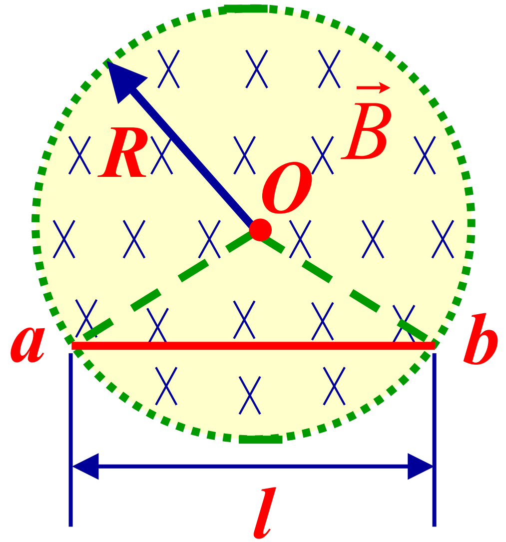
例题：　如图，半径为R的圆柱形体积内充满磁感应强度为 $B(t)$的均匀磁场，有一长为 l 的金属棒放在磁场中，设$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$为已知，求棒两端的感生电动势。

解法1：选闭合路Oab，方向为逆时针



$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \left(\int_O^a + \int_a^b + \int_b^O \right) \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= 0 + \int_a^b \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} + 0 = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$$= \iint_S \frac{\partial B}{\partial t} \mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \iint_S \mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \frac{1}{2} l \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} = \varepsilon_{\mathrm{ab}}$$

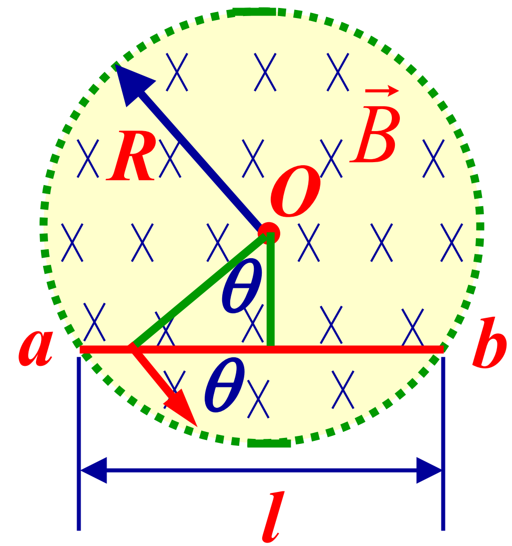
方向为$a \rightarrow b$

解法2：直接对感应电场积分，方向为$a \to b$

$$\varepsilon_i = \int_a^b \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b E_i \cos\theta \mathrm{d}l = \int_a^b \frac{r\cos\theta}{2}\frac{\partial B}{\partial t}\mathrm{d}l$$

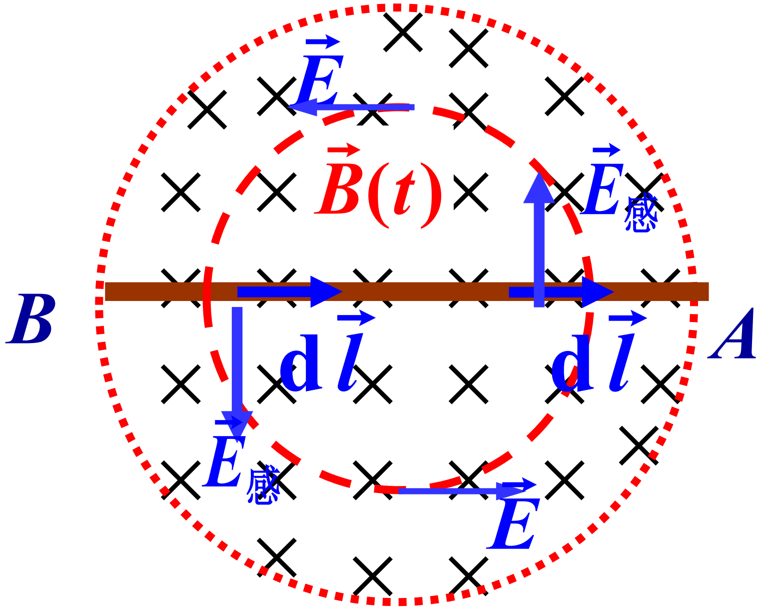
$$= \int_a^b \frac{h}{2}\frac{\partial B}{\partial t}\mathrm{d}l = \frac{h}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\int_a^b \mathrm{d}l$$

$$= \frac{h}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}l = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}l\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$$



再思考如下情况：

金属棒AB如图所示。



3．涡电流

当大块导体，特别是金属导体处在变化的磁场中时，由于通过金属块的磁通量发生变化，因此在金属块中产生感应电动势。而且由于大块金属电阻特别小，所以往往可以产生极强的电流，这些电流在金属内部形成一个个闭合回路，所以称作涡电流，又叫涡流。

