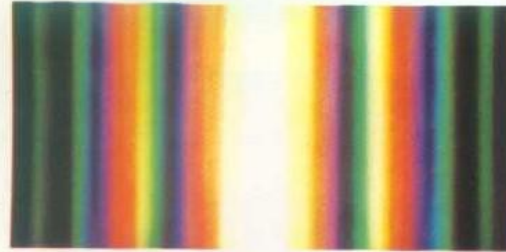
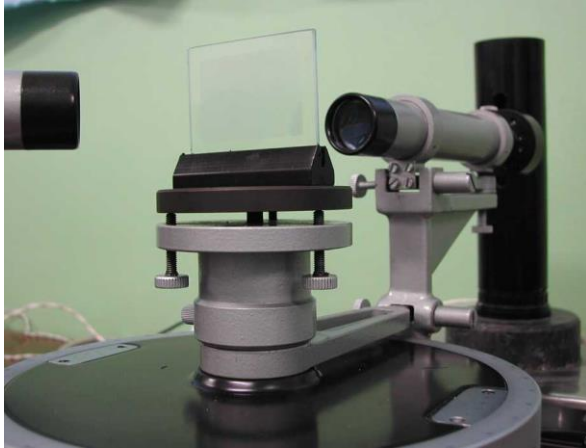
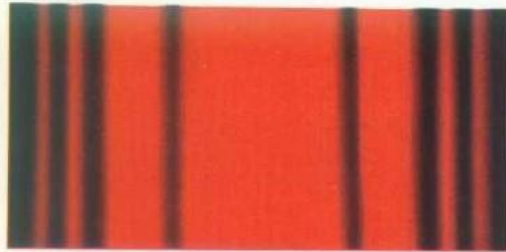


13.9 衍射光栅及光栅光谱

单缝衍射

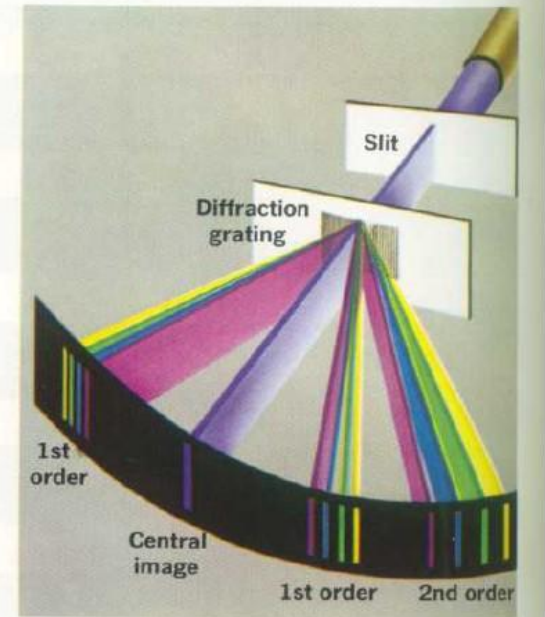


B. Passing white light through a single slit produces this diffraction pattern.



Red light passed through the same slit produces this pattern.

光栅光谱



C. Mercury light through a diffraction grating.

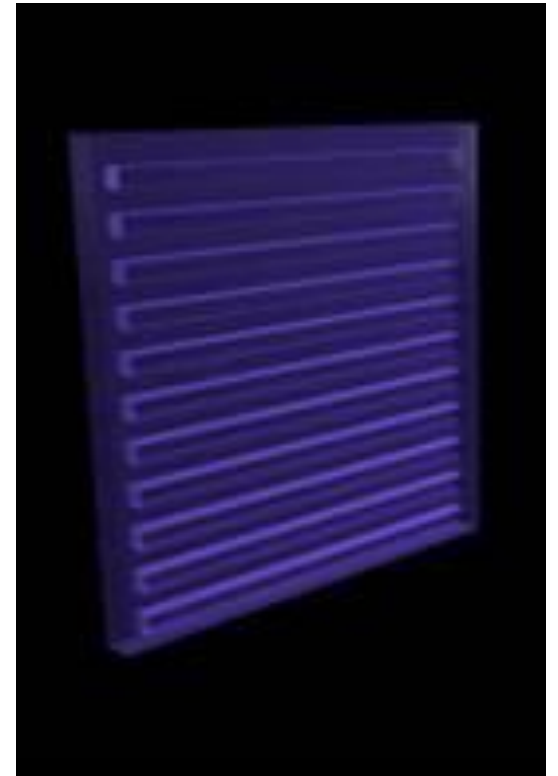


一、衍射光栅

利用多缝衍射原理使光发生色散的元件称为光栅。

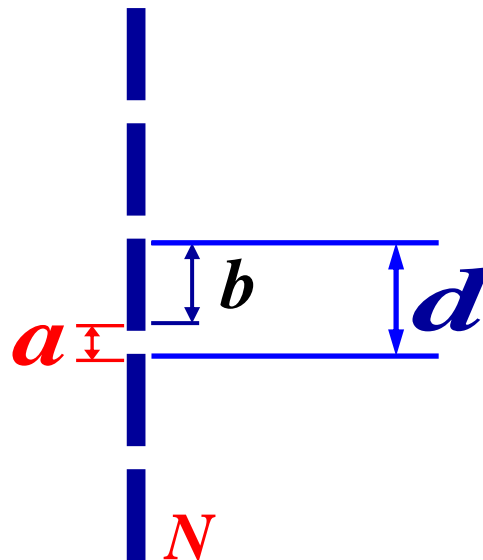
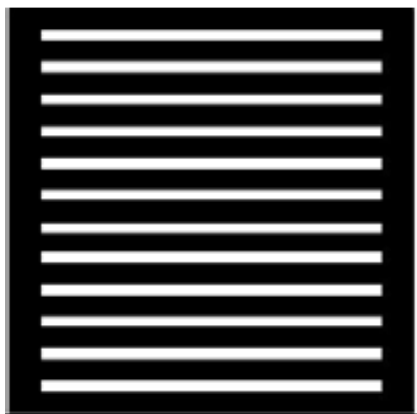
光栅的种类很多，有透射光栅、平面反射光栅和凹面光栅等。

在一块透明的平板上刻有大量相互平行等宽等间距的刻痕，为透射光栅。



• 光栅参数:

平面透射式光栅



N : 透射光栅的总缝数;

a : 透光部分的宽度;

b : 不透光部分的宽度;

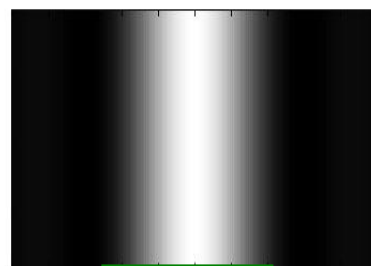
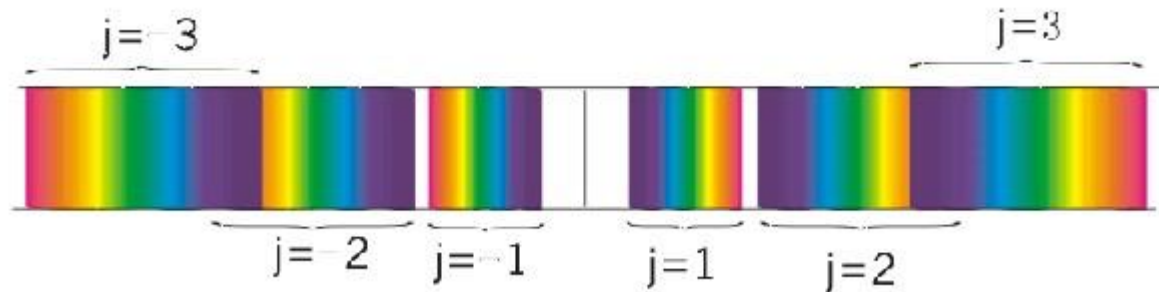
$d = a + b$: 光栅常量

(一般的光栅1cm内刻
有几千上万条刻痕)

