CONTENTS

笛卡尔学派和莱布尼兹学派之争

- 17世纪的法国物理学家、数学家笛卡尔(René Descartes)
- 德国物理学家、数学家莱布尼兹(Gottfried Wilhelm von Leibniz)

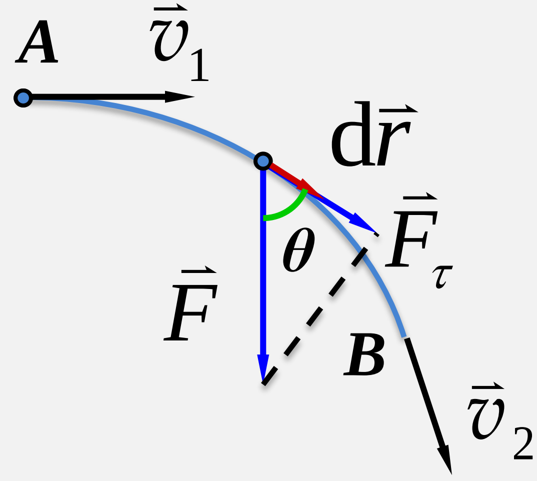
1596-1653

1646-1716

- 功效与速度成正比 v.s. 功效与速度平方成正比
- 笛卡尔：从时间角度出发，力为原始概念，引出“运动量”mv。并使用 Ft=mv 为基本方程。
- 莱布尼兹：从空间角度出发，功为原始量，使用 $Fs=mv^2/2$ 为基本方程，力是推导出来的一种概念。

- # 质点的动能定理

质点m在合外力作用下自A点移动到B点, 合外力作的功:



元功

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F\cos(\theta)\mathrm{d}s = F_\tau \mathrm{d}s$$

$$\because \quad F_\tau = ma_\tau = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \therefore \quad \mathrm{d}A = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s = mv\mathrm{d}v$$

总功 $$A = \int_A^B \mathrm{d}A = \int_{v_1}^{v_2} mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ 物体因机械运动而具有的能量

初动能：

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^{\ 2}$$

末动能：

$$E_{k2} = \frac{1}{2}mv_2^{\ 2}$$

所以有

$$A = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = E_{k2} - E_{k1}$$

质点的动能定理：

合外力对质点所作的功等于质点动能的增量。

初始状态动能 E_{k0} + 合外力作的功 A = 末尾状态动能 E_k

状态量 → 状态量

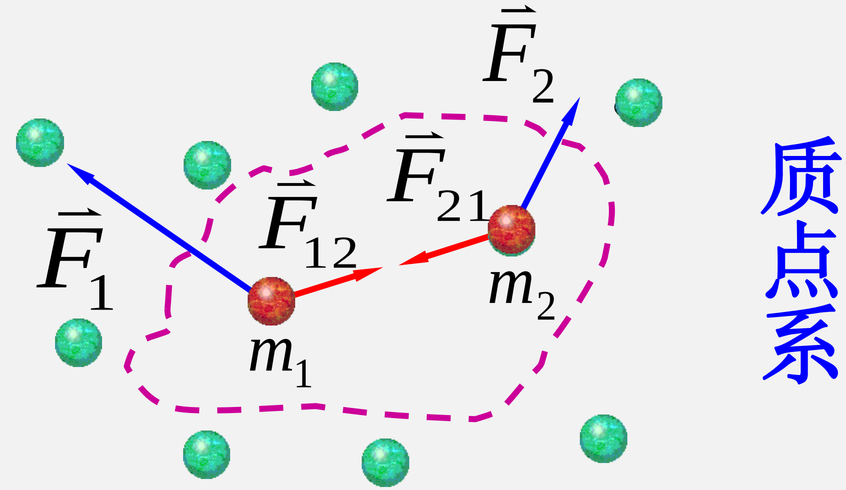
过程量

A>0，动能增加
A<0，动能减小
A=0，动能守恒

动能定理适用于惯性系。

多个质点的系统呢？

- 质点系动能定理



对质点 m_1 和 m_2

外力：$\vec{F}_1, \vec{F}_2$

内力：$\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}$

初速度：$\vec{v}_{1A}, \vec{v}_{2A}$　末速度：$\vec{v}_{1B}, \vec{v}_{2B}$

$$m_1: \quad \int_{A_1}^{B_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_{A_1}^{B_1} \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{1B}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1A}^2$$

$$+$$

$$m_2: \quad \int_{A_2}^{B_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \int_{A_2}^{B_2} \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2B}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2A}^2$$

$$\int_{A_1}^{B_1}\vec{F}_1\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1+\int_{A_2}^{B_2}\vec{F}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2+\int_{A_1}^{B_1}\vec{F}_{12}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1+\int_{A_2}^{B_2}\vec{F}_{21}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2$$

系统外力所做的功　　系统内力所做的功

$$=(\frac{1}{2}m_1v_{1\mathrm{B}}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2\mathrm{B}}^2)-(\frac{1}{2}m_1v_{1\mathrm{A}}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2\mathrm{A}}^2)$$

系统的末动能　　系统的初动能

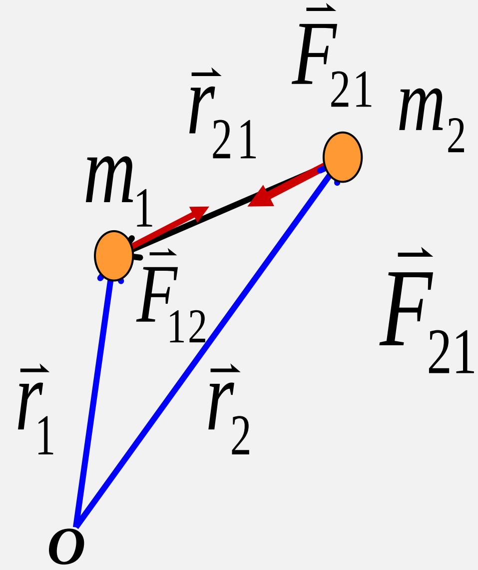
内力如何影响系统动能？

内力为什么会对系统做功?

内力$\vec{F}_{12},\vec{F}_{21}$对系统作的功

$$\mathrm{d}A_{内1} = \vec{F}_{12}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1$$

$$\mathrm{d}A_{内2} = \vec{F}_{21}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2 = -\vec{F}_{12}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2$$



$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

$$\mathrm{d}A_{内} = \mathrm{d}A_{内1} + \mathrm{d}A_{内2}$$

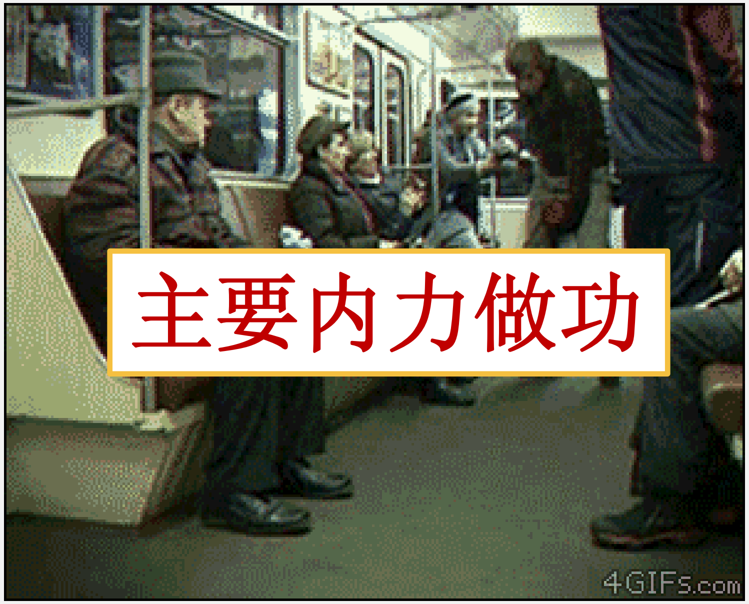
$$= \vec{F}_{12}\cdot(\mathrm{d}\vec{r}_1 - \mathrm{d}\vec{r}_2) = \vec{F}_{12}\cdot\mathrm{d}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

