高等数学
单元自测(十二)

一、解下列各题（每题5分，共15分）

1.函数$y=\frac{x^3}{6}+cx$（其中c为任意常数）是微分方程的什么解？为什么？

解： 函数 $y=\frac{x^3}{6}+cx$ 是微分方程的通解，

它代入微分方程能使方程成为恒等式，

且此解中含有任意常数, 任意常数的个数与微分方程的阶数相同.

2.有一半径为2，圆心在y轴上的圆族，求以此圆族为通解的微分方程。

解：
$$x^2+(y-c)^2=4$$

$$\Longrightarrow 2x+2(y-c)y'=0$$

$$\xrightarrow{\text{消去}c} (xy')^2+x^2=4y'^2$$

3.已知函数$y=e^{2x}+(x+1)e^{x}$是二阶常系数非齐次线性方程$y''+ay'+by=ce^{x}$的一个特解，试确定常数a、b、c及该方程的通解。

解： $y=e^{2x}+(x+1)e^{x}=e^{2x}+xe^{x}+e^{x}$

特征根$r=2$，$r=1$ $\Longrightarrow (r-2)(r-1)=0$

$\Longrightarrow r^2-3r+2=0$

$\therefore\ a=-3, b=2$

将 $y^* = xe^x$ 代入 $y'' - 3y' + 2y = ce^x$

$$\Rightarrow \quad c = -1$$

$\therefore$ 通解为: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + xe^x$

所求方程为 $y'' - 3y' + 2y = -e^x$

二、求下列方程的通解（每题6分，共30分）

1. $$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}-\frac{1}{2y}tg\frac{y^2}{x}$$

解：令 $u=\frac{y^2}{x}\Rightarrow \frac{du}{dx}=-\frac{1}{x}tgu$

$$\Rightarrow \sin u=\frac{c}{x}$$

$\therefore$ 通解为 $x\sin\frac{y^2}{x}=c$

2. $(x\sin y+\sin 2y)y'=1$

解： $\dfrac{dx}{dy}-\sin y\cdot x=\sin 2y$

$$\therefore\ x=e^{\int\sin y dy}\left[c+\int e^{-\int\sin y dy}\sin 2y dy\right]$$

$$=e^{\cos y}\left[c+2\int\cos y e^{-\cos y}d(-\cos y)\right]$$

$$=e^{\cos y}[c-2(-\cos y-1)e^{-\cos y}]$$

$$=ce^{\cos y}+2(\cos y+1)$$

3. $(x\cos^2 y-1)dx+(3y^2-x^2\sin y\cos y)dy=0$

解：由原式可知

$$-dx+3y^2dy+(x\cos^2 ydx-x^2\sin y\cos ydy)=0$$

$$\Rightarrow \quad y^3-x+\frac{1}{2}x^2\cos^2 y=c$$

4. $x\dfrac{dy}{dx}=y+(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$

解：$x\dfrac{dy}{dx}=y+(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+(1+\frac{y^2}{x^2})^{\frac{1}{2}} \quad （令\ u=\frac{y}{x}\ ）$$

$$\Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{1}{x}dx \Rightarrow \ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|=\ln x+c'$$

$$\Rightarrow \text{通解为}\, cx=\left|\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}\right|$$

5. $y'' - y = chx$

解: $\because chx = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

令$r^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow$

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{1}{2}x(e^{x} - e^{-x}) = \frac{1}{2}xshx$$

$$y = c_1e^{x} + c_2e^{-x}$$

三、应用题（每题8分，共16分）

1.求$y^2y''+1=0$的积分曲线，使积分曲线通过点$(0,\frac{1}{2})$，且在该点处切线斜率为2。

解：$y(0)=\frac{1}{2}, y'(0)=2$

令 $y'=p \Rightarrow y''=p\frac{dp}{dy} \Rightarrow pdp=-\frac{1}{y^2}dy$

$\frac{1}{2}p^2=\frac{1}{y}+c_1 \Rightarrow c_1=0$

$\therefore \quad p=\pm\sqrt{\frac{2}{y}}$

$$\therefore\ y'(0)=2>0$$

$$\therefore\ y'=\sqrt{\frac{2}{y}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2}x+c_2\ \Rightarrow\ c_2=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

