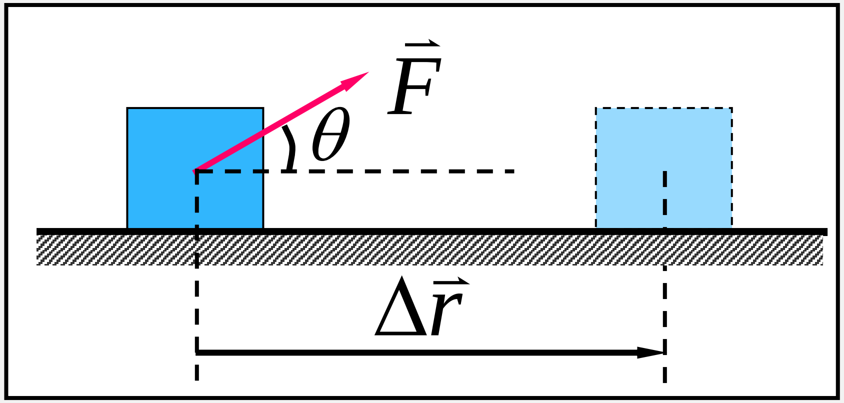
第三章

功和能

CONTENTS

CONTENTS

1. 恒力作用下的功



$$\vec{F} \equiv F(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$$

$$A = \int_{r0}^{r1} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F}\cdot\int_{r0}^{r1}\mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F\cos\theta\cdot\left|\Delta\vec{r}\right|$$

2. 变力的功

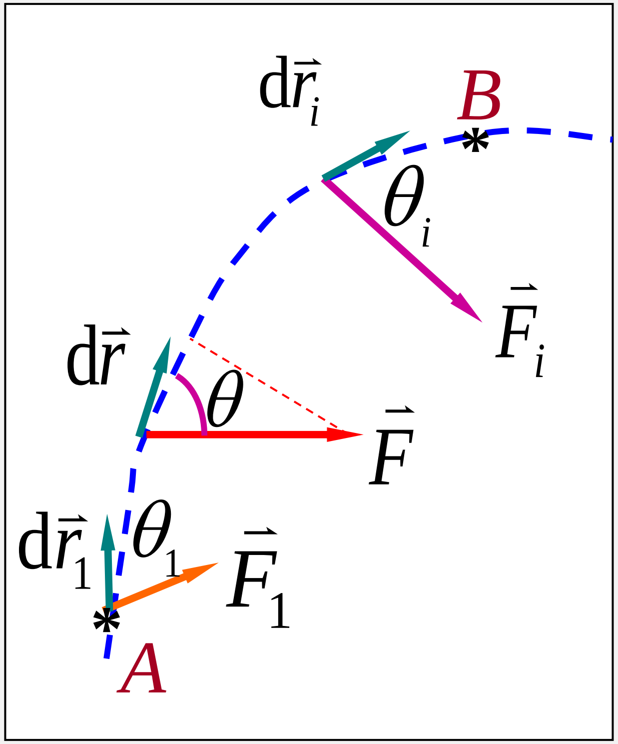
质点在变力 $\vec{F}$ 作用下，

元功：

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\theta\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|$$

$$\mathrm{d}s = \left|\mathrm{d}\vec{r}\right|$$

$$\mathrm{d}A = F\cos\theta\,\mathrm{d}s$$



从 **A →B**，变力作的总功

$$\boxed{A = \int_A^B \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B F\cos\theta\,\mathrm{d}s}$$

注意：这里**F**一般情况下随位置而改变！！

功的正负由力和瞬时位移的夹角决定

$0^{\circ} < \theta < 90^{\circ}, \quad \mathrm{d}A > 0$

平行分量跟位移方向相同

正功

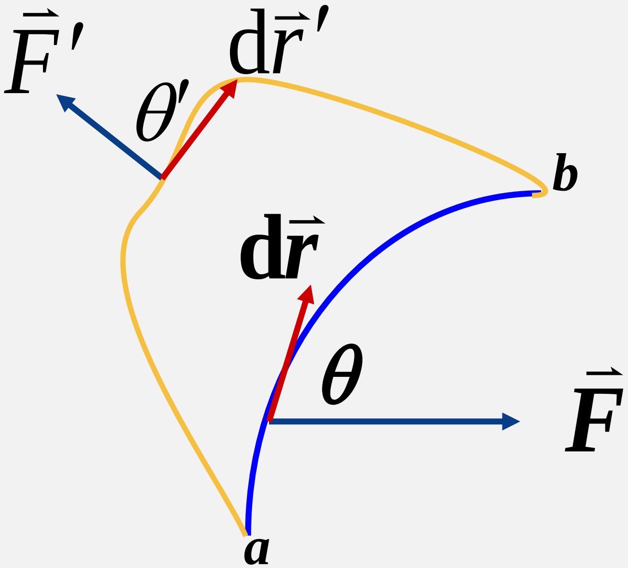
$90^{\circ} < \theta < 180^{\circ}, \quad \mathrm{d}A < 0$

