第三节　随机变量的分布函数

一、分布函数的概念

二、分布函数的性质

三、例题讲解

四、小结

一、分布函数的概念

1.概念的引入

对于随机变量X, 我们不仅要知道X 取哪些值, 要知道 X 取这些值的概率；而且更重要的是想知道 X 在任意有限区间(a,b)内取值的概率.

例如 求随机变量 X 落在区间 $(x_1, x_2]$内的概率.

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = \boxed{P\{X \le x_2\}} - \boxed{P\{X \le x_1\}}$$

?

$$F(x_2) \qquad\qquad F(x_1)$$

分布函数

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

2.分布函数的定义

定义 设 X 是一个随机变量, x 是任意实数, 函数

$$F(x)=P\{X\le x\}$$

称为 X 的分布函数.

说明

(1) 分布函数主要研究随机变量在某一区间内取值的概率情况.

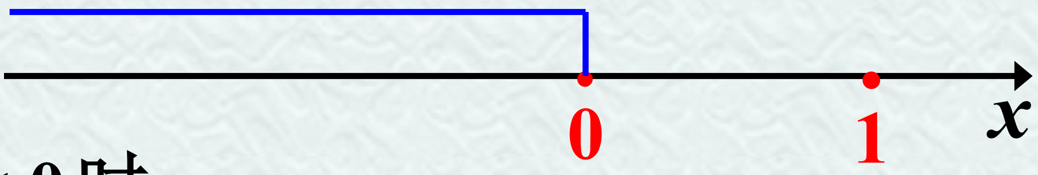
(2)分布函数 $F(x)$ 是 x 的一个普通实函数.

实例 抛掷均匀硬币, 令

$$X=\begin{cases}1, & \text{出正面},\\ 0, & \text{出反面}.\end{cases}$$

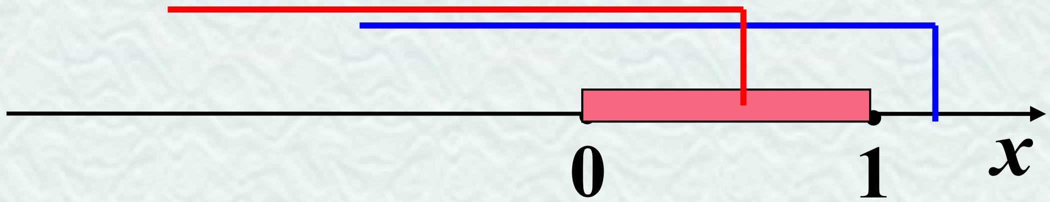
求随机变量 X 的分布函数.

解 $p\{X=1\}=p\{X=0\}=\dfrac{1}{2}$,



当 $x<0$ 时,

$$F(x)=P\{X\leq x<0\}=0;$$



当 $0 \le x < 1$ 时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{2};$$

当 $x \ge 1$ 时,

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

$$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

得 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$

二、分布函数的性质

(1) $0 \le F(x) \le 1, \quad x \in (-\infty, \infty)$;

(2) $F(x_1) \le F(x_2), \quad (x_1 < x_2)$;

证明 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow \{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\}$,

得 $P\{X \le x_1\} \le P\{X \le x_2\}$,

又 $F(x_1) = P\{X \le x_1\}, \quad F(x_2) = P\{X \le x_2\}$,

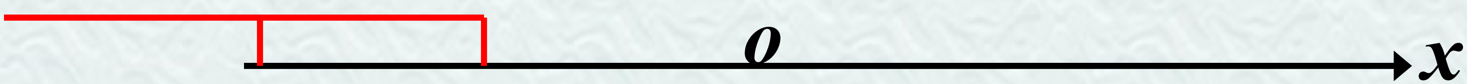
故 $F(x_1) \le F(x_2)$.

(3) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad F(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1;$

证明 $F(x)=P\{X\le x\}$, 当 x 越来越小时,

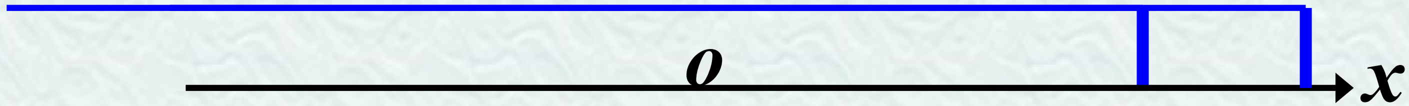
$P\{X\le x\}$ 的值也越来越小, 因而当 $x\to-\infty$ 时, 有

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}P\{X\le x\}=0$$



同样, 当 x 增大时 $P\{X\le x\}$ 的值也不会减小, 而

$X\in(-\infty,x)$, 当 $x\to\infty$ 时, X 必然落在 $(-\infty,\infty)$ 内.

