第八章

空间解析几何
与向量代数

(习题课)

题组一：　　向量及其运算

1. 是非题

（1）若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ 且 $\vec{a}\neq\vec{0}$, 则 $\vec{b}=\vec{c}$.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0 \qquad \vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})$$

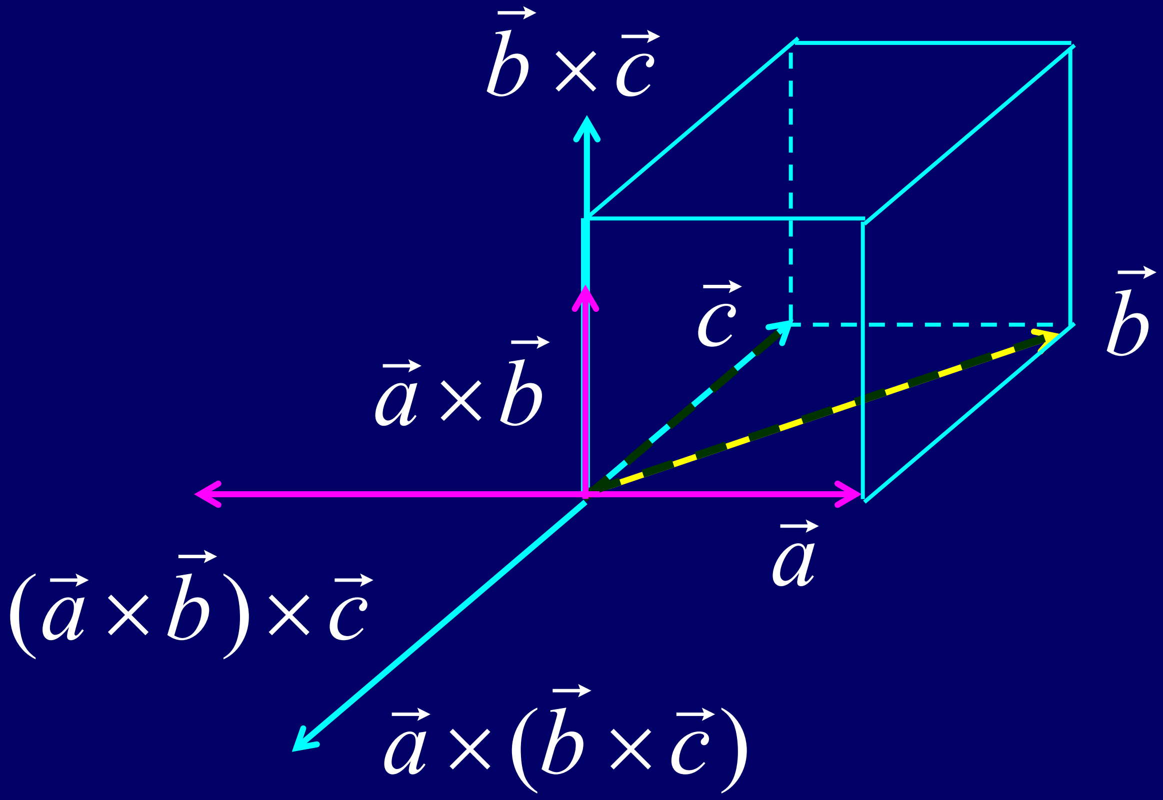
（2）若 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ 且 $\vec{a}\neq\vec{0}$, 则 $\vec{b}=\vec{c}$.

$$\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})=0 \qquad \vec{a}\,//(\vec{b}-\vec{c})$$

（3） $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$.

方向

（4） $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}).$



（5）$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$

（6）$(\vec{a}-\vec{b})\cdot[(\vec{b}-\vec{c})\times(\vec{c}-\vec{a})]=0.$

解： 因为 $(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{b}-\vec{c})+(\vec{c}-\vec{a})=\vec{0}$

所以三向量 $\vec{a}-\vec{b},\vec{b}-\vec{c},\vec{c}-\vec{a}$ 构成一三角形，

因此三向量共面，故混合积为零。

2. 证明 （1） $\vec{c} \perp [(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}]$.

