第五节　条件概率

一、条件概率

二、乘法定理

三、全概率公式与贝叶斯公式

四、小结

一、条件概率

1. 引例 将一枚硬币抛掷两次，观察其出现正反两面的情况，设事件 A 为“至少有一次为正面”，事件 B 为“两次掷出同一面”. 现在来求已知事件 A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率.

分析 设 H 为正面，T 为反面.

$S=\{HH, HT, TH, TT\}$.

$$A=\{HH, HT, TH\},\quad B=\{HH, TT\},\quad P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

事件 A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率，记为

$P(B|A)$，则 $$P(B|A)=\frac{1}{3}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{P(AB)}{P(A)}\neq P(B).$$

2. 定义

设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0$,称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

同理可得 $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

3. 性质

(1) 非负性：$P(B|A) \geq 0;$

(2) 规范性：$P(S|B) = 1, \quad P(\varnothing|B) = 0;$

(3) $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B);$

(4) $P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|B).$

(5) 可列可加性：设 $B_1, B_2, \cdots$ 是两两不相容的事件, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A).$$

二、 乘法定理

设 $P(A)>0$, 则有 $P(AB)=P(B|A)P(A).$

设 A,B,C 为事件,且 $P(AB)>0$, 则有

$$P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A).$$

推广 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,$n\geq 2$,

且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\times P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})\times\cdots\times P(A_2|A_1)P(A_1).$$

例1 一盒子装有4 只产品, 其中有3 只一等品、1只二等品. 从中取产品两次, 每次任取一只, 作不放回抽样. 设事件A为“第一次取到的是一等品”、事件B为“第二次取到的是一等品”. 试求条件概率$P(B|A)$.

解 将产品编号, 1, 2, 3 为一等品; 4 号为二等品.

以 (i, j) 表示第一次、第二次分别取到第 i 号、第 j 号产品, 则试验的样本空间为

$$S=\{(1,2),\quad(1,3),\quad(1,4),\quad(2,1),\quad(2,3),\quad(2,4),\cdots,\quad(4,1),\quad(4,2),\quad(4,3)\},$$

$$A=\{(1,2),\quad (1,3),\quad (1,4),\quad (2,1),\quad (2,3),\quad (2,4),$$
$$(3,1),\quad (3,2),\quad (3,4)\},$$

$$AB=\{(1,2),\quad (1,3),\quad (2,1),\quad (2,3),\quad (3,1),\quad (3,2)\},$$

由条件概率的公式得

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$=\frac{6/12}{9/12}=\frac{2}{3}.$$

例2 某种动物由出生算起活20岁以上的概率为0.8, 活到25岁以上的概率为0.4, 如果现在有一个20岁的这种动物, 问它能活到25岁以上的概率是多少?

解 设 A 表示"能活 20 岁以上"的事件, B 表示"能活 25 岁以上"的事件,

则有 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

因为 $P(A)=0.8,\quad P(B)=0.4,\quad P(AB)=P(B),$

所以 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=\frac{1}{2}.$$

抓阄是否与次序有关?

例3 五个阄, 其中两个阄内写着"有"字, 三个阄内不写字, 五人依次抓取, 问各人抓到"有"字阄的概率是否相同?

解 设 A_i 表示"第 i 人抓到有字阄"的事件,

$i = 1,2,3,4,5.$ 则有 $P(A_1) = \frac{2}{5}$,

$$P(A_2) = P(A_2 S) = P(A_2 \cap (A_1 \cup \overline{A_1}))$$

$$= P(A_1 A_2 \cup \overline{A_1} A_2) = P(A_1 A_2) + P(\overline{A_1} A_2)$$

$$= P(A_1) P(A_2 | A_1) + P(\overline{A_1}) P(A_2 | \overline{A_1})$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{5},$$

$$P(A_3) = P(A_3 S) = P(A_3 (A_1 \overline{A_2} \cup \overline{A_1} A_2 \cup \overline{A_1}\, \overline{A_2}))$$

$$= P(A_1 \overline{A_2} A_3) + P(\overline{A_1} A_2 A_3) + P(\overline{A_1}\, \overline{A_2} A_3)$$

$$= P(A_1)P(\overline{A_2}|A_1)P(A_3|A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}A_2)$$

$$+ P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\ \overline{A_2})$$

$$= \frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{5},$$

依此类推 $P(A_4) = P(A_5) = \dfrac{2}{5}.$

故抓阄与次序无关.