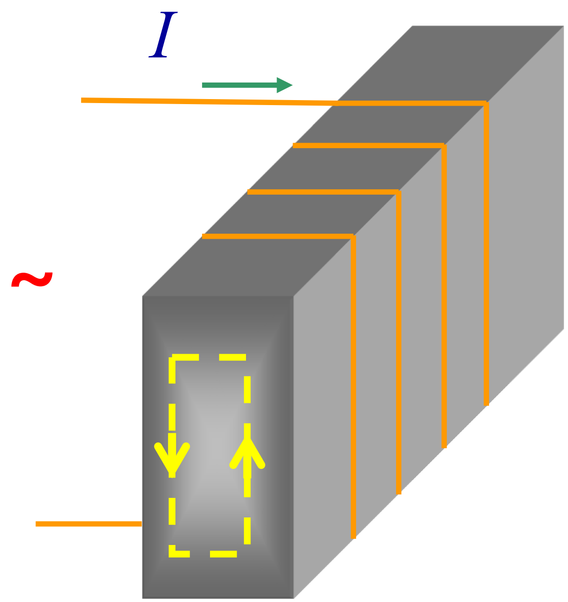
应用：

1) 涡流冶炼金属

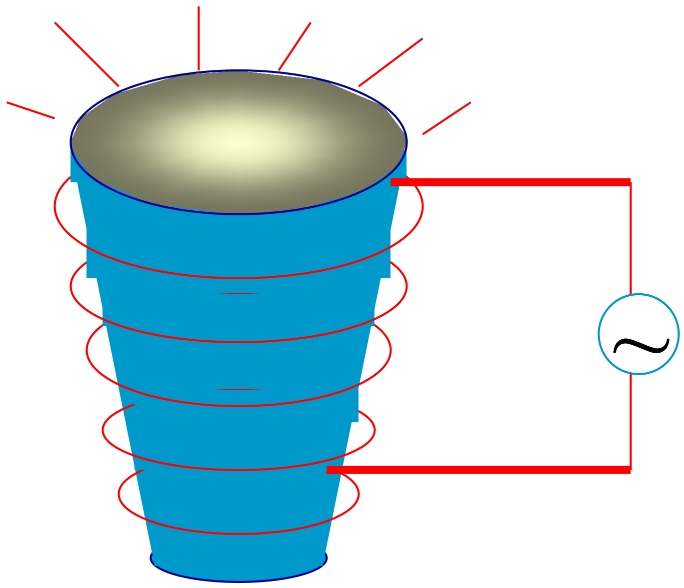
2) 电动阻尼器

3) 电磁灶

4) 电磁感应加热抽真空

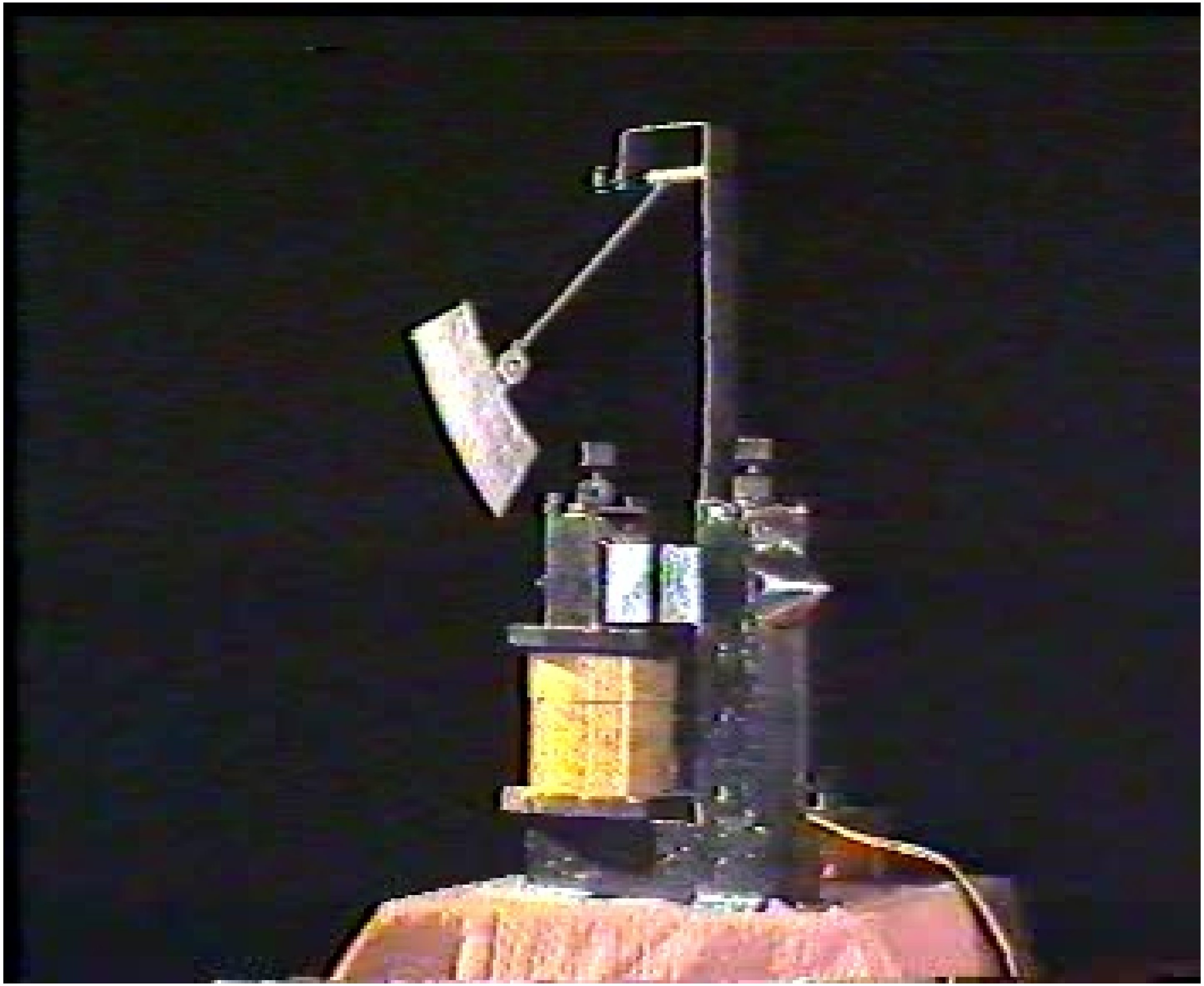


高频感应炉：利用金属块中产生的涡流所发出的热量使金属块熔化。具有加热速度快、温度均匀、易控制、材料不受污染等优点。



电磁感应的一些其他应用

阻尼摆：在一些电磁仪表中，常利用电磁阻尼使摆动的指针迅速地停止在平衡位置上。电镀表中的制动铝盘，也利用了电磁阻尼效应。



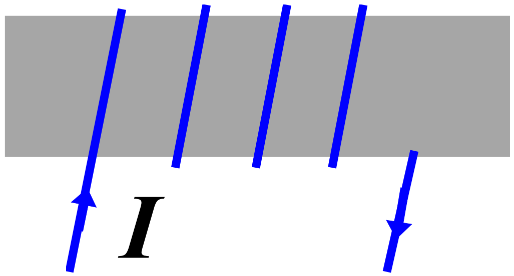
电磁阻尼

感应淬火

§ 12-3 自感和互感

1. 自感应

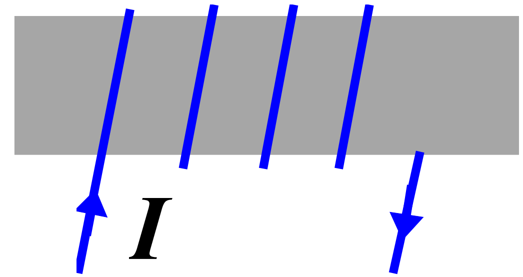
自感现象



当电流 I 变化时，通过该线圈的全磁通（磁链）Ψ 也发生变化，因而在这个线圈中将产生感生电动势 —自感电动势ε_L。

