第五节　两个随机变量的函数的分布

一、问题的引入

二、离散型随机变量函数的分布

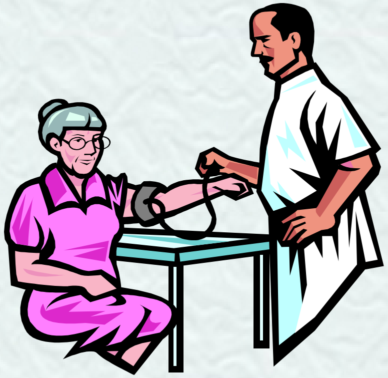
三、连续型随机变量函数的分布

四、小结

一、问题的引入

有一大群人,令 X 和 Y 分别表示一个人的年龄和体重, Z 表示该人的血压,并且已知 Z 与 X, Y 的函数关系 $Z = g(X, Y)$, 如何通过 X, Y 的分布确定 Z 的分布.

为了解决类似的问题下面我们讨论随机变量函数的分布.



二、离散型随机变量函数的分布

例1 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

求 (1) $X+Y$, (2) $\lvert X-Y \rvert$ 的分布律.

解

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

等价于

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$
$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
$\lvert X-Y\rvert$	1	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3

所以 $X+Y, |X-Y|$ 的分布律分别为

$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

$\lvert X-Y\rvert$	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

结论

若二维离散型随机变量 的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots,$$

则随机变量函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{g(X, Y) = z_k\}$$

$$= \sum_{z_k = g(x_i, y_j)} p_{ij}, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

例2 设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律.

解 因为 X 与 Y 相互独立, 所以

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

得

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

可得

P	(X,Y)	$Z=X+Y$
0.18	(1,2)	3
0.12	(1,4)	5
0.42	(3,2)	5
0.28	(3,4)	7

所以

$Z=X+Y$	3	5	7
P	0.18	0.54	0.28

例3 设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有同一分布律,且 X 的分布律为

X	0	1
P	0.5	0.5

试求 : $Z = \max(X, Y)$ 的分布律.

解 因为X与Y相互独立,

所以 $P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i\}P\{Y = j\}$,

于是

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$P\{\max(X,Y)=i\}$$
$$=P\{X=i,Y<i\}$$
$$+P\{X\le i,Y=i\}$$

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$\Rightarrow P\{\max(X,Y)=0\}=P\{0,0\}=\frac{1}{2^2},$$

$$P\{\max(X,Y)=1\}=P\{1,0\}+P\{0,1\}+P\{1,1\}$$
$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{2^2}.$$

故$Z=\max(X,Y)$的分布律为

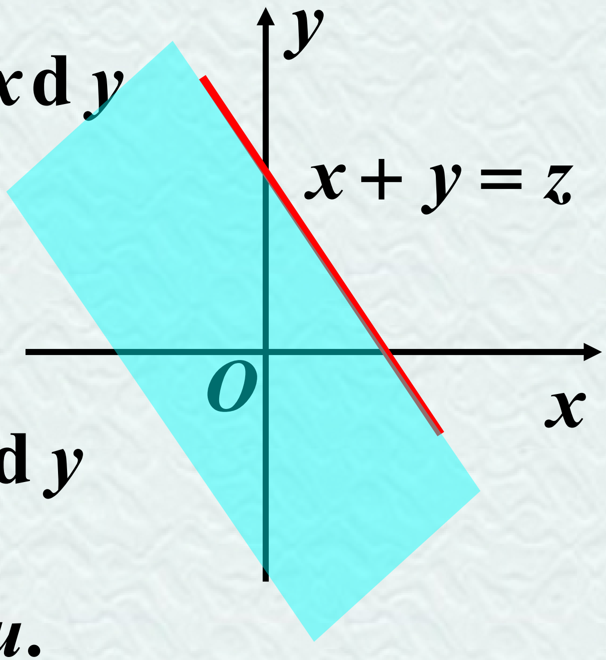
Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

三、连续型随机变量函数的分布

1. $Z=X+Y$ 的分布

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,则$Z=X+Y$的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{x=u-y}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u.$$

由此可得概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,\mathrm{d}y.$$

由于 X 与 Y 对称， $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x.$

当 X, Y 独立时, $f_Z(z)$也可表示为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y,$$

或 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

例4 设两个独立的随机变量 X 与 Y 都服从标准正态分布,求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由于 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty<x<+\infty,$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}, \quad -\infty<y<+\infty,$$

由公式 $f_Z(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}\,x,$

得 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{t=x-\frac{z}{2}}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}.$$

即 Z 服从 $N(0,2)$ 分布.