摸球试验

例4 设袋中装有 r 只红球、t 只白球.每次自袋中任取一只球,观察其颜色然后放回,并再放入 a 只与所取出的那只球同色的球,若在袋中连续取球四次,试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率.

解 设 $A_i\ (i=1,2,3,4)$ 为事件"第 i 次取到红球"

则 $\overline{A_3}$、$\overline{A_4}$ 为事件第三、四次取到白球.

因此所求概率为

$$P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4})$$

$$= P(\overline{A_4}\mid A_1A_2\overline{A_3})P(\overline{A_3}\mid A_1A_2)P(A_2\mid A_1)P(A_1)$$

$$= \frac{t+a}{r+t+3a}\cdot\frac{t}{r+t+2a}\cdot\frac{r+a}{r+t+a}\cdot\frac{r}{r+t}.$$

此模型被波利亚用来作为描述传染病的数学模型.

例5 设某光学仪器厂制造的透镜, 第一次落下时打破的概率为1/2,若第一次落下未打破, 第二次落下打破的概率为7/10 , 若前两次落下未打破, 第三次落下打破的概率为9/10.试求透镜落下三次而未打破的概率.

解 以$A_i(i=1,2,3)$表示事件"透镜第 i 次落下打破",

以B 表示事件“透镜落下三次而未打破”.

因为 $B=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$,

所以 $P(B)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(\overline{A_3}\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(\overline{A_1})$

$$=(1-\frac{9}{10})(1-\frac{7}{10})(1-\frac{1}{2})=\frac{3}{200}.$$

三、全概率公式与贝叶斯公式

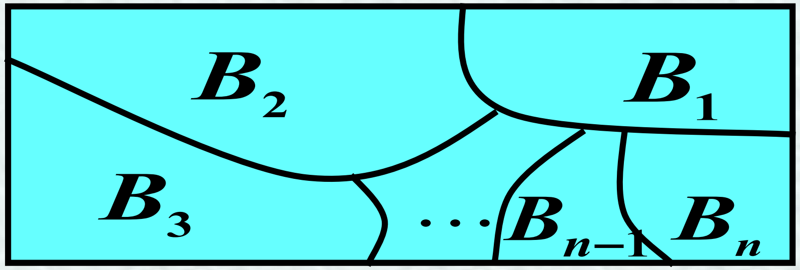
1. 样本空间的划分

定义　设 S 为试验E的样本空间, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 E 的一组事件,若

(i)　$B_i B_j = \varnothing, i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots, n;$

(ii)　$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S.$

则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 S 的一个划分.



2. 全概率公式

定理 设试验 E 的样本空间为 S, A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$\boxed{P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

全概率公式

证明 $A = AS = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n)$

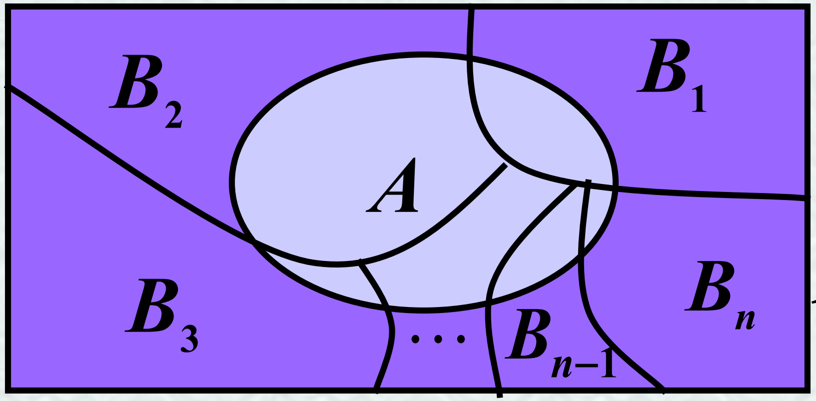
$$= AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n.$$