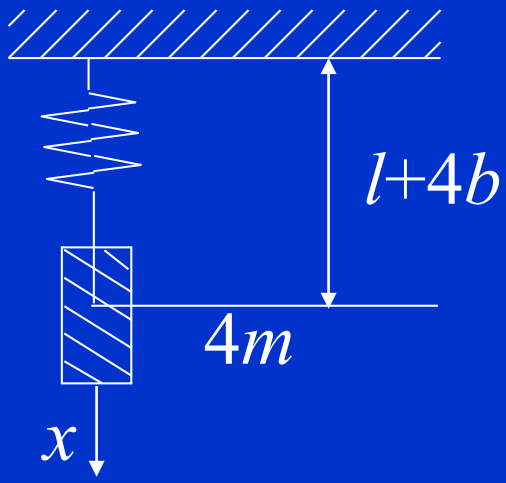
$$\therefore\ y^3=(\frac{\sqrt{2}}{6}x+1)^2$$

2.设长为t的弹簧，其上端固定，用五个质量都为m的砝码同时挂于下端，弹簧伸长了$5b$。今突然取去一个砝码，弹簧由静止开始上下振动，若不计弹簧自重及空气阻力，求所挂重物的运动规律（如图）

解：　由虎克定律：

$$5kb = 5mg$$

$$\therefore k = mg / b$$



接2

$$\begin{cases} 4m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx = -\dfrac{mg}{b}x \\ x(0) = b, x'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ 4\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{b}x = 0 \Rightarrow 4r^2 + \frac{g}{b} = 0$$

$$\therefore\ r = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{b}}i$$

$$\therefore\ x = c_1\cos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{b}}t + c_2\sin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{b}}t$$

且 $c_1 = b, c_2 = 0$

$\therefore$ 振动规律 $x = b\cos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{b}}t$

四、综合题（每题8分，共32分）

1.若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有意义且不恒为零，$f'(x)$ 存在，若对任意x,y恒有等式 $f(x+y)=f(x)f(y)$，求 $f(x)$

解： 令 $y=0$

$$f(x)=f(x)f(0)\xrightarrow{\text{由}x\text{任意性}}f(0)=1$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

接1

$$= f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}$$

$$= f(x)f'(0)$$

$$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)} = f'(0) \Rightarrow \ln f(x) = f'(0)x + c$$

$$c = \ln f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = e^{f'(0)x}$$

2.设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$ ，其中 $f(x)$ 是连续函数，求 $f(x)$ 。

解： $f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt$$

$$f''(x)=-\sin x-f(x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f''(x)+f(x)=-\sin x \\ f(0)=0, f'(0)=1 \end{cases}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$$

五、解下列各题（9分）

1.设微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

（1）证明：

若 $1+p(x)+q(x)=0$，则方程有一特解 $y=e^x$；

若 $p(x)+xq(x)=0$，则方程有一特解 $y=x$；

证：把 $y=e^x$ 代入方程左端，得

$$e^x+p(x)e^x+q(x)e^x=e^x(1+p(x)+q(x))=0$$

即 $y=e^x$ 是方程一特解

同理，把 $y=x$ 代入方程，由 $p(x)+xq(x)=0$

可知 $y=x$ 是一特解

（2）求$(x-1)y''-xy'+y=0$满足初始条件 $y(0)=2, y'(0)=1$的特解。

证：$y''-\dfrac{x}{x-1}y'+\dfrac{1}{x-1}y=0$

$\because\ p(x)=-\dfrac{x}{x-1}, q(x)=\dfrac{1}{x-1}$

$\therefore\ 1+p(x)+q(x)=0$， $p(x)+xq(x)=0$

$\therefore\ y_1=e^x, y_2=x$ 是其特解，且 $\dfrac{y_1}{y_2}\neq c$

$\therefore$ 通解 $y=c_1e^x+c_2x \Rightarrow y=2e^x-x$

$(c_1=2, c_2=-1)$