10.2 有穷自动机

- 确定型有穷自动机(DFA)
- 非确定型有穷自动机(NFA)
- 带ε转移的NFA(ε-NFA)

确定型有穷自动机

定义 确定型有穷自动机(DFA)是一个有序5元组

$M=\langle Q,\Sigma,\delta,q_0,F\rangle$, 其中

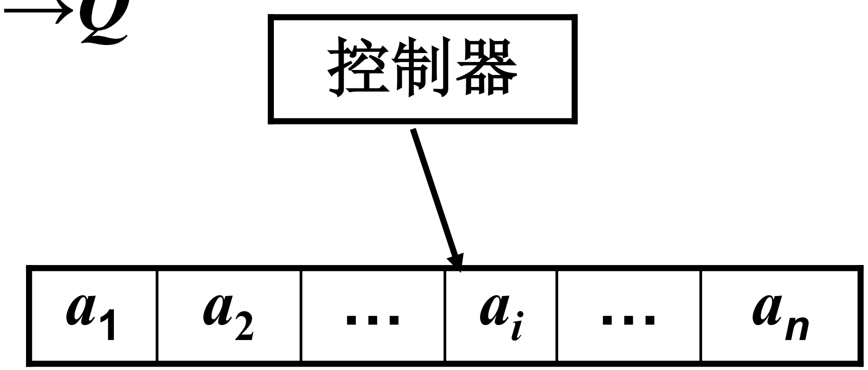
(1) 状态集合Q: 非空有穷集合

(2) 输入字母表Σ: 非空有穷集合

(3) 状态转移函数$\delta:Q\times\Sigma\rightarrow Q$

(4) 初始状态 $q_0\in Q$

(5) 终结状态集 $F\subseteq Q$



DFA接受的语言

把δ扩张到$Q\times\Sigma^*$上 $\delta^*:Q\times\Sigma^*\rightarrow Q$, 递归定义如下

$\forall q\in Q,\ a\in\Sigma$和$w\in\Sigma^*$

$$\delta^*(q,\varepsilon)=q$$

$$\delta^*(q,wa)=\delta(\delta^*(q,w),a)$$

定义 $\forall w\in\Sigma^*$, 如果$\delta^*(q_0,w)\in F$, 则称 M接受w.

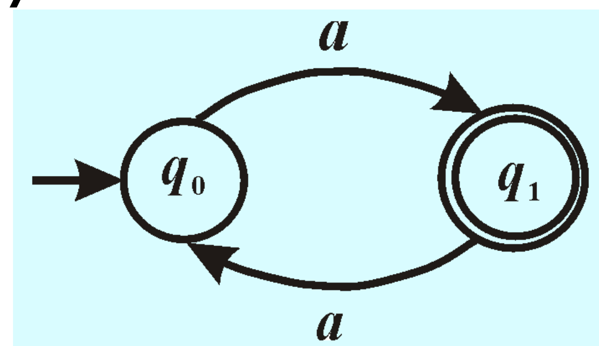
M接受的字符串的全体称作M接受的语言,记作 $L(M)$, 即

$$L(M)=\{\ w\in\Sigma^* \mid \delta^*(q_0,w)\in F\ \}$$

DFA接受的语言(续)

例1 $M=\langle\{q_0, q_1\},\{a\}, \delta, q_0,\{q_1\}\rangle$

$\delta(q_0, a)=q_1, \delta(q_1, a)=q_0$



$$\delta^*(q_0, a^n)=\begin{cases} q_1, & n\text{为奇数} \\ q_0, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

$$\delta^*(q_1, a^n)=\begin{cases} q_0, & n\text{为奇数} \\ q_1, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

$L(M)=\{a^{2k+1} \mid k\in \mathrm{N}\}$

非确定型有穷自动机

定义 非确定型有穷自动机 (NFA)