$$\varepsilon_L = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon_L = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$$



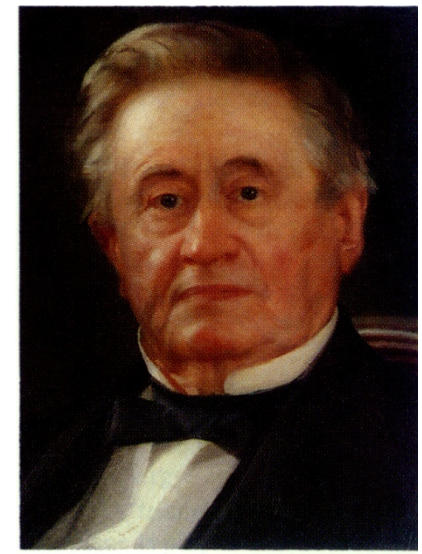
若回路的几何形状保持不变，且周围空间没有铁磁性物质。

根据毕奥 - 萨伐尔定律， $B \propto I$,

$\Psi = N\Phi \propto I$ **磁链数可写成：** $\Psi = LI$,

系数 L **（>0）——自感系数、自感** $L = \dfrac{\Psi}{I}$,

∴自感电动势： $\varepsilon_L = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ **单位：亨利（H）**

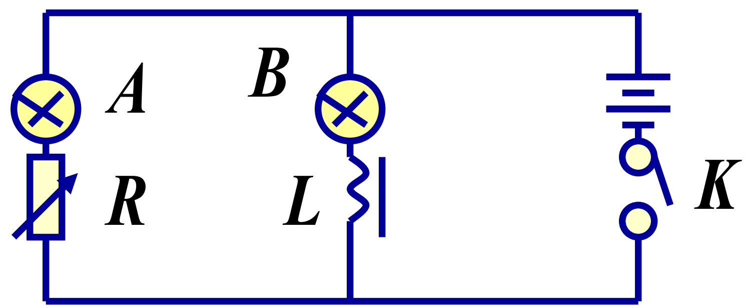

Joseph Henry
(1797–1878).

