# 第四节　区间估计

一、区间估计的基本概念

二、典型例题

三、小结

# 一、区间估计的基本概念

## 1. 置信区间的定义

设总体 $X$ 的分布函数 $F(x;\theta)$ 含有一个未知参数 $\theta$, 对于给定值 $\alpha\ (0<\alpha<1)$, 若由样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 确定的两个统计量

$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 满足

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\}=1-\alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 是 $\theta$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间, $\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$ 分别称为置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限, $1-\alpha$ 为置信度.

## 关于定义的说明

被估计的参数$\theta$虽然未知,但它是一个常数,没有随机性, 而区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$是随机的.

因此定义中下表达式

$$P\{\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha$$

的本质是:

随机区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$以$1-\alpha$的概率包含着参数$\theta$的真值,而不能说参数$\theta$以$1-\alpha$的概率落入随机区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$.

另外定义中的表达式

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = 1 - \alpha$$

还可以描述为：

若反复抽样多次(各次得到的样本容量相等,都是$n$)

每个样本值确定一个区 间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$,

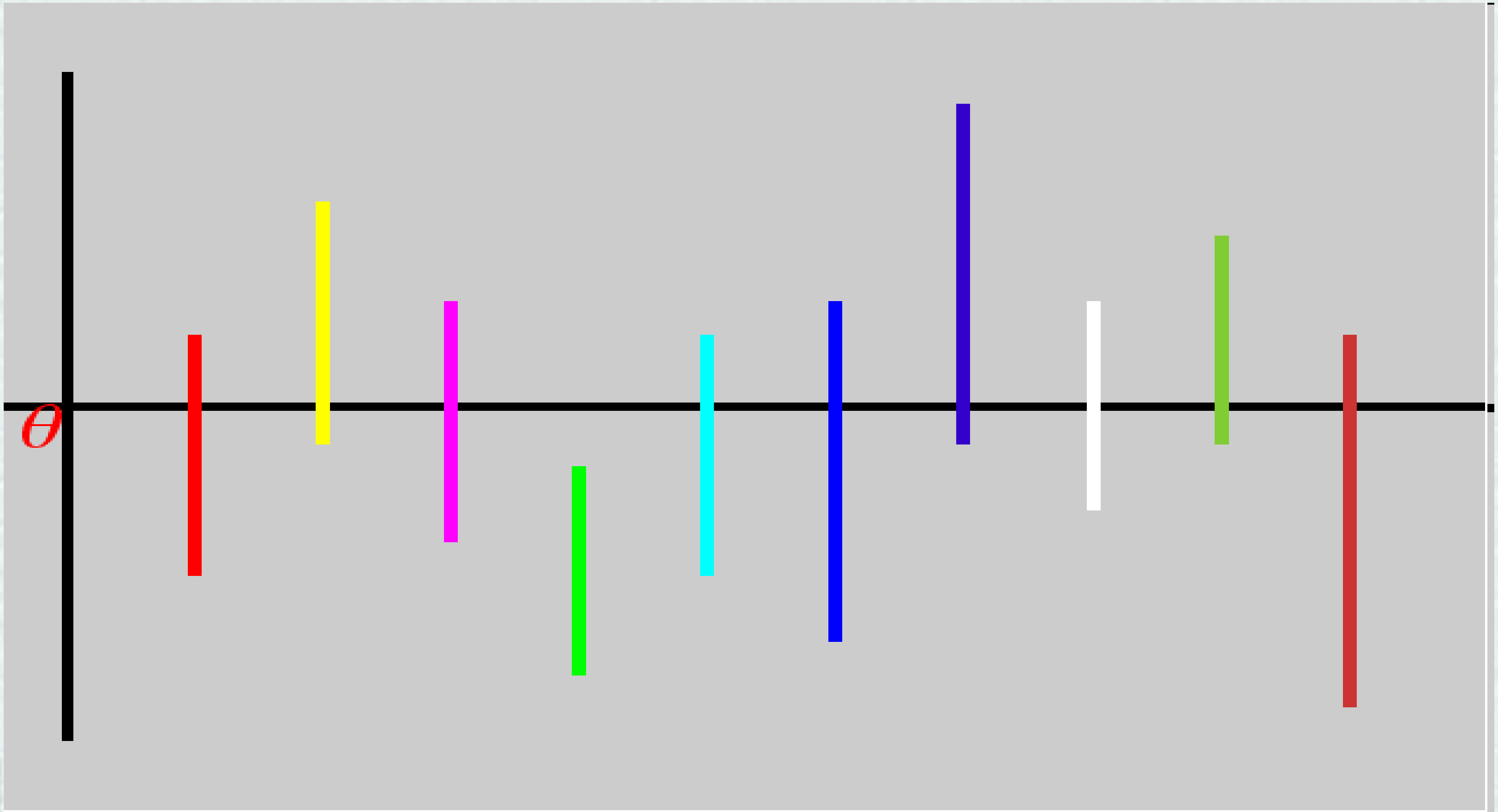
每个这样的区间或包含 $\theta$ 的真值或不包含 $\theta$ 的真值,

