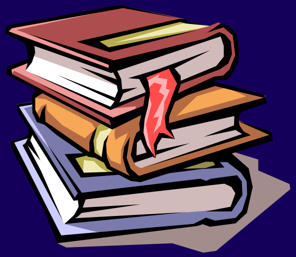
§3 向量组的秩

一. 向量组的秩与最大无关组

二. 向量组的秩与矩阵的秩的联系



一. 向量组的秩与最大无关组的概念

定义5. 设 n 维向量组 A 满足:

(1) A中部分组 $A_0:\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$ 线性无关

(2) A中任意$r+1$个向量(如果存在的话) 都线性相关

则称 A_0 是 A 的**最大线性无关组**, 简称**最大无关组**, r 称为组 A 的**秩**, 记作 R_A.

规定: 只含 $\vec{0}$ 的向量组的秩为 0.

例1. 求 $A:\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的秩与最大无关组.

解:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\ \text{线性无关}\\ \vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2-2\vec{\alpha}_3=\vec{0}\end{array}\right\}\Longrightarrow R_A=2,\ \vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\ \text{是}\ A\ \text{的最大无关组}$$

讨论: A 还有其他最大无关组吗?

例2. 全体 n 维向量构成的向量组记作R^n, 求R^n 的一个最大无关组及 R^n 的秩. (P91 例8)

解: R^n 的部分组 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots \vec{e}_n$ 线性无关

R^n 中的任意 $n+1$ 个向量必线性相关

因此 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots \vec{e}_n$ 为R^n 的一个最大无关组, R^n 的秩为 n.

讨论: 再举一些 R^n 的最大无关组.

约定: 对向量组 $A:\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m$ (只含有限个向量)

可记 R_A 为 $R(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)$.

说明:

1. (最大无关组的等价定义) (P91 推论)

$A_0: \vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_r$ 是向量组A 的部分组, 且满足

(1) 组 A_0 线性无关

(2) 组 A 中任一向量都可由组 A_0 线性表示

则组 A_0 是组 A 的一个最大无关组.

证: 只要证 A 中任意 $r+1$ 个向量线性相关即可.

设 $\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_{r+1}$为$A$中任意 $r+1$ 个向量 ,由条件(2),

它们都可由组 A_0 线性表示, 根据定理3

$$R(\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_{r+1}) \leq R(\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_r) = r$$

因此 $\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_{r+1}$ 线性相关 ,

因此组 A_0 是组 A 的一个最大无关组.

2. 向量组 A 与它的最大无关组 A_0 等价

证: 组 A_0 是组 A 的部分组

$\Rightarrow$ 组 A_0可由组 A 线性表示

组 A_0 是组 A 的一个最大无关组

$\Rightarrow$ 组 A中任一向量都可由组A_0线性表示

$\Rightarrow$ 组 A 可由组 A_0 线性表示

综上所述即得结论.

据此, 对**有限个向量**的向量组成立的某些结论可推广到**无限个向量**的向量组.

二. 矩阵的秩与向量组的秩的联系

定理6. 矩阵A的秩 = 它的列向量组的秩

= 它的行向量组的秩

证: 设 $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m)_{n\times m}$，$R(A)=r$，则存在$r$阶子式

$D_r\neq 0$，根据定理4 (P88)，D_r所在r列线性无关;

又A中任意$r+1$阶子式都为0，所以A中任意$r+1$列线性相关;

因此D_r所在的r列为A的列向量组的最大无关组，

A的列向量组的秩 $=r=R(A)$

又据 $R(A^T)=R(A)$，对A^T用上述结论，可知

$R(A)=A$的行向量组的秩

注: (1) $R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)$ 既表示向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的秩

