第三章

(习题课)

题组一：　中值定理

1.考察函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & x\le 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & x>1 \end{cases}$ 在$[\,0\,,\,2\,]$上

关于Lagrange定理的正确性.

解: (1) 验证 $f(x)$在 $x=1$处的连续性 。

(2) 验证 $f(x)$在 $x=0$处右连续; $x=2$处左连续。

(3) 验证 $f(x)$在 $x=1$处的可导性。

2. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)}{\cot \pi x}$

解:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1-x)}{\cot \pi x}\ \boxed{\tfrac{\infty}{\infty}\text{型}} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{-1}{1-x}}{-\pi\csc^2 \pi x} = \frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2 \pi x}{1-x}$$

$$\boxed{\tfrac{0}{0}\text{型}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{2\sin \pi x\cdot\cos \pi x\cdot \pi}{-1}$$

$$= 0$$

（2） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi}{4x}-\dfrac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}\right)$

解:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{4x}-\frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\pi(e^{\pi x}+1-2)}{4x(e^{\pi x}+1)}$$

$$\boxed{e^{\pi x}-1 \sim \pi x \quad (x\to 0)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\pi\cdot\pi x}{4x(e^{\pi x}+1)}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{\pi x}+1}$$

$$=\frac{\pi^2}{8}.$$

(3) $\lim_{n\to\infty} n^2\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)$ $\boxed{0\cdot\infty\text{型}}$

解:

设 $f(x)=x^2\left(a^{\frac{1}{x}}+a^{-\frac{1}{x}}-2\right)$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x^2\left(a^{\frac{1}{x}}+a^{-\frac{1}{x}}-2\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}+a^{-\frac{1}{x}}-2}{\frac{1}{x^2}} \quad \boxed{\tfrac{0}{0}\text{型}} \quad =\frac{\ln a}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-a^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \quad \boxed{\tfrac{0}{0}\text{型}} \quad =\frac{\ln^2 a}{2}\lim_{x\to\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}+a^{-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\ln^2 a.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n^2\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)=\ln^2 a.$$

（4） $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$

解: $=\lim_{x\to+\infty}(x\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-x\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}})$ 令 $x=\frac{1}{t}$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[6]{1+t}-\sqrt[6]{1-t}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{6}(1+t)^{-\frac{5}{6}}+\frac{1}{6}(1-t)^{-\frac{5}{6}}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

3. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内具有二阶导数,且

$f''(x_0)\neq 0$, 证明:当 $\Delta x\to 0$ 时,

$[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]/\Delta x - f'(x_0)$ 与 Δx

是同阶无穷小.

证明:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-\Delta x\cdot f'(x_0)}{(\Delta x)^2}$$

$\boxed{\frac{0}{0}\text{型}}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{2\Delta x} = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

且 $f''(x_0) \neq 0$.

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)}{\Delta x} = c$$（非零常数）

故当 $\Delta x \to 0$时,

$[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]/\Delta x - f'(x_0)$与$\Delta x$

是同阶无穷小.

4. 证明:当 $x>1$时, $\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$

证明: 设 $f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}-\frac{\pi}{4}$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\right)\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0$$

$\therefore f(x)=c\ (c$为常数$)$

由于*f(x)*连续，因此，

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} c = c = f(1)$$

$$= \arctan 1 - \frac{1}{2}\arccos\frac{2}{1+1} - \frac{\pi}{4}$$

$$= 0$$

$$\therefore f(x) = 0$$

即 $\arctan x - \frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$

5. 证明函数 $f(x)=(x-a)\ln[\sin(b-x)+1]$ 的导数在 (a,b)内必有零点.

证明: $\because f(a)=f(b)=0$

满足Rolle定理条件

$$\exists \xi \in (a,b)\text{使 } f'(\xi)=0\,.$$

7. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续,在 $(a, +\infty)$ 内可导且

$f'(x) > 1$, $f(a) < 0$, 试证方程 $f(x) = 0$ 在

$(a, a - f(a))$ 内有唯一实数根.

证明: 先证根的存在性.

