第一节　二维随机变量

一、二维随机变量及其分布函数

二、二维离散型随机变量

三、二维连续型随机变量

四、两个常用的分布

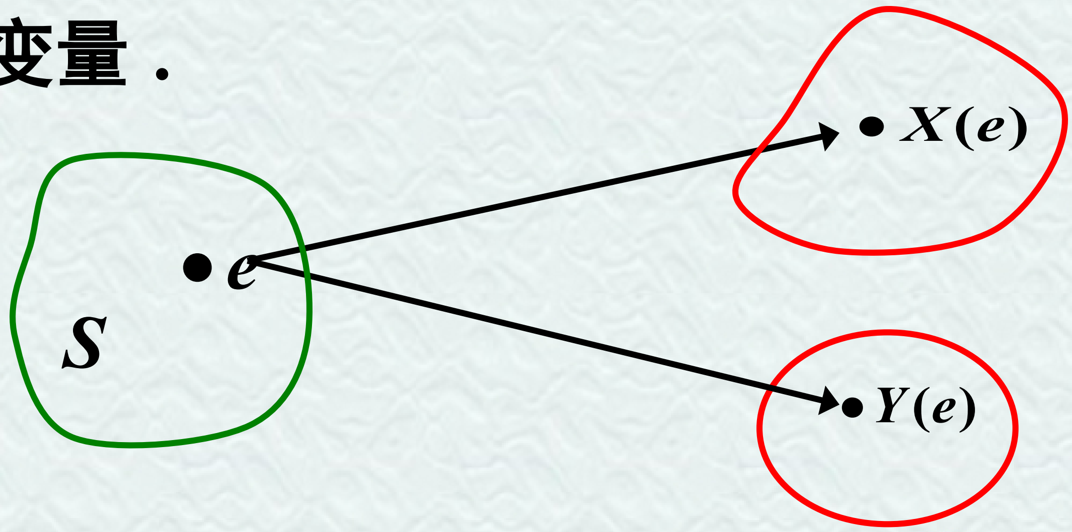
五、小结

一、二维随机变量及其分布函数

1.定义

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个向量 (X,Y)，叫作二维随机向量或二维随机变量 .

图示



实例1 炮弹的弹着点的位置 (X, Y) 就是一个二维随机变量.

实例2 考查某一地 区学前儿童的发育情况，则儿童的身高 H 和体重 W 就构成二维随机变量 (H, W).

说明

二维随机变量 (X, Y) 的性质不仅与 X、Y 有关,而且还依赖于这两个随机变量的相互关系.

2.二维随机变量的分布函数

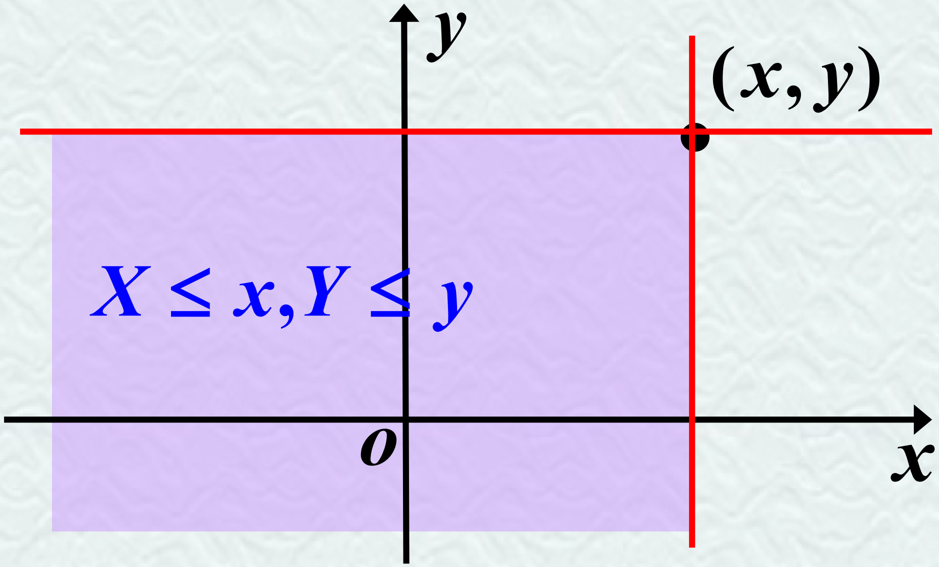
(1)分布函数的定义

设 (X,Y) 是二维随机变量,对于任意实数 x,y,二元函数:

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}=P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数,或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数.

