第四节　对换

一、对换的定义

定义　在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种作出新排列的手续叫做对换.

将相邻两个元素对调，叫做**相邻对换**.

例如

$$a_1 \cdots a_l\ a\ b\ b_1 \cdots b_m \qquad a_1 \cdots a_l\ a\ b_1 \cdots b_m\ b\ c_1 \cdots c_n$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$a_1 \cdots a_l\ b\ a\ b_1 \cdots b_m \qquad a_1 \cdots a_l\ b\ b_1 \cdots b_m\ a\ c_1 \cdots c_n$$

上页　下页　返回

二、对换与排列的奇偶性的关系

定理1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证明 设排列为

$$a_1 \cdots a_l\, a b\, b_1 \cdots b_m \xrightarrow{\text{对换} a \text{与} b} a_1 \cdots a_l\, b a\, b_1 \cdots b_m$$

除 a, b 外，其它元素的逆序数不改变.

上页 下页 返回

当$a < b$时，

经对换后 a 的逆序数增加1， b的逆序数不变;

当$a > b$时，

经对换后 a 的逆序数不变，b的逆序数减少1.

因此对换相邻两个元素，排列改变奇偶性.

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$

现来对换 a 与 b.

$$a_1 \cdots a_l\, a\, b_1 \cdots b_m\, b\, c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m\text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l\, ab\, b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m+1\text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l\, b\, b_1 \cdots b_m\, a\, c_1 \cdots c_n$$

$$\therefore \quad a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n,$$

$$\xrightarrow{2m+1\text{次相邻对换}} a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n,$$

所以一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证明 由定理1知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为0)，因此知推论成立.

定理2 n阶行列式也可定义为

$$D=\sum(-1)^{t}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

其中 t 为行标排列$p_1p_2\cdots p_n$的逆序数.

上页 下页 返回

例2 在六阶行列式中，下列两项各应带什么符号.

(1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$;

(2) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$.

解 (1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65} \rightarrow a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$,

431265的逆序数为

$t = 1 + 0 + 2 + 2 + 1 + 0 = 6,$

所以 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 前边应带正号.

(2) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$

行标排列341562的逆序数为

$$t=0+0+2+0+0+4=6$$

列标排列234165的逆序数为

$$t=1+0+3+0+0=4$$

所以$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 前边应带正号.

三、小结

1. 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

2. 行列式的两种表示方法

$$D=\sum(-1)^{t}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

$$D=\sum(-1)^{t}a_{1 p_1}a_{2 p_2}\cdots a_{n p_n}$$

上页 下页 返回

第五节　行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

性质1　行列式与它的转置行列式相等.

证明 记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D^T=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，按定义

$$D^T=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}.$$

又因为行列式D可表示为

$$D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}.$$

故 $D = D^T$. 证毕

说明 行列式中行与列具有同等的地位,因此行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.

性质2 互换行列式的两行（列）, 行列式变号.

证明 设行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

是由行列式 $D = \det(a_{ij})$ 变换 i, j 两行得到的,

即当 $k \neq i, j$ 时, $b_{kp} = a_{kp}$; 当 $k = i, j$ 时,

$$b_{ip} = a_{jp},\ b_{jp} = a_{ip},$$

于是 $$D_1 = \sum (-1)^t b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n}$$

$$= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n}$$

$$= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n},$$

其中 $1 \cdots i \cdots j \cdots n$ 为自然排列,

t 为排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的逆序数.

设排列 $p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n$ 的逆序数为 t_1, **则有**

$$(-1)^t = -(-1)^{t_1},$$

故 $D_1 = -\sum (-1)^{t_1} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} = -D$.证毕

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

推论　如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

证明　互换相同的两行，有 $D = -D$,

$$\therefore \quad D = 0.$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行

以 c_i 表示行列式的第 i 列

交换 i, j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$,

交换 i, j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$,

性质3 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

第 i 行（或列）乘以 k,

记作 $r_i \times k$ （或 $c_i \times k$）

上页 下页 返回

性质 4 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

性质5 若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和.

例如
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则D等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

例1 **计算下列行列式的值**

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 301 & 98 & 197 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 300+1 & 100-2 & 200-3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 300 & 100 & 200 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

性质6　把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix}$$

$k\times$

$$\underline{\underline{C_i + kC_j}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix}$$

二、应用举例

计算行列式常用方法：利用运算$r_i + kr_j$把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

例2

$$
\begin{array}{cl}
D = \begin{vmatrix}
1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\
-3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\
2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\
3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\
4 & -4 & 10 & -10 & 2
\end{vmatrix}
&
\begin{array}{l}
\times 3 \\
\oplus \\
\\
\\
\\
\end{array}
\end{array}
$$

解 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$ $\times 3$ $\oplus$

$$\xlongequal{r_2 + 3r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-2) \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\overset{r_2 - 2r_1}{=} \begin{matrix} (-4)\times \\ \\ \oplus \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-3) \\ \\ \oplus \\ \\ \\ \end{matrix}$$

上页 下页 返回

$$\xlongequal[r_4-4r_1]{r_3-3r_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$\oplus$

