11-12 第二学期.

13681022397

清将有关题
再计算一遍,
谢谢!

中国矿业大学(北京)

《高等数学 A2》试卷(A 卷)答案

一、填空题(每小题 3 分,共 30 分)

1. 设三向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 两两垂直,且 $|\vec{a}|=2$,$|\vec{b}|=\sqrt{2}$,$|\vec{c}|=\sqrt{3}$,则 $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=$ 3 。

2. 直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ 与平面 $2x-y+z-1=0$ 的夹角 $\theta=$ $\frac{\pi}{6}$ 。

3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{x+y+1}-1}{x+y}=$ $\frac{1}{2}$ 。

4. 已知函数 $u=e^{xyz}$,则 $du=$ $yze^{xyz}dx+xze^{xyz}dy+xye^{xyz}dz$.

5. 一平面过原点及点 $(0,1,-1)$,且与平面 $x+y+z=0$ 垂直,则此平面方程为 $-2x+y+z=0$ 。 $2x-y-z=0$

6. 设方程 $F(x-z,y-z)=0$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$,其中 F 具有连续偏导数,

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ 1 。

7. 函数 $u=x^2+y^2+z^2-3z$ 在点 $A(1,-1,2)$ 处沿梯度方向上的方向导数为 3 。

8. 二次积分 $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y}f(x,y)dx$ 交换积分顺序后的形式为 $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$。

9. 设曲线 $\Gamma: x=2\cos t, y=2\sin t, z=t\ (0\le t\le 2\pi)$,则曲线积分 $\int_\Gamma zds=$ ~~$4\pi^2$~~ 。$2\sqrt{5}\pi^2$

$-2\sin t$ $2\cos t$ 1

10. 函数 $f(x)=e^{-2x}$ 关于 x 的幂级数展开式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n2^nx^n}{n!}$, $-\infty<x<+\infty$ 。

$$\int_0^{2\pi} t\sqrt{5}\,dt=\sqrt{5}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi}$$

$$=2\sqrt{5}\pi^2$$

$\frac{11}{2}$

$\frac{}{13}$

二、计算下列各题（满分 14 分，每小题 7 分）

1．求过点 $M_0(2,1,3)$ 且与直线 $L:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程。

过点 M_0 垂直于线 L 的平面方程为 $3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$，

直线 L 的参数方程为 $x=-1+3t$，$y=1+2t$，$z=-t$，代入上式 $t=\frac{3}{7}$

∴交点为 $(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$，从而所求直线的方向向量为 $(2,-1,4)$

∴直线方程为 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$

2．设函数 $z=y^2f(y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^3f_2'(y,xy)$，

$$\frac{\partial z}{\partial x\partial y}=3y^2f_2'(y,xy)+y^3[f_2'(y,xy)]_y'$$
$$=3y^2f_2'(y,xy)+y^3[f_{21}''+xf_{22}'']$$
$$=3y^2f_2'(y,xy)+y^3f_{21}''(y,xy)$$
$$+xy^3f_{22}''(y,xy)$$

三、计算下列各题（满分 14 分，每小题 7 分）

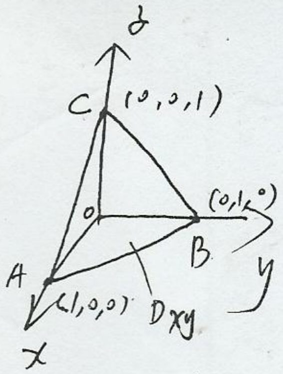
1．计算由抛物面 $z=\dfrac{3}{4}-x^2-y^2$ 及锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成立体的表面积。

$D:\ x^2+y^2\le\frac{1}{4}$

$$S=S_1+S_2=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy$$
$$+\iint_D\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dxdy$$
$$=\sqrt{2}\iint_D dxdy+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+4r^2}\,rdr$$
$$=\sqrt{2}\cdot\pi\cdot\frac{1}{4}+\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1)=\left(\frac{7\sqrt{2}}{12}-\frac{1}{6}\right)\pi$$

2. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$，其中 Ω 为平面 $x+y+z=1$ 及三个坐标面所围成的四面体。

$D_{xy}=\{(x,z)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$



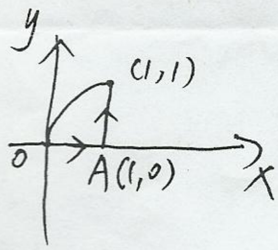
$$\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y} z\,dz$$

$$=\frac{1}{24}$$

四、计算下列各题（满分 14 分，每小题 7 分）

1. 计算 $\int_L (y+\sin^2 x)dx-(y^2-x)dy$，其中 L 为沿曲线 $x^2+y^2=2x$ 顺时针方向从 $(0,0)$ 点到 $(1,1)$ 点的一段弧。

$P=y+\sin^2 x$，$Q=-y^2+x$　$\frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x}$，∴积分与路径无关，取路径 $(0,0)\to A\to(1,1)$



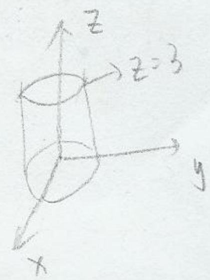
$$\int_L (y+\sin^2x)dx-(y^2-x)dy$$

$$=\int_0^1 \sin^2x\,dx+\int_0^1(-y^2+1)\,dy$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sin1\cos1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}-\frac{\sin1\cos1}{2}$$

2. 用高斯公式计算 $\oiint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+z^2dxdy$，$\Sigma$ 是界于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2\le 1$ 的整个表面的外侧。

$$\oiint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+z^2dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(2+2z)\,dxdydz,$$



$$=2\iiint\limits_{\Omega}dxdydz+2\iiint\limits_{\Omega}z\,dxdydz$$

$$=6\pi+\int_0^3 z\,dz\iint\limits_D dxdy$$

$$=6\pi+\pi\int_0^3 z\,dz=6\pi+2\pi\cdot\frac{9}{2}=\cancel{\frac{21}{2}\pi}$$

15π

五、（10 分）求平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点。

拉格朗日函数 $L=z^2+\lambda(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1)+\mu(x^2+y^2-1)$

令 $\begin{cases} L_x=\frac{\lambda}{3}+2\mu x=0 \\ L_y=\frac{\lambda}{4}+2\mu y=0 \\ L_z=2z+\frac{\lambda}{5}=0 \end{cases}$ 约束条件 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$，$x^2+y^2=1$

解之得 $x=\frac{4}{5}, y=\frac{3}{5}, z=\frac{35}{12}$. $\therefore M_0(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12})$

六、（10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n \cdot n}$ 的收敛域以及和函数

①. $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot n}{3^{n+1}\cdot(n+1)}=\frac{1}{3}$ $\therefore R=3$. 收敛区间为 $-2<x<4$；当 $x=4$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散；当 $x=-2$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，收敛. $\therefore$ 收敛域为 $[-2,4)$

②. 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n\cdot n}$，则 $S'(x)=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{3^{n-1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}=\frac{1}{4-x}$

$\therefore S(x)=\int_1^x\frac{1}{4-x}dx=\ln 3-\ln(4-x)$，$x\in[-2,4)$

七、（8 分）证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0). \\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处连续、偏导数存在但不可微。

证明：① 令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$. $\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{(x\to 0\\y\to 0)\\\rho\to 0}}\frac{\rho^2\sin\theta\cos\theta}{\rho}=0=f(0,0)$

$\therefore f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续

3

② $f_x(0,0)=\frac{d}{dx}f(x,0)\Big|_{x=0}=0$，$f_y(0,0)=\frac{d}{dy}f(0,y)\Big|_{y=0}=0$

$\therefore f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处偏导数存在

3

③ $\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，让 $P(\Delta x,\Delta y)$ 沿 $y=x$ 趋向于 $(0,0)$

$\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}/\rho=\frac{1}{2}$ $\therefore$ 不可微

2