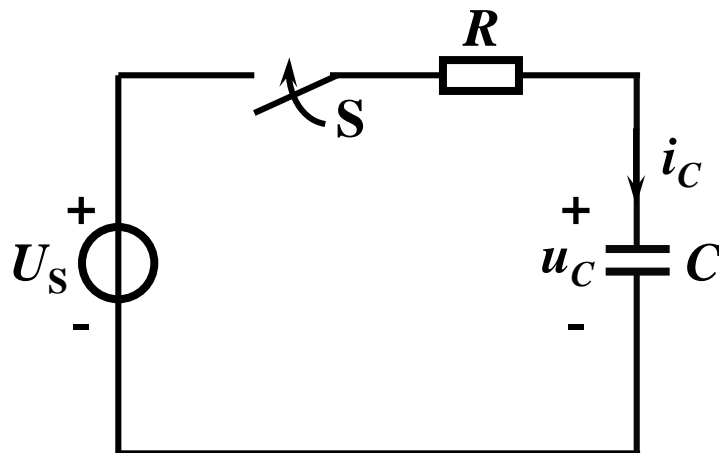
得 $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S$

u_C 的通解为

$$u_C = Ae^{-\frac{t}{RC}} + U_S$$

将 $t = 0, u_C = 0$ 代入，得

$$A = -U_S$$



$$u_C(\infty) = U_0$$



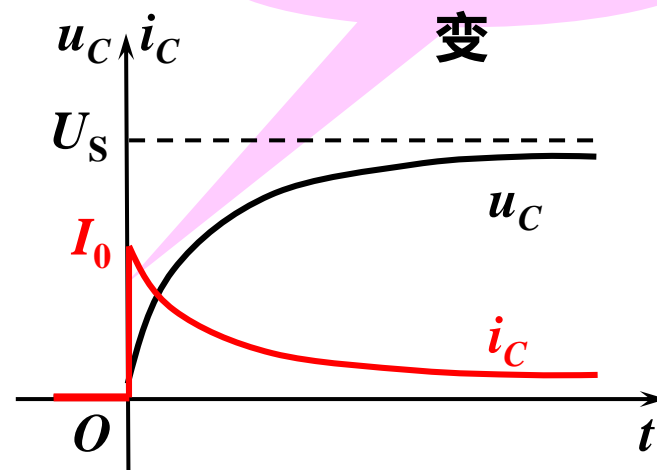
$$u_C = U_S - U_S e^{-\frac{t}{RC}} = U_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = RC$$

RC电路的时间常数

电流发生突变



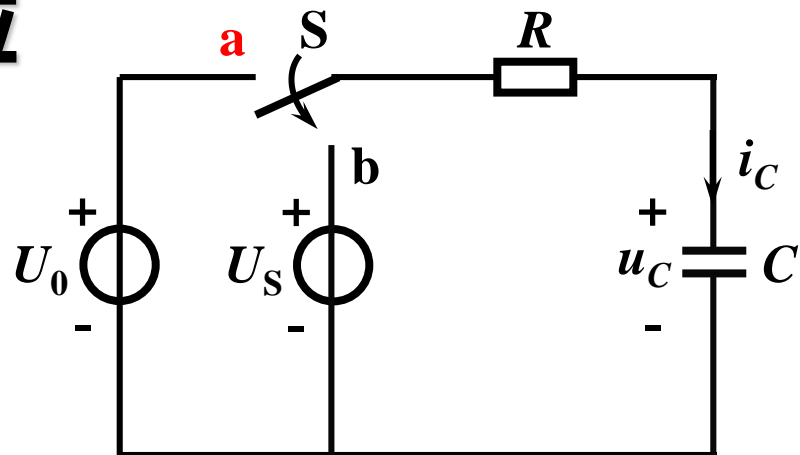
工程上只需 $t \geq 3\tau$ ，即可认为电路已稳定，充电已基本结束。



三、RC 电路的全响应

换路前，开关 S 合在 **a** 端，电路已稳定。

$$u_C(0) = U_0$$



换路后，开关 S 合在 **b** 端。

$$u_C(\infty) = U_S$$

阶跃全响应

换路时电容已充电，已有储能，换路后输入阶跃电压。



全响应 = 零输入响应 + 零状态响应
根据线性电路的叠加定理

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$= U_S + (U_0 - U_S) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

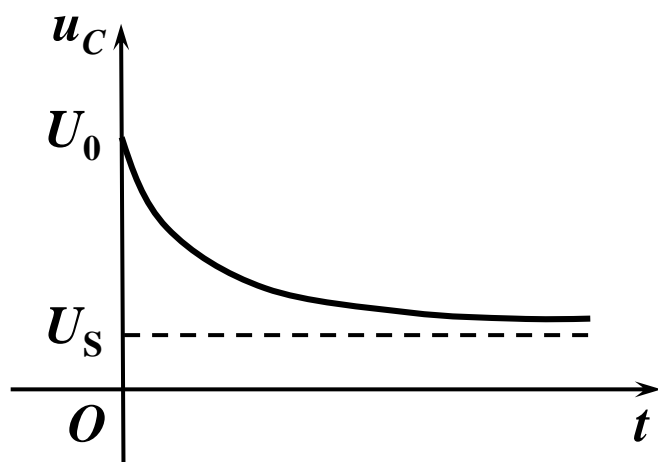
$$i_C = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= \frac{U_S - U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = (I_S - I_0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

