网盘作业：第10章 3，4，5

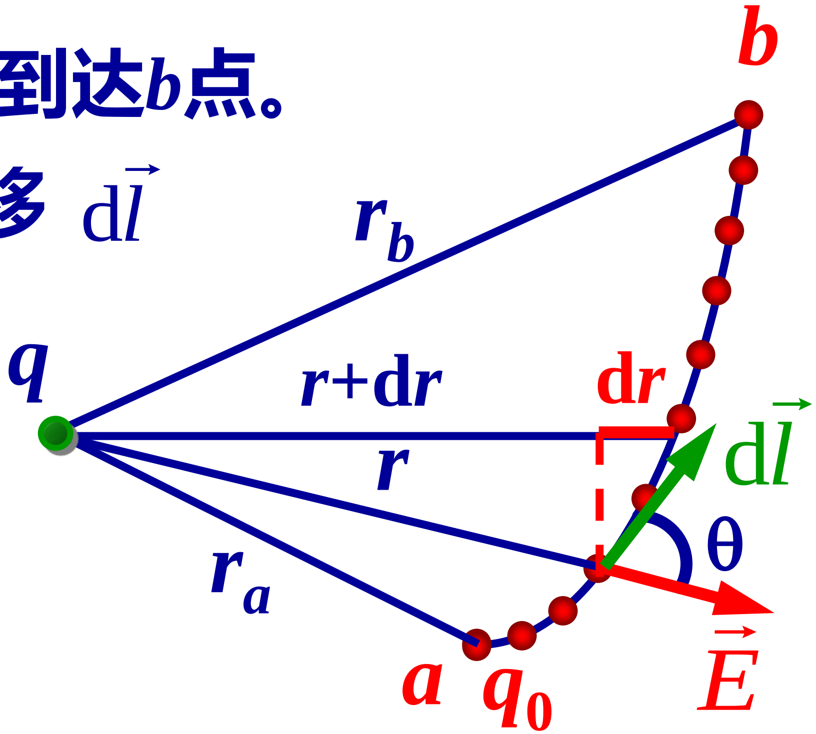
§10-4 静电场的环路定理 电势能

1. 静电场力的功 静电场的环路定理

1.1 点电荷电场中

试验电荷q_0从a点经任意路径到达b点。

在路径上任一点附近取元位移 $\mathrm{d}\vec{l}$



$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$= q_0 E\cdot\mathrm{d}l\cdot\cos\theta$$

$$= q_0 E\cdot\mathrm{d}r$$

$$A = \int \mathrm{d}A = q_0\int_a^b \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

试验电荷q_0从a点经任意路径到达b点

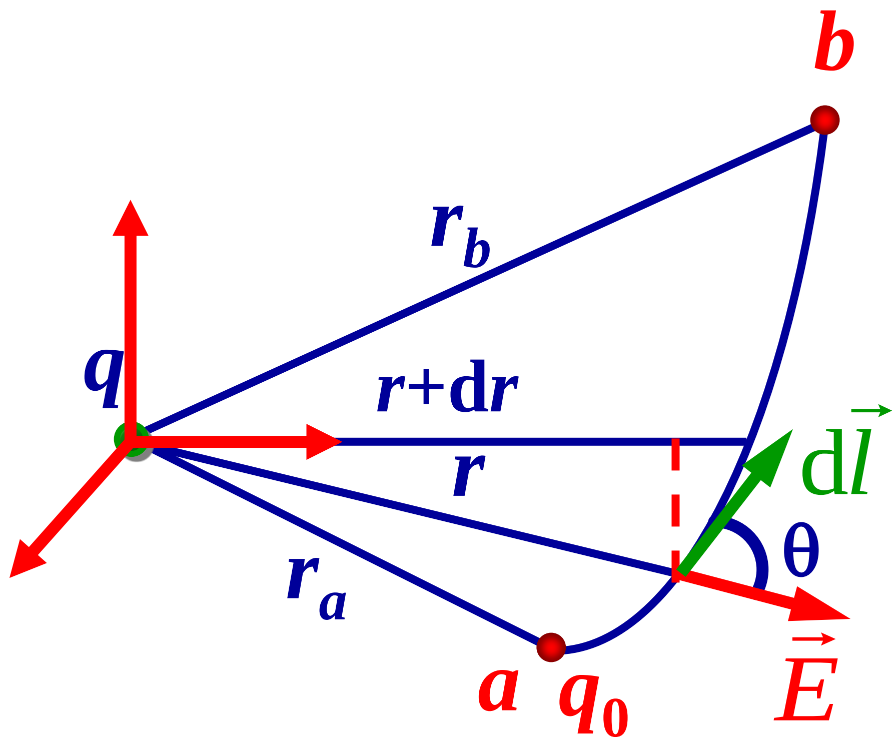
$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = q_0 E\cdot \mathrm{d}l\cdot\cos\theta = q_0 E\cdot\mathrm{d}r$$

$$A = \int \mathrm{d}A = q_0\int_a^b \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$= q_0\int_a^b \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$= q_0\int_{r_a}^{r_b}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$



