

图论

图论部分

- 历史
- 第5章 图的基本概念
- 第6章 特殊的图
- 第7章 树



第5章 图的基本概念

5.1 无向图及有向图

5.2 通路, 回路和图的连通性

5.3 图的矩阵表示

5.4 最短路径, 关键路径和着色

5.1 无向图及有向图

- 无向图与有向图
- 顶点的度数
- 握手定理
- 简单图
- 完全图
- 子图
- 补图

无向图

多重集合: 元素可以重复出现的集合

无序积: $A \& B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

定义 无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 其中

(1) 顶点集 V 是非空有穷集合,

其元素称为**顶点**

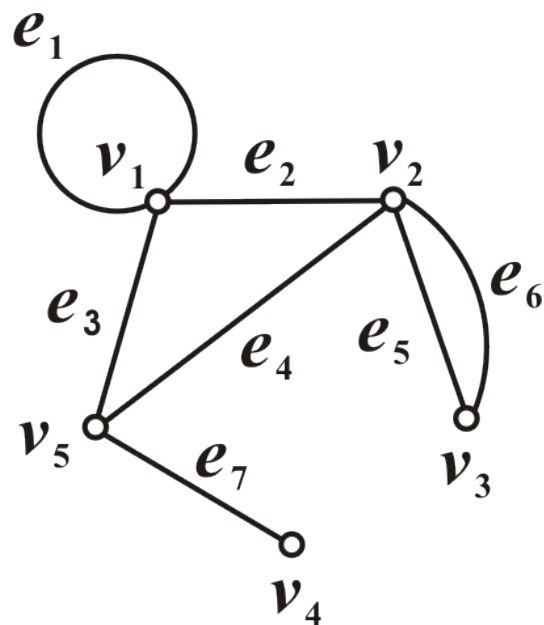
(2) 边集 E 为 $V \& V$ 的多重子集,

其元素称为**无向边**, 简称**边**.

例如, $G = \langle V, E \rangle$, 其中

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$,

$E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_1, v_5), (v_4, v_5)\}$



有向图

定义 有向图 $D=<V,E>$, 其中

(1) 顶点集 V 是非空有穷集合,

其元素称为顶点

(2) 边集 E 为 $V \times V$ 的多重子集, 其

元素称为有向边, 简称边.

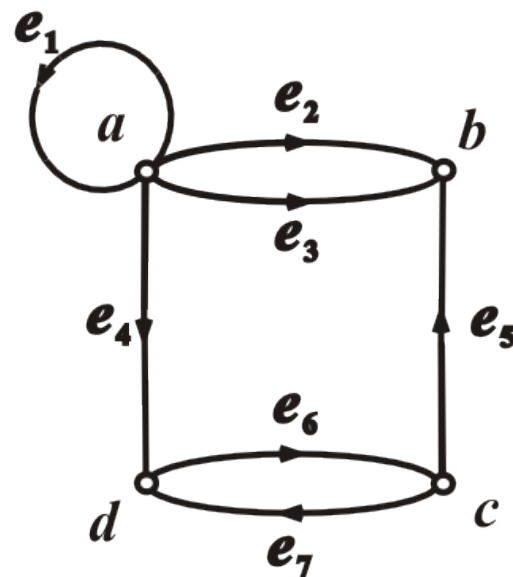
D 的基图: 用无向边代替有向边

如 $D=<V,E>$, 其中

$V=\{a,b,c,d\}$

$E=\{<a,a>, <a,b>, <a,b>, <a,d>, <c,b>, <d,c>, <c,d>\}$

图的数学定义与图形表示, 在同构意义下一一对应



无向图与有向图(续)

通常用 G 表示无向图, D 表示有向图, 也常用 G 泛指无向图和有向图.