证明: $\because \vec{c}\cdot[(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}]$

$$=(\vec{c}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{c})-(\vec{c}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{c})$$

$$=(\vec{c}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{c})-(\vec{c}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{c})=0$$

$$\therefore \vec{c} \perp [(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}]$$

(2) $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2.$

证明: $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2$

$$=(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2+(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta)^2$$

$$=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2.$$

(3) $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\times\vec{c}.$

证明(3): $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{a}+\vec{b})$

$$=\underline{2\vec{a}\times\vec{c}}-2\vec{a}\times\vec{a}+\cancel{\vec{b}\times\vec{c}}-\cancel{\vec{b}\times\vec{a}}$$

$$+\cancel{\vec{b}\times\vec{a}}+\vec{b}\times\vec{b}+\underline{\vec{c}\times\vec{a}}+\cancel{\vec{c}\times\vec{b}}$$

$$=\vec{a}\times\vec{c}$$

3. 设 $\vec{a}=(-1,3,2)$, $\vec{b}=(2,-3,-4)$, $\vec{c}=(-3,12,6)$

（1）试证 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

（2）沿 $\vec{a},\vec{b}$ 分解 $\vec{c}$.

（3）求 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}\times\vec{c}$ 上的投影.

解(1)：

$$\because [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix}=0$$

$\therefore \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

解 (2)： 设 $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$， 则

$$(-3,12,6) = (-\lambda + 2\mu, 3\lambda - 3\mu, 2\lambda - 4\mu)$$

即 $\begin{cases} -\lambda + 2\mu = -3 \\ 3\lambda - 3\mu = 12 \\ 2\lambda - 4\mu = 6 \end{cases}$

解方程组得 $\begin{cases} \lambda = 5 \\ \mu = 1 \end{cases}$

$\therefore \vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$.

解 (3) :

$$\Pr j_{\vec{b}\times\vec{c}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|} = 0$$

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = (30,0,15)$$

$$[\vec{b}\vec{c}\vec{a}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$= \cdots$

4. 设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 均为非零向量，且 $\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c},\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a},$ $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b},$ 求 $|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|.$

解: 由题设可知：三向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 两两垂直. 所以

$$\left.\begin{array}{l}|\vec{a}|=|\vec{b}||\vec{c}|\\ |\vec{b}|=|\vec{c}||\vec{a}|\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}|\vec{a}|\neq 0\\ |\vec{a}|=|\vec{a}||\vec{c}|^2\end{array}\right\} \Rightarrow |\vec{c}|=1$$

$$\left.\begin{array}{l}|\vec{b}|=|\vec{c}||\vec{a}|\\ |\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}|\vec{b}|\neq 0\\ |\vec{b}|=|\vec{b}||\vec{a}|^2\end{array}\right\} \Rightarrow |\vec{a}|=1$$

$$\left.\begin{array}{l}|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\\ |\vec{a}|=|\vec{b}||\vec{c}|\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}|\vec{c}|\neq 0\\ |\vec{c}|=|\vec{b}|^2|\vec{c}|\end{array}\right\} \Rightarrow |\vec{b}|=1$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|=3$$

5. 设 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ 且 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=5$,

求 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$

解: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0} \Rightarrow (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$

$\Rightarrow 2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=-(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{1}{2}(9+4+25)=-19$

6. 设 $\vec{a}+3\vec{b}\perp 7\vec{a}-5\vec{b}$, $\vec{a}-4\vec{b}\perp 7\vec{a}-2\vec{b}$

求 $\vec{a}$与$\vec{b}$ 的夹角. (P50(8))

解: $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=0$

$$7|\vec{a}|^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}-15|\vec{b}|^2=0$$

$$7|\vec{a}|^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+8|\vec{b}|^2=0$$

$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=0$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}|\vec{b}|^2$$

$$7|\vec{a}|^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}-15|\vec{b}|^2=0$$

$$|a|=|\vec{b}|$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\tfrac{1}{2}|\vec{b}|^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\tfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}$$