1.2 任意带电体系的电场中

将带电体系分割为许多电荷元，根据电场的叠加性

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n$$

电场力对试验电荷q_0做功为

$$A = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= q_0 \int_a^b \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + q_0 \int_a^b \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cdots + q_0 \int_a^b \vec{E}_n \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

总功也与路径无关。

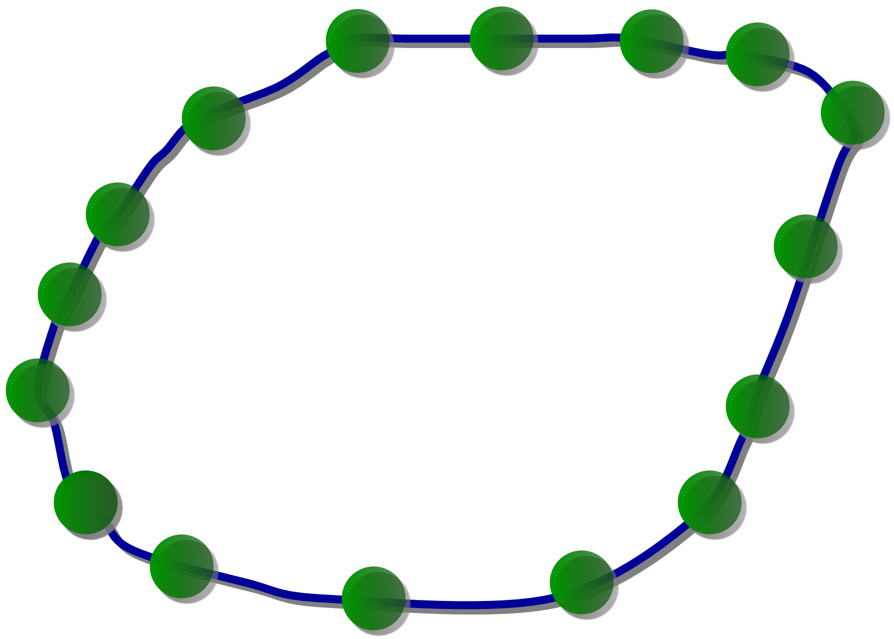
结论：

试验电荷在任意给定的静电场中移动时，电场力对q_0做的功仅与试验电荷的电量及路径的起点和终点位置有关，而与具体路径无关。

静电场是保守场，静电场力是保守力。

1.3 静电场的环路定理

试验电荷q_0在静电场中沿任意闭合路径L运动一周时，电场力对q_0做的功$A=?$

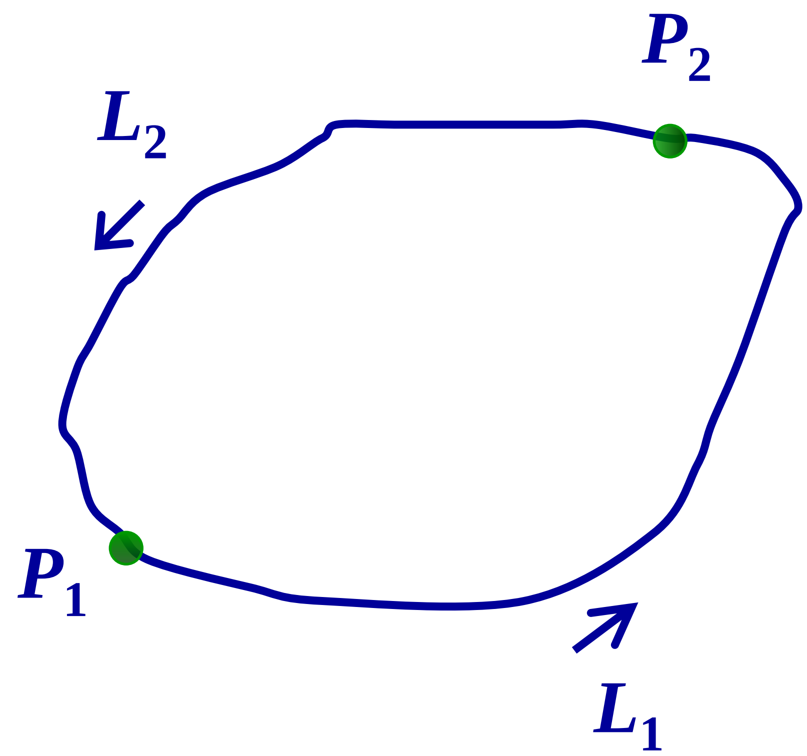


在闭合路径L上任取两点P_1、P_2，将L分成L_1、L_2两段，

$$A=\oint_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = q_0\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= q_0\underset{(L_1)}{\int_{p_1}^{p_2}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + q_0\underset{(L_2)}{\int_{p_2}^{p_1}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= q_0\left(\underset{(L_1)}{\int_{p_1}^{p_2}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \underset{(L_2)}{\int_{p_2}^{p_1}} \vec{E}\cdot d\vec{l}\right)$$