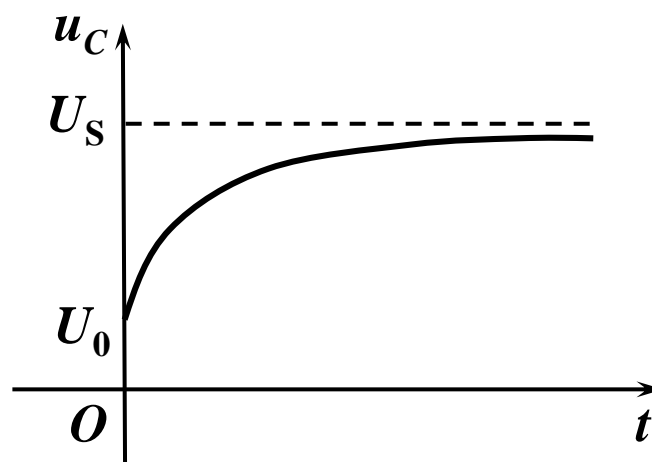


$$u_C = U_S + (U_0 - U_S) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

当 $U_0 > U_S$,
电容放电



当 $U_0 < U_S$,
电容充电



[例2.4.1] 图示电路中, $U_0 = 15 \text{ V}$, $U_S = 10 \text{ V}$, $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 20 \text{ }\mu\text{F}$ 。开关 S 合在 a 端时电路已处于稳态。现将开关由 a 端改合到 b 端。求换路瞬间的电容电流以及 u_C 降至 12 V 时所需要的时间。

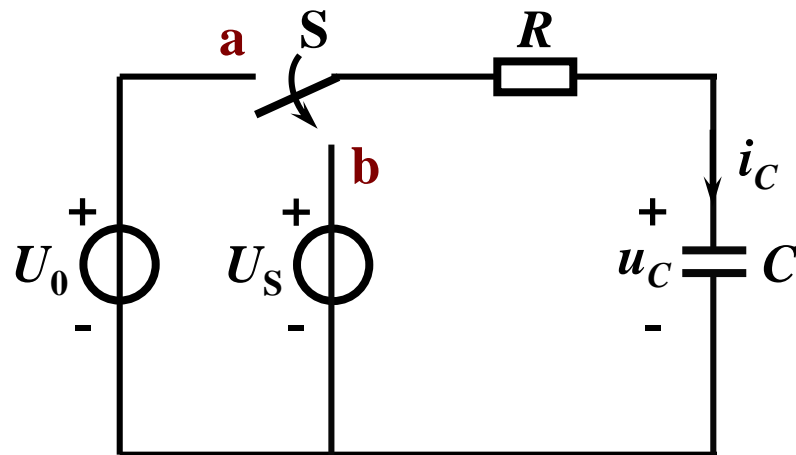
[解]

根据

$$i_C = \frac{U_S - U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

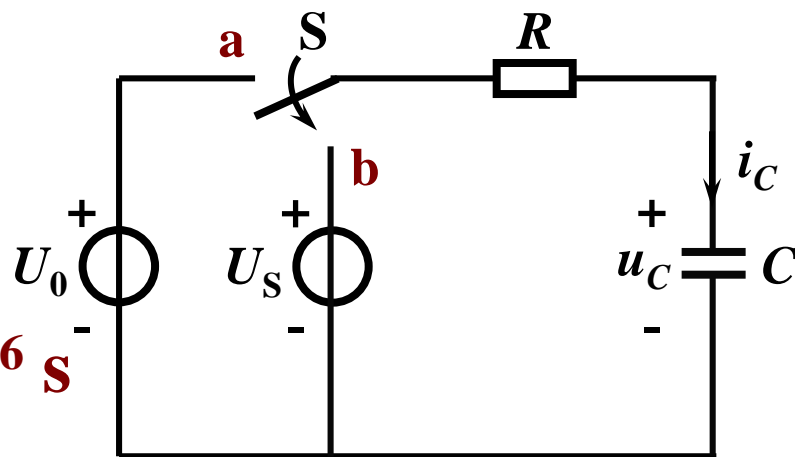
换路瞬间的电容电流为

$$i_C = \frac{U_S - U_0}{R} = \frac{15 - 10}{10} \text{ mA} = 0.5 \text{ mA}$$



该电路的时间常数

$$\begin{aligned}
 \tau &= RC \\
 &= 10 \times 10^3 \times 20 \times 10^{-6} \text{ s} \\
 &= 0.2 \text{ s}
 \end{aligned}$$



