第七章　　参数估计
习　题　课

一、重点与难点

二、主要内容

三、典型例题

一、重点与难点

1.重点

最大似然估计.
一个正态总体参数的区间估计.

2.难点

显著性水平 α 与置信区间.

二、主要内容

矩估计量

最大似然估计量

似然函数

估计量的评选

无偏性

有效性

相合性

正态总体均值方差的置信区间与上下限

最大似然估计的性质

求置信区间的步骤

截尾寿命试验

截尾样本的最大似然估计

置信区间和上下限

矩估计量

用样本矩来估计总体矩, 用样本矩的连续函数来估计总体矩的连续函数, 这种估计法称为**矩估计法**.

矩估计法的具体做法：令 $\mu_l = A_l, \quad l = 1, 2, \cdots, k,$

这是一个包含 k 个未知参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的方程组,

解出其中 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$.

用方程组的解 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$ 分别作为 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的估计量, 这个估计量称为矩估计量.

最大似然估计量

得到样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 时，选取使似然函数 $L(\theta)$ 取得最大值的 $\hat{\theta}$ 作为未知参数 θ 的估计值，

即 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \hat{\theta}) = \max\limits_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$.

(其中 Θ 是 θ 可能的取值范围)

这样得到的 $\hat{\theta}$ 与样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有关，记为

$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, **参数 θ 的最大似然估计值,**

$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ **参数 θ 的最大似然估计量.**

最大似然估计的性质

设 θ 的函数 $u = u(\theta), \theta \in \Theta$ 具有单值反函数 $\theta = \theta(u), u \in U$, 又设 $\hat{\theta}$ 是 X 的概率密度函数 $f(x;\theta)$ (f 形式已知) 中的参数 θ 的最大似然估计, 则 $\hat{u} = u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计 .

似然函数

1. 设总体 X 属离散型

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta),\quad \theta\in\Theta$$

$L(\theta)$称为样本似然函数.

2. 设总体 X属连续型

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta),$$

$L(\theta)$称为样本的似然函数.

正态总体均值方差的置信区间与上下限

单个正态总体

1. 均值 μ 的置信区间

(1) σ^2为已知,

μ的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间 $\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$.

(2) σ^2为未知,

μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间 $\left(\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$.

2.方差σ^2的置信区间

μ未知, 方差σ^2的置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

标准差σ的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right).$$

两个正态总体

1.两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

(1) σ_1^2 和 σ_2^2 均为已知,

$\mu_1-\mu_2$ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

(2) σ_1^2 和 σ_2^2 均为未知,

$\mu_1-\mu_2$ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的近似置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^{\ 2}}{n_1}+\frac{S_2^{\ 2}}{n_2}}\right).$$

(3) $\sigma_1^{\ 2}=\sigma_2^{\ 2}=\sigma^2$, 但 σ^2 为未知

$\mu_1-\mu_2$的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

其中 $S_w^{\ 2}=\dfrac{(n_1-1)S_1^{\ 2}+(n_2-1)S_2^{\ 2}}{n_1+n_2-2}$, $\quad S_w=\sqrt{S_w^{\ 2}}$.

2. 两个总体方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

仅讨论总体均值 μ_1, μ_2 为未知的情况.

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right).$$

正态总体均值与方差的单侧置信区间

设正态总体 X 的均值是μ, 方差是σ^2 (均为未知),

μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1),+\infty\right),$$

μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信下限

$$\underline{\mu}=\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1).$$

σ^2 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(0,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right),$$

σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限

$$\overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}.$$

$(0-1)$分布的置信区间

设有一容量 $n>50$ 的大样本,它来自$(0-1)$分布的总体 X, X 的分布律为 $f(x;p)=p^x(1-p)^{1-x}$, $x=0,1,$ 其中 p为未知参数,则 p的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right),$$

其中 $a=n+z_{\alpha/2}^2$, $b=-(2n\overline{X}+z_{\alpha/2}^2)$, $c=n\overline{X}^2$.

无偏性

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，$\theta \in \Theta$ 是包含在总体 X 的分布中的待估参数，(Θ 是 θ 的取值范围)

若估计量 $\hat{\theta} = \theta(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的数学期望 $E(\hat{\theta})$ 存在，且对于任意 $\theta \in \Theta$ 有 $E(\hat{\theta}) = \theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

有效性

比较参数 θ 的两个无偏估计量 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$, 如果在样本容量 n 相同的情况下, $\hat{\theta}_1$ 的观察值在真值 θ 的附近较 $\hat{\theta}_2$ 更密集, 则认为 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.

由于方差是随机变量取值与其数学期望的偏离程度, 所以无偏估计以方差小者为好.

设 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是 θ 的无偏估计量，若有 $D(\hat{\theta}_1) \le D(\hat{\theta}_2)$, 则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.

相合性

若$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的估计量，若对于任意$\theta\in\Theta$，当$n\to\infty$时，$\hat{\theta}(X_1, X_2,\cdots,X_n)$依概率收敛于$\theta$，则称$\hat{\theta}$为$\theta$的相合估计量.