$V(G), E(G), V(D), E(D)$: G 和 D 的顶点集, 边集.

n 阶图: n 个顶点的图

零图: $E=\emptyset$

平凡图: 1 阶零图

空图: $V=\emptyset$

顶点和边的关联与相邻

定义 设 $e=(u,v)$ 是无向图 $G=<V,E>$ 的一条边, 称 u,v 为 e 的**端点**, e 与 $u(v)$ **关联**. 若 $u \neq v$, 则称 e 与 $u(v)$ 的**关联次数为1**; 若 $u=v$, 则称 e 为**环**, 此时称 e 与 u 的**关联次数为2**; 若 w 不是 e 端点, 则称 e 与 w 的**关联次数为0**. 无边关联的顶点称作**孤立点**.

定义 设无向图 $G=<V,E>$, $u,v \in V$, $e,e' \in E$, 若 $(u,v) \in E$, 则称 u,v **相邻**; 若 e,e' 至少有一个公共端点, 则称 e,e' **相邻**.

对有向图有类似定义. 设 $e=\langle u,v \rangle$ 是有向图的一条边, 又称 u 是 e 的**始点**, v 是 e 的**终点**, u **邻接到** v , v **邻接于** u .

顶点的度数

设 $G=\langle V,E\rangle$ 为无向图, $v\in V$,

v 的度数(度) $d(v)$: v 作为边的端点次数之和

悬挂顶点: 度数为1的顶点

悬挂边: 与悬挂顶点关联的边

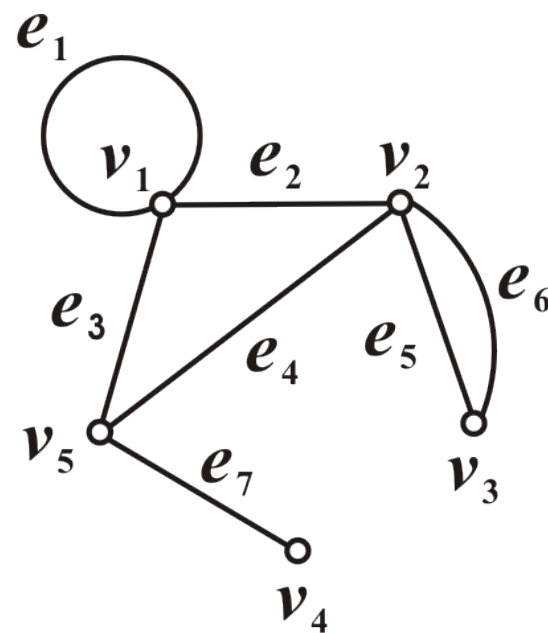
G 的最大度 $\Delta(G)=\max\{d(v) \mid v\in V\}$

G 的最小度 $\delta(G)=\min\{d(v) \mid v\in V\}$

例如 $d(v_5)=3$, $d(v_2)=4$, $d(v_1)=4$,

$\Delta(G)=4$, $\delta(G)=1$,

v_4 是悬挂顶点, e_7 是悬挂边, e_1 是环



顶点的度数(续)

