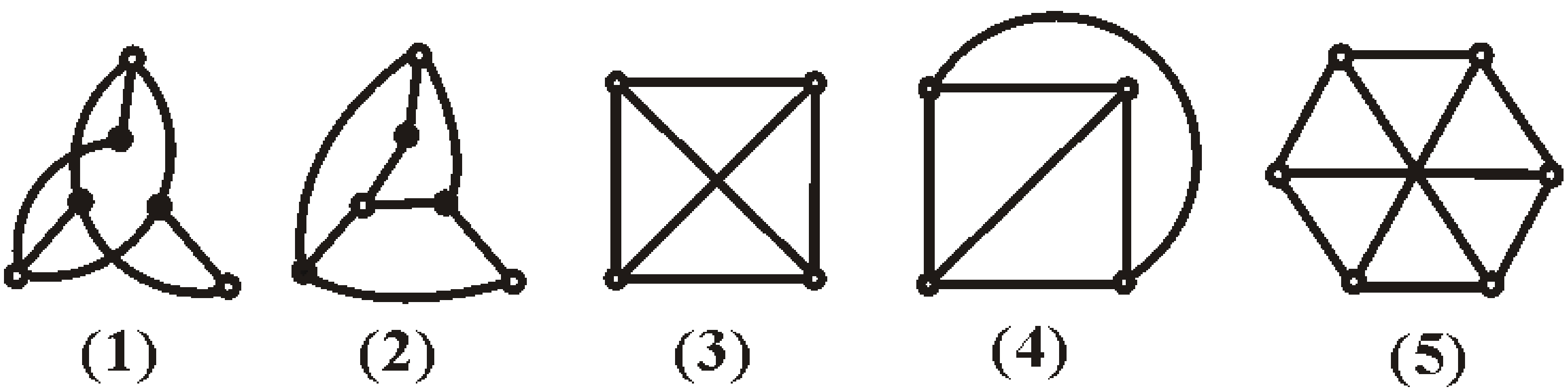
6.4 平面图

- 平面图与平面嵌入
- 平面图的面
- 极大平面图与极小非平面图
- 欧拉公式
- 平面图的对偶图
- 地图着色与四色定理

平面图和平面嵌入

定义 如果能将图G除顶点外边不相交地画在平面上，则称G是平面图. 这个画出的无边相交的图称作G的平面嵌入. 没有平面嵌入的图称作非平面图.

例如 下图中(1)~(4)是平面图，(2)是(1)的平面嵌入，(4)是(3)的平面嵌入. (5)是非平面图.



平面图和平面嵌入(续)

- 今后称一个图是平面图, 可以是指定义中的平面图, 又可以是指平面嵌入, 视当时的情况而定. 当讨论的问题与图的画法有关时, 是指平面嵌入.
- K_5和$K_{3,3}$是非平面图
- 设$G'\subseteq G$, 若G为平面图, 则G'也是平面图; 若G'为非平面图, 则G也是非平面图.
- $K_n(n\geq 5)$, $K_{n,m}(n,m\geq 3)$都是非平面图.
- 平行边与环不影响图的平面性.

平面图的面与次数

设G是一个平面嵌入

G的面: 由G的边将平面划分成的每一个区域

无限面(外部面): 面积无限的面, 用R_0表示

有限面(内部面): 面积有限的面, 用$R_1, R_2, \ldots, R_k$表示

面R_i的边界: 包围R_i的所有边构成的回路

面R_i的次数: R_i边界的长度，用$\deg(R_i)$表示

定理 平面图各面的次数之和等于边数的2倍.