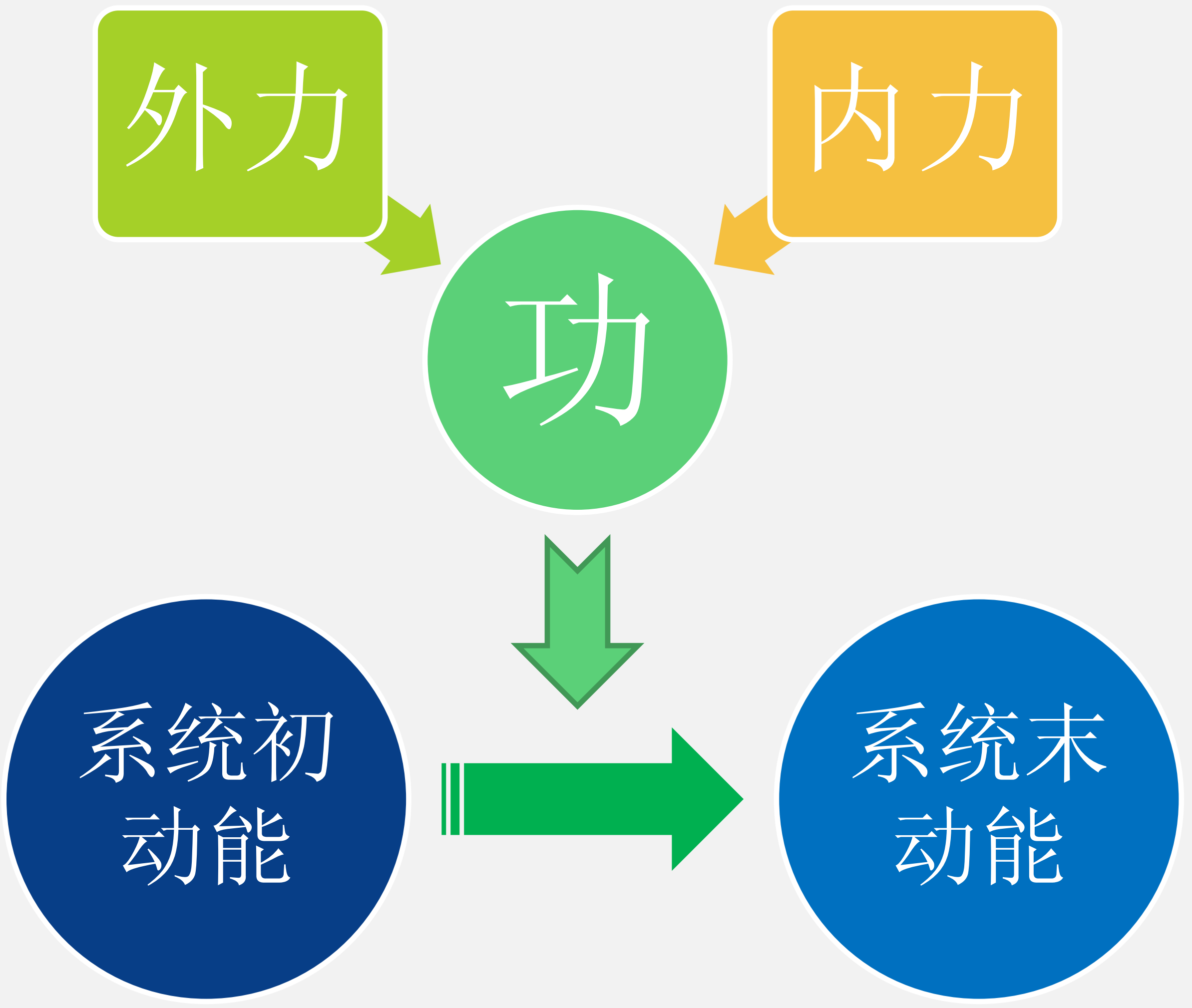
推广到n个质点的质点系，有

$$\sum_{i=1}^{n} A_{外i} + \sum_{i=1}^{n} A_{内i} = \sum_{i=1}^{n} E_{\mathrm{k}i} - \sum_{i=1}^{n} E_{\mathrm{k}i0} = E_{\mathrm{k}} - E_{\mathrm{k}0}$$

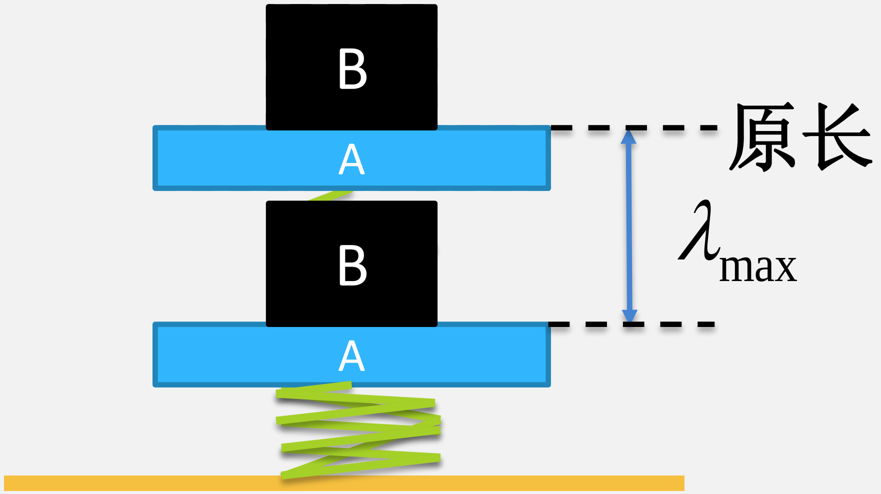
质点系的动能定理：

外力所作功之和 + 内力所作功之和 = 系统动能的增量


主要内力做功
4GIFs.com


外力
内力
功
系统初动能
系统末动能

例1 如图，物体B的质量为m，弹簧的弹性系数为k，板A和弹簧质量均可忽略不计，求弹簧的最大压缩量。

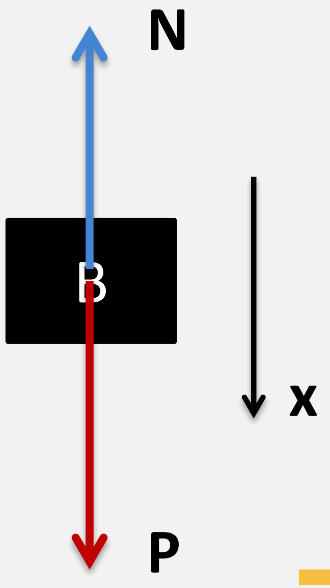


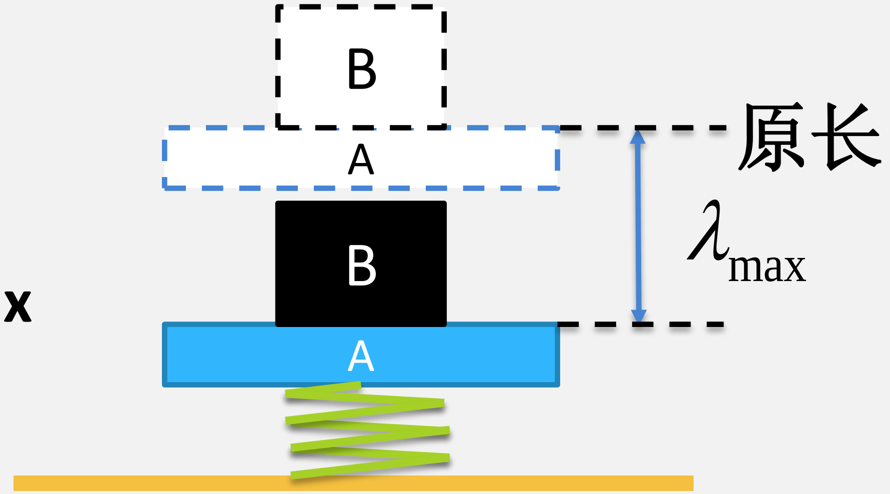
例1 如图， 物体B的质量为m，弹簧的弹性系数为k，板A和弹簧质量均可忽略不计，求弹簧的最大压缩量。

解 受力分析

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

$$\vec{N} = -k\vec{x}$$





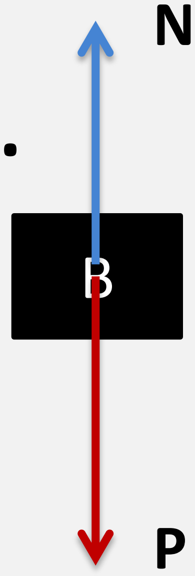
合外力 $$\vec{F}_{合} = m\vec{g} - k\vec{x} = (mg - kx)\vec{i}$$

合外力做功

$$A=\int_0^{\lambda_{\max}}(mg-kx)\mathrm{d}x=mg\lambda_{\max}-\frac{1}{2}k\lambda_{\max}^2$$

由于初末动能都为0，所以动能增量为0.