说明

一般,设X,Y相互独立且$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.则$Z = X + Y$仍然服从正态分布,且有$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2,\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

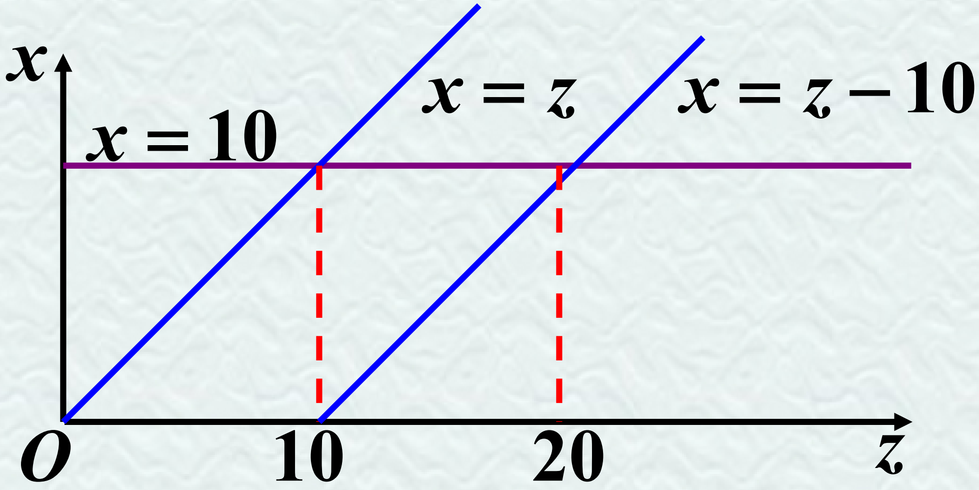
例5 在一简单电路中,两电阻 R_1 和 R_2 串联联接,设 R_1, R_2 相互独立,它们的概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求电阻 $R=R_1+R_2$ 的概率密度.

解 由题意知 R 的概率密度为

$$f_R(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}x.$$



当 $\begin{cases} 0 < x < 10, \\ 0 < z - x < 10, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 0 < x < 10, \\ z - 10 < x < z, \end{cases}$ 时,

$f_R(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(z-x) \mathrm{d}\, x$ 中被积函数不为零.

此时

$$f_R(z)=\begin{cases}\int_0^z f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}\,x, & 0\le z<10,\\ \int_{z-10}^{10} f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}\,x, & 10\le z\le 20,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad (1)$$

将 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$f(z-x)=\begin{cases}\dfrac{10-(z-x)}{50}, & 0\le z-x\le 10,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

代入 (1) 式得

$$f_R(z)=\begin{cases}(600z-60z^2+z^3)\big/15000, & 0\le z<10,\\ (20-z)^3\big/15000, & 10\le z<20,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例6 设 X_1, X_2 相互独立且分别服从参数为 α_1, β; α_2, β 的 Γ 分布 ($X_1 \sim \Gamma(\alpha_1,\beta)$, $X_2 \sim \Gamma(\alpha_2,\beta)$), X_1, X_2的概率密度分别为

$$f_{X_1}(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)}(\beta x)^{\alpha_1-1}\mathrm{e}^{-\beta x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad \alpha_1>0,\beta>0,$$

$$f_{X_2}(y)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha_2)}(\beta y)^{\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad \alpha_2>0,\beta>0,$$

试证明 X_1+X_2 服从参数为 $\alpha_1+\alpha_2, \beta$ 的 Γ 分布.

