2009-2010

中国矿业大学(北京)

《高等数学A2》试卷(A卷)

得分：________

题号	一	二	三	四	五	六
得分						
阅卷人						

学院： 专业年级： 姓名： 学号：

装 订 线 密 封 线

一、填空题（每小题3分，共21分）

1．设$\mathbf{a}=(2,1,-1)$，$\mathbf{b}=(1,-1,2)$，则$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=$ $\underline{\mathbf{i}-5\mathbf{j}-3\mathbf{k}}$。

2．$\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{tan(xy)}{y}=$ $\underline{\quad 2 \quad}$

3．设$z=x^{y+1}\ (x>0,x\neq 1)$，则$dz=$ $\underline{x^{y}[(y+1)dx+x\ln x dy]}$

4．设$z=f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，

则$\mathbf{grad}(0,0,0)=$ $\underline{3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-6\mathbf{k}}$

5．设$f(x,y)$为连续函数，若交换积分次序，则$\int_0^2 dx\int_{x^2-2x}^{\sqrt{2x}}f(x,y)dy=$

$\underline{\int_{-1}^{0}dy\int_{1-\sqrt{y+1}}^{1+\sqrt{y+1}}f(x,y)dx+\int_0^2 dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{2}f(x,y)dx}$

6. 二元函数$f(x,y)=x^3(2+y^2)+y\ln y$在点$\underline{\left(0,\dfrac{1}{e}\right)}$处取得极$\underline{\quad 小 \quad}$值，其值为

$\underline{-\dfrac{1}{e}}$

7. 设函数$f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$的傅立叶级数展开式为

$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n cos\,nx+b_n sin\,nx)$，则其中系数$b_3=$ $\underline{\dfrac{2}{3}\pi}$ 。

二、计算下列各题（每小题 8 分，共 16 分）

1. 求过点 $M(-1,0,4)$ 且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线方程。

解:设所求方程为: $\frac{x+1}{m}=\frac{y-0}{n}=\frac{z-4}{p}$

所求直线平行于平面 $3x-4y+z-10=0$, 故有 $3m-4n+p=0$ (1)

又所求直线与 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交, 故有:

$$\begin{vmatrix} -1-(-1) & 3-0 & 0-4 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0$$

即: $10m-4n-3p=0$ (2)

联立(1)(2)式可得 $\frac{16}{m}=\frac{19}{n}=\frac{28}{p}$, 因此所求直线方程为: $\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$

2. 设函数 $z=z(x,y)$，由方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数, 且 $F'\neq 0$,

求 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$

解: $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_Z'}=\frac{F_1'\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F_2'\left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F_2'\cdot\frac{1}{x}}=\frac{F_1'\cdot\frac{y}{x}+F_2'\cdot\frac{z}{x}}{F_2'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_Z'}=-\frac{F_1'\cdot\frac{1}{x}}{F_2'\cdot\frac{1}{x}}=-\frac{F_1'}{F_2'}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yF_1'+zF_2'}{F_2'}-\frac{yF_1'}{F_2'}=\frac{F_2'\cdot z}{F_2'}=z$$

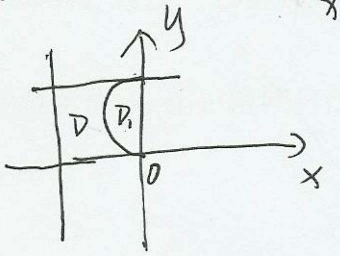
三、计算题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 计算二重积分 $\iint\limits_{D} y dxdy$，其中 D 是由直线 $x=-2$，$y=0$，$y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域。（答案 272）

$x^2+y^2=2y$

$r^2=2r\sin\theta$

$r=2\sin\theta$



解：$\iint\limits_{D} y dxdy = \iint\limits_{D\cup D_1} y dxdy - \iint\limits_{D_1} y dxdy$

而 $\iint\limits_{D\cup D_1} y dxdy = \int_{-2}^{0} dx \int_{0}^{2} y dy = 4$

$$\iint\limits_{D_1} y dxdy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_{0}^{2\sin\theta} \rho\sin\theta\cdot\rho d\rho$$

$$= \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^4\theta d\theta \overset{t=\pi-\theta}{=} \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^4 t dt = \frac{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

2. 计算曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 所围立体的体积和表面积。

解：$V=\iiint\limits_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi \int_0^a r^2 dr = 2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{a^3}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi a^3$

