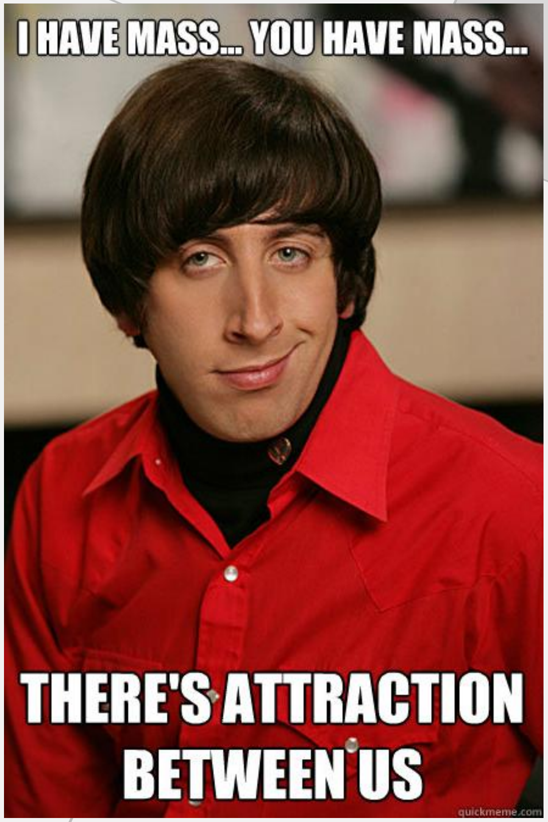
CONTENTS



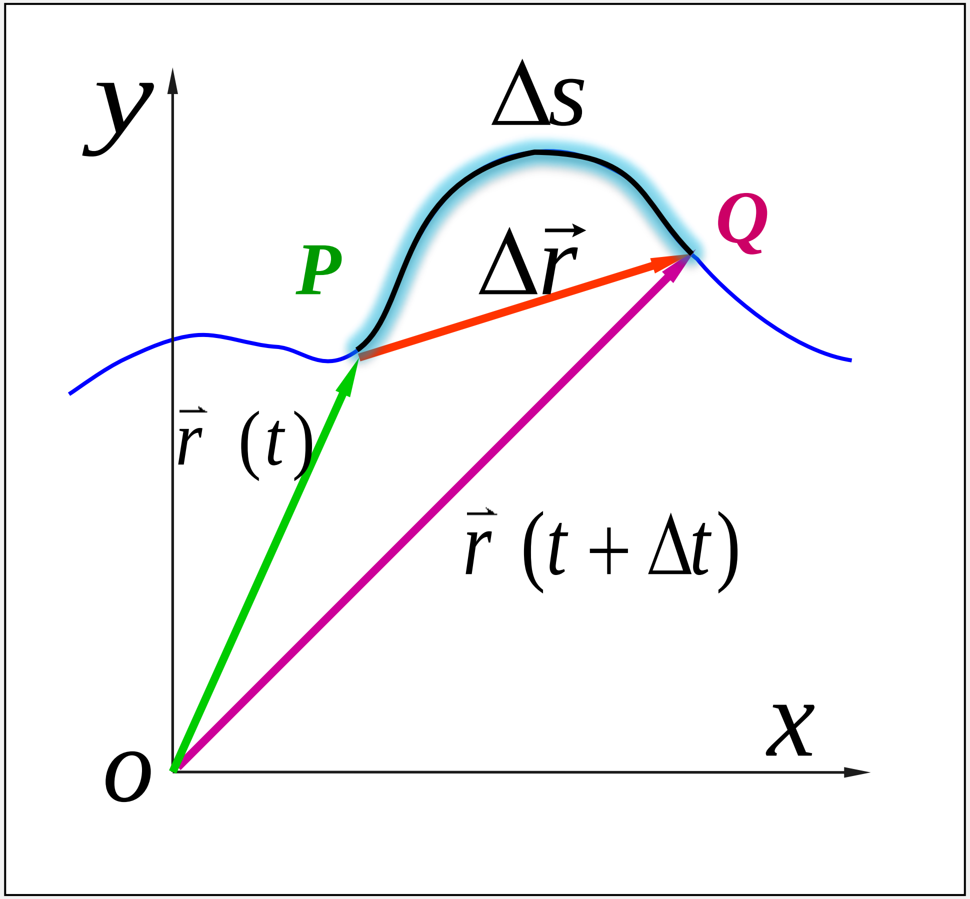
I HAVE MASS... YOU HAVE MASS...
THERE'S ATTRACTION BETWEEN US
quickmeme.com

