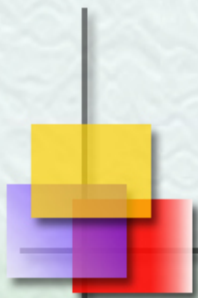


第六节 $(0-1)$ 分布参数的区间估计

一、置信区间公式

二、典型例题



一、置信区间公式

设有一容量 $n > 50$ 的大样本, 它来自 $(0-1)$ 分布的总体 X , X 的分布律为 $f(x; p) = p^x (1-p)^{1-x}$, $x = 0, 1$, 其中 p 为未知参数, 则 p 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right),$$

其中 $a = n + z_{\alpha/2}^2$, $b = -(2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2)$, $c = n\bar{X}^2$.



推导过程如下:

因为(0-1)分布的均值和方差分别为

$$\mu = p, \quad \sigma^2 = p(1-p),$$

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是一个样本, 因为容量 n 较大,

由**中心极限定理**知
$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

近似地服从 $N(0,1)$ 分布,

$$P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}\right\} \approx 1 - \alpha,$$



不等式 $-z_{\alpha/2} < \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}$

等价于 $(n + z_{\alpha/2}^2)p^2 - (2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2)p + n\bar{X}^2 < 0$,

令 $p_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $p_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

其中 $a = n + z_{\alpha/2}^2$, $b = -(2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2)$, $c = n\bar{X}^2$.

则 p 的近似置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间是

(p_1, p_2) .



二、典型例题

例1 设从一大批产品的100个样品中,得一级品60个,求这批产品的一级品率 p 的置信水平为0.95的置信区间.

解 一级品率 p 是(0-1)分布的参数,

$$n = 100, \quad \bar{x} = \frac{60}{100} = 0.6,$$

$$1 - \alpha = 0.95, \quad z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96,$$

$$\text{则 } a = n + z_{\alpha/2}^2 = 103.84,$$



$$b = -(2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2) = -(2n\bar{x} + z_{\alpha/2}^2) = -123.84,$$

$$c = n\bar{X}^2 = n\bar{x}^2 = 36,$$

$$\text{于是 } p_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.50,$$

$$p_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.69,$$

p 的置信水平为0.95的置信区间为 (0.50, 0.69).



例2 设从一大批产品的120个样品中,得次品9个,求这批产品的次品率 p 的置信水平为0.90的置信区间.

解 $n = 120, \bar{x} = \frac{9}{120} = 0.075, 1 - \alpha = 0.90,$

则 $a = n + z_{\alpha/2}^2 = 122.71,$

$b = -(2n\bar{x} + z_{\alpha/2}^2) = -(2 \times 120 \times 0.075 + 1.645^2) = -24.31,$

$c = -n\bar{x}^2 = -120 \times 0.075^2 = -6.75,$



$$\text{于是 } p_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.056,$$

$$p_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.143,$$

p 的置信水平为0.90的置信区间为 (0.056, 0.143).