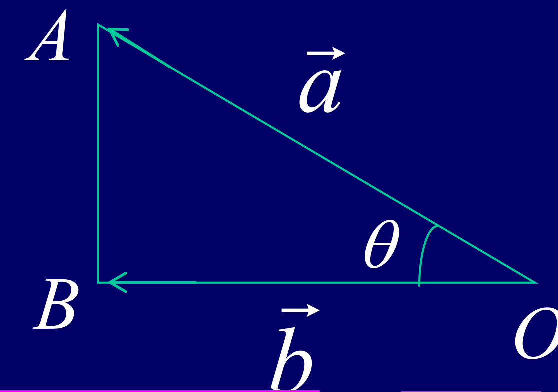
7. 已知 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\angle OBA=\pi/2$

(1) 证明 ΔOAB的面积$=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\Big/\left(2\left|\vec{b}\right|^{2}\right)$.

解:

$$S_{\triangle OAB}=\tfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\tfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

$$|\vec{b}|=|\vec{a}|\cos\theta$$



$$S_{\triangle OAB}=\tfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{a}|\cos\theta\sin\theta$$

$$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\Big/\left(2\left|\vec{b}\right|^{2}\right)=\tfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{a}|\cos\theta\sin\theta$$

结论成立

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta,\ |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

(2) 当$\vec{a}$与$\vec{b}$ 的夹角为何值时, $\triangle OAB$的面积取最大值.

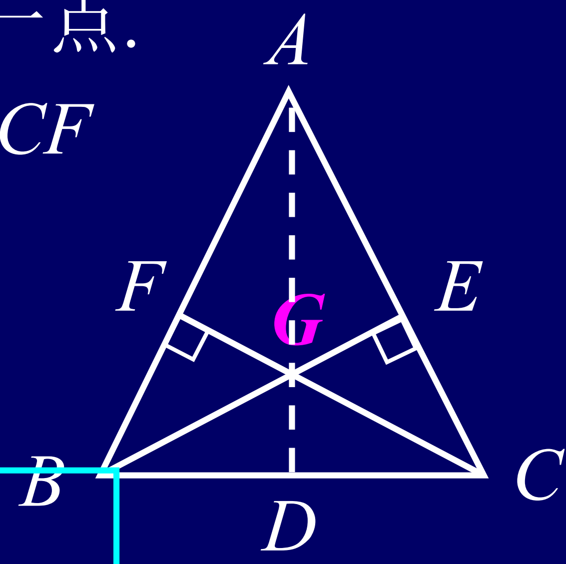
解: 由$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{a}|\cos\theta\sin\theta$知，

当$\sin 2\theta=1$时，$\triangle OAB$的面积取最大值.

即$\theta=\dfrac{\pi}{4}$时，$\triangle OAB$的面积取最大值.

8. 用向量证明： 三角形 的三条高交于一点.

证明: 作三角形如图. 其中两条高BE和CF交于点G,要证过G点的AD 垂直于BC.



$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}$$

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GC}$$

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}\qquad \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}$$

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG})\cdot\overrightarrow{BG}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG})\cdot\overrightarrow{GC}$$

$$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BG},\quad \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{GC},\quad \overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{CG}$$

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow AD\perp BC$$

题组二：　空间平面与直线

1. 设平面π过点 $P\,(2,3,-5)$ 且与已知平面 $x-y+z=1$垂直，又与直线 $15(x+1)=3(y-2)=-5(z+7)$ 平行，求平面π的方程.

解： 设平面π的法向量为 $\vec{n}$，　则 $\vec{n}\perp(1,-1,1)$

$\vec{n}\perp(1,5,-3)$　　$\therefore \vec{n}\,//(1,-1,1)\times(1,5,-3)$

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 5 & -3\end{vmatrix}=(-2,4,6)$$

平面π的方程为　$x-2y-3z-11=0$

2. 求过直线 $L:\begin{cases}2x-5y+z-4=0\\x-6y+3z-3=0\end{cases}$ 与点 $P(2,0,\text{-}1)$ 的平面方程.