$F(x, y)$的函数值就是随机点落在如图所示区域内的概率.



(2) 分布函数的性质

1° $F(x,y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数,即对于任意固定的 y, 当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$,

对于任意固定的x,当$y_2 > y_1$时$F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$.

2° $0 \leq F(x,y) \leq 1$, 且有

对于任意固定的 y, $F(-\infty,y) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$,

对于任意固定的 x, $F(x,-\infty) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$,

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0,$$

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1.$$

3° $F(x,y)=F(x+0,y),F(x,y)=F(x,y+0),$

即 $F(x,y)$ 关于 x 右连续,关于 y 也右连续.

4° 对于任意 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, $x_1<x_2$, $y_1<y_2$,

有 $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geq 0.$

证明 $P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$

$= P\{X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} - P\{X \le x_1, y_1 < Y \le y_2\}$

$= P\{X \le x_2, Y \le y_2\} - P\{X \le x_2, Y \le y_1\}$

$- P\{X \le x_1, Y \le y_2\} + P\{X \le x_1, Y \le y_1\} \ge 0,$

故 $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \ge 0.$

二、二维离散型随机变量

1. 定义

若二维随机变量 (X, Y) 所取的可能值是有限对或无限可列多对,则称 (X, Y) 为二维离散型随机变量.

2. 二维离散型随机变量的分布律

设二维离散型随机变量 (X,Y) 所有可能取的值为 $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \cdots,$ 记

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots,$$

称此为二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律，或随机变量 X 和 Y 的联合分布律.

其中 $p_{ij} \geq 0,\ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$

二维随机变量 (X,Y) 的分布律也可表示为

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

例1 设随机变量 X 在1,2,3,4四个整数中等可能地取值，另一个随机变量 Y 在 $1 \sim X$ 中等可能地取一整数值.试求 (X,Y) 的分布律.

解 $\{X=i, Y=j\}$ 的取值情况是： $i=1,2,3,4,$

j取不大于i的正整数. 且由乘法公式得

$$P\{X=i, Y=j\} = P\{Y=j \mid X=i\} P\{X=i\} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{4},$$

$$i=1,2,3,4, \quad j \le i.$$

于是 (X,Y) 的分布律为

Y \ X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

例2 从一个装有3支蓝色、2支红色、3支绿色圆珠笔的盒子里, 随机抽取两支, 若 X、Y 分别表示抽出的蓝笔数和红笔数,求 (X, Y) 的分布律.

解 (X, Y) 所取的可能值是

(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (0,2), (2,0).

抽取一支绿笔,一支红笔

$$\ldots \Big/ \binom{8}{2} = \frac{3}{28},$$

$$P\{X=0, Y=1\} = \binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\Big/\binom{8}{2} = \frac{3}{14},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}\Big/\binom{8}{2}=\frac{3}{14},$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{0}\Big/\binom{8}{2}=\frac{1}{28},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{1}\Big/\binom{8}{2}=\frac{9}{28},$$

$$P\{X=2,Y=0\}=\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{0}\Big/\binom{8}{2}=\frac{3}{28}.$$

故所求分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$3/28$	$9/28$	$3/28$
1	$3/14$	$3/14$	0
2	$1/28$	0	0

例3 一个袋中有三个球,依次标有数字 1, 2, 2, 从中任取一个, 不放回袋中, 再任取一个, 设每次取球时,各球被取到的可能性相等,以 X, Y 分别记第一次和第二次取到的球上标有的数字, 求 (X, Y) 的分布律与分布函数.

解 (X, Y) 的可能取值为 $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$.

$$P\{X=1, Y=2\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{3},\quad P\{X=2, Y=1\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=2, Y=2\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

$$p_{11} = 0, \quad p_{12} = p_{21} = p_{22} = \frac{1}{3},$$

故 (X, Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2
1	0	1/3
2	1/3	1/3

下面求分布函数.