- 位移

  描述质点位置的量

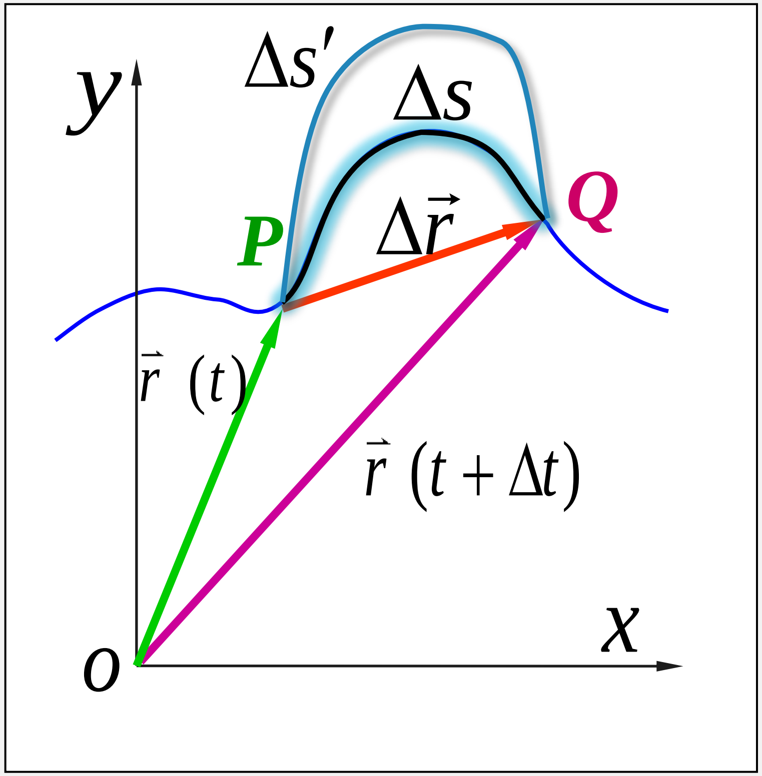
  经过时间间隔 Δt 后，质点位置矢量发生变化，由始点P 指向终点 Q 的有向线段 $\overrightarrow{PQ}$ 称为点 P 到 Q 的位移矢量 $\Delta\vec{r}(t)$ 。位移矢量也简称位移。

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_Q-\vec{r}_P$$



- 路程(Δs)：质点实际运动轨迹的长度。

位移$\Delta\vec{r}(t)$	路程Δs
• 质点位置改变的量。 • 与运动轨迹无关。 • 矢量：有大小，有方向。 • 已知两点之间的位移是唯一的。	• 质点实际运动轨迹的长度。 • 与运动轨迹有关。 • 标量：有大小，没有方向。 • 已知两点之间的路程不唯一。

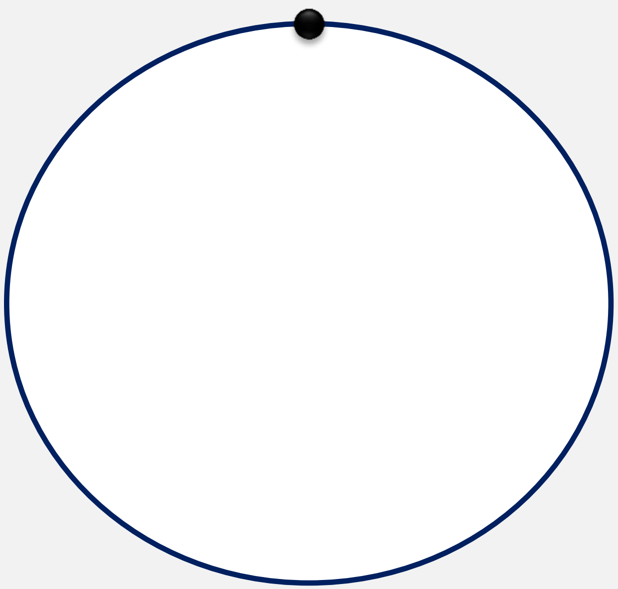


路程不小于位移的大小

$$\Delta s \geq |\Delta\vec{r}|$$

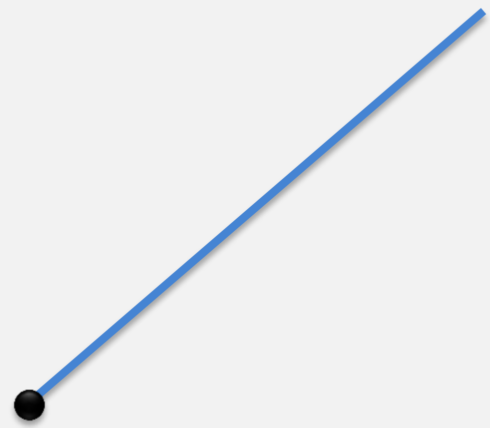
路程ΔS=2πR

位移大小$|\Delta\vec{r}(t)| = 0$



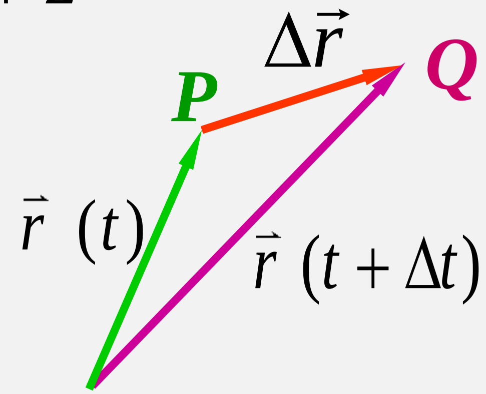
路程ΔS=2L

位移大小$|\Delta\vec{r}(t)| = 0$



- 直角坐标系下的位移和路程

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



位移及其大小

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P$$

$$= (x_Q - x_P)\vec{i} + (y_Q - y_P)\vec{j} + (z_Q - z_P)\vec{k}$$

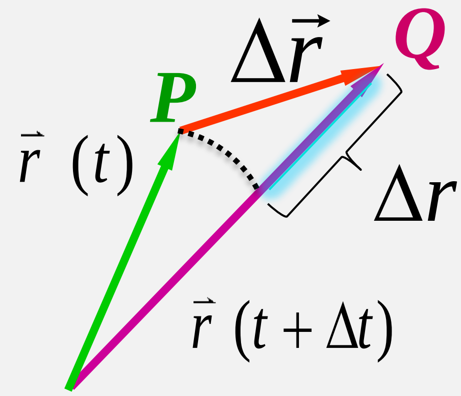
$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$

$$r_P = \sqrt{{x_P}^2 + {y_P}^2 + {z_P}^2} \qquad r_Q = \sqrt{{x_Q}^2 + {y_Q}^2 + {z_Q}^2}$$

$$|\Delta r| = |r_Q - r_P| = \left|\sqrt{{x_Q}^2 + {y_Q}^2 + {z_Q}^2} - \sqrt{{x_P}^2 + {y_P}^2 + {z_P}^2}\right|$$

