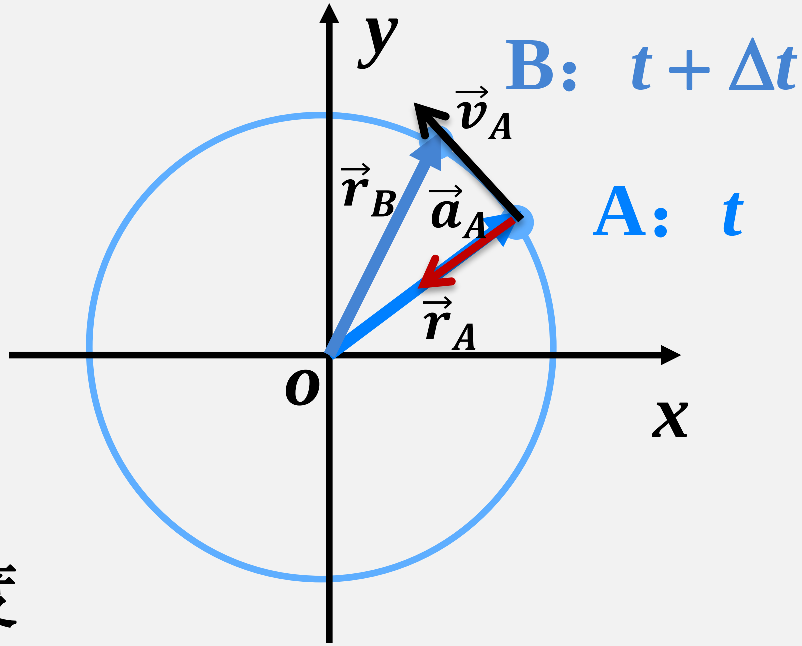
1.5 圆周运动的角量表示
角量与线量的关系

圆周运动的描述

设质点在oxy平面内绕o点、沿半径为R的轨道作圆周运动，如图。



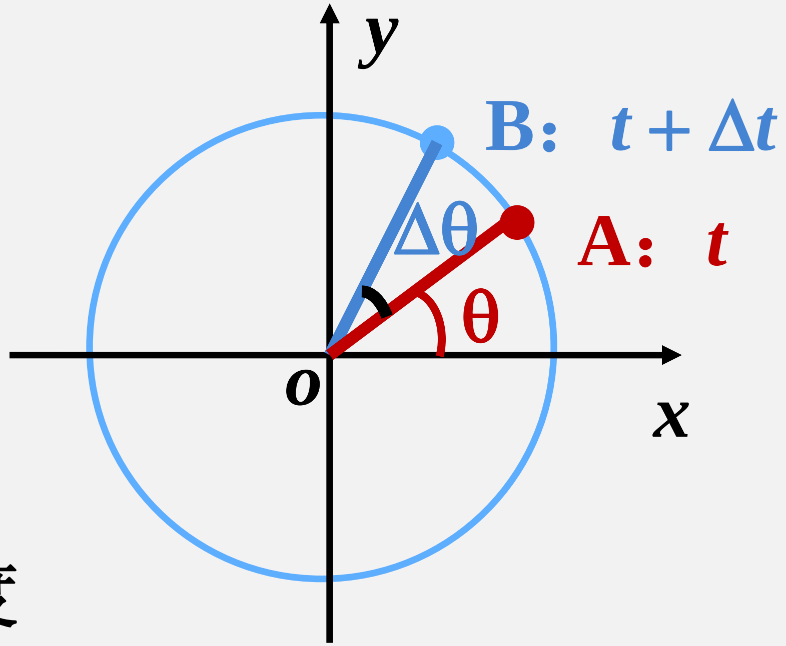
线量描述: 位矢、速度、加速度

角量描述：角度、角速度、角加速度

位矢 $\vec{r}_A$ $\vec{r}_B$ 速度 $\vec{v}_A$ $\vec{v}_B$ 加速度 $\vec{a}_A$ $\vec{a}_B$

圆周运动的描述

设 质 点 在 oxy 平 面 内 绕 o 点、沿半径为 R 的轨道作圆周运动，如图。



线量描述: 位矢、速度、加速度

角量描述:角度、角速度、角加速度

角位置　　θ　　单位:弧度（rad）

角位移　　$\Delta\,\theta$　　（规定逆时针为正）

平均角速度为　$\overline{\omega}=\Delta\theta/\Delta t$　单位：弧度/秒(rad·s^{-1})