证明 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x)\,\mathrm{d}x$

当 $z<0$ 时，易知 $f_Z(z)=0.$

当 $z>0$ 时，$Z=X_1+X_2$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^z \frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)}(\beta x)^{\alpha_1-1}\mathrm{e}^{-\beta x}\frac{\beta}{\Gamma(\alpha_2)}[\beta(z-x)]^{\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta(z-x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\mathrm{e}^{-\beta z}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^z x^{\alpha_1-1}(z-x)^{\alpha_2-1}\,\mathrm{d}x,$$ 令 $x=zt,$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}(\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta z}\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$\triangleq A(\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta z},$$

其中 $A = \dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\,\mathrm{d}t.$

由概率密度的性质可求得 A,

$$1 = \int_0^{+\infty} f_Z(z)\,\mathrm{d}z = \frac{A}{\beta}\int_0^{+\infty}(\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta z}\,\mathrm{d}(\beta z)$$

$$= \frac{A}{\beta}(\alpha_1 + \alpha_2),$$

即有 $$A = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

于是 $$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}(\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta z}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因此有 $X_1 + X_2$ 服从参数为 $\alpha_1 + \alpha_2, \beta$ 的 Γ 分布.

此结论可推广到 n 个相互独立的 Γ 分布变量之和的情况.

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,且 X_i 服从参数为 $\alpha_i, \beta\ (i = 1,2,\cdots,n)$ 的 Γ 分布,则

$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 服从参数为 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta$ 的 Γ 分布.

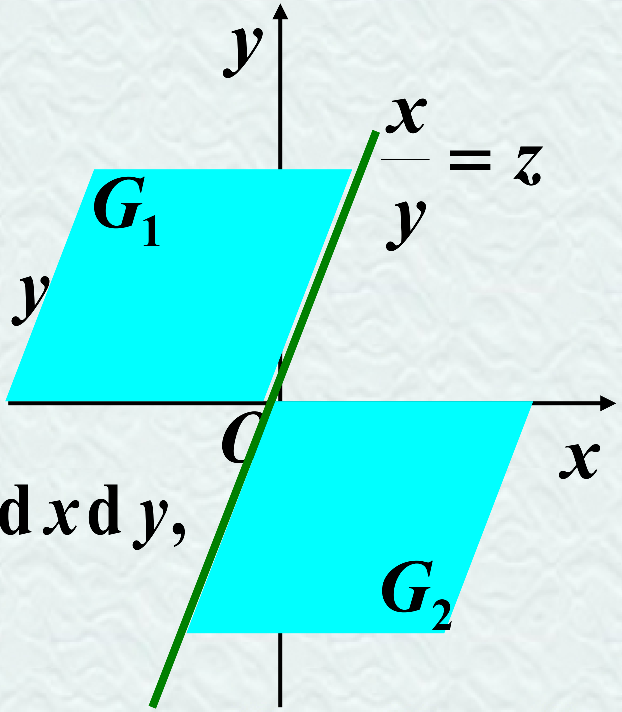
2. $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,则$Z=\dfrac{X}{Y}$的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\frac{X}{Y}\le z\}$$

$$=\iint_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{0}\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$



令$u=x/y$,

$$\iint_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} yf(yu,y)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{z}\int_0^{+\infty} yf(yu,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u$$

同理可得

$$\iint_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{0} yf(yu,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u,$$

故有 $F_Z(z) = P\{Z \le z\}$

$$= \iint_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{0}^{+\infty} yf(yu,y)\,\mathrm{d}\,y-\int_{-\infty}^{0} yf(yu,y)\,\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}\,u.$$

由此可得分布密度为

$$f(z)=\int_{0}^{+\infty} yf(yz,y)\,\mathrm{d}\,y-\int_{-\infty}^{0} yf(yz,y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)\,\mathrm{d}\,y.$$

当 X, Y 独立时,

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)\,\mathrm{d}\,y.$$

例7 设 X,Y 分别表示两只不同型号的灯泡的寿命, X,Y 相互独立,它们的概率密度分别为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad f(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度函数.

解 由公式

$$f_Z(z)=\int_0^{+\infty} yf(yz,y)\,\mathrm{d}y-\int_{-\infty}^{0} yf(yz,y)\,\mathrm{d}y,$$

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-2y}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

得所求密度函数 (当$z>0$时)

$$f_Z(z)=\int_0^{+\infty}2y\mathrm{e}^{-yz}\mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}2y\mathrm{e}^{-y(2+z)}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{(2+z)^2},$$

(当 $z\le 0$ 时) $f_Z(z)=0,$

得 $$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(2+z)^2}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