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$

$$\boxed{|\Delta \vec{r}| \neq |\Delta r|}$$



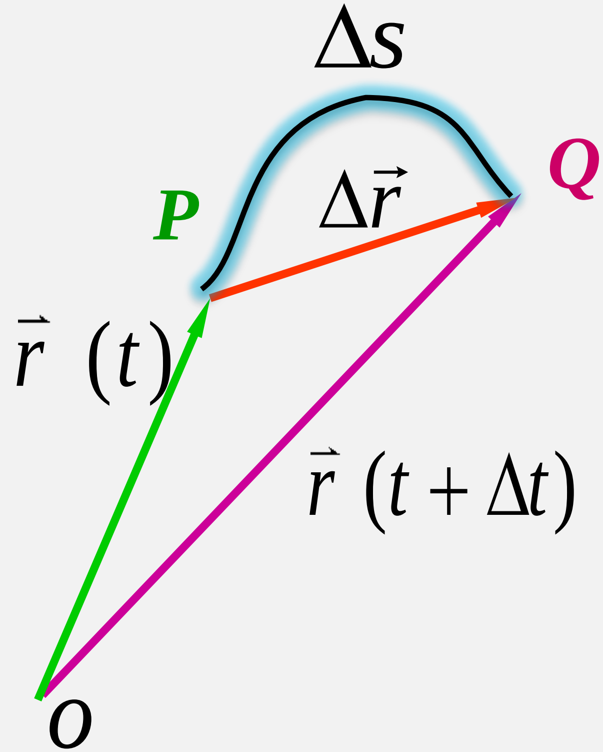
路程

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2} \quad \xrightarrow{\Delta t\to 0} \quad |d\vec{r}|$$

$$\Delta s=\int_P^Q ds=\int_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{dt}dt=\int_t^{t+\Delta t} vdt$$

$$=\int_t^{t+\Delta t}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2}dt$$

$$=\int_t^{t+\Delta t}\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}dt$$

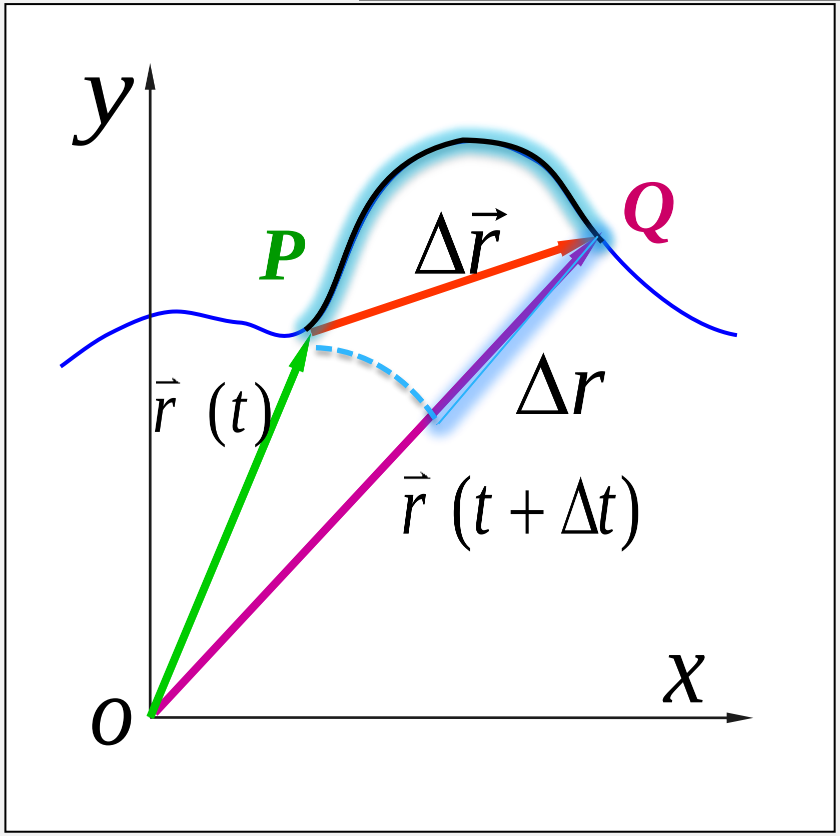


- 速度（矢量）

描述位置改变快慢程度

1. 平均速度

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



大小	• $\left\|\bar{\vec{v}}\right\| = \left\|\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right\|$
方向	• 与位移同向