角速度 $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 单位：弧度/秒(rad·s^{-1})

角加速度 $\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

单位：弧度/平方秒(rad·s^{-2})

角加速度α对运动的影响：

α=0	质点作匀速圆周运动
α=C （C≠0）	质点作匀变速圆周运动
α=f(t)	质点作一般的圆周运动

匀速或匀变速圆周运动时的角位移、角速度与角加速度

匀变速直线运动的位移、速度、加速度

$$\left.\begin{aligned} &\theta-\theta_0=\omega_0 t+\alpha t^2/2 \\ &\omega=\omega_0+\alpha t \\ &\omega^2=\omega_0^2+2\alpha(\theta-\theta_0) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &x-x_0=v_0 t+a t^2/2 \\ &v=v_0+a t \\ &v^2=v_0^2+2a(x-x_0) \end{aligned}\right\}$$

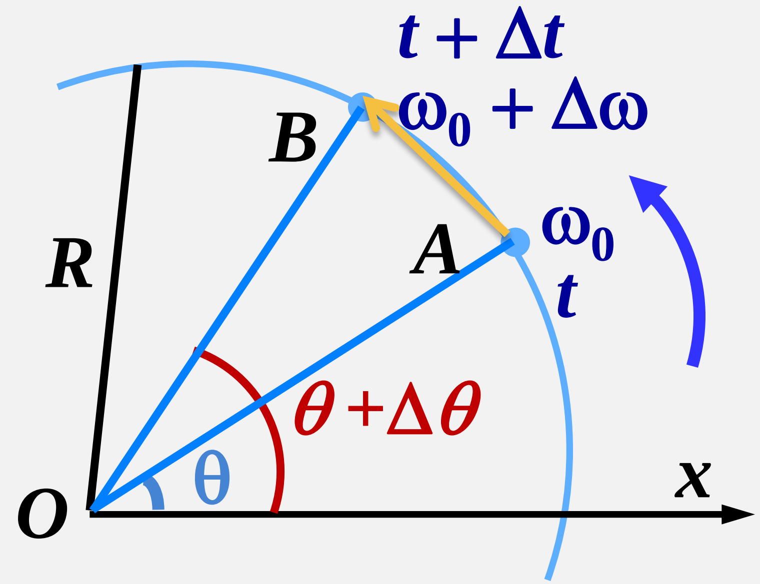
比较：两者数学形式相同，说明用角量描述，可把平面圆周运动转化为一维直线运动形式。

线量与角量之间的关系

圆周运动既可以用速度、加速度描述，也可以用角速度、角加速度描述，二者应有一定的对应关系。

如图，一质点作圆周运动：

在Δt 时间内，质点的角位移为$\Delta\theta$，则A、B间的有向线段与弧将满足下面的关系



$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\overrightarrow{AB}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\overset{\frown}{AB}\right|$$

两边同除以Δt，得到速度大小（速率）与角速度之间的关系：

$$v = R\omega$$

上式两端对时间求导，得到切向加速度与角加速度之间的关系：

$$a_\tau = R\alpha$$

将速度与角速度的关系代入法向加速度的定义式，得到法向加速度与角速度之间的关系：

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

自然坐标系下

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}}$$

法向加速度也叫向心加速度。

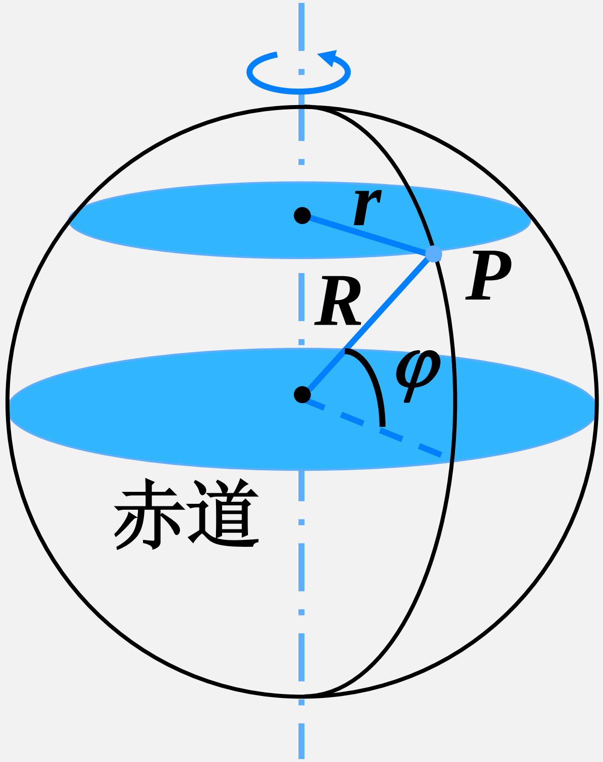
例题：计算地球自转时地面上各点的速度和加速度。

解：自转周期$T = 24×60×60$ s，角速度大小为：

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24\times60\times60} = 7.27\times10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$$

