第一节　数学期望

一、数学期望的概念

引例1　分赌本问题(产生背景)

A, B 两人赌技相同, 各出赌金100元,并约定先胜三局者为胜, 取得全部 200 元.由于出现意外情况 ,在 A 胜 2 局 B 胜1 局时, 不得不终止赌博, 如果要分赌金, 该如何分配才算公平?

分析 假设继续赌两局,则结果有以下四种情况:

$A\ A$	$A\ B$	$B\ A$	$B\ B$
A胜B负	A胜B负	B胜A负	B胜A负
A胜B负	B胜A负	A胜B负	B胜A负

把已赌过的三局(A 胜2局B 胜1局)与上述结果相结合, 即 A、B 赌完五局,

前三局: A 胜 2 局 B 胜 1 局

后二局: $\boxed{A\ A \quad A\ B \quad B\ A}$ $\boxed{B\ B}$

A 胜 B 胜

故有, 在赌技相同的情况下, A, B 最终获胜的可能性大小之比为 $3:1,$

即A 应获得赌金的 $\frac{3}{4}$, 而 B 只能获得赌金的 $\frac{1}{4}$.

因此, A 能 "期望" 得到的数目应为

$$200 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 150(\text{元}),$$

而B 能 "期望" 得到的数目, 则为

$$200 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{3}{4} = 50(\text{元}).$$

若设随机变量 X 为:在 A 胜2局B 胜1局的前提下, 继续赌下去 A 最终所得的赌金.

则X 所取可能值为: 200 0

其概率分别为: $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$

因而A期望所得的赌金即为X的"期望"值,

等于 $200\times\frac{3}{4}+0\times\frac{1}{4}=150$(元).

即为 X 的可能值与其概率之积的累加.

引例2　射击问题

设某射击手在同样的条件下,瞄准靶子相继射击90次,(命中的环数是一个随机变量).射中次数记录如下

命中环数 k	0	1	2	3	4	5
命中次数 n_k	2	13	15	10	20	30
频率 $\frac{n_k}{n}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{13}{90}$	$\frac{15}{90}$	$\frac{10}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{30}{90}$

试问:该射手每次射击平均命中靶多少环?

解 平均射中环数 $=\dfrac{\text{射中靶的总环数}}{\text{射击次数}}$

$$=\frac{0\times2+1\times13+2\times15+3\times10+4\times20+5\times30}{90}$$

$$=0\times\frac{2}{\underline{90}}+1\times\frac{13}{\underline{90}}+2\times\frac{15}{\underline{90}}+3\times\frac{10}{\underline{90}}+4\times\frac{20}{\underline{90}}$$

$$+5\times\frac{30}{\underline{90}}$$

$$=\sum_{k=0}^{5}k\cdot\frac{n_k}{n}=3.37.$$

设射手命中的环数为随机变量 Y.

$\boxed{\text{平均射中环数}} = \sum_{k=0}^{5} k \cdot \boxed{\frac{n_k}{n}}$ → 频率随机波动

→ 随机波动

"平均射中环数"的稳定值 = ?

$$\sum_{k=0}^{5} k \cdot \frac{n_k}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \sum_{k=0}^{5} k \cdot p_k$$

随机波动 → 稳定值

"平均射中环数"等于

射中环数的可能值与其概率之积的累加

1. 离散型随机变量的数学期望

定义 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1,2,\cdots.$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛, 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$. 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

分赌本问题

A 期望所得的赌金即为 X 的数学期望

$$E(X)=200\times\frac{3}{4}+0\times\frac{1}{4}=150(\text{元}).$$

射击问题

"平均射中环数" 应为随机变量 Y 的数学期望

$$E(Y)=$$

$$0\times p_0+1\times p_1+2\times p_2+3\times p_3+4\times p_4+5\times p_5.$$

关于定义的几点说明

(1) $E(X)$是一个实数,而非变量,它是一种加权平均,与一般的平均值不同，它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的真正的平均值, 也称均值.

(2) 级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变，之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量X 取可能值的平均值,它不应随可能值的排列次序而改变.

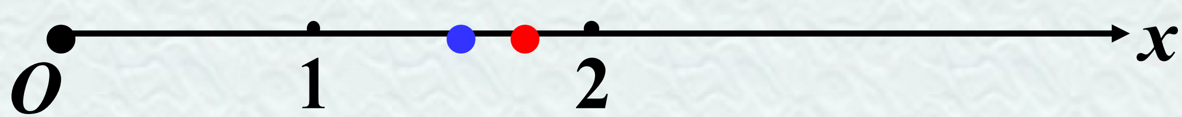
(3) 随机变量的数学期望与一般变量的算术平均值不同.