电场力做功与路径无关，故

$$A=q_0\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0 \qquad \text{即} \qquad \oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

静电场的环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

在静电场中，场强沿任意闭合路径的线积分（称为场强的环流）恒为零。

2. 电势能

由环路定理知，静电场是保守场。

保守场必有相应的势能，对静电场则为电势能。

静电力的功，等于静电势能的减少。

$$A_{AB} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\Delta W = W_A - W_B$$

选B为静电势能零点，用“0”表示，则

$$W_A = q_0 \int_A^0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

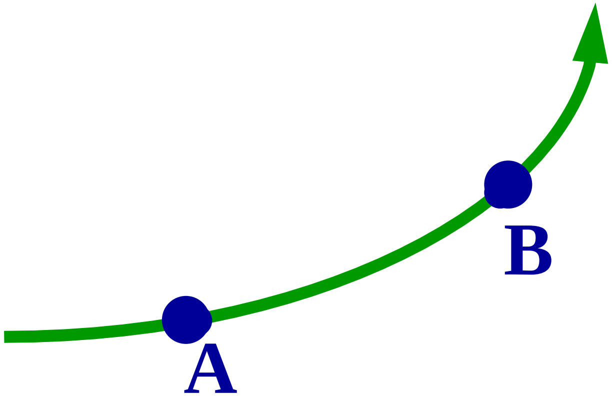
§10-5 电势 电势差

1. 电势 电势差

某点电势能W_A与q_0之比只取决于电场，定义为该点的**电势**

$$u_A = \frac{W_A}{q_0} = \int_A^0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电势零点的选取是任意的。



已知某点a电势，则点电荷q在该点的电势能为qu_a

电势差

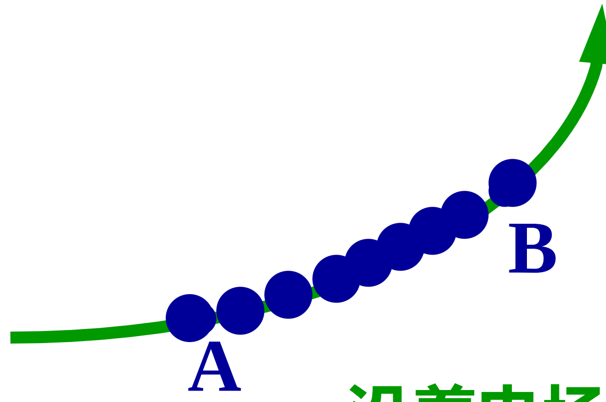
电场中两点电势之差

电势差

$$u_A = \frac{W_A}{q_0} = \int_A^0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$u_B = \frac{W_B}{q_0} = \int_B^0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$u_{AB} = \frac{W_A}{q_0} - \frac{W_B}{q_0} = \frac{A_{ab}}{q_0} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