如图，地面上纬度为φ 的P点，在与赤道平行的平面内作圆周运动，其轨道半径为

$$r = R\cos\varphi$$



P点速度的大小为

$$v=\omega r=\omega R\cos\varphi$$

$$=7.27\times10^{-5}\times6.73\times10^{6}\times\cos\varphi$$

$$=4.65\times10^{2}\cos\varphi\quad(\mathrm{m/s})$$

速度方向与过***P***点运动平面上半径为***R***的圆相切。

P点只有运动平面上的向心加速度，其大小为

$$a_n=\omega^2 r=\omega^2 R\cos\varphi$$

$$=(7.27\times10^{-5})^2\times6.73\times10^{6}\times\cos\varphi$$

$$=3.37\times10^{-2}\cos\varphi\quad(\mathrm{m/s^2})$$

P点加速度的方向在运动平面上由***P***指向地轴。

例如：已知北京、上海和广州三地的纬度分别是北纬39°57′、31°12′和 23°00′，则三地的$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a_n}$分别为：

北京：$v = 356 \ (\mathrm{m/s}), \quad a_n = 2.58 \times 10^{-2} \ (\mathrm{m/s^2})$

上海：$v = 398 \ (\mathrm{m/s}), \quad a_n = 2.89 \times 10^{-2} \ (\mathrm{m/s^2})$

广州：$v = 428 \ (\mathrm{m/s}), \quad a_n = 3.10 \times 10^{-2} \ (\mathrm{m/s^2})$

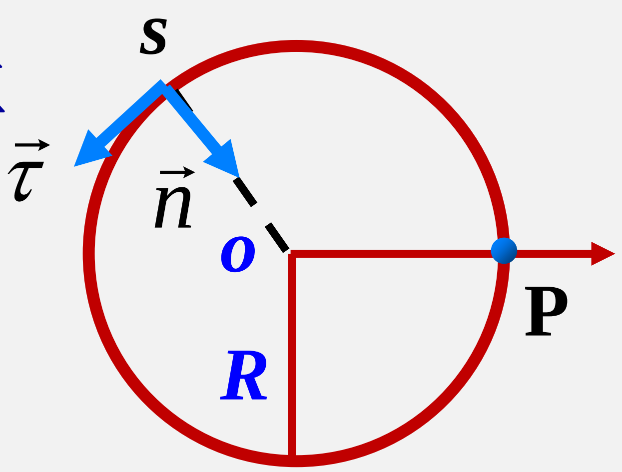
例题：一质点沿半径为R的圆按规律 $s = v_0 t - bt^2/2$ 运动，v_0、b都是正的常量。求：

(1) t时刻质点的总加速度的大小；

(2) t为何值时，总加速度的大小为b；

(3)总加速度大小为b时，质点沿圆周运行了多少圈。

解：先作图如右，$t = 0$ 时，质点位于$s = 0$ 的P点处。

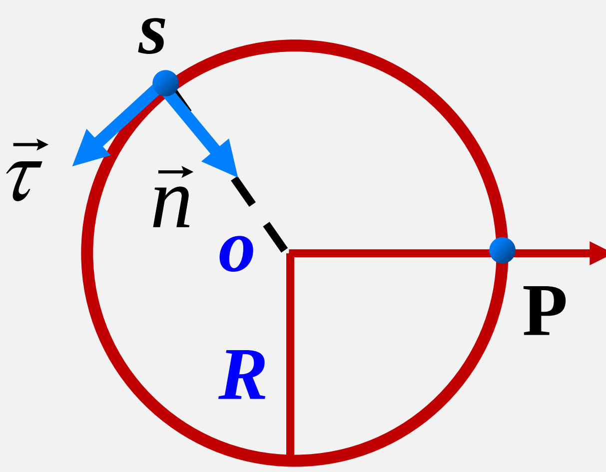


在t 时刻，质点运动到位置 s 处。

质点速率为

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 - bt$$

(1) *t*时刻切向加速度、法向加速度及加速度大小:



$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -b$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \frac{\sqrt{(v_0 - bt)^4 + (bR)^2}}{R}$$

(2) 令*a* = *b*，即

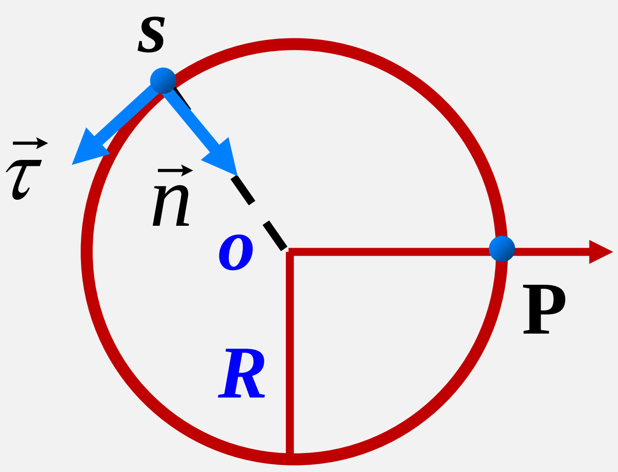
$$a = \frac{\sqrt{(v_0 - bt)^4 + (bR)^2}}{R} = b$$

解得

$$t = v_0 / b$$

(3) 当 $a=b$ 时，$t=v_0/b$ ，由此可求得质点历经的弧长为

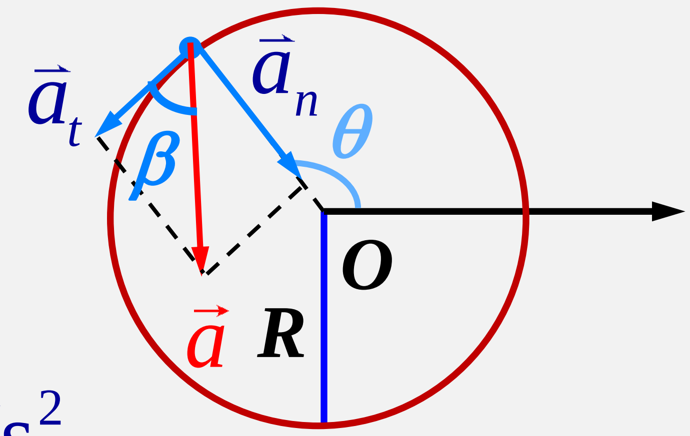
$$s=v_0t-bt^2/2=v_0^2/(2b)$$



它与圆周长之比即为圈数：

$$n=\frac{s}{2\pi R}=\frac{v_0^2}{4\pi Rb}$$

例题：一质点沿半径0.1米的圆周运动。其角位置满足：$\theta(\mathrm{rad}) = 2 + 4t^3$。$t$的单位为s。问：$t = 2$s时质点的法向和切向加速度是多少？质点加速度是多少？



解：角速度：$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 12t^2$

角加速度：$\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = 24t$

法向加速度：$a_n = R\omega^2 = 230.4\mathrm{m/s^2}$

切向加速度：$a_t = R\alpha = 4.8\mathrm{m/s^2}$

加速度大小：$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = 230.45\mathrm{m/s^2}$

加速度方向：$\tan\beta = a_n / a_t$

例题： 光盘音轨区域内半径$R_1 = 2.2$ cm，外半径$R_2 = 5.6$ cm。径向音轨密度$N = 650$ 条/mm，激光束相对光盘以$v = 1.3$ m/s的恒定线速度运动。（1）播放时间？（2）$r = 5.0$ cm处的角速度和角加速度。