$$\left|\Delta \vec{r}\right| = \left|\vec{r}_{t+\Delta t} - \vec{r}_t\right|$$

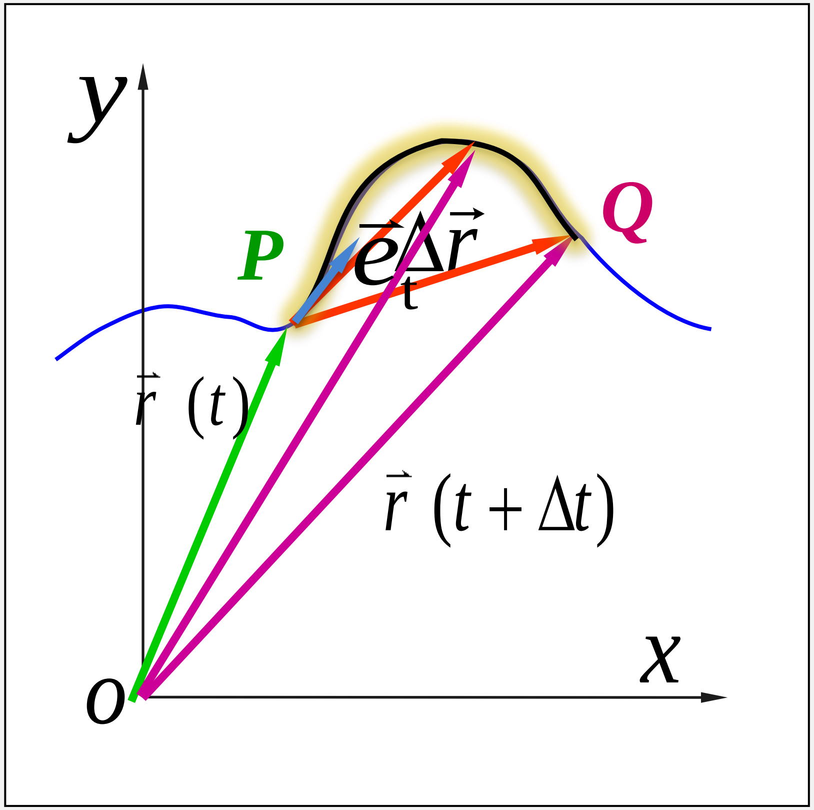
$$\Delta r = \Delta\left|\vec{r}\right| = \left|\vec{r}_{t+\Delta t}\right| - \left|\vec{r}_t\right|$$

$$\boxed{\left|\Delta \vec{r}\right| = \left|\vec{r}_{t+\Delta t} - \vec{r}_t\right| \geq \left|\vec{r}_{t+\Delta t}\right| - \left|\vec{r}_t\right| = \Delta r}$$

2. 瞬时速度

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时, $\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \mathrm{d}s$



$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\mathrm{t}$$

大小

- 瞬时速率 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

方向

- 该点沿曲线的切线方向指向质点前进一侧

3.瞬时速率：速度 $\vec{v}$ 的大小称为速率。

路程除以时间称为速率。

瞬时

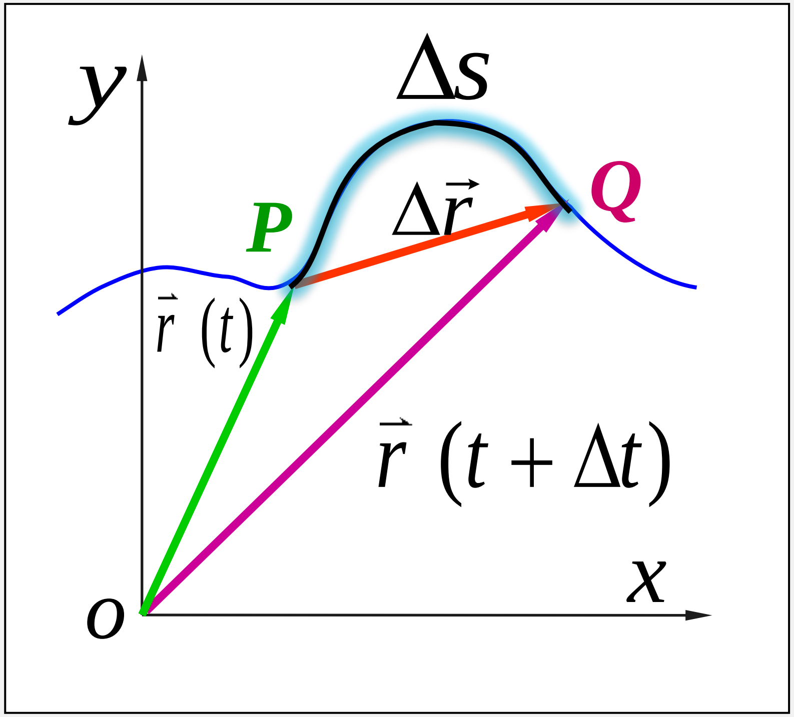
$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}} \Rightarrow v=|\vec{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|\cdot|\vec{e}_{\mathrm{t}}|=\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$$

瞬时速率 $$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

4.平均速率： $$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

≠

平均速度大小 $$|\bar{\vec{v}}|=\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|$$



- 直角坐标下的瞬时速度和速率（速度大小）

$\Delta t \to 0:$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

写成分量形式：

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

大小 $$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

- 加速度

1.速度增量

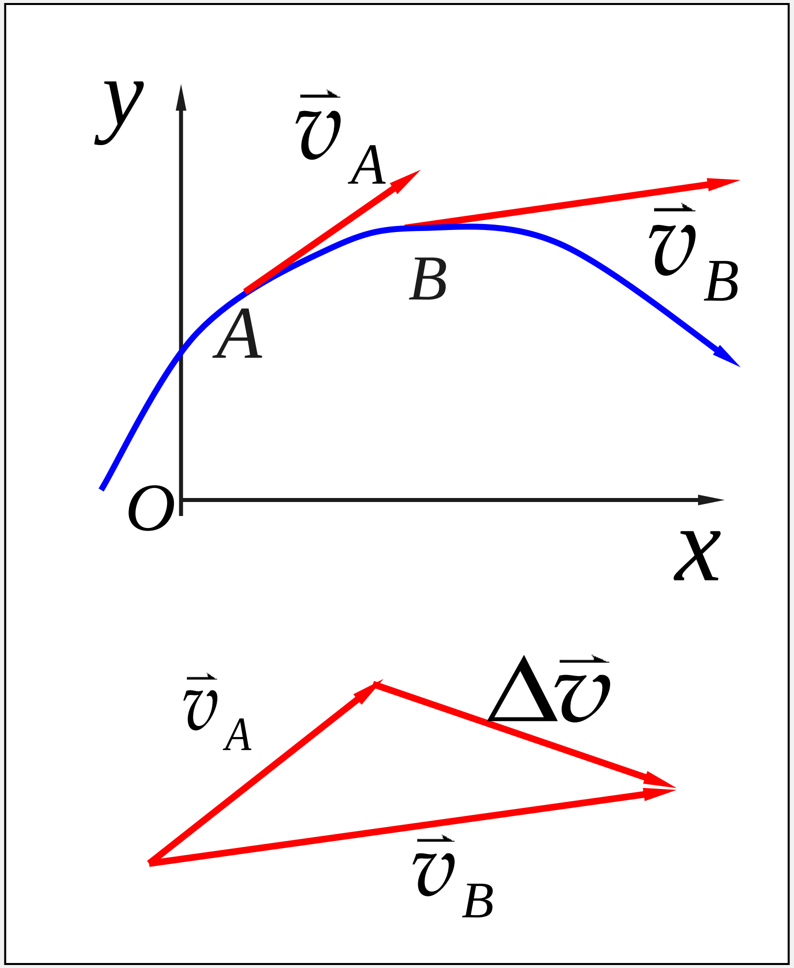
$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$$