假设

X	1	2
p	0.02	0.98

随机变量 X 的算术平均值为 $\dfrac{1+2}{2}=1.5,$

$$E(X)=1\times 0.02+2\times 0.98=1.98.$$



它从本质上体现了随机变量X 取可能值的平均值.

当随机变量 X 取各个可能值是等概率分布时，X 的期望值与算术平均值相等.

实例1 谁的技术比较好?

甲、乙两个射手, 他们射击的分布律分别为

甲射手

击中环数	8	9	10
概率	0.3	0.1	0.6

乙射手

击中环数	8	9	10
概率	0.2	0.5	0.3

试问哪个射手技术较好?

解 设甲、乙射手击中的环数分别为 X_1, X_2 .

$$E(X_1) = 8 \times 0.3 + 9 \times 0.1 + 10 \times 0.6 = 9.3(\text{环}),$$

$$E(X_2) = 8 \times 0.2 + 9 \times 0.5 + 10 \times 0.3 = 9.1(\text{环}),$$

故甲射手的技术比较好.

实例2 发行彩票的创收利润

某一彩票中心发行彩票 10万张, 每张2元. 设头等奖1个, 奖金 1万元, 二等奖2个,奖金各 5 千元; 三等奖 10个, 奖金各1千元; 四等奖100个, 奖金各100元; 五等奖1000个, 奖金各10 元.每张彩票的成本费为 0.3 元, 请计算彩票发行单位的创收利润.

解 设每张彩票中奖的数额为随机变量X, 则

X	10000	5000	1000	100	10	0
p	$1/10^5$	$2/10^5$	$10/10^5$	$100/10^5$	$1000/10^5$	p_0

每张彩票平均能得到奖金

$$E(X) = 10000 \times \frac{1}{10^5} + 5000 \times \frac{2}{10^5} + \cdots + 0 \times p_0$$

$$= 0.5(\text{元}),$$

每张彩票平均可赚

$$2 - 0.5 - 0.3 = 1.2(\text{元}),$$

因此彩票发行单位发行 10 万张彩票的创收利润为

$$100000 \times 1.2 = 120000(\text{元}).$$

实例3 如何确定投资决策方向?

某人有10万元现金，想投资于某项目，预估成功的机会为 30%，可得利润8万元， 失败的机会为70%，将损失 2 万元．若存入银行，同期间的利率为5%，问是否作此项投资?

解 设 X 为投资利润，则

X	8	-2
p	0.3	0.7

$E(X) = 8 \times 0.3 - 2 \times 0.7 = 1$(万元), 存入银行的利息:

$10 \times 5\% = 0.5$(万元)， 故应选择投资.

实例4　商店的销售策略

某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式，记使用寿命为X(以年计)，规定：

$X \le 1$，一台付款1500元；$1 < X \le 2$，一台付款2000元；
$2 < X \le 3$，一台付款2500元；$X > 3$，一台付款3000元.

设寿命 X 服从指数分布，概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} e^{-x/10}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

试求该商店一台家用电器收费 Y 的数学期望.

解 $P\{X \le 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-x/10} \, dx = 1 - e^{-0.1} = 0.0952,$

$$P\{1 < X \le 2\} = \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-x/10} \, dx$$

$$= e^{-0.1} - e^{-0.2} = 0.0861,$$

$$P\{2 < X \le 3\} = \int_2^3 \frac{1}{10} e^{-x/10} \, dx$$

$$= e^{-0.2} - e^{-0.3} = 0.0779,$$

$$P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-x/10}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\mathrm{e}^{-0.3}=0.7408.$$

因而一台收费 Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

得 $E(Y)=2732.15,$

即平均一台家用电器收费 2732.15 元.

实例5　分组验血

在一个人数很多的团体中普查某种疾病,为此要抽验 N 个人的血,可以用两种方法进行.

(i) 将每个人的血分别去化验,这就需化验 N 次.

(ii) 按 k 个人一组进行分组,把从 k 个人抽来的血混合在一起进行化验,如果这混合血液呈阴性反应,就说明 k 个人的血都呈阴性反应,这样,这 k 个人的血就只需验一次.若呈阳性,则再对这 k 个人的血液分别进行化验,这样,k 个人的血共最多需化验 $k+1$ 次.

假设每个人化验呈阳性的概率为 p,且这些人的化验反应是相互独立的.试说明当p较小时,选取适当的k,按第二种方法可以减少化验的次数.并说明 k 取什么值时最适宜.