根据动能定理，则有合外力做功为0



即

$$mg\lambda_{\max}-\frac{1}{2}k\lambda_{\max}^2=0$$

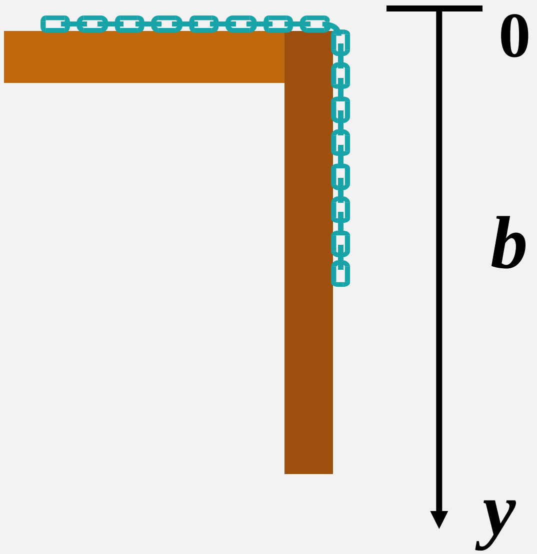
故

$$\boxed{\lambda_{\max}=2\frac{mg}{k}}$$

例2 长为l 的均质链条，部分置于水平面上，其余自然下垂，若链条与水平面间静摩擦系数为μ_0，滑动摩擦系数为μ 。

求：(1) 满足什么条件时,链条将开始滑动？

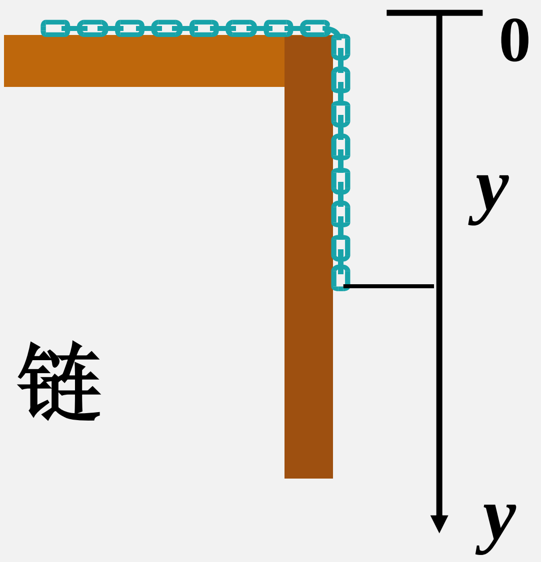
(2) 若下垂部分长度为b时，链条自静止开始滑动，当链条末端刚刚滑离桌面时，其速度等于多少？



解：(1)设链条线密度为ρ，下垂链条长度 y

$$\rho y g \ge \mu_0 \rho (l - y) g$$

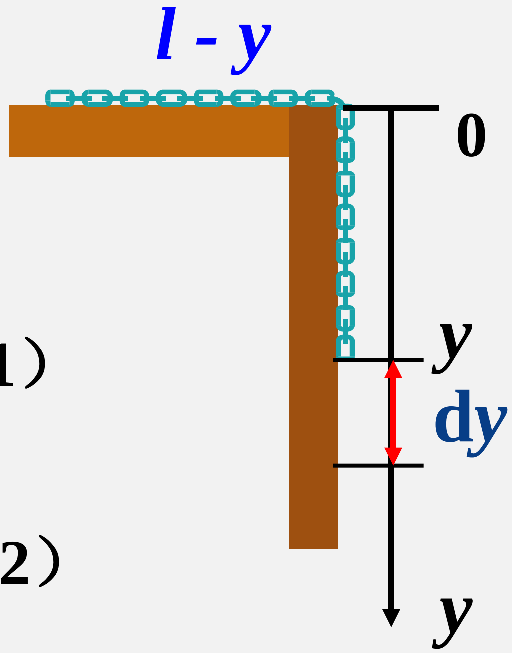
$$\therefore y \ge \frac{\mu_0}{1+\mu_0} l$$



拉力大于最大静摩擦力时, 链条将开始滑动。

(2) 以整个链条为研究对象，链条在运动过程中各部分之间相互作用的内力的功之和为零。

重力的元功 $\mathrm{d}A' = \rho y g \mathrm{d}y$



摩擦力的元功 $\mathrm{d}A'' = -\mu\rho(l-y)\mathrm{d}y$

总功 $A = \int_b^l \mathrm{d}A' + \mathrm{d}A''$ （1）

根据动能定理 $A = \frac{1}{2}\rho l v^2 - 0$ （2）

由（1）和（2）两式可得 $v = \sqrt{\frac{g}{l}(l^2 - b^2) - \frac{\mu g}{l}(l-b)^2}$

作业题：

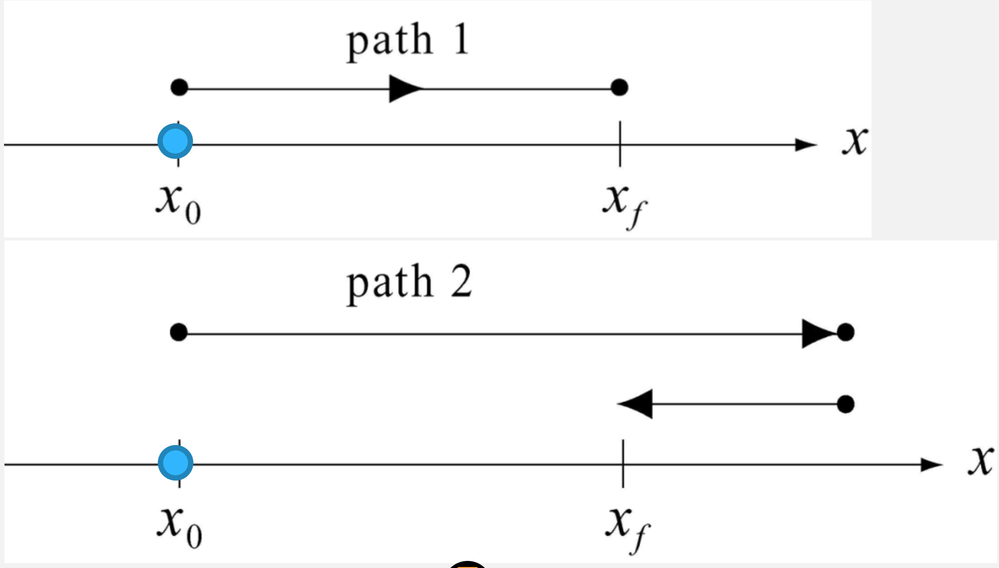
CONTENTS

❖保守力和非保守力

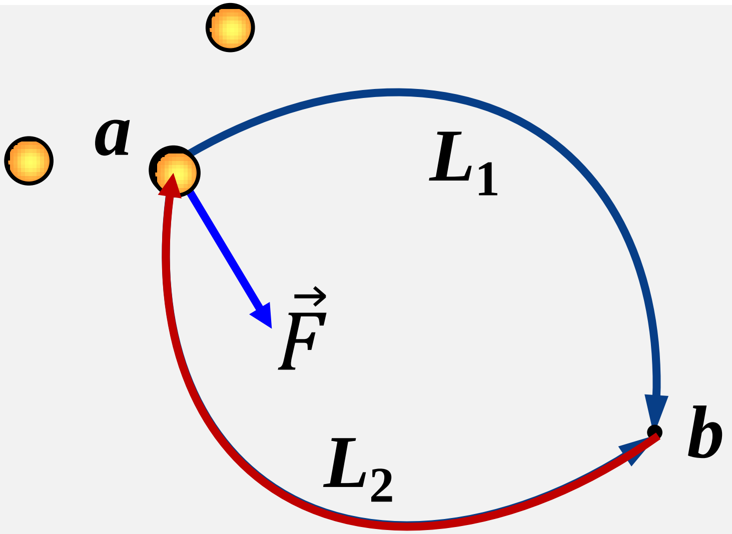
- 保守力

做功不依赖于路径，只跟物体的始末位置有关。

$$\boxed{\int_{L_1} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{L_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$



$$\Rightarrow \boxed{\oint \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0}$$