解: 设所求平面方程为

$$(2x-5y+z-4)+\lambda(x-6y+3z-3)=0$$

将点 $P(2,0,\text{-}1)$ 代入上式得 $\lambda=-\dfrac{1}{4}$

所以所求平面方程为

$$(2x-5y+z-4)-\frac{1}{4}(x-6y+3z-3)=0$$

即 $7x-14y+z-13=0$

3. 设有一平面，它与 xoy 面的交线是 $\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ z=0 \end{cases}$，

且与三个坐标面围成的四面体的体积等于2, 求该平面方程.

解: 设平面方程为: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, 则其与$xoy$面的交线为:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}=1 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

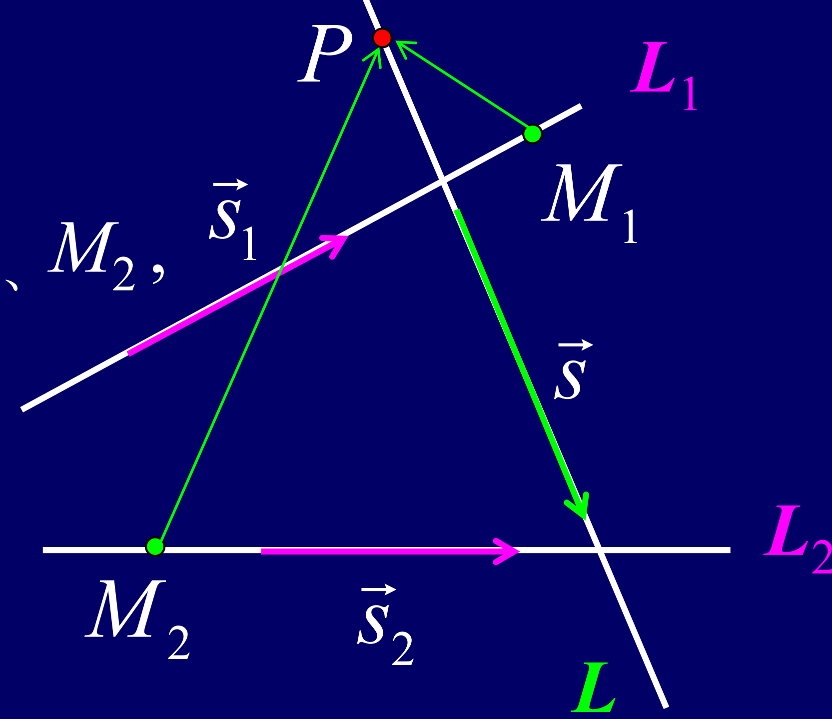
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{6}|abc|=2 \\ \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow c=\pm 6$$

$\Rightarrow$ 平面方程为: $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{\pm 6}=1$

4. 一直线过点 $P(-3,5,-9)$ 且和两直线 $L_1:\begin{cases} y=3x+5 \\ z=2x-3 \end{cases}$,

$L_2:\begin{cases} y=4x-7 \\ z=5x+10 \end{cases}$ 相交，求此直线方程.

解: 作图如右.



分别求出两已知直线上的点 M_1、M_2，

设所求直线方向向量为

$$\vec{s}=(m,n,p)$$

则

$$\left.\begin{aligned} &[\overrightarrow{M_1P},\vec{s},\vec{s}_1]=0 \\ &[\overrightarrow{M_2P},\vec{s},\vec{s}_2]=0 \end{aligned}\right\}$$

由此得直线的点向式方程为：$\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-5}{22}=\dfrac{z+9}{2}$

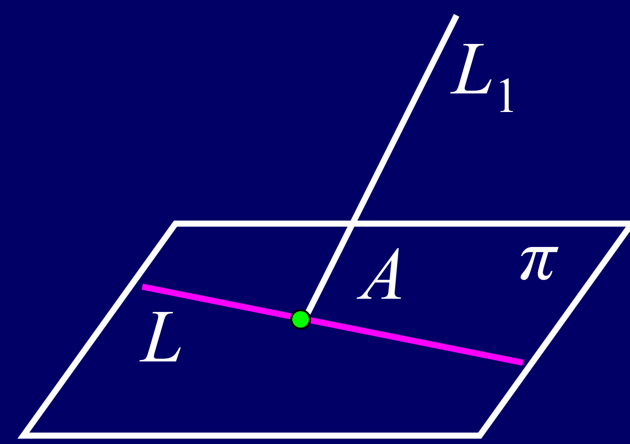
5. 过平面π: $x+y+z=1$ 和直线 $L_1:\begin{cases} y=1 \\ z=-1 \end{cases}$ 的交点,

求在已知平面上, 垂直于已知直线的直线方程.