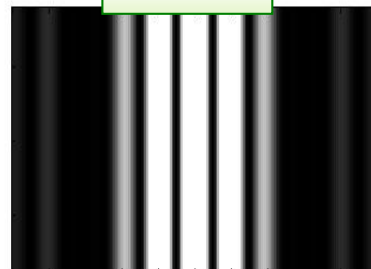
光栅常数 $\sim 10^{-3}\text{mm}$ 量级

随着缝数的增加，屏上明条纹越来越细，也越来越亮；相应地，又细又亮的条纹之间的暗背景也越来越暗

如果入射光是复色光，则每一波长都有与之对应的明纹，但位置不同，即光栅有色散分光的作用。



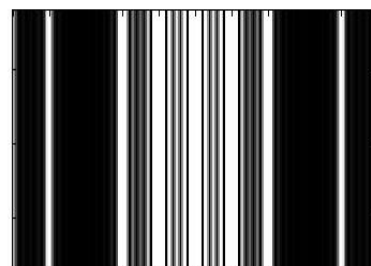
1条缝



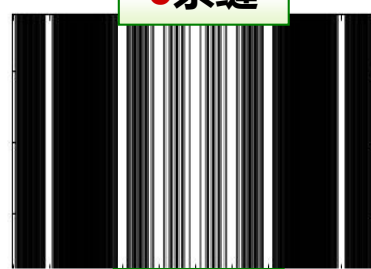
2条缝



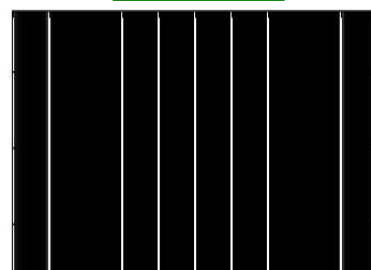
3条缝



5条缝

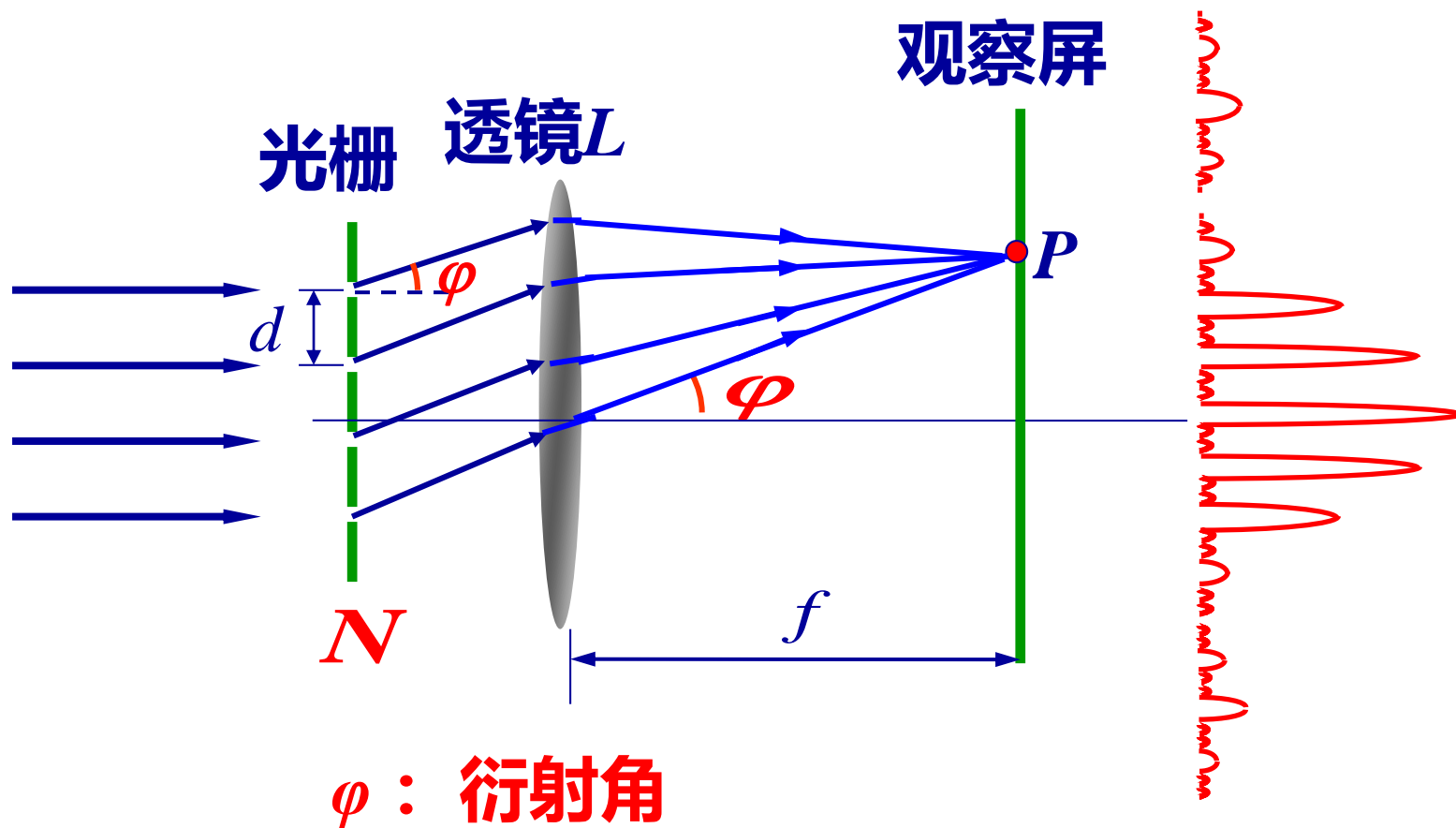


6条缝



20条缝

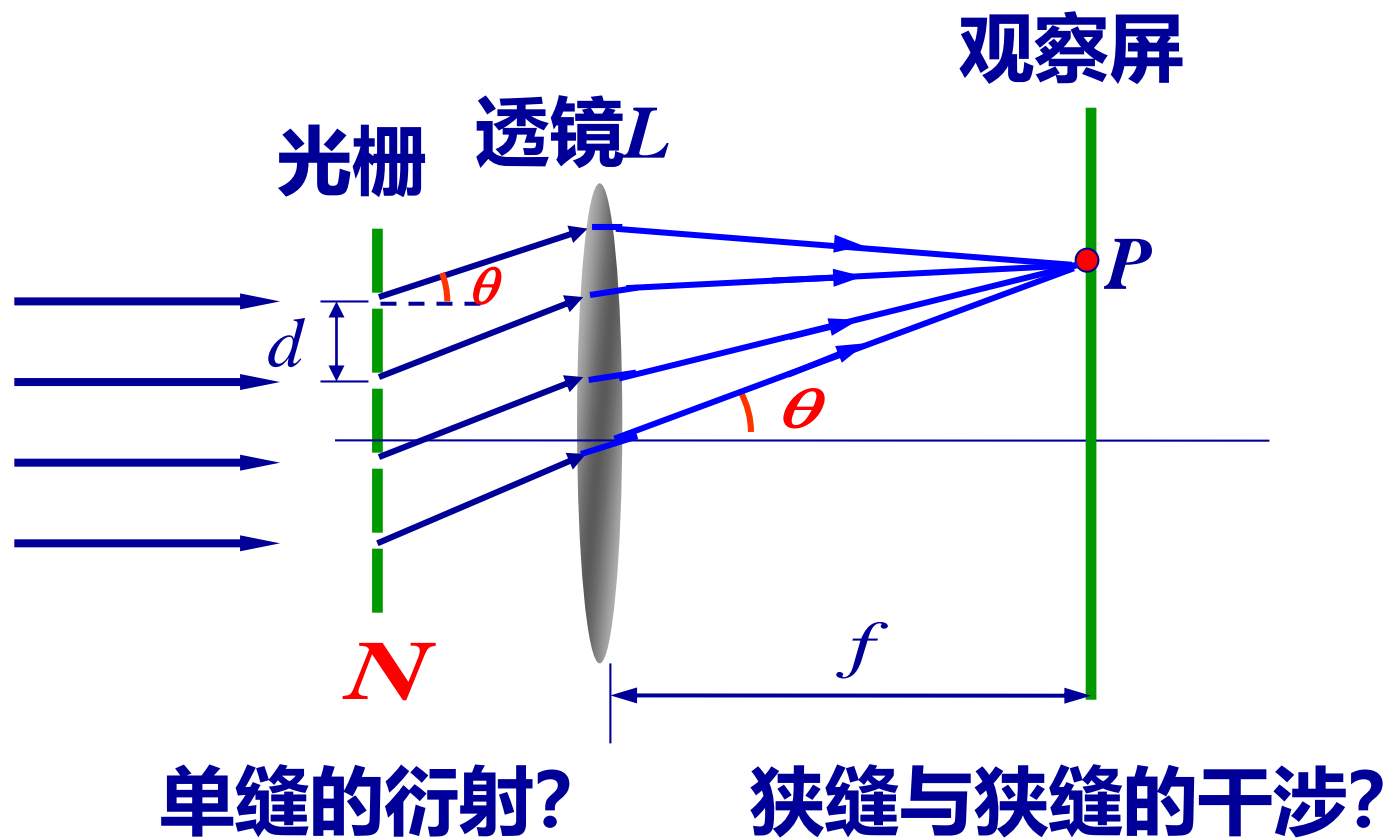
• 光栅衍射实验装置图：



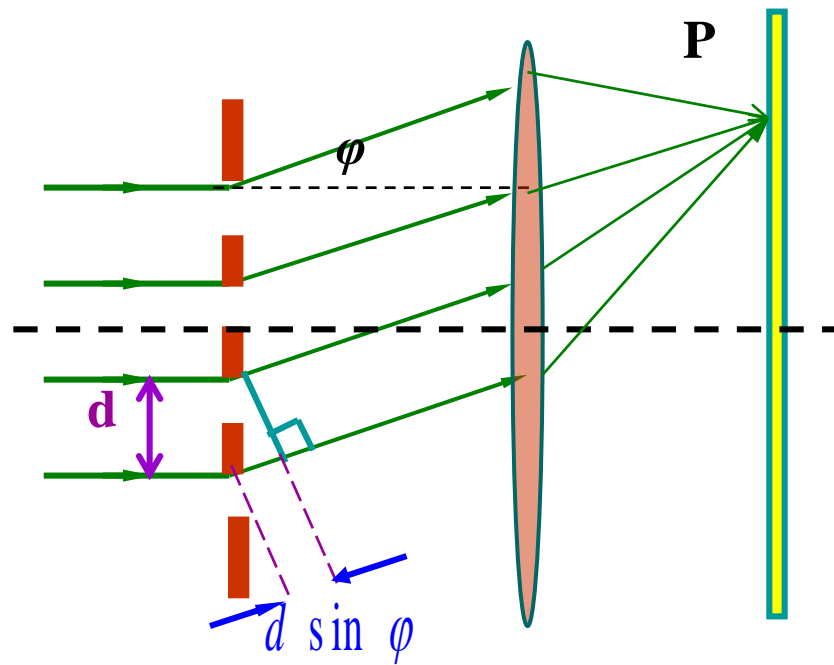
对每一条透光缝：由于单缝衍射，都将在屏幕上形成衍射图样，衍射角与屏上场点P一一对应，且N个单缝在平行光入射下图样完全重合。

1.2 光栅的衍射图样的分析 (N很大)

将多缝 (N缝) 干涉与单缝衍射结合考虑

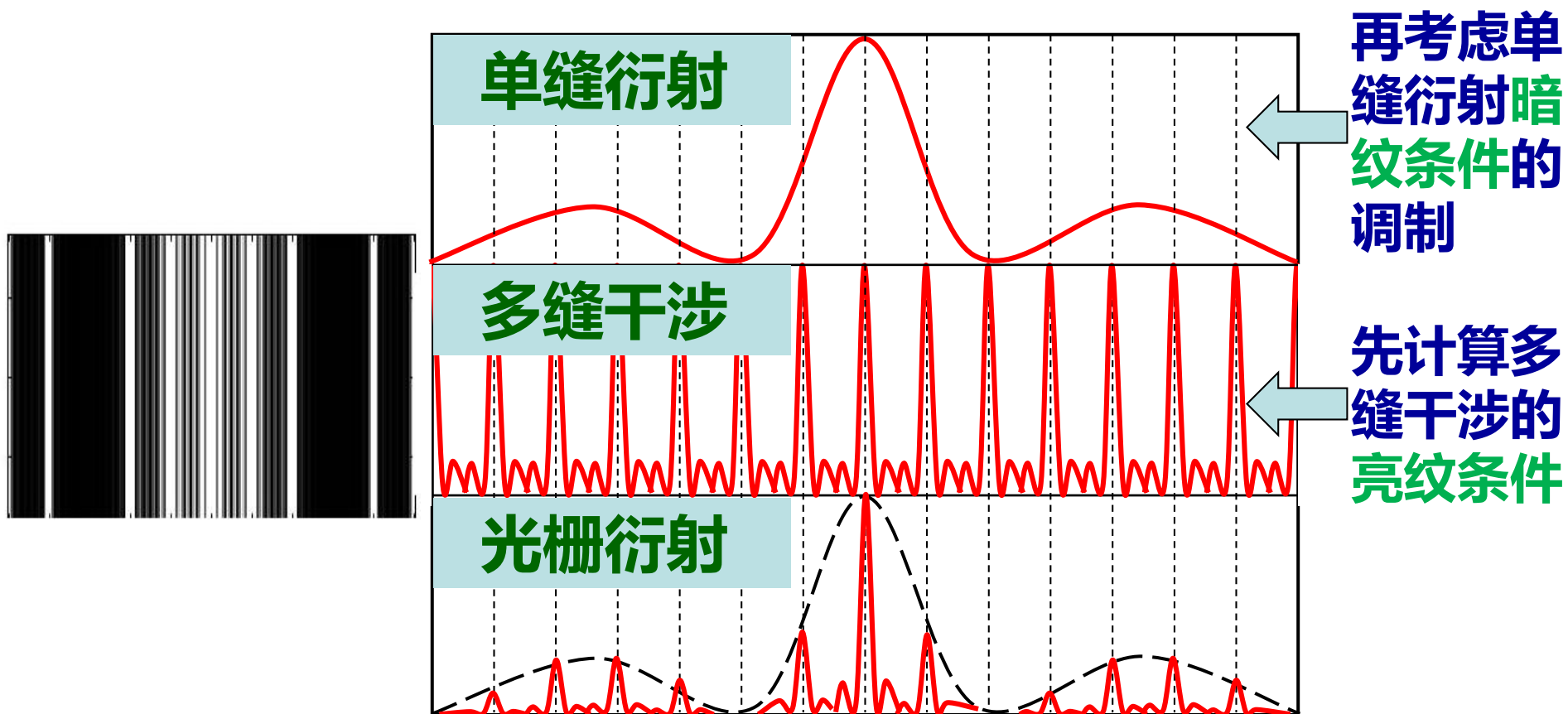


各缝发出的衍射光都是相干光，（来自同一光源的同一波前，具有相同的频率、振动方向、恒定的相位差），缝与缝之间存在干涉现象。



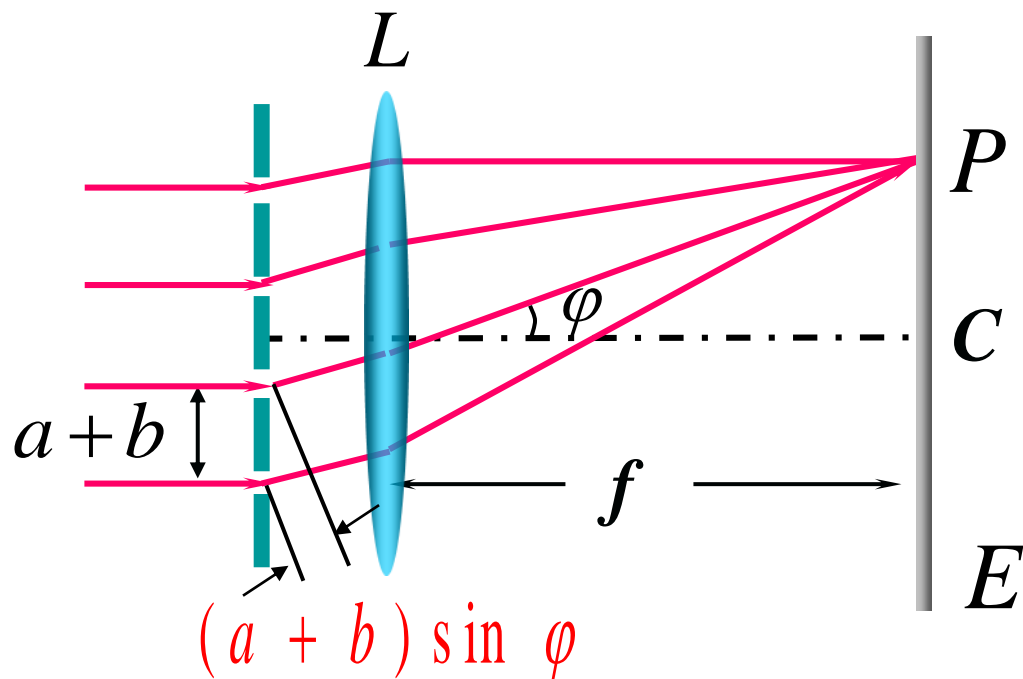
光栅衍射是单缝衍射（来自同一条缝的衍射光的叠加是单缝衍射的问题）和多缝干涉（来自不同缝的衍射光的叠加是多缝干涉的问题）的综合效果。

光栅衍射是衍射与干涉的综合结果



1. 光栅方程

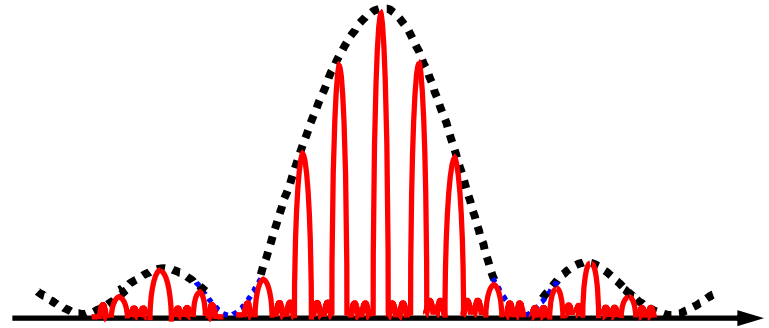
光栅衍射明条纹的条件是衍射角 φ 必须满足光栅方程



$$(a+b) \sin \varphi = \pm k \lambda, k = 0, 1, 2, \dots$$

相邻两缝之间的光程差等于波长的整数倍，N条缝干涉加强
——主极大条纹

2. 主极大条纹



满足光栅方程 $\delta = (a+b)\sin\varphi = \pm k\lambda$ 的明条纹称为主极大条纹，也称光谱线， k 称主极大级数。

$k = 0$ 时， $\varphi = 0$ ，称中央明条纹；

$k = 1$ 、 $k = 2$ 、 \dots 分别为第一级、第二级、 \dots 主极大条纹。正、负号表示各级明纹对称地分布在中央明纹的两侧。

讨论:

① 主极大条纹是由**缝间干涉**决定的

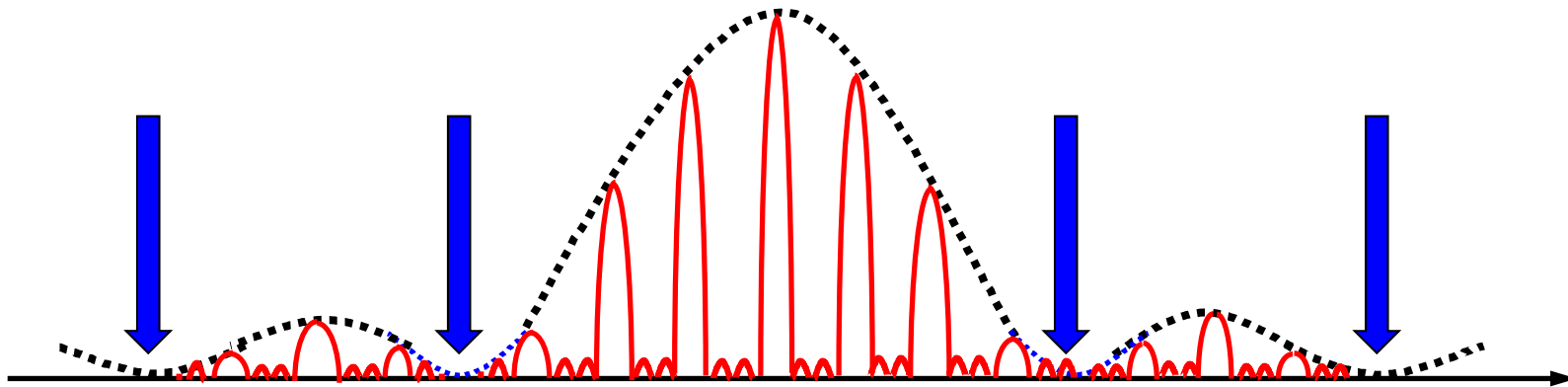
② 明纹（中心）位置在屏上位置:

$$x = \frac{f}{a+b} \cdot k\lambda \quad k = \pm 1, \pm 2 \dots$$

明纹位置由 $\pm kf\lambda/(a+b)$ 确定，与光栅的缝数无关，缝数增大只是使条纹**亮度增大与条纹变窄**

③ 由于 $|\sin \varphi| \leq 1$ ， k 的取值有一定的范围，故只能看到有限级次的衍射条纹，

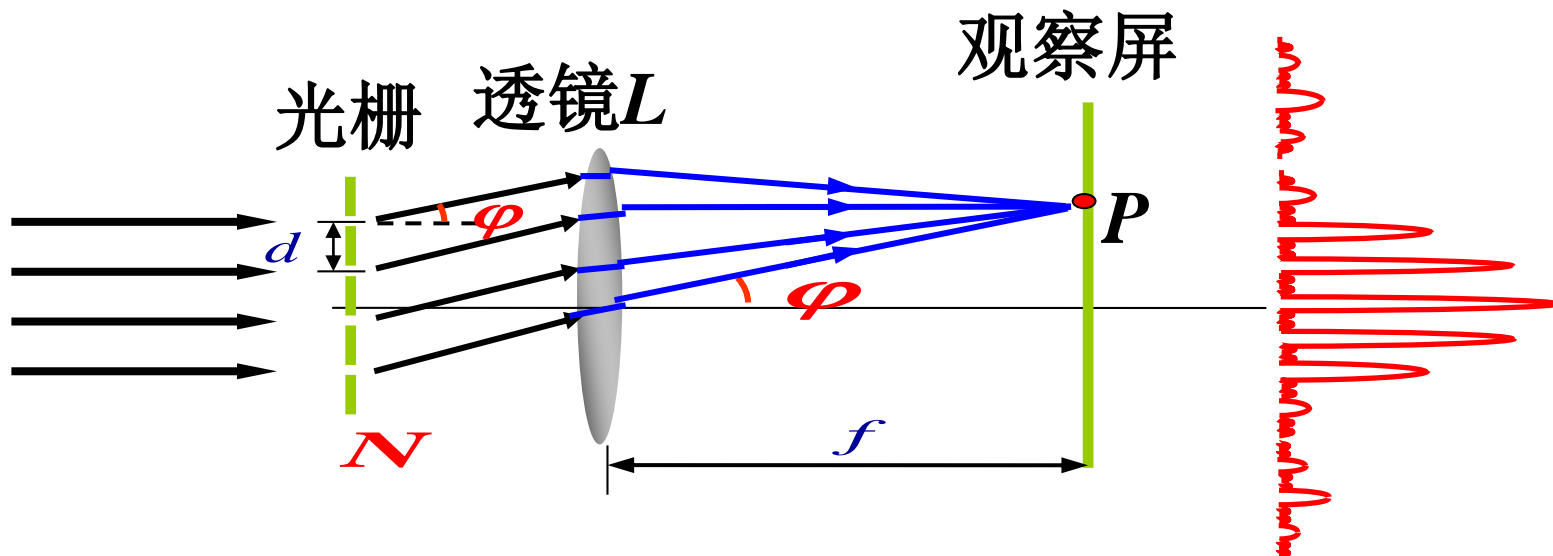
$$k = \frac{(a+b)\sin \varphi}{\lambda} < \frac{a+b}{\lambda}$$



在光栅衍射中，某些满足光栅方程的主极大位置会出现**缺级**，为什么？

我们在计算缝间干涉的时候，假设每个缝都会有光射出来。但是对每个缝而言，还存在**消光条件**，就是这个单缝的消光条件导致了缺级。

3. 谱线的缺级



设在 φ 衍射方向上各缝间的干涉是加强的，但由于各单缝本身在这一方向上的衍射强度为零，其合成结果仍是零，因而该方向的明纹不出现。这种满足光栅明纹条件而实际上明纹不出现的现象，称为光栅的缺级。

对于满足光栅方程的主极大条纹

$$\delta = (a+b) \sin \varphi = \pm k \lambda \quad k = 0, 1, 2, 3 \cdots$$

若衍射角同时也满足单缝衍射的暗纹条件,

$$a \sin \varphi = \pm k' \lambda \quad k' = 1, 2, 3 \cdots$$

则相应的主极大级数就会发生缺级,

$$\frac{k}{k'} = \frac{a+b}{a} = \frac{d}{a} \quad k = \left(\frac{d}{a} \right) k' \quad (k' = 1, 2, 3, \cdots)$$

(若 $d = 4a$) 缺 $\pm 4, \pm 8, \dots$ 级

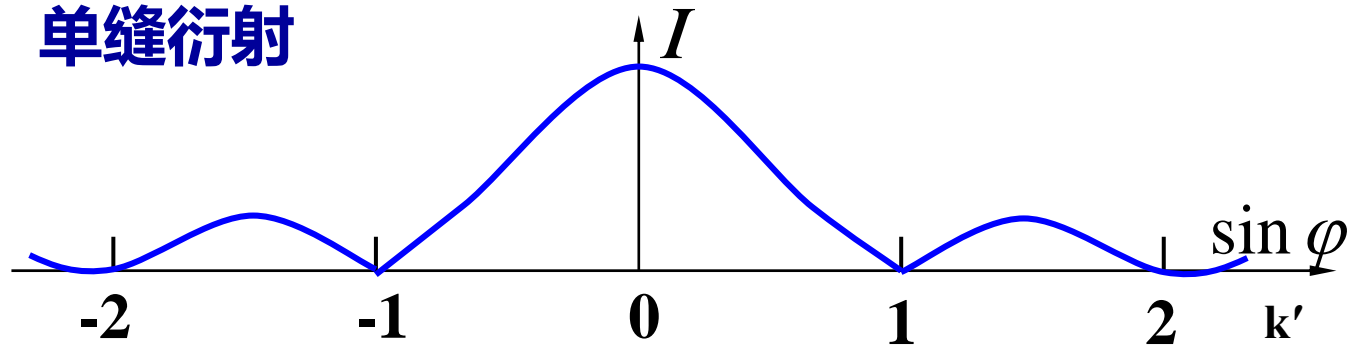
作业:

第13章 6, 7, 8, 9, 10, 11

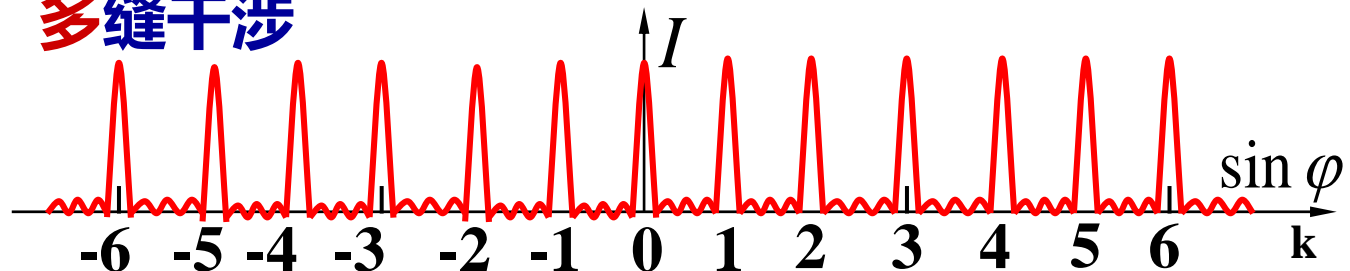
同时满足

$$\begin{cases} a \sin \varphi = \pm k' \lambda \\ (a+b) \sin \varphi = \pm k \lambda \end{cases}$$

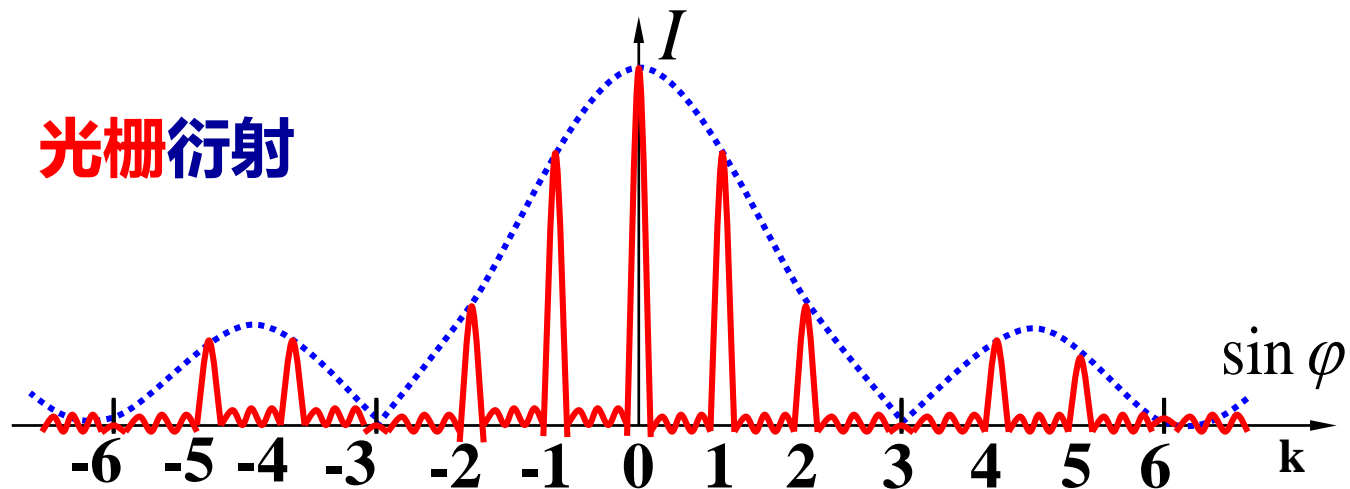
单缝衍射



多缝干涉



光栅衍射



出现缺级

$$\frac{k}{k'} = \frac{a+b}{a}$$

例：假如

$$a+b=3a$$

缺级

$$\frac{k}{k'} = \frac{a+b}{a} = \frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \dots = 3, 6, 9, \dots$$