2.平均加速度

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

3.瞬时加速度

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



- 直角坐标系下的加速度

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

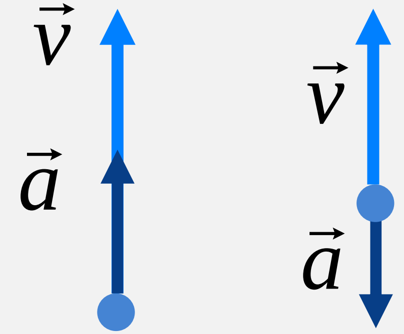
$$\begin{cases} a_x=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ a_y=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \\ a_z=\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

大小：

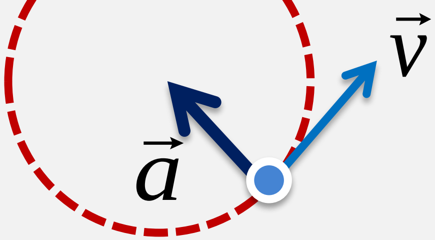
$$a=|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

✓ 加速度方向与速度方向一般不相同



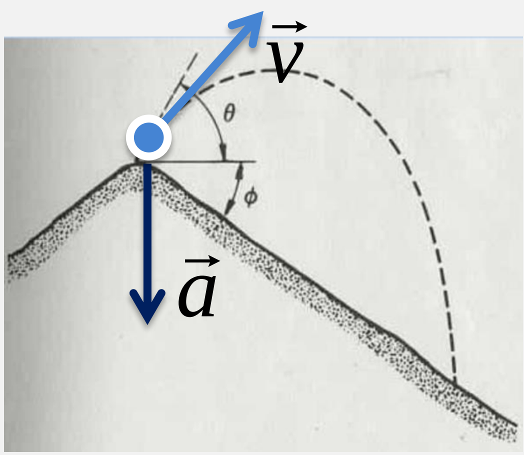
速度不为零时：

加速度与速度方向平行时（**0°**或**180°**），质点做直线运动

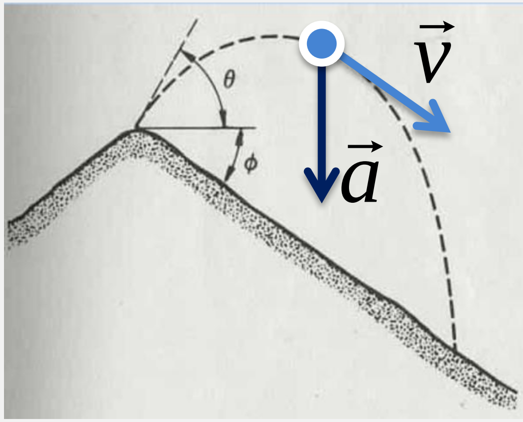


加速度与速度方向垂直时（90°），质点做圆周运动

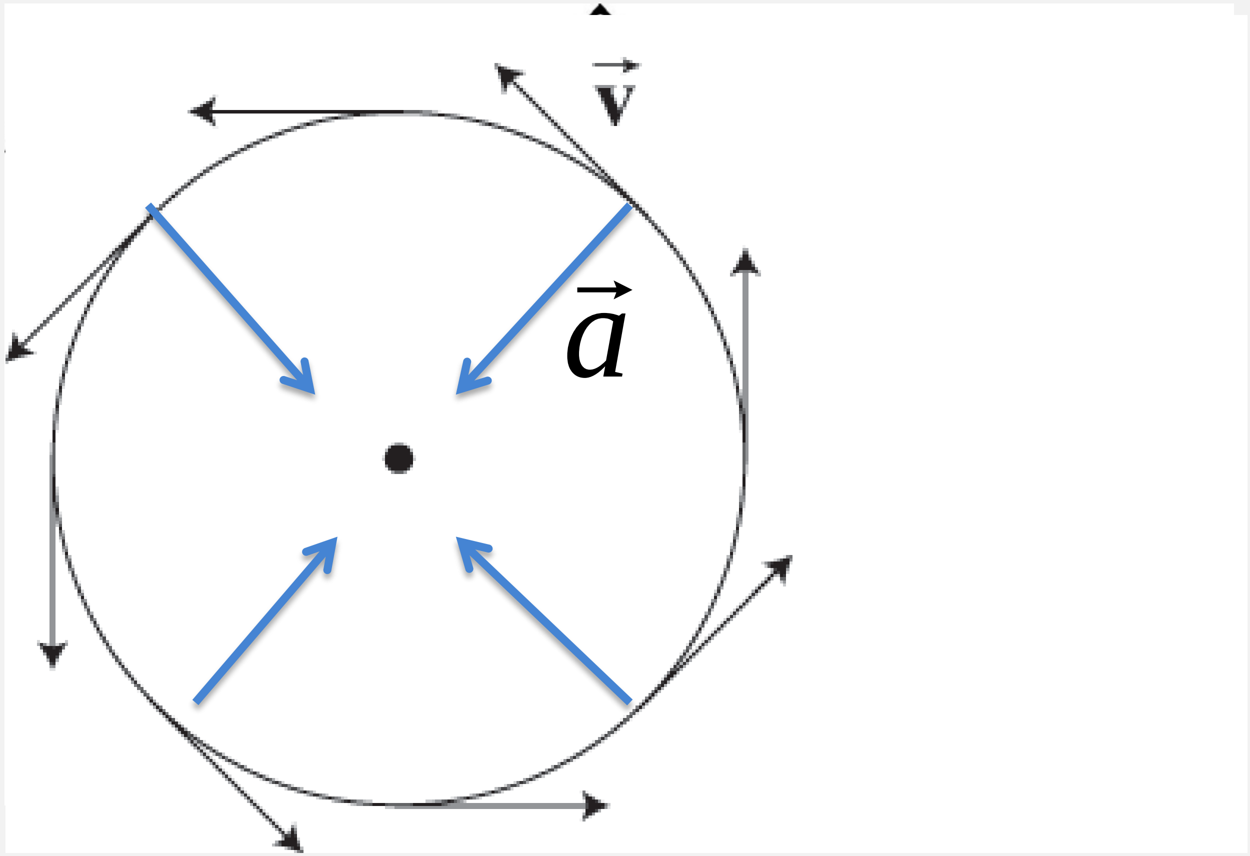
加速度与速度的夹角>90°，速率减小。



加速度与速度的夹角<90°，速率增大。



例：匀速圆周运动



位移大小和方向随时间成周期性变化

路程随时间均匀增加

瞬时速率不变

瞬时速度大小不变，方向改变（沿着切线方向）

加速度跟速度垂直

小结

- **质点运动学两类基本问题**

1.由质点的运动方程可以求质点在任一时刻的位矢、速度和加速度。

2.已知质点的加速度以及初始速度和初始位置，求质点速度及其运动方程。

$$\vec{r}(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \vec{v}(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \vec{a}(t)$$

例题1

例1：已知质点作匀加速直线运动，加速度为*a*，求该质点的运动方程。

解：已知速度或加速度求运动方程，积分法：

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{d}\vec{v}=\vec{a}\,\mathrm{d}t$$

对于作直线运动的质点，

$$\mathrm{d}v=a\,\mathrm{d}t$$

两端积分可得到速度

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\,\mathrm{d}t \qquad v=v_0+at$$

根据速度的定义式：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v=v_0+at$$