置信区间和置信上限、置信下限

设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 含有一个未知参数 θ, 对于给定值 $\alpha\ (0<\alpha<1)$, 若由样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 确定的两个统计量

$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 满足

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\}=1-\alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间, $\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$ 分别称为置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限, $1-\alpha$ 为置信水平.

单侧置信区间的定义

对于给定值 $\alpha\,(0<\alpha<1)$，若由样本$X_1, X_2,\cdots, X_n$ 确定的统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，对于任意 $\theta\in\Theta$满足

$$P\{\theta>\underline{\theta}\}\geq 1-\alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, +\infty)$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间，$\underline{\theta}$ 称为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限.

又如果统计量 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,对于任意$\theta\in\Theta$满足

$$P\{\theta<\overline{\theta}\}\geq 1-\alpha,$$

则称随机区间 $(-\infty,\overline{\theta})$ 是θ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间, $\overline{\theta}$ 称为θ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信上限.

求置信区间的一般步骤

(1) 寻求一个样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的函数：

$$Z = Z(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$$

其中仅包含待估参数 θ, 并且Z的分布已知且不依赖于任何未知参数(包括θ).

(2) 对于给定的置信水平 $1-\alpha$, 定出两个常数 a, b, 使$P\{a < Z(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b\} = 1-\alpha$.

(3) 若能从 $a < Z(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b$ 得到等价的不等式 $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$, 其中 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, $\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是统计量, 那么 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 就是 θ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

截尾寿命试验

1.定时截尾寿命试验

假设将随机抽取的 n 个产品在时间 $t=0$ 时同时投入试验，试验进行到事先规定的截尾时间 t_0 停止，如试验截止时共有 m 个产品失效，它们的失效时间分别为 $0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_m \le t_0$，此时 m 是一个随机变量，所得的样本 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 称为定时截尾样本.

2.定数截尾寿命试验

假设将随机抽取的 n 个产品在时间 $t=0$ 时同时投入试验,试验进行到有 m 个(m 是事先规定的, $m<n$) 产品失效时停止, m 个产品的失效时间分别为 $0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_m$,这里 t_m 是第m个产品的失效时间,所得的样本 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 称为定数截尾样本.

截尾样本的最大似然估计

1. 定数截尾样本的最大似然估计

设有n个产品投入定数截尾试验, 截尾数为m,

得定数截尾样本 $0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_m$,

取似然函数为 $L(\theta) = \dfrac{1}{\theta^m} e^{-\frac{1}{\theta}[t_1 + t_2 + \cdots + t_m + (n-m)t_m]}$.

得到θ的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \dfrac{s(t_m)}{m}$.

2. 定时截尾样本的最大似然估计

设定时截尾样本 $0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_m \le t_0$,

(其中 t_0 是截尾时间)

得似然函数为 $L(\theta) = \dfrac{1}{\theta^m} e^{-\frac{1}{\theta}[t_1+t_2+\cdots+t_m+(n-m)t_0]}$.

θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \dfrac{s(t_0)}{m}$.

三、典型例题

例1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自参数为 p 的 $(0-1)$ 分布的一个样本，求参数 p 的最大似然估计量 $\hat{p}$，并验证它是达到方差界的无偏估计量.

解 $f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1,$

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i},$$

$$\ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot \ln(1-p),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p},$$

由 $\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=0$, 得 $(1-p)\sum_{i=1}^{n}x_i=p\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$,

故参数 p 的最大似然估计值为 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$,

参数 p 的最大似然估计量为 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$,

$$E(\hat{p}) = E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = p,$$

所以 $\hat{p}$ 是 p 的无偏估计量.

又因为 $f(x;\,p) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1,$

$$\ln f(x;\,p) = x\ln p + (1-x)\ln(1-p),$$

$$\frac{\partial \ln f(x;\,p)}{\partial p} = \frac{x}{p} - \frac{1-x}{1-p},$$

$$E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(x;p)}{\partial p}\right]^2\right\} = \sum_{x=0,1}\left[\frac{x}{p} - \frac{1-x}{1-p}\right]^2 p^x(1-p)^{1-x}$$

$$= \frac{1}{(1-p)^2}\cdot(1-p) + \frac{1}{p^2}\cdot p = \frac{1}{p(1-p)},$$

因为 $f(x;p)$ 的参数 p 的任何一个无偏估计量

$\hat{p}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都满足不等式

$$D(\hat{p}) \geq \frac{n}{E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(x;p)}{\partial p}\right]^2\right\}} = \frac{p(1-p)}{n},$$

对于参数 p 的无偏估计量 $\hat{p} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$,

$$D(\hat{p}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i)$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot p(1-p) = \frac{1}{n}p(1-p),$$

故 $\hat{p} = \overline{X}$ 是总体分布参数 p 的达到方差界的无偏估计量.

例2 设某异常区磁场强度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现对该区进行磁测，按仪器规定其方差不得超过 0.01，今抽测 16 个点，算得 $\bar{x}=12.7$，$s^2=0.0025$，问此仪器工作是否稳定 $(\alpha=0.05)$？

解 $n=16$，$\alpha=0.05$，$\chi^2_{0.025}(15)=27.5$，

$\chi^2_{0.975}(15)=6.26$，σ^2 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=(0.00136,\ 0.00599),$$

由于方差 σ^2 不超过 0.01，故此仪器工作稳定.