解: 只要求出过点A且和L_1垂直的平面π_1的方程即可.

$$L_1:\begin{cases} y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1 \\ z=-1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \longrightarrow A(1,1,-1)$$



$$\longrightarrow L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{0} \longrightarrow \vec{s}_1=\{1,0,0\} \longrightarrow \vec{n}=\{1,0,0\}$$

$$A(1,1,-1)$$

$$\longrightarrow \pi_1: x=1$$

$$\pi: x+y+z=1$$

$\longrightarrow$ 直线方程为 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x=1 \end{cases}$

6. 在一切过直线 $L:\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$ 的平面中求一平面, 使原点到它的距离为最大.

解: 设过L的平面束方程为:

$$(x+y+z+1)+\lambda(2x+y+z)=0$$

即 $(1+2\lambda)x+(1+\lambda)y+(1+\lambda)z+1=0$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(1+2\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(1+\lambda)^2}}$$

接6.

$$d^2=\frac{1}{6(\lambda+\frac{2}{3})^2+\frac{1}{3}}$$

$\therefore \lambda=-\dfrac{2}{3}$ 时,距离最大.

平面方程为:

$$(1-\frac{4}{3})x+(1-\frac{2}{3})y+(1-\frac{2}{3})z+1=0$$

即 $x-y-z-3=0$

题组三：　空间曲面与曲线

1. 讨论平面 $x+2y-2z+m=0$ 与曲面 $x^2+y^2+z^2-8x+2y-6z+22=0$ 间相互位置关系.

解: $x^2+y^2+z^2-8x+2y-6z+22=0$

整理得 $(x-4)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$

这是球心为(4,-1,3)半径为2的球面.

对于平面 $x+2y-2z+m=0$

$$\because d=\frac{|4-2-6+m|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|m-4|}{3}$$

接1.

$$d=\frac{|m-4|}{3}\begin{cases} d>2 & \text{即 } m>10 \text{ 或 } m<-2 \quad \text{相离} \\ d=2 & \text{即 } m=10 \text{ 或 } m=-2 \quad \text{相切} \\ d<2 & \text{即 } -2<m<10 \quad \text{相交} \end{cases}$$

2. 设空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}2y^2+z^2+4x=4z\\ y^2+3z^2-8x=12z\end{cases}$，试将曲线Γ的方程用母线平行于 x 轴和 y 轴的两个投影柱面的方程表示.

