习题课

一、向量组的线性表示、线性关系

二、求向量组的秩

三、求基础解系

四、向量空间

P108 14 设 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_n$ 是一组n维向量,

已知n维单位坐标向量 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots\vec{e}_n$ 能由它们线性表示,

证明 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_n$ 线性无关

证明　由已知条件,根据85页定理3 ,得

$$R(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots\vec{e}_n)\le R(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_n)$$

而 $R(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots\vec{e}_n)=n$

$\therefore\ R(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_n)\ge n$

又 $R(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_n)\le n$ $\therefore\ R(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_n)=n$

即 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_n$ 线性无关

P108 15 设 $\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\cdots\overline{\alpha}_n$ 是一组**n**维向量,

证明它们线性无关的充分必要条件是：任一**n**维向量都可由它们线性表示。

证明: 充分性，已知任一n维向量都可由它们线性表示

那么，$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots\vec{e}_n$ 也可由它们线性表示

因此 $R(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots\vec{e}_n)\le R(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\cdots\overline{\alpha}_n)$

而 $R(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots\vec{e}_n)=n$

$\therefore\ R(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\cdots\overline{\alpha}_n)\ge n$

又 $R(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\cdots\overline{\alpha}_n)\le n\ \therefore\ R(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\cdots\overline{\alpha}_n)=n$

即 $\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\cdots\overline{\alpha}_n$ 线性无关

必要性　已知 $\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\cdots\overline{\alpha}_n$ 线性无关

设 $\vec{b}$ 是任一n维向量,

那么,向量组 $\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\cdots\overline{\alpha}_n,\vec{b}$

是n+1个n维向量,因此一定线性相关

由定理5(3)可得

$\vec{b}$ 可由 $\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\cdots\overline{\alpha}_n$ 线性表示

P108 16 设向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_m$ 线性相关,且 $\vec{\alpha}_1\neq\vec{0}$, 证明存在某个向量 $\vec{\alpha}_k(2\leq k\leq m)$ 使 $\vec{\alpha}_k$ 能由 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_{k-1}$ 线性表示,

证明　根据已知条件，存在不全为零**m**个 $k_1,k_2\cdots k_m$ 数

使得 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_m\vec{\alpha}_m=\vec{0}$

在 $k_m,\cdots k_2,k_1$ 中第一个不为零的数记为 $k_j(1\leq j\leq m)$

即 $k_m=k_{m-1}=\cdots=k_{j+1}=0,\ k_j\neq0$

于是有 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_j\vec{\alpha}_j=\vec{0},\ k_j\neq0$

上页 下页 返回

如 果 $j=1$, 则 $k_1\vec{\alpha}_1=\vec{0}$, 即 $\vec{\alpha}_1=\vec{0}$,

这与题设 $\vec{\alpha}_1\neq\vec{0}$ 矛 盾 . 故 $j>1$, 因 此

$$\vec{\alpha}_j=(-\frac{k_1}{k_j})\vec{\alpha}_1+(-\frac{k_2}{k_j})\vec{\alpha}_2+\cdots+(-\frac{k_{j-1}}{k_j})\vec{\alpha}_{j-1},\quad 2\leq j\leq m$$

P108 17 设向量组 $B: \vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots \vec{b}_r$ 能由向量组 $A: \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots \vec{\alpha}_s$ 线性表示为 $(\vec{b}_1, \cdots \vec{b}_r) = (\vec{\alpha}_1, \cdots \vec{\alpha}_s)K$,

其中K为 $s \times r$ 矩阵，且A组线性无关，证明

B组线性无关的充分必要条件是矩阵K的秩 $R(K) = r$.