正比于电流随时间的变化率，正比于自感系数。

讨论： $$\mathcal{E}_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

①回路产生的自感电动势，总是反抗回路电流的改变。

②L 体现回路产生自感电动势反抗电流改变的能力。



电键K闭合 or 电阻R变化

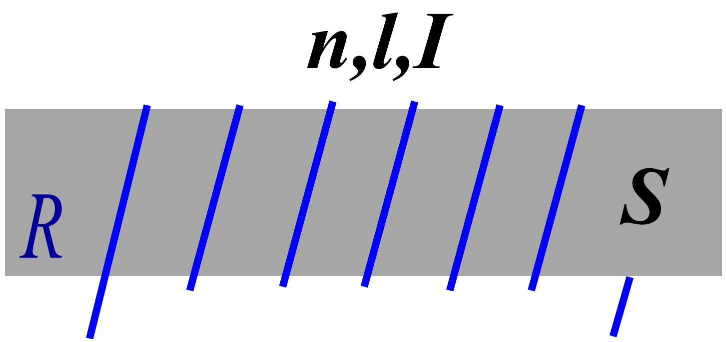
电感L反抗电流的变化

自感的应用：

稳流，LC电路（振荡，滤波），灭弧保护

例：　一无铁芯的长直螺线管，长为 l，截面半径为R，管上绕组的总匝数为 N，其中通有电流 I 。

求：长直螺线管的自感系数 L。

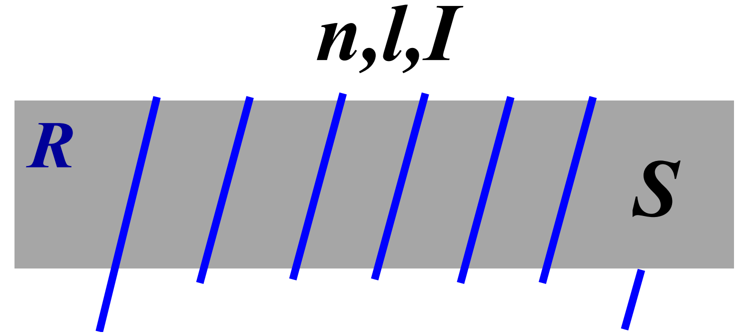


分析：对于密绕的细长螺线管，可忽略漏磁和管两端磁场的不均匀性。管内的磁场近似看作均匀分布。

根据安培环路定理，管内磁感应强度：

$$B = \mu_0 nI = \mu_0 \frac{N}{l} I,$$

穿过单匝线圈的磁通量为：



$$\Phi = BS = \mu_0 \frac{N}{l} I \cdot \pi R^2,$$

穿过N 匝线圈的磁链数为：

$$\Psi = N\Phi = \mu_0 \frac{N^2 \pi R^2}{l} I,$$

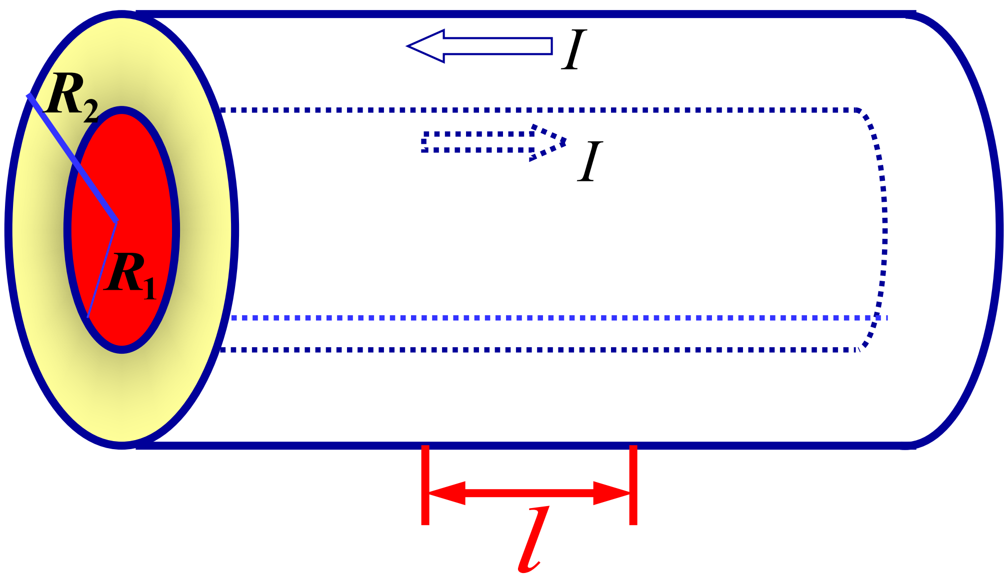
根据自感系数L 的定义： $\Psi = LI$

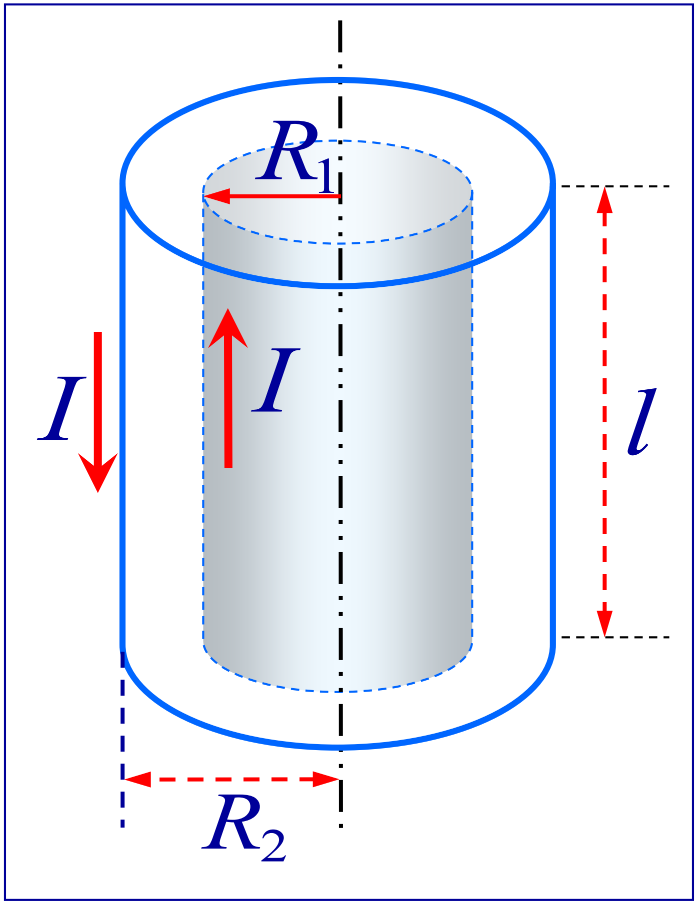
$$\therefore \quad L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \frac{N^2 \pi R^2}{l}.$$

可见：自感系数L，与回路的几何形状，匝数等有关。

例：　由两个“无限长”的同轴圆筒状导体所组成的电缆，其间充满磁导率为 μ 的磁介质，电缆中沿**内圆筒壁**和**外圆筒壁**流过的电流 I 大小相等而方向相反。设内外圆筒半径分别为R_1和R_2。