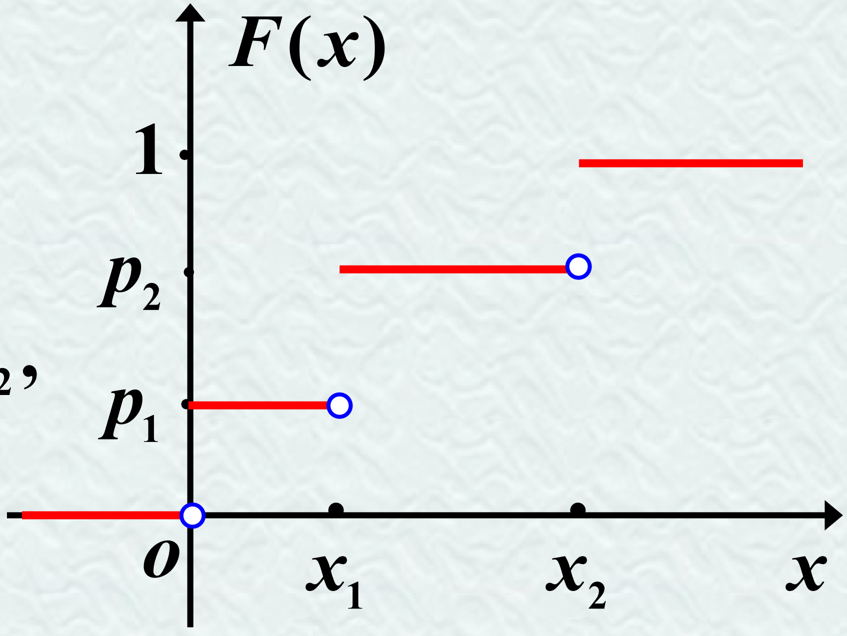


所以 $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} P\{X \le x\} = 1.$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0), \quad (-\infty < x_0 < \infty).$

即任一分布函数处处**右连续**.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ p_1, & 0 \le x < x_1, \\ p_2, & x_1 \le x < x_2, \\ 1, & x \ge x_2. \end{cases}$$



重要公式

$$(1)\ P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a),$$

$$(2)\ P\{X > a\} = 1 - F(a).$$

证明 因为 $\{X \le b\} = \{X \le a\} \cup \{a < X \le b\},$

$$\{X \le a\} \cap \{a < X \le b\} = \varnothing,$$

所以 $P\{X \le b\} = P\{X \le a\} + P\{a < X \le b\},$

故 $P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a).$

三、例题讲解

例1 将一枚硬币连掷三次，X 表示“三次中正面出现的次数”，求 X 的分布律及分布函数，并求下列概率值 $P\{1 < X < 3\}, P\{X \geq 5.5\}, P\{1 < X \leq 3\}$.

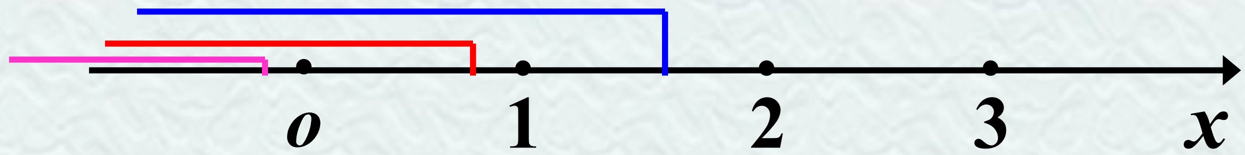
解 设 $H-$正面，$T-$反面，则

$$S=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\},$$

因此分布律为

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

求分布函数



当 $x < 0$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = 0;$$

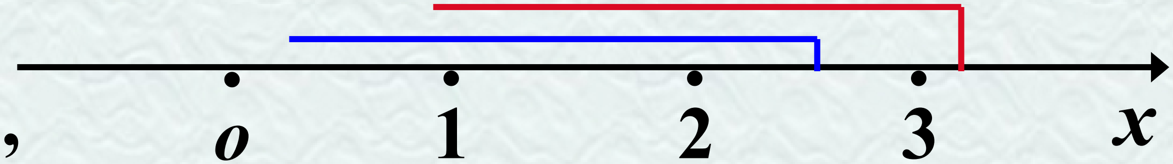
当 $0 \le x < 1$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} = \sum_{x_i \le 0} p_i = \frac{1}{8};$$

当 $1 \le x < 2$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$$

$$= \sum_{x_i \le 1} p_i = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2};$$



当 $2 \le x < 3$ 时,

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

$$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \sum_{x_i \le 2} p_i$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8};$$

当 $x \ge 3$ 时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\}$$

$$= \sum_{x_i \le 3} p_i = 1.$$

$$\text{所以} F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/8, & 0 \le x < 1, \\ 4/8, & 1 \le x < 2, \\ 7/8, & 2 \le x < 3, \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$

$$P\{1 < X < 3\} = P\{X \le 3\} - P\{X \le 1\} - P\{X = 3\}$$

$$= F(3) - F(1) - P\{X = 3\}$$

$$= 1 - \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

$$P\{X \geq 5.5\} = 1 - P\{X < 5.5\}$$

$$= 1 - P\{X \leq 5.5\} + P\{X = 5.5\}$$

$$= 1 - 1 + 0 = 0.$$

$$P\{1 < X \leq 3\} = P\{X \leq 3\} - P\{X \leq 1\}$$

$$= F(3) - F(1)$$

$$= 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

例2 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

求 X 的分布函数,并求 $P\{X \le \frac{1}{2}\}$, $P\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\}$,

$P\{2 \le X \le 3\}$.