显然 $f(x)$ 在 $[a, a - f(a)]$ 上满足拉格朗日中值定理,

$$\therefore f(a - f(a)) - f(a) = f'(\xi)(-f(a))$$

$$\xi \in (a, a - f(a))$$

即 $f(a - f(a)) = f(a)(1 - f'(\xi))$

而 $f(a) < 0$, $f'(x) > 1$ 故 $f(a - f(a)) > 0$

由零点定理知 $f(x)=0$ 在 $(a,a-f(a))$

内有实数根.

再证根的唯一性

因为 $f'(x)>1$,

所以$f(x)$在$[a,a-f(a)]$上单调增加.

故 $f(x)=0$ 在 $(a,a-f(a))$ 内有唯一实根.

8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导且 $f(0)=f(1)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$,试证:在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ, 使 $f'(\xi)=1$.

证明: 设 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(1)=-1$, $F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.

由零点定理得: $\exists \eta \in (\frac{1}{2},1)$ 使 $F(\eta)=0$. 又知 $F(0)=0$,

在 $[0,\eta]$ 上应用Rolle定理得: $F'(\xi)=0$, $\xi \in (0,\eta)$.

即 $f'(\xi)-1=0$.

9. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导且对一切 $x \in (a, b)$ 有 $g'(x) \neq 0$, 则必存在 $\xi \in (a,b)$,

使 $$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}.$$

证明: 将结果变形为:

$$f'(\xi)\cdot g(\xi) + g'(\xi)\cdot f(\xi) - g(b)\cdot f'(\xi) - f(a)\cdot g'(\xi) = 0$$

设 $F(x) = f(x)g(x) - g(b)f(x) - f(a)g(x)$

由于 $F(a) = F(b)$,

对 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用罗尔中值定理得:

$\exists\ \xi \in (a, b)$，使得$F'(\xi)=0$.

即$[f(\xi)-f(a)]g'(\xi)=[g(b)-g(\xi)]f'(\xi)$

$\because g'(x)\neq 0 \quad \therefore g'(\xi)\neq 0$

假设$g(b)-g(\xi)=0$ 即$g(b)=g(\xi)$

对$g(x)$在$[\xi,b]$上应用Rolle中值定理得:

$\exists \eta \in (\xi,b)\subset (a,b)$使$g'(\eta)=0$. 这与$g'(x)\neq 0$矛盾.

故$g(b)-g(\xi)\neq 0$.

于是有
$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}.$$

10.设$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导且

$f(1)=0$，试证:在$(0,1)$内至少有一点ξ,使

$$f'(\xi)=-\tfrac{2}{\xi}f(\xi).$$

证明: $f'(\xi)=-\tfrac{2}{\xi}f(\xi)\Longrightarrow \xi\cdot f'(\xi)+2f(\xi)=0$

$$\Longrightarrow \xi^2\cdot f'(\xi)+2\xi\cdot f(\xi)=0$$

设$F(x)=x^2f(x)$,

显然$F(x)$在[0,1]上满足Rolle中值定理.

$\therefore \exists\xi\in(0,1)$使$F'(\xi)=0$, 即$\xi^2\cdot f'(\xi)+2\xi\cdot f(\xi)=0$

故 $f'(\xi)=-\tfrac{2}{\xi}f(\xi)$.

题组二：　导数的应用

1. 讨论方程 $x2^x = 1$ 的实数根的个数，并求出它们所在的区间.

