学号： 线 线

姓名：

订 封

专业年级：

装 密

学院：

中国矿业大学(北京)

10-11 学年第二学期《高等数学 A2》试卷(A 卷)

得分：__________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八
得 分								
阅卷人								

一、填空题（每小题 3 分，共 27 分）

1．已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}=3,\quad \vec{a}\times\vec{b}=(1,-1,1)$，则 $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=$ ____$\frac{\pi}{6}$____。

2．$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\underline{0}$。

3．已知函数 $z=e^{x^2+y^2}$，则 $dz=\underline{2e^{x^2+y^2}(xdx+ydy)}$。

4．设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+2y-2xyz=0$ 确定，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 x}|_{(1,1)}=$ ____2____。

5．曲面 $xy+yz+zx-1=0$ 与平面 $x-3y+z-4=0$ 在点 $(1,-2,-3)$ 处的夹角为 $\underline{\frac{\pi}{2}}$。

6．函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数是 $\underline{\frac{1}{2}}$。

7．二次积分 $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx$ 交换积分顺序后的形式为 $\underline{\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy}$。

8. 设 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧，则 $\int_L (x^2-y^2)dx=\underline{-\frac{56}{15}}$。

9．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+3^n}{n}x^n$ 的收敛区间是 $\underline{(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})}$。

二、计算下列各题（满分 14 分，每小题 7 分）

1．有一平面过点 $A(3,1,-2)$，且直线 $l:\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 在此平面上，求该平面的方程。

解：由直线方程可知，该直线过点 $B(4,-3,0)$，并且由题意可知所求平面过直线 AB 以及 l，因此所求平面的法向量 $\vec{n}$ 一定同时垂直于 $\overrightarrow{AB}$ 以及直线 l 的方向向量 $\vec{s}(5,2,1)$，所以可以取

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -4 & 2\\ 5 & 2 & 1\end{vmatrix}=-8\vec{i}+9\vec{j}+22\vec{k},$$

因此所求平面的方程为：

$$-8(x-3)+9(y-1)+22(z+2)=0$$

即

$$8x-9y-22z-59=0$$

2．设 $f(u,v)$ 是具有二阶连续偏导的函数，$z=f(xy,\dfrac{x}{y})$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'y+\dfrac{f_2'}{y}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y(f_{11}''x-\frac{x}{y^2}f_{12}'')-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}(f_{21}''x-\frac{x}{y^2}f_{22}'')$$

$$=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''$$

学号： 姓名： 专业年级： 学院：

装 订 线 密 封 线

三、（7 分）计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,$

其中 D **是由直线** $y=x,\ y=x+a,\ \ y=a,\ y=3a\ (a>0)$ **所围成的闭区域。**

解：将 D 看成 y 型区域计算，此时

$$D=\{(x,y)\,|\,a\le y\le 3a,\ y-a\le x\le y\},$$

则

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\int_a^{3a}dy\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)dx$$

$$=\int_a^{3a}[\frac{x^3}{3}+xy^2]_{y-a}^{y}dy=\int_a^{3a}(2ay^2-a^2y+\frac{a^3}{3})dy$$

$$=(2a\frac{y^3}{3}-a^2\frac{y^2}{2}+\frac{a^3}{3}y)\Big|_a^{3a}=14a^4$$

四、计算下列各题（满分 14 分，每小题 7 分）

1. 计算 $\int\limits_L xyds$，其中 L 为从 $(0,0)$ 到 $(2,0)$ 的上半圆弧：$x^2+y^2=2x(y\ge 0)$。

解：将 L 表示为参数方程得：$x=1+\cos t,\ y=\sin t\ (0\le t\le\pi)$.因此

$$\int\limits_L xyds=\int_0^{\pi}(1+\cos t)\sin t\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}dt$$

$$=\int_0^{\pi}(1+\cos t)\sin tdt=-\cos t+\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\pi}=2$$

2. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} ydydz+xdzdx+zdxdy$，$\sum$ 是球心在原点的上半单位球面的上侧。