若物体只受到保守力作用产生运动，当它回到原处时能量不变。

保守力：做功只跟物体的始末位置有关

- 重力、万有引力、弹性力等

非保守力：做功跟物体运动路径有关

- 摩擦力等

保守力的一个重要特征就是有对应的势能

？什么是势能？怎么计算势能大小？

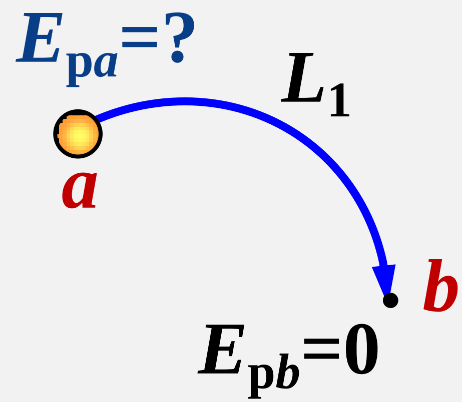
❖ 势能

保守力：做功只跟物体的始末位置有关

	做功
重力	$A_{重}=-[mgh_b-mgh_a]$
弹性力	$A_{弹}=-[\frac{1}{2}kx_b^2-\frac{1}{2}kx_a^2]$
万有引力	$A_{引}=-[(-G\frac{mM}{r_b})-(-G\frac{mM}{r_a})]$
引入势能函数 E_p	$A_{保}=-[E_{pb}-E_{pa}]$ $=-\Delta E_p$

保守力做的功等于势能增量的负值。

$$A_{保} = -[\underbrace{E_{pb}}_{=0} - E_{pa}] = -\Delta E_{p}$$



$$E_{pa} = A_{保} = \int_{a}^{"0"} \vec{F}_{保} \cdot d\vec{r}$$

质点在某处的势能,等于质点从该处移动至零势能点保守力所做的功。

势能零点如何选取？

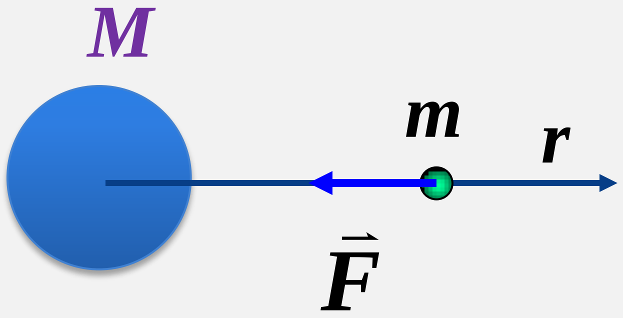
几种常见的势能：

1.万有引力势能

$$\boxed{E_P = -G\frac{mM}{r}}$$

$r = \infty$

选无限远点势能为零



$$E_P = \int_r^{"0"} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$E_p = \int_r^{\infty}\left(-G\frac{mM}{r^2}\right)\mathrm{d}r = -G\frac{mM}{r}$$

2.重力势能

$$\boxed{E_P = mgh}$$

$h = 0$

地面重力势能为零

3.弹性势能

线性弹性力 $(F = -kx)$

$$\boxed{E_P = \frac{1}{2}kx^2}$$

$x = 0$

自然长度时,弹性势能为零

非线性弹性力

(如$F = -kx^3$)

$$\int_{x_a}^{x_b} F dx = -\int_{x_a}^{x_b} kx^3 dx = \frac{1}{4}kx_a^4 - \frac{1}{4}kx_b{}^4$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{4}kx^4}$$

$x = 0$

自然长度时,弹性势能为零

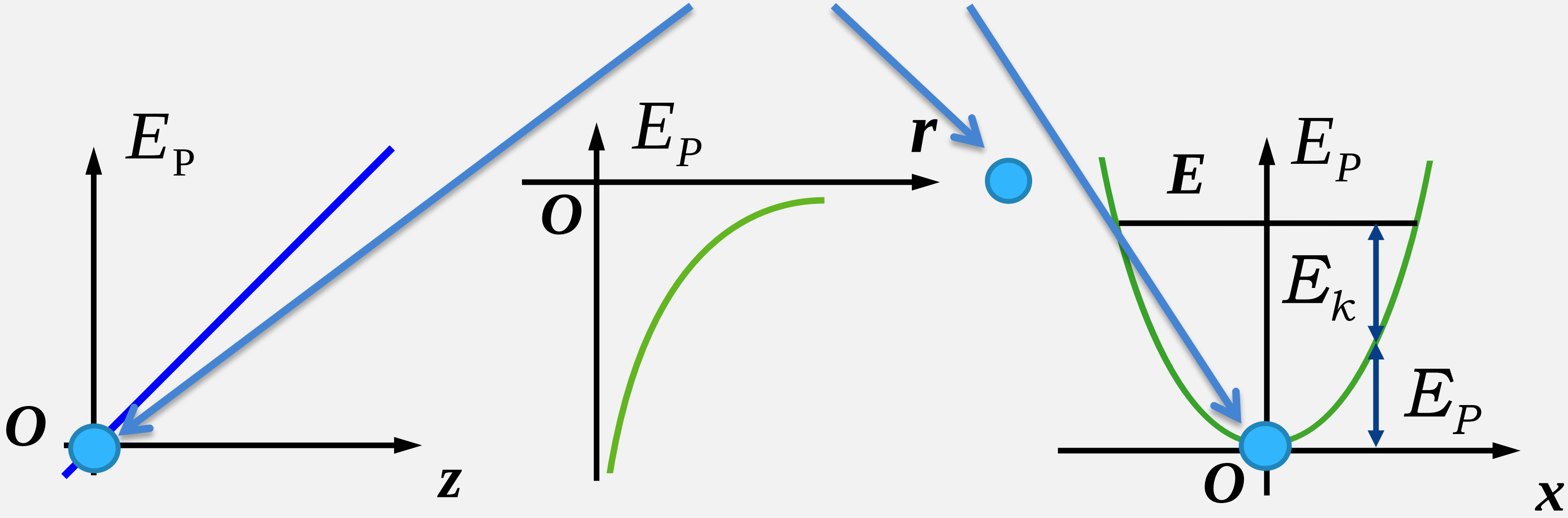
势能零点

注意：势能零点的选取是任意，
但是势能差值是一定的。

	做功	常用零势能点
重力	$A_{重} = -[mgh_b - mgh_a]$	$h = 0$
弹性力	$A_{弹} = -[\frac{1}{2}kx_b^{\,2} - \frac{1}{2}kx_a^{\,2}]$	$x = 0$
万有引力	$A_{引} = -[(-G\frac{mM}{r_b}) - (-G\frac{mM}{r_a})]$	$\frac{1}{r} = 0$ $r = \infty$
引入势能函数 **E_p**	$A_{保} = -[E_{pb} - E_{pa}]$ $= -\Delta E_p$	

❖ 势能曲线

势能零点



$E_P = mgz$

重力势能

$E_P = -G\dfrac{mM}{r}$

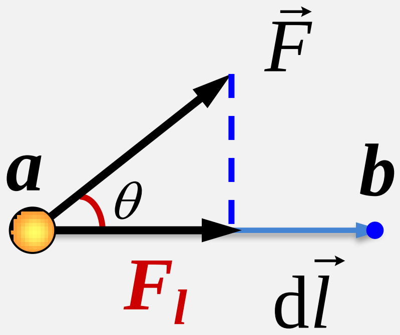
引力势能

$E_P = \dfrac{1}{2}kx^2$

弹性势能

保守力的大小？方向？ $\mathrm{d}A = -\mathrm{d}E_P = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

❖ 由势能函数求保守力



$$-\mathrm{d}E_\mathrm{p}=\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=F\cos\theta\,\mathrm{d}l=F_l\mathrm{d}l$$

$$-\mathrm{d}E_\mathrm{p}=F_l\mathrm{d}l\qquad\therefore\ F_l=-\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}l}$$