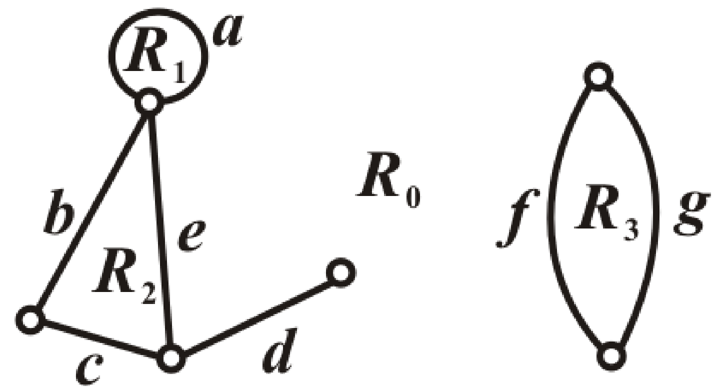
证 每条边可能在两个面的公共边界上，也可能只在一个面的边界上. 前者, 在每个面的边界上这条边只出现一次, 计算两次. 后者, 它在这个面的边界上出现2次, 也计算两次.

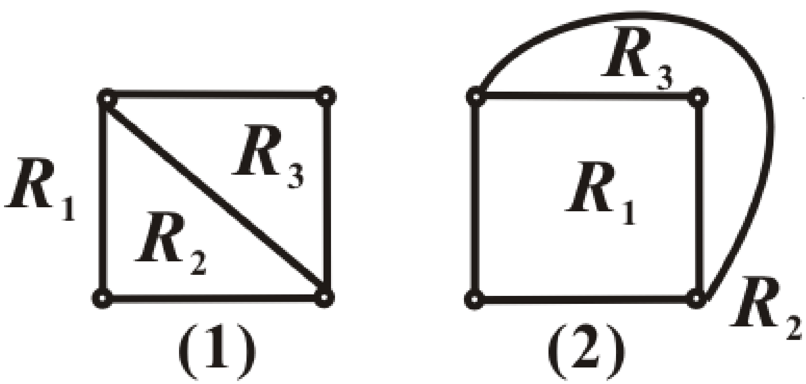
平面图的面与次数(续)

例1 右图有4个面, deg(R_1)=1,

deg(R_2)=3, deg(R_3)=2,

deg(R_0)=8.





例2 左边2个图是同一个平面图的平面嵌入. R_1在(1)中是外部面, 在(2)中是内部面; R_2在(1)中是内部面, 在(2)中是外部面. 其实, 在平面嵌入中可把任何面作为外部面.

极大平面图

定义 若G是简单平面图, 并且在任意两个不相邻的顶点之间加一条新边所得图为非平面图, 则称G为极大平面图.

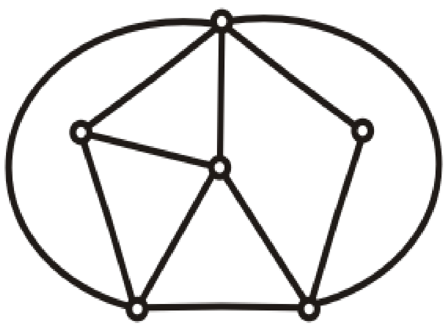
例如, K_5, $K_{3,3}$若删去一条边是极大平面图.
K_1, K_2, K_3, K_4都是极大平面图(它们已无不相邻顶点).

- 极大平面图必连通.
- 阶数大于等于3的极大平面图中不可能有割点和桥.
- 任何$n(n\geq 4)$阶极大平面图G均有$\delta(G)\geq 3$.

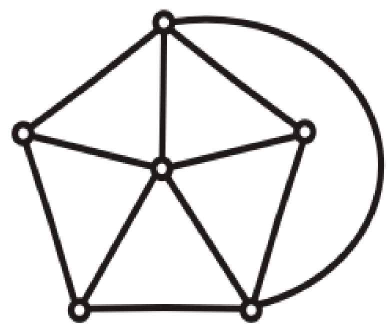
定理 $n(n\geq 3)$阶简单平面图是极大平面图当且仅当它连通且每个面的次数都为3.

实例

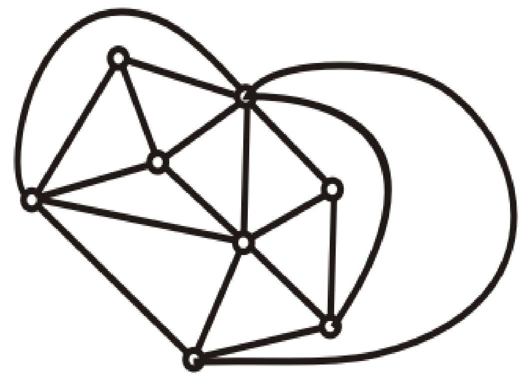
例 是否是极大平面图?