沿着电场线方向，电势降低。

电场中两点电势之差，在量值上等于把单位正电荷从a移动到b点时，静电力所做的功

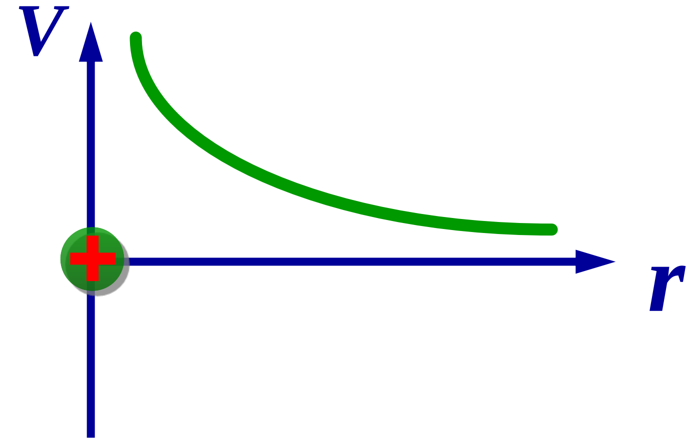
2. 电势叠加原理

在电荷体系的电场中，某点电势等于各电荷单独在该点产生的电势的代数和

$$u=\sum_{i}u_i$$

注意：各电荷的电势零点必须相同。

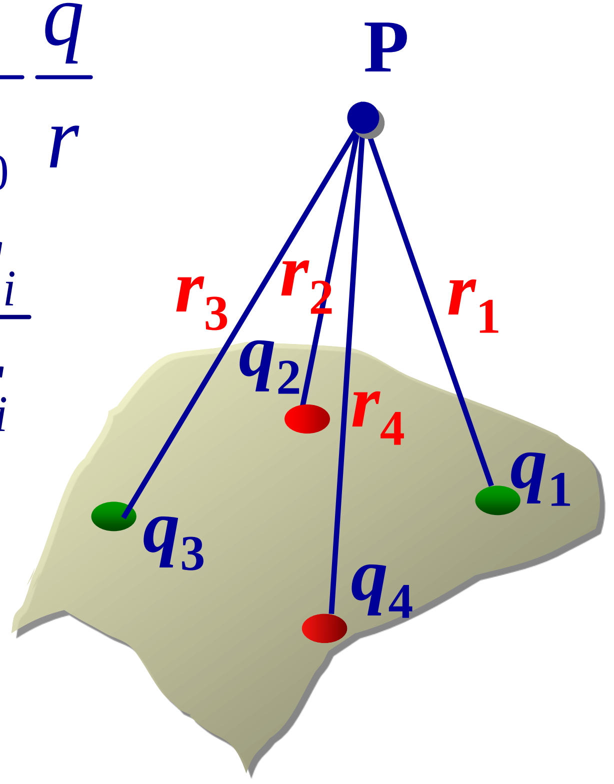
3. 电势的计算



(1) 点电荷的电势

点电荷的电场 $\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^3}\vec{r}$

$$u=\int_r^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_r^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$



(2) 点电荷系的电势 $u=\sum_i \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_i}{r_i}$

(3) 连续分布带电体的电势

$$u=\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r}$$

电势的计算方法

求电势的方法

- **利用** $u_P = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

（利用了点电荷电势 $u = q / 4\pi\varepsilon_0 r$ 这一结果已选无限远处为电势零点。前提条件是有限大带电体）

- **若已知在积分路径上 $\vec{E}$ 的函数表达式，**

则： $u_A = \int_A^{"0"} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

电势的计算例题

均匀带电薄圆盘轴线上的电势

均匀带电球面的电势

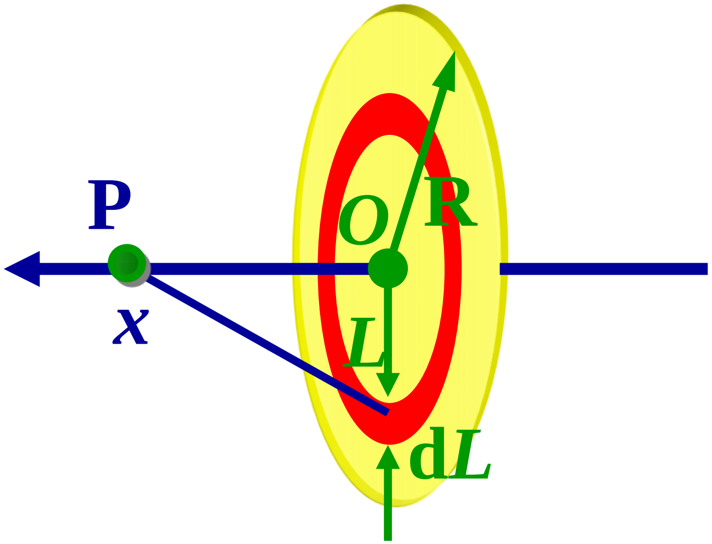
电偶极子的电势

均匀带电线的电势

例：半径为R的均匀带电薄圆盘轴线上的电势分布。

解：以O为圆心，取半径为$L \to L + \mathrm{d}L$的薄圆环，带电$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S = \sigma \cdot 2\pi L \cdot \mathrm{d}L$

到P点距离 $r = \sqrt{x^2 + L^2}$



P点电势:

$$u = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}q}{r}$$

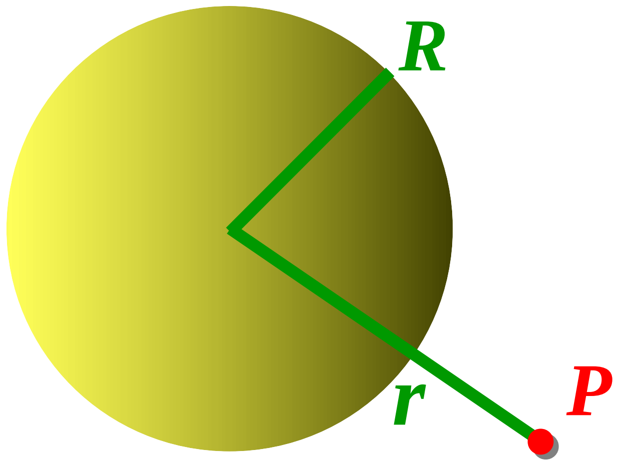
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2\pi\sigma \int_0^R \frac{L\mathrm{d}L}{\sqrt{x^2 + L^2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2 + x^2} - x)$$