平行分量跟位移方向相反

负功

$\theta = 90^{\circ} \quad \vec{F} \perp \mathrm{d}\vec{r} \quad \mathrm{d}A = 0$

垂直分量不做功



$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

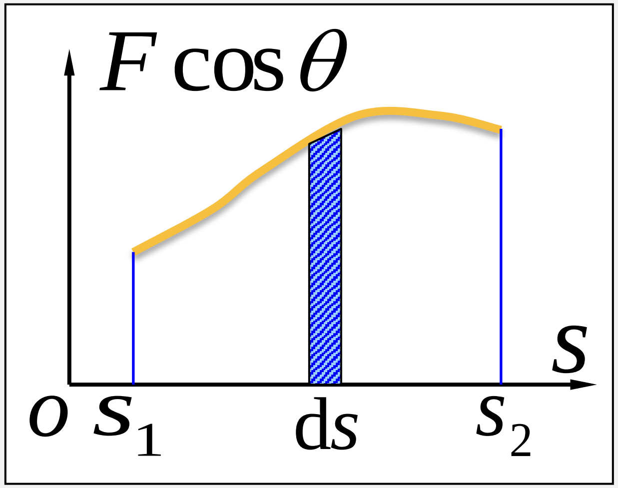
保守力做功与路径无关！！
如：重力，弹力

功的正负由力和瞬时位移的夹角决定

功是过程量,一般情况下与路径有关

$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$= \int_a^b F \cos\theta \cdot \mathrm{d}s$$



功的正负由力和瞬时位移的夹角决定

功是过程量,一般情况下与路径有关

作功可以用图示的面积来表示

$$\vec{F} = \sum_{i}^{n} \vec{F}_i$$

$$A = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int \sum_{i}^{n} \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \ldots + \int \vec{F}_\mathrm{n} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$A = A_1 + \cdots + A_\mathrm{n}$$

单位：**J**（焦耳）**= N·m**

- 功的正负由力和瞬时位移的夹角决定
- 功是过程量,一般情况下与路径有关
- 作功可以用图示的面积来表示
- 合力作功等于各个分力作功的代数和

- 功率 力在单位时间内所作的功。

平均功率 $\overline{P}=\frac{\Delta A}{\Delta t}$

瞬时功率 $P=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$

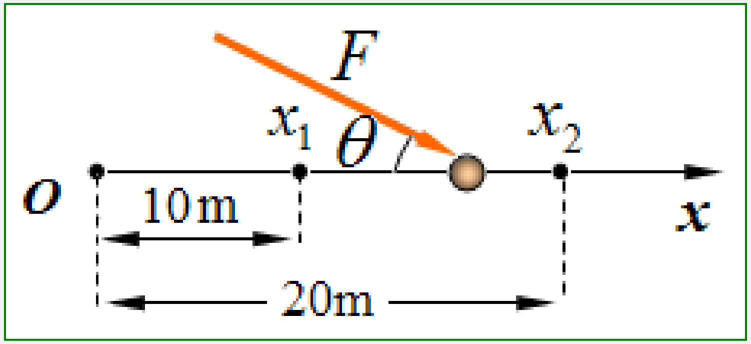
$$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\boxed{=\vec{F}\cdot\vec{v}}=Fv\cos\theta$$

功率单位：**W 或 J s $^{-1}$**

例1 质点 M 在力F 作用下沿x轴运动，如图。力F 的大小和方向角θ随x变化的规律分别：$F=6x,\ \cos\theta=0.70-0.02x$ 。试求质点从 x_1=10m处运动到x_2=20m处的过程中力F 所做的功。

