高等数学
单元自测(九)

一、选择题（每题4分）

1.对于二元函数 $f(x,y)$，下列有关偏导数与全微分关系中正确的命题是（C）

（A）偏导数不连续，则全微分必不存在；

（B）全微分存在，则偏导数必连续；

（C）偏导数连续，则全微分必存在；

（D）全微分存在，而偏导数不一定存在。

2.若函数$z=f(u,v)=f(x^2+y^2,x^2-y^2)$为二阶连续可微函数，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$等于（D）

（A）$2x\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)$　（B）$2x\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$

（C）$2x\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$　（D）$4xy\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$

接2

析：$\because \quad \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$$=2x\frac{\partial f}{\partial u}+2x\frac{\partial f}{\partial v}=2x\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x\partial y}=2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=2x\left(2y\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+2y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-2y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$

$$=4xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$

3.设函数$z=z(x,y)$ 由方程 $e^{-xy}-2z+e^{z}=0$ 确定，于是z关于x的二阶偏导数为（D）

（A） $\dfrac{-y^{2}e^{-xy}}{e^{z}-2}$

（B） $\dfrac{-y^{2}e^{-xy}(e^{z}-2)-ye^{-xy}e^{z}}{(e^{z}-2)^{2}}$

（C） $\dfrac{-y^{2}e^{-xy}(e^{z}-2)+y^{2}e^{-2xy+z}}{(e^{z}-2)^{2}}$

（D） $\dfrac{-y^{2}e^{-xy}(e^{z}-2)^{2}-y^{2}e^{-2xy+z}}{(e^{z}-2)^{3}}$

析：方程两边对 x 求偏导得：

$$-ye^{-xy}-2\frac{\partial z}{\partial x}+e^{z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad (1) \quad \text{得：} \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ye^{-xy}}{e^{z}-2}$$

（1）式两边对x 求偏导得：

$$y^{2}e^{-xy}-2\frac{\partial^{2} z}{\partial x^{2}}+e^{z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{2}+e^{z}\frac{\partial^{2} z}{\partial x^{2}}=0$$

$$\frac{\partial^{2} z}{\partial x^{2}}=\frac{1}{e^{z}-2}\left[-y^{2}e^{-xy}-e^{z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{2}\right]$$

$$=\frac{-y^{2}e^{-xy}\left(e^{z}-2\right)^{2}-y^{2}e^{-2xy+z}}{\left(e^{z}-2\right)^{3}}$$

4. 曲面$xy+yz+zx-1=0$与平面

$x-3y+z-4=0$在点（1，-2，-3）处的夹角

为（C）

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　（B）$\dfrac{\pi}{3}$　（C）$\dfrac{\pi}{2}$　（D）$\dfrac{2\pi}{3}$

析:令 $F(x,y,z)=xy+yz+zx-1=0$

$F_x=y+z, F_x=-5$　$F_y=x+z, F_y=-2$　$F_z=y+x, F_z=-1$

$\therefore$ 曲面在已知点处的切平面的法矢量为

$$\overrightarrow{n_1}=(-5,-2,-1).$$

已知平面的法矢量为：$\overrightarrow{n_2} = (1, -3, 1)$

又$\because \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$

$\therefore$ 切平面与已知平面垂直

$\therefore$ 曲面与已知平面的夹角为：$\dfrac{\pi}{2}$

5.设函数$z = x^3 - 3x - y^2$ 则它在点（1，0）处(B)

（A）取得极大值；

（B）无极值；

（C）取得极小值；

（D）无法判别是否有极值。

析：$\because z_x = 3x^2 - 3, z_{xx} = 6x, z_{xx}(1,0) = 6$

$z_y = -2y, z_{yy} = -2, z_{yy}(1,0) = -2$

$$\therefore AC - B^2 = -12 < 0$$

则函数在该点处无极值.

二、填空题（每小题4分）

1.设函数 $z=f(u)+y$ ，其中 $u=x^2+y^2$，f为可微函数，则 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ $\underline{4xyf'+x}$

析：$\because \dfrac{\partial Z}{\partial x}=f'\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xf'$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=2yf'+1$$

$\therefore$ 原式$=2xyf'+x(2yf'+1)=4xyf'+x$

2.由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点(1，0，-1）处的全微分 $dz=\underline{dx-\sqrt{2}dy}$

析：方程两边分别对 x , y 求偏导得：

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{-1}{xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z}\left(yz\sqrt{x^2+y^2+z^2}+x\right) \qquad \left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{(1,0.-1)}=1$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{-1}{xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z}\left(xz\sqrt{x^2+y^2+z^2}+y\right) \qquad \left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{(1,0.-1)}=-\sqrt{2}$$

$$\therefore dz=\frac{\partial Z}{\partial x}dx+\frac{\partial Z}{\partial y}dy=dx-\sqrt{2}dy$$

3. 由函数 $u=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 在A（1，0，1）处沿A指向B（3，-2，2）方向的方向导数为 $\underline{\quad\dfrac{1}{2}\quad}$

析：易见 u 在点 A 可微．故由

$$f_x(A)=\frac{1}{2}\quad f_y(A)=0\quad f_z(A)=\frac{1}{2}$$

及方向 $\overline{AB}$ 的方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{3}$

由公式求得 u 沿方向 $\overline{AB}$ 的方向导数为：

$$f_{\overline{AB}}(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+0\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = \underline{\quad 0 \quad}$

析： $\because x^2+y^2 \ge 2xy, x>0\, y>0.$

$$\therefore \frac{xy}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2} \qquad \therefore 0 \le \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = 0$$

$$\therefore \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$$

5.在曲线 $x=t$，$y=-t^2$，$z=t^3$ 的所有切线中，

与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线有 $\underline{\quad 2 \quad}$ 条。

析：在曲线上任取一点 $p\left(t_0,-t_0^{\ 2},t_0^{\ 3}\right)$，则：

$$x'\left(t_0\right)=1, y'\left(t_0\right)=-2t_0, z'\left(t_0\right)=3t_0^{\ 2}$$

则曲线在该点的切线方向矢量为 $\overrightarrow{n_1}=(1,-2t_0,3t_0^{\ 2})$,

题设中的平面法矢量为 $\overrightarrow{n_2}=(1,2,1)$

若切线与平面平行，则切线与平面的法矢量垂直，

$$\therefore \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=1+2\cdot\left(-2t_0\right)+3t_0^{\ 2}=3t_0^{\ 2}-4t_0+1=0$$

$\because \Delta=16-12=4>0.$ $\therefore t_0$ 有两个值.

