第四章　随机变量的数字特征
习　题　课

一、重点与难点

二、主要内容

三、典型例题

一、重点与难点

1.重点

数学期望的性质和计算

方差的性质和计算

相关系数的性质和计算

2.难点

数字特征的计算

二、主要内容

二维随机变量的数学期望

数学期望

离散型

连续型

性质

随机变量函数的数学期望

方差

定义

计算

性质

协方差与相关系数

定义

协方差的性质

相关系数定理

离散型随机变量的数学期望

设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1,2,\cdots.$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛,

则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量 X 的**数学期望**,

记为 $E(X)$, 即 $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$

连续型随机变量的数学期望

X 是连续型随机变量,它的概率密度为 $f(x)$,若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛,则称此积分值为连续型随机变量 X 的数学期望,记为 $E(X)$,

即 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x.$

随机变量函数的数学期望

离散型随机变量函数的数学期望为

若 $Y = g(X)$, 且 $P\{X = x_k\} = p_k$, $(k = 1, 2, \cdots)$

则有 $$E(g(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k .$$

若 X 是连续型的, 它的分布密度为 $f(x)$,

则有 $$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x .$$

数学期望的性质

1. 设C是常数，则有$E(C)=C$.

2. 设X是一个随机变量，C是常数，则有

$$E(CX)=CE(X).$$

3. 设X, Y是两个随机变量，则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

4. 设X, Y是相互独立的随机变量，则有

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

二维随机变量的数学期望

设 (X,Y) 为二维随机变量，若 $E(X),E(Y)$ 都存在，则其期望值定义为

$$E(X)=\begin{cases}\sum_i\sum_j x_i p_{ij}, & (X,Y)\text{的概率分布为 } p_{ij};\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & (X,Y)\text{的密度为} f(x,y).\end{cases}$$

同理可得

$$E(Y)=\begin{cases}\sum_i\sum_j y_i p_{ij}, & (X,Y)\text{的概率分布为 } p_{ij};\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & (X,Y)\text{的密度为} f(x,y).\end{cases}$$

1. 若 X,Y 为离散型随机变量, $g(x,y)$ 是二元函数,

则 $E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$,

当 (X,Y) 的联合概率分布为 p_{ij}.

2. 若 X,Y 为连续型随机变量, $g(x,y)$ 是二元函数,

则 $E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

当 (X,Y) 的联合分布密度为 $f(x,y)$.

方差的定义

设 X 是一个随机变量，若 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在，则称 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 是 X 的方差，记作

$$D(X) \quad 或 \quad \mathrm{Var}(X),$$

即 $$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\{[X-E(X)]^2\},$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为标准差或均方差　，记为 $\sigma(X)$.

方差的计算

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

离散型随机变量的方差

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

其中 $P\{X=x_k\}=p_k,\ k=1,2,\cdots$ 是 X 的分布律.

连续型随机变量的方差

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $f(x)$ 为概率密度.

方差的性质

1. 设 C 是常数，则有 $D(C)=0.$

2. 设 X 是一个随机变量, C 是常数，则有

$$D(CX)=C^2D(X).$$

3. 设 X,Y 相互独立, $D(X), D(Y)$ 存在,则

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$$

4. $D(X)=0$的充要条件是 X 以概率 1 取常数 C,即

$$P\{X=C\}=1.$$

协方差与相关系数的定义

$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$称为随机变量 X 与 Y 的协方差,记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$,

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

称 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$ 为随机变量 X 与 Y 的相关系数.

协方差的性质

1. $\operatorname{Cov}(X,Y)=\operatorname{Cov}(Y,X)$.

2. $\operatorname{Cov}(aX,bY)=ab\operatorname{Cov}(X,Y)$ （a,b 为常数）

3. $\operatorname{Cov}(X_1+X_2,Y)=\operatorname{Cov}(X_1,Y)+\operatorname{Cov}(X_2,Y)$.

相关系数定理

(1) $|\rho_{XY}| \le 1.$

(2) $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是：存在常数 a, b 使

$$P\{Y = a + bX\} = 1.$$

三、典型例题

例1 设 X 服从几何分布,它的分布律为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots,$$

求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

解 $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}p$ (其中 $q=1-p$)

$$=p\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p},$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot q^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot q^{k-1}$$

$$=\frac{p(1+q)}{(1-q)^3}=\frac{1+q}{p^2},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\frac{1+q}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}.$$

例2 从数字0, 1, 2, …, n中任取两个不同的数字，求这两个数字之差的绝对值的数学期望.