根据

$$u_C = U_s + (U_0 - U_s) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$u_C = 12 \text{ V}$ 时

$$12 = 10 + (15 - 10) e^{-\frac{t}{0.2}}$$

$$t = \left(-\frac{1}{5} \ln 0.4 \right) \text{ s} = 0.183 \text{ s}$$



2.5 RL 电路的瞬态分析

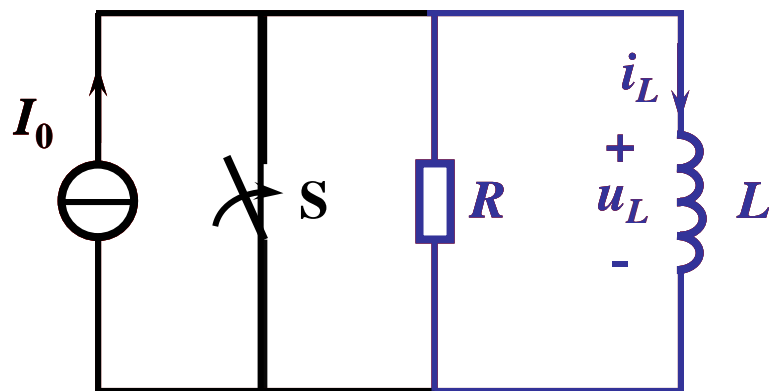
一、 RL 电路的零输入响应

换路前，开关 S 断开，且电路已稳定。

$$i_L(0) = I_0$$

换路后，开关 S 闭合。

$$i_L(\infty) = 0$$



零输入响应

换路后外部激励为零，在内部储能作用下，电感电流将从初始值 I_0 逐渐衰减到零。

根据 KVL，由换路后的电路得

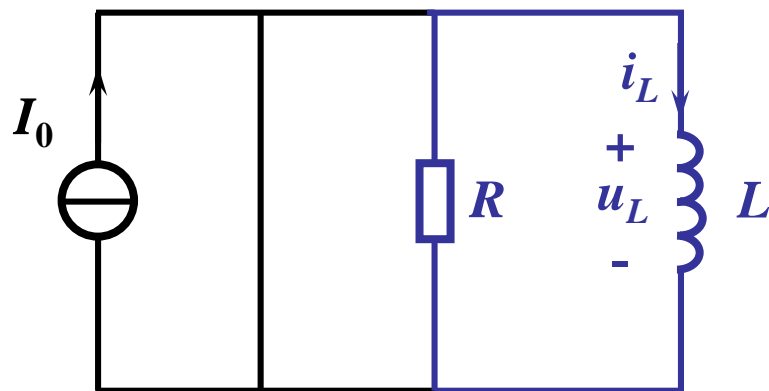
$$u_L + Ri_L = 0$$

而

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

得

$$\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$



微分方程式解法与电容放电时的微分方程式相同。



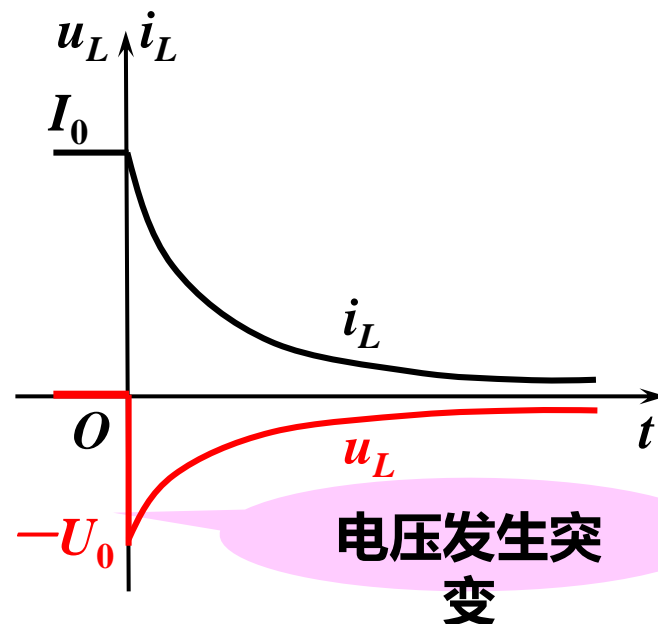
$$i_L = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = -U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