两端积分得到运动方程

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t(v_0+at)\mathrm{d}t$$

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

消去时间，得到

$$v^2=v_0^2+2a(x-x_0)$$

例题2

例2：已知质点的运动方程 $\vec{r}=2t\vec{i}+(2-t^2)\vec{j}$ (SI)
求(1)质点的轨迹；(2) t = 0s 及 t = 2s 时，质点的位置矢量；(3) t = 0s到 t = 2s时间内的位移；(4) t = 2s内的平均速度；(5) t = 2s末的速度及速度大小；(6) t = 2s末加速度及加速度大小。

解：(1) 先写运动方程的分量式

$$\begin{cases} x=2t \\ y=2-t^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{消去 } t \text{ 得轨迹方程}} y=2-\frac{x^2}{4}$$

(2) 位矢：

$$\vec{r}\big|_{t=0\text{s}}=2\vec{j}$$

$$\vec{r}\big|_{t=2\text{s}}=4\vec{i}-2\vec{j}$$

(3) 位移： $\Delta\vec{r} = \vec{r}\big|_{t=2\mathrm{s}} - \vec{r}\big|_{t=0\mathrm{s}}$

$$= 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{j}$$

$$= 4\vec{i} - 4\vec{j}$$

大小 $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2}\,\mathrm{m} = 5.65\mathrm{m}$

方向 $\theta_0 = \arctan\dfrac{-4}{4} = -\dfrac{\pi}{4}$

(4) 平均速度：

$$\bar{\vec{v}}\Big|_{t=0-2\mathrm{s}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta \mathrm{t}}\vec{j} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$$

大小 $\bar{v}\Big|_{t=0-2\mathrm{s}} = \sqrt{\bar{v}_x + \bar{v}_y} = 2.82\mathrm{m/s}$

(5) 速度：

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} = 2\vec{i} - 2t\vec{j}$$

$$\vec{v}\Big|_{t=2\mathrm{s}} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$$

大小 $v\Big|_{t=2\mathrm{s}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4.47\mathrm{m/s}$

