第五章　相似矩阵及二次型

习 题 课

主 要 内 容

x+y=　典 型 例 题

测　验　题

帮 助　返 回

上页 下页 返回

典　型　例　题

- 一、证明所给矩阵为正交矩阵
- 二、将线性无关向量组化为正交单位向量组
- 三、特征值与特征向量的求法
- 四、已知 A 的特征值，求与 A 相关矩阵的特征值

上页　下页　返回

- 五、求方阵A的特征多项式
- 六、关于特征值的其它问题
- 七、判断方阵A可否对角化
- 八、利用正交变换将实对称矩阵化为对角阵
- 九、化二次型为标准形

一、证明所给矩阵为正交矩阵

方法1　证明矩阵的各列(或行)元素满足正交条件

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} (\text{或} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}), i, j = 1,2,\cdots,n;$$

方法2　根据正交阵的定义,先求出 A^T,然后验证 $A A^T = E$.

例1 设a是n维列向量，E为n阶单位矩阵，证明

$A = E - [2/(a^T a)]a a^T$为正交矩阵.

证明 先验证 $A^T = A$,然后根据正交矩阵的定义验

证$A A^T = E$.

$$\because A^T = [E - (2/a^T a) \cdot a a^T]^T = E - (2/a^T a) a a^T$$

$$= A,$$

$$\therefore A^T A = AA$$

$$= [E - (2/a^T a) \cdot a a^T][E - (2/a^T a) \cdot a a^T]$$

$$= E - [2/(a^T a)] \cdot a a^T - [2/(a^T a)] \cdot a a^T$$

$$+ [4/(a^T a)^2] a (a^T a) a^T .$$

$\because a \neq 0, \therefore a^T a$为一非零数,

故$a(a^T a) a^T = (a^T a)(a a^T)$,

$$\therefore A^T A = E - [4/(a^T a)] a a^T + [4/(a^T a)] a a^T = E,$$

故A是正交矩阵.

特别当$a^T a = 1$时, $A = E - 2 a a^T$是正交矩阵.

二、将线性无关向量组化为正交单位向量组

将线性无关向量组化为正交单位向量组，可以先正交化，再单位化；也可同时进行正交化与单位化.

例2 已知向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ 是线性无关向量组,求与之等价的正交单位 向量组.

上页 下页 返回

解一　先正交化，再单位化

(1)取 $\beta_1 = \alpha_1$;

(2)令 $\beta_2 = k\beta_1 + \alpha_2$,使得 β_2 与 β_1 正交,

$\because [\alpha_1, \beta_2] = k[\alpha_1, \beta_1] + [\alpha_1, \alpha_2] = 0$,

$$\therefore k = -\frac{[\alpha_1, \alpha_2]}{[\alpha_1, \beta_1]} = -\frac{1}{2},\ \text{故}\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

(3)令 $\beta_3 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \alpha_3$,且 β_3与 β_2,β_1正交,得

$$k_1 = -\frac{[\beta_1,\alpha_3]}{[\beta_1,\beta_1]} = \frac{1}{2},\quad k_2 = -\frac{[\beta_2,\alpha_2]}{[\beta_2,\beta_2]} = \frac{1}{3},$$

故 $\beta_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(4)将β_1,β_2,β_3单位化,得

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix};\quad \gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\0\end{pmatrix};$$

$$\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\begin{pmatrix}-1/(2\sqrt{3})\\1/(2\sqrt{3})\\1/(2\sqrt{3})\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}.$$

上页 下页 返回

解二　同时进行正交化与单位化

(1)取 $\beta_1=\alpha_1$,并单位化得

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix};$$

(2)令 $\beta_2=k\gamma_1+\alpha_2$,使得 β_2 与 γ_1 正交,得

$$k=-[\gamma_1,\alpha_2]=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3)令$\beta_3 = k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \alpha_3$,且$\beta_3$与$\gamma_2, \gamma_1$正交,

得

$$k_1 = -[\gamma_1, \alpha_3] = 1/\sqrt{2},$$

$$k_2 = -[\gamma_2, \alpha_3] = 1/\sqrt{6},$$

上页 下页 返回

$$\therefore \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} -1/(2\sqrt{3}) \\ 1/(2\sqrt{3}) \\ 1/(2\sqrt{3}) \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

则$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$为所求之向量组.

三、特征值与特征向量的求法

第一步　计算 A 的特征多项式；

第二步　求出特征多项式的全部根，即得 A 的全部特征值；

第三步　将每一个特征值代入相应的线性方程组，求出基础解系，即得该特征值的特征向量.

例3 计算3阶实矩阵$A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$的全部特征值和特征向量.

解 第一步 计算A的特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-4\\-2&\lambda&-2\\-4&-2&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-8)(\lambda+1)^2.$$

第二步　求出特征多项式$f(\lambda)$的全部根,即A的全部特征值.

