高等数学

单元自测(三)

一、求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{e^{x}-1}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{e^{x}-1}$ $=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x}$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^{2}}$$

$$=-\frac{e}{2}$$

首 页 上一页 下一页 尾 页 结 束 返 回

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\ln x$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\ln x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$

$$=3\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$=0$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{n^2}$

$$\lim_{t\to0^+}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}\ln\frac{\sin t}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}\ln(1+\frac{\sin t}{t}-1)}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}(\frac{\sin t}{t}-1)}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t^3}(\sin t-t)}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{3t^2}(\cos t-1)}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{-\sin t}{6t}}=e^{-\frac{1}{6}},$$

$\therefore$ 原式$=e^{-\frac{1}{6}}$

首 页 上一页 下一页 尾 页 结 束 返 回

二、设常数$k>0$，试确定函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在（$0,+\infty$）内零点的个数。

解：$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}=0 \quad \Rightarrow \quad x=e$ 是其唯一驻点。

$\because \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ，$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-\infty$

$\therefore \quad f(e)>0$ ，存在两个零点在$x=e$的两侧；

三、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶导数连续，且

$f(0)=0$ 对于函数 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$

1.确定a的值,使 $g(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续。

2.证明对上述确定的a值, $g'(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上连续。

解：1. $\because\ g(0)=a \qquad \lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$

$$=f'(0)$$

$\therefore a=f'(0)$ 时$g(0)$ 处处连续。

2. $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}$$

$$\therefore\ g'(x)=\begin{cases}\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2} & x\neq 0\\[2ex] \dfrac{1}{2}f''(0) & x=0\end{cases},$$

又 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}f''(0)$

$\therefore$ 题中结论得证

四、设$f(x)=\dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$，求$f(x)$的增减区间、凹凸区间、极值、拐点、渐近线，并描绘曲线$y=f(x)$的图形。

解：$f(x)=\dfrac{10x-x^2-16}{x^2}$　　$f'(x)=-\dfrac{2(5x-16)}{x^3}$

$$f''(x)=-\frac{4(5x-24)}{x^4}$$

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{16}{5}\right)$	$\frac{16}{5}$	$\left(\frac{16}{5},\frac{24}{5}\right)$	$\frac{24}{5}$	$\left(\frac{24}{5},+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$\times$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\times$		极大		拐	

首页 上一页 下一页 尾页 结束 返回

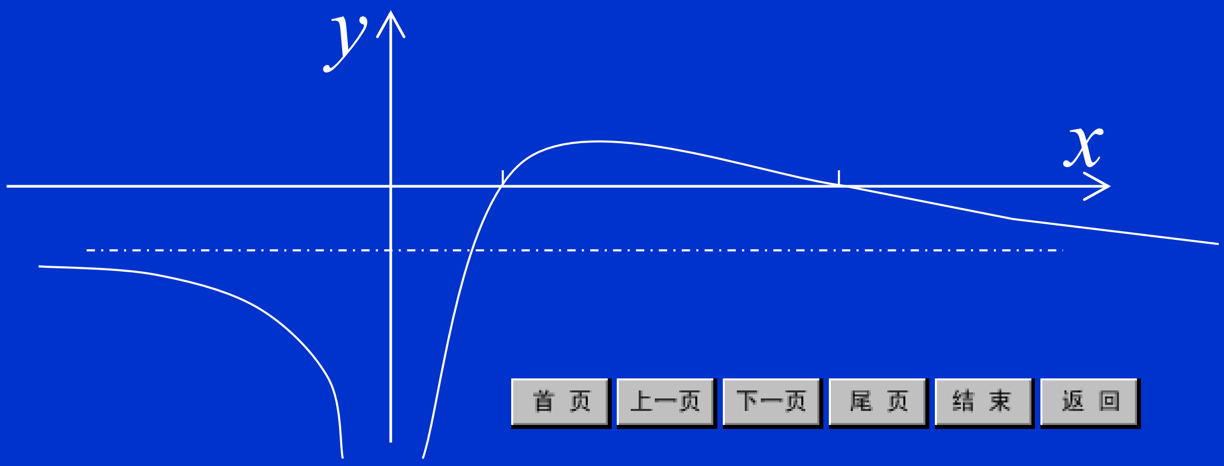
极大值 $f\left(\frac{16}{5}\right)=\frac{9}{16}$　　拐点 $\left(\frac{24}{5},\frac{7}{18}\right)$

特殊点 $(2,0)$　$(8,0)$

$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$　　$\lim_{x\to\infty} f(x)=-1$

$\therefore$　垂直渐进线　$x=0$

　　水平渐进线　$y=-1$



五、当 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$ 时，证明不等式：$\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1}>\dfrac{x_2}{x_1}$

证：（法一）$f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$

$$f'(x)=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$$

$$g(x)=x\sec^2 x-\tan x$$

$$g'(x)=2x\sec^2 x\tan x>0$$

$\therefore\ g(x)$ 单调递增 $\Rightarrow g(x)>g(0)=0$

$$\Rightarrow\ f'(x)>0$$

$\therefore\ f(x)$ 单调递增 $\Rightarrow\ f(x_2)>f(x_1)$

方法2 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\because 0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore f(x)$在$[x_1,x_2]$上 连续，在(x_1,x_2)可导

