学号：

姓名：

专业年级：

学院：

中国矿业大学(北京)

《线性代数 A》 试卷(A 卷)

得分：________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得 分										
阅卷人										

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

（1）设 $A=\begin{pmatrix}8&4&2\\3&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $|-2A^{-1}|=$____4____.

（2）已知 $2A^2-3A=E$，则 $(A-E)^{-1}=$____$\dfrac{2A-E}{2}$____.

(3) 设 $A=\begin{pmatrix}3&9\\5&4\end{pmatrix}$，则 A 的伴随矩阵 $A^*=$____$\begin{pmatrix}4&-9\\-5&3\end{pmatrix}$____.

（4）设 $\alpha=(1,2,3),\ \beta=(3,2,1)$，则 $(\alpha^T\beta)^{10}=$____$10^9\begin{pmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{pmatrix}$____.

(5) 若 4 阶矩阵 A 与 B 相似，矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则行列式

$|B^{-1}-E|=$____24____.（其中 $\boldsymbol{E}$ 表示 4 阶单位矩阵）

二、（满分 8 分）

已知 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$，求矩阵 X.

$$X=\begin{pmatrix}4&1&7\\6&3&9\\5&2&8\end{pmatrix}$$

三、（满分 8 分） 求行列式 $\begin{vmatrix}a^2&(a+1)^2&(a+2)^2&(a+3)^2\\b^2&(b+1)^2&(b+2)^2&(b+3)^2\\c^2&(c+1)^2&(c+2)^2&(c+3)^2\\d^2&(d+1)^2&(d+2)^2&(d+3)^2\end{vmatrix}$ 的值

=0

四、（满分 8 分） 已知 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&3&0\\1&1&3\end{pmatrix}$，$AX=2X+A$，求 X.

$$X=\begin{pmatrix}3&0&0\\-2&3&0\\0&-2&3\end{pmatrix}$$

五、（满分 8 分） 设 $A=\begin{pmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{pmatrix}$. 求 A^n，$(n\geq 3)$.

学院：　　　专业年级：　　　姓名：　　　学号：

装　订　线　　密　封　线

$$A^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1} & a^n & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} & na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$$

六、（满分 8 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{pmatrix}$. 已知 A 的秩为 2，求 λ 和 μ 的值

$\lambda=5, \mu=1$

七、（满分 8 分）设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r\ (\boldsymbol{r<n})$ 是一组 $\boldsymbol{n}$ 维向量，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $\boldsymbol{n}$ 维单位坐标向量组，满足 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)\,\boldsymbol{C}$.

证明矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可逆且向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关。

八、（满分 10 分）线性方程组 $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3-x_4=2 \\ -x_1-11x_2+4x_3+5x_4=-4 \\ x_1-5x_2+x_3+2x_4=-1 \\ 2x_1+6x_2-3x_3-3x_4=a+1 \end{cases}$

问 a 取何值时，此方程组有解；在有解的情况下，求出全部解.

a=2

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} \frac{9}{16} \\ \frac{5}{16} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{7}{16} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{9}{16} \\ \frac{5}{16} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad k_1,k_2 \text{为任意常数。}$$

学院：　专业年级：　姓名：　学号：

装　订　线

密　封　线

九、（满分 10 分）矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 3 & -1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$$

求 A 的列向量组的一个最大无关组，并把其余列向量用最大无关组线性表示.

α_1,α_2 为最大无关组，且

$$\alpha_3=-\alpha_1+3\alpha_2$$
$$\alpha_4=2\alpha_1-\alpha_2$$

十、(满分 12 分)　用一个正交变换 $x=Py$，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_3$$

化为标准形，并求出正交变换的矩阵.

$$P=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$$

$$f=y_1^{\,2}+5y_2^{\,2}+2y_3^{\,2}$$