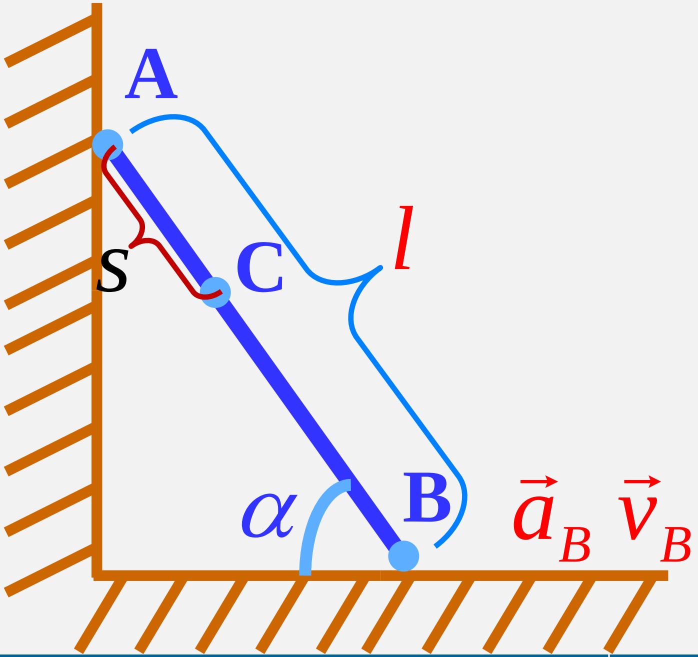
(6) 加速度：

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -2\vec{j}$$

$$\vec{a}\Big|_{t=2s} = -2\vec{j}$$

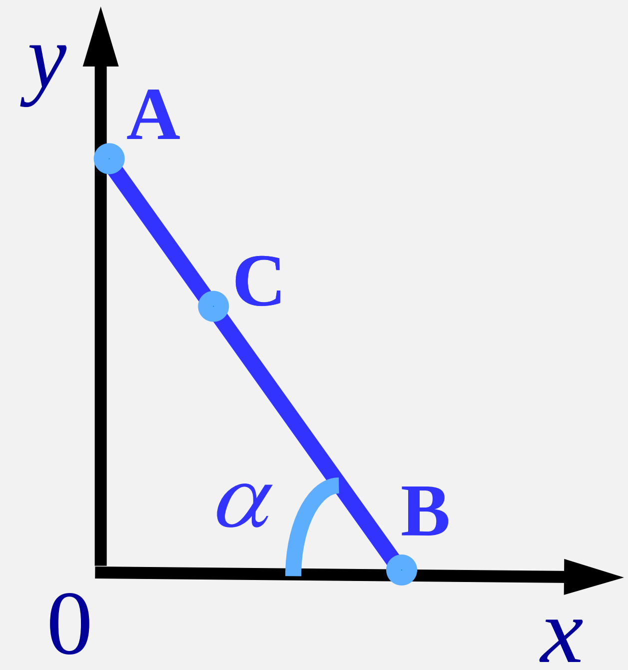
$\boldsymbol{a} = \mathbf{2\ m/s^2}$，沿–$\boldsymbol{y}$ 方向，与时间无关。

不可伸缩的细杆AB，两端A、B分别与地面和墙接触。已知地面和墙垂直，t时刻B点的位置、速度、加速度，及杆与地面的角度，杆AB长度*l*。求杆上任一点C此时的速度、加速度。



解：建立如图坐标系，令AC长度为*s*。

应用速度、加速度的定义，利用几何关系（即杆不可伸缩的约束）在坐标系中求解。



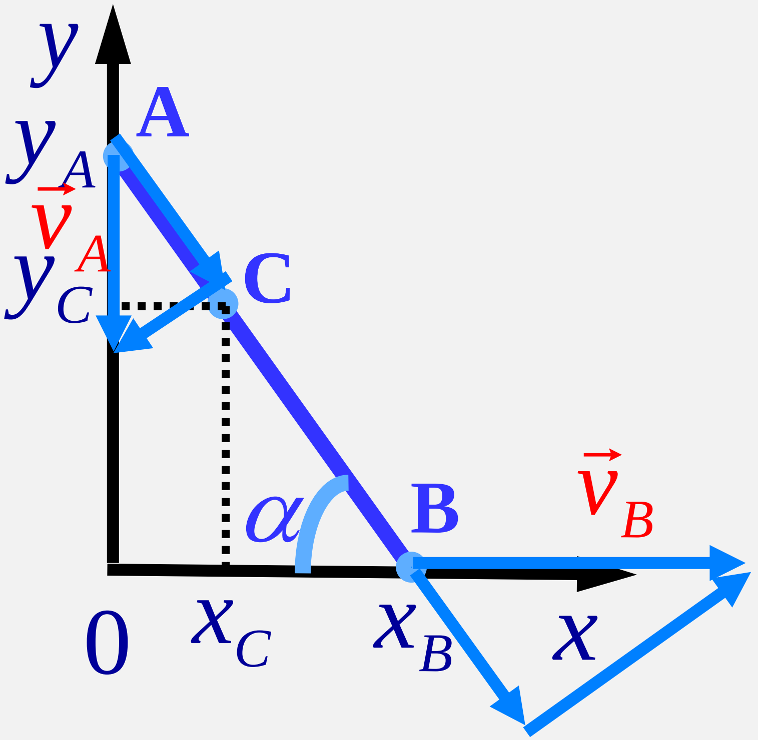
杆不可伸缩的约束：

$$v_{Ay}\sin\alpha = -v_{Bx}\cos\alpha$$

$$\frac{x_C}{x_B}=\frac{s}{l} \qquad \frac{y_C}{y_A}=\frac{l-s}{l}$$

$$\therefore v_{Cx}=\frac{dx_C}{dt}=\frac{s}{l}\frac{dx_B}{dt}=\frac{s}{l}v_{Bx}$$

$$\therefore v_{Cy}=\frac{dy_C}{dt}=\frac{l-s}{l}\frac{dy_A}{dt}=\frac{l-s}{l}v_{Ay}=\frac{s-l}{l}v_{Bx}\mathrm{ctan}\alpha$$



