第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

本章主要内容：

- 矩阵的初等变换及初等矩阵
  → 利用初等变换解线性方程组
- 矩阵的秩
  → 利用矩阵的秩讨论线性方程组有解的充分必要条件

§1 矩阵的初等变换

一.矩阵的初等变换及
解线性方程组的初等变换法

二. 矩阵的等价

一.矩阵的初等变换及解线性方程组的初等变换法

引例. 消元法解线性方程组.

增广矩阵的变化

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 3 & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 5 & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 10 & ③ \\ 6x_1 - 9x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 15 & ④ \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 6 & 10 \\ 6 & -9 & 3 & -3 & 9 & 15 \end{array}\right)$$

①↔②, ③÷2, ④−3③

$r_1 \leftrightarrow r_2$, $r_3 \div 2$, $r_4 - 3r_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 5 & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 3 & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 5 & ③ \\ 0 = 0 & ④ \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

返回 上页 下页 结束

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+5r_2]{r_2\div 2}\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{\substack{r_1-r_2\\ r_3\div 2}}\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

即 $\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_5 = 6 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 4 \\ x_4 - 2x_5 = -5 \\ 0 = 0 \end{cases}$，回代，得 $\begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_5 + 6 \\ x_2 = x_3 - x_5 + 4 \\ x_4 = 2x_5 - 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_5 + 6 \\ x_2 = x_3 - x_5 + 4 \\ x_4 = 2x_5 - 5 \end{cases}$$

令 $x_3 = C_1, x_5 = C_2$ (C_1, C_2 为任意常数), **则得方程组的任意解, 称为通解, 可记作:**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 - 2C_2 + 6 \\ C_1 - C_2 + 4 \\ C_1 \\ 2C_2 - 5 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由此例可见:

(1) 消元的每一步实质上是对增广矩阵实施行变换

(2) 这些变换只有三类

(3) 这些变换是可逆的, 且逆变换是同类变换

(4) 两种特殊矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

行最简形

注意这三列的特点

定义1. 下列三种变换称为矩阵的**初等行(列)变换**:

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ $c_i \leftrightarrow c_j$

(2) $r_i \times k$ (数 $k \neq 0$) $c_i \times k$

(3) $r_i + k r_j$ $c_i + k c_j$

row 行
$column$ 列

初等行变换与初等列变换统称为**初等变换**

注意:

$$A \underset{r_j \leftrightarrow r_i}{\overset{r_i \leftrightarrow r_j}{\rightleftarrows}} B, \quad A \underset{r_i \times \frac{1}{k}}{\overset{r_i \times k (k \neq 0)}{\rightleftarrows}} B, \quad A \underset{r_i - k r_j}{\overset{r_i + k r_j}{\rightleftarrows}} B$$

初等变换是可逆的,且逆变换是同一类型的初等变换.

解线性方程组的初等变换法:

增广矩阵 $\xrightarrow{\text{行}}$ 行最简形 $\longrightarrow$ 写出通解

二. 矩阵的等价

- 若矩阵A经有限次**行**初等变换变成矩阵B，则称矩阵A与B**行等价**，记作 $A \overset{r}{\sim} B$；
- 若矩阵A经有限次**列**初等变换变成矩阵B，则称矩阵A与B**列等价**，记作 $A \overset{c}{\sim} B$；
- 若矩阵A经有限次**初等变换**变成矩阵B，则称矩阵A与B**等价**，记作 $A \sim B$.

等价关系的性质:

1) 反身性: $A \sim A$；

2) 对称性: 若$A \sim B$则 $B \sim A$；

3) 传递性: 若$A \sim B$, $B \sim C$, 则 $A \sim C$.

与任意矩阵A 等价的三种简单矩阵

1. 行阶梯形； 2. 行最简形； 3. 标准形 $F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

注意: (1) A 的行阶梯形中的非 0 行数

= 行最简形中的非 0 行数

= 标准形中的 r

(2) 与矩阵 A 等价的矩阵之集称为一个等价类，标准形 F 是该等价类中形状最简单的矩阵 .

矩阵的初等变换是矩阵的一种最基本的运算，下面介绍它的一个最基本的性质。

定理1　设 A与 B 为 $m\times n$ 矩阵，那么

(i) $A \overset{r}{\sim} B$ 的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P；使 $PA=B$；

(ii) $A \overset{c}{\sim} B$ 的充分必要条件是存在 n 阶可逆矩阵 Q；使 $AQ=B$；

(iii) $A \sim B$ 的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P；n 阶可逆矩阵 Q；使 $PAQ=B$；

(证明下节给出)

例1. 设 $A=\begin{pmatrix}0&-2&1\\3&0&-2\\-2&3&0\end{pmatrix}$，把 (A,E) 化为行最简形.

解: $(A,E)=\begin{pmatrix}0&-2&1&1&0&0\\3&0&-2&0&1&0\\-2&3&0&0&0&1\end{pmatrix}$

$$\underset{\substack{r_3\times 3\\ r_3+2r_1}}{\overset{r_2\leftrightarrow r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}3&0&-2&0&1&0\\0&-2&1&1&0&0\\0&9&-4&0&2&3\end{pmatrix}\underset{r_3+9r_2}{\overset{r_3\times 2}{\sim}}\begin{pmatrix}3&0&-2&0&1&0\\0&-2&1&1&0&0\\0&0&1&9&4&6\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2-r_3}{\overset{r_1+2r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}3&0&0&18&9&12\\0&-2&0&-8&-4&-6\\0&0&1&9&4&6\end{pmatrix}\underset{r_2\div(-2)}{\overset{r_1\div 3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&6&3&4\\0&1&0&4&2&3\\0&0&1&9&4&6\end{pmatrix}$$

分析本例结果

$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{array}\right) \overset{\text{记}}{=\!=} (E,X)$$

(1) $A \overset{r}{\sim} E$ (A与E 行等价)

(2) 计算 $AX=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

即 $X=A^{-1}$

下节将证明此例给出了求逆阵的方法

作业

P77： 1（3）；2