由 $B_iB_j = \varnothing \Rightarrow (AB_i)(AB_j) = \varnothing$

$$\Rightarrow P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_n)$$

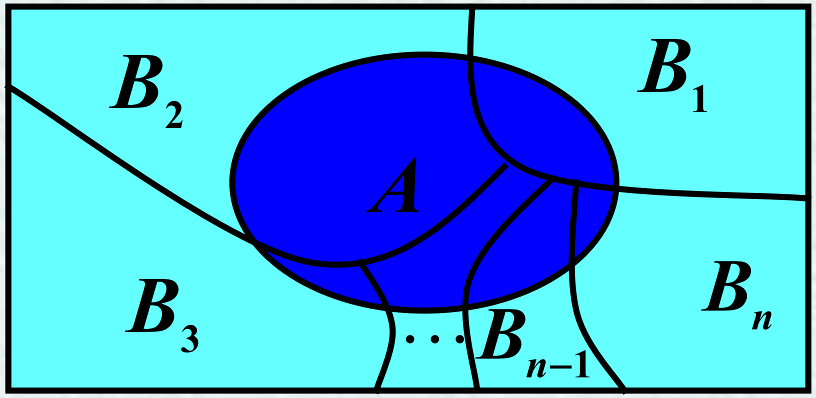
$$= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n).$$

图示



化整为零
各个击破

说明　全概率公式的主要用处在于它可以将一个复杂事件的概率计算问题,分解为若干个简单事件的概率计算问题,最后应用概率的可加性求出最终结果.



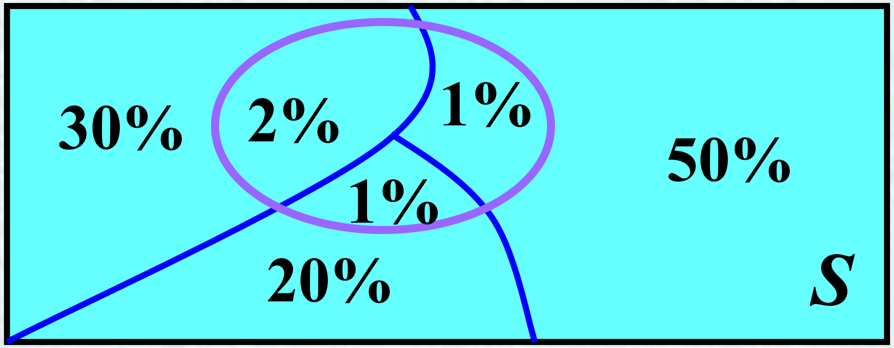
例6 有一批同一型号的产品，已知其中由一厂生产的占 30%，二厂生产的占 50%，三厂生产的占 20%，又知这三个厂的产品次品率分别为2%，1%，1%，问从这批产品中任取一件是次品的概率是多少?

解 设事件 A 为“任取一件为次品”，

事件 B_i 为“任取一件为 i 厂的产品”, $i=1,2,3.$

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = S,$$

$$B_i B_j = \varnothing, \quad i, j = 1,2,3.$$



由全概率公式得

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3).$$

$$P(B_1)=0.3,\quad P(B_2)=0.5,\quad P(B_3)=0.2,$$

$$P(A|B_1)=0.02,\ P(A|B_2)=0.01,\ P(A|B_3)=0.01,$$

故 $P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$

$$=0.02\times0.3+0.01\times0.5+0.01\times0.2=0.013.$$

3. 贝叶斯公式

贝叶斯资料

定理 设试验 E 的样本空间为 S. A为E的事件, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分,且 $P(A) > 0$, $P(B_i) > 0$, $(i = 1,2,\cdots,n)$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

称此为**贝叶斯公式**.