解: 设 $f(x) = x2^x - 1$， 在 $[0,1]$ 上应用零点定理，

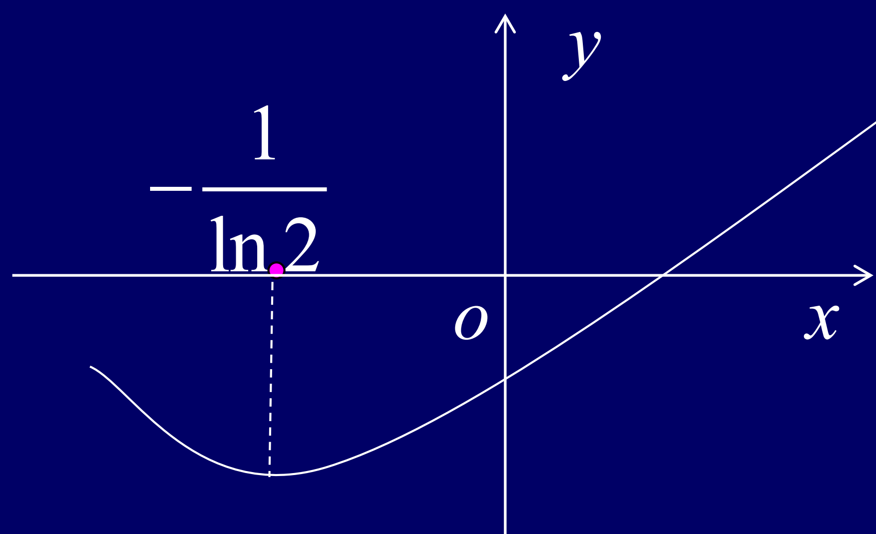
$\because f(x)$在$[0,1]$上连续， 且f(0)=−1<0, f(1)=1>0,

因此，$\exists \xi \in (0,1)$，使得 f(ξ)=0.

由于$f'(x) = 2^x(1 + x\ln 2)$.

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = -\dfrac{1}{\ln 2}$

x	$-\infty$	$(-\infty,-\dfrac{1}{\ln 2})$	$-\dfrac{1}{\ln 2}$	$(-\dfrac{1}{\ln 2},+\infty)$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-$	□	$-$	□	$+$



因此方程有唯一实数根, 介于 $(0,1)$内.

2. 证明：$f(x)=x^3-3p^2x+q$ 有三个不同实零点的条件为

$$q^2-4p^6<0.$$

证： $f'(x)=3x^2-3p^2=3(x+p)(x-p)$

令 $f'(x)=0$ 得： $x=\pm p$

若 $p>0$, 则

x	$(-\infty,-p)$	$-p$	$(-p,p)$	p	$(p,+\infty)$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	□	$2p^3+q$	□	$-2p^3+q$	□

因此方程有三个零点必须有

$$\begin{cases} f(-p) > 0 \\ f(p) < 0 \end{cases}, \quad 即:(2p^3+q)(-2p^3+q)<0$$

$$q^2 - 4p^6 < 0.$$

当$p<0$时，同理可证。

4. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$的某一邻域内具有三阶连续导数,

如果 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$, 而 $f'''(x_0)\neq 0$,

讨论 $x=x_0$为极值点还是$(x_0, f(x_0))$为拐点. P154(15)

解: $$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}\neq 0.$$

不妨设 $f'''(x_0)>0$ 由极限的局部保号性,$\exists \mathring{U}(x_0,\delta)$

当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时, $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$

$x\in(x_0, x_0+\delta)$时 $x-x_0>0, f''(x)>0.$

$x\in(x_0-\delta, x_0)$时 $x-x_0<0, f''(x)<0.$

$\Longrightarrow$ $(x_0, f(x_0))$为拐点.

由Taylor公式得

$$f(x)= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$$

$$\Downarrow \quad \boxed{\begin{aligned} &f'(x_0)=f''(x_0)=0\\ &f'''(x_0)\neq 0\end{aligned}}$$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$$

$$=(\frac{f'''(x_0)}{3!}+o(1))(x-x_0)^3$$

$x\in(x_0,x_0+\delta)$时与 $x\in(x_0-\delta,x_0)$时 $f(x)-f(x_0)$变号 $\Longrightarrow$ $(x_0,f(x_0))$不是极值点.

5. 试确定常数a, b, c 使抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与曲线 $y = \cos x$ 在 $x = 0$ 处有相同的切线和曲率.