4. 暗纹条件

$N=1$

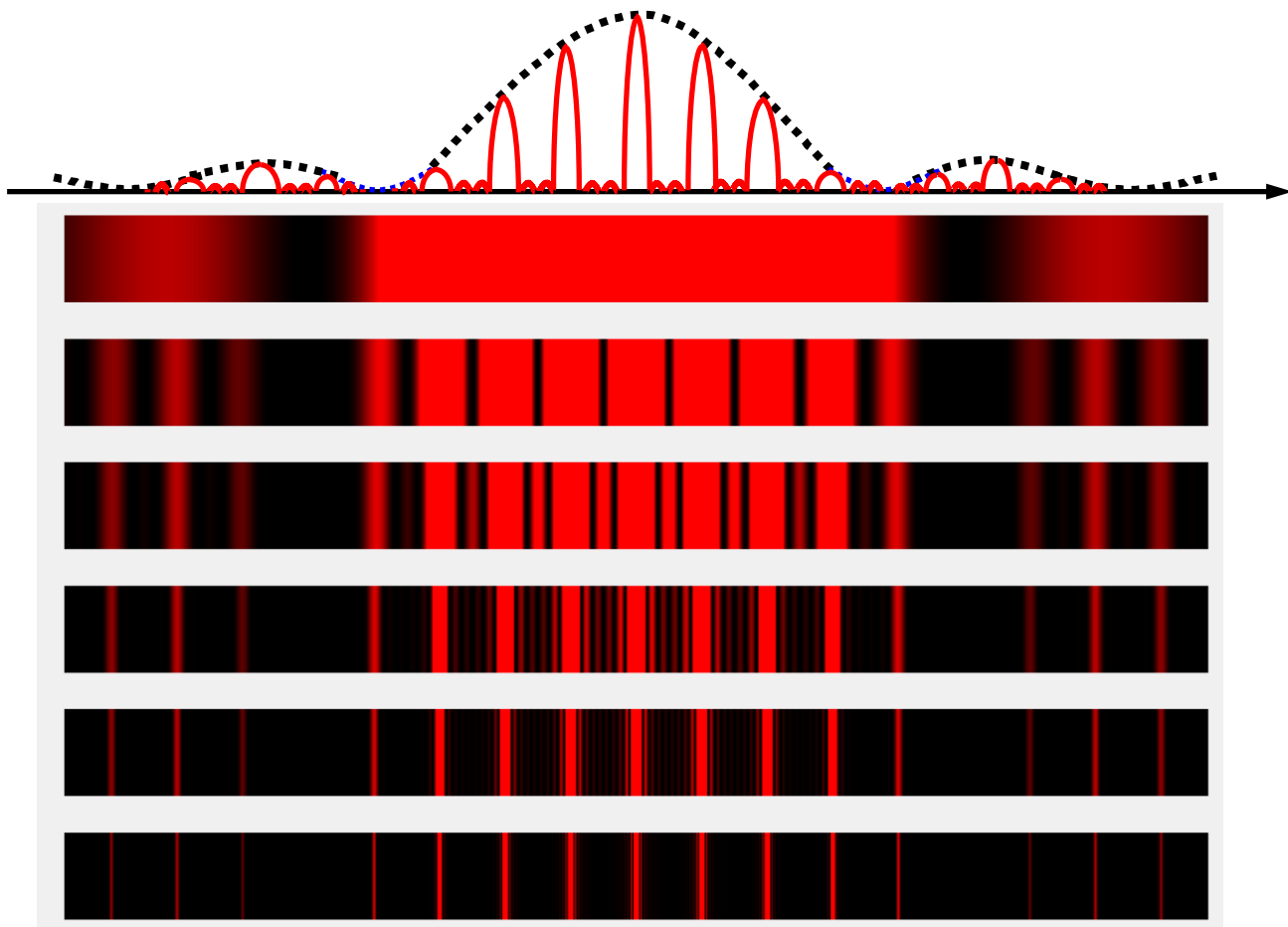
$N=2$

$N=3$

$N=6$

$N=10$

$N=20$



在光栅衍射中，两主极大条纹之间分布着一些暗条纹，也称极小。暗条纹是由于在 φ 方向上，各狭缝射出的光因干涉相消形成的。

★ 暗纹条件:

对于N条缝引起的振动的叠加来说, 什么情况合振动减弱为0呢?

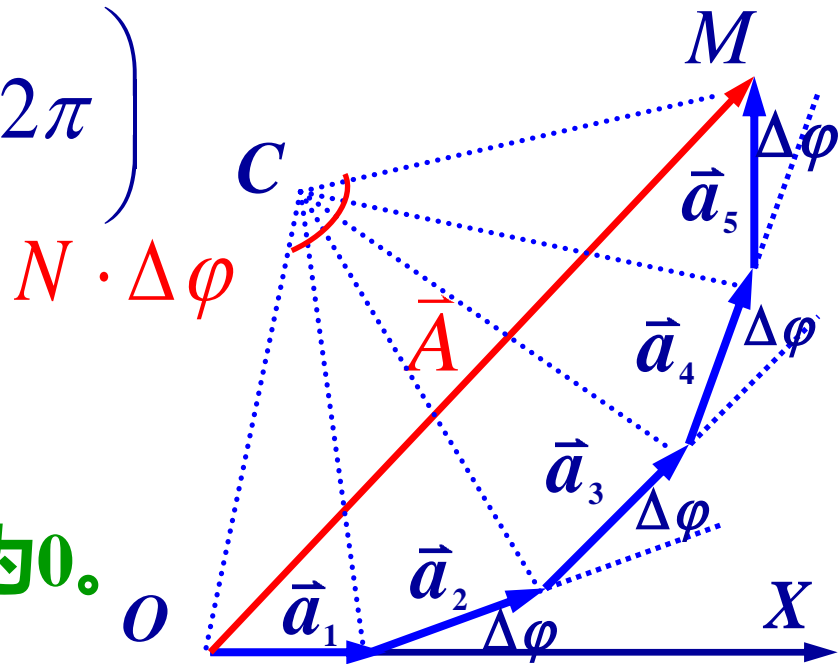
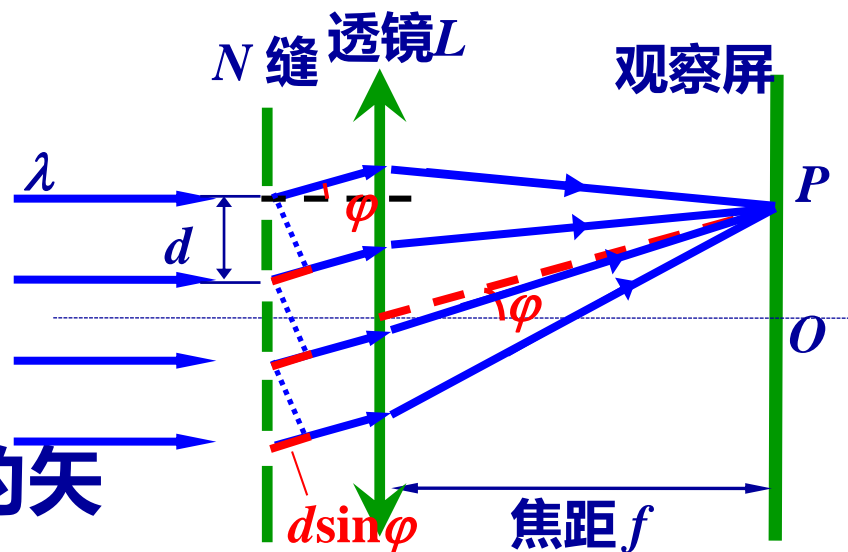
由同频率、同方向振动合成的矢量多边形法则:

$$\left(\Delta\varphi = \frac{d \sin \varphi}{\lambda} 2\pi \right)$$

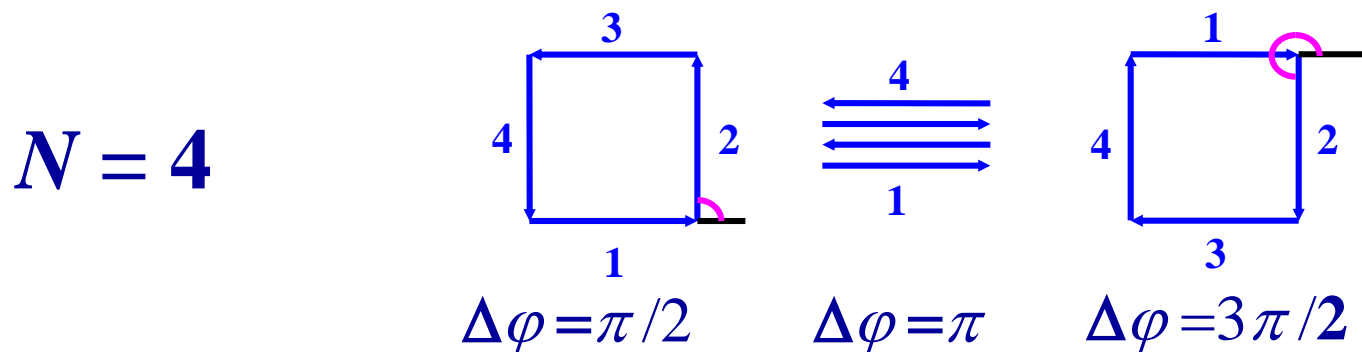
若: $N \Delta\varphi = \pm 2m \pi,$

$$(m = 1, 2, 3, \cdots)$$

合矢量回到O点, 合振动减弱为0。

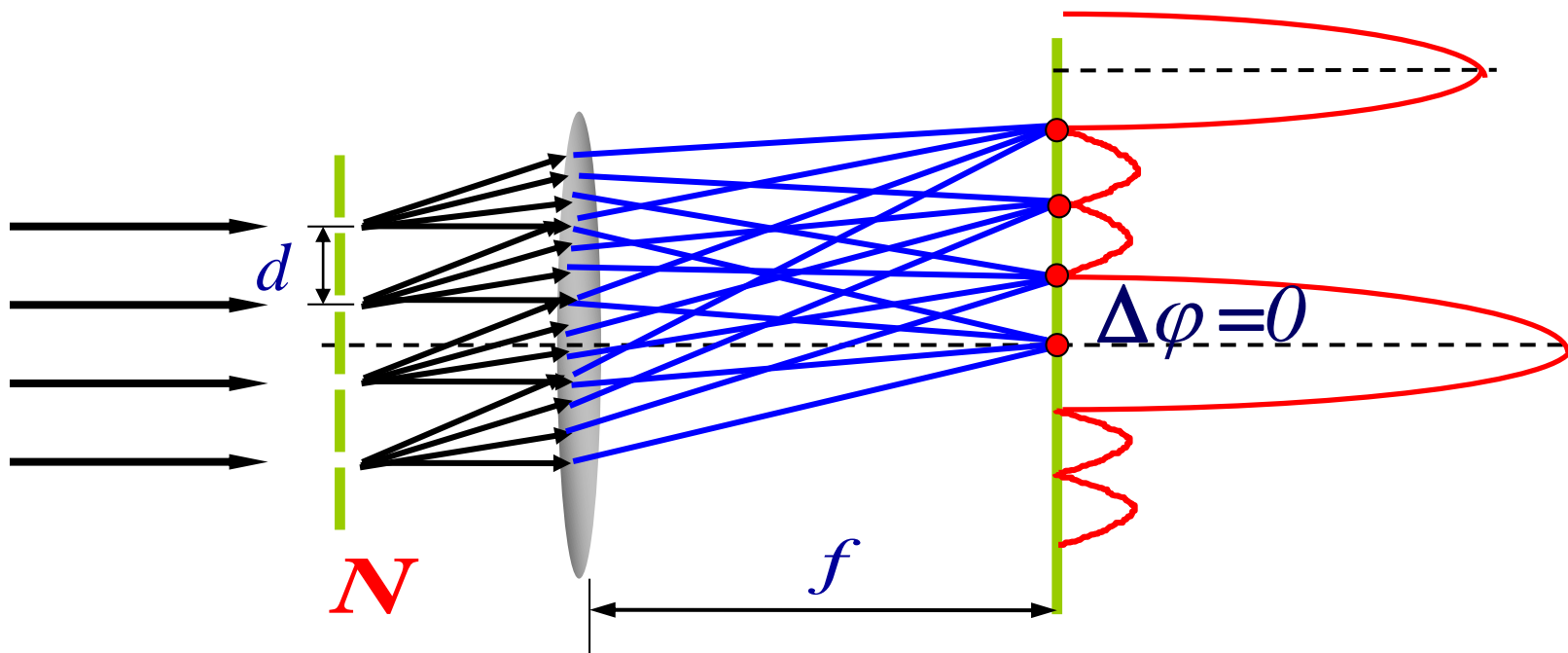


N 个狭缝的光振幅矢量为 $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_N$,
 这 N 个矢量叠加后消失, 可用闭合图形表示。



$$\Delta\varphi = m \frac{2\pi}{N}, m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N - 1$$

$$N\Delta\varphi = \pm m \cdot 2\pi$$



相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\varphi$$

$$\Delta\varphi = \pi/2$$

$$\Delta\varphi = \pi$$

$$\Delta\varphi = 3\pi/2$$

$$N \Delta \varphi = \pm m \cdot 2\pi \quad (m \neq kN, k = 1, 2, \dots) \quad \Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi$$

$$(a + b) \cdot \sin \varphi = \pm m \frac{\lambda}{N}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{暗纹条件}$$

$$m = 1, 2, \dots, N - 1, N + 1, N + 2, \dots, 2N - 1, 2N + 1, \dots$$

0

主极大

N

主极大

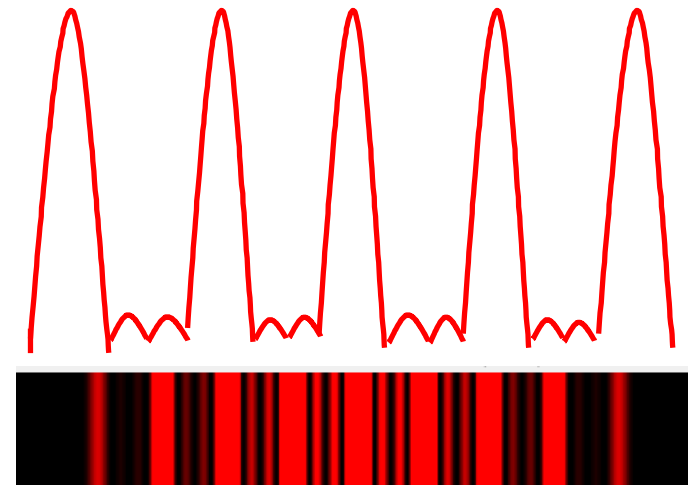
$2N$

主极大

∴ 相邻主极大间有 $N - 1$ 个暗纹。

暗纹与暗纹之间，存在次极大
(强度为主极大的4%)。

∴ 相邻主极大间有 $N - 2$ 个次极大。



例：狭缝条数 $N = 4$,

$$d \cdot \sin \theta = \pm m \frac{\lambda}{N}$$

$$d \cdot \sin \theta = 0, \quad \lambda, \quad 2\lambda, \dots \quad \text{主极大明纹}$$