按伯努利大数定理, 在这样多的区间中,

包含$\theta$真值的约占$100(1-\alpha)\%$, 不包含的约占$100\alpha\%$.

例如　若 $\alpha = 0.01$, 反复抽样 1000 次,

则得到的 1000 个区间中不包含 $\theta$ 真值的约为10个.



## 2. 求置信区间的一般步骤(共3步)

(1) 寻求一个样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的函数：

$$Z = Z(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$$

其中仅包含待估参数 $\theta$，并且 $Z$ 的分布已知且不依赖于任何未知参数(包括 $\theta$).

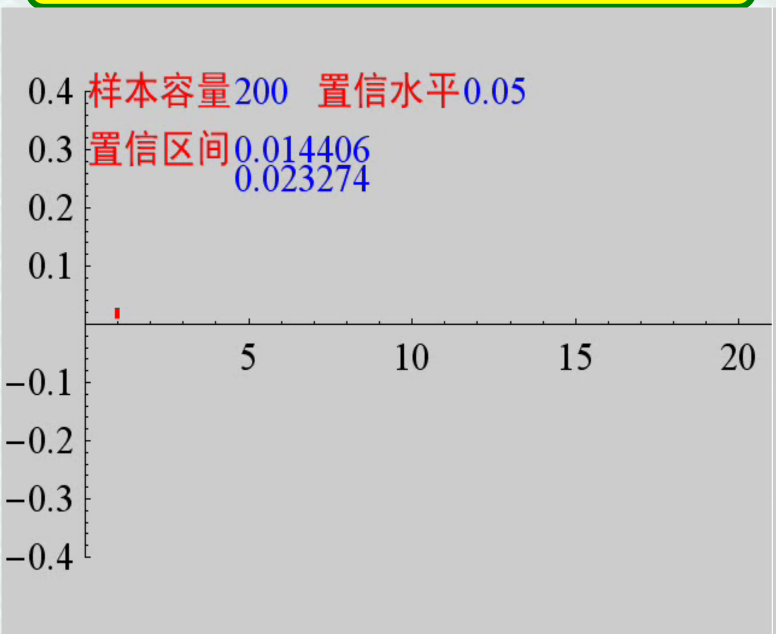
(2) 对于给定的置信度 $1-\alpha$，定出两个常数 $a, b$，使 $P\{a < Z(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b\} = 1-\alpha$.

(3) 若能从 $a < Z(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b$ 得到等价的不等式 $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$, 其中 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, $\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是统计量, 那么 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 就是 $\theta$ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