解: 记 $y_1(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad y_2(x) = \cos x$

因两曲线同过 $x = 0$, 所以有 $y_1(0) = y_2(0)$

$\longrightarrow c = 1$

因两曲线在 $x = 0$ 有相同的斜率, 所以有

$y_1'(0) = y_2'(0) \longrightarrow 2ax + b\,\big|_{x=0} = -\sin x\,\big|_{x=0}$

$\longrightarrow b = 0$

因两曲线在 $x=0$ 有相同的曲率，所以有

$$\frac{|y_1''(0)|}{(1+y_1'^2(0))^{\frac{3}{2}}}=\frac{|y_2''(0)|}{(1+y_2'^2(0))^{\frac{3}{2}}}$$

又因为 $y_1'(0)=y_2'(0)$

所以 $|y_1''(0)|=|y_2''(0)| \longrightarrow |a|=\frac{1}{2}$

6. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可微,函数 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $x=a\ (a\neq 0)$有极值,试证:曲线$f(x)$在$(a,f(a))$处的切线过原点.

证明: 曲线 $y=f(x)$ 在 $(a,f(a))$ 处的切线为

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

因为$\varphi(x)$ 在 $x=a(a\neq 0)$ 取得极值,

而 $\varphi'(x)=\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$

不可导点为:$x=0$, 因此

$x=a$为$\varphi(x)$的驻点，即：$\varphi'(a)=0=\dfrac{f'(a)a-f(a)}{a^2}$

所以 $$f'(a)=\frac{f(a)}{a}$$

将其代入切线方程得 $$y=\frac{f(a)}{a}x$$

于是切线过原点。

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

7\. 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大值. P183(14)

解: 令 $f(x)=\sqrt[x]{x}(x\geq 1)$

问题转化为求 $f(x)$ 的最大值, 由于

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\frac{(1-\ln x)}{x^2}, \text{令} f'(x)=0, \text{得:}$$

$x=e$

x	$(1,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	□		□

由于 $f(2)=\sqrt{2}<f(3)=\sqrt[3]{3}$

因此, $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大值为: $\sqrt[3]{3}$

8. 过曲线 $L: y = x^2 - 1 \ (x > 0)$ 上的点 P 作 L 的切线,此切线与坐标轴相交于点M, N,试求点 P 的坐标,使 ΔOMN 的面积最小.