求：电缆单位长度的自感。





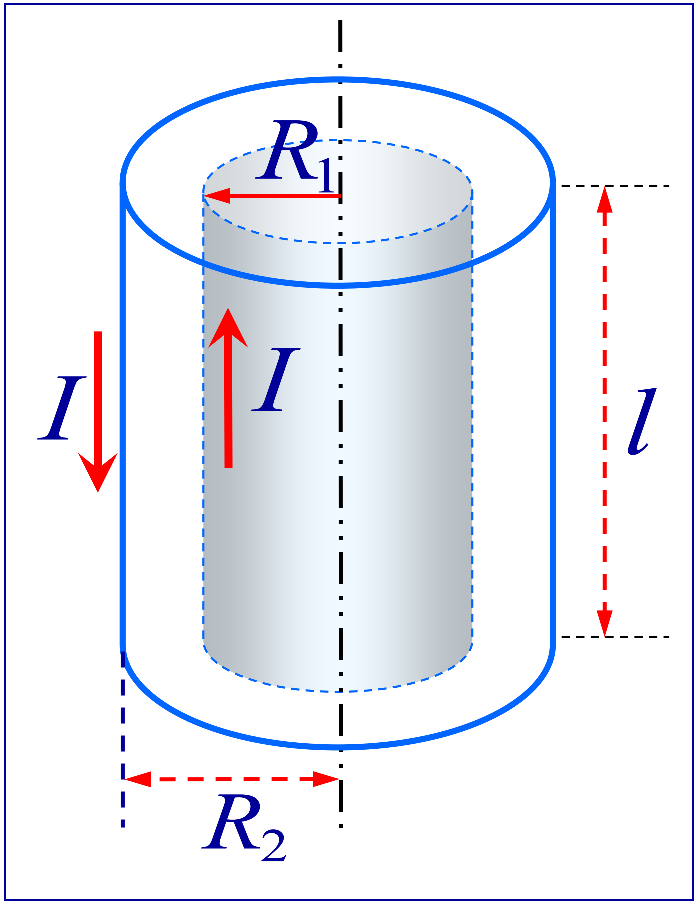
求：电缆单位长度的自感。

思路分析：

step1：分析导体在空间激发的磁场。

step2：计算通过导体的磁通量（磁链）。

step3：根据自感定义 $L = \Psi / I$**，计算自感。**



step1：分析导体在空间激发的磁场。

根据对称性，磁感应线为与圆筒同轴的同心圆；

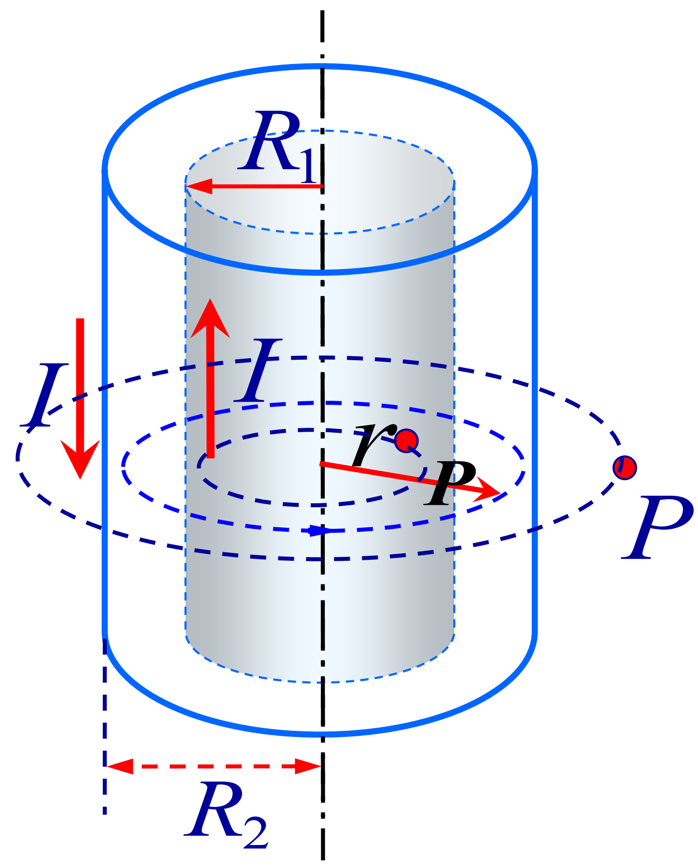
应用H的环路定理，可知：

①在内圆筒之内($r < R_1$)，$B = 0$。

②在外圆筒之外($r > R_2$)，$B = 0$。

③在内外两圆筒间($R_1 < r < R_2$)，离轴线距离为r处：

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}.$$



step2：计算通过导体的磁通量（磁链）。

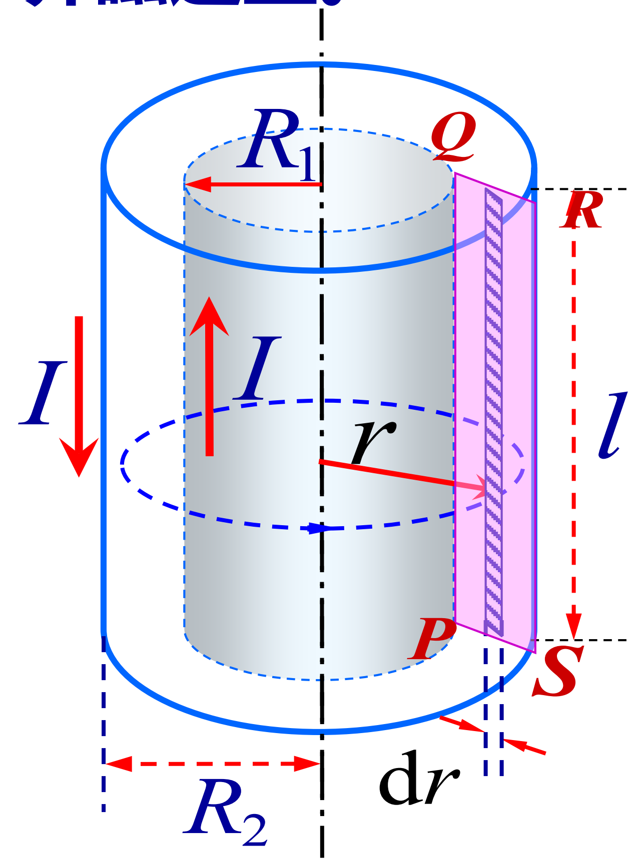
在内外圆筒间，取如图截面PQRS计算磁通量。

B不均匀，Φ无法直接计算

将截面分割成许多小面元，

$$\mathrm{d}\Phi = B\,\mathrm{d}S = Bl\,\mathrm{d}r = \frac{\mu I}{2\pi r} l\,\mathrm{d}r,$$

$$\Phi = \int \mathrm{d}\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I l}{2\pi} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