设 $D=<V,E>$ 为有向图, $v\in V$,

v 的出度 $d^+(v)$: v 作为边的始点次数之和

v 的入度 $d^-(v)$: v 作为边的终点次数之和

v 的度数(度) $d(v)$: v 作为边的端点次数之和

$$d(v) = d^+(v) + d^-(v)$$

D 的最大出度 $\Delta^+(D) = \max\{d^+(v) | v \in V\}$

最小出度 $\delta^+(D) = \min\{d^+(v) | v \in V\}$

最大入度 $\Delta^-(D) = \max\{d^-(v) | v \in V\}$

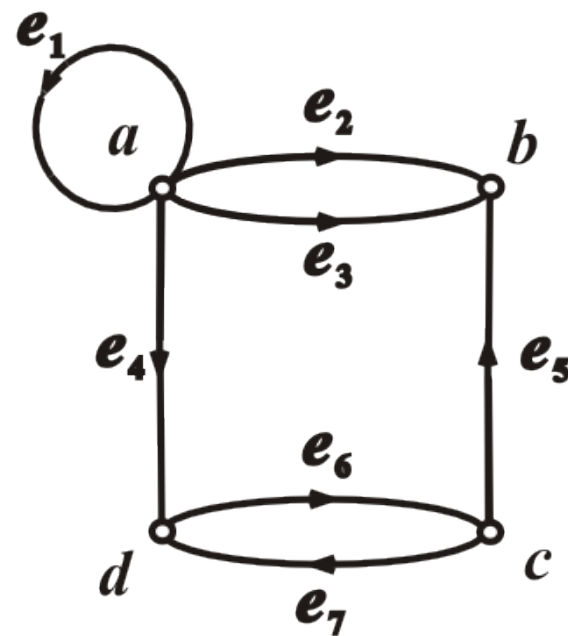
最小入度 $\delta^-(D) = \min\{d^-(v) | v \in V\}$

最大度 $\Delta(D) = \max\{d(v) | v \in V\}$

最小度 $\delta(D) = \min\{d(v) | v \in V\}$

例

例 $d^+(a)=4, d^-(a)=1, d(a)=5,$
 $d^+(b)=0, d^-(b)=3, d(b)=3,$
 $\Delta^+(D)=4, \delta^+(D)=0, \Delta^-(D)=3,$
 $\delta^-(D)=1, \Delta(D)=5, \delta(D)=3.$



图论基本定理——握手定理

定理 任意无向图和有向图的所有顶点度数之和都等于边数的2倍, 并且有向图的所有顶点入度之和等于出度之和等于边数.

证 G 中每条边(包括环)均有两个端点, 所以在计算 G 中各顶点度数之和时, 每条边均提供2度, m 条边共提供 $2m$ 度. 有向图的每条边提供一个入度和一个出度, 故所有顶点入度之和等于出度之和等于边数.

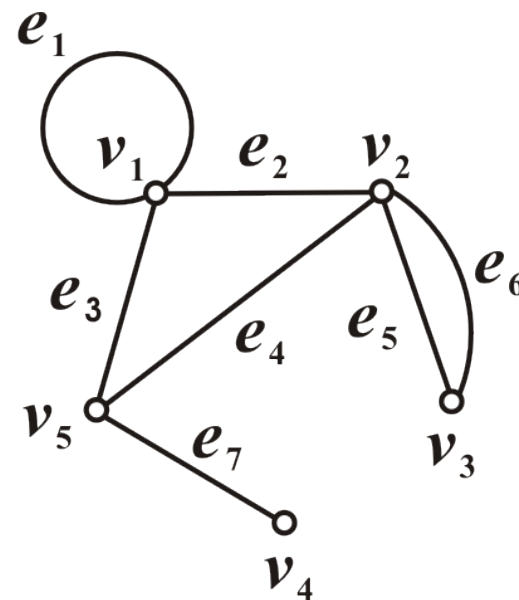
推论 任意无向图和有向图的奇度顶点个数必为偶数.

图的度数列

设无向图 G 的顶点集 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

G 的度数列: $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$

如右图度数列: 4, 4, 2, 1, 3



设有向图 D 的顶点集 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

D 的度数列: $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$

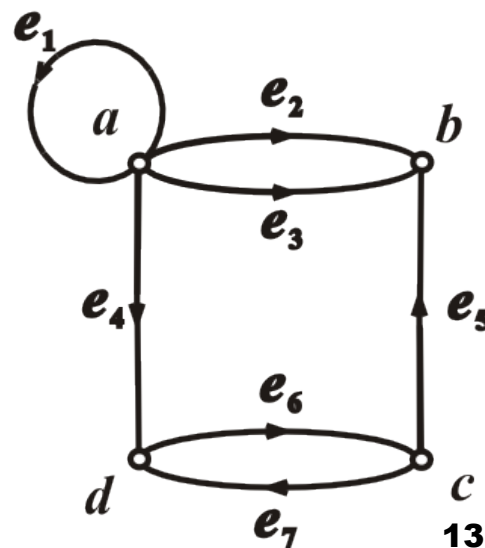
D 的出度列: $d^+(v_1), d^+(v_2), \dots, d^+(v_n)$