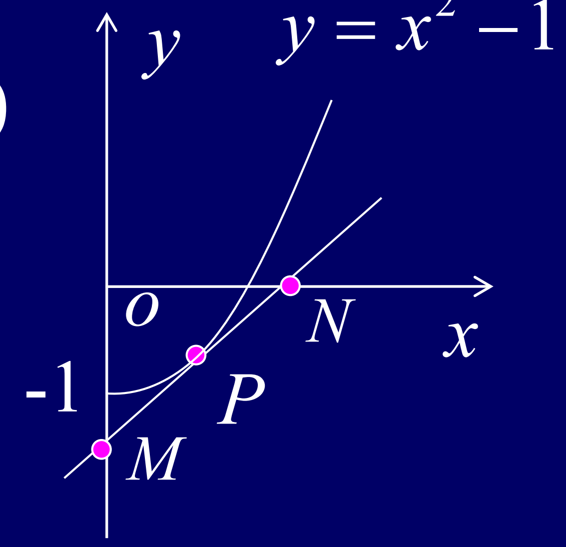
解: 设 P点坐标为(x, y),则切线方程为

$$Y - y = 2x(X - x)$$

又知 $y = x^2 - 1$,分别令$X = 0, Y = 0$

得M，N点的坐标分别为

$$N(\frac{x^2+1}{2x}, 0) \qquad M(0, -x^2 - 1)$$



这时

$$S(x)=\frac{1}{2}\frac{x^2+1}{2x}(x^2+1)=\frac{1}{4x}(x^2+1)^2 \quad (x>0)$$

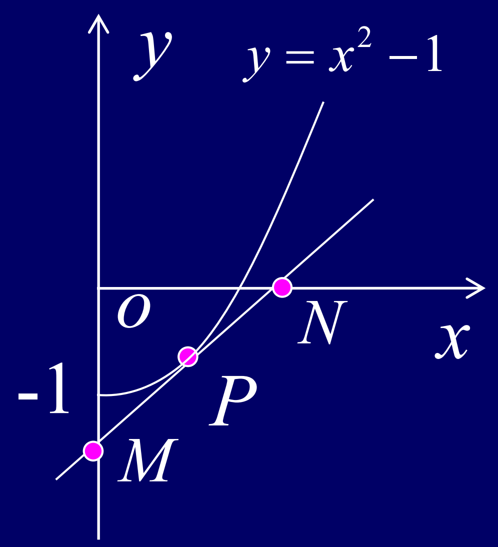
$$S'(x)=\frac{1}{4x^2}(x^2+1)(3x^2-1)$$

令 $S'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

而 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 为符合定义的唯一驻点，

由题意知面积最小值一定存在，

故 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 就是最小值点，因此 $P(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{2}{3})$.



9. 证明不等式

(1) 当$\frac{1}{2} \le x \le 1$时， $\arctan x - \ln(1+x^2) \ge \frac{\pi}{4} - \ln 2$.

证明: 设 $f(x) = \arctan x - \ln(1+x^2)$

则 $f'(x) = \dfrac{1-2x}{1+x^2}$ 令 $f'(x) = 0$,得： $x = \frac{1}{2}$

当$x \in (\frac{1}{2}, 1)$时， $f'(x) < 0$ 因此函数在区间$[\frac{1}{2}, 1]$上单减，

于是在端点 $x = 1$ 处， 函数取得最小值，

所以 $f(x) \ge f(1)$ 即不等式成立。

(2) 当$0 < x < 2$时, $4x\ln x - x^2 - 2x + 4 > 0$.

证明: 设 $f(x) = 4x\ln x - x^2 - 2x + 4$

则 $f'(x) = 4\ln x - 2x + 2$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 1$ 为唯一驻点。

又知 $f''(x) = \dfrac{4}{x} - 2$ 所以 $f''(1) = 2 > 0$

于是 $f(1)$ 为 $f(x)$ 的最小值,

所以 $f(x) \geq f(1) = 1$

故 $4x\ln x - x^2 - 2x + 4 > 0$.

(3) 设 $x \in (0,1)$，$(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$.

证明: 设

$$f(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2 \longrightarrow f(0) = 0$$

$$\downarrow$$

$$f'(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x \longrightarrow f'(0) = 0$$

$$\downarrow$$

$$f''(x) = \frac{2\ln(1+x)}{1+x} + \frac{2}{1+x} - 2 \longrightarrow f''(0) = 0$$

$$\downarrow$$

$$f'''(x) = -2\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} < 0 \longrightarrow$$

$f''(x)$ 单调减 $f''(x) < f''(0) = 0$

$f'(x)$ 单调减 $f'(x) < f'(0) = 0$

$f(x)$ 单调减 $f(x) < f(0) = 0$

$(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$.

10. 求使不等式 $5x^2 + ax^{-5} \geq 24 \ (0 < x < +\infty)$ 成立的最小正数 a .

解: $5x^2 + ax^{-5} \geq 24 \longrightarrow a \geq 24x^5 - 5x^7$

问题转化为求 $f(x) = 24x^5 - 5x^7$ 的最大值.

而 $f'(x) = 120x^4 - 35x^6$

令 $f'(x) = 0 \longrightarrow x = \sqrt{\frac{24}{7}}$

$$f''(x) = 480x^3 - 210x^5 = 30x^3(16 - 7x^2)$$

所以 $f''(\sqrt{\frac{24}{7}}) = 30(\sqrt{\frac{24}{7}})^3(16 - 7(\sqrt{\frac{24}{7}})^2) < 0$

因此 $x = \sqrt{\frac{24}{7}}$ 为函数 $f(x)$ 的唯一极大值点，

当然为最大值点，于是 $f(x)$ 的最大值为 $f(\sqrt{\frac{24}{7}})$

故 $a = f(\sqrt{\frac{24}{7}})$

作　业

P182　7，10 (2)(3)，11(1)，20