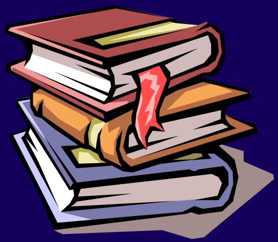
§3 逆矩阵

一. 逆矩阵的概念

二. 方阵可逆的充要条件

三. 逆矩阵的运算规律

四. 矩阵多项式



一. 逆矩阵的概念

引例. 给定线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$ 即 $Y=AX$ (1)

注意到: $A^*Y = A^*AX = |A|X$

当 $|A| \neq 0$ 时,

$$X = \frac{1}{|A|}A^*Y \xlongequal{记} BY \qquad (2)$$

称(2)为(1)的逆变换, 此时有:

$$Y = (AB)Y, \quad X = (BA)X$$ (恒等变换)

$$\therefore \quad AB = BA = E$$

定义7. 对 n 阶方阵 A，若存在 n 阶方阵 B，使

$$AB = BA = E$$

则称 A **可逆**, B为A 的**逆矩阵**.

推论. A 可逆 $\Longrightarrow$ A 的逆矩阵唯一 .

证: 设 B, C 均为 A 的逆矩阵, 则

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$$ **证毕**

据此, A 的逆矩阵记作 A^{-1}.

引例中线性变换 $Y = AX$ 的逆变换(2)可写作:

$$X = A^{-1}Y$$

二.方阵可逆的充要条件

定理1. 方阵 A 可逆 $\Longrightarrow |A| \neq 0$

证: 方阵 A 可逆 $\Rightarrow AA^{-1} = E$

$$\Rightarrow |A||A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$ 证毕

定理2. $|A| \neq 0 \Longrightarrow A$ 可逆, 且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

证: 由 P38 例10,

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

$\because |A| \neq 0$,故有

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = E$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$ 证毕

推论. A, B 为 n 阶方阵，$AB = E$ (或 $BA = E$)

$\Longrightarrow A$ 可逆, 且 $A^{-1} = B$

证: $AB = E \Longrightarrow |A||B| = 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow A$ 可逆

$$B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}$$ 证毕

说明:

(1) $|A| \begin{cases} \neq 0 \text{ 时, 称 } A \text{ 为非奇异矩阵} \\ = 0 \text{ 时, 称 } A \text{ 为奇异矩阵} \end{cases}$

(2) 方阵 A 可逆 $\Longleftrightarrow |A| \neq 0 \Longleftrightarrow A$ 为非奇异矩阵

三. 逆矩阵的运算规律

(1) A 可逆 $\longrightarrow$ A^{-1}也可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) A 可逆, 数 $\lambda \neq 0$ $\longrightarrow$ λA也可逆，且

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

(3) A, B 为同阶可逆矩阵 $\longrightarrow$ AB可逆，且

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

证: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1}$

$$= AA^{-1} = E$$

$$\therefore \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

(4) A 可逆 $\longrightarrow$ A^{T}可逆，且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$

(5) A 可逆 $\longrightarrow$ $\left|A^{-1}\right| = \left|A\right|^{-1}$

例1. 求 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆阵 (设 $ad-bc\neq 0$).

解: $|A|=ad-bc\neq 0,$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

可当公式

例2. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, C^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, W=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(1) 求 A^{-1};

(2) 解矩阵方程 $AX=B$ 与 $CYA=W$.

解: (1) $|A|=-1,$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=-\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) 解 $AX=B$：

$$X=A^{-1}B$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

解 $CYA=W$.

$$Y=C^{-1}WA^{-1}$$

$$C^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -4 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

例3. 设 $P=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $AP=P\Lambda$, 求A^n.

解:

$$A=P\Lambda P^{-1}$$

$$A^n=(P\Lambda P^{-1})^n=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})$$

$$=P\Lambda^n P^{-1}$$

$$\Lambda^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}$$

$$|P|=2,\quad P^{-1}=\frac{1}{|P|}P^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2-2^n&-1+2^n\\2-2^{n+1}&-1+2^{n+1}\end{pmatrix}$$

例4. 设 A 为三阶矩阵 $|A|=\frac{1}{2}$，求$\left|(2A)^{-1}-5A^{*}\right|$.

解: 由已知得 $\left|A^{-1}\right|=2,\ A^{*}=\frac{1}{2}A^{-1}$

$$\therefore\ (2A)^{-1}-5A^{*}=\frac{1}{2}A^{-1}-5\times\frac{1}{2}A^{-1}$$

$$=-2A^{-1}$$

$$\therefore\ \left|(2A)^{-1}-5A^{*}\right|=\left|-2A^{-1}\right|$$

$$=(-2)^{3}\left|A^{-1}\right|$$

$$=-16$$

四. 矩阵多项式

设 $\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$

A 为n 阶方阵, 记

$$\varphi(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$$

(称为矩阵 A 的 m 次多项式)

因A^k与A^s和E都是可交换的, 所以矩阵多项式可以像数的多项式一样进行相乘和做因式分解.

例如,

$$\varphi(A)=6E-5A+A^2=(A-2E)(A-3E)$$

$$(E-A)^3=E-3A-3A^2+A^3$$

有用的结论:

(1) 若 $A = P\Lambda P^{-1}$, 则 $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$

$$\varphi(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m$$

$$= a_0 PEP^{-1} + a_1 P\Lambda P^{-1} + \cdots + a_m P\Lambda^m P^{-1}$$

$$= P\varphi(\Lambda)P^{-1}$$

(2) 若 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, 则

$$\varphi(\Lambda) = a_0 E + a_1 \Lambda + a_2 \Lambda^2 + \cdots + a_m \Lambda^m$$

$$= a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} + \cdots + a_m \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

第五章将讨论如何求Λ与P, 从而可方便的求$\varphi(A)$

小结

1. 逆阵的概念
2. 可逆的充要条件
3. 求逆阵的方法

(1) 利用伴随矩阵（对 $n=2$ 实用)

(2) 利用恒等变形将所给方程化为

$$A(\boxed{}) = E \quad 或 (\boxed{})A = E$$

则 $A^{-1} = \boxed{}$

例如

(3) 初等变换法 (下章)

作业

P55　10(2)，11(4),　12(2),
14,　15,　16,