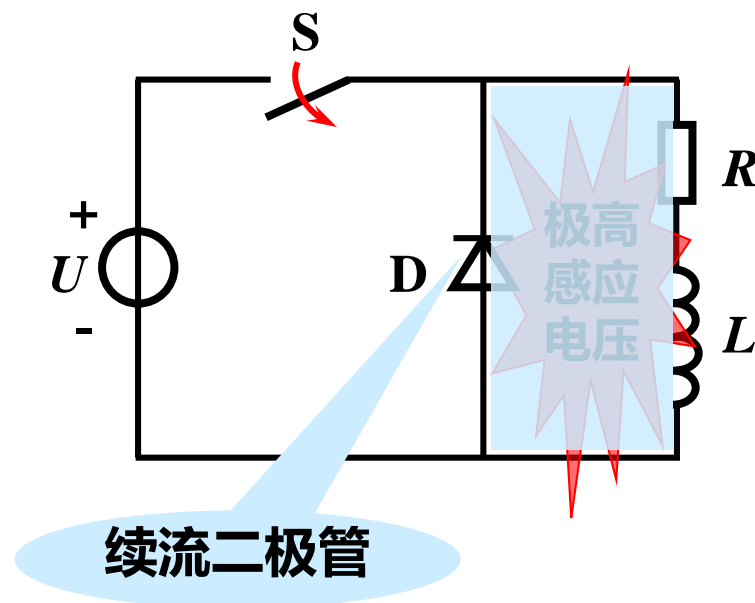
RL电路的
时间常数

工程上，只要 $t \geq 3\tau$ ，即可认为衰减已基本结束。



● 换路瞬间，电感电压发生突变

如果 L 大， $\frac{di_L}{dt}$ 大，则换路瞬间，电感电压的突变值 U_0 就大。



开关 S 断开时，电流的变化率很大，则电感两端产生很高的感应电压。

二极管具有单向导电性，不影响电路的正常工作。当开关 S 断开时，为电感线圈提供放电回路。



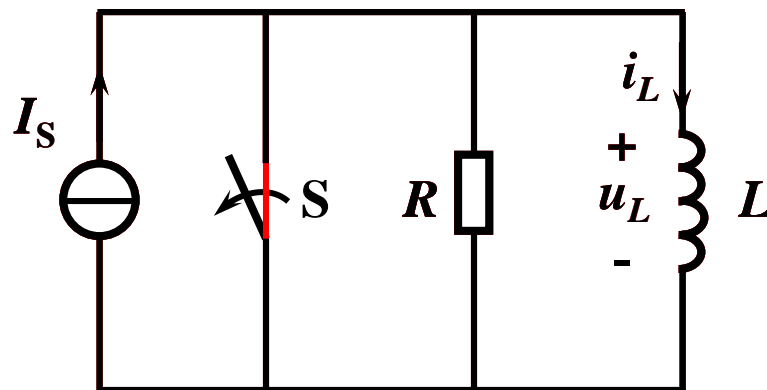
二、RL 电路的零状态响应

换路前，开关 S 闭合，
电路已稳定。

$$i_L(0) = 0$$

换路后，开关 S 断开。

$$i_L(\infty) = I_S$$



阶跃零状态响应

换路时电感中无储能，在外部输入的阶跃电流的作用下，
电感电流将从零逐渐增长到稳态值 I_S 。

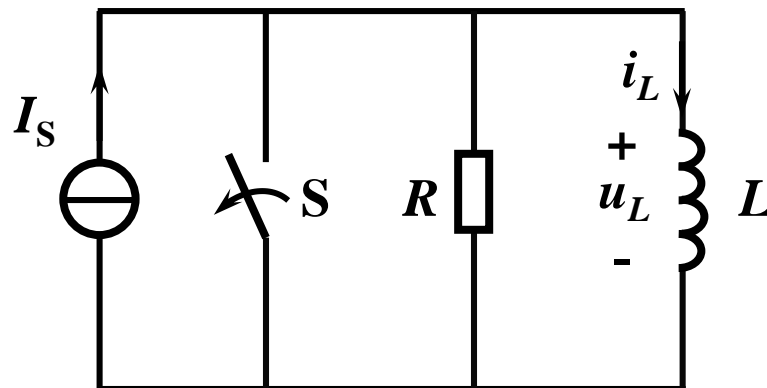


根据 KVL，由换路后的电路得

$$\frac{u_L}{R} + i_L = I_S$$

而
$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

得
$$\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = I_S$$



微分方程式解法与电容充电时的微分方程式相同。



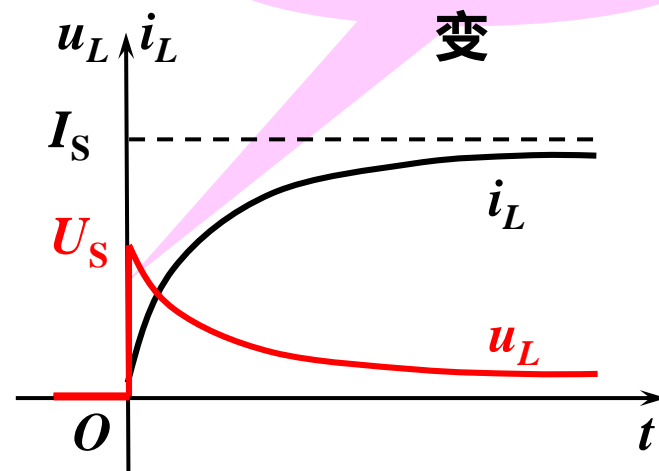
$$i_L = I_S (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = I_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = RI_S e^{-\frac{t}{\tau}} = U_S e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

RL电路的时间常数

电压发生突变



工程上，只要 $t \geq 3\tau$ ，即可认为瞬态过程基本结束。



三、 RL 电路的全响应

如果 RL 电路在换路后

$$i_L(0) = I_0$$

$$i_L(\infty) = I_S$$

换路时已有储能，同时又输入了一个阶跃电流。

阶跃全响应



由 RL 电路的零输入响应和零状态响应求得全响应为

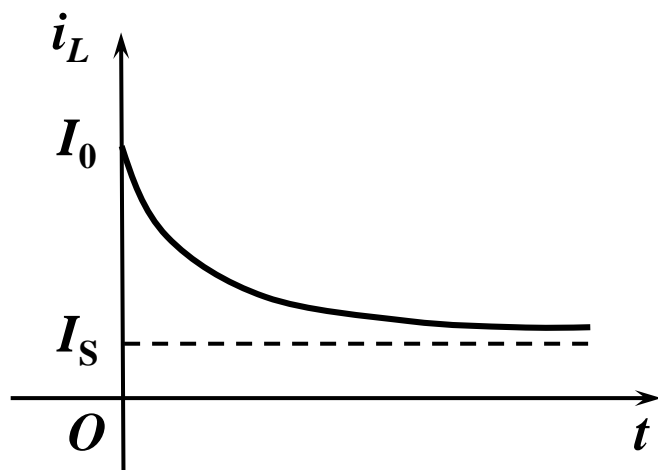
$$\begin{aligned} i_L &= I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + I_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ &= I_S + (I_0 - I_S) e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_L &= -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + RI_S e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= R(I_S - I_0) e^{-\frac{t}{\tau}} = (U_S - U_0) e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