解 由于血液呈阳性反应的概率为 p,

所以血液呈阴性反应的概率为 $q = 1 - p$,

因而 k 个人的混合血呈阴性反应的概率为 q^k,

k 个人的混合血呈阳性反应的概率为 $1 - q^k$.

设以 k 个人为一组时,组内每人的血化验的次数为 X,则 X 为一随机变量,且其分布律为

X	$\frac{1}{k}$	$\frac{k+1}{k}$
p_k	q^k	$1-q^k$

X 的数学期望为

$$E(X)=\frac{1}{k}q^k+(1+\frac{1}{k})(1-q^k)=1-q^k+\frac{1}{k}.$$

N 个人平均需化验的次数为 $N(1-q^k+\frac{1}{k}).$

因此,只要选择 k 使

$$1-q^k+\frac{1}{k}<1,$$

则 N 个人平均需化验的次数 $<N$.

当 p 固定时,选取 k 使得

$$L=1-q^k+\frac{1}{k}$$ 小于1且取到最小值 ,

此时可得到最好的分组 方法.

实例6 按规定,某车站每天 $8:00\sim9:00$, $9:00\sim10:00$ 都恰有一辆客车到站,但到站的时刻是随机的,且两者到站的时间相互独立.其规律为

到站时刻	$8:10$ $9:10$	$8:30$ $9:30$	$8:50$ $9:50$
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

(i) 一旅客$8:00$到车站,求他候车时间的数学期望.

(ii) 一旅客$8:20$到车站,求他候车时间的数学期望.

解 设旅客的候车时间为 X(以分计).

(i) X的分布律为

X	10	30	50
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$E(X)=10\times\frac{1}{6}+30\times\frac{3}{6}+50\times\frac{2}{6}$$

$$=33.33(\text{分}).$$

(ii) X 的分布律为

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$E(X)=$$

$$10\times\frac{3}{6}+30\times\frac{2}{6}+50\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+70\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+90\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$$

$$=27.22(\text{分}).$$

2.连续型随机变量数学期望的定义

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$,
若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x$$

绝对收敛,则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x$ 的值为随机变量 X 的数学期望,记为 $E(X)$.即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x.$$

实例7 顾客平均等待多长时间?

设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X(以分计)服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-x/5}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

试求顾客等待服务的平均时间?

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-x/5}\,\mathrm{d}\,x=5$(分钟).

因此, 顾客平均等待5分钟就可得到服务.

二、数学期望的性质

1. 设 C 是常数, 则有 $E(C)=C$.

证明 $E(X)=E(C)=1\times C=C$.

2. 设 X 是一个随机变量,C 是常数, 则有

$$E(CX)=CE(X).$$

证明 $E(CX)=\sum_k Cx_k p_k=C\sum_k x_k p_k=CE(X)$.

例如 $E(X)=5$, 则 $E(3X)=3E(X)=3\times5=15$.

3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

证明
$$E(X+Y)=\sum_k (x_k+y_k)p_k$$
$$=\sum_k x_k p_k+\sum_k y_k p_k = E(X)+E(Y).$$

4. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 则有

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

说明 连续型随机变量 X 的数学期望与离散型随机变量数学期望的性质类似.

实例8 一机场班车载有 20 位旅客自机场开出，旅客有 10 个车站可以下车. 如到达一个车站没有旅客下车就不停车，以 X 表示停车的次数，求 $E(X)$ (设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立).

解 引入随机变量 X_i，

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{在第 } i \text{ 站没有人下车}, \\ 1, & \text{在第 } i \text{ 站有人下车}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, 10.$$

则 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$.

则有 $P\{X_i=0\}=\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$, $P\{X_i=1\}=1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$,

$i=1,2,\cdots,10.$

由此 $E(X_i)=1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$, $i=1,2,\cdots.$

得

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_{10})$$

$$=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10})$$

$$=10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]=8.784(\text{次}).$$

三、随机变量函数的数学期望

1. 离散型随机变量函数的数学期望

设随机变量 X 的分布律为

$X = x_k$	-1	0	1	2
$P\{X = x_k\} = p_k$	p_1	p_2	p_3	p_4

若 $Y = g(X) = X^2$,求 $E(Y)$.