证明

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

例7 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的.根据以往的记录有以下的数据:

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的,且无区别的标志.

(1) 在仓库中随机地取一只元件,求它是次品的概率;

(2) 在仓库中随机地取一只 元件, 若已知取到的是次品, 为分析此次品出自何厂, 需求出此次品由三家工厂生产的概率分别是多少. 试求这些概率.

解 设 A 表示"取到的是一只次品", B_i $(i = 1,2,3)$ 表示"所取到的产品是由第 i 家工厂提供的".

则 B_1, B_2, B_3 是样本空间 S 的一个划分,

且 $P(B_1) = 0.15,\quad P(B_2) = 0.80,\quad P(B_3) = 0.05,$

$$P(A|B_1) = 0.02, \quad P(A|B_2) = 0.01, \quad P(A|B_3) = 0.03.$$

(1) 由全概率公式得

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$$

$$= 0.0125.$$

(2) 由贝叶斯公式得

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.02 \times 0.15}{0.0125} = 0.24.$$

$$P(B_2|A)=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)}=0.64,$$

$$P(B_3|A)=\frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)}=0.12.$$

故这只次品来自第 2 家工厂的可能性最大.

例8 对以往数据分析结果表明，当机器调整得良好时，产品的合格率为 98%，而当机器发生某种故障时，其合格率为 55%. 每天早上机器开动时，机器调整良好的概率为 95%.试求已知某日早上第一件产品是合格品时，机器调整得良好的概率是多少？

解 设 A 为事件“产品合格”，

B 为事件“机器调整良好”.

则有

$$P(A|B)=0.98, \quad P(A|\overline{B})=0.55,$$

$$P(B)=0.95,\qquad P(\overline{B})=0.05,$$

由贝叶斯公式得所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

$$=\frac{0.98\times0.95}{0.98\times0.95+0.55\times0.05}=0.97.$$

即当生产出第一件产品是合格品时,此时机器调整良好的概率为 0.97.

先验概率与后验概率

上题中概率 **0.95** 是由以往的数据分析得到的, 叫做先验概率.

而在得到信息之后再重新加以修正的概率 **0.97** 叫做后验概率.

例9 根据以往的临床记录，某种诊断癌症的试验具有如下的效果：若以 A 表示事件“试验反应为阳性”，以 C 表示事件“被诊断者患有癌症”，则有 $P(A|C)=0.95$, $P(\overline{A}|\overline{C})=0.95$. 现在对自然人群进行普查，设被试验的人患有癌症的概率为0.005，即 $P(C)=0.005$, 试求 $P(C|A)$.

解 因为 $P(A|C)=0.95$,

$$P(A|\overline{C})=1-P(\overline{A}|\overline{C})=0.05,$$

$$P(C)=0.005,\quad P(\overline{C})=0.995,$$

由贝叶斯公式得所求概率为

$$P(C|A) = \frac{P(A|C)P(C)}{P(A|C)P(C) + P(A|\overline{C})P(\overline{C})}$$

$$= 0.087.$$

即平均1000个具有阳性反应的人中大约只有87人患有癌症.

四、小结

1.条件概率 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ ⟶ 乘法定理

$$P(AB)=P(B|A)P(A)$$

全概率公式

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$$

贝叶斯公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

2. 条件概率 $P(A|B)$ 与积事件概率 $P(AB)$ 的区别.

$P(AB)$ 表示在样本空间 S 中, AB 发生的概率,而 $P(B|A)$表示在缩小的样本空间 S_A 中, B 发生的概率.用古典概率公式,则

$$P(B|A)=\frac{AB\text{ 中基本事件数}}{S_A\text{ 中基本事件数}},$$

$$P(AB)=\frac{AB\text{ 中基本事件数}}{S\text{ 中基本事件数}},$$

一般来说, $P(B|A)$ 比 $P(AB)$ 大.