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle,$$

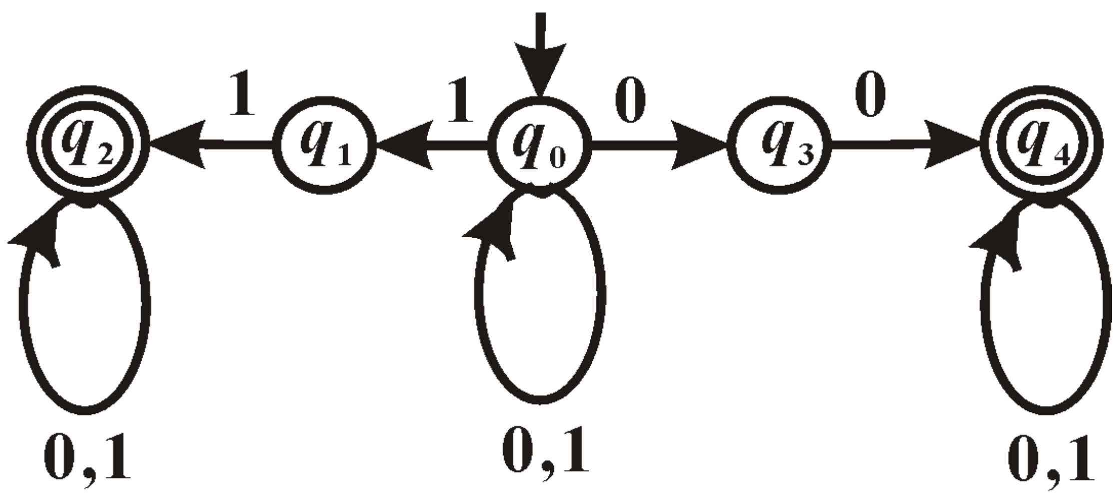
其中 Q, Σ, q_0, F 的定义与 DFA 的相同, 而

$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow P(Q)$$

实例

例2 一台NFA

δ	$\rightarrow q_0$	q_1	$*q_2$	q_3	$*q_4$
0	$\{q_0, q_3\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$
1	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_4\}$



NFA接受的语言

$\delta^*: Q\times\Sigma^*\rightarrow Q$ 递归定义如下: $\forall q\in Q,\ a\in\Sigma$ 和 $w\in\Sigma^*$

$$\delta^*(q,\varepsilon)=\{q\}$$

$$\delta^*(q,wa)=\bigcup_{p\in\delta^*(q,w)}\delta(p,a)$$

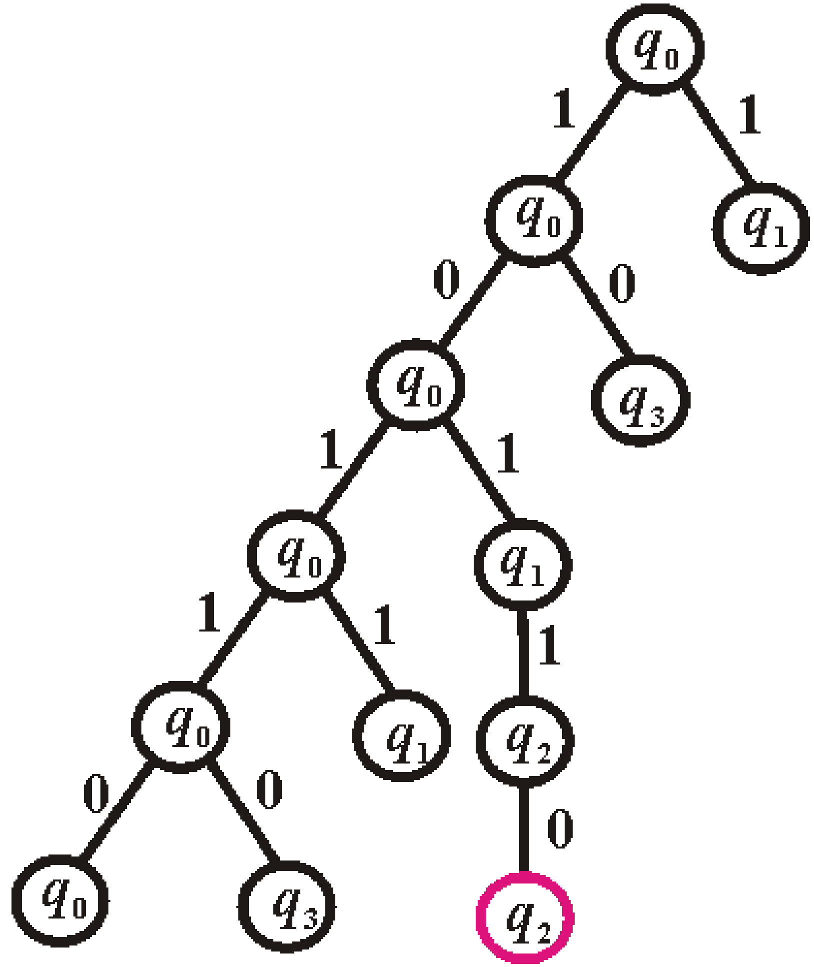
定义 $\forall w\in\Sigma^*$, 如果$\delta^*(q_0,w)\cap F\neq\varnothing$, 则称$M$接受$w$.