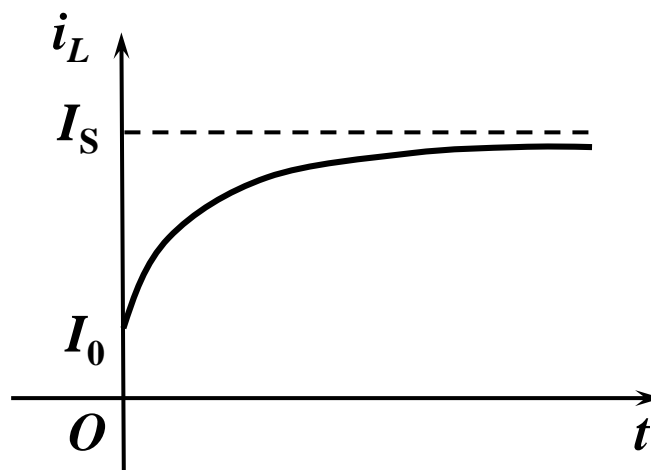


$$i_L = I_S + (I_0 - I_S) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

当 $I_0 > I_S$



当 $I_0 < I_S$



[例2.5.1] 已知两电感电流的变化规律分别为 $i_{L1} = 10 (1 - e^{-\frac{t}{0.2}}) \text{ A}$ 和 $i_{L2} = 10 (1 - e^{-\frac{t}{0.1}}) \text{ A}$ 。试问哪个电流增长得快？当 $t = 0.15 \text{ s}$ 时，它们已增长到多少？

[解] 由于 $\tau_1 = 0.2 \text{ s}$, $\tau_2 = 0.1 \text{ s}$, $\tau_1 > \tau_2$
所以 i_{L1} 增长得慢, i_{L2} 增长得快。

当 $t = 0.15 \text{ s}$ 时,

$$i_{L1} = 10 (1 - e^{-\frac{0.15}{0.2}}) \text{ A} = 5.28 \text{ A}$$

$$i_{L2} = 10 (1 - e^{-\frac{0.15}{0.1}}) \text{ A} = 7.77 \text{ A}$$



2.6 一阶电路瞬态分析的三要素法

- 凡是含有一个储能元件或经等效简化后含有一个储能元件的线性电路，在进行瞬态分析时所列出的微分方程式都是一阶微分方程式。这种电路称为**一阶电路**。
- 任何形式的一阶电路只要将储能元件从电路中提出，使剩下的电路成为有源二端网络，都可以利用等效电源定理将该电路简化成上两节介绍的最简单的一阶电路。



$$u_C = U_S + (U_0 - U_S) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_L = I_S + (I_0 - I_S) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

由于零输入响应和零状态响应可看成全响应在初始值为零或稳态值为零时的特例

因此，任何形式的一阶电路的零输入响应、阶跃零状态响应和阶跃全响应可归纳为

$$f(t) = f(\infty) + [f(0) - f(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}}$$



$$f(t) = f(\infty) + [f(0) - f(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

待求响应

待求响应的
初始值待求响应的
稳态值电路的
时间常数

$f(0)$ 、 $f(\infty)$ 和 τ 是确定任何一个一阶电路阶跃响应的三要素。

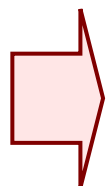
$$f(t) = f(\infty) + [f(0) - f(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