令$f(\lambda)=0$,解之得$\lambda_1=8,\lambda_2=\lambda_3=-1$,为$A$的全部特征值.

第三步　求出A的全部特征向量

对$\lambda_1=8$,求相应线性方程组$(\lambda_1 E-A)x=0$的一个基础解系.

$$8E-A=\begin{pmatrix}5 & -2 & -4\\ -2 & 8 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

方程组的一个基础解系$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

属于$\lambda_1=8$的全部特征向量为$k_1\alpha_1(k_1\neq 0$为实数).

同理对$\lambda_2=\lambda_3=-1$,求相应线性方程组$(\lambda_2 E-A)x=0$的一个基础解系:

$$-E-A=\begin{pmatrix}-4 & -2 & -4\\ -2 & -1 & -2\\ -4 & -2 & -4\end{pmatrix}\square\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

求解得此方程组的一个基础解系:

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\qquad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}.$$

于是A的属于$\lambda_2=\lambda_3=-1$的全部特征向量为

$$k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,$$

k_2,k_3是不全为零的实数.

从而A的全部特征向量为$k_1\alpha_1;k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$,这里$k_1\neq 0$为实数,$k_2,k_3$是不全为零的实数.

四、已知 A 的特征值，求与 A 相关矩阵的特征值

例4 设 n 阶方阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，属于 λ_i 的特征向量为 α_i，求 $P^{-1}AP$ 的特征值与特征向量.

解 首先证明 A 与 $P^{-1}AP$ 有相同的特征值.只需证明它们有相同的特征多项式.

$$\because f_{P^{-1}AP}(\lambda) = \left|\lambda E - P^{-1}AP\right|$$

$$= \left|\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP\right|$$

上页 下页 返回

$$= \left|P^{-1}\right|\left|\lambda E - A\right|\left|P\right| = \left|\lambda E - A\right| = f_A(\lambda),$$

$\therefore \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$就是$P^{-1}AP$的全部特征值.

其次求$P^{-1}AP$属于λ_i的特征向量.

$\because A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i,$

即 $(\lambda_i E - A)\alpha_i = 0,$

又 $(\lambda_i E - P^{-1}AP)\alpha_i = (\lambda_i P^{-1}P - P^{-1}AP)\alpha_i$

$$= P^{-1}(\lambda_i E - A)P\alpha_i,$$

$$\therefore (\lambda_i E - P^{-1}AP)P^{-1}\alpha_i$$

$$= P^{-1}(\lambda_i E - A)PP^{-1}\alpha_i$$

$$= P^{-1}(\lambda_i E - A)\alpha_i = 0,$$

即 $(P^{-1}AP)(P^{-1}\alpha_i) = \lambda_i(P^{-1}\alpha_i),$

故 $P^{-1}\alpha_i$是$P^{-1}AP$属于λ_i的特征向量.

五、求方阵 A 的特征多项式

例5　设A是n阶方阵,其特征多项式为

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0,$$

求:(1)求 A^T 的特征多项式;

(2)当A非奇异时,求 A^{-1}的特征多项式.

解　(1) $f_{A^T}(\lambda)=|\lambda E-A^T|=|(\lambda E-A)^T|$

$$=|\lambda E-A|=f_A(\lambda),$$

$\therefore$ A与 A^T 有相同的特征多项式.

(2)设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的全部特征值,则

$\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$是$A^{-1}$的全部特征值,

故A^{-1}的特征多项式为

$$f_{A^{-1}}(\lambda)=\left|\lambda E-A^{-1}\right|$$

$$=(\lambda-\frac{1}{\lambda_1})(\lambda-\frac{1}{\lambda_2})\cdots(\lambda-\frac{1}{\lambda_n})$$

$$=\lambda^n+\frac{a_1}{a_0}\lambda^{n-1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}\lambda+\frac{1}{a_0}.$$

六、关于特征值的其它问题

1 用特征根计算方阵A的行列式$|A|$

例6 设A是3阶矩阵，它的3个特征值为$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$，设$B = A^3 - 5A^2$，求$|B|$；$|A - 5E|$.

解 利用A的行列式与特征值的重要关系$|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$来计算$|A|$.

令$f(x) = x^3 - 5x^2$，

因为$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$是$A$的全部特征值，

所以$f(\lambda_i)(1 \le i \le 3)$是$f(A) = A^3 - 5A^2 = B$的全部特征值.故

$$|B| = |f(A)| = f(\lambda_1)f(\lambda_2)f(\lambda_3)$$

$$= (-4)(-6)(-12) = -288.$$

下面求$|A - 5E|$.