例：　求一均匀带电球面的电势分布，总电量为q。

解：由高斯定理知，电场分布为

$$E=\begin{cases}0 & r<R\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q}{r^2} & r>R\end{cases}$$



1.当$r<R$时

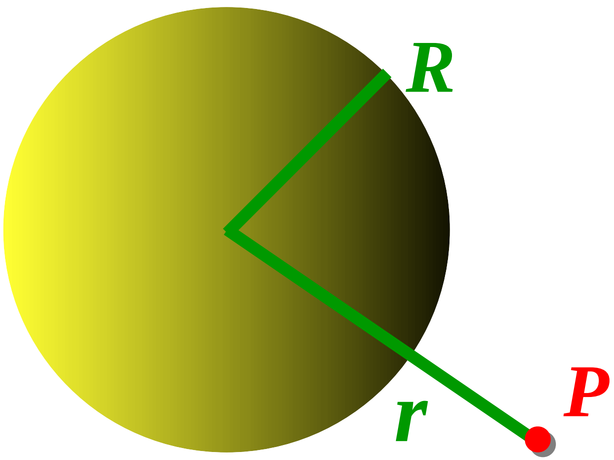
$$u=\int_r^\infty \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_r^R E\cdot\mathrm{d}r+\int_R^\infty E\cdot\mathrm{d}r$$

$$=\int_R^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

$$E=\begin{cases}0 & r<R\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q}{r^2} & r>R\end{cases}$$