证明：**必要性** 已知向量组 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots \vec{b}_r$ 线性无关

那么，$R(B) = r$ 根据题设条件，

$$R(K) \geq R(B) = r$$

又 $$R(K) \leq r$$

$$\therefore R(K) = r$$

上页 下页 返回

充分性，　已知矩阵K的秩 $R(K)=r.$

设 $B\vec{x}=\vec{0}$ 由题设条件就有 $(AK)\vec{x}=\vec{0}$

即 $A(K\vec{x})=\vec{0}$

由于A组线性无关，那么这个方程只有零解 $K\vec{x}=\vec{0}$

又因为 $R(K)=r.$

知方程 $K\vec{x}=\vec{0}$ 只有零解 $\vec{x}=\vec{0}$

所以B向量组 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots\vec{b}_r$ 线性无关

P108 18 证明 由题设条件,有

$$(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots\vec{\beta}_n)=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_n)K$$

其中 $$K=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$\because |K|=(n-1)(-1)^{n-1}\neq 0,(n\geq 2)$$

$$\therefore (\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_n)=(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots\vec{\beta}_n)K^{-1}$$

即 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots\vec{\alpha}_n$ 与 $\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots\vec{\beta}_n$ 等价

P108 19

解: (1) 设 $B=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$ 其中 $\vec{b}_i$都是3维向量

由 $AP=PB$

知 $A(\vec{x},A\vec{x},A^2\vec{x})=(\vec{x},A\vec{x},A^2\vec{x})(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$

所以就有 $A\vec{x}=(\vec{x},A\vec{x},A^2\vec{x})\vec{b}_1$

再设 $\vec{b}_1=\left(b_{11},b_{21},b_{31}\right)^T$

那么就有 $A\vec{x}=b_{11}\vec{x}+b_{21}A\vec{x}+b_{31}A^2\vec{x}$

整理得 $b_{11}\vec{x}+(b_{21}-1)A\vec{x}+b_{31}A^2\vec{x}=\vec{0}$

因为向量组 $\vec{x},A\vec{x},A^2\vec{x}$ 线性无关

$$\therefore\ b_{11}=0, b_{21}=1, b_{31}=0$$

同理可得 $\vec{b}_2=\begin{pmatrix}0, & 0, & 1\end{pmatrix}^T$ $\vec{b}_3=\begin{pmatrix}0, & 3, & -1\end{pmatrix}^T$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

(2) $\because\ A^3\vec{x}=3A\vec{x}-A^2\vec{x}$

$$\therefore\ A(A^2-3E+A)\vec{x}=\vec{0}$$

因为向量组 $\vec{x}, A\vec{x}, A^2\vec{x}$ 线性无关

$$\therefore\ \left|A(A^2-3E+A)\right|=0$$

即 $|A|=0$ 或者 $|A^2-3E+A|=0$

若 $|A|\neq 0$ 则 A 可逆

用A的逆左乘 $A^3\vec{x}=3A\vec{x}-A^2\vec{x}$

的两端,就有 $A^2\vec{x}=3\vec{x}-A\vec{x}$

与 $\vec{x}, A\vec{x}, A^2\vec{x}$ 线性无关矛盾

$\therefore |A|=0$

上页 下页 返回

P109 24 设n阶矩阵A满足 $A^2 = A$, E 为 n 阶 单 位 矩 阵，证明 $R(A)+R(A-E)=n$

证明：由已知条件,知 $A(A-E)=0$

由 P 100 例 13，得 $R(A)+R(A-E)\le n$

又 $A+(E-A)=E$

$\therefore R(A)+R(E-A)\ge R(E)=n$

而 $R(E-A)=R(A-E)$

$\therefore R(A)+R(A-E)=n$

P109 25 设A为n阶矩阵, $(n \geq 2)$ A^*为A的伴随矩阵,

证明 $$R(A^*) = \begin{cases} n, & 当R(A) = n, \\ 1, & 当R(A) = n-1, \\ 0, & 当R(A) \leq n-2. \end{cases}$$

证明: $\because AA^* = A^*A = |A|E$

(1) 当 $R(A) = n$ 时, $|A| \neq 0$

$$\therefore |A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$$

$$\therefore R(A^*) = n$$

(2) 当 $R(A) \leq n-2$ 时,

则A中所有一个n-1阶子式都等于零,

上页 下页 返回

这时 $A^{*}=0$ $\quad\therefore\ R(A^{*})=0$

(3) 当 $R(A)=n-1$ 时，$|A|=0$

而**A**中有一个**n-1**阶子式不等于零，

$\therefore A^{*}\neq 0$ 因此 $R(A^{*})\geq 1$

又因为 $AA^{*}=0$

所以 A^{*} 的列向量都是方程 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的解.