解: 消去 x 得 $y^2+z^2=4z$

同理可得 $z^2-4z=4x$

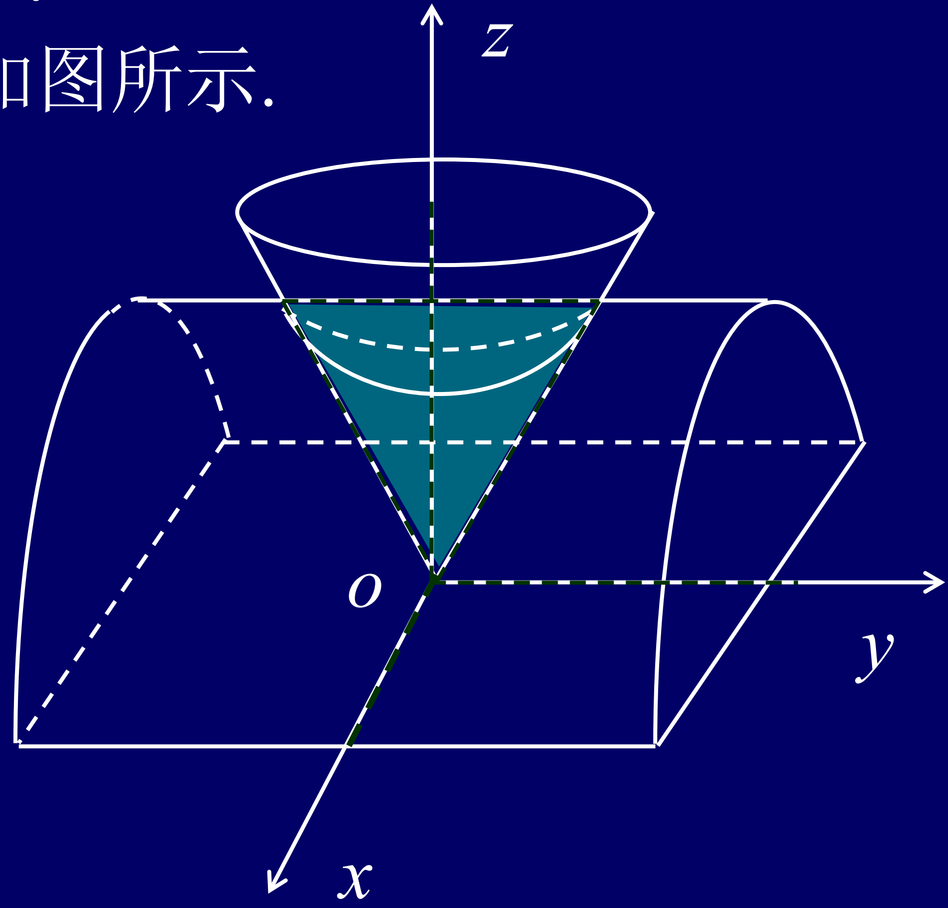
因此 $\Gamma:\begin{cases}y^2+z^2=4z\\ z^2-4z=4x\end{cases}$

3. 求锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z=\sqrt{1-x^2}$

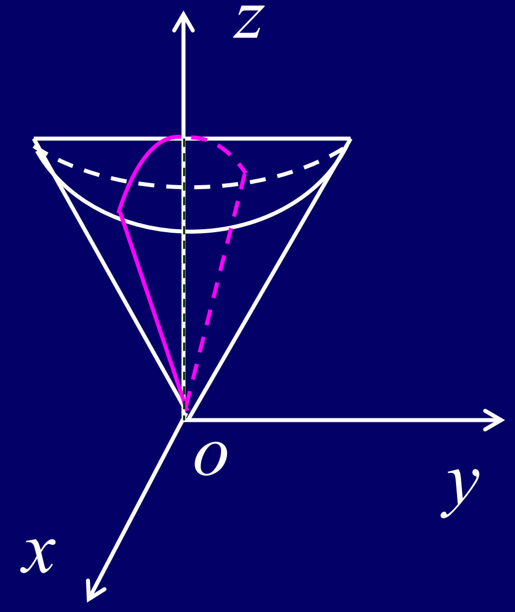
所围立体在三个坐标平面上的投影区域.

解: 锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z=\sqrt{1-x^2}$

所围立体如图所示.



接3.



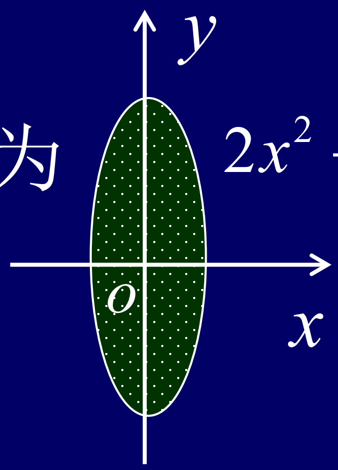
两曲面所围立体如图.