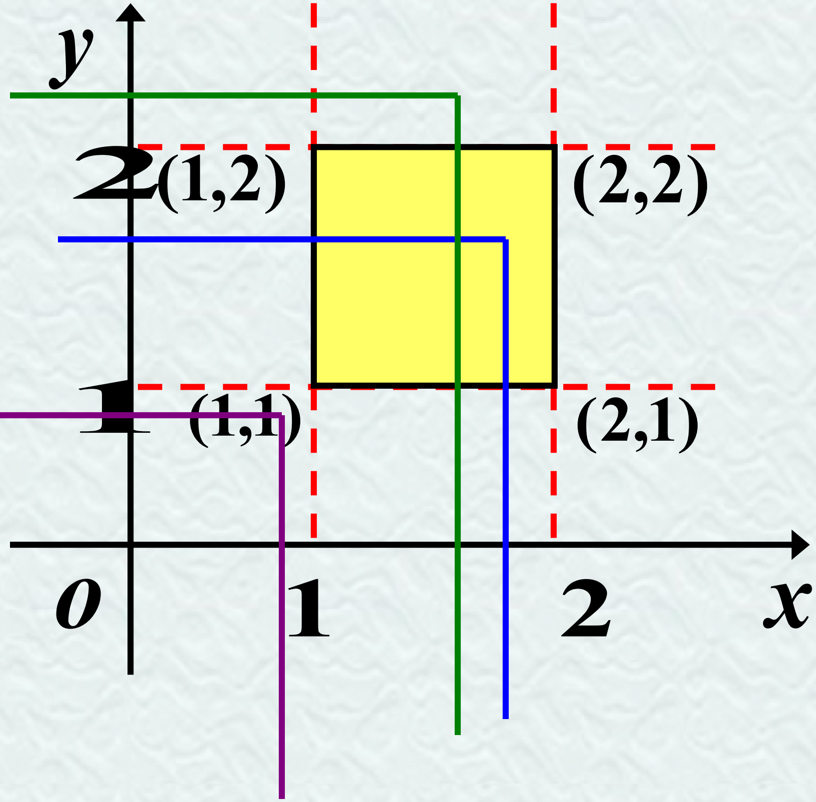
(1)当 $x<1$ 或 $y<1$ 时,

$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$

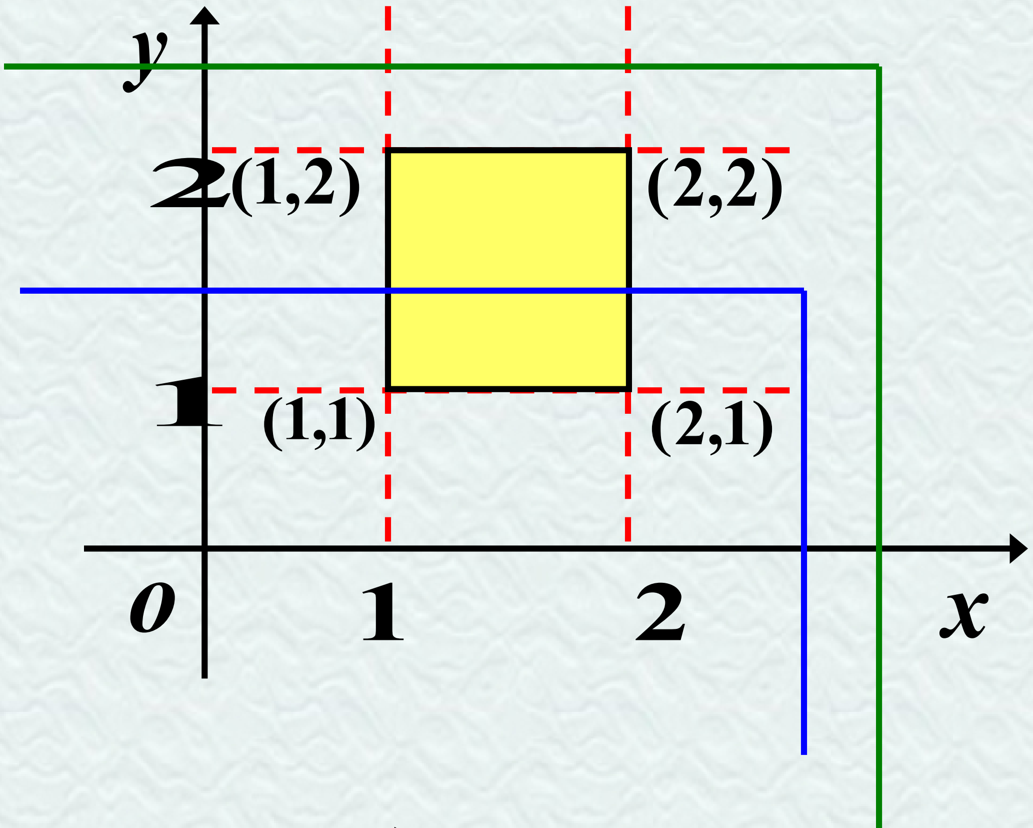
$=0;$

(2)当$1\le x<2, 1\le y<2$时,

$F(x,y)=p_{11}=0;$



(3)当$1\le x<2, y\ge 2$时, $F(x,y)=p_{11}+p_{12}=1/3;$



(4)当$x \geq 2, 1 \leq y < 2$时，$F(x, y) = p_{11} + p_{21} = 1/3$;

(5)当$x \geq 2, y \geq 2$时，$F(x, y) = p_{11} + p_{21} + p_{12} + p_{22} = 1$.

所以(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<1\text{或}y<1,\\ \dfrac{1}{3}, & 1\le x<2, y\ge 2,\text{或}x\ge 2, 1\le y<2,\\ 1, & x\ge 2, y\ge 2.\end{cases}$$

说明

离散型随机变量 (X,Y) 的分布函数归纳为

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij},$$

其中和式是对一切满足 $x_i\le x, y_j\le y$ 的 i,j 求和.

三、二维连续型随机变量

1.定义