不是



不是



是

极小非平面图

定义 若G是非平面图, 并且任意删除一条边所得图都是平面图, 则称G为极小非平面图.

极小非平面图必为简单图

例如, K_5, $K_{3,3}$是极小非平面图

欧拉公式

定理 (欧拉公式) 设G为n阶m条边r个面的连通平面图, 则

$$n-m+r=2.$$

证 对边数m做归纳证明.

$m=0$, G为平凡图, 结论为真.

设$m=k(k\geq 0)$结论为真, $m=k+1$时分情况讨论如下:

(1) 若G中有一个1度顶点v, 则$G'=G-v$ 连通, 有n-1个顶点, k条边和r个面. 由归纳假设, $(n-1)-k+r=2$, 即$n-(k+1)+r=2$, 得证$m=k+1$时结论成立.

(2) 否则, G中必有圈. 删除一个圈上的一条边,记作G'. G' 连通, 有n个顶点,k条边和r-1个面. 由归纳假设, $n-k+(r-1)=2$, 即$n-(k+1)+r=2$, 得证$m=k+1$时结论也成立.

欧拉公式(续)

推论(欧拉公式的推广) 设G是有 p ($p\geq 2$) 个连通分支的平面图, 则

$$n - m + r = p + 1$$

证 设第 i 个连通分支有 n_i个顶点, m_i条边和 r_i个面. 对各连通分支用欧拉公式,

$$n_i - m_i + r_i = 2, \qquad i = 1, 2, \ldots, p$$

求和并注意 $r = r_1+\ldots+r_p+ p-1$, 即得

$$n - m + r = p + 1$$

平面图的性质

定理 设G为n阶m条边的连通平面图, 每个面的次数不小于l ($l\geq 3$), 则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

设G为有 p ($p\geq 2$) 个连通分支的平面图, 且每个面的次数不小于l ($l\geq 3$), 则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-p-1)$$

证 由各面次数之和等于边数的2倍及欧拉公式得

$$2m \geq lr = l\,(2+m-n)$$

可解得所需结论.

对 p ($p\geq 2$) 个连通分支的情况类似可证.

平面图的性质(续)

推论 K_5 和 $K_{3,3}$不是平面图.

证 用反证法, 假设它们是平面图,

则 K_5 : n=5, m=10, l=3

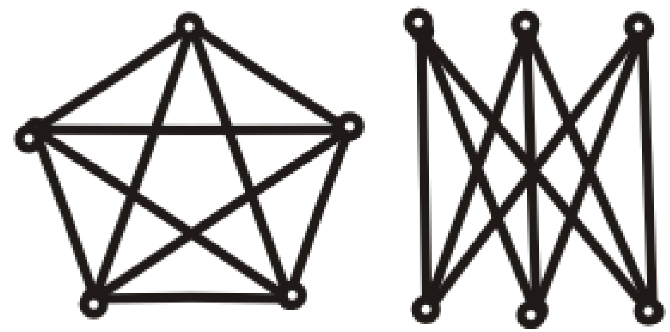
$$10 \le \frac{3}{3-2} \times (5-2) = 9$$

矛盾.

$K_{3,3}$: n=6, m=9, l=4

$$9 \le \frac{4}{4-2} \times (6-2) = 8$$

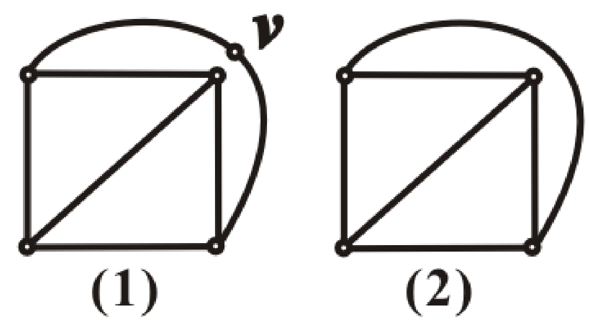
矛盾.