解：取 $\sum'$ 为 $z=0(D:x^2+y^2\le 1)$ 的下侧，则 $\sum+\sum'$ 构成封闭曲面，由高斯

公式得 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma'} ydydz+xdzdx+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}dv=\frac{2\pi}{3}$，

其中 Ω 是上半球，而 $\iint\limits_{\Sigma'} ydydz+xdzdx+zdxdy=0$，

故 $\iint\limits_{\Sigma} ydydz+xdzdx+zdxdy=\frac{2\pi}{3}$。

五、（10 分）求表面积为 a^2 **而体积为最大的长方体的体积。**

解：设长方体的三棱长为 x,y,z，则问题就是在条件

$$\varphi(x,y,z)=2xy+2yz+2xz-a^2=0 \qquad (1)$$

下，求函数 $v=xyz(x>0,y>0,z>0)$ 的最大值。作拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=xyz+\lambda(2xy+2yz+2xz-a^2),$$

求其对 x,y,z 的偏导数，并使之为零，得到

$$\begin{aligned} yz+2\lambda(y+z)&=0,\\ xz+2\lambda(x+z)&=0,\\ xy+2\lambda(y+x)&=0. \end{aligned} \qquad (2)$$

再与 (1) 式联立求解。因 x,y,z 都不等于零，所以由 (2) 可得

$$\frac{x}{y}=\frac{x+z}{y+z},\quad \frac{y}{z}=\frac{x+y}{x+z}.$$

由以上两式解得

$$x=y=z$$

将此代入 (1)，便得 $x=y=z=\frac{\sqrt{6}}{6}a$，这是唯一可能的极值点。由问题本身可知最大值一定存在，所以最大值就在这个可能的极值点处取得。也就是说，表面积为 a^2 的长方体中，以棱长为 $\frac{\sqrt{6}}{6}a$ 的正方体的体积最大，最大体积 $V=\frac{\sqrt{6}}{36}a^3$。

六、（10 分）利用三重积分计算由抛物面 $z=6-x^2-y^2$ 及锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体的体积。

解：$V=\iiint\limits_{\Omega} dv$

下面利用柱面坐标计算此三重积分。把闭区域 Ω 投影到 xoy 面上，得

$$\begin{cases} 6-x^2-y^2=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=0 \end{cases}$$

即 $D_{xy}=\{(\rho,\theta)\,|\,0\le\rho\le 2, 0\le\theta\le 2\pi\}$

在 D_{xy} 内任取一点 (ρ,θ)，过此点作平行于 z 轴的直线，此直线通过曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 穿入 Ω 内，然后通过曲面 $z=6-x^2-y^2$ 穿出 Ω 外。因此闭区域 Ω 可用不等式 $\rho\le z\le 6-\rho^2, 0\le\rho\le 2, 0\le\theta\le 2\pi$ 来表示，于是

$$I=\iiint\limits_{\Omega} dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\rho}^{6-\rho^2}dz=2\pi\int_0^2\rho(6-\rho^2-\rho)d\rho$$

$$=2\pi(3\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^3}{3})\Big|_0^2=\frac{32}{3}\pi$$

七、（8 分）证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0). \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数存在但不可微。

证明：$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x}=0,$

同理可得：

$$f_y(0,0)=0.$$

由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{3xy}{x^2+y^2}=\frac{3k}{1+k^2}\neq f(0,0)$$

因此可得 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微。

八、（10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$ 的收敛域以及和函数。

解：设和函数为 $s(x)$。

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，所以当 $|x-1|<1$ 时，即 $0<x<2$ 时级数收敛。容易看到当 $x=0$ 和 $x=2$ 时，级数是发散的，因此此幂级数的收敛域为 $(0,2)$。于是有

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n=(x-1)\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}, x\in(0,2)$$

由幂级数的逐项积分性知，对任意 $x\in(0,2)$，

$$\int_1^x[\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}]dx=\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n=\frac{x-1}{2-x}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}=(\frac{x-1}{2-x})'=\frac{1}{(2-x)^2}, x\in(0,2)$$

于是所求和函数为：

$$s(x)=(x-1)\frac{1}{(2-x)^2}, x\in(0,2)$$