上页 下页 返回

$$\xlongequal{r_3+r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times(-2) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\xlongequal{r_5 - 2r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \times 4 \\ \oplus \end{matrix}$$

$$\xlongequal{r_5 + 4r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -(-2)(-1)(-6) = 12.$$

上页 下页 返回

例3. 计算

$$D=\begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}.$$

特点:
各列元素之和相等

解法1.

$$D \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} b+3a & b+3a & b+3a & b+3a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_4-c_1]{c_2-c_1,c_3-c_1} \begin{vmatrix} b+3a & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 & 0 \\ a & 0 & b-a & 0 \\ a & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix}$$

$$=(b+3a)(b-a)^3$$

$$D=\begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}$$

解法2.

$$D \overset{c_2-c_1,c_3-c_1}{\underset{c_4-c_1}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} b & a-b & a-b & a-b \\ a & b-a & 0 & 0 \\ a & 0 & b-a & 0 \\ a & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1+r_2+r_3+r_4}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} b+3a & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 & 0 \\ a & 0 & b-a & 0 \\ a & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix}$$

$$=(b+3a)(b-a)^3$$

例4 计算4阶行列式， $a_1 a_2 a_3 a_4 \neq 0$

$$D_4 = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & x & x \\ x & x+a_2 & x & x \\ x & x & x+a_3 & x \\ x & x & x & x+a_4 \end{vmatrix}$$

解：

原式 $\xlongequal[i=2,3,4]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} x+a_1 & x & x & x \\ -a_1 & a_2 & & \\ -a_1 & & a_3 & \\ -a_1 & & & a_4 \end{vmatrix}$ **双边 - 对角形**

上页 下页 返回

$$= a_1a_2a_3a_4\begin{vmatrix} 1+\dfrac{x}{a_1} & \dfrac{x}{a_2} & \dfrac{x}{a_3} & \dfrac{x}{a_4} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_1+c_2+c_3+c_4}}\, a_1a_2a_3a_4\left(1+\sum_{i=1}^{4}\frac{x}{a_i}\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{4}a_i\left(1+\sum_{i=1}^{4}\frac{x}{a_i}\right)$$

例5. **计算**

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}.$$

(P13 例9)

解: $$D \xlongequal[\substack{r_3-r_2 \\ r_2-r_1}]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_4 - r_3}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4$$

注意: 1) 运算次序不同行列式变形结果可能形式不同.
例如

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \underline{\underline{r_1 + r_2}} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix} \underline{\underline{r_2 - r_1}} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ -a & -b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \underline{\underline{r_2 - r_1}} \begin{vmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{vmatrix} \underline{\underline{r_1 + r_2}} \begin{vmatrix} c & d \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

上页 下页 返回

2)忽视后次运算是作用在前次运算基础上的就要出错. 例如,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xrightarrow[\cancel{r_2 - r_1}]{\cancel{r_1 + r_2}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a+c} & \boldsymbol{b+d} \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

3)

$r_i + r_j$ 第 j 行加到第 i 行

$r_j + r_i$ 第 i 行加到第 j 行 无交换律

$r_i + kr_j$ 不能写成 $kr_j + r_i$

例6 计算 n 阶行列式 $$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解 将第 $2,3,\cdots,n$ 都加到第一列得

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

上页 下页 返回

$$=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ & a-b & & & \mathbf{O} \\ & & a-b & & \\ & \mathbf{O} & & \ddots & \\ & & & & a-b \end{vmatrix}=\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}.$$

上页 下页 返回

例7 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$

$$D_1 = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, D_2 = \det(b_{ij}) = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D = D_1 D_2$. (P14例10)

证明

对 D_1 作运算 $r_i + kr_j$，把 D_1 化为下三角形行列式

$$\text{设为}\quad D_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11} \cdots p_{kk};$$

对 D_2 作运算 $c_i + kc_j$,把 D_2 化为下三角形行列式

$$\text{设为}\quad D_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nk} \end{vmatrix} = q_{11} \cdots q_{nn}.$$

上页 下页 返回

对 D 的前 k 行作运算 $r_i + kr_j$，再对后 n 列作运算 $c_i + kc_j$,把 D 化为下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix},$$

故 $D = p_{11} \cdots p_{kk} \cdot q_{11} \cdots q_{nn} = D_1 D_2$.

上页 下页 返回

三、小结

行列式的6个性质(行列式中行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立).

计算行列式常用方法：(1)利用定义;(2)利用性质把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

作业

P26　6(2),　(5) ;

思考题

计算4阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^2+\dfrac{1}{a^2} & a & \dfrac{1}{a} & 1 \\ b^2+\dfrac{1}{b^2} & b & \dfrac{1}{b} & 1 \\ c^2+\dfrac{1}{c^2} & c & \dfrac{1}{c} & 1 \\ d^2+\dfrac{1}{d^2} & d & \dfrac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

(已知 $abcd=1$)

思考题解答

解

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & a & \dfrac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \dfrac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \dfrac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \dfrac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a^2} & a & \dfrac{1}{a} & 1 \\ \dfrac{1}{b^2} & b & \dfrac{1}{b} & 1 \\ \dfrac{1}{c^2} & c & \dfrac{1}{c} & 1 \\ \dfrac{1}{d^2} & d & \dfrac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abcd \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + (-1)^3 abcd \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$