K_5 $K_{3,3}$

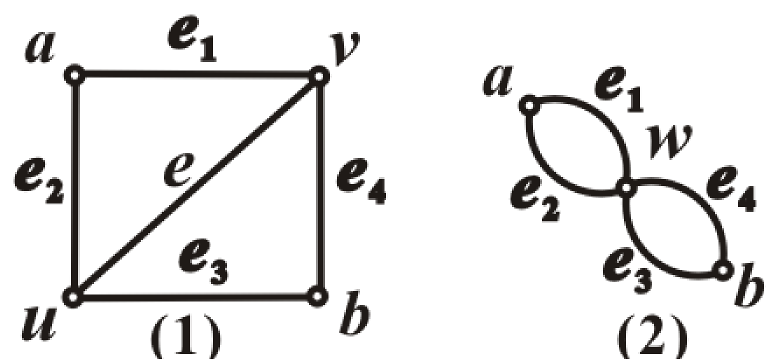
同胚与收缩

消去2度顶点v 如上图从(1)到(2)
插入2度顶点v 如上图从(2)到(1)



G_1与G_2同胚: G_1与G_2同构, 或经过反复插入、或消去2度顶点后同构

收缩边e 如下图从(1)到(2)



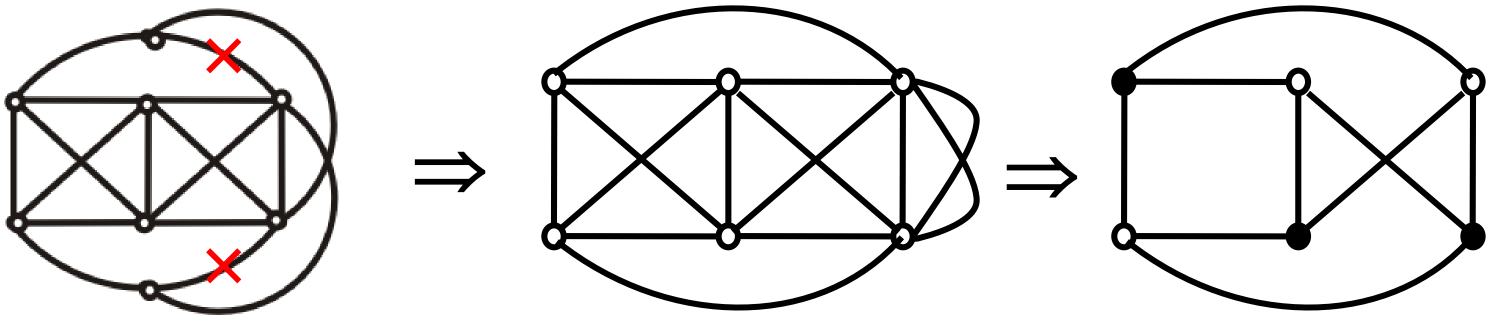
库拉图斯基定理

定理 G是平面图$\Leftrightarrow$$G$中不含与$K_5$同胚的子图, 也不含与$K_{3,3}$同胚的子图.

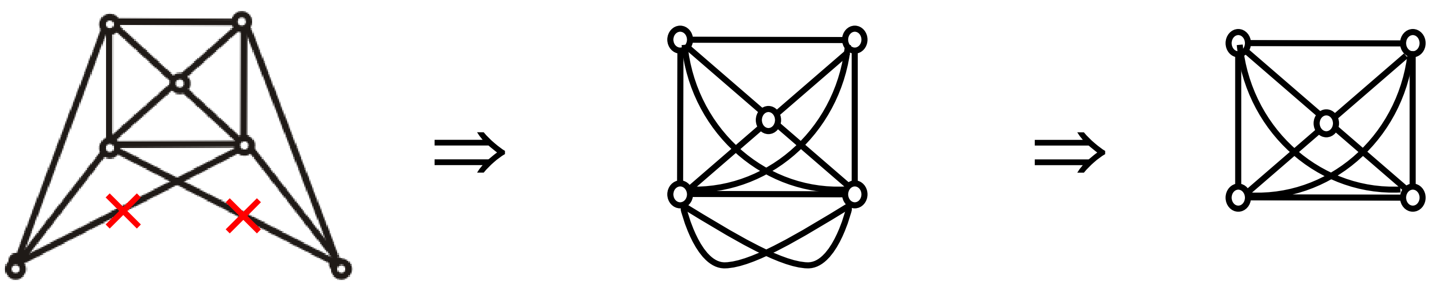
定理 G是平面图$\Leftrightarrow$$G$中无可收缩为$K_5$的子图, 也无可收缩为$K_{3,3}$的子图.