解 由于 X 仅在 $x = -1, 2, 3$ 处概率不为0, 且

$$F(x) = P\{X \le x\},$$

得
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ P\{X=-1\}, & -1\le x<2,\\ P\{X=-1\}+P\{X=2\}, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

即
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{1}{4}, & -1\le x<2,\\ \dfrac{3}{4}, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

由 $F(x) = P\{X \le x\}$,

得 $P\{X \le \frac{1}{2}\} = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$,

$$P\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\} = F(\frac{5}{2}) - F(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P\{2 \le X \le 3\} = F(3) - F(2) + P\{X = 2\}$$

$$= 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

请同学们思考

不同的随机变量,它们的分布函数一定也不相同吗?

答 不一定. 例如抛均匀硬币, 令

$$X_1=\begin{cases}1, & 出正面;\\ -1, & 出反面.\end{cases}\qquad X_2=\begin{cases}-1, & 出正面;\\ 1, & 出反面.\end{cases}$$

X_1 与 X_2 在样本空间上的对应法则不同,是两个不同的随机变量,但它们却有相同的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ 1/2, & -1<x<1;\\ 1, & x\geq 1.\end{cases}$$

离散型随机变量分布律与分布函数的关系

分布律 $p_k = P\{X = x_k\}$

$\Updownarrow$

分布函数 $F(x) = P\{X \le x\} = \sum\limits_{x_k \le x} p_k$

离散型随机变量分布函数演示

例3 一个靶子是半径为2m的圆盘,设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比,并设射击都能中靶,以X表示弹着点与圆心的距离.试求随机变量 X 的分布函数.

解 当 $x < 0$时,

$P\{X \le x\}$是不可能事件,

于是$F(x) = P\{X \le x\} = 0;$

当 $0 \le x \le 2$时, $P\{0 \le X \le x\} = kx^2$, k是常数.

由 $P\{0 \le X \le 2\} = 1$, 得 $4k = 1$, 即 $k = \dfrac{1}{4}$.

因而$P\{0 \le X \le x\} = \dfrac{x^2}{4}$.

于是

$$F(x)=P\{X\le x\}$$

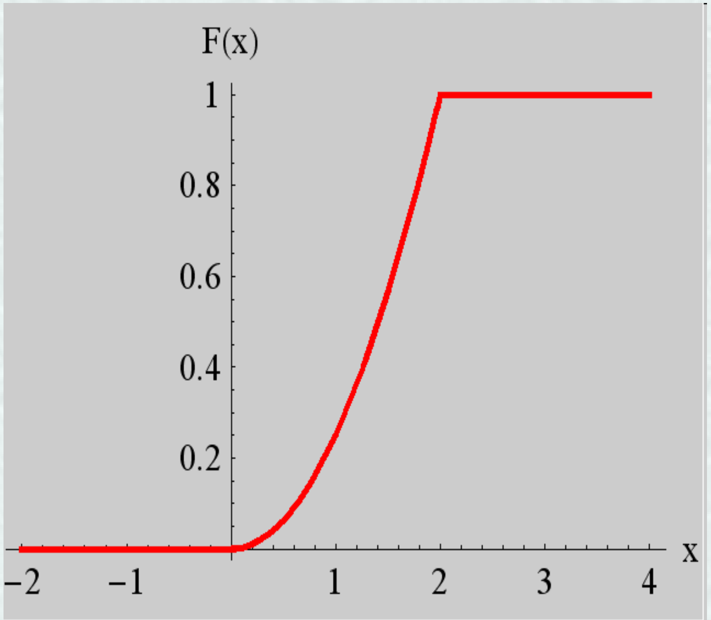
$$=P\{X<0\}+P\{0\le X\le x\}=\frac{x^2}{4}.$$

当 $x\ge 2$时,

$$F(x)=P\{X\le x\}=1.$$

故 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$



其图形为一连续曲线

若记 $f(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{2}, & 0<t<2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

则 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$

$F(x)$ 恰是非负函数 $f(t)$ 在区间 $(-\infty, x]$ 上的积分,

此时称 X 为连续型随机变量.

注意 两类随机变量的分布函数图形的特点不一样.

四、小结

1.离散型随机变量的分布函数

$$F(x)=P\{X\leq x\}=\sum_{x_i\leq x}p_k.$$

2.分布律与分布函数的关系