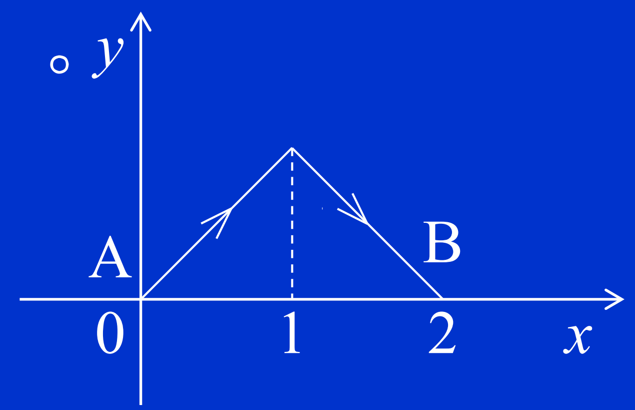
高等数学
单元自测(十一)

一、计算 $\int_L \sin y\,dx + e^x dy$，其中L是由A（0，0）沿曲线 $y=1-|1-x|$ 到B（2，0）。



解：L：$y=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1\le x\le 2 \end{cases}$

原式 $=\int_0^1(\sin x+e^x)dx+\int_1^2[\sin(2-x)-e^x]dx$

$$=(-\cos x+e^x)\Big|_0^1+[\cos(2-x)-e^x]\Big|_1^2$$

法2：$I=\int_{L+BA}-\int_{BA}=-\iint\limits_D(e^x-\cos y)dxdy-0$

$$=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}(\cos y-e^x)dx$$

$$=1-e^2+2e-2\cos 1$$

首 页 上一页 下一页 尾 页 结 束 返 回

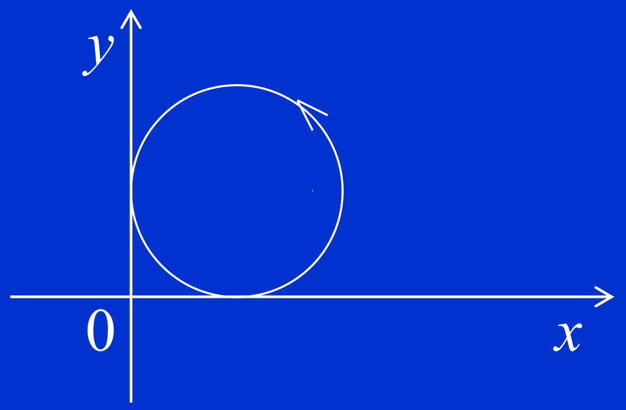
二、计算曲面积分

$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}dx+[5x+y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$，其中

C为圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，取逆时针方向。

解：$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=5+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$



$$=\iint_D 5dxdy$$

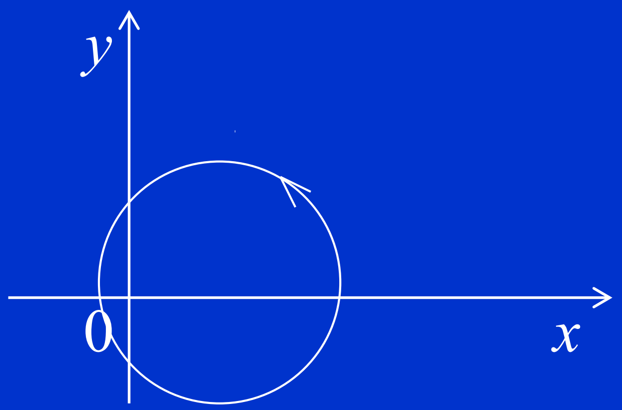
$$=5\pi$$

三、计算曲面积分 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$，其中L是以点（1，0）为中心，$R$为半径 $(R \neq 1)$ 的圆周，方向取逆时针方向。

解：$$P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}$$

$$Q = \frac{x}{4x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2}{\left(4x^2 + y^2\right)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$



首 页 上一页 下一页 尾 页 结 束 返 回

（1） 若R<1， 由格林公式：原式=0

（2） 若R>1，作 $L_\delta:\begin{cases} x=\dfrac{\delta}{2}\cos t \\ y=\delta\sin t \end{cases} \quad (t:2\pi\to 0)$

由格林公式 $\oint_{L+L_{\bar{\delta}}}=0$

$$\therefore \int_L=\oint_{L+L_{\bar{\delta}}}-\int_{L_{\bar{\delta}}}=-\int_{L_\delta}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{1}{2}\delta^2}{\delta^2}dt$$