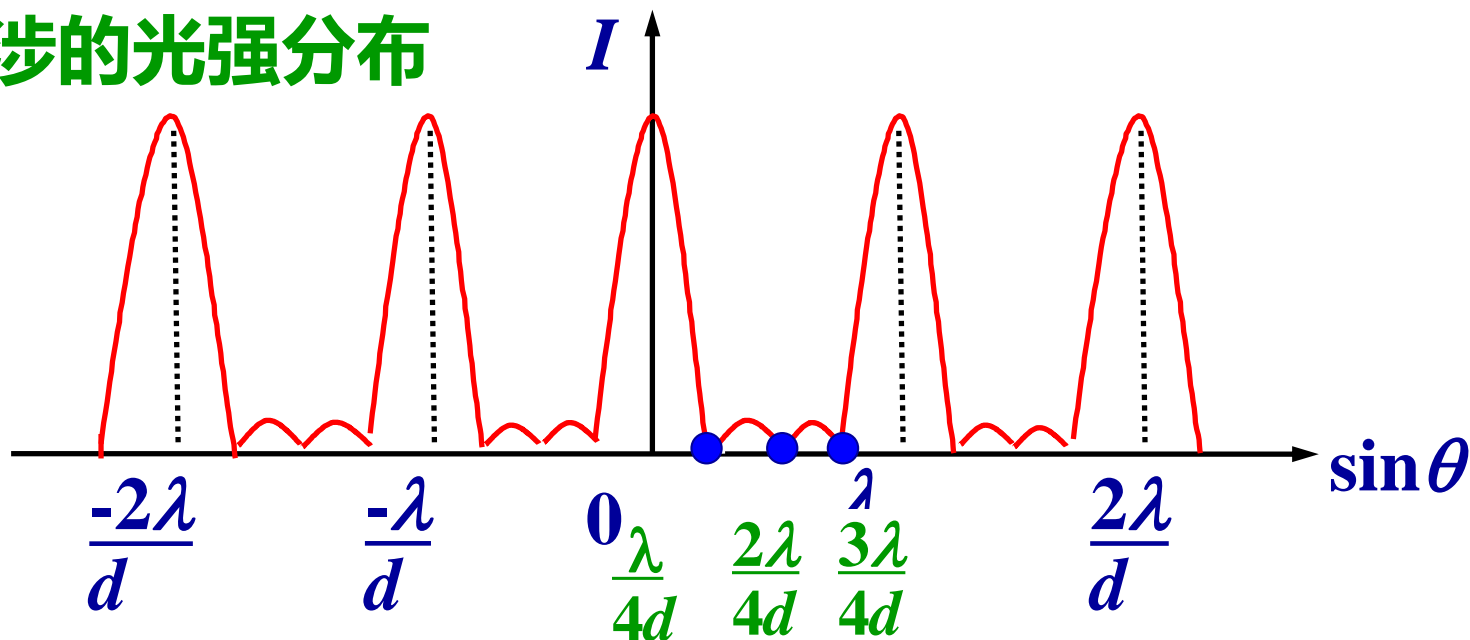
$$d \sin \theta = \frac{\lambda}{4}, \frac{2\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \frac{6\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4} \quad \text{暗纹}$$

$$(m = 1, 2, 3, 5, 6, 7)$$

4条狭缝干涉的光强分布

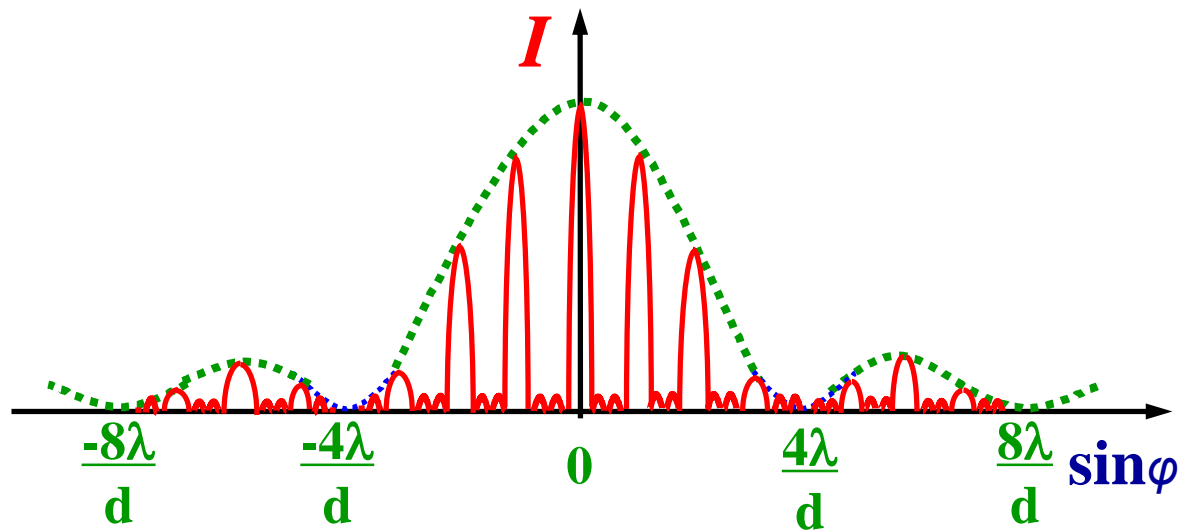
3个暗纹,

2个次明纹



总结光栅衍射的条纹特点

- 1) 主级大明纹的位置与缝数 N 无关，它们对称地分布在中央明纹的两侧，中央明纹光强最大；
- 2) 在相邻的两个主级大之间，有 $N - 1$ 个极小（暗纹）， $N - 2$ 个光强很小的次极大。
- 3) 缺级现象。

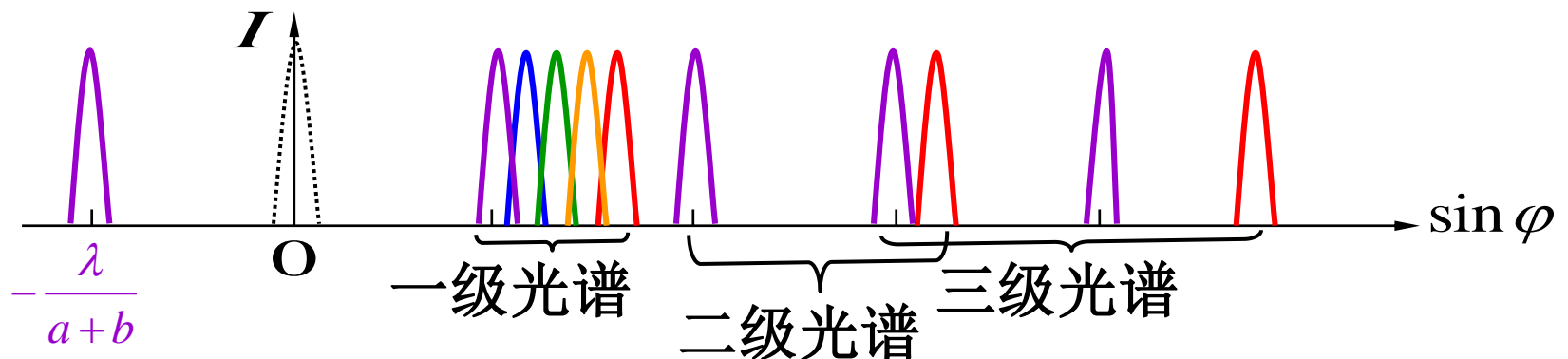


二、衍射光谱

根据光栅方程 $(a+b)\sin\varphi = \pm k\lambda$, $k = 0, 1, 2, \dots$

在光栅常数 $a+b$ 一定时，波长对衍射条纹的分布有影响，波长越长，条纹越疏。

当用白光入射时，中央零级条纹的中心仍为白光，在其两侧对称地分布由紫到红的第一级、第二级等光谱。但从第二级光谱开始，各级条纹发生重叠。



例: 用一块 500 条/mm 刻痕的光栅, 刻痕间距为 $a = 1 \times 10^{-3} \text{ mm}$, 观察波长 $\lambda = 0.59 \mu\text{m}$ 光谱线。

问 (1) 平行光垂直入射时最多能观察到几级光谱线?
实际能观察到几条光谱线?

(2) 平行光与光栅法线夹角 $\theta = 30^\circ$ 时入射, 最多能观察到几级光谱线?

解 (1) 光栅常数
$$a + b = \frac{1 \times 10^{-3}}{500} = 2 \times 10^{-6} \text{ m}$$

k 的可能最大值相应于 $\varphi = \pi/2$, 即 $\sin \varphi = 1$

$$k = \frac{a + b}{\lambda} = \frac{2 \times 10^{-6}}{0.59 \times 10^{-6}} = 3.4$$

故最多能观察到第 3 级光谱。

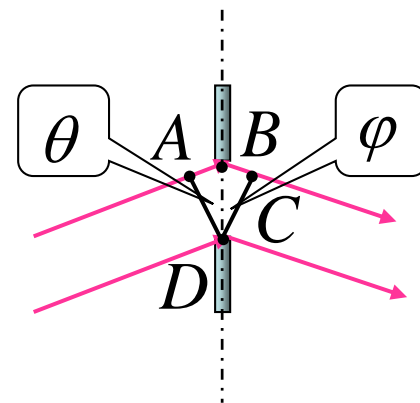
又，已知缝宽 $a = 1 \times 10^{-6} \text{ m}$ ，由

$$\frac{a+b}{a} = \frac{2 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-6}} = 2$$

知光栅衍射光谱线 2, 4, 6, ... 缺级，故实际能看到 0、1、3 级谱线共 5 条。

(2) 光程差

$$\begin{aligned} & AB + BC \\ &= (a+b) \sin \theta + (a+b) \sin \varphi \\ &= (a+b)(\sin \theta + \sin \varphi) \end{aligned}$$



由光栅方程，得

$$k = \frac{(a + b)(\sin \theta + \sin \varphi)}{\lambda}$$

由题设 $\theta = 30^\circ$ ， k 的可能最大值相应于 $\varphi = \frac{\pi}{2}$

因此

$$k = \frac{2 \times 10^{-6} (\sin 30^\circ + 1)}{0.59 \times 10^{-6}} \approx 5$$

30° 斜入射时，可以观察到第 5 级光谱线。

例： 波长为600 nm 的单色光垂直入射在一光栅上，第二、第三级主极大明纹分别出现在 $\sin\theta_2=0.2$ 及 $\sin\theta_3=0.3$ 处，第四级缺级，求：

- (1) 光栅常数；
- (2) 光栅上狭缝的**最小宽度**；
- (3) 屏上一共能观察到多少根主极大明纹？

解： (1) (2) 根据光栅方程得： $(a + b)\sin\theta_2 = 2\lambda$

由缺级条件得 $(a + b)/a = k/k'$ ，其中 **$k' = 1$, $k = 4$** 。

解缺级条件得 **$b = 3a$** ，代入光栅方程得狭缝的宽度为：
 $a = \lambda/2\sin\theta_2 = 1500(\text{nm})$ 。

