高等数学
单元自测(一)

1、选择题（每小题4分，共16分）

（1）. $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 1 \\ 2, & 1< x\le 2 \end{cases}$，则

$g(x)=f(2x)+f(x-2)$ 在（A）上有定义。

（A）无意义;

（B）$[0,2]$;

（C）$[0,4]$;

（D）$[2,4]$.

（2）.下列变量在给定的变化过程中是无穷小量的有（A、D）

（A） $2^{-x}-1\left(x \to 0\right)$ （B） $\dfrac{\sin x}{x}\left(x \to 0\right)$

（C） $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+2x+1}}\left(x \to +\infty\right)$ （D） $\dfrac{x^3(3+\cos\frac{1}{x})}{x^3+1}\left(x \to 0\right)$

（3）.已知 $\dfrac{1}{ax^3+bx+c} \sim \dfrac{1}{x+1}(x \to \infty)$，则 a，b，c之值一定为（B）

（A）a=0，b=1，c=1；

（B）a=0，b=1，c为任意数；

（C）a=0，b，c为任意数；

（D）a，0，b，c均为任意数。

（4）．数列$\{x_n\}$有界是数列$\{x_n\}$有极限的（B ）条件.

（A）充分；　　（B）必要；

（C）充要；　　（D）无关系.

2、填空题（每小题4分，共16分）

（1）.已知 $u=\sqrt{y}+f\left(\sqrt[3]{x}-1\right)$，并且当$y=1$时$u=x$，

则 $f(x-1)=$ $\underline{\quad x^3-1 \quad}$

析： $x-1=f\left(\sqrt[3]{x}-1\right) \Rightarrow f(t)=(t+1)^3-1$

$$\therefore \quad f(x-1)=x^3-1$$

（3）.若 x_0 为$f（x）$的间断点，在 $\underline{f\left(x_0^{+}\right), f\left(x_0^{-}\right) \text{ 都存在 }}$ 的条件下，

x_0 为第一类间断点。

（4）.已知极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+bx+3b}{x-a}=8$ ，则

常数$a=\left\{\begin{array}{l}6\\-4\end{array}\right.$____，常数$b=\left\{\begin{array}{l}-4\\16\end{array}\right.$____。

析：由 $\lim\limits_{x\to a}(x-a)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\left(x^2+bx+3b\right)=0$

$$\Rightarrow a^2+ab+3b=0 \qquad ①$$

从而 $3b=-(a^2+ab) \Rightarrow$

$$左=\lim_{x\to a}\frac{x^2+bx-a^2-ab}{x-a}=a+2b=8（右）②$$

由①②两式联立即得。

首 页 上一页 下一页 尾 页 结 束 返 回

3、（7分）用极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9}=-\dfrac{1}{6}$.

证：$\forall \varepsilon>0$ ，要使

$$\left|\frac{x+3}{x^2-9}+\frac{1}{6}\right|=\left|\frac{1}{x-3}+\frac{1}{6}\right|=\left|\frac{x+3}{x-3}\right|\frac{1}{6}<\varepsilon$$

$\because x\to -3$，不妨设 $|x+3|<1 \Rightarrow 5<|x-3|<7$

取 $\delta=\min(1,30\varepsilon)$ ，当 $0<|x+3|<\delta$ 时，

恒有 $\left|f(x)+\dfrac{1}{6}\right|<\varepsilon$.

首 页 上一页 下一页 尾 页 结 束 返 回

4、（16分）计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1+\sin x}}{x\cos x\cdot\sin^2 x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3\left(\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1+\sin x}\right)}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{tgx(1-\cos x)}{x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}$$

$$=\frac{1}{4}$$

（2） $\lim_{n\to\infty}\left(2-\cos\frac{x}{n^2}\right)^{n^4}$

解：原式 $=\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(1-\cos\frac{x}{n^2}\right)\right]^{n^4}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(1-\cos\frac{x}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{1-\cos\frac{x}{n^2}}\left(1-\cos\frac{x}{n^2}\right)n^4}$$

其中 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n^2}\right)n^4=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n^2}\right)^2 n^4=\frac{x^2}{2}$

