# 第四章 随机变量的数字特征 习题课

- 一、重点与难点
- 二、主要内容
- 三、典型例题









## 一、重点与难点

#### 1.重点

数学期望的性质和计算 方差的性质和计算 相关系数的性质和计算

#### 2.难点

数字特征的计算

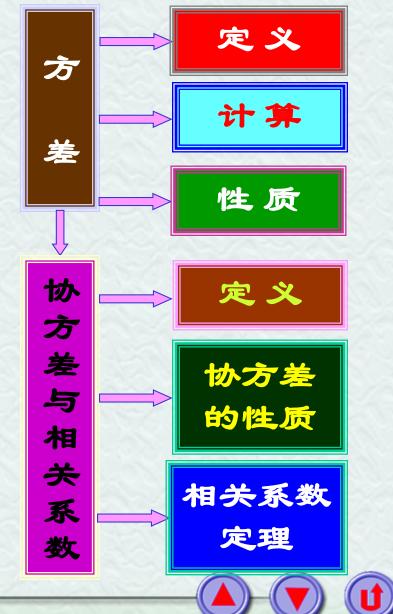






# 二、主要内容

\_ 数学期望 维 随 机 变量 离 连 性 续 的 质 型 型 数 学 期 随机变量函数的 望 数学期望



#### 离散型随机变量的数学期望

设离散型随机变量X的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots$$

若级数  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$  绝对收敛,

则称级数  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$  为随机变量 X的**数学期望**,

记为
$$E(X)$$
, 即 $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ .







#### 连续型随机变量的数学期望

X是连续型随机变量,它的概率密度为 f(x),

若积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$  绝对收敛,

则称此积分值为连续型随机变量X的数学期望,记为E(X),

即 
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$
.









### 随机变量函数的数学期望

离散型随机变量函数的数学期望为

若 
$$Y = g(X)$$
, 且  $P\{X = x_k\} = p_k$ ,  $(k = 1, 2, \cdots)$ 
则有  $E(g(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$ .

若X是连续型的,它的分布密度为f(x),

则有 
$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$
.







#### 数学期望的性质

- 1. 设C是常数,则有E(C) = C.
- 2. 设X是一个随机变量,C是常数,则有 E(CX) = CE(X).
- 3. 设X, Y是两个随机变量,则有 E(X + Y) = E(X) + E(Y).
- 4. 设X, Y 是相互独立的随机变量,则有 E(XY) = E(X)E(Y).







#### 二维随机变量的数学期望

设(X,Y)为二维随机变量,若E(X),E(Y)都 存在,则其期望值定义为

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{i} \sum_{j} x_{i} p_{ij}, & (X,Y) \text{ 的概率分布为 } p_{ij}; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y) dx dy, (X,Y) \text{ 的密度为} f(x,y). \end{cases}$$
 同理可得

同理可得
$$E(Y) = \begin{cases} \sum_{i} \sum_{j} y_{i} p_{ij}, & (X,Y) \text{的概率分布为 } p_{ij}; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y) dx dy, & (X,Y) \text{ 的密度为} f(x,y). \end{cases}$$







- 1. 若 X, Y 为离散型随机变量,g(x, y) 是二元函数,则  $E[g(X,Y)] = \sum_{i} \sum_{j} g(x_{i}, y_{j}) p_{ij}$ , 当(X,Y)的联合概率分布为  $p_{ij}$ .
- 2. 若 X, Y 为连续型随机变量,g(x,y) 是二元函数,则  $E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y) dx dy$ , 当(X,Y)的联合分布密度为 f(x,y).

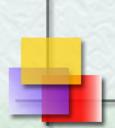






#### 方差的定义

设 X 是一个随机变量,若  $E\{[X - E(X)]^2\}$  存在,则称  $E\{[X - E(X)]^2\}$  是 X 的方差,记作  $D(X) \quad \text{或} \quad \text{Var}(X),$  即  $D(X) = \text{Var}(X) = E\{[X - E(X)]^2\},$  称  $\sqrt{D(X)}$  为标准差或均方差 ,记为  $\sigma(X)$ .







#### 方差的计算

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
.

离散型随机变量的方差

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k,$$

其中 $P{X = x_k} = p_k, k = 1, 2, \dots 是 X$ 的分布律.

连续型随机变量的方差

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx,$$

其中 f(x) 为概率密度.







#### 方差的性质

- 1. 设 C 是常数,则有 D(C) = 0.
- 2. 设X是一个随机变量,C是常数,则有 $D(CX) = C^2D(X)$ .
- 3. 设 X, Y 相互独立, D(X), D(Y) 存在,则  $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$
- 4. D(X) = 0的充要条件是 X 以概率 1 取常数 C,即  $P\{X = C\} = 1$ .







#### 协方差与相关系数的定义

 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$  称为随机变量 X与 Y的协方差,记为 Cov(X,Y),

$$Cov(X,Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}.$$

称 
$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}}$$
 为随机变量  $X = Y$  的相

关系数.







#### 协方差的性质

- 1. Cov(X,Y) = Cov(Y,X).
- 2. Cov(aX,bY) = abCov(X,Y) (a,b为常数)
- 3.  $Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$ .









#### 相关系数定理

- $(1) |\rho_{XY}| \leq 1.$
- $(2)|\rho_{XY}|=1$ 的充要条件是:存在常数 a,b 使  $P\{Y=a+bX\}=1$ .









## 三、典型例题

例1 设X服从几何分布,它的分布律为

$$P{X = k} = (1-p)^{k-1} p, k = 1,2,\dots,$$

求 E(X) 和 D(X).