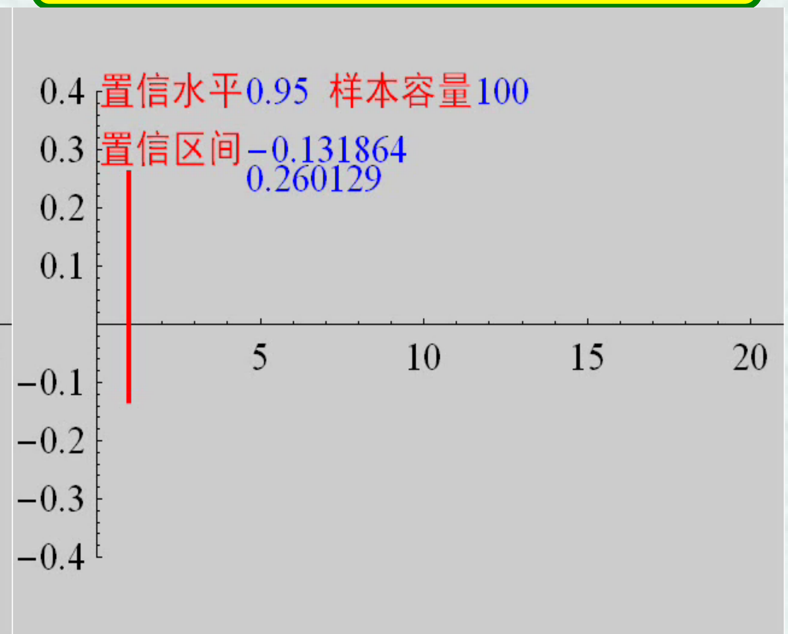
样本容量 $n$ 固定，置信水平 $1-\alpha$ 增大，置信区间长度增大，可信程度增大，区间估计精度降低.

置信水平 $1-\alpha$ 固定，样本容量 $n$ 增大，置信区间长度减小，可信程度不变，区间估计精度提高.

单击图形播放/暂停　ESC键退出




单击图形播放/暂停　ESC键退出



# 二、典型例题

**例1** 设总体 $X$ 在 $[0,\theta]$ 上服从均匀分布,其中 $\theta$ $(\theta > 0)$ 未知,$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体$X$的样本,给定 $\alpha$,求 $\theta$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

**解** 令 $X_h = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$,

由上节例4可知, $\dfrac{n+1}{n} X_h$ 是 $\theta$ 的无偏估计,

因为 $X_h$ 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \le x \le \theta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

考察包括待估参数$\theta$的随机变量 $Z=\dfrac{X_h}{\theta}$,

其概率密度为 $g(z)=\begin{cases} nz^{n-1}, & 0\le z\le 1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

对于给定的$\alpha$,可定出两个常数$a,b(0<a<b\le 1)$,

满足条件 $P\left\{a<\dfrac{X_h}{\theta}<b\right\}=1-\alpha$,

即 $1-\alpha=\int_a^b nz^{n-1}\mathrm{d}z=b^n-a^n$,

$\Rightarrow P\left\{\dfrac{X_h}{b}<\theta<\dfrac{X_h}{a}\right\}=1-\alpha$, $\left(\dfrac{X_h}{b},\dfrac{X_h}{a}\right)$为置信区间.