2.当$r>R$时

$$u=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

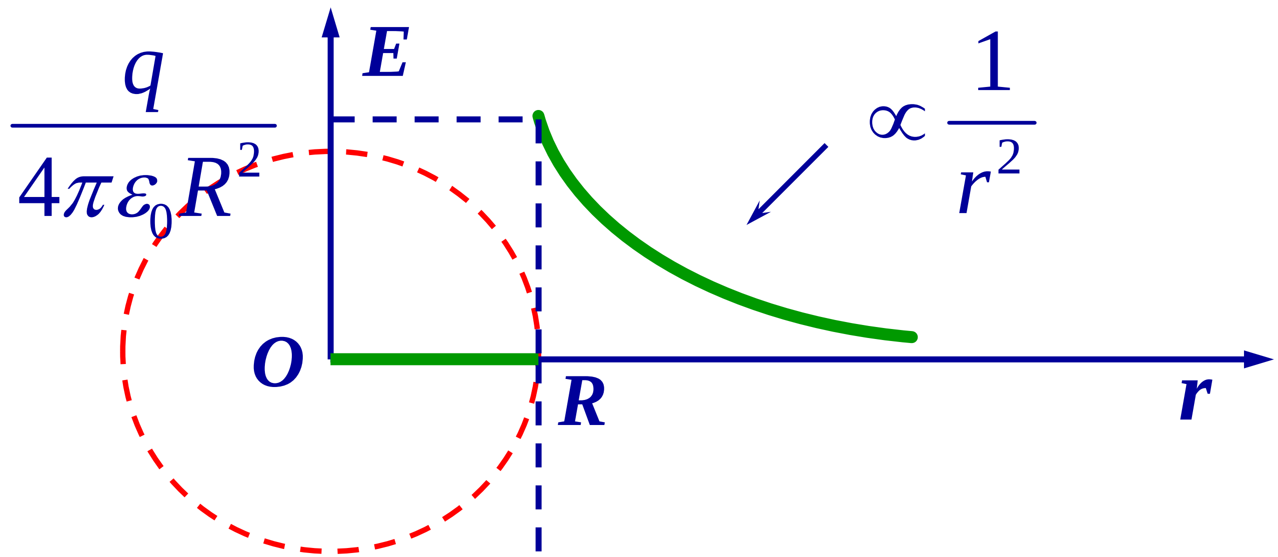


3.电势分布

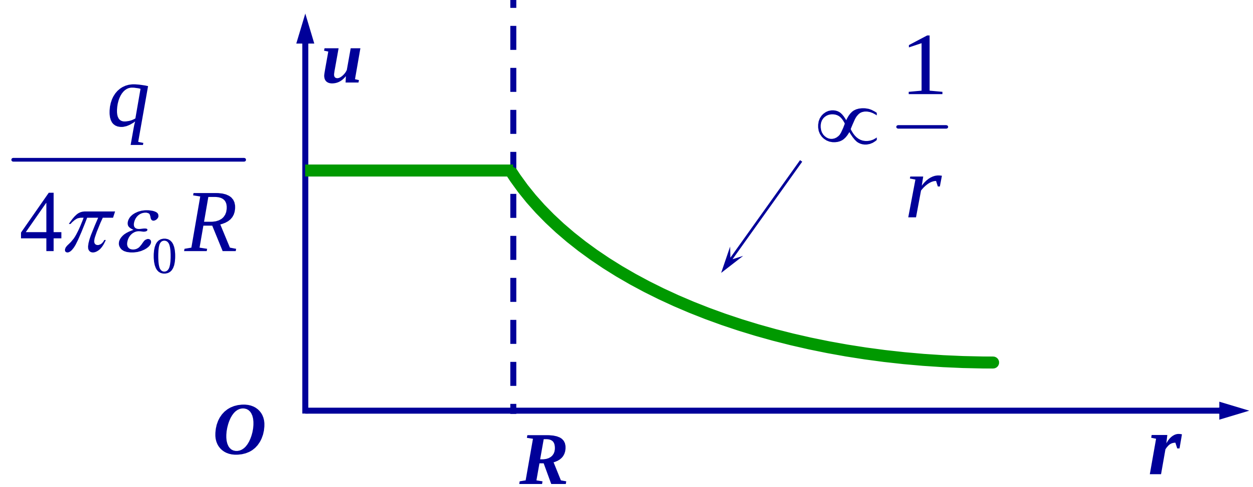
$$u=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R} & r<R\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q}{r} & r>R\end{cases}$$

结论：均匀带电球面，球内的电势等于球表面的电势，球外的电势等效于将电荷集中于球心的点电荷的电势。

场强分布曲线



电势分布曲线



例: 两个半径分别为R_1， R_2的球面同心放置, 所带电量为Q_1和Q_2, 皆为均匀分布。求电势分布。

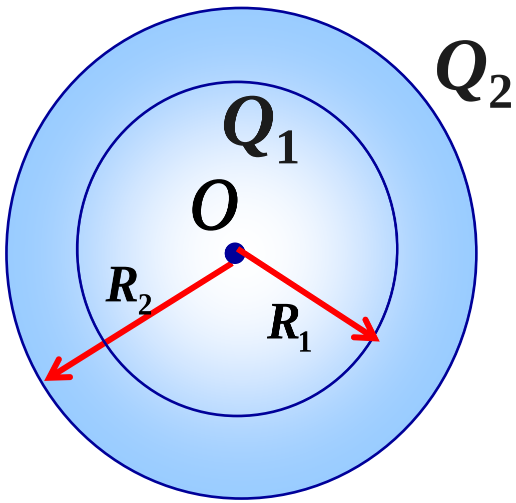
解:

$$u_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \quad (r \le R_1)$$

$$u_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (r > R_1)$$

$$u_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \quad (r \le R_2)$$

$$u_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (r > R_2)$$



$$u_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \quad (r \le R_1)$$

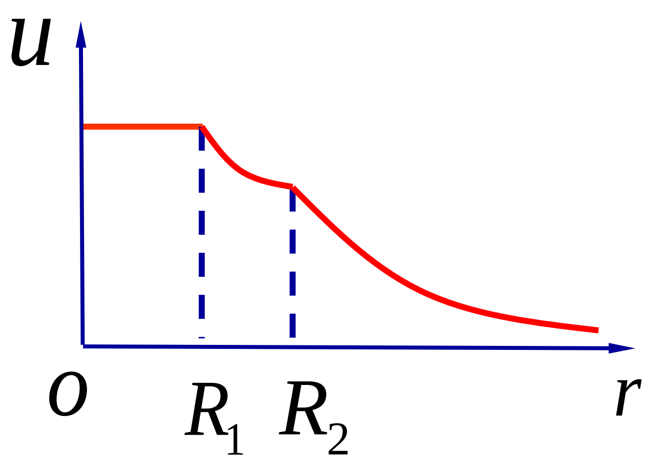
$$u_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (r > R_1)$$

$$u_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \quad (r \le R_2)$$

$$u_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (r > R_2)$$

$$u = u_1 + u_2$$

$$= \begin{cases} \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & r \le R_1 \\[2ex] \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & R_1 \le r \le R_2 \\[2ex] \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} & r > R_2 \end{cases}$$

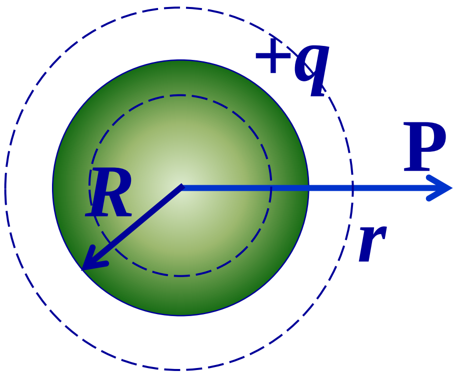


电势分布

例: 均匀带电球体的电势。

已知电荷 q 均匀地分布在半径为 R 的球体上，求空间各点的电势。

解：由高斯定理可求出电场强度的分布



$$E=\begin{cases}\dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & r\le R\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R\end{cases}$$