刻痕的宽度为： $b = 3a = 4500(\text{nm})$ ，
光栅常数为： $a + b = 6000(\text{nm})$ 。

(3) 在光栅方程 $(a + b)\sin\theta = k\lambda$ 中,

令 $\sin\theta = 1$, 得:

$$k = (a + b)/\lambda = 10$$

由于 $\theta = 90^\circ$ 的条纹是观察不到的, 所以明条纹的最高级数为 9。

又由于缺了 4 和 8 级明条纹, 所以在屏上能够观察到 $2 \times 7 + 1 = 15$ 条明纹。

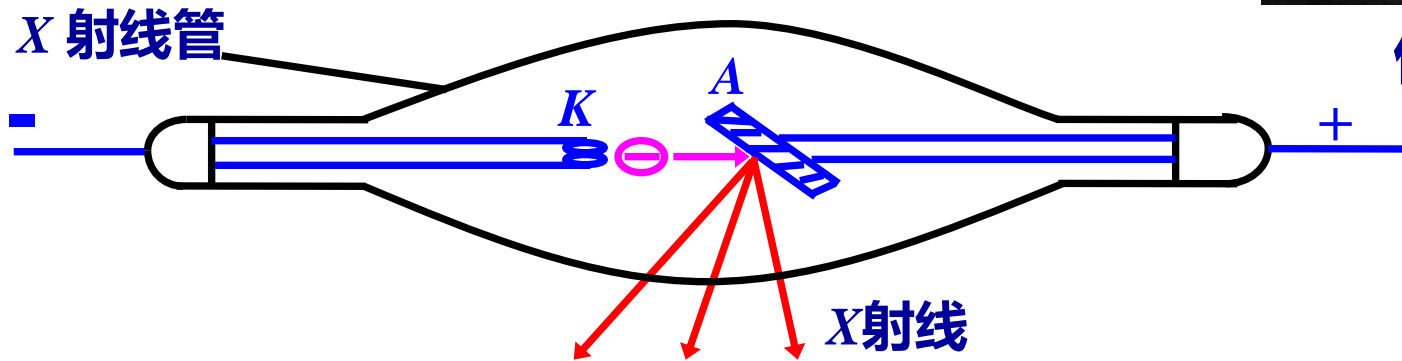
X 射线在晶体上的衍射

1. X 射线的产生

X射线： λ 在 10^{-1} — 10^2\AA 范围内的电磁波



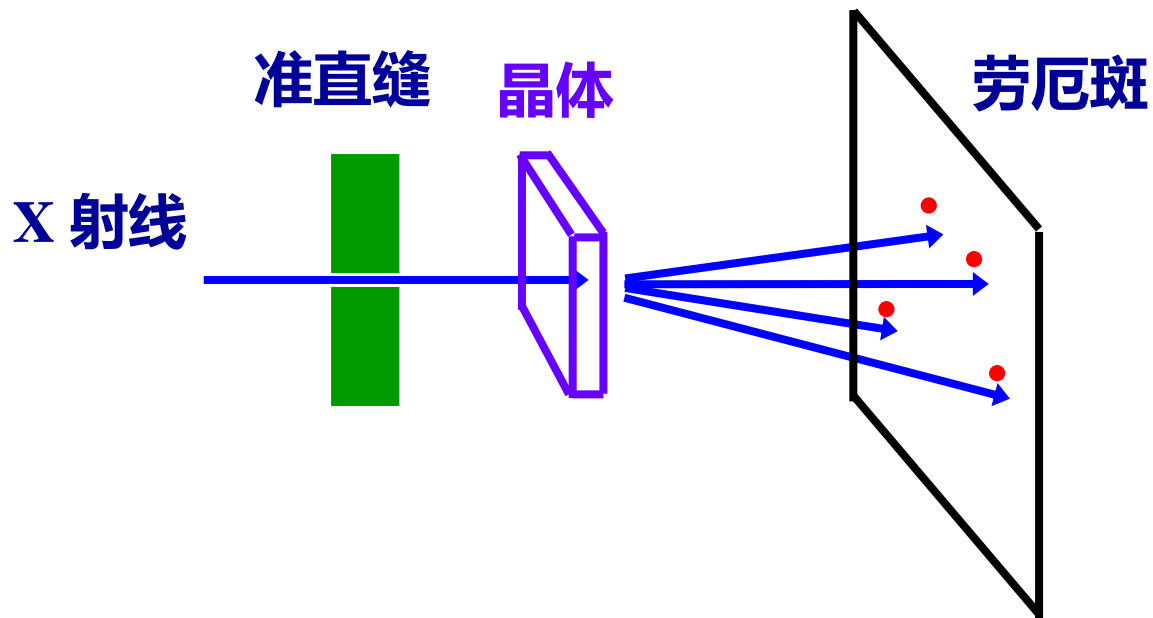
伦琴



K —阴极, A —阳极(钼、钨、铜等金属),
 A — K 间加几万伏高压, 以加速阴极发射的热电子。

2. 劳厄实验

劳厄实验是为了实现X射线的衍射而设计的。晶体相当于三维光栅，衍射图样（劳厄斑）证实了X射线的波动性。



劳厄

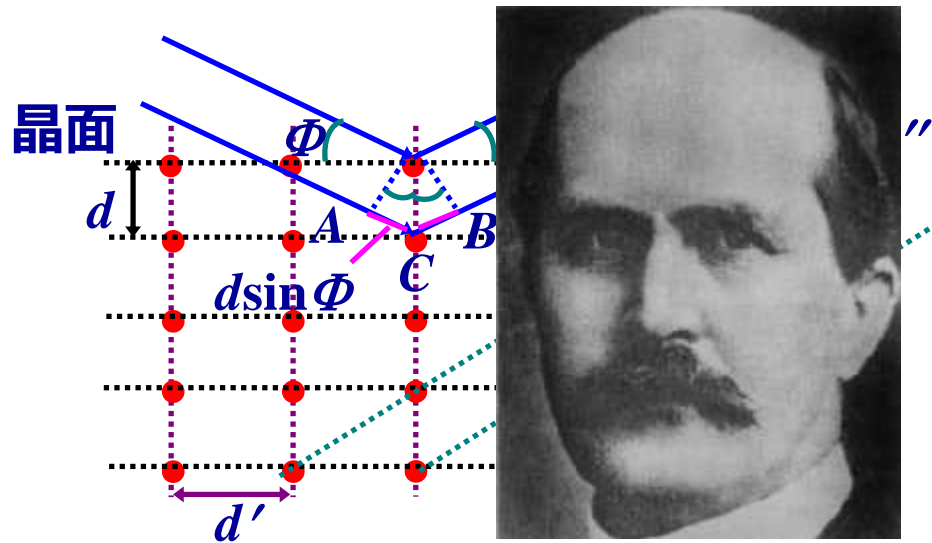
3. 布喇格公式

d : 晶面间距(晶格常数)

Φ : 掠射角

• 衍射中心 每个原子都是散射子波的子波源。

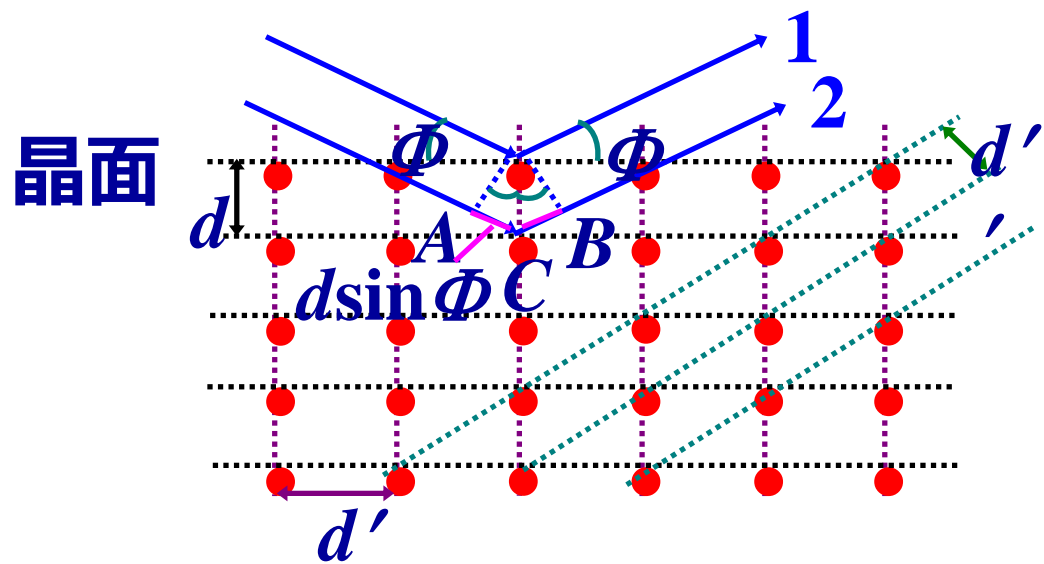
• 点间散射光的干涉



同一层晶面上各原子散射的光相干涉，相邻两束光的光程差为零。

d : 晶面间距(晶格常数)

Φ : 掠射角



• 不同晶面间散射光的干涉

$$\delta = \overline{AC} + \overline{CB} = 2d \cdot \sin \Phi$$

散射光干涉加强条件:

$$2d \cdot \sin \Phi = k\lambda \quad (k = 1, 2, \dots) \text{ — 布喇格公式}$$

§ 13-10 线偏振光 自然光

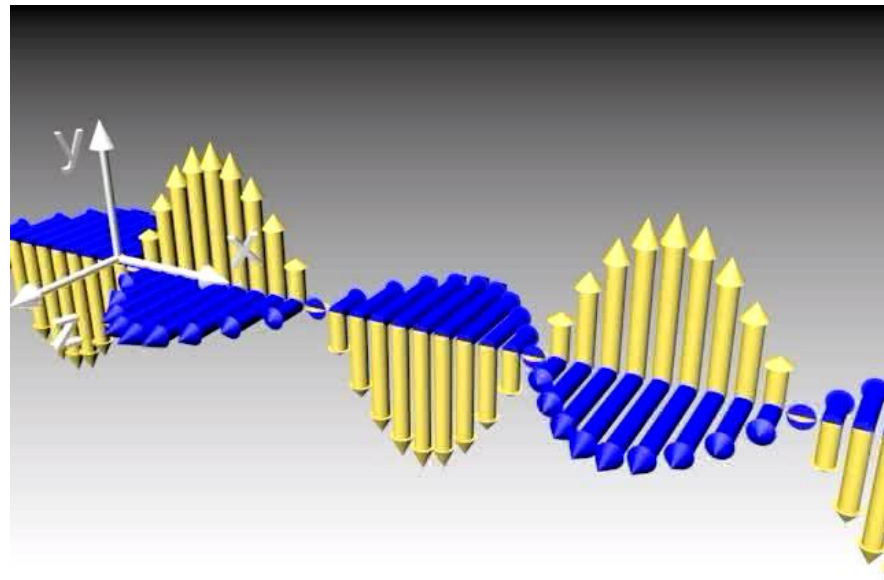
平面简谐电磁波

电磁波的一般性质

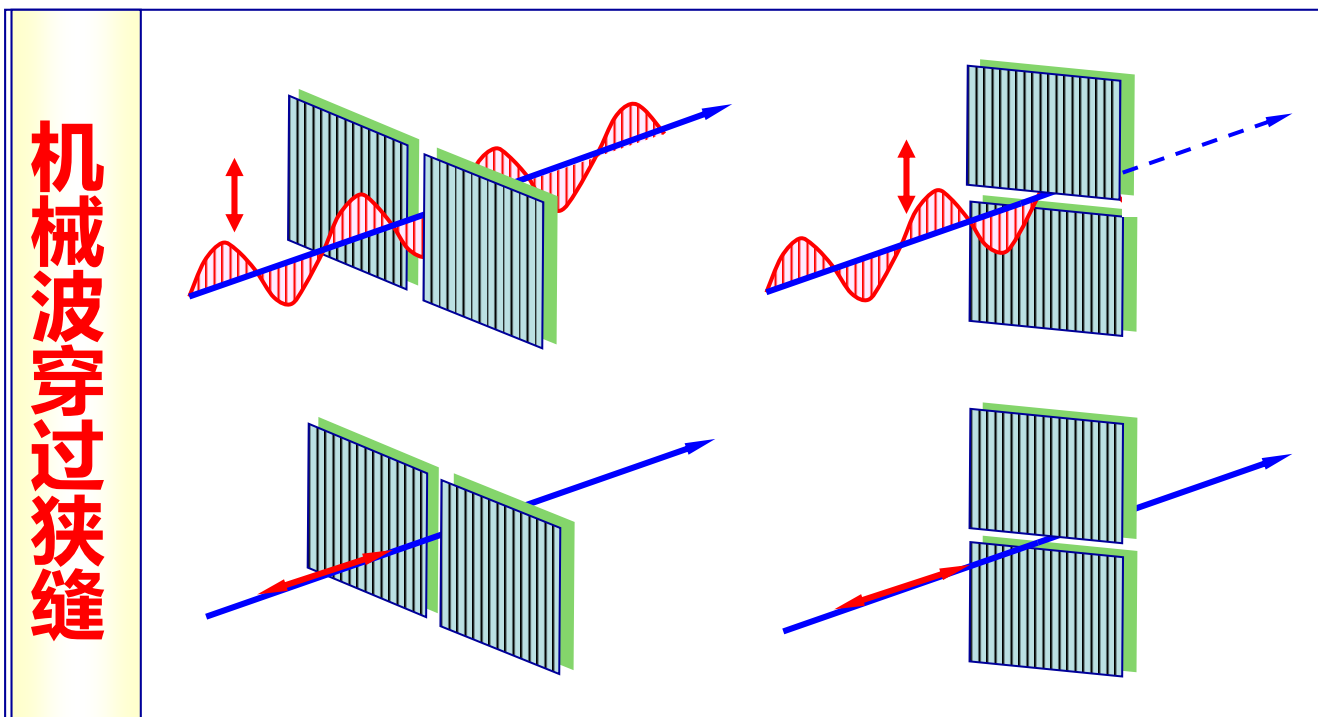
(1) 电磁波是横波。 E 和 H 都垂直于波的传播方向，三者相互垂直，并构成右手螺旋。