(1) 在 xoy 面上的投影区域为

两曲面交线 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

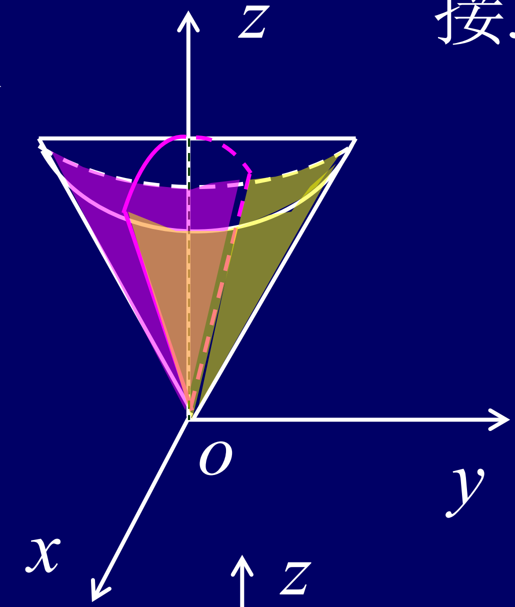
在 xoy 面上的投影 $\begin{cases} 2x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 所围区域.

因此所围立体在xoy面上的投影区域为

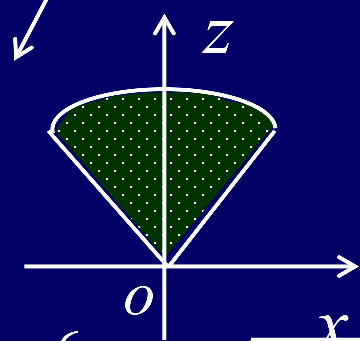


$$D_{xy}:\quad 2x^2+y^2\le 1$$

(2) 在 xoz 面上，立体由母线垂直于 xoz 面的柱面 $z=\sqrt{1-x^2}$ 与两个曲面 $y=\pm\sqrt{z^2-x^2}\,(z\geq 0)$ 围成.



两曲面的交线在xoz面上的投影为 $\begin{cases} z^2-x^2=0 \\ y=0 \end{cases}$



即 $\begin{cases} z=x \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} z=-x \\ y=0 \end{cases}$.

柱面与两曲面的交线在xoz面上的投影是 $\begin{cases} z=\sqrt{1-x^2} \\ y=0 \end{cases}$

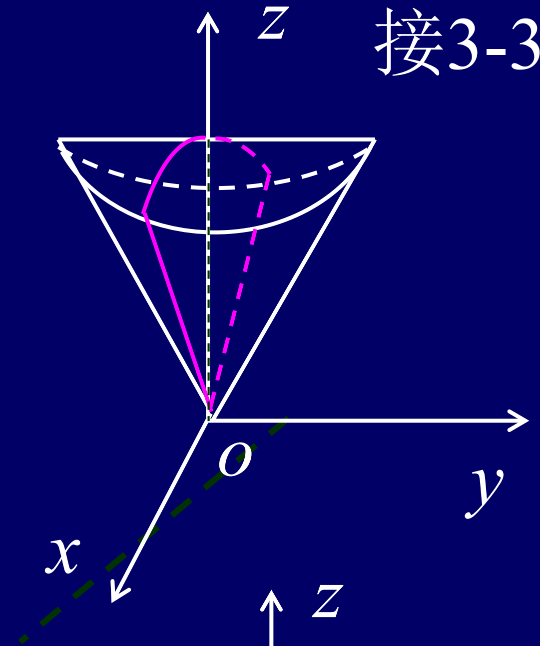
故立体在xoz面上的投影区域是 $D_{xz}:\begin{cases} z\leq\sqrt{1-x^2} \\ z\geq|x| \end{cases}$

接3-3

(3) 在 yoz 面上, 立体由四个曲面

$$x = \pm\sqrt{z^2 - y^2}\,(z \geq 0),$$

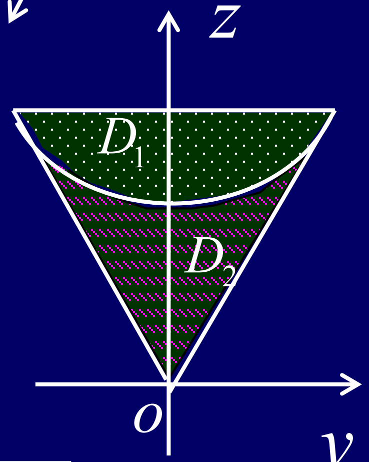
$$x = \pm\sqrt{1 - z^2}\,(z \geq 0)$$ 围成.