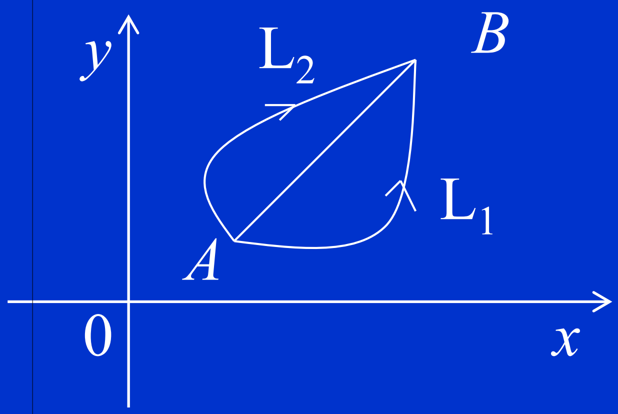
$$=\pi$$

四、计算曲线积分

$\int_{A\overset{\frown}{M}B}[\varphi(y)\cos x-\pi y]dx+[\varphi'(y)\sin x-\pi]dy$ ，其中

$A\overset{\frown}{M}B$ 为连接点 $A(\pi,2)$ 与点 $B(3\pi,4)$ 的任意曲线段，且该曲线与线段 $\overline{AB}$ 无交点，其所围图形面积为2。

解：



（1） 若 $A\overset{\frown}{M}B=L_1$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial P}{\partial y}=\varphi'(y)\cos x-\pi\\[2ex]\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\varphi'(y)\cos x\end{array}\right.$$

首 页 上一页 下一页 尾 页 结 束 返 回

则 $\int_{L_1} = \oint_{L_1+\overline{BA}} - \int_{\overline{BA}}$

$$= \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy + \int_{\overline{AB}} d\varphi(y)\sin x$$

$$+ \int_{\overline{AB}} -\pi y dx - \pi dy$$

$$= \iint_D \pi dxdy + \int_{\pi}^{3\pi} [-\pi(\frac{x}{\pi}+1) - \pi \cdot \frac{1}{\pi}]dx + \varphi(y)\sin x\Big|_A^B$$

$$= 2\pi - (6\pi^2 + 2\pi)$$

$$= -6\pi^2$$

法2:

$$\int_{L_1} = \int_{L_1} \varphi(y)\cos x dx + \varphi'(y)\sin x dy - \pi\int_{L_1} y dx + dy$$

$$= I_1 - \pi I_2$$

$$I_1 = \int_A^B d\varphi(y)\sin x = \varphi(y)\sin x\Big|_{(\pi,2)}^{(3\pi,4)} = 0$$

$$I_2 = \int_{L_1} y dx + dy = \oint_{L_1+\overline{BA}} - \int_{\overline{BA}} = -\iint_D dxdy + \int_{\pi}^{3\pi}\left(\frac{x}{\pi} + 1 + \frac{1}{\pi}\right)dx$$

$$= -2 + 4\pi + 2\pi + 2 = 6\pi$$

$$\therefore \int_{L_1} = I_1 - \pi I_2 = -6\pi^2$$

（2）$\int_{L_2} = \int_{L_2} \phi(y)\cos x dx + \phi'(y)\sin x dy - \pi\int_{L_2} y dx + dy = I_1 - \pi I_2$

$$I_2 = \int_{L_2} y dx + dy = \oint_{L_2+\overline{BA}} - \int_{\overline{BA}} = -\iint_D (-1)dxdy - \int_{\overline{BA}} = 2 + 4\pi + 2\pi + 2$$

$$\therefore \int_{L_2} = I_1 - \pi I_2 = -4\pi - 6\pi^2$$

五、已知曲线L的极坐标方程为 $r=\theta\ (0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$，L上任意一点处的线密度为 $\rho(\theta)=\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}$，试求该曲线段关于极轴的转动惯量。

解：$I_x=\int_L \rho(\theta)y^2 ds$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\sin^2\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\sqrt{1+\theta^2}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta^2}{2}d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\cos 2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{48}\pi^3+\frac{\pi}{8}$$

六、设平面力场

$\vec{F}=(2xy^3-y^2\cos x, 1-2y\sin x+3x^2y^2)$，求一质点沿曲线L：$2x=\pi y^2$ 从 $O(0,0)$ 运动到 $A(\frac{\pi}{2},1)$ 时场力 $\vec{F}$ 所作的功。