D 的入度列: $d^-(v_1), d^-(v_2), \dots, d^-(v_n)$

如右图度数列: 5, 3, 3, 3

出度列: 4, 0, 2, 1

入度列: 1, 3, 1, 2



握手定理的应用

例1 $(3,3,3,4)$, $(2,3,4,6,8)$ 能成为图的度数列吗?

解 不可能. 它们都有奇数个奇数.

例2 已知图 G 有10条边, 4个3度顶点, 其余顶点的度数均小于等于2, 问 G 至少有多少个顶点?

解 设 G 有 n 个顶点. 由握手定理,

$$4 \times 3 + 2 \times (n - 4) \geq 2 \times 10$$

解得 $n \geq 8$

多重图与简单图

定义 (1) 在无向图中, 如果有2条或2条以上的边关联同一对顶点, 则称这些边为**平行边**, 平行边的条数称为**重数**.

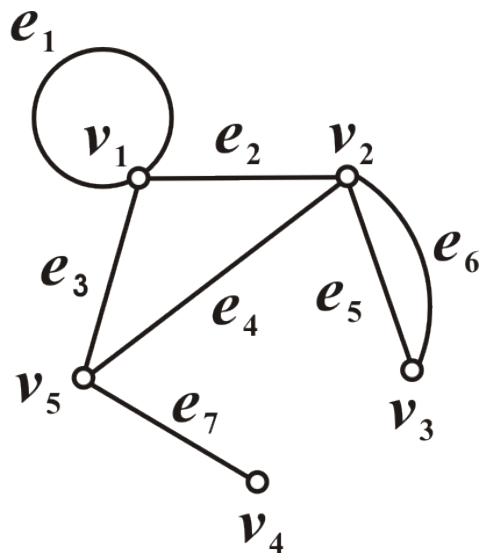
(2) 在有向图中, 如果有2条或2条以上的边具有相同的始点和终点, 则称这些边为**有向平行边**, 简称**平行边**, 平行边的条数称为**重数**.

(3) 含平行边的图称为**多重图**.

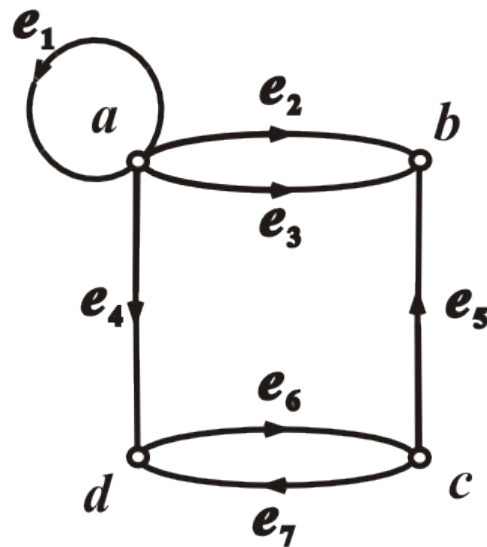
(4) 既无平行边也无环的图称为**简单图**.

注意: 简单图是极其重要的概念

实例



e_5 和 e_6 是平行边
重数为2
不是简单图



e_2 和 e_3 是平行边,重数为2
 e_6 和 e_7 不是平行边
不是简单图

图的同构

定义 设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 为两个无向图(有向图), 若存在双射函数 $f: V_1 \rightarrow V_2$, 使得对于任意的 $v_i, v_j \in V_1$,