解： 径向位移dr，则近似的相当于走了Ndr个圆周。

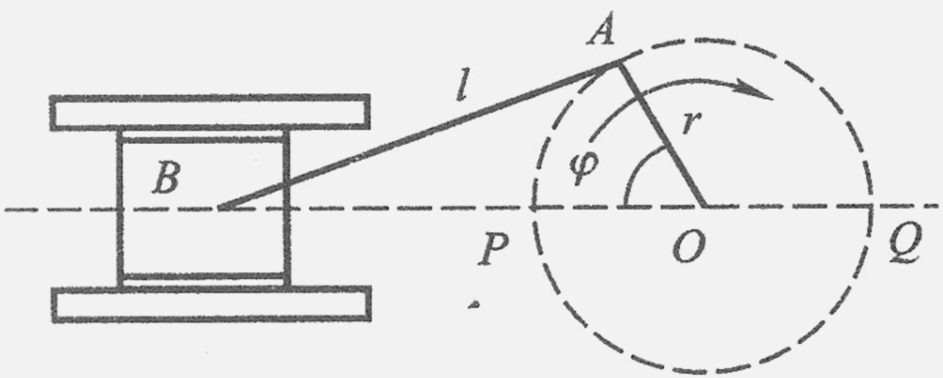
$$t = \int_0^T dt = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\pi r N dr}{v} = \frac{\pi N}{v}\left(R_2^2 - R_1^2\right) = 69.4\text{min}$$

近似看成圆周运动：

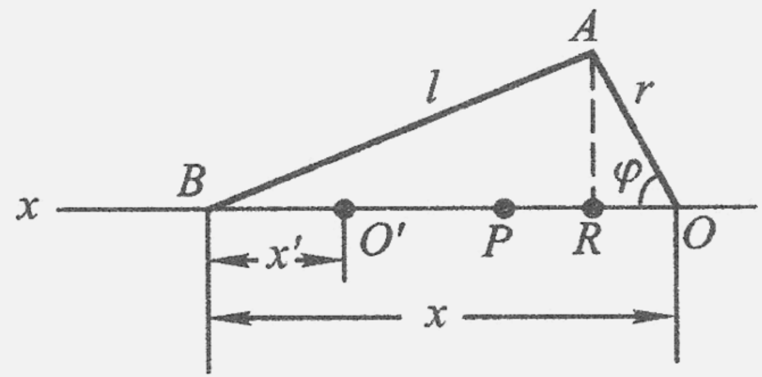
$$\omega \approx \frac{v}{r} = 26\text{rad/s}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{v}{r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{v}{r^2}\frac{v}{2\pi r N} = -3.31\times 10^{-3}\text{rad/s}^2$$

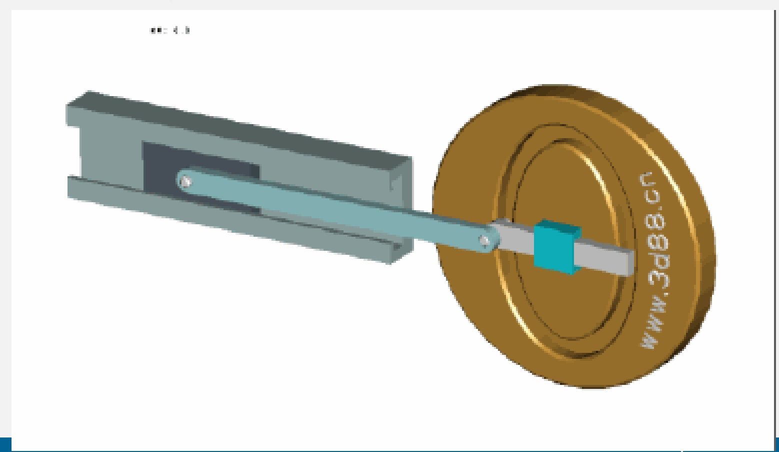
例题：如图*a*所示为一曲柄连杆机构，曲柄*OA*长为*r*，连杆*AB*长为*l*，*AB*的一段用销子在*A*处与曲柄*OA*相连，另一端以销子在*B*处与活塞相连。当曲柄以匀角速ω绕轴*O*旋转时，通过连杆将带动*B*处活塞在汽缸内往复运动，试求活塞的运动学方程。