解 设 X 为所选的两个数字之差 的绝对值，

则 X 的所有可能取值为 $1, 2, 3, \cdots, n,$

$$P\{X=1\}=n\Big/\binom{n+1}{2},\ P\{X=2\}=(n-1)\Big/\binom{n+1}{2},$$

一般的 $P\{X=k\}=(n-k+1)\Big/\binom{n+1}{2},\ k=1,2,\cdots,n.$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^{n}k\cdot(n-k+1)\Big/\binom{n+1}{2}=\frac{n+2}{3}.$$

例3 设随机变量 X 取非负整数值 $n \geq 0$ 的概率为 $p_n = \dfrac{AB^n}{n!}$,已知 $E(X) = a$,求 A 与 B 的值.

解 因为 p_n 是 X 的分布列,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\{X = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} A \cdot \frac{B^n}{n!} = Ae^B = 1, \quad 得 A = e^{-B},$$

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} nA \cdot \frac{B^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A \cdot B^n}{(n-1)!} = ABe^B = a,$$

因此 $A = e^{-a}, \quad B = a.$

例4 某银行开展定期定额有奖储蓄, 定期一年, 定额60元, 按规定10000个户头中, 头等奖一个, 奖金500元; 二等奖10个, 各奖100元; 三等奖100个, 各奖10元; 四等奖1000个, 各奖2元. 某人买了五个户头, 他期望得奖多少元?

解 因为任何一个户头获奖都是等可能的, 先计算一个户头的得奖金数 X 的期望.

分布列为

X	500	100	10	2	0
p	$\dfrac{1}{10^4}$	$\dfrac{1}{10^3}$	$\dfrac{1}{10^2}$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{8889}{10^4}$

X 的数学期望为

$$E(X)=\frac{1}{10^4}\times 500+\frac{1}{10^3}\times 100+\frac{1}{10^2}\times 10+\frac{1}{10}\times 2$$

$$=0.45\,(\text{元}),$$

买五个户头的期望得奖金额为

$$E(5X)=5E(X)=5\times 0.45=2.25\,(\text{元}).$$

例5 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} c(1-x^2)^{\alpha}, & -1<\alpha<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (x<0)$$

求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

解 因为 $f(x)$ 是偶函数,

所以 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} cx(1-x^2)^{\alpha}\mathrm{d}x=0,$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=E(X^2)$$

$$= \int_{-1}^{1} cx^2(1-x^2)^{\alpha}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{c}{2(\alpha+1)} x(1-x^2)^{\alpha+1}\Big|_{-1}^{1} + \frac{c}{2(\alpha+1)} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\alpha+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2(\alpha+1)} \boxed{\int_{-1}^{1} c(1-x^2)^{\alpha}\,\mathrm{d}x} - \frac{1}{2(\alpha+1)} \boxed{\int_{-1}^{1} cx^2(1-x^2)^{\alpha}\,\mathrm{d}x}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = D(X)$$

于是 $D(X) = \dfrac{1}{2(\alpha+1)} - \dfrac{1}{2(\alpha+1)} D(X),$

故 $D(X) = \dfrac{1}{2\alpha+3}.$

例6 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$,

求 $E[\min(|X|,1)]$.

解 $E[\min(|X|,1)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\min(|x|,1)f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{|x|<1}|x|f(x)\mathrm{d}x+\int_{|x|\geq 1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{|x|\geq 1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\ln 2+\frac{1}{2}.$$

例7 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度

函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin(x+y), & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

且 $Z=\cos(X+Y)$, 求 $E(Z)$ 和 $D(Z)$.

解 $E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos(x+y)\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}[\cos 2x-\cos(\pi+2x)]\mathrm{d}x=0,$$

$$D(Z)=E(Z^2)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos^2(x+y)\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos^3 x-\cos^3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{9}.$$

例8 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度

函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{6}{7}\left(x^2+\dfrac{1}{2}xy\right), & 0<x<1,\ 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求 (X,Y) 的协方差矩阵及相关系数.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}x\left(x^2+\frac{1}{2}xy\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{12}{7}x^3+\frac{6}{7}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5}{7},$$

$$E(X^2)=\int_0^1\int_0^2 \frac{6}{7}x^2(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{39}{70},$$

故 $D(X)=\dfrac{39}{70}-\left(\dfrac{5}{7}\right)^2=\dfrac{23}{490},$

因为$E(Y)=\displaystyle\int_0^1\int_0^2 \frac{6}{7}y(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{8}{7},$

$$E(Y^2)=\int_0^1\int_0^2 \frac{6}{7}y^2(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{34}{21},$$

故 $D(Y)=\dfrac{34}{21}-\left(\dfrac{8}{7}\right)^2=\dfrac{46}{147},$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^2 \frac{6}{7}xy(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{17}{21},$$

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$$=\frac{17}{21}-\frac{5}{7}\times\frac{8}{7}=-\frac{1}{147},$$

于是 (X,Y) 的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix} \frac{23}{490} & -\frac{1}{147} \\ -\frac{1}{147} & \frac{46}{147} \end{pmatrix}.$

X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\dfrac{\sqrt{15}}{69}.$