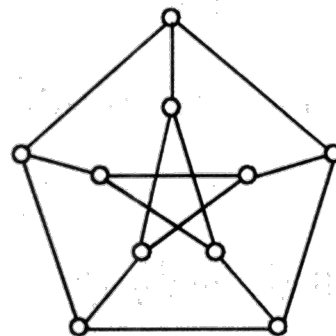
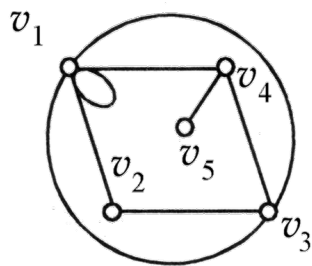
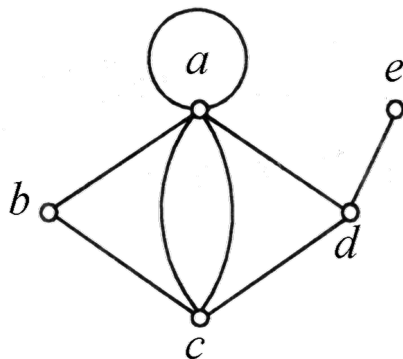
$(v_i, v_j) \in E_1$ ($\langle v_i, v_j \rangle \in E_1$) 当且仅当

$(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$ ($\langle f(v_i), f(v_j) \rangle \in E_2$) ,

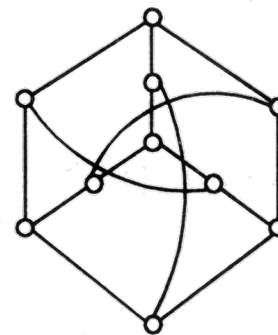
并且, (v_i, v_j) ($\langle v_i, v_j \rangle$) 与 $(f(v_i), f(v_j))$ ($\langle f(v_i), f(v_j) \rangle$) 的重数相同, 则称 G_1 与 G_2 是**同构**的, 记作 $G_1 \cong G_2$.

同构实例

例1 证明下述2对图是同构的

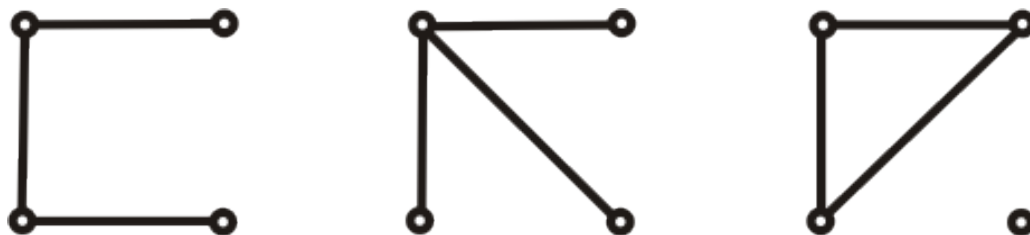


彼得森图



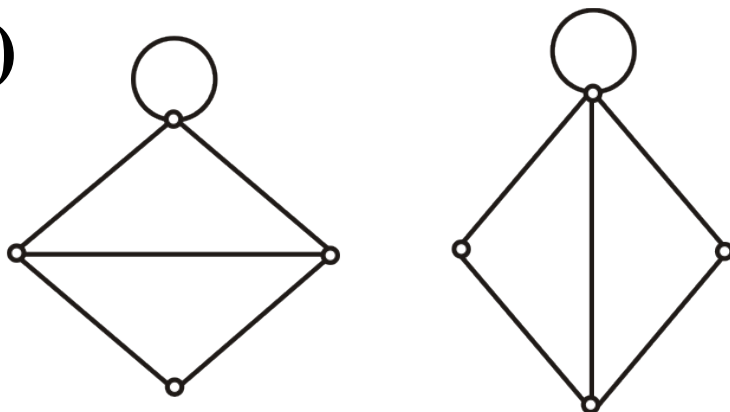
同构实例(续)

例2 试画出4阶3条边的所有非同构的无向简单图



例3 判断下述每一对图是否同构:

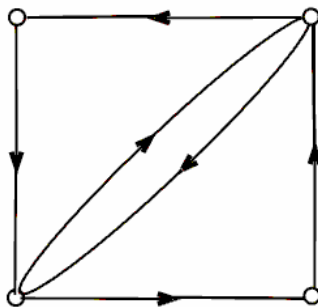
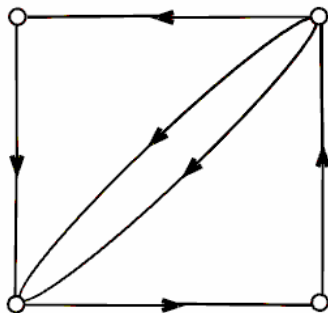
(1)



度数列不同
不同构

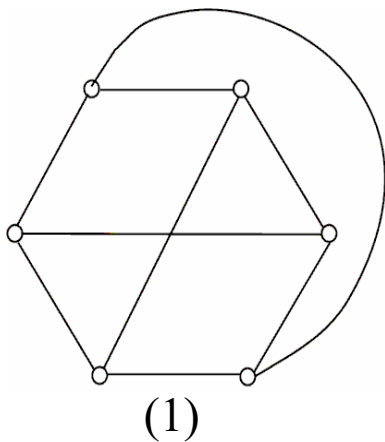
同构实例(续)

(2)

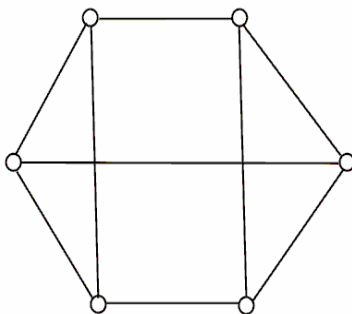


不同构
入(出)度列不同

(3)



(1)



(2)

不同构(左边没有
三角形,右边有三
角形)

注意:度数列相同

图的同构(续)

几点说明:

图之间的同构关系具有自反性、对称性和传递性.

能找到多条同构的必要条件,但它们都不是充分条件:

① 边数相同,顶点数相同

② 度数列相同(不计度数的顺序)

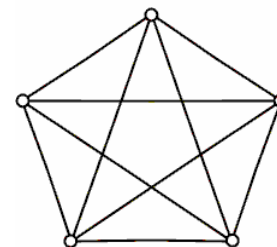
③ 对应顶点的关联集及邻域的元素个数相同,等等
若破坏必要条件,则两图不同构

至今没有找到判断两个图同构的多项式时间算法

完全图

n 阶无向完全图 K_n : 每个顶点都与其他顶点相邻的 n 阶无向简单图.

简单性质: 边数 $m=n(n-1)/2$, $\Delta=\delta=n-1$

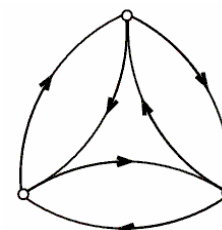


K_5

n 阶有向完全图: 每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的 n 阶有向简单图.

简单性质: 边数 $m=n(n-1)$, $\Delta=\delta=2(n-1)$,

$$\Delta^+=\delta^+=\Delta^-=\delta^-=n-1$$



3阶有向完全图

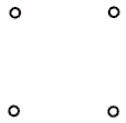
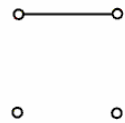
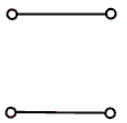
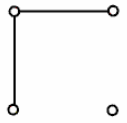
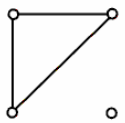
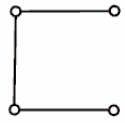
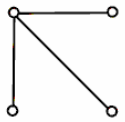
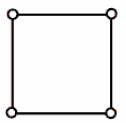
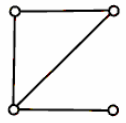
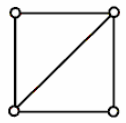
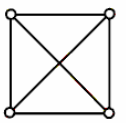
子图