(2) 沿给定方向传播的电磁波， E 和 H 分别在各自平面内振动，这种特性称为**偏振**。

光的偏振现象，是光是横波的最有力的实验证据。

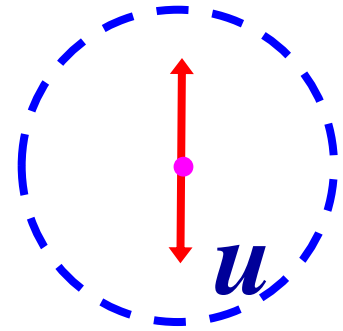
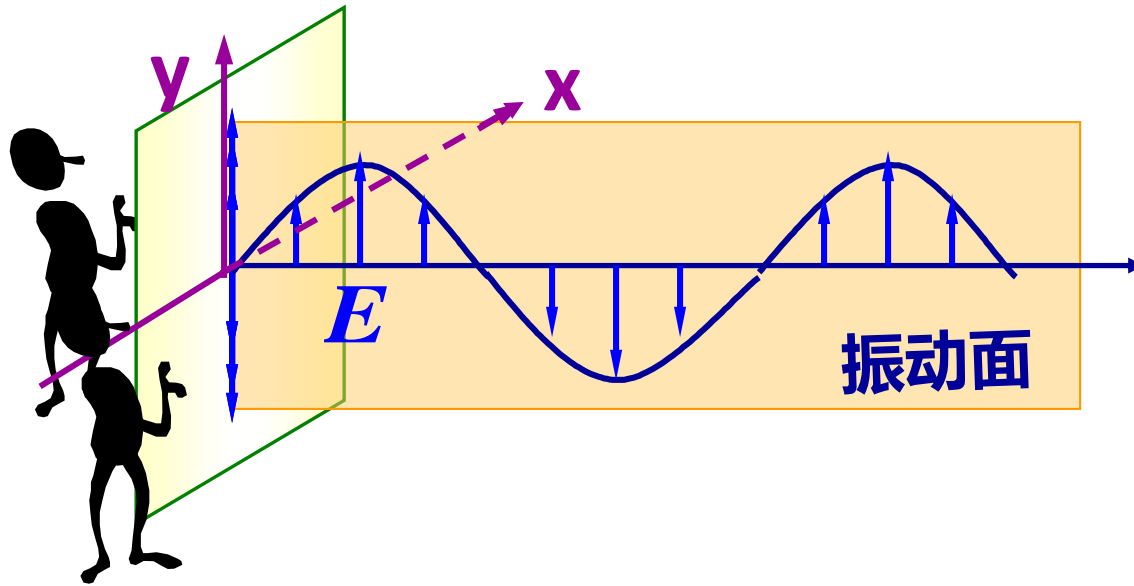


说明：只有横波才具有偏振现象，偏振现象是横波区别于纵波的最明显的特征。



1、线偏振光

光矢量只在一个固定平面内，并沿一个固定方向振动，称其为**线偏振光**或**平面偏振光**，完全偏振光。

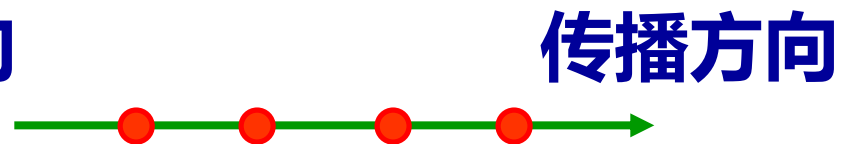


面对光的传播方向看

★ 线偏振光的表示法：

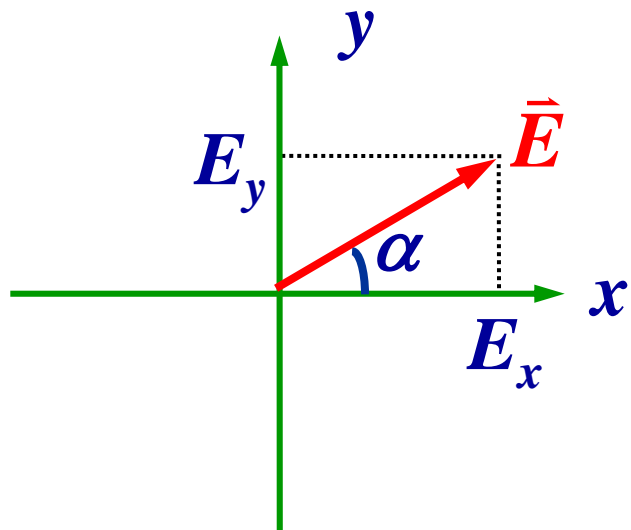


光振动平行纸面



光振动垂直纸面

★ 线偏振光可沿两个相互垂直的方向分解



$$E_x = E \cos \alpha,$$

$$E_y = E \sin \alpha$$

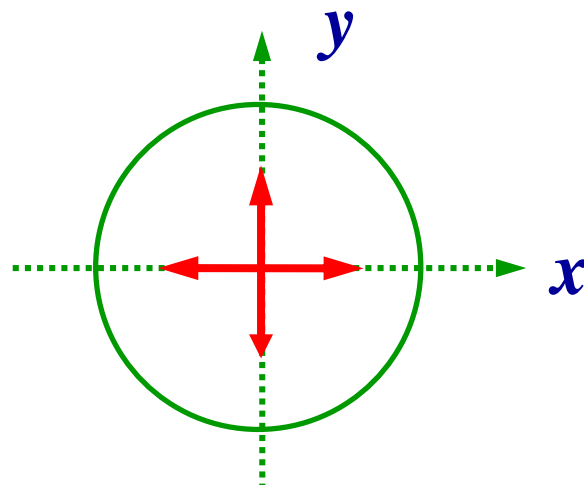
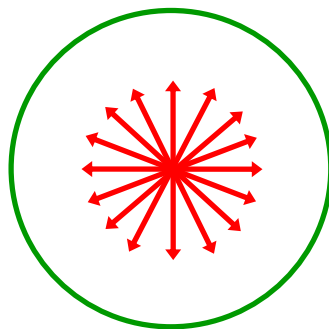
2、自然光

自然光是非偏振光。

普通光源中大量原子的跃迁独立发光， 振动方向各不相同， 但机会均等。

自然光

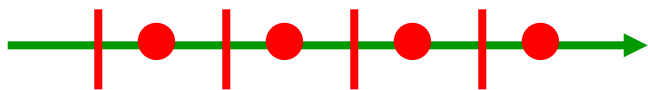
E 没有优势方向



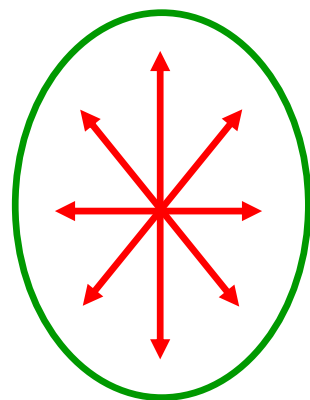
自然光可分解为两束互相独立的、等振幅的、振动方向垂直的、无固定相位关系的线偏振光。