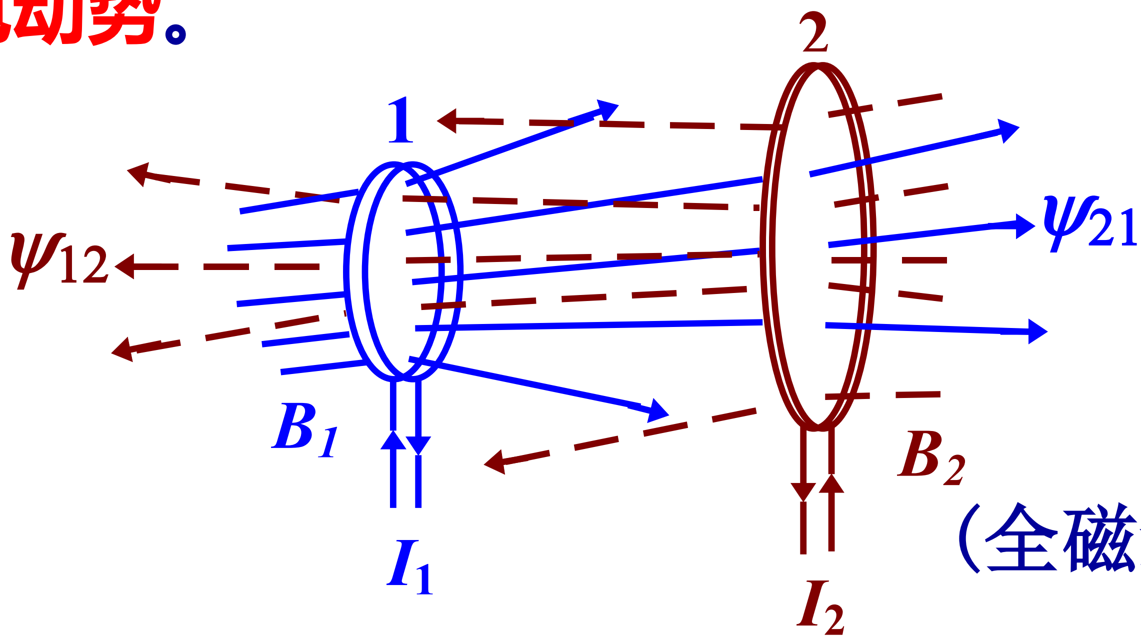


step3：根据自感定义 $L = \Psi / I$ **，**
计算自感。

电缆单位长度的自感为： $L' = \dfrac{\Psi}{I}\dfrac{1}{l} = \dfrac{\mu}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$

2. 互感应

一个回路中电流变化而在另一个回路中产生感应电动势的现象，叫做互感现象。这种感应电动势叫做互感电动势。



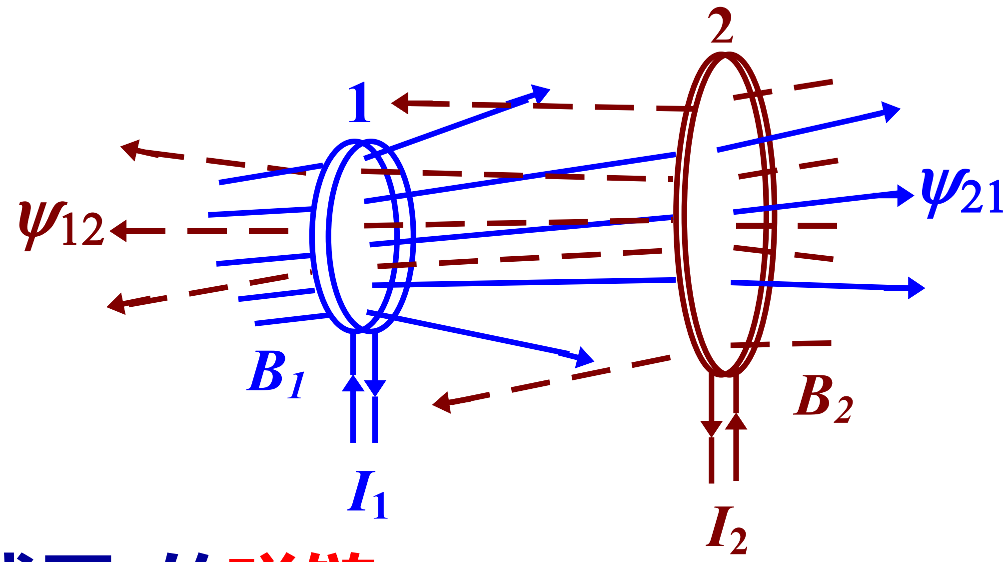
(全磁通：$\Psi = N\Phi$)

用Ψ_{21}表示线圈1产生的磁场B_1穿过线圈2的磁链;