三要素法

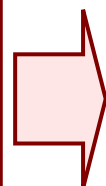
● $f(0)$ 、 $f(\infty)$ 的求法见 2.3 节

● τ 的求法

用除源等效法
将换路后电路
中的电源除去



求出从储能元
件 (C 或 L)
两端看进去的
等效电阻 R



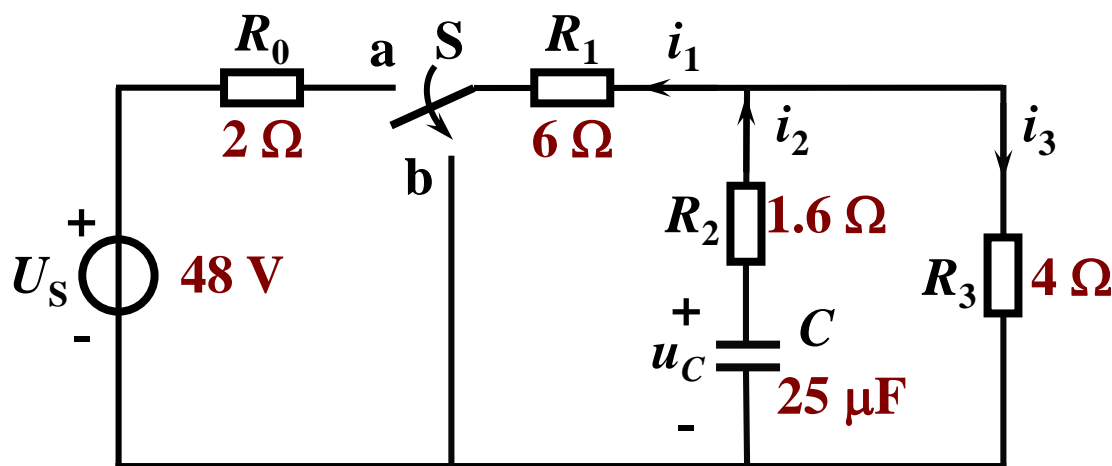
$$\tau = RC$$

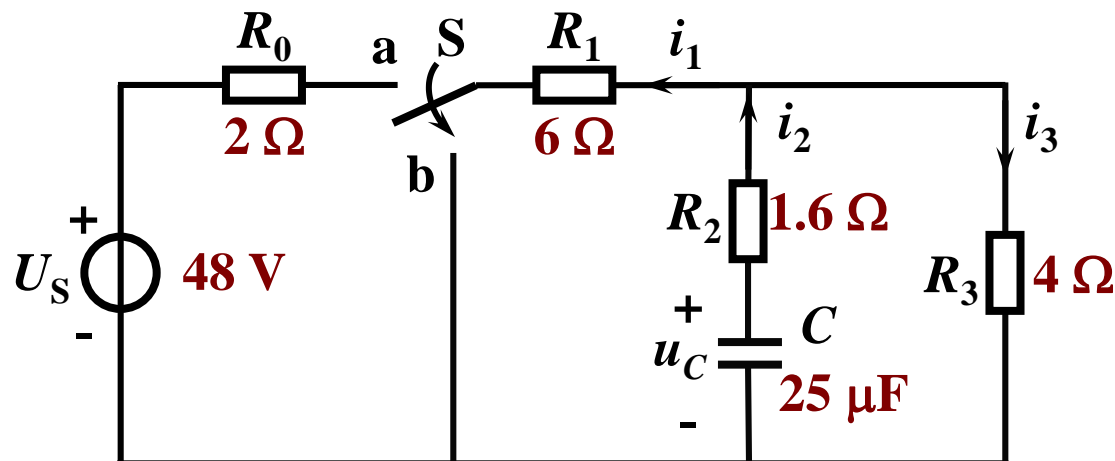
或

$$\tau = \frac{L}{R}$$



[例2.6.1] 在图示电路中，换路前开关 S 闭合在 a 端，电路已稳定。换路后将 S 合到 b 端。试求响应 i_1 、 i_2 和 i_3 。



[解]**(1) 初始值****由换路前电路**

$$\begin{aligned}
 u_C(0) &= \frac{R_3}{R_0 + R_1 + R_3} U_s \\
 &= \frac{4}{2 + 6 + 4} \times 48 \text{ V} = 16 \text{ V}
 \end{aligned}$$



再由换路后电路

$$i_2(0) = \frac{u_C(0)}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} = \frac{16}{1.6 + \frac{6 \times 4}{6 + 4}} \text{ A} = 4 \text{ A}$$

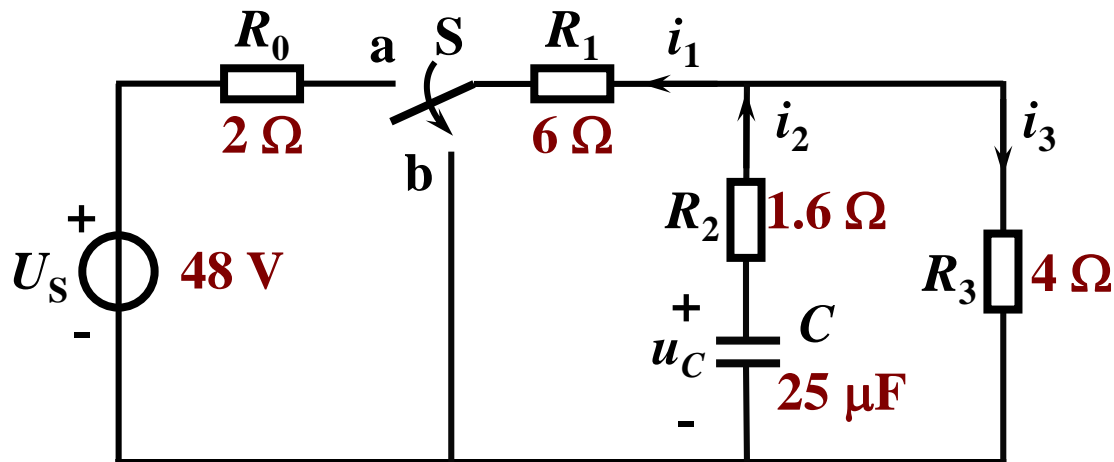
$$i_1(0) = \frac{R_3}{R_1 + R_3} i_2(0) = \frac{4}{6 + 4} \times 4 \text{ A} = 1.6 \text{ A}$$

$$i_3(0) = \frac{R_1}{R_1 + R_3} i_2(0) = \frac{6}{6 + 4} \times 4 \text{ A} = 2.4 \text{ A}$$