也表示矩阵 $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)$ 的秩

(2) §1 ~2 中定理1 ~ 4 可直接用向量组的秩描述

定理1. 向量 $\vec{b}$ 能由向量组 A , 线性表示

(P83 ~ 88)

$$\Longleftrightarrow R_A = R_{(A,\vec{b})}$$

定理2. 组 B 能由组 A 线性表示 $\Longleftrightarrow R_A = R_{(A,B)}$

推论. 组B与组A等价 $\Longleftrightarrow R_A = R_B = R_{(A,B)}$

定理3. 向量组 A , B

组 B 能由组 A 线性表示 $\Rightarrow R_B \le R_A$

定理4. $A: \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m$ 线性相关 $\Longleftrightarrow R_A < m$ (向量个数)

$A: \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m$ 线性无关 $\Longleftrightarrow R_A = m$ (向量个数)

(3) 定理1 ~ 3 可推广到向量组含无限个向量的情形.

例3. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

的全体解向量构成向量组 S, 求S 的秩.

解: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得 $\begin{cases} x_1 = 3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}$

通解: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1\vec{\xi}_1 + C_2\vec{\xi}_2$

$(C_1, C_2 \in \mathrm{R})$

故 $S=\{\vec{x}=C_1\vec{\xi}_1+C_2\vec{\xi}_2 \mid C_1, C_2\in \mathrm{R}\}$

S 能由 $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2$ 线性表示，而 $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2$ 线性无关(因对应分量不成比例) 所以 $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2$ 是 S 的最大无关组，因此

$$R_S=2$$

例4. 向量组B 能由向量组A 线性表示, 且它们的秩相等, 证明组 A 与组B 等价. (P93例10)

证: 组B 能由组A 线性表示 $\Rightarrow R_A=R_{(A,B)}$

注

由题设 $R_A=R_B$，所以 $R_A=R_B=R_{(A,B)}$

因此 组 A 与组B 等价

返回 上页 下页 结束

例5. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$，求$A$ 的列向量组的最大无关组，并将其余的列向量用最大无关组线性表示.

解:

$$A \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore R(A)=3, \quad \text{(行阶梯形)}$$

又 $(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4) \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \therefore R(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4)=3=R(A)$

故 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4$ 为所求最大无关组.

$$A \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{记}{=\!=} B = (\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_5)$$

(行最简形)

$A\vec{x} = \vec{0}$ 与 $B\vec{x} = \vec{0}$ 同解，即

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_5\vec{a}_5 = \vec{0}$$

$$x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \cdots + x_5\vec{b}_5 = \vec{0}$$

同解，$\therefore$ 组 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_5$ 与组 $\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_5$ 有相同的线性关系，

由 $\begin{cases} \vec{b}_3 = -\vec{b}_1 - \vec{b}_2 \\ \vec{b}_5 = 4\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - 3\vec{b}_4 \end{cases}$ 可知 $\begin{cases} \vec{a}_3 = -\vec{a}_1 - \vec{a}_2 \\ \vec{a}_5 = 4\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 3\vec{a}_4 \end{cases}$

解题规律： $A \overset{r}{\sim}$ 行阶梯形 $\overset{r}{\sim}$ 行最简形

看 A 的列向量组的秩与最大无关组　　看 A 的列向量间的线性关系

小结

1. 向量组A的最大无关组与秩的概念

定　　义	等价定义
(1) A中部分组 $A_0:\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$ 线性无关 (2) A中任意 $r+1$ 个向量都线性相关 则称 A_0 是 A 的最大线性无关组, r 为 A 的秩	(1) 同右 (2) A中任一向量都可由组A_0线性表示 ·······

2. 有限个向量的向量组 $\longleftrightarrow$ 矩阵

① 矩阵的秩 = 矩阵的列向量组的秩
　　　　　　= 矩阵的行向量组的秩

② 定理$1\sim4$ 可用向量组的秩代替

3. 因向量组与其最大无关组的等价

故定理1~3 可推广到无限个向量的向量组

4. $A \overset{r}{\underset{(c)}{\sim}} B \Longrightarrow A, B$ 的列(行)向量组具有相同的线性相关性

或对应的部分组

典型的例: P93 例11

作业

P108　　12(2),　14 , 15, 16, 17,

18,　　19