$\because R(A)=n-1\ \therefore A\vec{x}=\vec{0}$ 基础解系只有一个向量，

那么 $R(A^{*})\leq n-(n-1)=1$

$\therefore R(A^{*})=1$

P110 31

设ξ^*是非齐次线性方程组$A\vec{x}=\vec{b}$的一个解,$\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$是其对应的齐次线性方程组的一个基础解系.证明:

(1)$\xi^*,\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$线性无关;

(2)$\xi^*,\xi^*+\eta_1,\cdots,\xi^*+\eta_{n-r}$线性无关.

上页 下页 返回

证明 (1)令 $k_0\xi^* + k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} = 0$, (*)

其中必有 $k_0 = 0$.

否则,有 $\xi^* = -\dfrac{k_1}{k_0}\eta_1 - \cdots - \dfrac{k_{n-r}}{k_0}\eta_{n-r}$,

由于 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是齐次方程组 $AX = 0$ 的解,

故等式右边为其线性组合,必是 $AX = 0$ 的解,

而等式左边 ξ^* 是非齐次方程组 $AX = B$ 的解,

矛盾,所以 $k_0 = 0$.

将 $k_0 = 0$ 代入(*)式,则有

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} = 0,$$

因为$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是$AX=0$的基础解系，

所以$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$线性无关，

故有 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$,

于是$\xi^*,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$线性无关.

(2) 由线性方程组解的性质知

$\xi^*+\eta_i(i=1,2,\cdots,n-r)$都是$A\vec{x}=\vec{b}$的解,

令 $k_0\xi^*+k_1(\xi^*+\eta_1)+\cdots+k_{n-r}(\xi^*+\eta_{n-r})=0$,

则 $(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})\xi^*+k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}=0$,

由(1)的证明知$\xi^*,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$线性无关,所以

$$\begin{cases} k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-r}=0, \\ k_1 = 0, \\ k_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{n-r}=0, \end{cases}$$

解之,得

$$k_0=k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0,$$

故$\xi^*,\xi^*+\eta_1,\xi^*+\eta_2,\cdots,\xi^*+\eta_{n-r}$线性无关.

P110 32

设$\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_s$非齐次方程组$A\vec{x}=\vec{b}$的 s个解,

$k_1,k_2,\cdots k_s$为实数，满足$k_1+k_2+\cdots k_s=1$. 证明

$$\vec{x}=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots k_s\eta_s$$

也是它的解.

证明：

$$\begin{aligned}A\vec{x}&=A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots k_s\eta_s)\\&=k_1(A\eta_1)+k_2(A\eta_2)+\cdots k_s(A\eta_s)\\&=k_1\vec{b}+k_2\vec{b}+\cdots k_s\vec{b}\\&=\vec{b}\end{aligned}$$

P110 33

设非齐次方程组$A\vec{x}=\vec{b}$的系数矩阵的秩为r,
$\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_{n-r+1}$是它的 $n-r+1$个线性无关的解,
（由题31知它确有$n-r+1$个线性无关的解）。
试证它的任一解可表示为

$$\vec{x}=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$$

其中$k_1+k_2+\cdots k_{n-r+1}=1$.