保守力在某一方向上的分量等于势能函数在该方向上对空间变化率的负值。

$$-\mathrm{d}E_P=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=F_x\cdot dx+F_y\cdot dy+F_z\cdot dz$$

$$F_x=-\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x}\qquad F_y=-\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y}\qquad F_z=-\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{F}=-\nabla E_P=-(\frac{\partial E_P}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial E_P}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial E_P}{\partial z}\hat{k})}$$

保守力跟势能函数的关系

$$\vec{F} = -\nabla E_P = -(\frac{\partial E_P}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\hat{k})$$

$$E_{\text{p重力}} = mgz$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{重力}} = -\frac{\partial E_p}{\partial z}\hat{k} = -\frac{\partial}{\partial z}(mgz)\hat{k} = -mg\hat{k}$$

$$E_{\text{p 弹性}} = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{弹性力}} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\hat{i} = -kx\hat{i}$$

例 已知引力势能 $E_{\mathrm{p}} = -G\dfrac{mM}{r}$。求 $\vec{F}_{引力} = ?$

解 引力势能 $E_{\mathrm{p}} = -G\dfrac{mM}{r} = -G\dfrac{mM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

保守力 $\vec{F}_{引力} = -\left(\dfrac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial x}\hat{i} + \dfrac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial y}\hat{j} + \dfrac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial z}\hat{k}\right)$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{GmM}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}\right]$$

$$= GmM\frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} = GmM\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = GmM \frac{x}{r^3}$$

同样有
$$\frac{\partial E_p}{\partial y} = GmM \frac{y}{r^3}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial z} = GmM \frac{z}{r^3}$$

$$\vec{F}_{引力} = -\frac{GmM}{r^3}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$= -\frac{GmM}{r^3}\vec{r} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r}$$

❖ 机械能守恒定律

质点系动能定理 $A = E_{k2} - E_{k1}$

$$A_{外} + A_{保内} + A_{非保内} = E_{k2} - E_{k1}$$

$$A_{保内} = E_{p1} - E_{p2}$$

$$\therefore \quad A_{外} + E_{p1} - E_{p2} + A_{非保内} = E_{k2} - E_{k1}$$

$$A_{外} + A_{非保内} = (E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1})$$

❖ 机械能守恒定律

$$A_{外}+A_{非保内}=(E_{k2}+E_{p2})-(E_{k1}+E_{p1})$$

1. 质点系的功能原理

$$E=E_k+E_P$$

(机械能)

对质点系:

即 $$A_{外}+A_{非保内}=E_{B}-E_{A}$$

(功能原理)

质点系在运动过程中,所受外力的功与系统内非保守力的功的总和等于其机械能的增量。

2. 机械能守恒定律

由质点系的功能原理

$$A_{外} + A_{非保内} = E_{\mathrm{B}} - E_{\mathrm{A}}$$

当 $A_{外} + A_{非保内} = 0$ $\longrightarrow$ $\Delta E = 0$

$E = E_k + E_P =$ 常数 （机械能守恒定律）

当作用于质点系的外力和非保守内力不作功或做功的和为零，即只有保守内力作功的情况下，质点系的机械能保持不变。

（机械能守恒定律）

$$E = E_k + E_P = 常数$$

$$\Delta E = 0$$

(1) 守恒条件 $W_{外}+W_{非内}=0$ 。

(2) 守恒定律是对一个系统而言的。

(3) 守恒是对整个过程而言的，不能只考虑始末两状态。

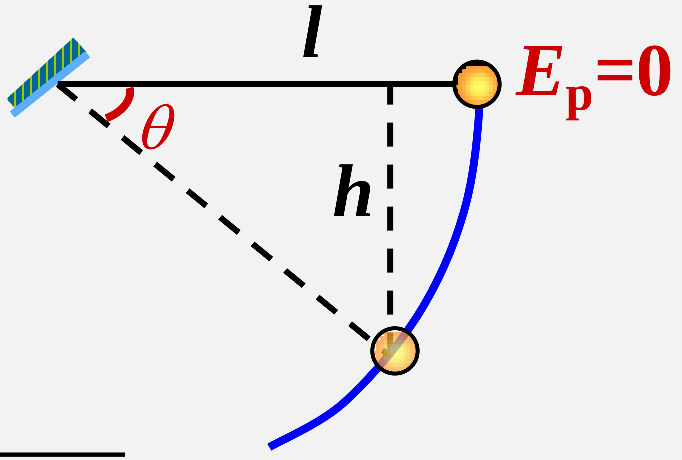
(4) 守恒表达式相对于惯性参照系。

例1 已知θ, l，水平位置为始点，初速度为0.

求 $v = ?$

解： 设：水平位置为势能零点，

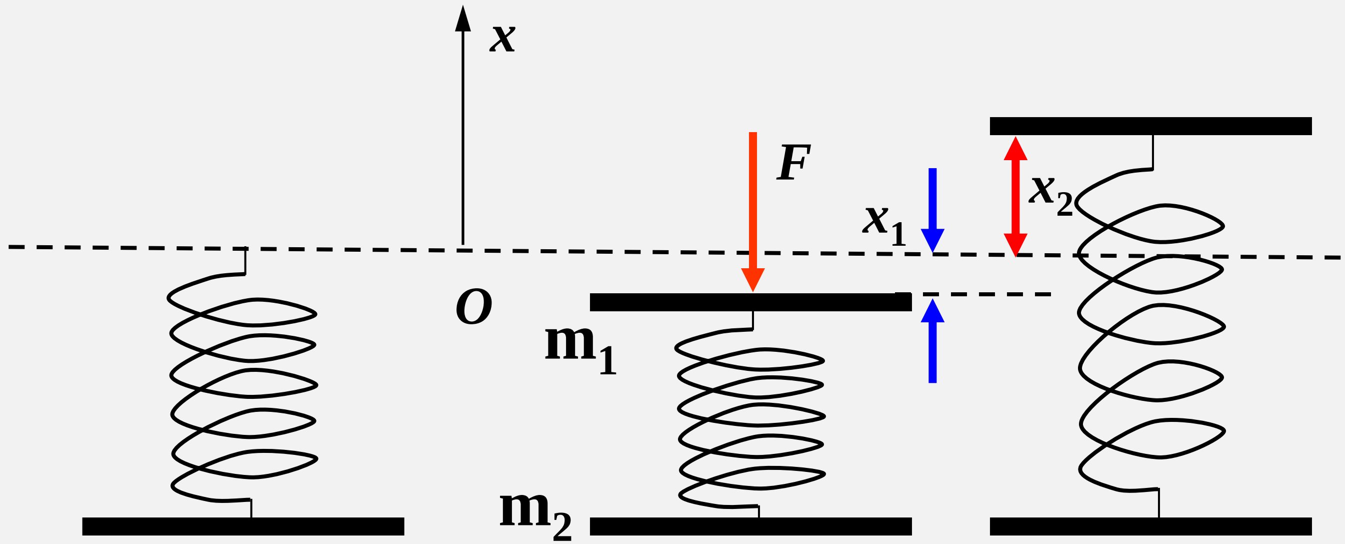
小球下落过程只有保守力做功，机械能守恒



$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl\cos\theta}$$

例2 质量分别为m_1和m_2的木板用一轻弹簧连接如图所示，下板放在地面上。用力F向下压m_1处于静止后，突然撤去F，当m_1向上运动时，刚好能把m_2拉离地面，求F多大?