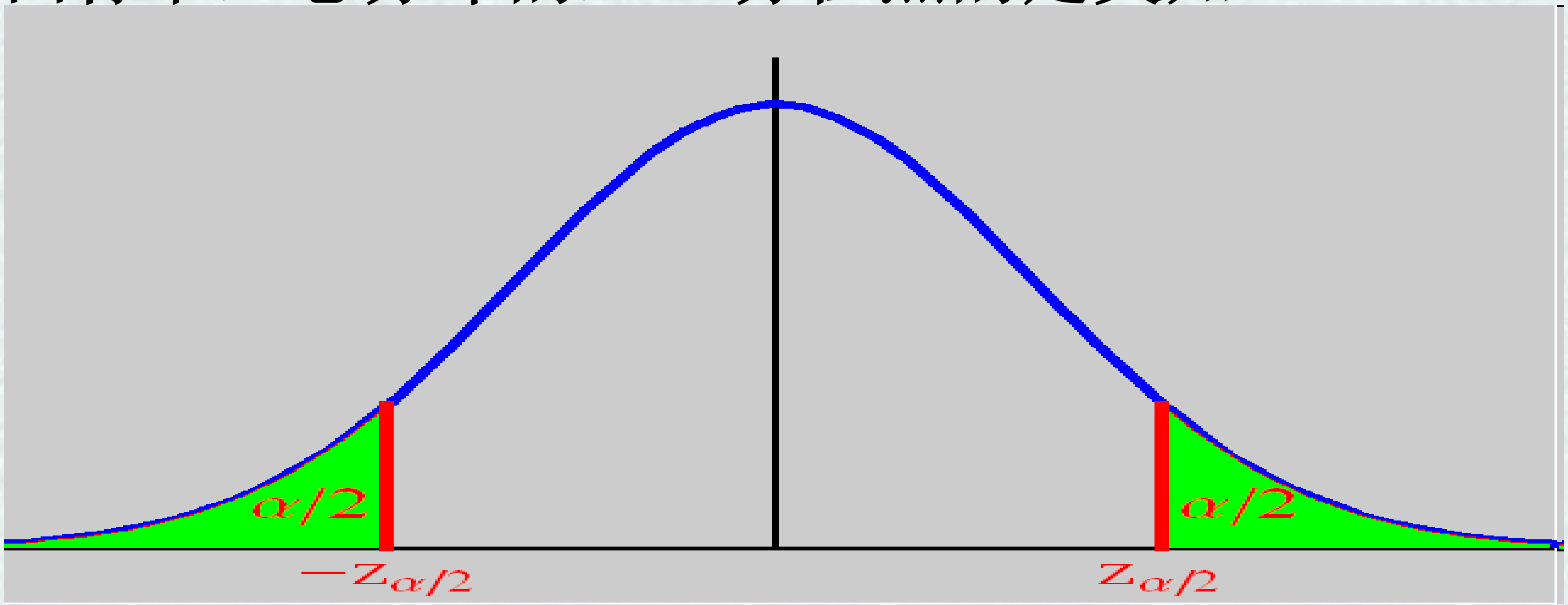
**例2** 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本,其中 $\sigma^2$ 为已知, $\mu$ 为未知,求 $\mu$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

**解** 因为 $\overline{X}$ 是 $\mu$ 的无偏估计,

$$\text{且 } U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1),$$

$\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 是不依赖于任何未知参数的,

由标准正态分布的上 $\alpha$ 分位点的定义知




$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$

即 $$P\left\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$

于是得 $\mu$ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right).$$

这样的置信区间常写成 $\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$.

其置信区间的长度为 $2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$.

**注意：置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是不唯一的.**

如果在例2中取 $n=16,\ \sigma=1,\ \alpha=0.05,$

查表可得 $z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96,$

得一个置信水平为0.95的置信区间 $\left(\overline{X}\pm\dfrac{1}{\sqrt{16}}\times 1.96\right).$

由一个样本值算得样本均值的观察值 $\overline{x}=5.20,$

则置信区间为 $(5.20\pm 0.49)$，即 $(4.71,\ 5.69).$

在例2中如果给定 $\alpha = 0.05$,

则又有 $P\left\{-z_{0.04} < \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{0.01}\right\} = 0.95$,

即 $P\{\overline{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01} < \mu < \overline{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}\} = 0.95$,

故 $\left(\overline{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01},\ \overline{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}\right)$也是$\mu$的置信水平为0.95的置信区间.

其置信区间的长度为$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.04} + z_{0.01})$.

比较两个置信区间的长度

$$L_1 = 2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025} = 3.92\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$L_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.04} + z_{0.01}) = 4.08\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

显然 $L_1 < L_2$. **置信区间短表示估计的精度高.**

**说明:** 对于概率密度的图形是单峰且关于纵坐标轴对称的情况, 易证取$a$和$b$关于原点对称时,能使置信区间长度最小.

**例3** 设某工件的长度 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,16)$, 今抽9件测量其长度, 得数据如下(单位:mm):

142, 138, 150, 165, 156, 148, 132, 135, 160.

试求参数 $\mu$ 的置信水平为 95% 的置信区间.

**解** 根据例2得$\mu$的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right),$$

由 $n=9,\sigma=4,\alpha=0.05,\ z_{0.025}=1.96,\ \overline{x}=147.333$知,

$\mu$的置信度为0.95的置信区间为 $(144.720,\ 149.946)$.

# 三、小结

点估计不能反映估计的精度, 故而本节引入了区间估计.

置信区间是一个随机区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$, 它覆盖未知参数具有预先给定的概率(置信水平), 即对于任意的$\theta \in \Theta$, 有 $P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} \geq 1 - \alpha$.

求置信区间的一般步骤(分三步).