$\therefore$ 与已知平面平行的切线有两条.

三、（10分）设函数 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$ 其中 $\varphi(x,y)$ 在点（0，0）的邻域内连续，问：

1. $\varphi(x,y)$ 应满足什么条件，才能使偏导数 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$ 存在？

2. 在上述条件下，$f(x,y)$ 在点（0，0）处是否可微？

解：1. $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}$

要使 $f_x(0,0)$ 存在,只有:$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x,0)=0;\therefore \varphi(0,0)=0$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta y|\varphi(0,\Delta y)}{\Delta y}$$ 接三

要使 $f_y(0,0)$ 存在，只有 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\varphi(0,\Delta y)=0;\therefore \varphi(0,0)=0$

2． 由上述条件知：$f_x(0,0)=0, f_y(0,0)=0$

若dz存在,则 $dz=f_x(0,0)dx+f_y(0,0)dy=0$

$\because \Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=|\Delta x-\Delta y|\varphi(\Delta x,\Delta y)$

$\therefore \Delta z-dz=|\Delta x-\Delta y|\varphi(\Delta x,\Delta y)$ 令：$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

$$\therefore \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-dz}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{|\Delta x-\Delta y|\varphi(\Delta x,\Delta y)}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{|\rho\cos\theta-\rho\sin\theta|}{\rho}\varphi(\Delta x,\Delta y)$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}|\cos\theta-\sin\theta|\varphi(\Delta x,\Delta y)=0$$

$\therefore$ 函数在 $(0,0)$ 可微.

四、（10分）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x^2-y^2, y^2-z^2\right)=0$ 确定，F为任意可微函数，求 $yz\dfrac{\partial z}{\partial x}+zx\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解：$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{F_1'\cdot 2x}{F_2'\cdot(-2z)}=\frac{x}{z}\cdot\frac{F_1'}{F_2'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_1'\cdot(-2y)+F_2'\cdot 2y}{F_2'\cdot(-2z)}$$

$$yz\frac{\partial z}{\partial x}+zx\frac{\partial z}{\partial y}=xy\frac{F_1'}{F_2'}+\frac{xy}{F_2'}\left[-F_1'+F_2'\right]=xy$$

五、（10分）已知三角形周长为$2p$，试求这样的三角形，当它饶自己的一边旋转时所构成的体积最大？

解：设三条边分别为x、y、z,且x边上的高为h,

则三角形绕x边旋转所得旋转体的体积

$$v=\frac{1}{3}\pi xh^2,\qquad x+y+z=2p$$

又 三角形面积

$$s=\frac{1}{2}xh \quad 且\ s=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

于是

$$v=\frac{4}{3}\pi p\cdot\frac{(p-x)(p-y)(p-z)}{x}$$

作拉格朗日函数

$$F=\ln\frac{(p-x)(p-y)(p-z)}{x}+\lambda(x+y+z-2p)$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{p}{2},\quad y=z=\frac{3}{4}p$$

$$v_{\max}=\frac{\pi}{12}p^{3}$$

六、（10分）证明曲面 $f\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$ 的切平面通过一定点。

证：在曲面上任取一点(x,y,z),则

$$\vec{n}=(f_1'\frac{1}{z-c},f_2'\frac{1}{z-c},f_1'\frac{a-x}{(z-c)^2}+f_2'\frac{y-b}{(z-c)^2})$$

$$\vec{n}=(A,B,C)=$$

$$((z-c)f_1',(z-c)f_2',(a-x)f_1'+(b-y)f_2')$$

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

当 $X=a, Y=b, Z=c$ 时，有

$$A(a-x)+B(b-y)+C(c-z)=0$$

$\therefore$ 切平面过点 (a,b,c)

七、（10分）设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy} e^{-t^2}dt$，求

$$\frac{x\partial^2 f}{y\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y\partial^2 f}{x\partial y^2}$$

证： $f_x = ye^{-x^2y^2}$ $\quad f_y = xe^{-x^2y^2}$

$$f_{xx}=-2xy^3e^{-x^2y^2} \qquad f_{xy}=e^{-x^2y^2}\left(1-2x^2y^2\right)$$

$$f_{yy}=-2x^3ye^{-x^2y^2}$$

原式 $=e^{-x^2y^2}\left(-2x^2y^2-2+4x^2y^2-2y^2x^2\right)$

$$=-2e^{-x^2y^2}$$

八、（10分）求函数 $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$

在球面 $x^2+y^2+z^2=5r^2\ (x>0,y>0,z>0)$

上的最大值，并证明对任何正数 a,b,c，有

$$abc^3 \le 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5$$

易求得M，证不等式如下：

$$xyz^3 \le 3\sqrt{3}r^5 = 3\sqrt{3}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{5}\right)^{\frac{5}{2}}$$

即 $$x^2y^2z^6 \le 27\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{5}\right)^5$$

取 $$x^2=a, y^2=b, z^2=c$$

即得证