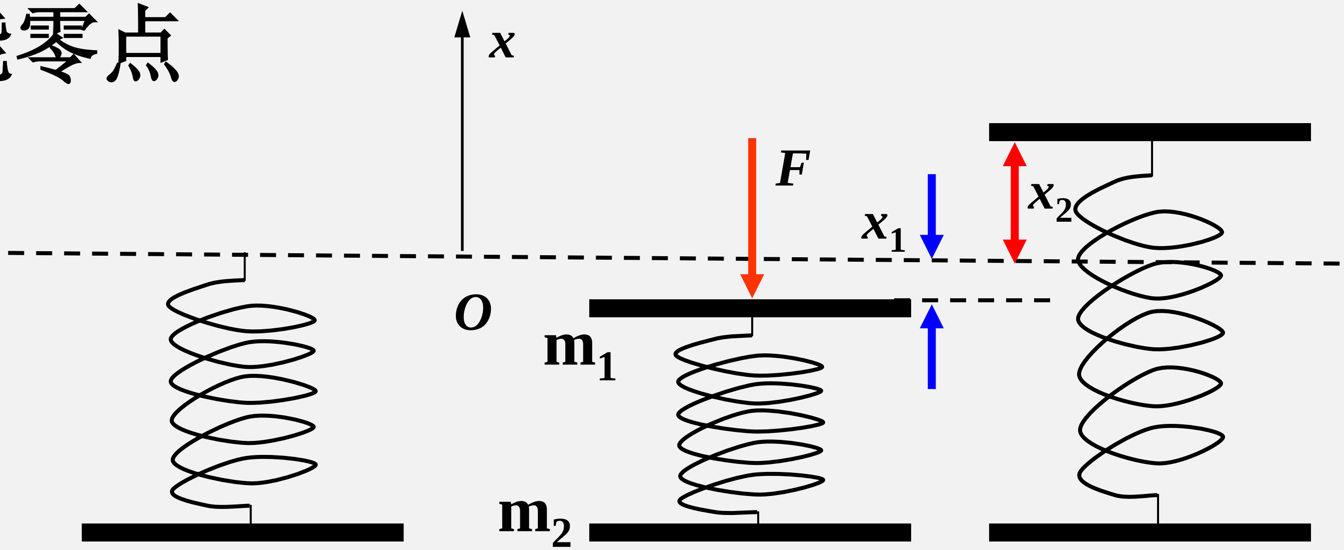
解：选系统 { 弹簧，地球，m_1和m_2 }

撤去F后，只有保守力作功，故机械能守恒

取弹簧原长处为弹性势能和重力势能零点

初态 $E_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 - m_1 g x_1$

末态 $E_2 = \frac{1}{2}kx_2^2 + m_1 g x_2$



机械能守恒 $E_1 = E_2$

$$\frac{1}{2}kx_1^2 - m_1gx_1 = \frac{1}{2}kx_2^2 + m_1gx_2$$

化简得：$\frac{1}{2}kx_1{}^2 - \frac{1}{2}kx_2{}^2 = m_1g(x_1 + x_2)$

$$kx_1 - kx_2 = 2m_1g$$

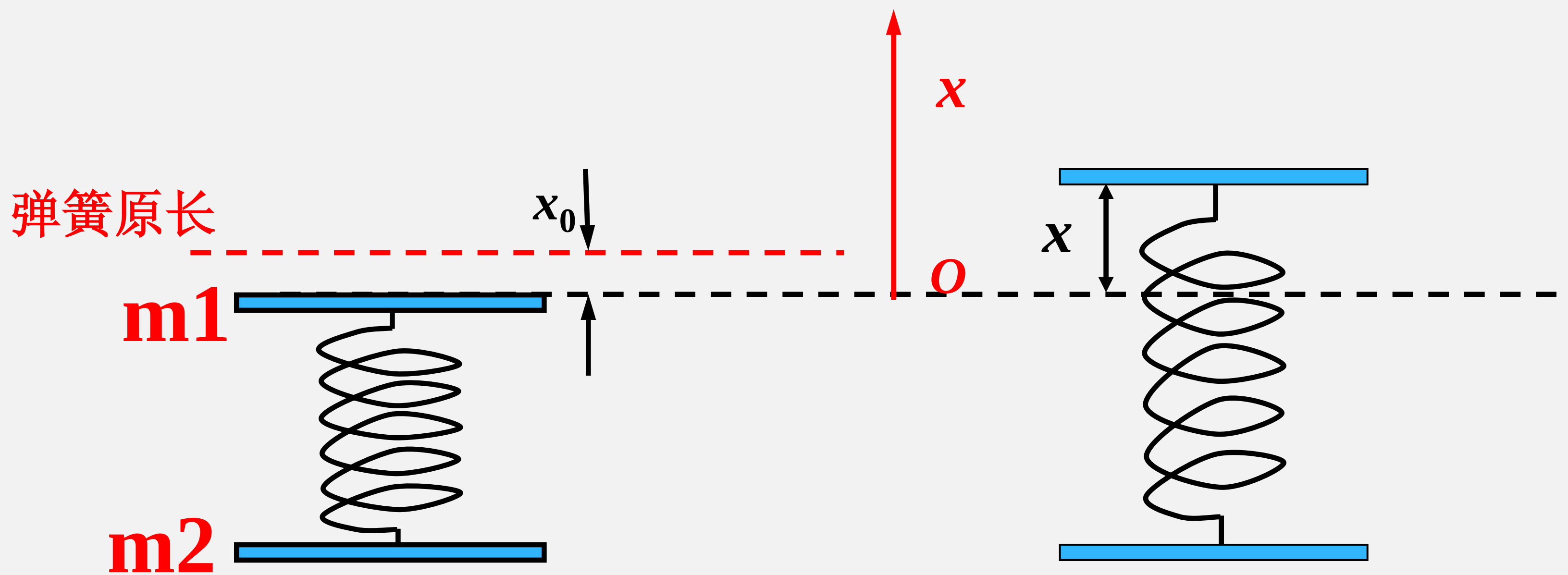
初、末状态时有：$kx_1 = F + m_1g$

$$kx_2 = m_2g$$

代入解得 $\boldsymbol{F = (m_1 + m_2)g}$

这就是说$\boldsymbol{F \geq (m_1+m_2)g}$ 时，下板就能被拉起 。

又：如以上板在弹簧上的平衡静止位置为重力势能和弹性势能的零点，试写出上板、弹簧以及地球这个系统的总势能。



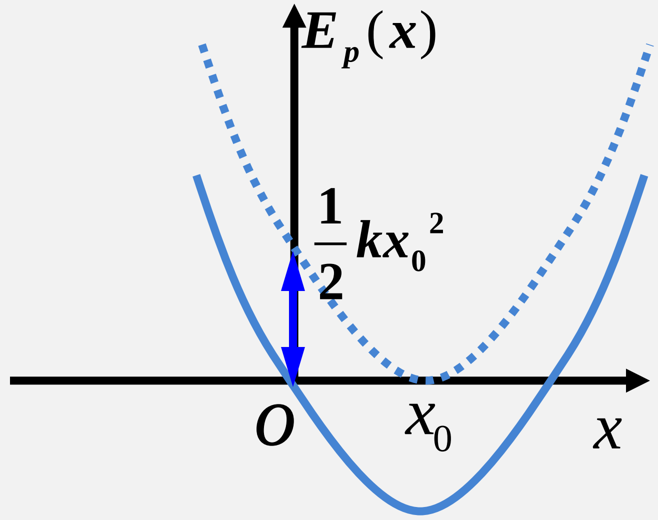
解：如图，取上板的平衡位置为x 轴的原点0，并设弹簧为原长时上板处在x_0位置。

上板位于x处时系统的弹性势能：

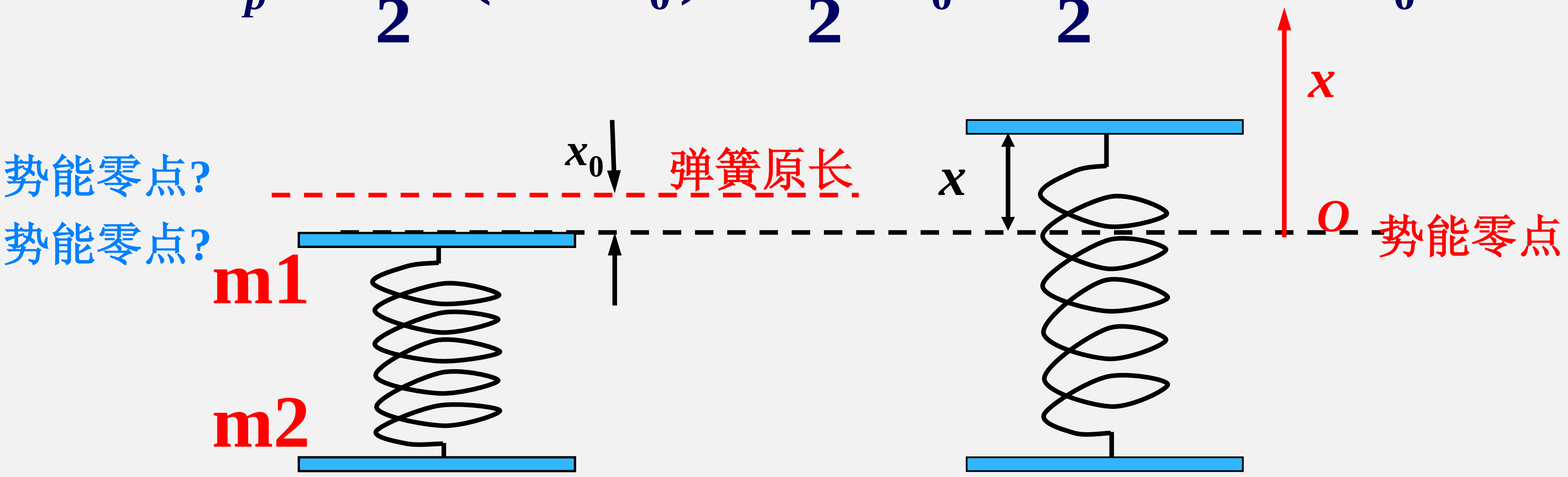
$$E_p^{弹} = \int_x^{"0"} \vec{F}_{保} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_x^0 -k(x - x_0)dx$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 - kxx_0$$