对于二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$, 如果存在非负的函数 $f(x,y)$ 使对于任意 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

则称 (X,Y) 是连续型的二维随机变量, 函数 $f(x,y)$ 称为二维随机变量 (X,Y) 的概率密度, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

2.性质

(1) $f(x,y) \geq 0.$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = F(\infty,\infty) = 1.$

(3) 设 G 是 xoy 平面上的一个区域，点 (X,Y) 落在 G 内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(4)若 $f(x,y)$在(x,y)连续,则有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$

3.说明

几何上, $z=f(x,y)$ 表示空间的一个曲面.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1,$$

表示介于 $f(x,y)$和 xoy 平面之间的空间区域的全部体积等于1.

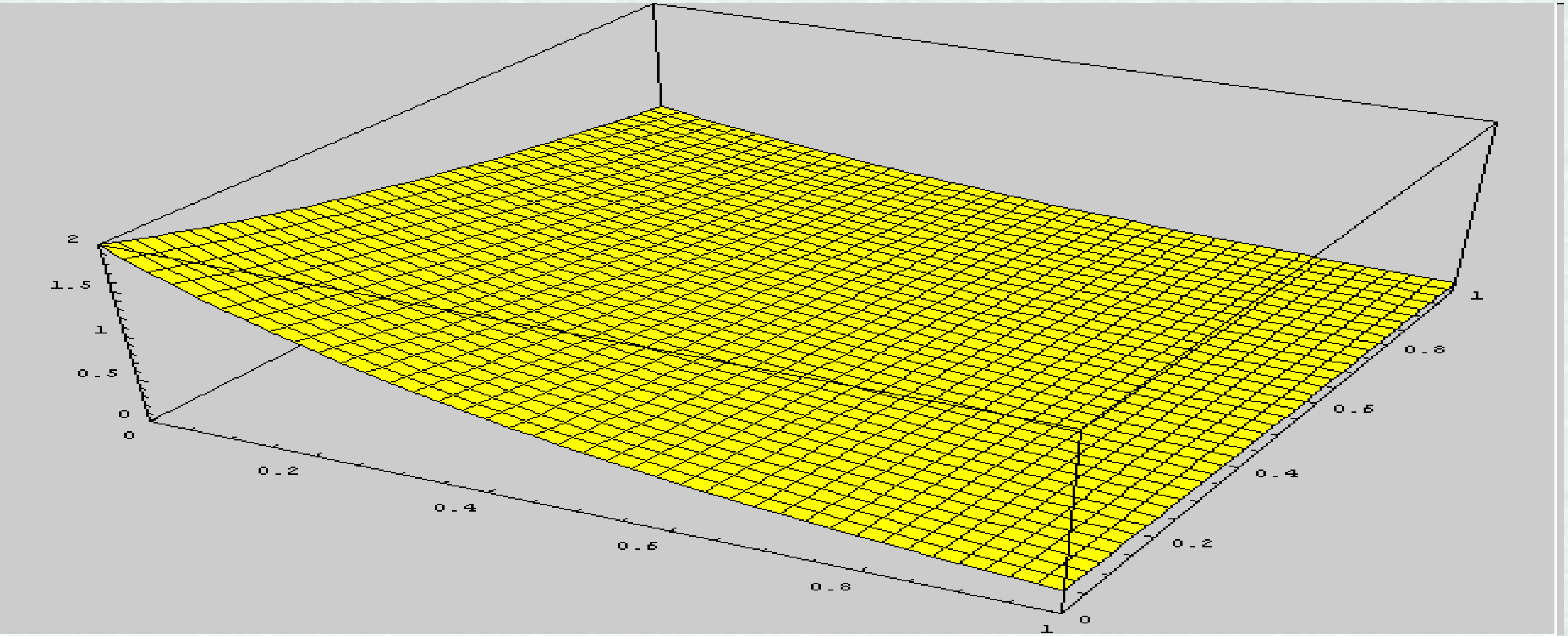
$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$P\{(X,Y)\in G\}$的值等于以G为底,以曲面$z=f(x,y)$为顶面的柱体体积.