$S=S_1+S_2$

$$=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dxdy$$

$x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$

$$+\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy+\iint\limits_{D}\sqrt{2}\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-r^2}}\,rdr+\sqrt{2}\pi\frac{a^2}{2}$$

$$=(2-\sqrt{2})\pi a^2+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^2$$

$$=\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi a^2$$

学院：　专业年级：　姓名：　学号：

装　订　线　密　封　线

四、计算题（每小题 10 分，共 20 分）

1．计算 $\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz$，其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域。

解：利用直角坐标计算，由于

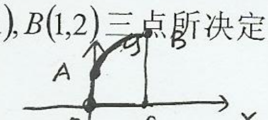
$$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2},0\le y\le\sqrt{1-x^2},0\le x\le 1\right\}$$

故 $\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz=\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz$

$$=\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\cdot\frac{1-x^2-y^2}{2}dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\left(1-x^2\right)-\frac{y^2}{4}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{8}\int_0^1 x\left(1-x^2\right)^2dx=\frac{1}{48}$$

2．计算 $\int_L\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy$，其中 L 为过 $O(0,0),A(0,1),B(1,2)$ 三点所决定的圆周的一部分圆弧。



解：$P=e^y+x,Q=xe^y-2y$，故 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在全平面成立，所给线积分在全平面内与路径无关。既然线积分与路径无关，只与起点和终点有关，因此，可选择特殊的容易计算线积分的路径来求积分，选平行于坐标轴的折线 OC 和 CB。

线段 OC 的方程为 $y=0$，从而 $dy=0$，x 从 0 变到 1，故

$$\int_{OC}\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy=\int_0^1\left(e^0+x\right)dx=\frac{3}{2}$$

线段 CB 的方程为 $x=1$，从而 $dx=0$，y 从 0 变到 2，故

$$\int_{CB}\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy=\int_0^2\left(e^y-2y\right)dy=\left(e^y-y^2\right)_0^2=e^2-5$$

因此

$$\int_L\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy=\int_{OC}\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy+\int_{CB}\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy$$

$$=\frac{3}{2}+e^2-5=e^2-\frac{7}{2}$$

学号：

姓名：

专业年级：

学院：

装 订 线

密 封 线

五、计算题（每小题 8 分，共 16 分）

1、在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短。

解:设 $P(x,y)$ 为椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上任意一点,则 P 到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离为

$d=\dfrac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}$,求 d 的最小值点即求 d^2 的最小值点,作拉格朗日函数

$$L(x,y)=\frac{1}{13}(2x+3y-6)^2+\lambda\left(x^2+4y^2-4\right)$$

$$令\begin{cases} L_x=\dfrac{4}{13}(2x+3y-6)+2\lambda x=0 \\ L_y=\dfrac{6}{13}(2x+3y-6)+8\lambda x=0 \end{cases}$$

由此得 $y=\dfrac{3}{8}x$,代入 $x^2+4y^2-4=0$,求得 $x_1=\dfrac{8}{5},y_1=\dfrac{3}{5};x_2=-\dfrac{8}{5},y_2=-\dfrac{3}{5}$

于是 $d\big|_{(x_1,y_1)}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$，$d\big|_{(x_2,y_2)}=\dfrac{11}{\sqrt{13}}$

2、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数。

解:由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$,得幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛半径为 $R=1$

当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$,由交错级数审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛,

故幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域为 $[-1,1]$.

令 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=S(x)$,则 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=xS_1(x)$,其中

$S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$,而 $S_1'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\dfrac{1}{1+x^2}$，$S_1(0)=0$

所以 $S_1(x)=\int_0^x S_1'(x)dx=\arctan x$，故 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=xS_1(x)=x\arctan x$

六、证明题（7 分）

设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在，但不可微分。

证明：令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，则当 $(x,y)\to(0,0)$ 时 $\rho\to 0$，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{\rho^3}=\lim_{\rho\to 0}\rho\cos^2\theta\sin^2\theta=0=f(0,0)$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续。

$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\leq\dfrac{1}{2^{\frac{3}{2}}|xy|^{\frac{3}{2}}}$

$x^2y^2\leq\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$

（解法二：由于 $2|xy|\leq x^2+y^2$，所以 $0\leq f(x,y)\leq\dfrac{1}{4}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，因此 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续。）

$$f_x(0,0)=\frac{d}{dx}f(x,0)\Big|_{x=0}=0,\ f_y(0,0)=\frac{d}{dy}f(0,y)\Big|_{y=0}=0$$

因此 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数存在。

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\dfrac{\Delta x^2\Delta y^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}-0}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^2}$$

由于 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\dfrac{k^2\Delta x^4}{(1+k^2)^2\Delta x^4}=\dfrac{k^2}{(1+k^2)^2}$，$K$ 不同，上述极限则不同，因此上述极限不存在，所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微分。