解 F 使质点移动dx做的元功为



$$\mathrm{d}A=F_x\mathrm{d}x=F\cos\theta\,\mathrm{d}x$$

$$=6x(0.70-0.02x)\mathrm{d}x$$

在全过程上的功为

$$A=\int_{x_1}^{x_2}6x(0.70-0.02x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{10}^{20}6x\times0.70\mathrm{d}x-\int_{10}^{20}6x\times0.02x\mathrm{d}x$$

$$=350\mathrm{J}$$

例2质量为10kg的质点，在外力作用下，在 ***x*, *y*** **平面上作曲线运动, t=0 时刻 y=0，t时刻**该质点速度为

$$\vec{v} = 4t^2\vec{i} + 16\vec{j}$$

求在质点从 $y = 16\ \mathrm{m}$ 到 $y = 32\ \mathrm{m}$ 的过程中，外力做的功。

分析

$$A = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad \vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

解

$$\vec{F}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=80t\,\vec{i}$$

$$A=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int\vec{F}\cdot(\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j})$$

$$=\int 80t\,\vec{i}\cdot(\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j})$$

$$=\int 80t\,\mathrm{d}x$$

统一变量 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x = 4t^2$ $\mathrm{d}x = 4t^2\mathrm{d}t$

$$A = \int 320t^3\,\mathrm{d}t$$

确定时间的上下限

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y = 16$ 积分，得 $y = 16t$

y: $16 \to 32$ m t: $1 \to 2$ s

$$A = \int_1^2 320t^3\mathrm{d}t = 1200\ J$$

CONTENTS

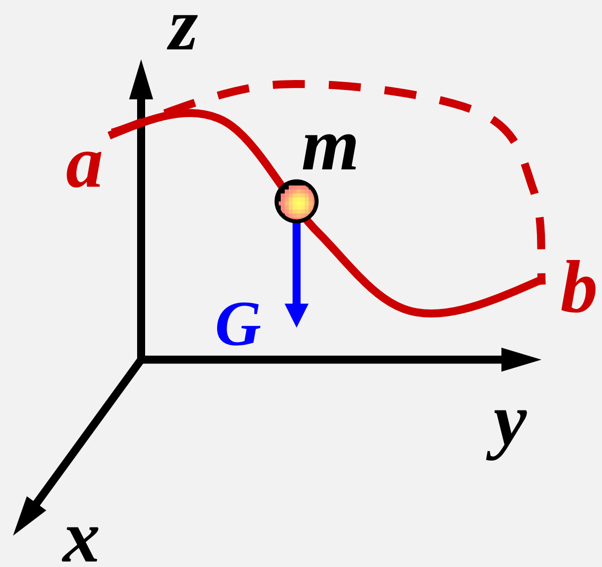
➢ 重力作功

重力 $\vec{G} = -mg\,\vec{k}$ z轴反方向

$$A = \int_a^b \vec{G} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

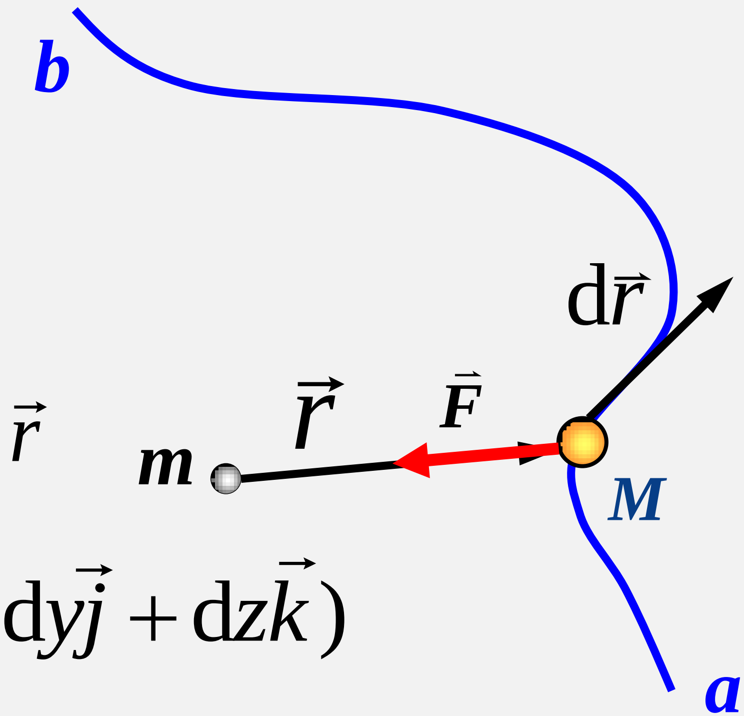
$$= \int_a^b -mg\,\vec{k} \cdot (\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k})$$