例4 设二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x,y)$; (2) 求概率 $P\{Y\le X\}$.



解 (1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\begin{cases}\int_{0}^{y}\int_{0}^{x} 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

得 $$F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{y}), & x>0, y>0.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 将 (X,Y)看作是平面上随机点的坐标,

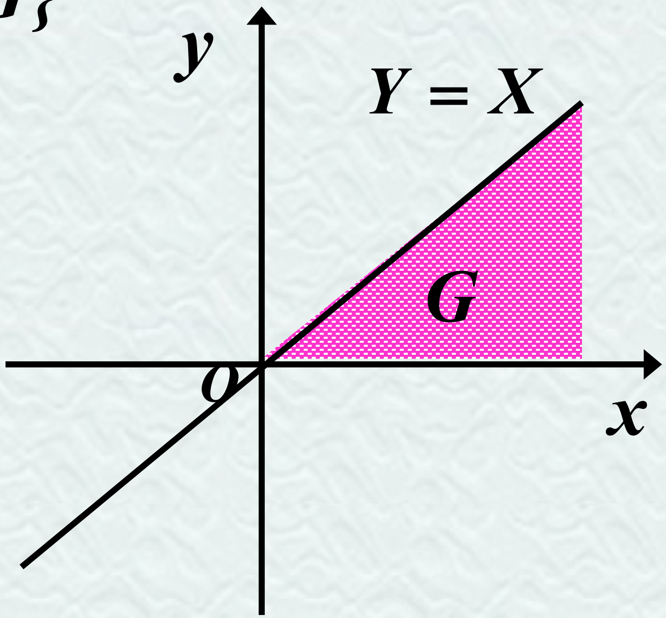
即有 $\{Y \le X\} = \{(X,Y) \in G\},$

$$P\{Y \le X\} = P\{(X,Y) \in G\}$$

$$= \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_y^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}.$$