仍取无穷远为零参考点，并且沿径向进行积分

当$r\le R$时
$$u=\int_r^R \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}dr+\int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q(R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

当$r>R$时
$$u=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

例： 计算电偶极子电场中任一点的电势。

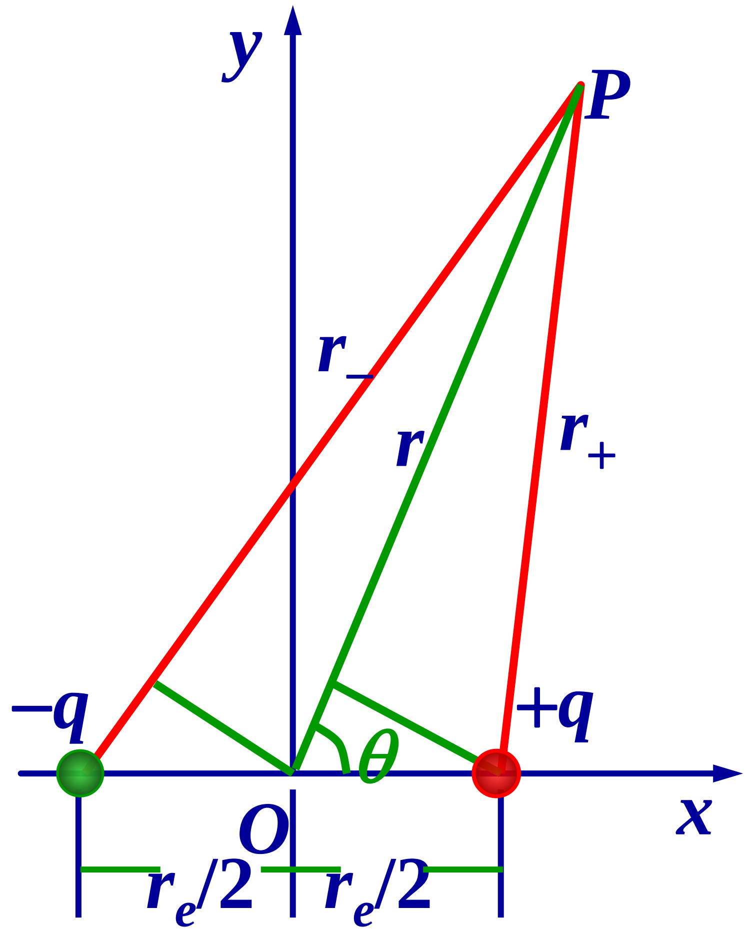
解：设电偶极子如图放置，电偶极子的电场中任一点 P 的电势为

$$u_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$$

式中r_+与r_-分别为$+q$和$-q$到P点的距离，由图可知

$$r_+ \approx r - \frac{r_e}{2}\cos\theta$$

$$r_- \approx r + \frac{r_e}{2}\cos\theta$$

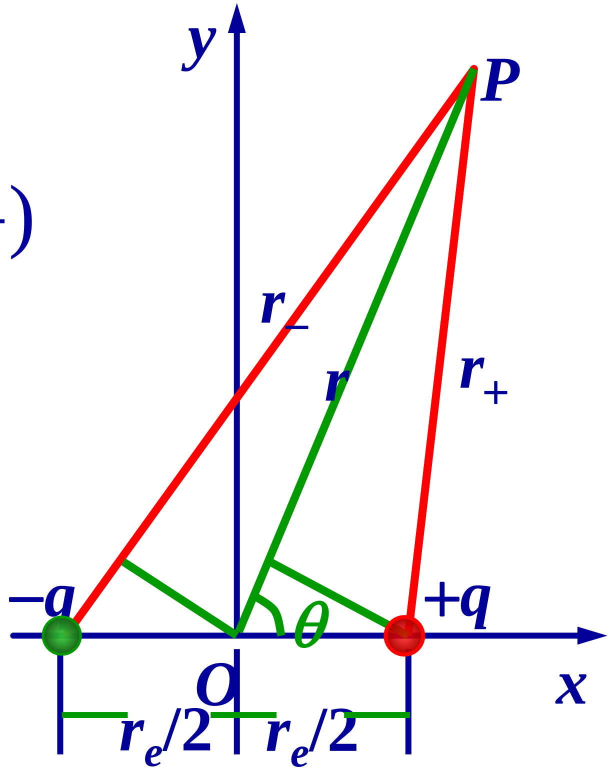


$$r_+ \approx r - \frac{r_e}{2}\cos\theta \qquad r_- \approx r + \frac{r_e}{2}\cos\theta$$