(2) 稳态值

由于换路后电路无外部激励



$$i_1(\infty) = i_2(\infty) = i_3(\infty) = 0$$

(3) 时间常数

$$\begin{aligned}\tau = RC &= \left(R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \right) C \\ &= \left(1.6 + \frac{6 \times 4}{6 + 4} \right) \times 25 \times 10^{-6} \text{ s} = 10^{-4} \text{ s}\end{aligned}$$



(4) 求出待求响应

$$\begin{aligned} i_1 &= i_1(\infty) + [i_1(0) - i_1(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= [0 + (1.6 - 0) e^{-\frac{t}{10^{-4}}}] \text{ A} = 1.6 e^{-10^4 t} \text{ A} \end{aligned}$$

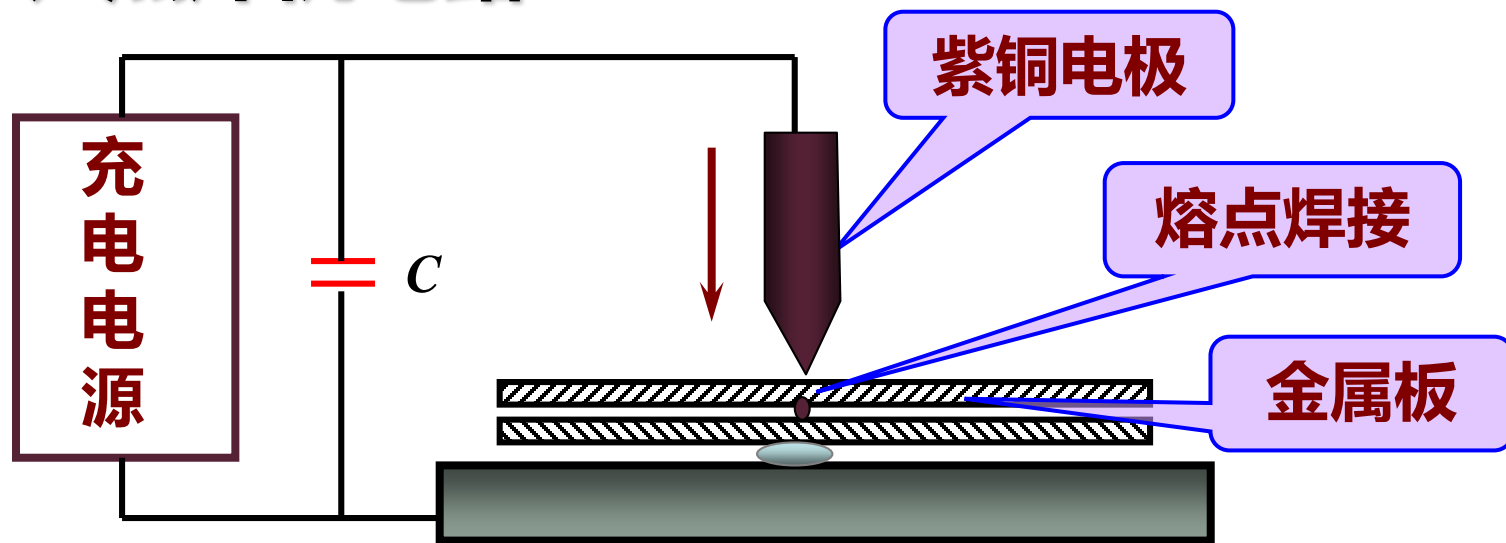
$$\begin{aligned} i_2 &= i_2(\infty) + [i_2(0) - i_2(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= [0 + (4 - 0) e^{-\frac{t}{10^{-4}}}] \text{ A} = 4 e^{-10^4 t} \text{ A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_3 &= i_3(\infty) + [i_3(0) - i_3(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= [0 + (2.4 - 0) e^{-\frac{t}{10^{-4}}}] \text{ A} = 2.4 e^{-10^4 t} \text{ A} \end{aligned}$$