M接受的字符串的全体称作M接受的语言,记作$L(M)$, 即

$$L(M)=\{\ w\in\Sigma^* \mid \delta^*(q_0,w)\cap F\neq\varnothing\ \}$$

例2 (续)

w	$\delta^*(q_0, w)$
1	$\{q_0, q_1\}$
10	$\{q_0, q_3\}$
101	$\{q_0, q_1\}$
1011	$\{q_0, q_1, q_2\}$
10110	$\{q_0, q_2, q_3\}$



$L(G) = \{ x00y, x11y \mid x,y \in \{0,1\}^* \}$

DFA与NFA的等价性

定理 对每一个NFA M 都存在DFA M'使得 $L(M)=L(M')$

用$M'=\langle Q',\Sigma,\delta',q_0',F'\rangle$ 模拟 $M=\langle Q,\Sigma,\delta,q_0,F\rangle$

$$Q'=P(Q),\ q_0'=\{q_0\}$$

$$F'=\{\ A\in Q \mid A\cap F\neq\varnothing\}$$

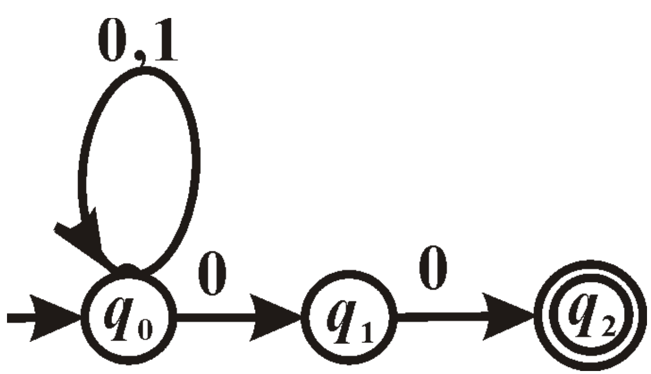
$\forall A\in Q$ 和 $a\in\Sigma$,

$$\delta'(A,a)=\bigcup_{p\in A}\delta(p,a)$$

模拟实例

NFA M

δ	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\varnothing$
$*q_2$	$\varnothing$	$\varnothing$



DFA M'

δ'	0	1
$\rightarrow\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\varnothing$
$*\{q_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0\}$
$*\{q_0,q_2\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
$*\{q_1,q_2\}$	$\{q_2\}$	$\varnothing$
$*\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

模拟实例 (续)

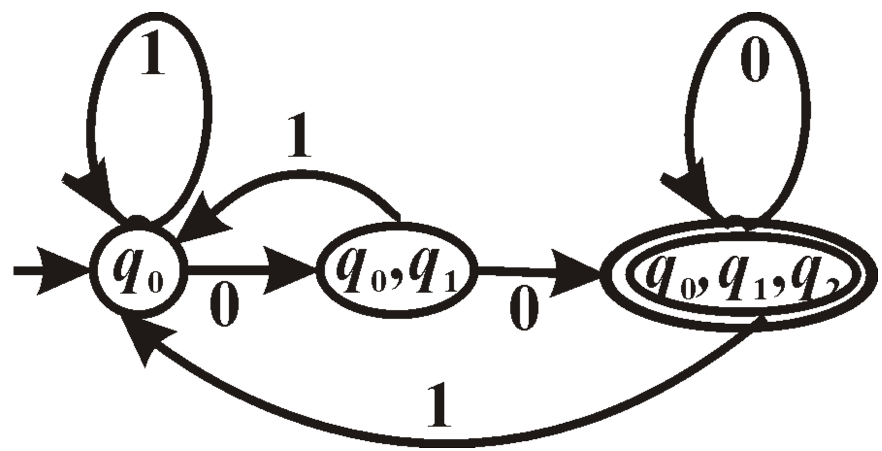
不可达状态:从初始状态出发永远不可能达到的状态

删去所有的不可达状态, 不会改变FA接受的语言.

如M'中的$\{q_1\}$,$\{q_2\}$,$\{q_0,q_2\}$,$\{q_1,q_2\}$和$\varnothing$都是不可达状态,

删去这些状态得到M''

δ''	0	1
$\rightarrow\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0\}$
$*\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0\}$



带ε转移的非确定型有穷自动机

ε 转移: 不读如何符号, 自动转移状态.