其交线在yoz面上的投影为

yoz面上的曲线 $z = \pm y,\ z = 1,$

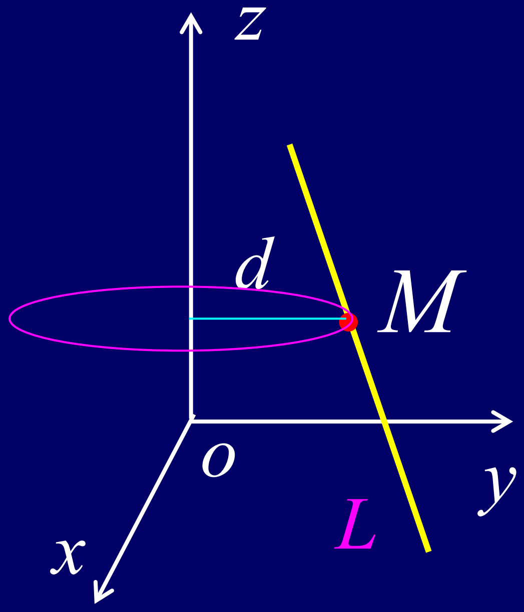
$2z^2 - y^2 = 1(z > 0)$ 所围区域.



$$D_{yz} = D_1 + D_2$$

$$D_1: \frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{2}} \leq z \leq 1 \qquad D_2:\ |y| \leq z \leq \frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{2}}$$

4. 求直线 $L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面的方程.



解: L的参数方程为: $\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=2t+1 \end{cases}.$

取L上一点 $M(1,t,2t+1)$,

则点M到z轴的距离 $d=\sqrt{1+t^2}$

当L绕z轴旋转时，点M的坐标变为 (x,y,z)

所以 $\begin{cases} x^2+y^2=1+t^2 \\ z=2t+1 \end{cases}(-\infty<t<+\infty)$

消去参数得曲面方程为 $x^2+y^2-(\dfrac{z-1}{2})^2=1$

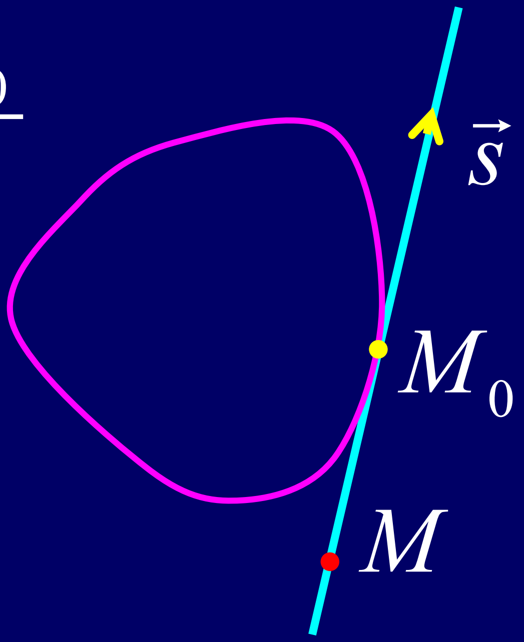
5. 柱面的准线为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x^2+2y^2+z^2=2 \end{cases}$，母线的方向向量为$(-1,0,1)$，求柱面方程.

解: 设 $\vec{s}=(-1,0,1)$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为准线上一点，

$M(x,y,z)$ 为母线上一点，则过 M_0 的母线方程为:

$$\frac{x-x_0}{-1}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{1}$$

即 $\begin{cases} x_0=x+t \\ y_0=y \\ z_0=z-t \end{cases}$ ------------------------------ (1)



接5.

又知 M_0 在准线上，

$$\text{所以}\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 & \text{(2)} \\ 2x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 2 \end{cases}$$

整理得 $x_0^2 + y_0^2 = 1$ (3)

将(1)代入(3)得: $(x+t)^2 + y^2 = 1$

将(1)代入(2)得： $t = z$

所以柱面方程为：$(x+z)^2 + y^2 = 1$