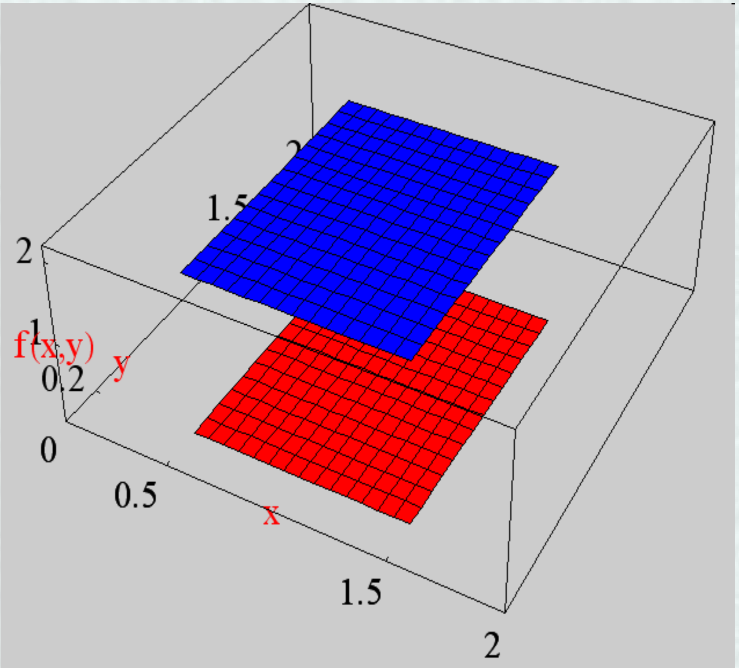


四、两个常用的分布

1.均匀分布

定义　设 D 是平面上的有界区域,其面积为 S,若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

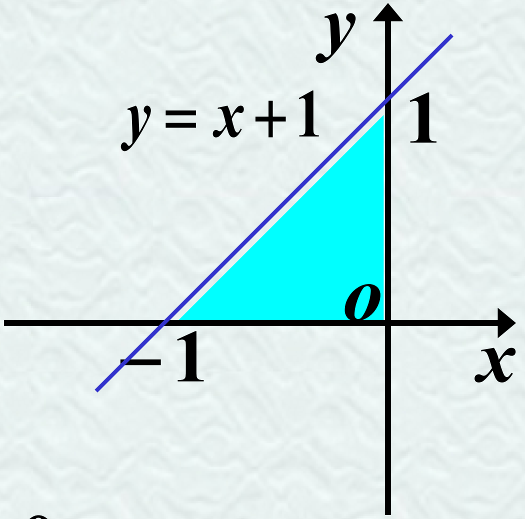


则称 (X, Y) 在 D 上服从均匀分布.

例5 已知随机变量 (X, Y) 在 D 上服从均匀分布，试求 (X, Y) 的分布密度及分布函数，其中 D 为 x 轴，y 轴及直线 $y=x+1$ 所围成的三角形区域 .

解 由 $f(x,y)=\begin{cases}1/S, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

得 $f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

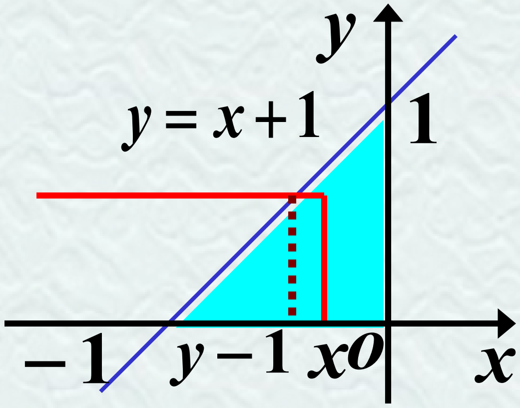


当 $x<-1$ 或 $y<0$ 时， $f(x,y)=0$

$$\Rightarrow F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=0;$$

当 $-1 \le x < 0, 0 \le y < x+1$ 时,

$$\Rightarrow F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$



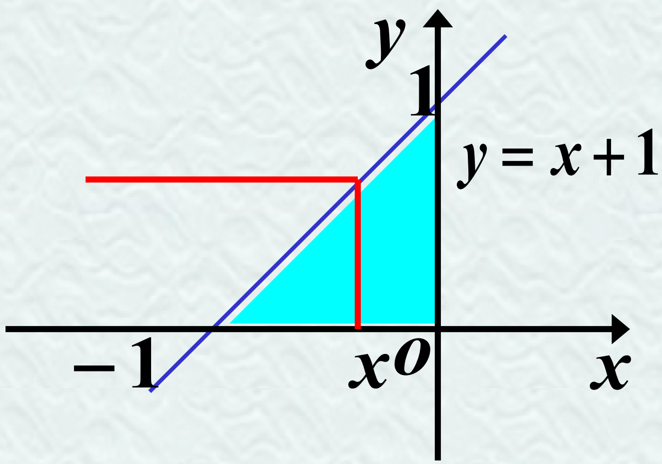
$$= \int_{-1}^{y-1}\mathrm{d}u\int_{0}^{u+1} 2\,\mathrm{d}v + \int_{y-1}^{x}\mathrm{d}u\int_{0}^{y} 2\,\mathrm{d}v$$

$$= (2x - y + 2)y;$$

当 $-1 \le x < 0, y \ge x+1$ 时,

$$\Rightarrow F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_{-1}^{x}\mathrm{d}u\int_{0}^{u+1} 2\,\mathrm{d}v = (x+1)^2;$$