因此

$$u_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r - \frac{r_e}{2}\cos\theta} - \frac{1}{r + \frac{r_e}{2}\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_e\cos\theta}{r^2 - \left(\frac{r_e}{2}\cos\theta\right)^2}$$



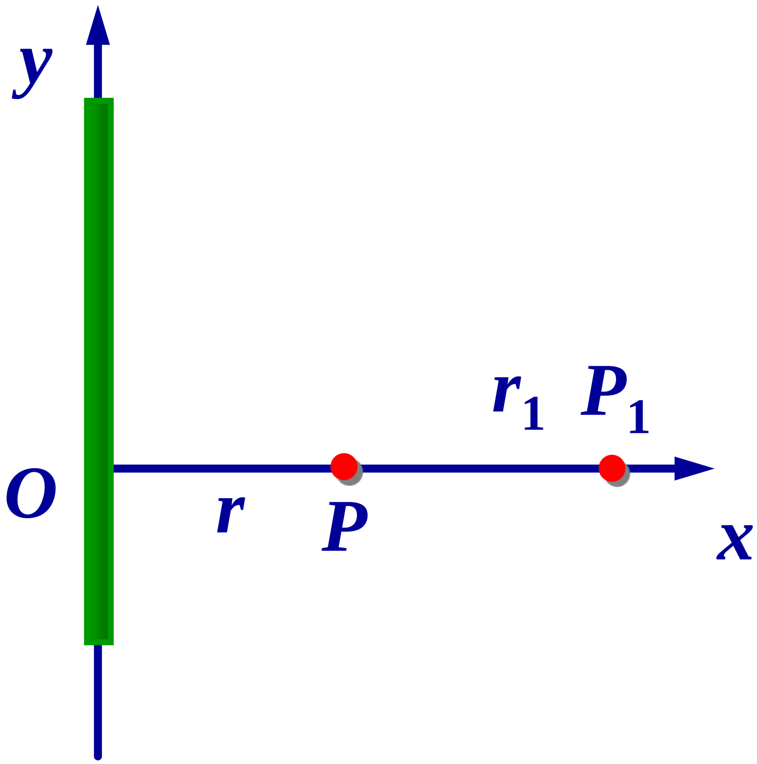
由于$r >> r_e$，所以P点的电势可写为

$$u_P = \frac{q r_e\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{P}_e\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

例： 计算无限长均匀带电直线电场的电势分布。

解：令无限长直线如图放置，其电荷线密度为λ。计算在*x*轴上距直线为的任一点P处的电势。

因为无限长带电直线的电荷分布延伸到无限远的，所以在这种情况下不能用连续分布电荷的电势公式来计算电势u，否则必得出无限大的结果，显然是没有意义的。

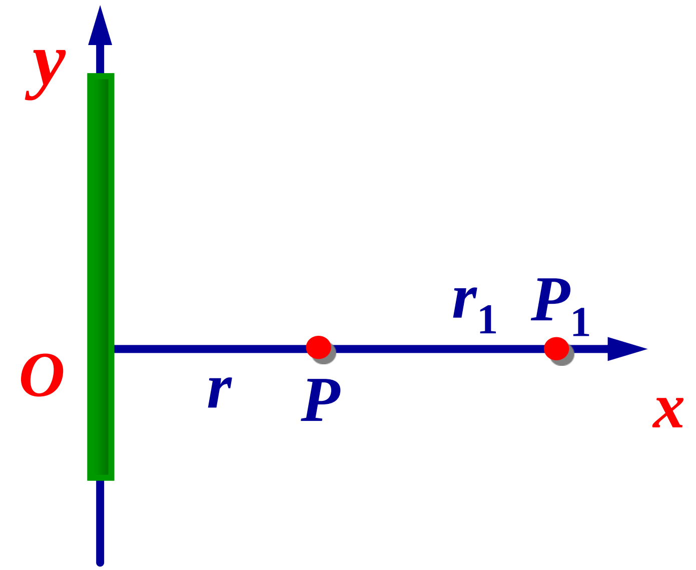


$$u_P = \int_r^{\infty} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\infty - \ln r\right)$$

不合适

为了能求得P点的电势，可先应用电势差和场强的关系式，求出在轴上P点和P_1点的电势差。无限长均匀带电直线在x轴上的场强为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



于是，过P点沿x轴积分可算得P点与参考点P_1的电势差

$$u_P-u_{P_1}=\int_r^{r_1}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_r^{r_1}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r}$$

由于$\ln 1=0$，所以本题中若选离直线为$r_1=1\mathrm{m}$处作为电势零点，则很方便地可得P点的电势为

$$u_P = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\{r\}_m$$

由上式可知，在$r > 1\text{m}$处，u_P为负值；$r < 1\text{m}$处，u_P为正值。这个例题的结果再次表明，在静电场中只有两点的电势差有绝对的意义，而各点的电势值却只有相对的意义。