方法一

令$g(A) = A - 5E$,

因为A的所有特征值为$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$,

所以$g(A)$的所有特征值为$g(\lambda_1), g(\lambda_2), g(\lambda_3)$,

上页 下页 返回

$$\therefore |A-5E| = |g(A)| = g(1)g(-1)g(2) = -72.$$

方法二

因为A的所有特征值为$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2,$

故 $|A| = 1\times(-1)\times 2 = -2.$

又 $B = A^3 - 5A^2 = A^2(A-5E),$

$$\therefore |B| = |A|^2 \cdot |A-5E|, \quad 但|B| = -288,$$

$$\therefore |A-5E| = |B| / |A|^2 = -288/4 = -72.$$

方法三

因为A的所有特征值为$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$,

所以 $f_A(\lambda) = |A - \lambda E| = -(1-\lambda)(1+\lambda)(2-\lambda)$,

$|A - 5E| = f_A(5) = -(1-5)(1+5)(2-5) = -72$,

2　用方阵A的特征值,来讨论$kE-A$的可逆性

当k是A的特征值时,$|kE-A|=0$,$kE-A$不可逆;

当k不是A的特征值时,$|kE-A|\neq 0$,$kE-A$可逆.

例7　设A为n阶方阵,

(1)若 $A^2=E$,$8E-A$是否可逆?

(2)设λ是A的特征值,且$\lambda\neq\pm 1$,$A\pm E$是否可逆?

解　(1) $\because\ A^2=E$,

$\therefore\ A$的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$,

故$k=8$不是A的特征值，从而$8E-A$可逆.

一般地,对$k\neq\pm1$,$kE-A$均可逆.

(2)因为$\lambda\neq\pm1$,所以±1不是A的特征值,于是

$$\left|1\cdot E-A\right|\neq0,\left|(-1)\cdot E-A\right|\neq0.$$

又 $$\left|-E-A\right|=\left|-(E+A)\right|=(-1)^n\left|A+E\right|,$$

$$\therefore\left|A+E\right|\neq0;$$

$$\left|E-A\right|=\left|-(A-E)\right|=(-1)^n\left|A-E\right|,$$

$$\therefore\left|A-E\right|\neq0,$$

故$A\pm E$均为可逆矩阵.

七、判断方阵 A 可否对角化

例8 设A是n阶下三角阵.

(1)在什么条件下A可对角化?

(2)如果$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$,且至少有一$a_{i_0 j_0}\neq 0$ $(i_0>j_0)$,证明A不可对角化.

解 (1) A可对角化的充分条件是A有n个互异的特征值. 下面求出A的所有特征值.

上页 下页 返回

$$\because A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\therefore f_A(\lambda)=|\lambda E-A|$$
$$=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn}).$$

令$f_A(\lambda)=0$, 即$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})=0$,

得A的所有特征值$\lambda_i=a_{ii}(1\le i\le n)$.

当$\lambda_i\ne\lambda_j(i\ne j,i,j=1,2,\cdots,n)$时,即当$a_{ii}\ne a_{jj}$时,$A$可对角化.

(2)用反证法.

若A可对角化,则存在可逆矩阵P,使

$$P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \lambda_i (1 \le i \le n)$$

是A的特征值.

由(1)可知$\lambda_i = a_{ii} = a_{11}$,所以

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{11} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{11} \end{pmatrix} = a_{11}E.$$

$$A = P a_{11} E P^{-1} = a_{11} P P^{-1} = a_{11} E,$$

这与至少有一个 $a_{i_0 j_0} \neq 0 (i_0 > j_0)$矛盾,故$A$不可对角化.

八、利用正交变换将实对称矩阵化为对角阵

例9 设实对称阵$A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$，求正交变换矩阵$P$，使$P^{-1}AP$为对角阵.

解 **第一步 求A的特征值．由**

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&0\\-2&1-\lambda&-2\\0&-2&-\lambda\end{vmatrix}$$

上页 下页 返回

$$= -(\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0,$$

得 $\boldsymbol{\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -2.}$

第二步 由$(A - \lambda_i E)x = 0$,求出A的特征向量.

对 $\lambda_1 = 4$,

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解之得基础解系 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

对 $\lambda_2 = 1,$

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解之得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}.$

对 $\lambda_3 = -2,$

上页 下页 返回

$$A+2E=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解之得基础解系 $\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}.$

第三步　因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是属于 A 的 3 个不同特征值的特征向量,故它们必两两正交.

第四步　将特征向量单位化.

令$\eta_i=\dfrac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}, i=1,2,3,$得

$$\eta_1=\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix},\quad \eta_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}.$$

上页 下页 返回

作 $$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix},$$

则 $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

九、化二次型为标准形

例10　用正交变换化

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_3 + x_2^2 \text{为标准形.}$$

解　第一步　将 f 表成矩阵形式

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x^T Ax,$$

得实对称矩阵　$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

第二步　求出A的所有特征值.由

$$|A-\lambda E|=-(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0,$$得

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1.$$

第三步　求正交矩阵P.