ε-NFA: $\delta: Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\rightarrow P(Q)$

定理 对每一个ε-NFA M 都存在DFA M' 使得

$$L(M)=L(M')$$

DFA, NFA 和 ε-NFA 接受同一个语言类

用DFA模拟ε-NFA

设ε-NFA $M=\langle Q,\Sigma,\delta,q_0,F\rangle$, $q\in Q$

q的ε闭包$E(q)$: 从q出发, 经过ε转移能够到达的所有状态, 递归定义如下

(1) $E(q)$包含q;

(2) 如果$p\in E(q)$, 则$\delta(p, \varepsilon)\subseteq E(q)$.

例3 ε-NFA M

δ	0	1	ε
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\varnothing$
$*q_2$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_0\}$

q	$E(q)$
q_0	$\{q_0,q_2\}$
q_1	$\{q_1\}$
q_2	$\{q_0,q_2\}$

用DFA模拟ε-NFA(续)

模拟的方法与用DFA模拟不带ε的NFA的方法基本相同，只是要用$E(q)$代替q.

用DFA $M'=\langle Q',\Sigma,\delta',q_0',F'\rangle$模拟$\varepsilon$-NFA $M=\langle Q,\Sigma,\delta,q_0,F\rangle$

$$Q'=P(Q),\ q_0'=E(q_0)$$

$$F'=\{A\in Q \mid A\cap F\neq\varnothing\}$$

$\forall A\in Q$和$a\in\Sigma$,

$$\delta'(A,a)=\bigcup_{q\in A}\{r\in E(t)\mid \exists p,t\text{使}p\in E(q),t\in\delta(p,a)\}$$

构造DFA M'时不需要对不可达状态进行计算,做法如下: 从$q_0'=E(q_0)$开始, 对每一个$a\in\Sigma$计算δ'的值, 然后对每一个新出现的子集计算δ'的值, 重复进行, 直至没有新的子集出现为止.

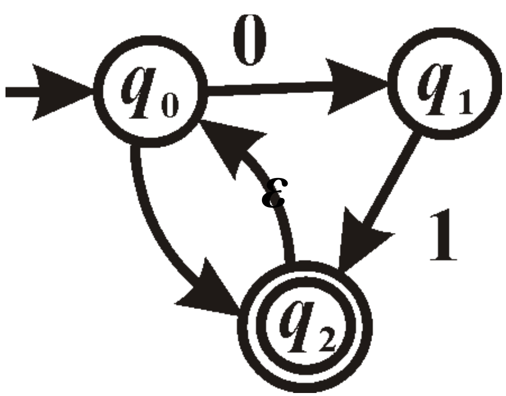
模拟实例——例3(续)

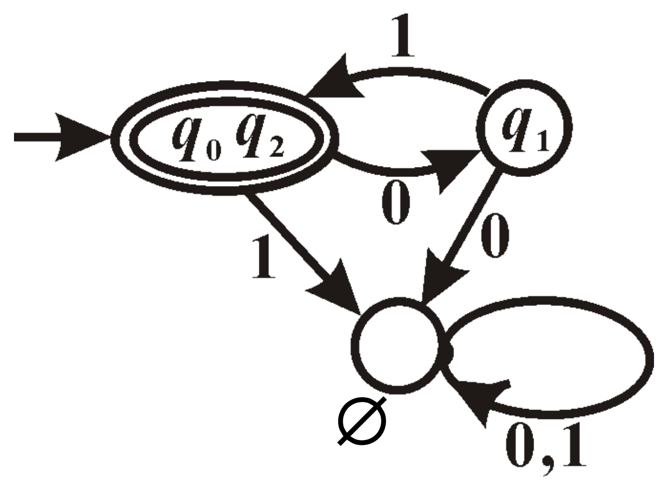
ε-NFA M

δ	0	1	ε
$\to q_0$	$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\varnothing$
$*q_2$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_0\}$

DFA M'

δ'	0	1
$\to *\{q_0,q_2\}$	$\{q_1\}$	$\varnothing$
$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_0,q_2\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$





$L(M)=L(M')=\{\ (01)^n \mid n\geq 0\ \}$

11.3 有穷自动机和正则文法的等价性

- 用ε-NFA模拟右线性文法
- 用右线性文法模拟DFA

有穷自动机和正则文法的等价性

定理 设G是右线性文法, 则存在ε-NFA M 使得$L(M)=L(G)$; 设M是DFA, 则存在右线性文法G使得$L(G)= L(M)$.

定理 下述命题是等价的:

(1) L是正则语言;

(2) 语言L能由右线性文法生成;

(3) 语言L能由左线性文法生成;

(4) 语言L能被DFA接受;

(5) 语言L能被NFA接受;

(6) 语言L能被ε-NFA接受.