解 先求 $Y = X^2$ 的分布律

$Y = X^2$	0	1	4
p	p_2	$p_1 + p_3$	p_4

则有 $E(Y)=E(g(X))=E(X^2)$

$$=0\cdot p_2+1\cdot(p_1+p_2)+4\cdot p_4$$

$$=0\cdot p_2+(-1)^2\cdot p_1+1^2\cdot p_2+2^2\cdot p_4$$

$$=\sum_{k=1}^{4}g(x_k)P\{X=x_k\}.$$

因此离散型随机变量函数的数学期望为

若 $Y=g(X)$, 且 $P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots,$

则有 $$E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k.$$

2. 连续型随机变量函数的数学期望

若 X 是连续型的,它的分布密度为 $f(x)$, 则

$$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. 二维随机变量函数的数学期望

(1) 设 X,Y 为离散型随机变量, $g(x,y)$ 为二元函数,则 $E[g(X,Y)]=\sum_{i}\sum_{j}g(x_i,y_j)p_{ij}.$

其中 (X,Y) 的联合概率分布为 p_{ij}.

(2) 设 X, Y 为连续型随机变量, $g(x, y)$ 为二元函数,则

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

其中 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$.

实例9 设 (X, Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

求: $E(X)$, $E(Y)$, $E(Y/X)$, $E[(X-Y)^2]$.

解 X 的分布律为

X	1	2	3
p	0.4	0.2	0.4

得 $E(X)=1\times0.4+2\times0.2+3\times0.4=2.$

Y 的分布律为

Y	-1	0	1
p	0.3	0.4	0.3

得 $E(Y)=-1\times0.3+0\times0.4+1\times0.3=0.$

由于

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	$(1,-1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(3,0)$	$(3,1)$
Y/X	-1	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	$1/3$

于是

$$E\left(\frac{Y}{X}\right)=-1\times 0.2+0\times 0.1+1\times 0.1-\frac{1}{2}\times 0.1+\frac{1}{2}\times 0.1+0\times 0.3+\frac{1}{3}\times 0.1$$

$$=-\frac{1}{15}.$$

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	$(1,-1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(3,0)$	$(3,1)$
$(X-Y)^2$	4	1	0	9	1	9	4

得 $E[(X-Y)^2]=4\times 0.3+1\times 0.2+0\times 0.1+9\times 0.4$

$$=5.$$

实例10 某公司计划开发一种新产品市场,并试图确定该产品的产量.他们估计出售一件产品可获利 m 元,而积压一件产品导致 n 元的损失.再者,他们预测销售量 Y(件)服从指数分布其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-y/\theta}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}\qquad \theta>0,$$

问若要获得利润的数学期望最大,应生产多少件产品(m,n,θ 均为已知)?

解　设生产 x 件，则获利 Q 是 x 的函数：

$$Q = Q(x) = \begin{cases} mY - n(x - Y), & 若\ Y < x, \\ mx, & 若\ Y \geq x. \end{cases}$$

$$E(Q) = \int_0^{+\infty} Q f_Y(y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \int_0^x [my - n(x - y)] \frac{1}{\theta} \mathrm{e}^{-y/\theta}\,\mathrm{d}\,y + \int_x^{+\infty} mx \frac{1}{\theta} \mathrm{e}^{-y/\theta}\,\mathrm{d}\,y$$

$$= (m + n)\theta - (m + n)\theta \mathrm{e}^{-x/\theta} - nx,$$

令　$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} E(Q) = (m + n)\mathrm{e}^{-x/\theta} - n = 0,$$

得 $x=-\theta\ln(\frac{n}{m+n})$.

又 $\frac{d^2}{dx^2}E(Q)=\frac{-(m+n)}{\theta}e^{-x/\theta}<0$,

因此, 当 $x=-\theta\ln(\frac{n}{m+n})$ 时, $E(Q)$ 取得最大值.

实例11 (卖报问题) 设某卖报人每日的潜在卖报数 ξ 服从参数为 λ 的泊松分布. 如果每卖出一份报可得报酬 a, 卖不掉而退回则每份赔偿 b, 若某日报卖人买进 n 份报, 试求其期望所得. 进一步, 再求最佳的卖报份数.