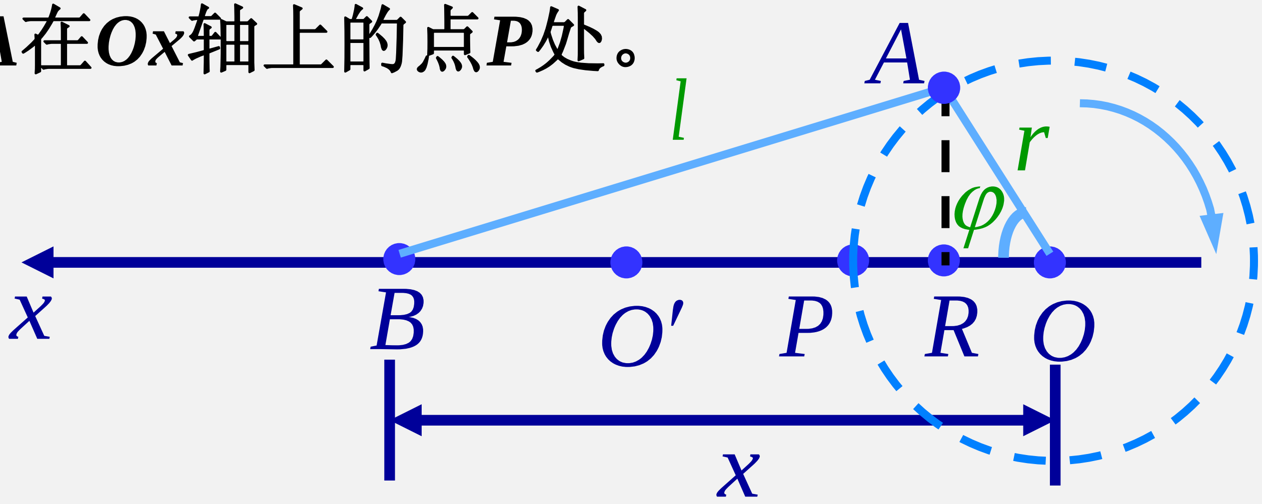
(a)



(b)



解：取O为原点，Ox轴水平向左，如图b所示；并设开始时，曲柄A在Ox轴上的点P处。



曲柄以匀角速ω转动时，在t时刻曲柄转角为$\varphi = \omega t$，这时B处活塞的位置为$x = OR + RB$，即

$$x = r\cos\omega t + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}$$

这就是活塞的运动学方程。

$$x = r\cos\omega t + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}$$

我们把上式右端第二项按二项式定理展开为级数：

$$\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t} = l\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\omega t + \cdots\right]$$

$$x \approx 0,\ (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \cdots$$

$$\alpha = \frac{1}{2},\ x = -\frac{r^2\sin^2\omega t}{l^2}$$

一般**r/l < 1/3.5**，因此高阶小量可以略去，于是活塞的运动学方程

$$x = r\cos\omega t + l\left[1 - \frac{1}{2}(r/l)^2\sin^2\omega t\right]$$

x比较小时，在0点的Tayor展开公式：

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha}{2!}(\alpha-1)x^{2}+\cdots$$

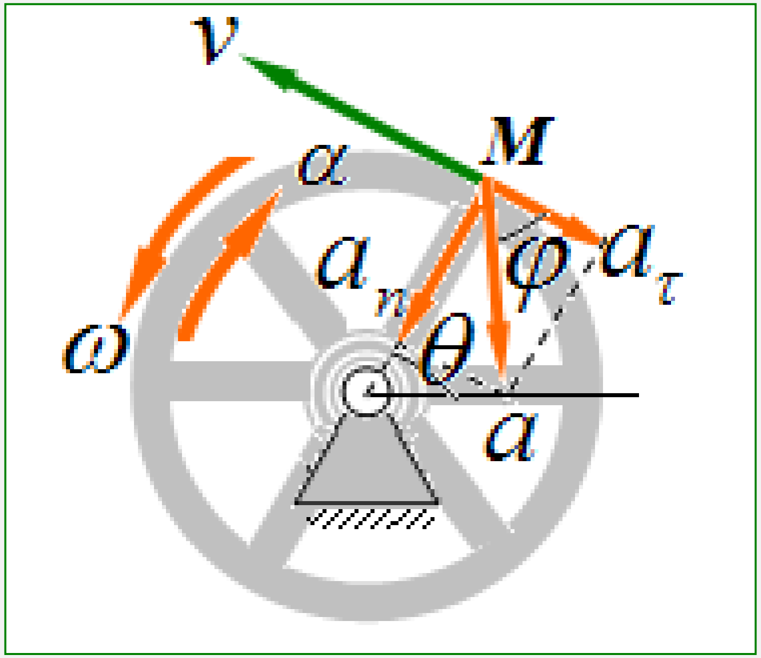
数学公式应用到物理中，按实际问题中的小量展开

$$\sqrt{l^{2}-r^{2}\sin^{2}\omega t}=l\left[1-\left(\frac{r}{l}\right)^{2}\sin^{2}\omega t\right]^{1/2}$$

$$x=-\left(\frac{r}{l}\right)^{2}\sin^{2}\omega t,\quad \alpha=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\sqrt{l^{2}-r^{2}\sin^{2}\omega t}=l[1-\frac{1}{2}(\frac{r}{l})^{2}\sin^{2}\omega t+\cdots]$$