用Ψ_{12}表示线圈2产生的磁场B_2穿过线圈1的磁链。

线圈1电流I_1变化

→线圈2感生电动势



$$\varepsilon_{21} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t},$$

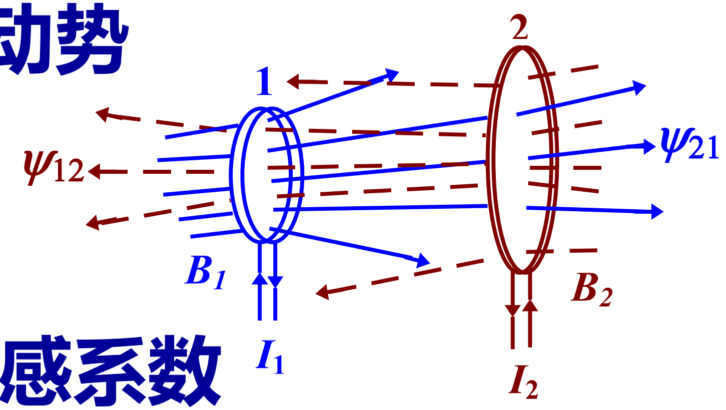
Ψ_{21} — I_1 的磁场B_1通过线圈2的磁链

由毕奥—萨定理：$\Psi_{21} = \underline{M_{21}} I_1$

比例系数M_{21} ——线圈1对2 的互感系数

∴感生电动势：$\varepsilon_{21} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t} = -M_{21}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}.$

线圈2 电流I_2变化 → 线圈1感生电动势



$$\varepsilon_{12} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{12}}{\mathrm{d}t} = -\underline{M_{12}}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

比例系数M_{12} ——线圈2对1 的互感系数

可以证明：

$$M_{12} = M_{21} = M, \qquad \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = M$$

$$\boxed{\varepsilon_{12} = -M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}, \qquad \varepsilon_{21} = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}}$$

互感的单位：　亨利（H）

$$1H = 1\ Wb \cdot A^{-1}, \qquad 1H = 10^3\, mH = 10^6\, \mu H$$

说明：

(1) 可以证明： $M_{21} = M_{12} = M$

(2) 两个线圈的互感与各自的自感有一定的关系：

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

k **为两线圈的耦合系数** $(0 \le k \le 1)$

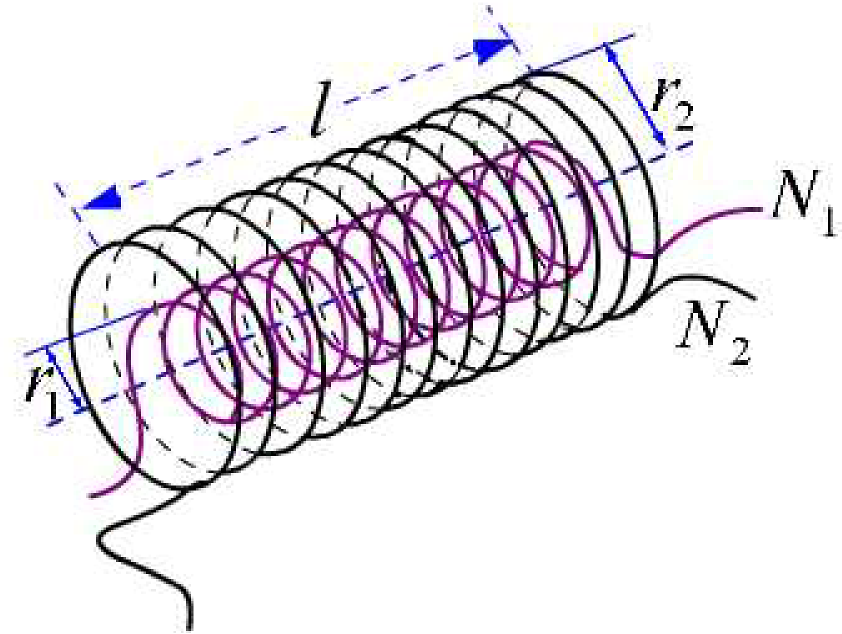
改变两线圈的相对位置，可改变两线圈之间的耦合程度。

$k = 1$ **两线圈为完全耦合：** $M = \sqrt{L_1 L_2}$

$k = 0$ **两线圈间无相互影响：** $M = 0$

例：　有两个长度均为l，匝数分别为N_1和N_2，半径为r_1和r_2 ($r_1 < r_2$)的同轴长直密绕螺线管.

求：两个螺线管的互感系数M。



思路分析：

(设小螺线管1电流为I_1)