非平面图证明

例 证明下述2个图均为非平面图.



收缩2条边 取子图 $K_{3,3}$



收缩2条边 取子图 K_5

平面图的对偶图

定义 设平面图G, 有n个顶点, m条边和r个面, G的对偶图$G^*=\langle V^*,E^*\rangle$如下：

在G的每一个面R_i中任取一个点v_i^*作为G^*的顶点,

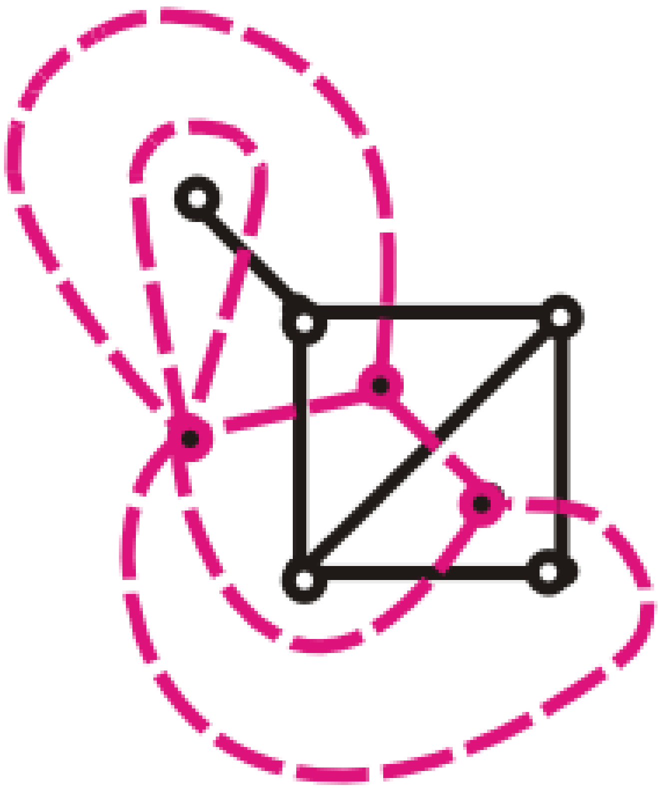
$$V^*=\{ v_i^* \mid i=1,2,\ldots,r \}.$$

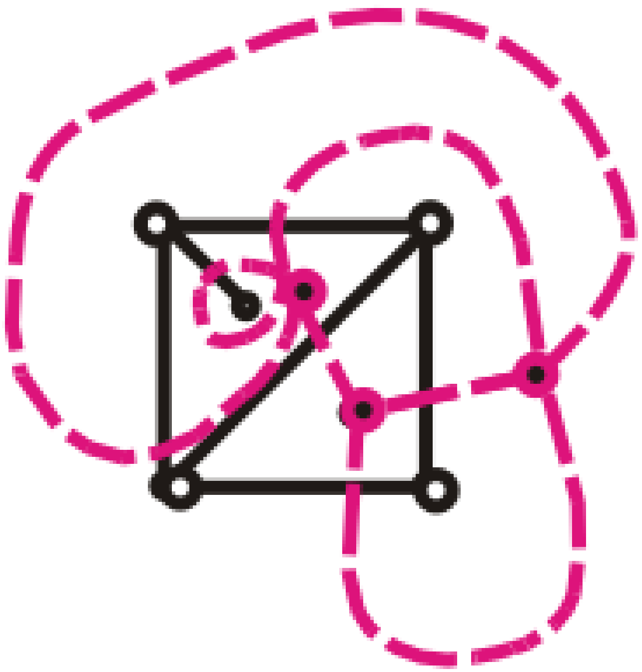
对G每一条边e_k, 若e_k在G的面R_i与R_j的公共边界上, 则作边$e_k^*=(v_i^*,v_j^*)$, 且与e_k相交; 若e_k为G中的桥且在面R_i的边界上, 则作环$e_k^*=(v_i^*,v_i^*)$.