$$\bar{E}_x = \bar{E}_y, \quad I_x = I_y = \frac{1}{2} I.$$

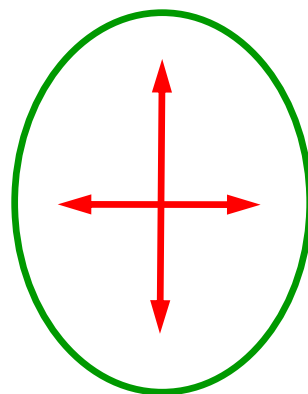
自然光的图示表示法：



*3、部分偏振光



部分偏振光



部分偏振光的分解

部分偏振光可分解为两束振动方向相互垂直的、不等幅的、无固定相位关系的线偏振光。

部分偏振光的表示法：



平行纸面的光振
动较强



垂直纸面的光振
动较强

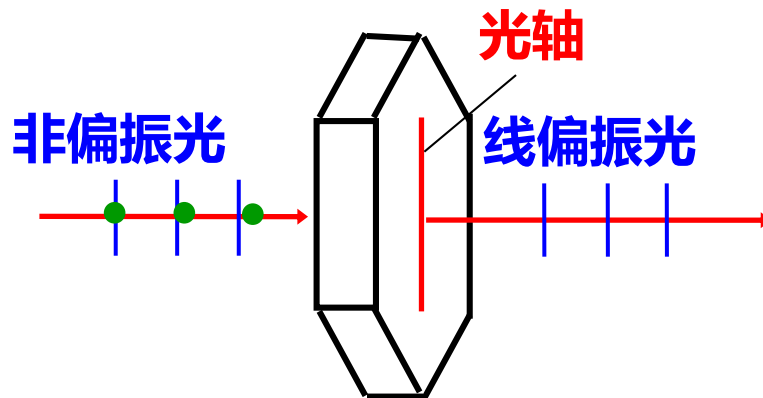
§ 13-11 偏振片的起偏和检偏 马吕斯定律

1. 起偏和检偏

- 起偏：从自然光获得偏振光。
- 起偏器：起偏的光学器件。
- 起偏的原理：利用某些材料在光学性质上的各向异性。

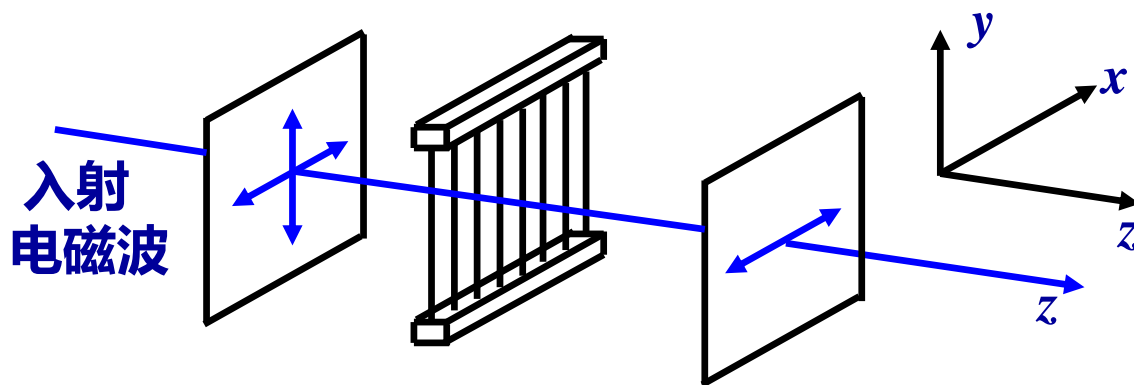
1.1 偏振片

微晶型



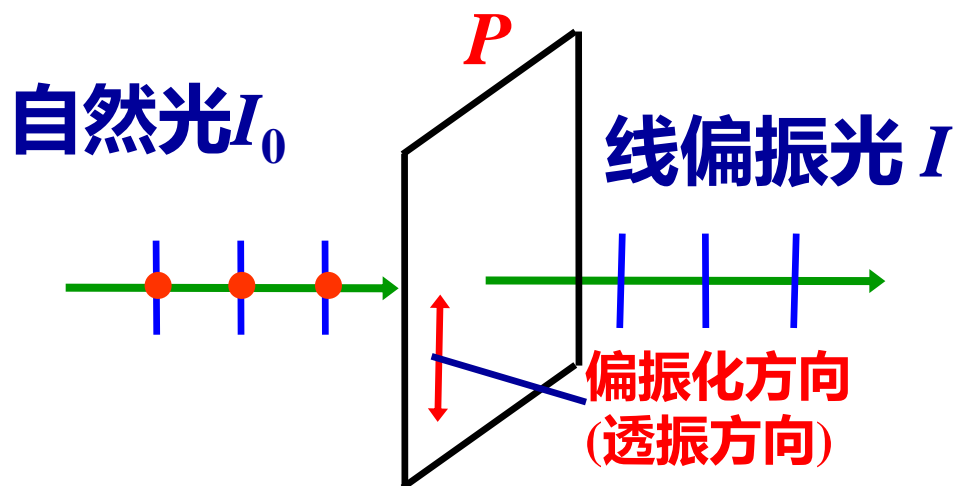
电气石晶片

分子型



线栅起偏器

偏振片的起偏



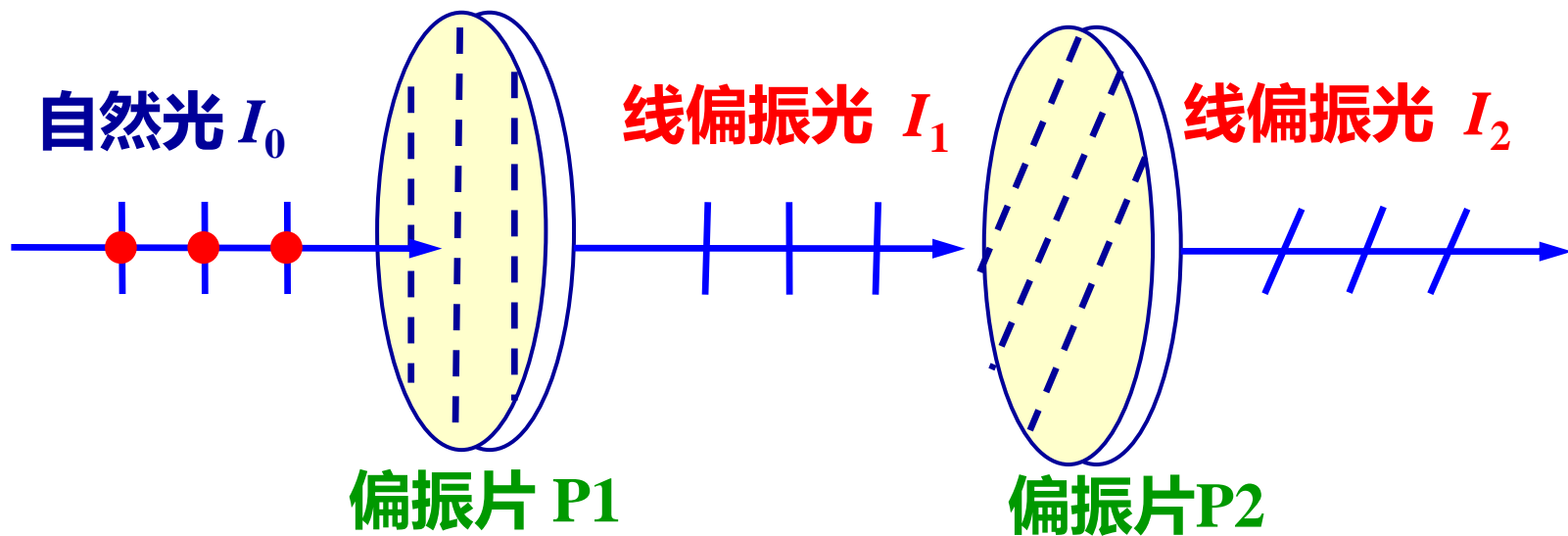
自然光入射，透射光将成为线偏振光，偏振方向平行于偏振片的透振方向。

★ 透射线偏振光的强度，等于入射自然光强度的1/2。

$$I = \frac{1}{2} I_0$$

1.2 检偏：

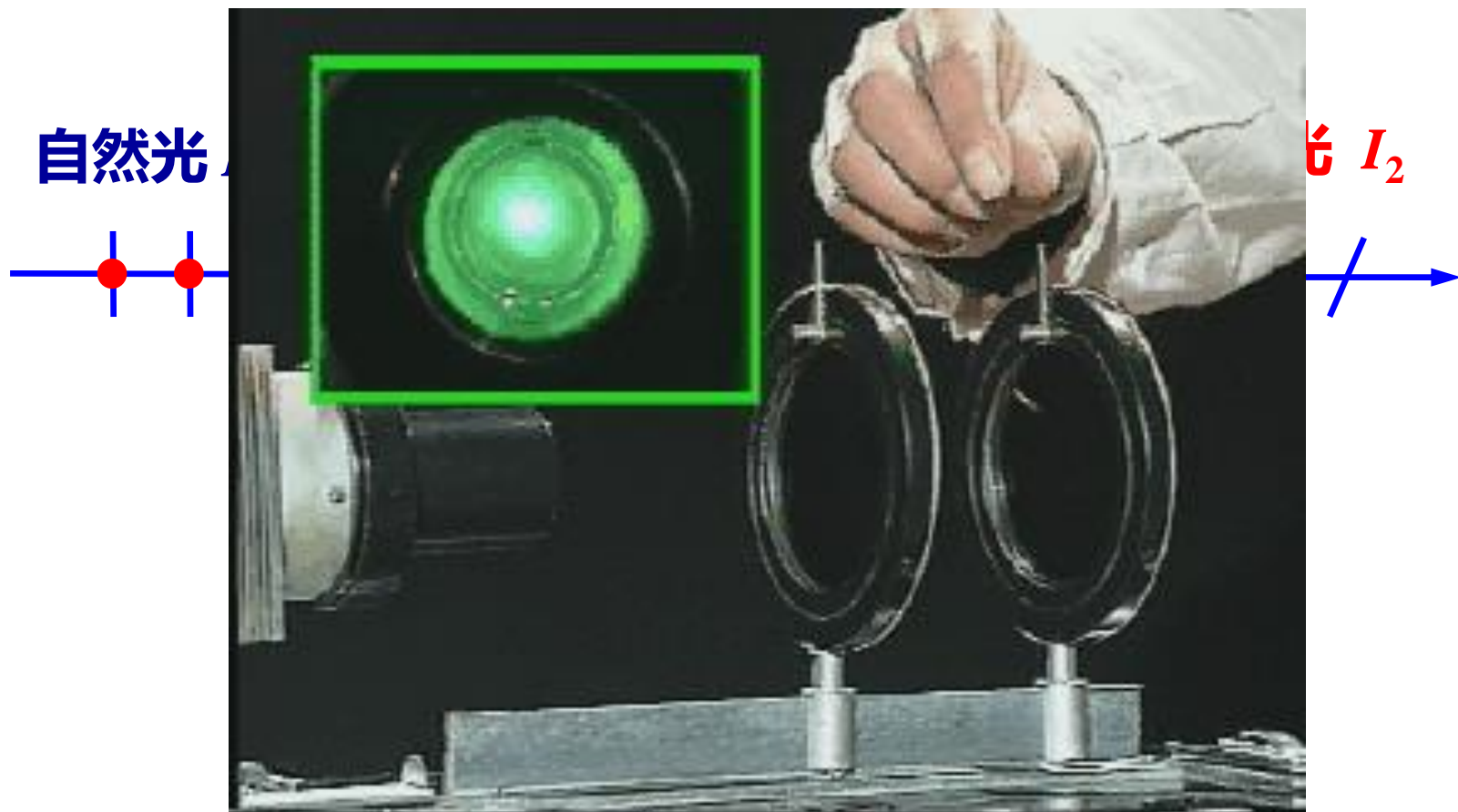
用偏振器件分析、检验光的偏振态



①当偏振片P2的偏振化方向与偏振片P1的偏振方向平行，透过的光强最强。

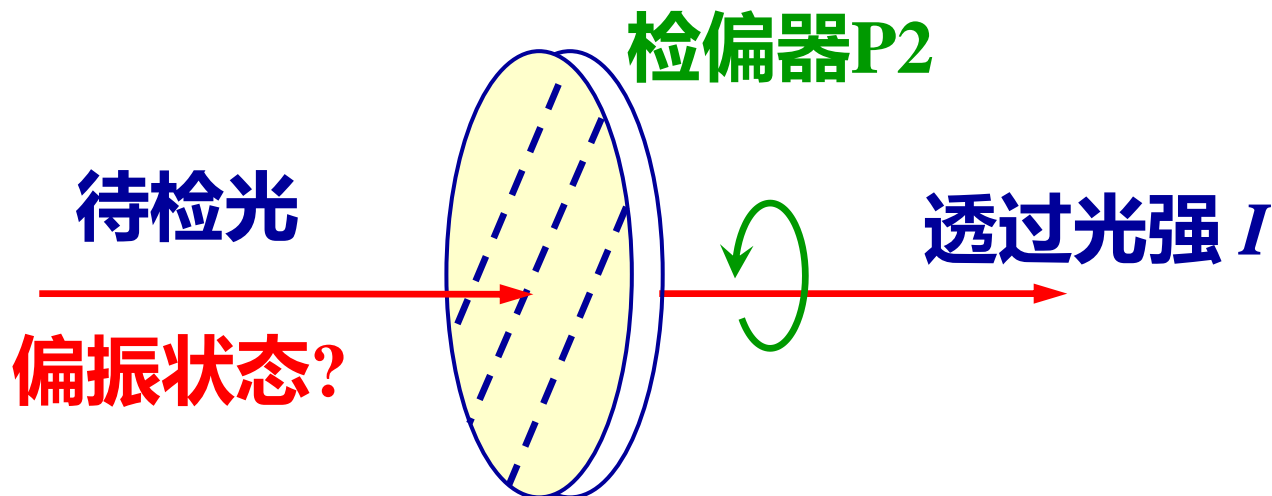
②当偏振片P2的偏振化方向与偏振片P1的偏振方向垂直，透过的光强为0。——消光。

③当偏振片 P2绕着光的传播方向慢慢转动，



旋转一周将出现2次最亮，2次最暗（消光）。

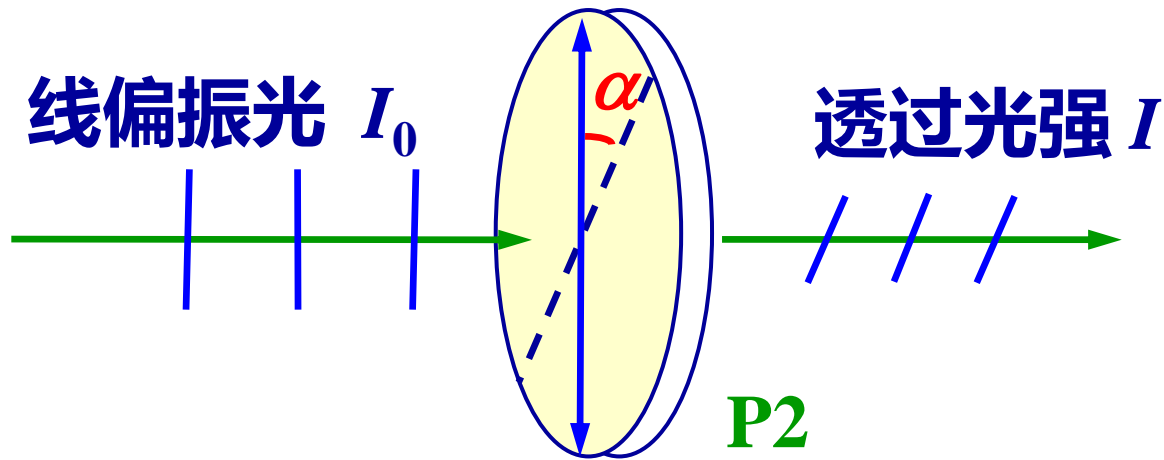
1.3 思考



- 透过光强 I 不变→待检光是什么光?
(偏振光? 自然光? 部分偏振光?)
- 透过光强 I 变化, 且有消光→待检光是什么光?
- 透过光强 I 变化, 但无消光→待检光是什么光?

2、马吕斯定律 (Malus law)

定量描述线偏振光通过偏振片P前后的光强关系。



如果入射线偏振光的光强为 I_0 ，则透射光的光强 I 满足：

$$I = I_0 \cos^2 \alpha,$$

其中， α 是检偏器的偏振方向和入射的线偏振光的振动方向之间的夹角。

马吕斯定律的证明:

透射光矢量的振幅为:

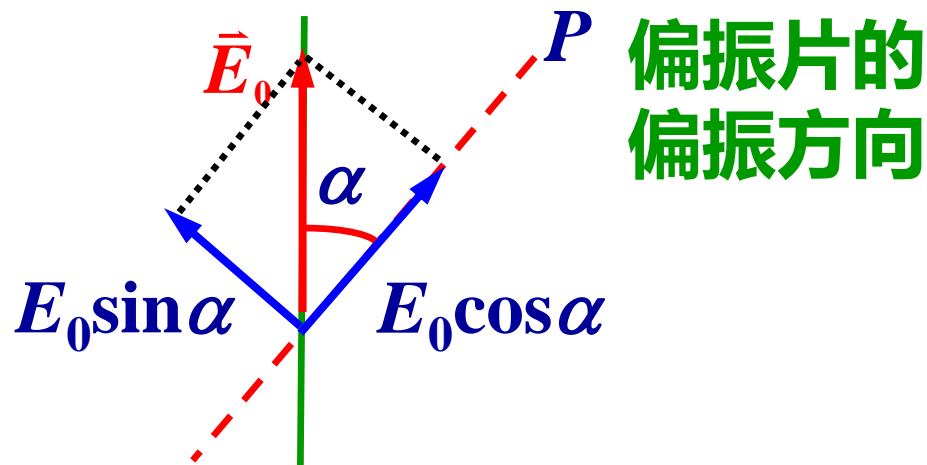
$$E = E_0 \cos \alpha,$$

$$\because I_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \quad \therefore I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \alpha$$

$$\therefore I = I_0 \cos^2 \alpha \quad \text{——马吕斯定律 (1809)}$$

$$\alpha = 0, \quad I = I_{\max} = I_0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad I = 0 \quad \text{——消光}$$



例题： 用两偏振片平行放置作为起偏器和检偏器。在它们的偏振化方向成 30° 角时，观测一光源，又在成 60° 角时，观察同一位置处的另一光源，两次所得的强度相等。求两光源照到起偏器上光强之比。

解： 令 I_1 和 I_2 分别为两光源照到起偏器上的光强。透过起偏器后，光的强度分别为 $I_1/2$ 和 $I_2/2$ 。按照马吕斯定律，透过检偏器后光的强度为

$$I'_1 = \frac{1}{2} I_1 \cos^2 30^\circ \qquad I'_2 = \frac{1}{2} I_2 \cos^2 60^\circ$$

$$I'_1 = I'_2 \qquad \text{即} \quad I_1 \cos^2 30^\circ = I_2 \cos^2 60^\circ$$

所以
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\cos^2 60^\circ}{\cos^2 30^\circ} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

*偏振光与3D电影