例题(1.9)：半径为$r = 0.2\text{m}$，可绕O轴转动，如图所示。已知轮缘上任一点 M 的运动方程为$\theta = -t^2 + 4t$，求 $t = 1\text{s}$ 时 M 点的速度和加速度。



解：飞轮运动时，M点将作半径为r 的圆周运动，其角速度、角加速度分别为

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = -2t + 4\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

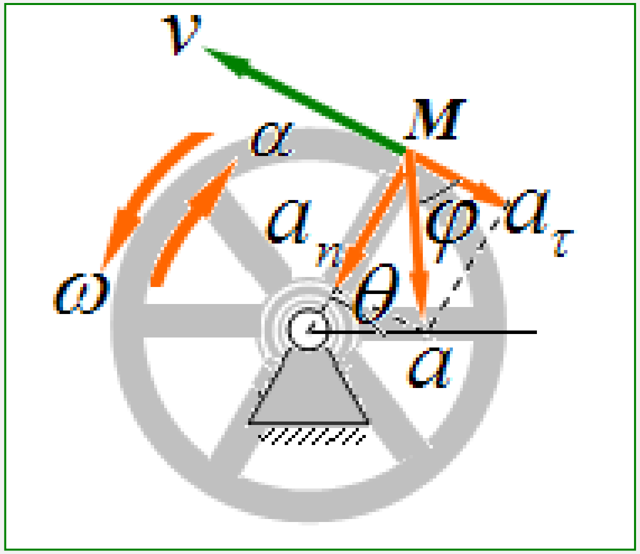
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -2\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

t **=1s** 时，***M***点的速度大小为

$$v = r\omega = 0.2\times(-2\times1+4)$$

$$= 0.4\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

方向沿***M***点的切线方向，如图所示。



M点的切向加速度和法向加速度为

$$a_\tau = r\alpha = -0.4\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{2}$$

$$a_n = r\omega^2 = 0.8\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

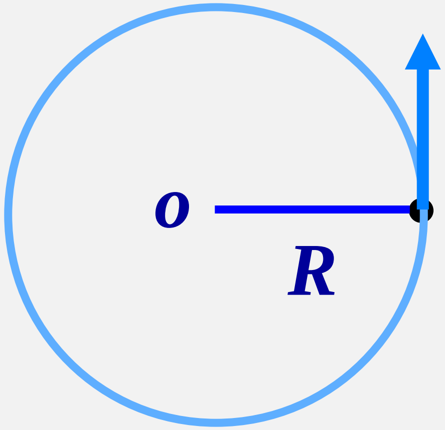
加速度的大小和方向

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 0.89\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

$$\tan\varphi = \left|\frac{a_n}{a_\tau}\right| = 2,\ \ \varphi = 63.4^\circ$$

思考题

1. 质点作匀变速圆周运动，则



切向加速度的大小和方向都在变化 ✗

法向加速度的大小和方向都在变化 ✓

切向加速度的方向变化，大小不变 ✓

切向加速度的方向不变，大小变化 ✗

$$a_t = R\alpha$$ 方向：切向（不断变化）

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$ 方向：法向（不断变化）

2. 判断下列说法的正、误：

a. 加速度恒定不变时，物体的运动方向必定不变。 ×

b. 平均速率等于平均速度的大小。 ×

平均速率 $\bar{v} = \Delta s / \Delta t$

平均速度大小 $\left|\bar{\vec{v}}\right| = \left|\Delta \vec{r} / \Delta t\right|$

c. 不论加速度如何，平均速率的表达式总可写成 $\bar{v} = (v_1 + v_2)/2$，其中 v_1是初速度， v_2是末速度。 ×

d. 运动物体的速率不变时，速度可以变化。 √

只要切向加速度为0，法向加速度不为0，则速度方向改变，而速率不变。

小结：

角量表示圆周运动

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

圆周运动（角量线量关系）

$$v = R\omega$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

自然坐标系下

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e}_\tau$$

$$\vec{a} = a_\tau \vec{e}_\tau + a_n \vec{e}_n$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

作业：第一章: 1.6 1.7

THANKS

FOR YOUR ATTENTION