$$E^*=\{ e_k^* \mid k=1,2, \ldots,m \}.$$

平面图的对偶图的实例

例 黑色实线为原平面图, 红色虚线为其对偶图





平面图的对偶图的性质

性质：

- 对偶图是平面图，而且是平面嵌入.
- 对偶图是连通图
- 若边e为G中的环，则G^*与e对应的边e^*为桥；若e为桥，则G^*中与e对应的边e^*为环.
- 同构的平面图的对偶图不一定同构.

  上页两个平面图同构, 它们的对偶图不同构.

地图着色

地图: 连通无桥平面图的平面嵌入, 每一个面是一个国家.若两个国家有公共边界,则称它们是相邻的.

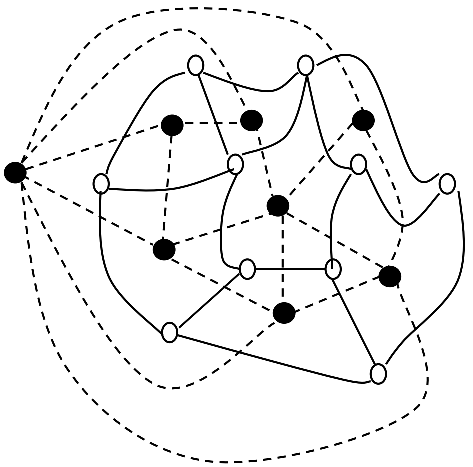
地图着色(面着色): 对地图的每个国家涂一种颜色, 使相邻的国家涂不同的颜色.

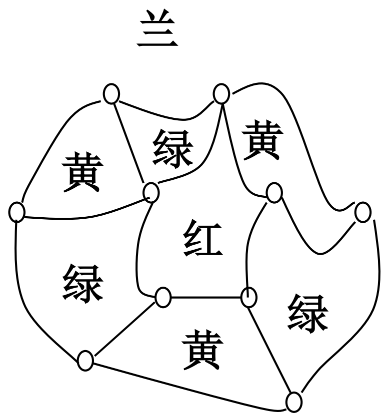
地图着色问题: 用尽可能少的颜色给地图着色.

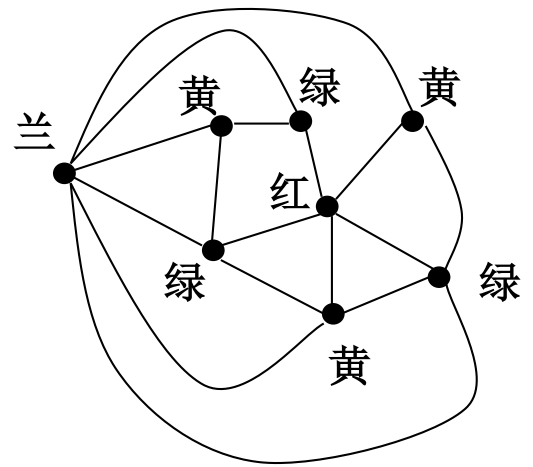
地图着色可以转化成平面图的点着色. 当G中无桥时, G^*中无环. G的面与G^*的顶点对应, 且G的两个面相邻当且仅当G^*对应的两个顶点相邻, 从而G的面着色等同于G^*的点着色.

地图着色与平面图的点着色

例







四色定理

四色猜想(100多年前): 任何地图都可以用4种颜色着色, 即任何平面图都是4-可着色的.

1890年希伍德证明五色定理: 任何平面图都是5-可着色的.

1976年美国数学家阿佩尔和黑肯证明, 如果四色猜想不成立, 则存在一个反例, 这个反例大约有2000种可能(后来有人简化到600多种), 他们用计算机分析了所有这些可能, 都没有导致反例.

四色定理 任何平面图都是4-可着色的.