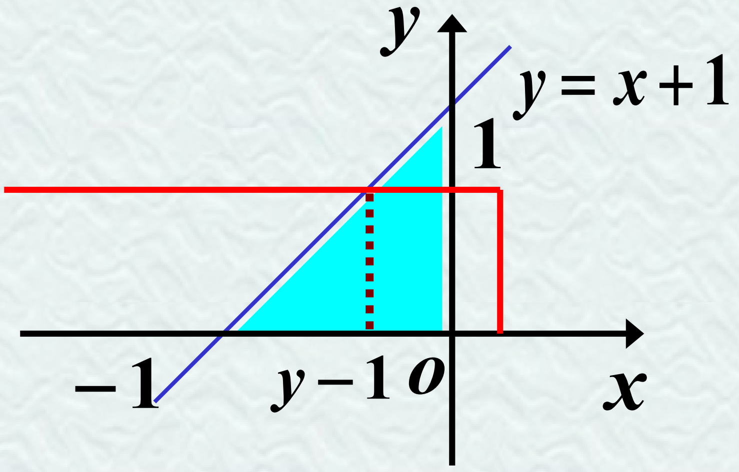


当 $x \geq 0, 0 \leq y < 1$ 时,

$$\Rightarrow F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_{-1}^{y-1}\mathrm{d}u\int_{0}^{u+1} 2\,\mathrm{d}v + \int_{y-1}^{0}\mathrm{d}u\int_{0}^{y} 2\,\mathrm{d}v$$

$$= (2-y)y;$$



当 $x \geq 1, y \geq 1$ 时,

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}u\int_{0}^{u+1}2\,\mathrm{d}v=1.$$

所以 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<-1,\text{或 } y<0,\\ (2x-y+2)y, & -1\leq x<0,\ 0\leq y<x+1,\\ (x+1)^2, & -1\leq x<0,\ y\geq x+1,\\ (2-y)y, & x\geq 0,\ 0\leq y<1,\\ 1, & x\geq 1,\ y\geq 1.\end{cases}$$

2.二维正态分布

若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

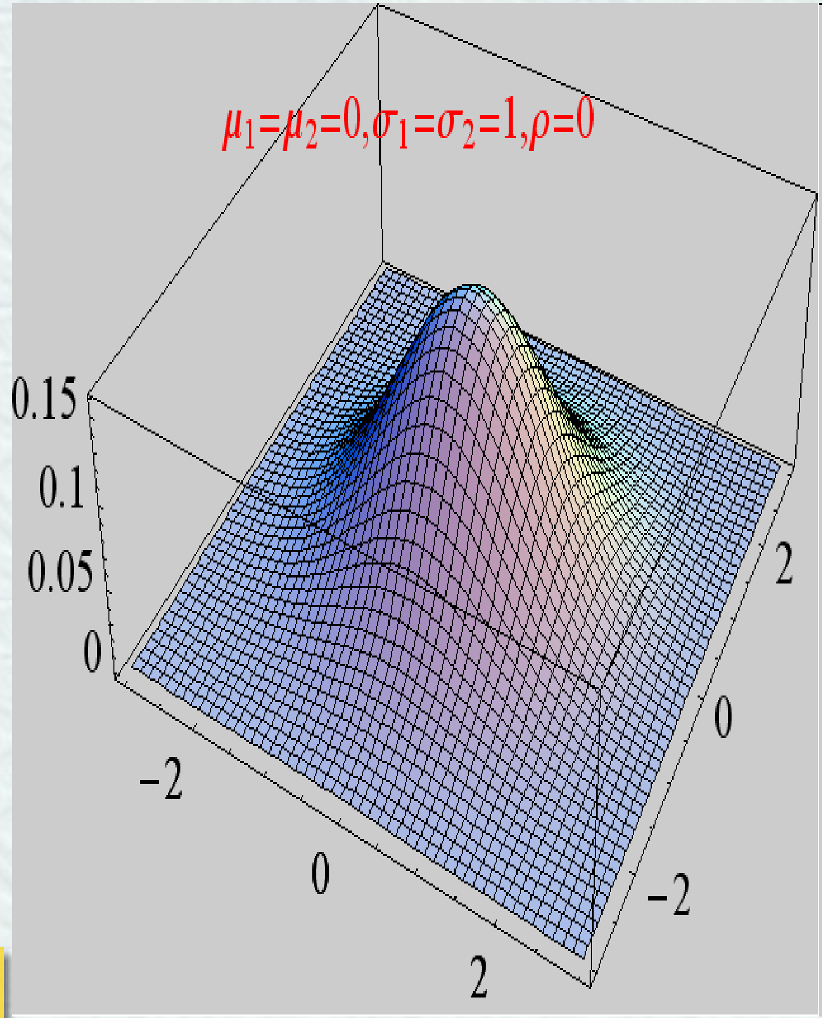
$$(-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty),$$