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} p$$
 (其中  $q = 1 - p$ )

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p},$$







$$E(X^{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2} \cdot q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k^{2} \cdot q^{k-1}$$

$$=\frac{p(1+q)}{(1-q)^3}=\frac{1+q}{p^2},$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$=\frac{1+q}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}.$$









例2 从数字0,1,2,...,n中任取两个不同的数字,求这两个数字之差的绝对值的数学期望.

解 设X为所选的两个数字之差的绝对值,则X的所有可能取值为  $1,2,3,\cdots,n$ ,

$$P\{X=1\} = n / {n+1 \choose 2}, P\{X=2\} = (n-1) / {n+1 \choose 2},$$

一般的
$$P{X = k} = (n-k+1) / {n+1 \choose 2}, k = 1, 2, \dots, n.$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP\{X = k\} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot (n-k+1) / {n+1 \choose 2} = \frac{n+2}{3}.$$







例3 设随机变量 X 取非负整数值  $n \ge 0$  的概率

为 
$$p_n = \frac{AB^n}{n!}$$
,已知  $E(X) = a$ ,求  $A$ 与  $B$ 的值.

解 因为 $p_n$ 是X的分布列,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\{X=n\} = \sum_{n=0}^{\infty} A \cdot \frac{B^n}{n!} = Ae^B = 1, \quad \text{$\not$} A = e^{-B},$$

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} nA \cdot \frac{B^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A \cdot B^n}{(n-1)!} = ABe^B = a,$$

因此  $A=e^{-a}$ , B=a.







例4 某银行开展定期定额有奖储蓄,定期一年,定额60元,按规定10000个户头中,头等奖一个,奖金500元;二等奖10个,各奖100元;三等奖100个,各奖10元;四等奖1000个,各奖2元.某人买了五个户头,他期望得奖多少元?

解 因为任何一个户头获奖都是等可能的, 先计算一个户头的得奖金数 X 的期望.

分布列为

$\overline{X}$	500	100	10	2	0
p	1	1	1	1	8889
	$\overline{10^4}$	$\overline{10^3}$	$\overline{10^2}$	10	10 <sup>4</sup>





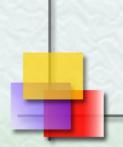


#### X的数学期望为

$$E(X) = \frac{1}{10^4} \times 500 + \frac{1}{10^3} \times 100 + \frac{1}{10^2} \times 10 + \frac{1}{10} \times 2$$
$$= 0.45 \,(\vec{\pi}),$$

买五个户头的期望得奖金额为

$$E(5X) = 5E(X) = 5 \times 0.45 = 2.25 (\overline{\pi}).$$









#### 例5 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2)^{\alpha}, & -1 < \alpha < 1, \\ 0, & \text{ i.e.} \end{cases} (x < 0)$$

求 E(X) 和 D(X).

解 因为f(x)是偶函数,

所以 
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-1}^{1} cx (1-x^2)^{\alpha} dx = 0,$$

$$D(X) = E(X^{2}) - [E(X)]^{2} = E(X^{2})$$









**例**6 设随机变量 X 的概率密度  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ,

求  $E[\min(|X|,1)]$ .

解  $E[\min(|X|,1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \min(|x|,1) f(x) dx$  $= \int |x| f(x) dx + \int f(x) dx$  $= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{|x|}{1+x^2} dx + \frac{1}{\pi} \int_{|x| \ge 1} \frac{1}{1+x^2} dx$  $= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx + \frac{2}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \ln 2 + \frac{1}{2}.$ 







## 例7设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度

函数为 
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y), 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, &$$
其他

且  $Z = \cos(X + Y)$ , 求 E(Z) 和 D(Z).

解 
$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x+y) f(x,y) dx dy$$
  
=  $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos(x+y) \sin(x+y) dx dy$   
=  $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} [\cos 2x - \cos(\pi + 2x)] dx = 0$ ,







$$D(Z) = E(Z^2)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos^2(x+y) \sin(x+y) dx dy$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos^3 x - \cos^3 \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right] dx$$

$$=\frac{2}{9}$$
.









例8 设二维连续型随机变量 (X,Y)的联合密度

求(X,Y)的协方差矩阵及相关系数.

解 
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 \frac{6}{7} x(x^2 + \frac{1}{2}xy) dy dx = \int_0^1 \left(\frac{12}{7}x^3 + \frac{6}{7}x^2\right) dx$$
5









$$E(X^{2}) = \int_{0}^{1} \int_{0}^{2} \frac{6}{7} x^{2} (x^{2} + \frac{1}{2} xy) dx dy = \frac{39}{70},$$

故 
$$D(X) = \frac{39}{70} - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{23}{490}$$

因为
$$E(Y) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{6}{7} y(x^2 + \frac{1}{2}xy) dy dx = \frac{8}{7}$$

$$E(Y^{2}) = \int_{0}^{1} \int_{0}^{2} \frac{6}{7} y^{2} (x^{2} + \frac{1}{2} xy) dy dx = \frac{34}{21},$$

故 
$$D(Y) = \frac{34}{21} - \left(\frac{8}{7}\right)^2 = \frac{46}{147}$$







$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{6}{7} xy(x^2 + \frac{1}{2}xy) dy dx = \frac{17}{21},$$

故 Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)

$$=\frac{17}{21}-\frac{5}{7}\times\frac{8}{7}=-\frac{1}{147},$$

于是(X,Y)的协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix}
\frac{23}{490} & -\frac{1}{147} \\
-\frac{1}{147} & \frac{46}{147}
\end{pmatrix}$$

$$X$$
与 $Y$ 的相关系数  $\rho_{XY} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = -\frac{\sqrt{15}}{69}.$ 