$$= \int_{Z_a}^{Z_b} (-mg)\mathrm{d}z = mg(z_a - z_b)$$



重力是保守力，作功只与始、末位置有关，而与质点路径无关。

➢ 万有引力作功



万有引力 $\vec{F}=G\frac{mM}{r^2}(-\frac{\vec{r}}{r})$

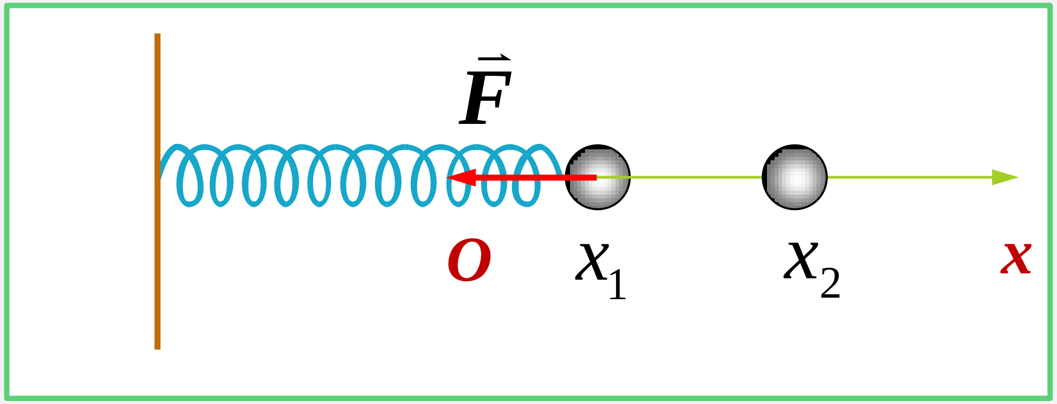
$$A=\int_{r_a}^{r_b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{r_a}^{r_b}-G\frac{mM}{r^3}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}&=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot(\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}+\mathrm{d}z\vec{k})\\&=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)=\frac{1}{2}\mathrm{d}(r^2)=r\mathrm{d}r\end{aligned}$$

$$A=\int_{r_a}^{r_b}-G\frac{mM}{r^3}r\,\mathrm{d}r=\boxed{GmM(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a})}$$

万有引力也是保守力，做功与路径无关。

➢ 弹性力的功



弹性力也是保守力，作功与质点路径无关。

弹簧弹性力（胡克定律） $F=-kx$

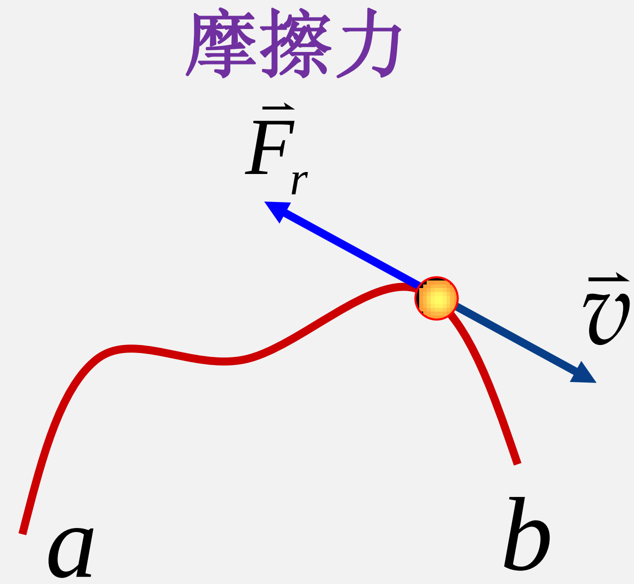
由x_1到x_2 路程上弹性力的功为

$$A=\int_{x_1}^{x_2}-kx\,\mathrm{d}x \;=\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2$$

➢ 摩擦力的功

摩擦力方向与质点速度方向相反。

$$\vec{F}_r = -\mu F_{\perp} \vec{v}/v$$



摩擦力作功

$$A = \int_a^b \vec{F}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{F}_r \cdot \vec{v}\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b -F_r v \mathrm{d}t$$

$$= -\int_{S_a}^{S_b} \mu mg\,\mathrm{d}s = -\mu mg\,\Delta s$$

摩擦力不是保守力，作功与质点运动路径有关。

THANKS

FOR YOUR ATTENTION