解方程组$(A-\lambda_1 E)x=0$,得它的正交基础解系

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\qquad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

将它们单位化,得

$$\eta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\qquad \eta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

解方程组$(A-\lambda_3E)x=0$,得它的基础解系

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\qquad \text{单位化,得}\quad \eta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

$\because \lambda_1 \neq \lambda_3, \therefore \eta_3$与$\eta_1, \eta_2$正交,

令$\mathrm{P} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, T为正交矩阵, 且

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda\text{为对角阵.}$$

第四步　作正交变换$x = Py$.

$$f = y^T(P^TAP)y = y^T\Lambda y = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

上页 下页 返回

例11 用配方法化二次型为标准形,并求相应的线性变换.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+10x_3^2+2x_1x_2$$
$$+8x_2x_3+2x_1x_3.$$

解 第一步 将f中含x_1的项集中进行配方,并作相应的线性变换.

$$f(x_1,x_2,x_3)=[x_1^2+2x_1(x_2+x_3)]+2x_2^2$$
$$+10x_3^2+8x_2x_3$$

上页 下页 返回

$$= [x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2]$$

$$- (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 + 8x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 9x_3^2 + 6x_2x_3.$$

作线性变换$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$

即 $y = p_1 x,$ $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

得 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2+9y_3^2+6y_2y_3.$

第二步 将$f=y_1^2+y_2^2+9y_3^2+6y_2y_3$中含$y_2$的项集中进行配方,并作相应的线性变换.

$$f=y_1^2+(y_2+3y_3)^2.$$

令$\begin{cases} z_1=y_1, \\ z_2=y_2+3y_3, \\ z_3=y_3, \end{cases}$ 即$z=P_2y$, $P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

得 $f=z_1^2+z_2^2$为所求标准形,

相应的线性变换为 $z=Py=(P_2P_1)x.$

第五章　　测试题

一、填空题(每小题4分，共32分).

1. 设A是n阶方阵，A^*是A的伴随矩阵，$|A| = 2$，则方阵$B = AA^*$的特征值是 ____，特征向量是________

2. 三阶方阵A的特征值为1，−1，2，则$B = 2A^3 - 3A^2$的特征值为__________

3. 设$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$且$A$的特征

值为2和1(二重),那么B的特征值为 ______

4.已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$相似,

则$x=$____,$y=$ _____

5.二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2$
$+2x_3x_2$的矩阵是________

6.当_____时,实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+$
$2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$是正定的.

7. 矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 2 & -1\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix}$对应的二次型是________

8. 当t满足______时，二次型$f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$是负定的.

二、计算题（共40分）.

1. (7分)设2是矩阵$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & t & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$的特征值，求

(1)t的值；　　(2)对应于2的所有特征向量.

2.(10分) 设矩阵A与B相似,其中

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}y & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(1)求x和y的值;(2) 求可逆阵P,使得$P^{-1}AP=B$.

3. (10分)已知三阶矩阵A的特征值为 1, 2, -1,设矩阵$B=A-2A^2+3A^3$,试求

(1) 矩阵B的特征值及其相似对角 矩阵;

(2) 行列式$|B|$及$|A^2-3E|$的值.

上页 下页 返回

4. (7分)判断矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$可否对角化？

若可对角化，求出可逆矩阵U使$U^{-1}AU$为对角矩阵.

5. (6分)将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$化为标准型.

三、证明题（共20分）.

1.(5分) 设A为n阶实对称矩阵，且满足 $A^3+A^2+A=3E$，证明A是正定的矩阵.

2.(5分)设A与B是正定矩阵,证明: AB是正定矩阵的充要条件是A与B可交换.

四、（8分）设二次型

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2\beta x_2x_3 + 2x_1x_3$$

经正交变换 $X = QY$ 化成

$$f = y_1^2 + 2y_3^2$$

其中$X = (x_1, x_2, x_3)^T, Y = (y_1, y_2, y_3)^T$是三维列向量,$Q$是三阶正交矩阵,试求常数$\alpha, \beta$.

测试题答案

一、 1.2(n重), 任意n维非零向量;   2. $-1,-5,4$;

3. $2,1$(二重);   4. $x=0, y=1$;

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;   6. $A^{-1}Y$;

7. $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3-2x_2x_3$;

8. $t<-1$.

二、1.(1) $t=8$;　　(2) $k\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$;

2. (1) $x=1,\ y=-1$;　　(2) $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.

3. (1) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&18&0\\0&0&-6\end{pmatrix}$;　　(2) $\left|A^2-3E\right|=4$.

4. 可对角化, $U=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&-2\\2&2&1\end{pmatrix}$.

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

5. $f=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2.$

四、 $\alpha=\beta=0.$