根据拉格朗日中值定理

$$\frac{\tan x_2}{x_2}-\frac{\tan x_1}{x_1}=f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

$$=\frac{\xi-\sin\xi\cos\xi}{\xi^2\cos^2\xi}(x_2-x_1)>0$$

$$\therefore \frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$$

六、设 $f(x)=nx(1-x)^n$（n为正整数）

求（1）$f(x)$ 在 $0\le x\le 1$ 上的最大值M；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} M$

解：（1）$f'(x)=n(1-x)^n-n^2x(1-x)^{n-1}$

$$=n(1-x)^{n-1}(1-x-nx)$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{n+1}$ 是其唯一驻点。

且 $f'(x)$ 由正变负，

$\therefore\ x=\dfrac{1}{n+1}$为唯一极大值点。

$$\therefore \quad M = f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

（2） $$\lim_{n\to\infty} M = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right\}^{-1}$$

$$= e^{-1}$$

七、设在含 $x=0$ 的某区间 I 上, $f'(x)=g(x)$,

$g'(x)=-f(x)$, $f(0)=0$, $g(0)=1$,

证明: $f^2(x)+g^2(x)=1\quad(x\in I)$

证: $F(x)=f^2(x)+g^2(x)$

则 $F'(x)=2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)$

$=2f(x)g(x)-2g(x)f(x)=0$

$\therefore\quad F(x)=c$

$\because\quad c=F(0)=0^2+1^2=1$

$\therefore\quad f^2(x)+g^2(x)=1$

八、设 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上连续，在 $(1,e)$ 内可导，且 $f(1)=0$，$f(e)=1$，试证明方程 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,e)$ 内至少有一个实根。

证：$F(x)=f(x)-\ln x$ 在 $[1,e]$ 上连续，在 $(1,e)$ 可导

且 $F(1)=f(1)-\ln 1=0$

$F(e)=f(e)-\ln e=0$

$\therefore\ \exists\xi\in(1,e)$ 使 $F'(\xi)=0$

即 $x=\xi$ 是 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ 的实根。

九、试比较 e^{π} 与 π^{e} 的大小。

解：$\because \quad \pi^{e}=e^{e\ln\pi}$

即 需要比较 e^{π} 与 $e^{e\ln\pi}$ 的大小

令 $f(x)=x-e\ln x \qquad x>0$

$f'(x)=1-\dfrac{e}{x} \quad \Rightarrow x=e$ 是唯一驻点

$$f''(e)=\left.\frac{e}{x^{2}}\right|_{x=e}=\frac{1}{e}>0$$

$\therefore \quad f(e)$ 是最小值

$\because \quad f(x)\geq f(e)=0$，$\pi>e$

$\therefore \quad f(\pi)>f(e)=0 \quad \Rightarrow \pi>e\ln\pi$

$\therefore \quad e^{\pi}>\pi^{e}$

十、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内 $f'(x)$ 单增，

试证 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 在 (a,b) 内单调增加。

解：$$g'(x)=\frac{f'(x)\cdot(x-a)-[f(x)-f(a)]}{(x-a)^2}$$

$$=\frac{f'(x)\cdot(x-a)-f'(\xi)\cdot(x-a)}{(x-a)^2}\quad(a<\xi<x)$$

$$=\frac{1}{x-a}[f'(x)-f'(\xi)]$$

$f'(x)\uparrow\Rightarrow f'(x)-f'(\xi)>0$

所以 $g'(x)>0$,结论即易得,

十一、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，且 $f(a)=0\ \ f(b)=0$，又 $f(c)>0(a<c<b)$ 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)<0$

解：在 $[a,c]$、$[c,b]$ 上用中值定理，有：

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\xi_1)\quad (a<\xi_1<c)$$

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(\xi_2)\quad (c<\xi_2<b)$$

即 $$f'(\xi_1)=\frac{f(c)}{c-a}>0\quad f'(\xi_2)=\frac{-f(c)}{b-c}<0$$

又 $f'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上用中值定理

$$\therefore \quad f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1} \quad (\xi_1<\xi<\xi_2)$$

$$\because \quad f'(\xi_2)<0 \ , \ f'(\xi_1)>0 \ , \ \xi_2-\xi_1>0$$

$$\therefore \quad f''(\xi)<0$$

补充. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)内可导, 且$f(a)=f(b)=1$, 证明存在$\xi,\eta\in(a,b)$, 使

$$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$$

证: 转化为证 $\boxed{e^{\eta}f(\eta)+e^{\eta}f'(\eta)}=e^{\xi}$

即证 $[e^{x}f(x)]'\big|_{x=\eta}=(e^{x})'\big|_{x=\xi}$

设辅助函数 $F(x)=e^{x}f(x)$, 由于它在 $[a,b]$ 满足

拉氏中值定理条件, 因此存在 $\eta\in(a,b)$, 使

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\eta)\longrightarrow\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}=\boxed{e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]}$$

转化为证 $\boxed{e^{\eta} f(\eta)+e^{\eta} f'(\eta)}=e^{\xi}$

$$\boxed{\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}}=\boxed{e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]} \quad \eta\in(a,b),$$

再对 $\varphi(x)=e^{x}$ 在 $[a,b]$ 上用拉氏中值定理，

则存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\boxed{\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}}=e^{\xi}$$

因此 $e^{\eta} f(\eta)+e^{\eta} f'(\eta)=e^{\xi} \quad \xi,\eta\in(a,b)$