凡是把加速度象速度那样进行分解的做法

都是错误的！

为什么？

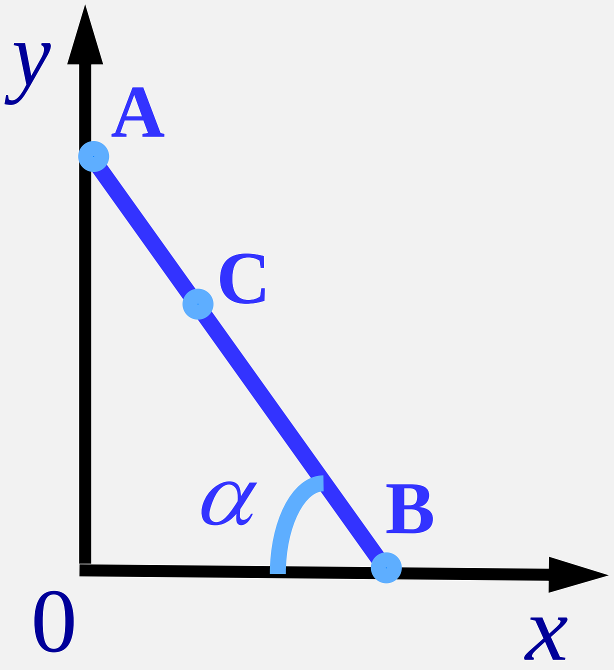
考虑单摆的运动

向心加速度沿着杆的方向，随点而异！

怎么办？

从加速度的定义出发，

对速度求导！

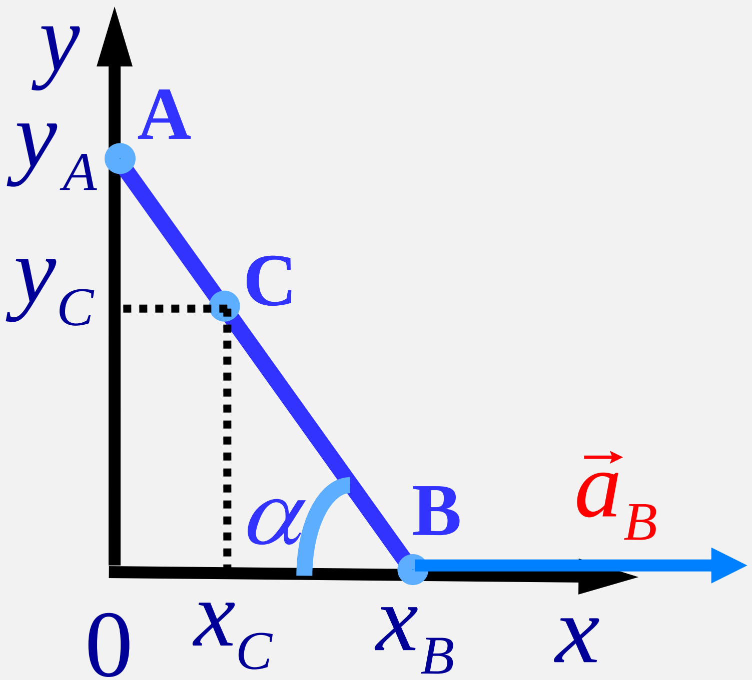


求加速度。注意B的加速度为0时，A的加速度不为0！不能像速度那样分解！

$$\because v_{Ay} = -v_{Bx}\,\mathrm{ctan}\,\alpha$$

$$\therefore a_{Ay} = \frac{dv_{Ay}}{dt}$$

$$= -a_{Bx}\,\mathrm{ctan}\,\alpha + v_{Bx}\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{d\alpha}{dt}$$



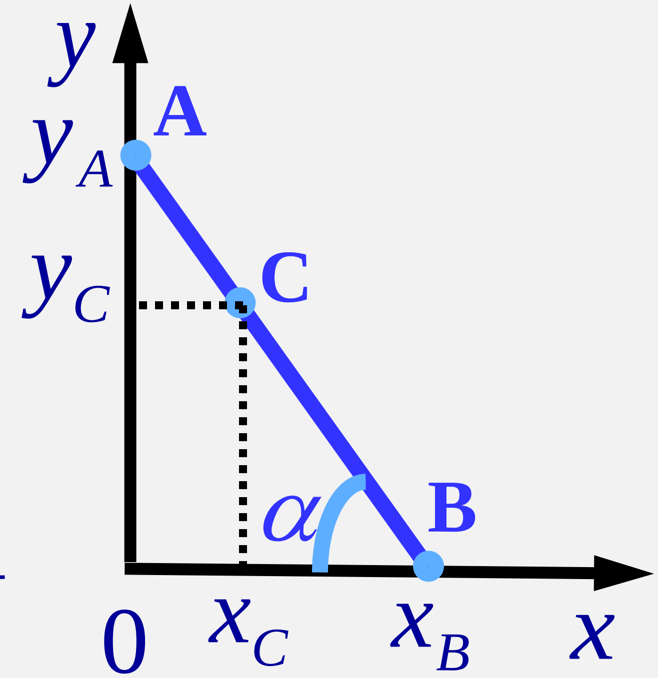
$$\because \cos\alpha = \frac{x_B}{l}$$

$$\therefore -\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{l}\frac{dx_B}{dt} = \frac{v_{Bx}}{l}$$

$$\therefore a_{Ay} = -a_{Bx}\cot\alpha - \frac{1}{\sin^3\alpha}\frac{v_{Bx}^2}{l}$$

$$\therefore a_{Cx} = \frac{dv_{Cx}}{dt} = \frac{s}{l}a_{Bx}$$

$$\therefore a_{Cy} = \frac{l-s}{l}a_{Ay} = \frac{s-l}{l}(a_{Bx}\operatorname{ctan}\alpha + \frac{1}{\sin^3\alpha}\frac{v_{Bx}^2}{l})$$



作业：第一章

1.1　1.2　1.3　1.4　1.5

THANKS

FOR YOUR ATTENTION