或： $E_p^{弹} = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kx^2 - kxx_0$

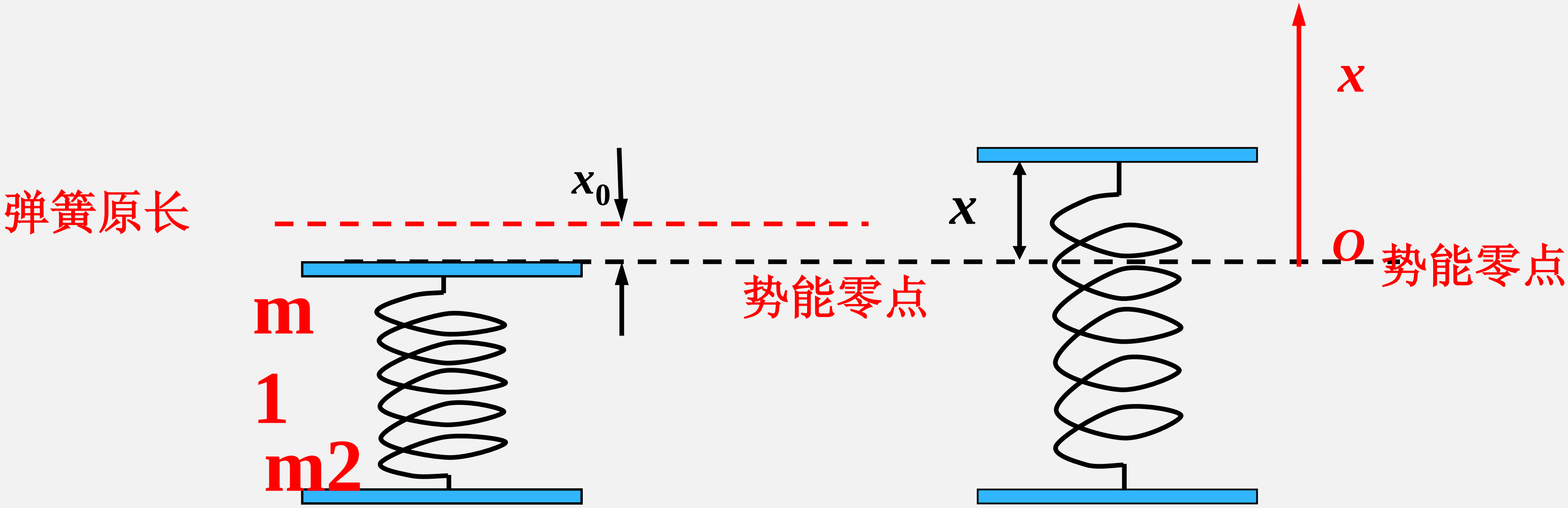


系统的重力势能： $E_p^{重} = m_1 g x.$

所以系统的总势能为：

$$E_p = E_p^{弹} + E_p^{重} = \frac{1}{2}kx^2 - kx_0 x + m_1 g x = \frac{1}{2}kx^2.$$