用ε-NFA模拟右线性文法

设右线性文法$G=\langle V,T,S,P\rangle$

ε-NFA $M=\langle Q,\Sigma,\delta, q_0, F\rangle$构造如下:

$Q=V\cup\{q_f\}$，$q_0=\{S\}$，$F=\{q_f\}$,

$\Sigma=\{\alpha\in T^*-\{\varepsilon\} \mid$ 存在$A\to\alpha B\in P$或$A\to\alpha\in P\}$

$\forall A\in V$和$\alpha\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$,

若$A\to\alpha B\in P$, 则$\delta(A, \alpha)$中含有B;

若$A\to\alpha\in P$, 则$\delta(A, \alpha)$中含有q_f;

$\forall\alpha\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$，$\delta(q_f,\alpha)=\varnothing$

模拟实例

$G=\langle V,T,S,P\rangle$

$V=\{A,S\}$

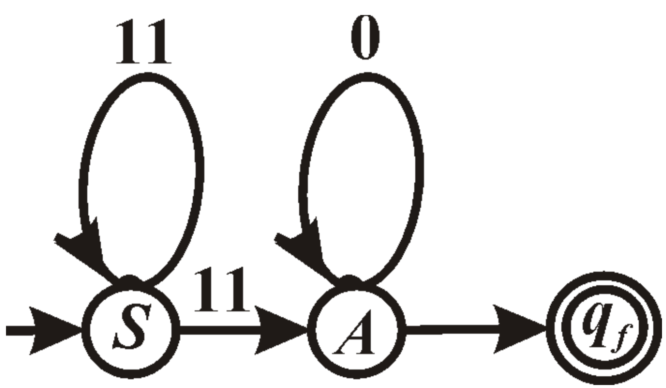
$T=\{0,1\}$

P: $S\rightarrow 11S$

$S\rightarrow 11A$

$A\rightarrow 0A$

$A\rightarrow \varepsilon$



ε-NFA $M=\langle Q,\Sigma,\delta, S, \{q_f\}\rangle$

$Q=\{A, S, q_f\}$

$\Sigma=\{11, 0\}$

δ	11	0	ε
$\rightarrow S$	$\{S,A\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
A	$\varnothing$	$\{A\}$	$\{q_f\}$
$*q_f$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

$L(G)=L(M)=\{\ (11)^m0^n \mid m\geq 1, n\geq 0\ \}$

用右线性文法模拟DFA

设DFA $M=\langle Q,\Sigma,\delta,q_0,F \rangle$

右线性文法$G=\langle V,T,S,P \rangle$构造如下:

$$V=Q,\quad T=\Sigma,\quad S=q_0$$

$\forall q \in Q$和$a \in \Sigma$,

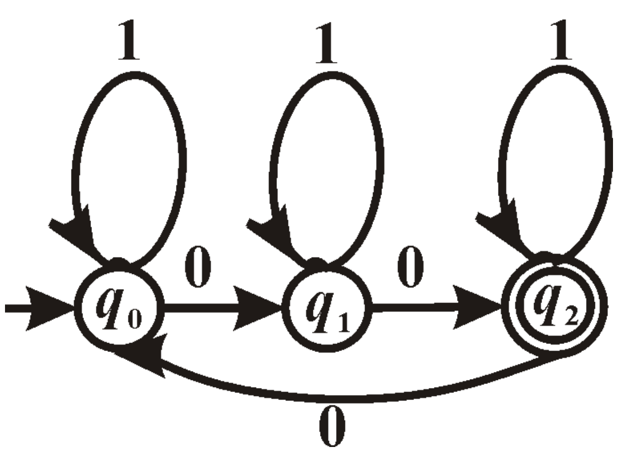
若$\delta(q,a)=p$, 则有产生式$q \to ap$

若$q \in F$, 则有产生式$q \to \varepsilon$

模拟实例

DFA M

δ	0	1
$\rightarrow q_0$	q_1	q_0
q_1	q_2	q_1
$*q_2$	q_0	q_2



$G = \langle V, T, S, P \rangle$

$V=\{q_0,q_1,q_2\}$, $T=\{0,1\}$, $S= q_0$

P: $q_0 \rightarrow 0q_1$ $\quad q_0 \rightarrow 1q_0$

$q_1 \rightarrow 0q_2$ $\quad q_1 \rightarrow 1q_1$

$q_2 \rightarrow 0q_0$ $\quad q_2 \rightarrow 1q_2$

$q_2 \rightarrow \varepsilon$

$L(M)=L(G)$, 它们是所有含$3k+2$ ($k\geq 0$)个0的0,1串组成的集合