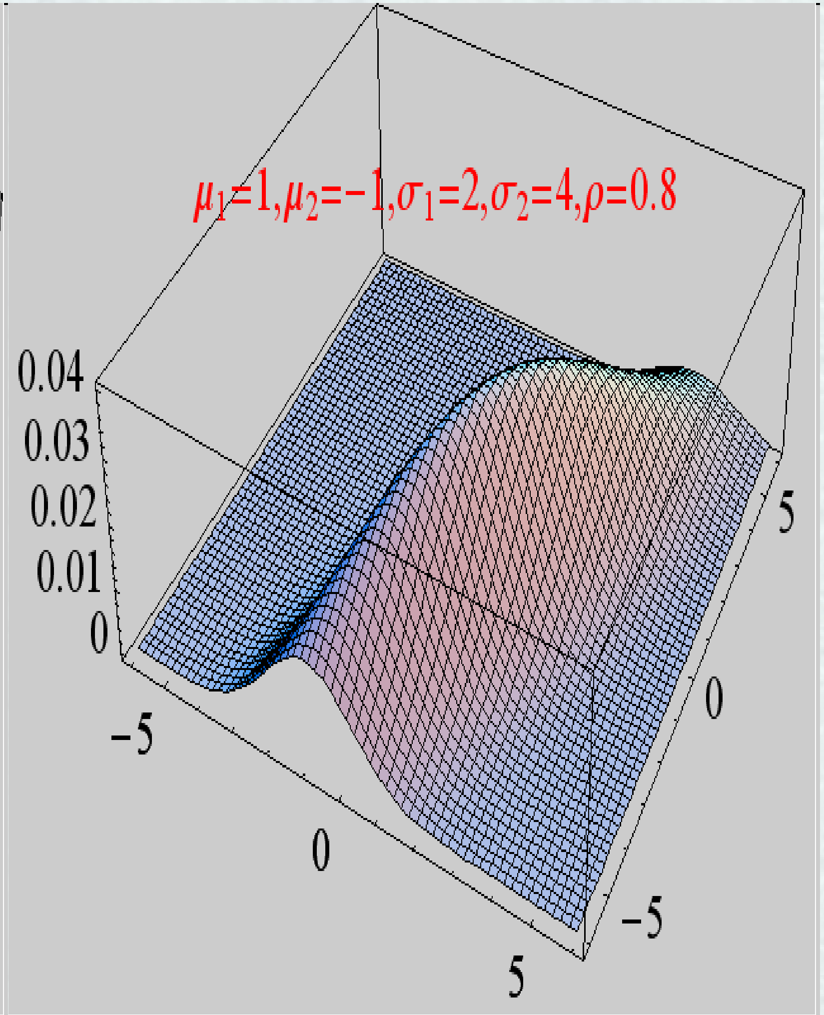
其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$均为常数,且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1.$

则称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布.记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

二维正态分布的图形


$\mu_1=\mu_2=0,\sigma_1=\sigma_2=1,\rho=0$
0.15
0.1
0.05
0
−2
0
2
2
0
−2


$\mu_1=1,\mu_2=-1,\sigma_1=2,\sigma_2=4,\rho=0.8$
0.04
0.03
0.02
0.01
0
−5
0
5
5
0
−5

推广　n 维随机变量的概念

定义　设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X_1=X_1(e), X_2=X_2(e), \cdots, X_n=X_n(e)$，是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个 n 维向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 叫做 n 维随机向量或 n 维随机变量.

对于任意 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)=P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

称为随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布函数.

五、小结

1. 二维随机变量的分布函数

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}.$$

2. 二维离散型随机变量的分布律及分布函数

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots;$$

$$F(x,y)=\sum_{\substack{x_i\le x\\ y_j\le y}}p_{ij}.$$

3. 二维连续型随机变量的概率密度

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$