考虑到上板在弹簧上的平衡条件，得 $kx_0 = m_1 g$，

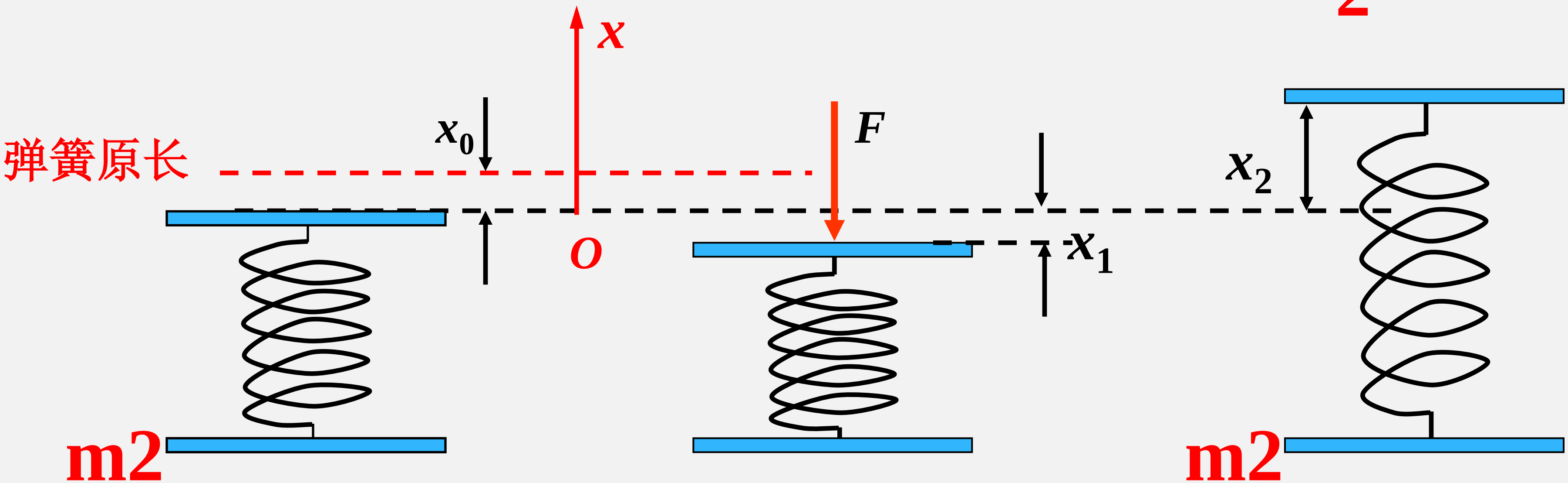


方法二：对上板加多大的向下压力 F ，才能因突然撤去它，使上板向上跳 而把下板拉起来？

以加力F 时为初态：$E_{k1}=0,\quad E_{p1}^{总}=E_{p1}^{重}+E_{p1}^{弹}=\frac{1}{2}kx_1^2$

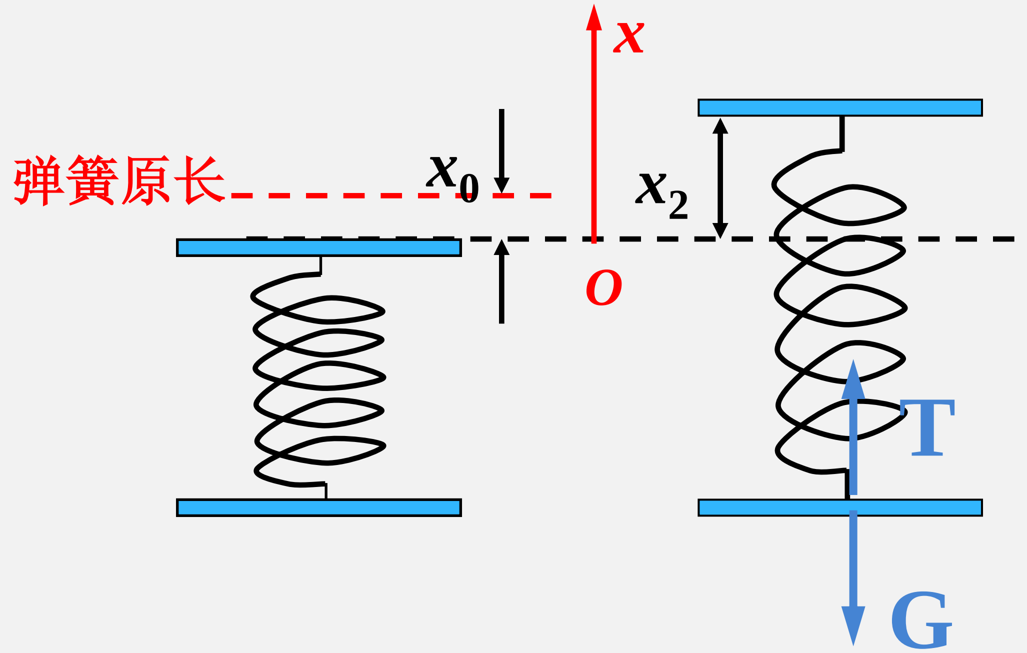
以撤去力F 后弹簧伸长最大时为末态：

$$E_{k2}=0,\quad E_{p2}^{总}=E_{p2}^{重}+E_{p2}^{弹}=\frac{1}{2}kx_2^2$$



根据能量守恒定律，应有：

$$\frac{1}{2}kx_1^{\ 2} = \frac{1}{2}kx_2^{\ 2}$$



当弹簧伸长，恰好能够提起下板m_2时，

$$k(x_2 - x_0) = m_2 g,$$

且有：$kx_1 = F,\quad kx_0 = m_1 g,$

代入解得：$F = (m_1 + m_2)g.$

这就是说 $F \geq (m_1 + m_2)g$ 时，下板就能被拉起 。

例2把一个物体从地球表面上沿铅垂方向以第二宇宙速度 $v_0=\sqrt{\dfrac{2GM_e}{R_e}}$ 发射出去,阻力忽略不计。

求物体从地面飞行到与地心相距 $\boldsymbol{nR_e}$ 处（$\boldsymbol{n}$ 为正整数）经历的时间。

解 将物体和地球看做一个系统。

根据机械能守恒，物体到地心距离为 x 时，有

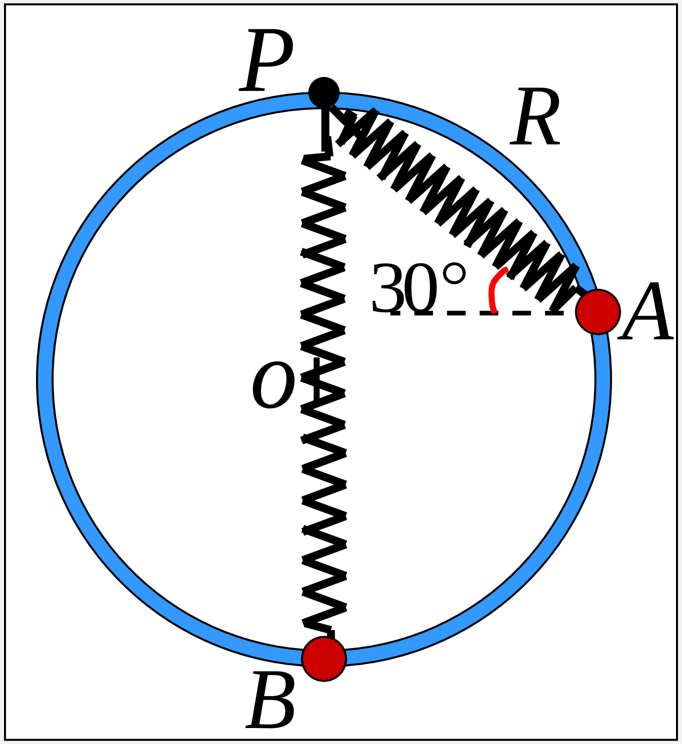
$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M_e m}{R_e} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_e m}{x}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM_e}{x}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{x}{2GM_e}}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{t_1}\mathrm{d}t = \int_{R_e}^{nR_e}\sqrt{\frac{x}{2GM_e}}\mathrm{d}x \qquad t_1 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{R_e^3}{2GM_e}}\left(n^{3/2}-1\right)$$

例3 有一轻弹簧系在铅直放置的圆环顶端 p点， 另一端系一小球 m，小球穿过光滑的圆环运动，开始时小球静置于A点、 弹簧处于自然状态，其长度为圆环半径 R， 小球运动到环底端点 B 时对圆环没有压力。



求: 弹簧的劲度系数。

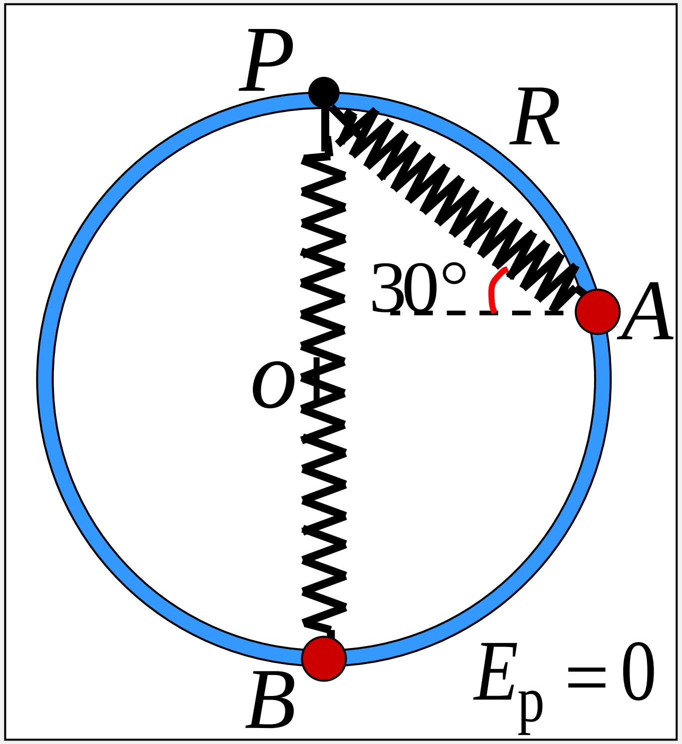
解: 选弹簧、小球和地球为一个系统，取 A 为弹性势能零势点, B为重力零势点。

由A到B的过程中机械能守恒

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{kR^2}{2}$$

$$=mg\left[R+R(1-\sin 30^\circ)\right]$$

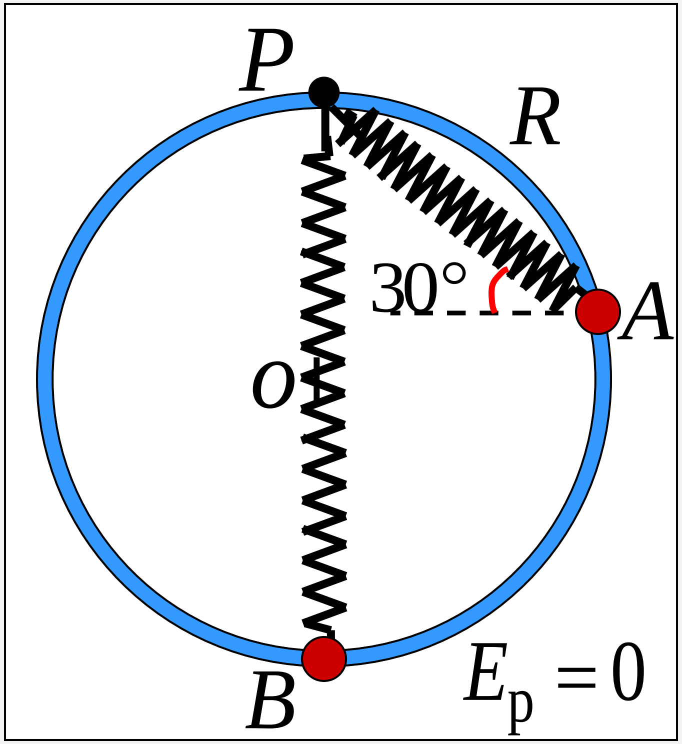
$$=\frac{3}{2}mgR$$



在B点用牛顿定律 (取向上为正)

$$kR - mg = \frac{mv^2}{R}$$

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kR^2}{2} = \frac{3}{2}mgR$$



连立两式得到: $k = \dfrac{2mg}{R}$

THANKS

FOR YOUR ATTENTION

Last Page