step1：计算螺线管1在空间激发的磁场。

step2：计算螺管1激发的磁场通过螺管2的磁链Ψ_{21}。

step3：根据互感定义 $M_{21} = \Psi_{21} / I_1$ ，计算互感。

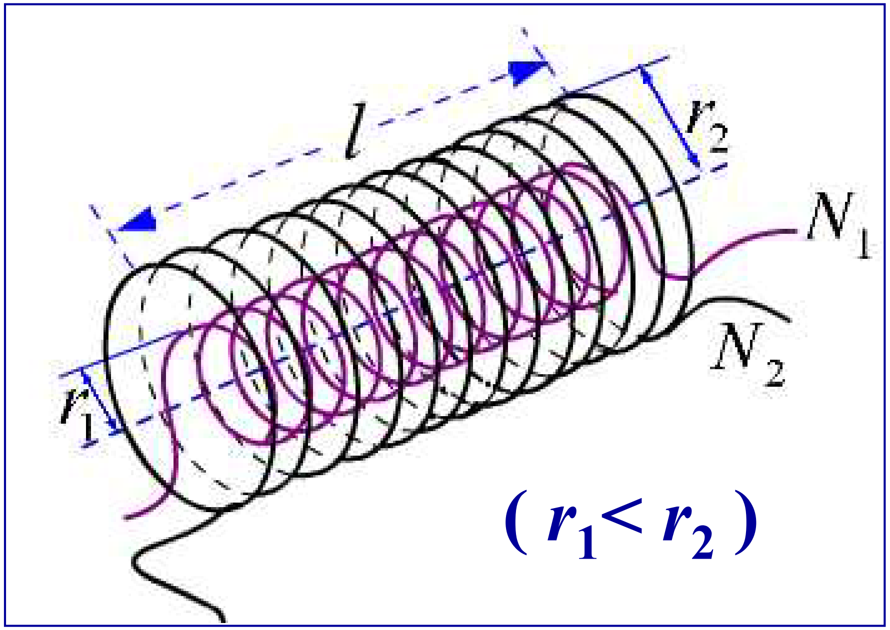
①设半径为r_1 的螺线管中通有电流 I_1，则

a， $r < r_1$，

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1,$$

b， $r > r_1$，

$$B_1 = 0.$$

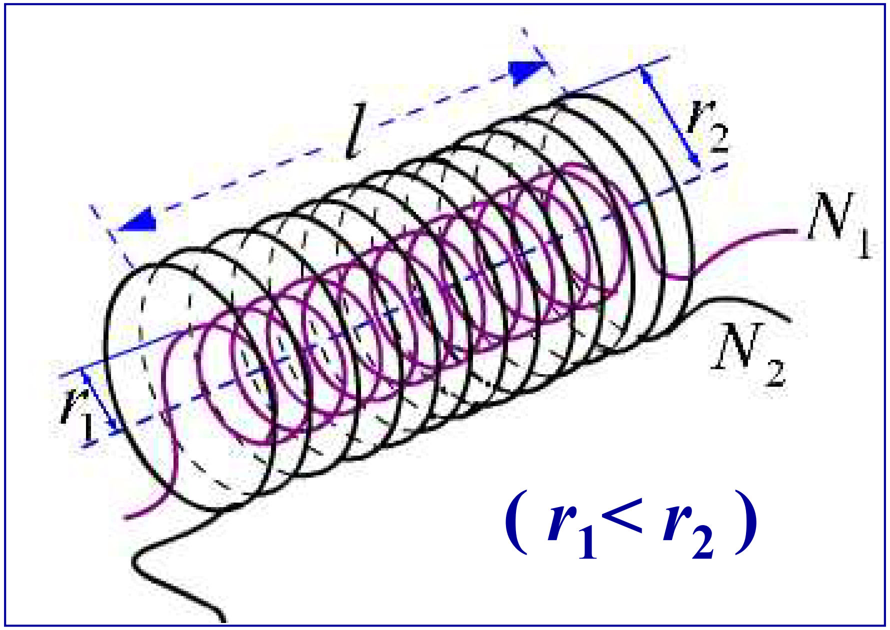


② B_1穿过半径为 r_2 的螺线管的磁链数为：

$$\Psi_{21} = \Psi_{(r<r_1)} + \Psi_{(r>r_1)} = \Psi_{(r<r_1)} + 0$$

$$= N_2 B_1 (\pi r_1^2) = \mu_0 \frac{N_2 N_1}{l} I_1 \cdot \pi r_1^2$$

$$\Psi_{21} = \mu_0 \frac{N_2 N_1}{l} I_1 \cdot \pi r_1^2$$



③根据互感系数定义：

$$(\Psi_{21} = M_{21} I_1)$$

$$\therefore M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \mu_0 \frac{N_2 N_1}{l} \pi r_1^2.$$

$$\because M_{21} = M_{12} = M,$$

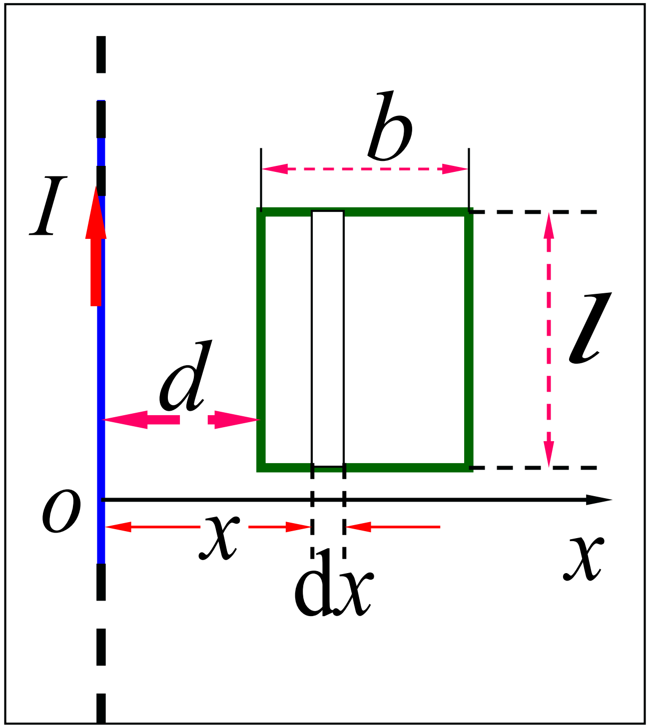
两个螺线管的互感系数： $M = M_{21} = \mu_0 \dfrac{N_2 N_1}{l} \pi r_1^2.$

若假设螺线管2通入电流i_2，计算结果如何？

例： 一无限长直导线与一宽、长分别为 b 和 l 的矩形线圈共面,直导线与矩形线圈的一侧平行, 且相距为 d 。

求: 二者的互感系数。

解: 设长直导线通电流 I 。



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l \mathrm{d}x$$

$$\Phi = \int_{d}^{d+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b+d}{d}\right)$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b+d}{d}\right)$$