2.7 应用实例

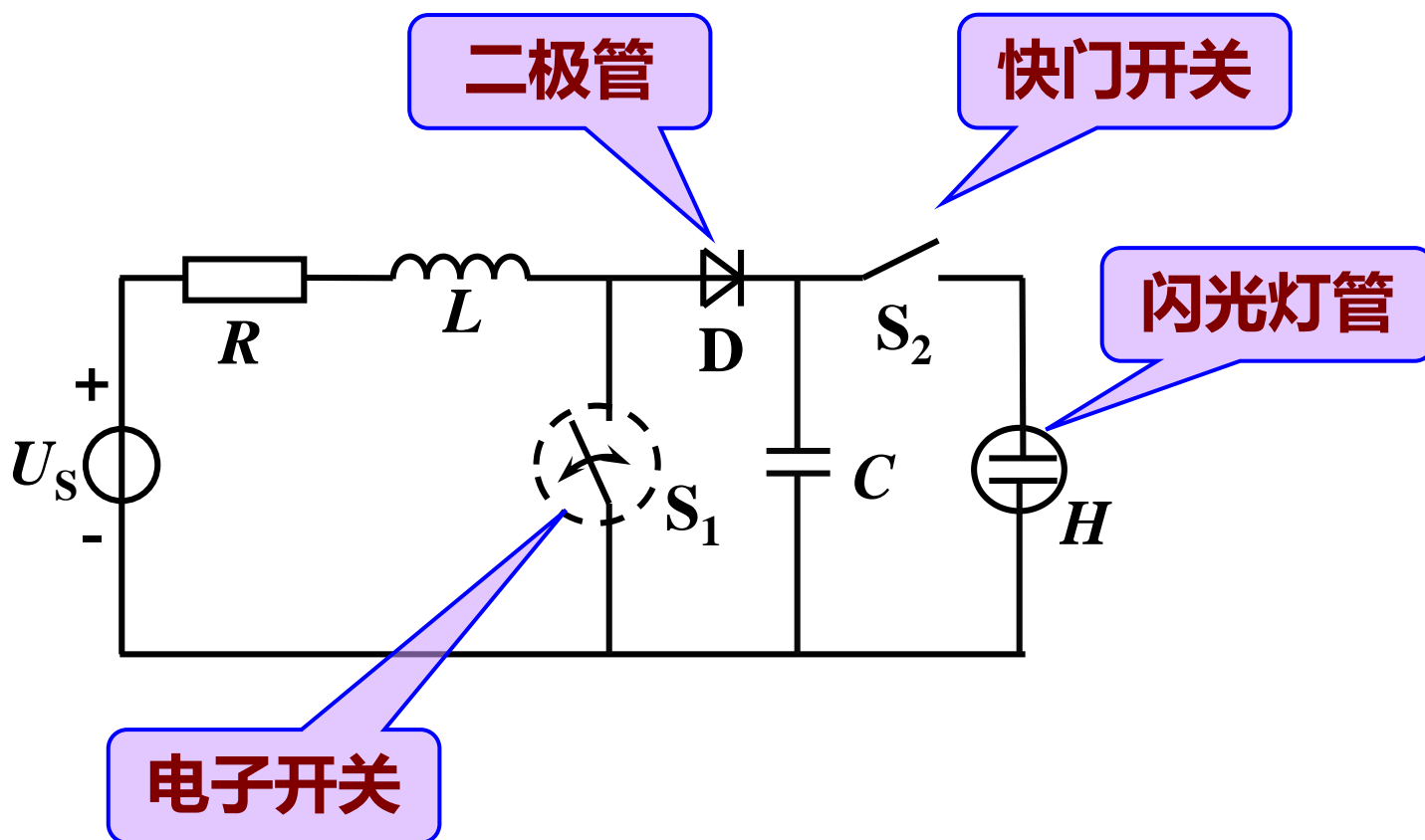
一、点焊机电路



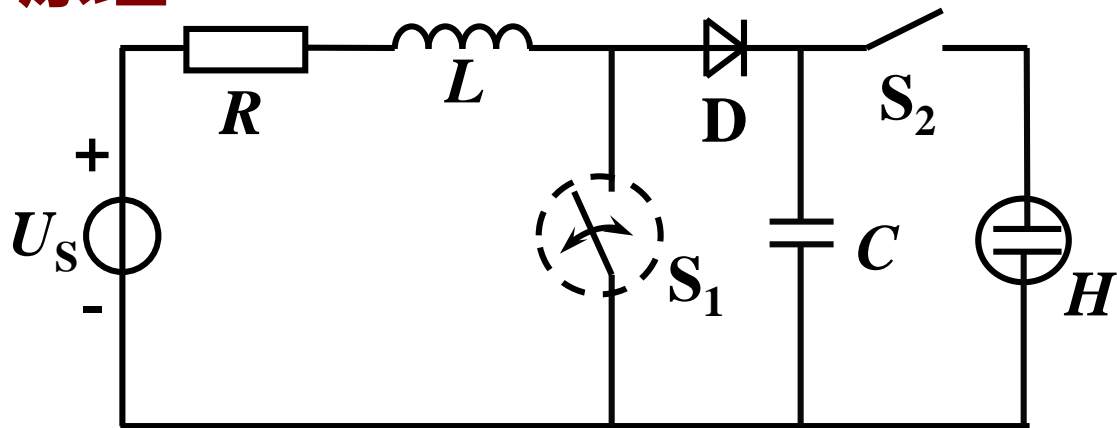
工作原理：电极未压下时,电源给电容充电。当将电极压下时,电容器放电,两金属板的压点处就会通过瞬间的大电流,使压点处的金属熔化并焊接在一起。电极离开金属板后,电容 C 继续充电,以备下次焊接。

二、闪光灯电路

闪光灯用于在比较暗的地方加强曝光量。



工作原理:



- 电子开关 S_1 每秒通断上万次。当 S_1 闭合时，电感 L 中有电流流过，电感储能；
- 当 S_1 断开时，电感中的能量不能突变，电感的电流通过二极管 D 给电容充电，使电容上的电压最终达到几百伏甚至更高；
- 当照相机的快门按下时， S_2 闭合，电容向闪光灯管放电，闪光灯管闪亮。



第 2 章

结 束

[返回主页](#)

[上一章](#)

[下一章](#)