定义 设 $G=\langle V,E\rangle$, $G'=\langle V',E'\rangle$ 是两个图

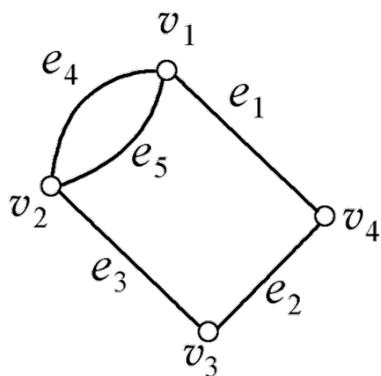
- (1) 若 $V'\subseteq V$ 且 $E'\subseteq E$, 则称 G' 为 G 的**子图**, G 为 G' 的**母图**, 记作 $G'\subseteq G$
- (2) 若 $G'\subseteq G$ 且 $V'=V$, 则称 G' 为 G 的**生成子图**
- (3) 若 $V'\subset V$ 或 $E'\subset E$, 称 G' 为 G 的**真子图**
- (4) 设 $V'\subseteq V$ 且 $V'\neq\emptyset$, 以 V' 为顶点集, 以两端点都在 V' 中的所有边为边集的 G 的子图称作 **V' 的导出子图**, 记作 $G[V']$
- (5) 设 $E'\subseteq E$ 且 $E'\neq\emptyset$, 以 E' 为边集, 以 E' 中边关联的所有顶点为顶点集的 G 的子图称作 **E' 的导出子图**, 记作 $G[E']$

生成子图实例

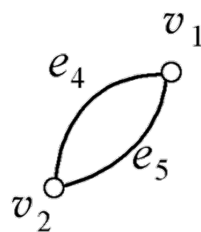
K_4 的所有非同构的生成子图

m	0	1	2	3	4	5	6	
			 	  	 			

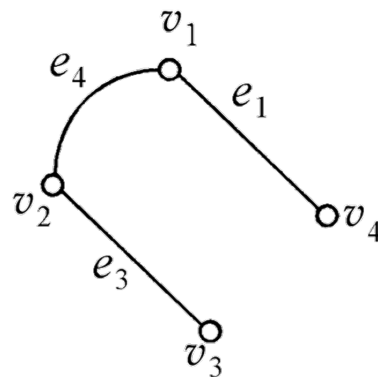
导出子图实例



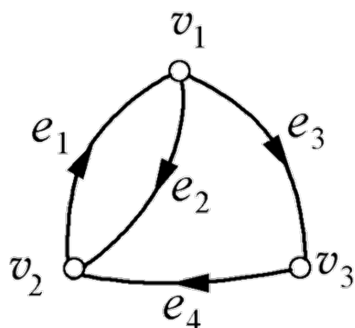
G



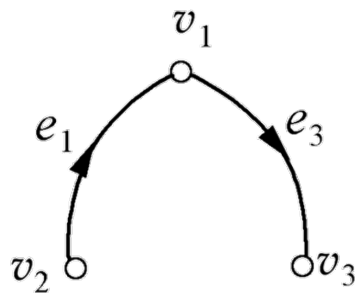
$G[\{v_1, v_2\}]$



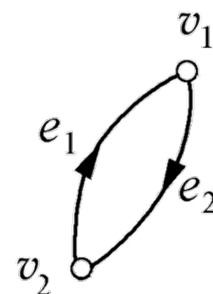
$G[\{e_1, e_3, e_4\}]$



D



$D[\{e_1, e_3\}]$



$D[\{v_1, v_2\}]$

补图

定义 设 $G=\langle V,E\rangle$ 为 n 阶无向简单图，以 V 为顶点集，所有使 G 成为完全图 K_n 的添加边组成的集合为边集的图，称为 G 的补图，记作 \overline{G} 。

若 $G\cong \overline{G}$ ，则称 G 是自补图。

例 对 K_4 的所有非同构子图，指出互为补图的每一对子图，并指出哪些是自补图。