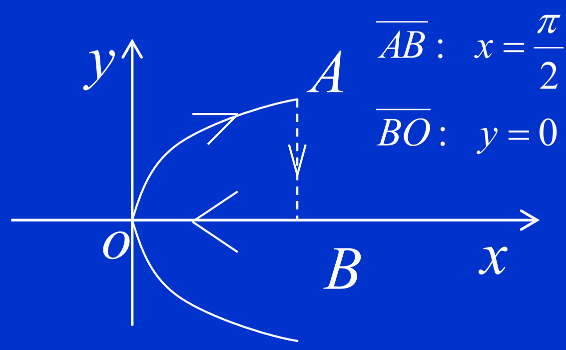
解：$W=\int_L (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$

$$=\oint_{L+\overline{AB}+\overline{BO}}-\int_{\overline{AB}}-\int_{\overline{BO}}$$

$$=-\iint_D [(6xy^2-2y\cos x)-(-2y\cos x+6xy^2)]dxdy$$

$$-\int_1^0 (1-2y+\frac{3}{4}\pi^2y^2)dy-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 0dx$$

$$=(y-y^2+\frac{3}{4}\pi^2\cdot\frac{1}{3}y^3)\Big|_0^1=\frac{1}{4}\pi^2$$



首 页 上一页 下一页 尾 页 结 束 返 回

七、求空间曲线 $x=3t, y=3t^2, z=2t^3$，从$O(0,0,0)$至$A(3,3,2)$的弧长。

解：

$$S=\int_{\Gamma}ds$$

$$=\int_0^1\sqrt{9+(6t)^2+(6t^2)^2}\,dt$$

$$=3\int_0^1\sqrt{1+4t^2+4t^4}\,dt$$

$$=3\int_0^1(1+2t^2)\,dt$$

$$=3(1+\frac{2}{3})$$

$$=5$$

八、计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2az$。

解：$\because \quad \bar{z}=a \quad S=4\pi a^2$

$$\text{原式}=\iint\limits_{\Sigma}2azdS=2a\iint\limits_{\Sigma}zdS=2a\cdot\bar{z}\cdot S$$

$$=2a\cdot a\cdot 4\pi a^2=8\pi a^4$$

法2：$\because \ \Sigma: \ x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$

$$\Rightarrow \ \Sigma: \quad z=a\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

$$D_{xy}: \ x^2+y^2\le a^2$$

$$dS=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

接八

$$\iint_{\Sigma} 2azdS$$

$$= 2a[\iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2}]$$

$$= 2a[\iint_{Dxy}(a+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$+\iint_{Dxy}(a-\sqrt{a^2-x^2-y^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy]$$

$$= 4a^3\iint_{Dxy}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$= 4a^3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr$$

$$= 8\pi a^4$$

九、计算 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{y}f(\frac{x}{y})dydz+\frac{1}{x}f(\frac{x}{y})dzdx+zdxdy$，其中 $f(\frac{x}{y})$ 具有一阶连续偏导数，Σ 为柱面 $x^2+y^2=R^2$，$y^2=\frac{1}{2}z$ 及平面 $z=0$ 所围立体的表面外侧。

解：$I=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz$

$$=\iiint\limits_{\Omega}[\frac{1}{y^2}f'(\frac{x}{y})+\frac{1}{x}f'(\frac{1}{y})\cdot(-\frac{x}{y^2})+1]dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\iint\limits_{Dxy}dxdy\int_0^{2y^2}dz\ \ (D_{XY}:x^2+y^2\le R^2)$$

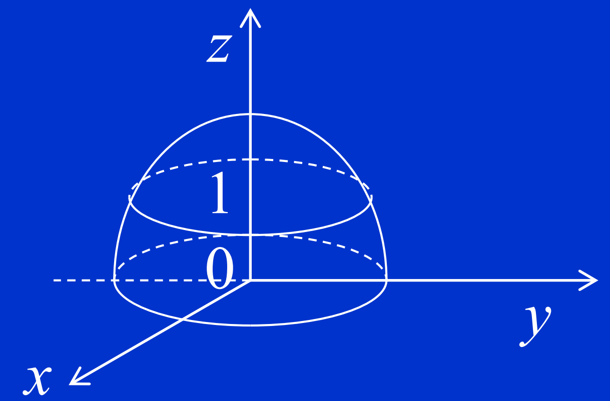
$$=\iint\limits_{Dxy}2y^2dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R 2r^3\sin^2\theta d\theta=\frac{\pi}{2}R^4$$

首 页 上一页 下一页 尾 页 结 束 返 回

十、计算$\iint\limits_{\Sigma} x^3 z\,dydz - x^2 yz\,dzdx - x^2 z^2\,dxdy$，其中

Σ: $z = 2 - x^2 - y^2$ $(1 \le z \le 2)$ 的上侧。



解：补Σ_0: $z = 1$ 下侧

$$I = \iint\limits_{\Sigma+\Sigma_0} - \iint\limits_{\Sigma_0}$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} (3x^2 z - x^2 z - 2x^2 z)\,dv + \iint\limits_{Dxy} - x^2\,dxdy$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 \cos^2 \theta\,dr$$

$$= -\frac{\pi}{4}$$

法2: $\Sigma: z = 2 - x^2 - y^2$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{(2x, 2y, 1)}{|\vec{n}|}, \quad \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = 2x, \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = 2y$$