上页 下页 返回

证明：

由题设条件知：$(\eta_2-\eta_1),(\eta_3-\eta_1),\cdots(\eta_{n-r+1}-\eta_1)$

是它对应的齐次方程组的一个基础解系：

设$\vec{x}$为方程组$A\vec{x}=\vec{b}$的任一解，则$\vec{x}$可表为

$$\vec{x}=\eta_1+t_2(\eta_2-\eta_1)+t_3(\eta_3-\eta_1)+\cdots+t_{n-r+1}(\eta_{n-r}-\eta_1)$$

$$=(1-t_2-\cdots-t_{n-r+1})\eta_1+t_2\eta_2+\cdots+t_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$$

令$1-t_2-\cdots-t_{n-r+1}=t_1$，则$t_1+t_2+\cdots+t_{n-r+1}=1$，

$$\therefore \quad \vec{x}=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$$

第四章　　测试题

一、填空题(每小题5分，共40分).

1. 设$\alpha_1=(2,-1,0,5)^T,\alpha_2=(-4,-2,3,0)^T\alpha_3=(-1,0,1,k)^T$,
$\alpha_4=(-1,0,2,1)^T$,则$k=$____时,线性相关.

2. 设$\alpha_1=(2,-1,3,0)^T,\alpha_2=(1,2,0,-2)^T,\alpha_3=(0,-5,3,4)^T$,
$\alpha_4=(-1,3,t,0)^T$,则$t=$____时,线性无关.

3. 已知向量组$\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2=(2,3,4,5)^T,\alpha_3=$
$(3,4,5,6)^T,\alpha_4=(4,5,6,7)^T$,则该向量组的秩是____

4. n**维单位向量组** $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ **均可由向量组** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ **线性表出,则向量个数** ________

5. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 则秩 $R(A) =$ ________

6. 方程组$AX=0$以$\eta_1=(1,0,2)^T$, $\eta_2=(0,1,-1)^T$为其基础解系,则该方程组的系数矩阵为________

7. 设$\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\beta=(1,2,3)$, $A=\alpha\beta$, **则秩**$R(A)=$______

8.向量组$\alpha_1=(1,2,3,4)$, $\alpha_2=(2,3,4,5)$, $\alpha_3=(3,4,5,6)$, $\alpha_4=(4,5,6,7)$**的一个极大无关组是** ________

二、计算题（每小题8分，共24分）.

1.已知$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\beta=0$, **其中**$\alpha_1=(5,-8,-1,2)$, $\alpha_2=(2,-1,4,-3)$, $\alpha_3=(-3,2,-5,4)$, **求**β.

2.已知向量组$\alpha_1=(t,2,1)^T,\alpha_2=(2,t,0)^T,\alpha_3=(1,-1,1)^T$

试求出t为何值时,向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关,线性无关?

3.求实数a和b,使向量组$\alpha_1=(1,1,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,1,0)^T$ $\alpha_3=(0,0,1,1)^T$与向量组$\beta_1=(1,a,b,1)^T,\beta_2=(2,1,1,2)^T$, $\beta_3=(0,1,2,1)^T$等价.

三、证明题（每小题8分，共24分）.

1.设A为$m\times n$矩阵,B为$n\times m$矩阵,且$m>n$,试证明$\det(AB)=0$.

2. 设A为$n\times n$矩阵，B是$n\times s$矩阵，且秩$R(B)=n$，$(n\le s)$，证明

(1) 若$AB=0$，则$A=0$；

(2) 若$AB=B$，则$A=E$.

3. 已知向量组$(I)\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；$(II)\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$；$(III)\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$如果各向量组的秩分别为$R(I)=R(II)=3$，$R(III)=4$，试证明：向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为4.

上页 下页 返回

四、向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 问常数 l,m 满足什么条件时, 向量组 $l\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,m\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关. (12分)

测试题答案

一、1. $-\dfrac{3}{15}$;　2. 任意实数;　3. 2;　4. $n \le s$;

5. 5;　6. $(-2 \quad 1 \quad 1)$;　7. 1;　8. α_1, α_2.

二、1. $\beta = (0,1,2-2)$;

2. 当$t \neq -2,3$时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关;

当$t = -2,3$时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

3. $a = b = 0$.

四、 $lm \neq -1$.