解 若记其真正卖报数为 η,则 η 与 ξ 的关系如下:

$$\eta = \begin{cases} \xi, & \xi < n \\ n, & \xi \geq n \end{cases},$$

则 η 的分布为

$$P\{\eta = k\} = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, & k < n, \\ \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty}\dfrac{\lambda^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda}, & k = n. \end{cases}$$

记所得为 ζ,则 ζ 与 η 的关系如下：

$$\zeta = g(\eta) = \begin{cases} a\eta - b(n-\eta), & \eta < n, \\ an, & \eta = n. \end{cases}$$

因此期望所得为

$$M(n) = E[g(\eta)]$$

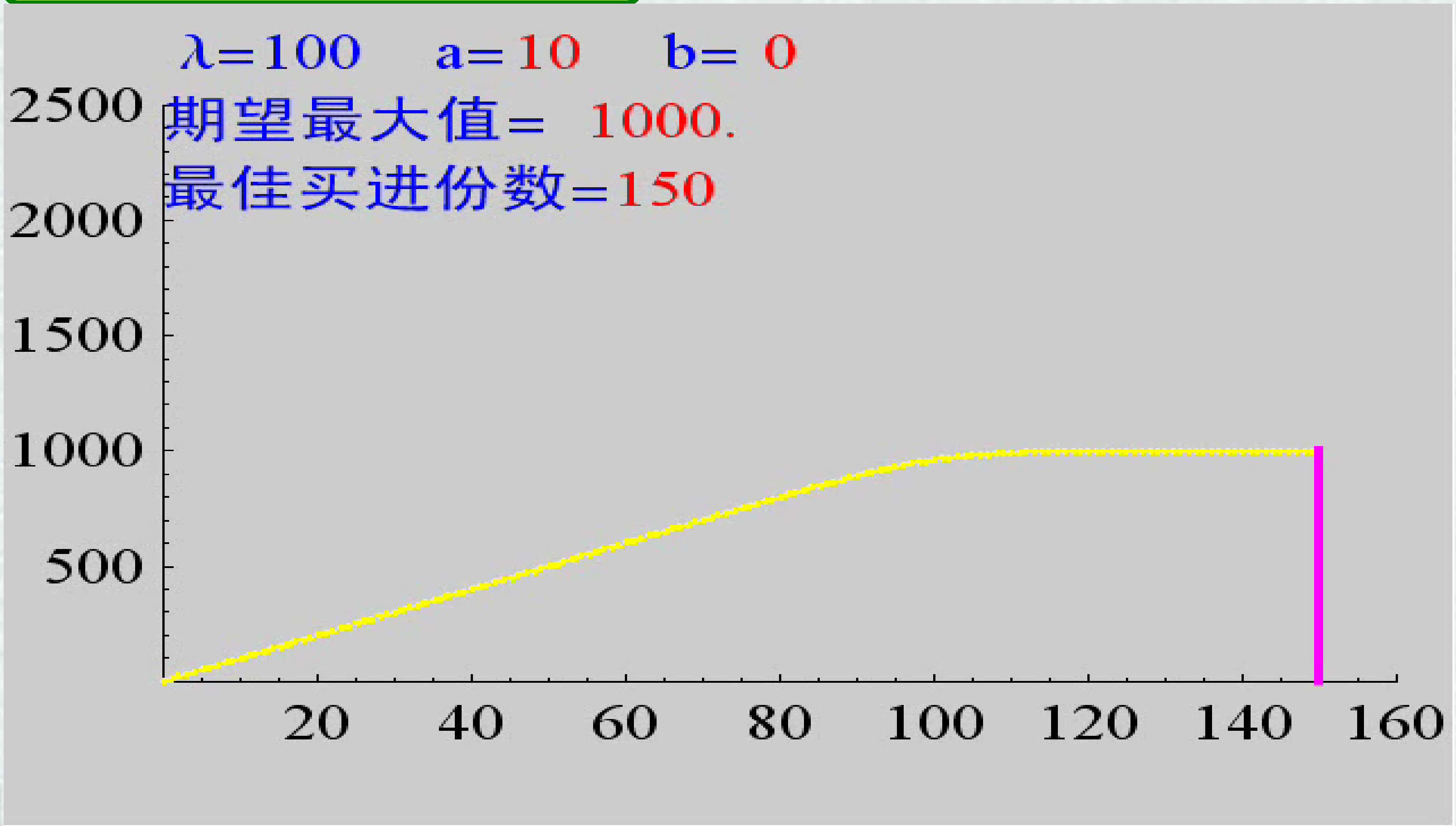
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}[ka-(n-k)b]+(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda})na$$

$$=(a+b)\lambda\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}-n(a+b)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}+na$$

当 a,b,λ 给定后，求 n 使 $M(n)$ 达到极大.

利用软件包求解,并演示计算结果.

单击图形播放/暂停 ESC键退出



四、小结

1. 数学期望是一个实数, 而非变量,它是一种**加权平均**, 与一般的平均值不同,它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的**真正的平均值**.

2. 数学期望的性质

1^{o} $E(C) = C$;

2^{o} $E(CX) = CE(X)$;

3^{o} $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;

4^{o} X, Y 独立 $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$.