即可得原式为 $e^{\frac{x^2}{2}}$

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x+\sin x}{5e^x-\cos x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{\sin x}{e^x}}{5-\dfrac{\cos x}{e^x}}$

$=\dfrac{2}{5}$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\cos\alpha x-1\right)}{\ln\left(1+\cos\beta x-1\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\alpha x-1}{\cos\beta x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(\alpha x)^2}{-\frac{1}{2}(\beta x)^2}$$

$$=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

5、（12分）试确定常数a、b，使函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{a+b}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} & x<0\\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & x=0\\[2ex] \dfrac{\pi\left(\sqrt{1+x^2\sin x}-1\right)}{(a-b)\operatorname{tg}^3 2x} & x>0\end{cases}$$

在点x=0处连续。

解：$\because$ $f(0^+)=\dfrac{\pi}{16(a-b)}$ $f(0^-)=-\dfrac{\pi}{2(a+b)}$ $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$ $a=-\dfrac{7}{16}$ $b=-\dfrac{9}{16}$

首 页 上一页 下一页 尾 页 结 束 返 回

6、（9分）设$f(x)$在$(-\infty,a]$上连续，且$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，其中$A$为有限数，试证 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上有界。

证：因为 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$

所以对$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,x<-X$ 时，有

$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$，从而$\left|f(x)\right|<\varepsilon+|A|$ 又 $f(x)$

在$(-\infty,a]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在$[-X,a]$

上也连续，根据连续函数的有界性定理知

存在$M>0$，使得$f(x)$在$[-X,a]$，$|f(x)|<M$

取$N=\max\{|A|+\varepsilon,M\}$当$x\in(-\infty,a]$时都有

$|f(x)|<N$ 即 $f(x)$在$(-\infty,a]$ 上有界

7、（8分）设 $f(x)$ 对$[a,b]$上任意的 x_1,x_2 都有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le c\left|x_1-x_2\right|$，其中$c$为常数，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，试证在(a,b)内至少有一点 x_0，使 $f(x_0)=0$ 。

证：下分三种情况进行说明

①对任意 $x,x+\Delta x\in(a,b)$ $\left|f(x+\Delta x)-f(x)\right|\le c\left|\Delta x\right|$

当$\Delta x\to 0$ 时由夹逼准则知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

②当 $x=a$ 时， $\left|f(a+\Delta x)-f(a)\right|\le c\left|\Delta x\right|$ $(\Delta x\to 0^+)$

即 $f(x)$ 在点 a 处右连续。

③当 $x=b$ 时 $\left|f(b+\Delta x)-f(b)\right| \le c\left|\Delta x\right| \quad \left(\Delta x \to 0^{-}\right)$

即 $f(x)$ 在点 b 处左连续。

由①②③知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

又 $f(a)f(b)<0$ 根据零点定理知在 (a,b)

内至少存在一点 x_0，使 $f(x_0)=0$

8、（9分）试证一元三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0, b, c, d$为常数$)$ 有一个实根。

证：不妨设 $a>0, f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 所以 $\exists x_1>0$ 使得 $f(x_1)>0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 所以 $\exists x_2<0$ 使得 $f(x_2)<0$

又 $f(x)$ 在 $[x_2, x_1]$上连续,由零点定理知在

(x_2, x_1) 内至少有一点 x_0 使得 $f(x_0)=0$

即一元二次方程有一个实根。

9、（7分）设 $x_1=1, x_2=1+\dfrac{x_1}{1+x_1}$， ……， $x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

证：$\because\quad x_2-x_1=\dfrac{1}{2}>0$， 设 $x_k>x_{k-1}$

则 $x_{k+1}-x_k=1+\dfrac{x_k}{1+x_k}-\left(1+\dfrac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}}\right)$

$$=\frac{x_k-x_{k-1}}{(1+x_k)(1+x_{k-1})}>0$$

$\therefore\ \{x_n\}$ 单调递增

又 $x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=2-\dfrac{1}{1+x_{n-1}}<2$

$$\lim_{n\to\infty} x_n=A \Rightarrow A=1+\frac{A}{1+A}\Rightarrow A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$