$$D_{xy}: x^2 + y^2 \le 1$$

原式 $= \iint\limits_{\Sigma} [x^3 z(2x) - x^2 yz(2y) - x^2 z^2] dxdy$

$$= \iint\limits_{\Sigma} [2x^4 z - 2x^2 y^2 z - x^2 z^2] dxdy$$

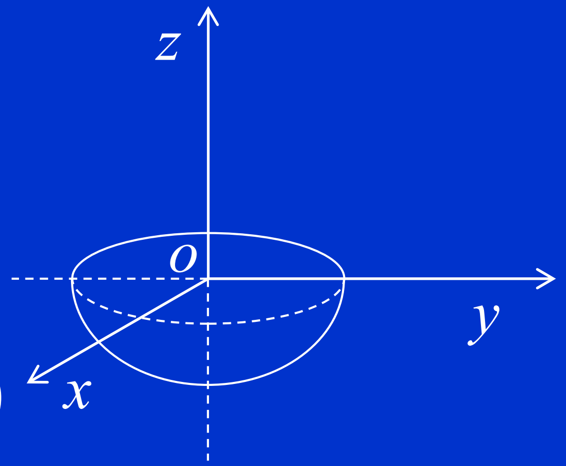
$$= \iint\limits_{Dxy} [2x^4(2 - (x^2 + y^2)) - 2x^2 y^2 (2 - (x^2 + y^2))$$

$$-x^2(2 - x^2 - y^2)^2] dxdy$$

十一、计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} x^2\cos yz dydz + ydzdx + zdxdy$，

其中Σ是曲面$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧。

解：补Σ_0：$z=0$下侧



$$原式 = \iint\limits_{\Sigma+\Sigma_0} - \iint\limits_{\Sigma_0}$$

$$= -\iiint\limits_{\Omega}(2x\cos yz + 2)dv - 0$$

$$= -2\iiint\limits_{\Omega} x\cos yz dv - 2\iiint\limits_{\Omega} dv$$

$$= -2\times 0 - 2\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{4}{3}\pi$$

法2：由对称性：

$$\iint_{\Sigma} x^2 \cos yzdydz = 0 \quad (\Sigma\text{关于}yoz\text{面对称})$$

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2 - z^2}$$

$$\iint_{\Sigma} ydzdx = 2\iint_{\Sigma_{右}} \sqrt{1 - x^2 - z^2}dzdx$$

$$= -2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} rdr = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} rdr$$

$$原式 = \iint_{\Sigma} ydzdx + \iint_{\Sigma} zdxdy = -2\iint_{Dxy} \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy$$

$$= -2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} rdr = -\frac{4}{3}\pi$$

十二、证明

1. 设L是正方形域 $D:0\le x\le 1,0\le y\le 1$ 的正向边界，$f(x)$是正值连续函数，则 $I=\oint_L xf(y)dy-\dfrac{y}{f(x)}dx\ge 2$

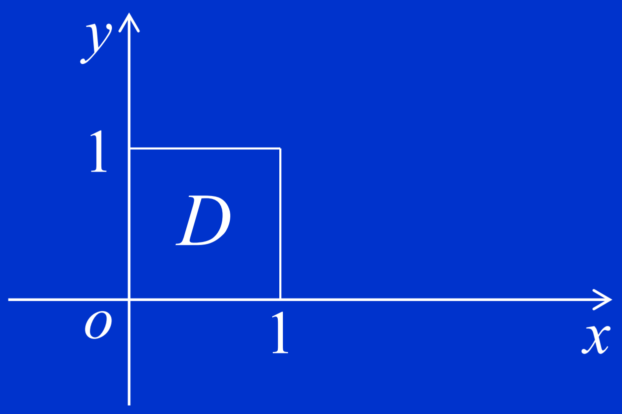
证：$I=\iint\limits_D(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})dxdy$

$$=\iint\limits_D[f(y)+\frac{1}{f(x)}]dxdy$$

$$\ge\iint\limits_D 2\sqrt{f(x)\frac{1}{f(x)}}dxdy$$

$$=2\iint\limits_D dxdy$$

$$=2$$



2. 设 $P(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 均为连续函数，Σ 是一光滑曲面，面积为A，M是 $\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$ 在 Σ 上的最大值，则 $\left|\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy\right| \le MA$ 。

证：
$$\left|\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy\right|$$
$$=\left|\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS\right|$$

$$\le \iint_{\Sigma} \left| P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right| dS$$

$$= \iint_{\Sigma} \left| (P, Q, R) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \right| dS$$

$$\le \iint_{\Sigma} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}\, dS$$

$$\le M \iint_{\Sigma} dS$$

$$= MA$$