3. $M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

则有 $F_{\max}(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$

$$=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}=F_X(z)F_Y(z).$$

$$F_{\min}(z)=P\{N\le z\}=1-P\{N>z\}$$

$$=1-P\{X>z,Y>z\}$$

$$=1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\}$$

$$= 1 - [1 - P\{X \le z\}] \cdot [1 - P\{Y \le z\}]$$

$$= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].$$

故有

$$F_{\max}(z) = F_X(z) F_Y(z),$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].$$

推广

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$

则$M=\max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$及$N=\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数分别为

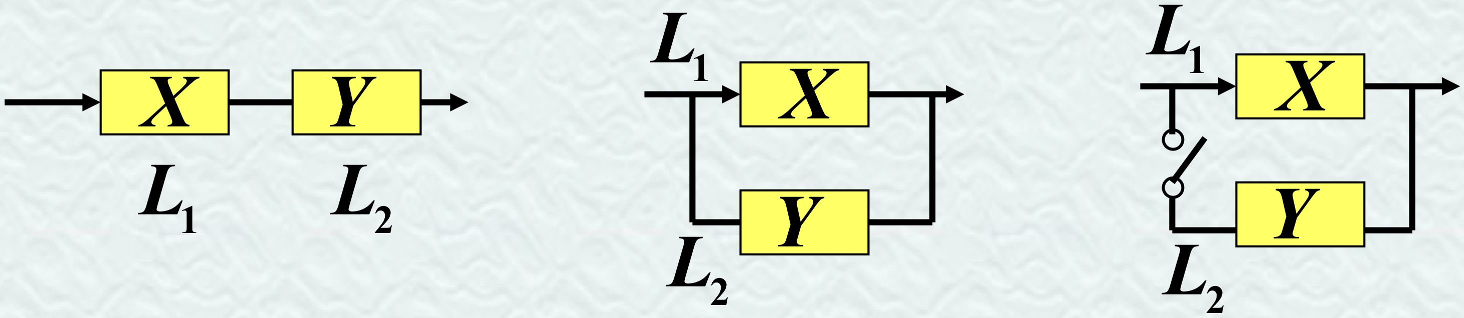
$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)\cdot F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)].$$

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立且具有相同的分布函数 $F(x)$,则

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^n,\ F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^n.$$

例8 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 联接而成,连接的方式分别为 (i) 串联, (ii) 并联, (iii) 备用 (当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 开始工作), 如图所示.



设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y,已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0,\beta>0$ 且 $\alpha\neq\beta$. 试分别就以上三种联接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.

解 (i)串联情况

由于当 L_1,L_2 中有一个损坏时,系统 L 就停止工作,所以这时 L 的寿命为 $Z=\min(X,Y)$.

由 $f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$

由 $f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0;\end{cases} \Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}1-\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(ii)并联情况

由于当且仅当 L_1, L_2 都损坏时,系统 L 才停止工作,

所以这时 L 的寿命为 $Z = \max(X, Y)$.

$Z = \max(X, Y)$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha z})(1 - e^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta) e^{-(\alpha + \beta) z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

(iii)备用的情况

由于这时当系统 L_1 损坏时,系统 L_2 才开始工作,因此整个系统 L 的寿命 Z 是 L_1, L_2 两者之和,即

$$Z = X + Y$$

当 $z > 0$ 时, $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d}\, y = \int_0^z \alpha \mathrm{e}^{-\alpha(z-y)} \beta \mathrm{e}^{-\beta y} \mathrm{d}\, y$$

$$= \alpha\beta \mathrm{e}^{-\alpha z} \int_0^z \mathrm{e}^{-(\beta-\alpha)y} \mathrm{d}\, y$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z} - \mathrm{e}^{-\beta z}].$$

当 $z < 0$ 时, $f(z) = 0$,

于是 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z} - \mathrm{e}^{-\beta z}], & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

四、小结

1. 离散型随机变量函数的分布律

若二维离散型随机变量 的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots,$$

则随机变量函数 $Z = g(X,Y)$的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{g(X,Y) = z_k\}$$

$$= \sum_{z_k = g(x_i y_j)} p_{ij}, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

2. 连续型随机变量函数的分布

(1) $Z = X + Y$ 的分布

(2) $Z = \dfrac{X}{Y}$ 的分布

(3) $M = \max(X, Y)$ 及 $N = \min(X, Y)$ 的分布