第二章　矩阵及其运算

习 题 课

x+y=

主 要 内 容

典 型 例 题

测　验　题

１　矩阵的定义

２　方阵　列矩阵　行矩阵

３　同型矩阵和相等矩阵

４　零矩阵　单位矩阵

５　矩阵相加

６　数乘矩阵

７　矩阵相乘

８　方阵的运算

９　一些特殊的矩阵

１０　分块矩阵

伴随矩阵

行列式$|A|$的各元素的代数余子式A_{ij}所构成的方阵

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

叫做方阵A的伴随矩阵.

伴随矩阵具有重要性质：$AA^{*}=A^{*}A=|A|E.$

1 1　逆矩阵

定义　设A为n阶方阵,如果存在矩阵B,使

$$AB = BA = E$$

则称矩阵A是可逆的(或非奇异的、非退化的、满秩的),且矩阵B称为A的逆矩阵.

若A有逆矩阵,则A的逆矩阵是唯一的,A的逆矩阵记作 A^{-1}.

上页 下页 返回

相关定理及性质

方阵A可逆的充分必要条件是$|A| \neq 0.$

若矩阵A可逆,则 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$

$$(A^{-1})^{-1} = A; (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1} (\lambda \neq 0);$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

若同阶方阵A与B都可逆,那么AB也可逆,且

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

典　型　例　题

- 一、矩阵的运算
- 二、逆矩阵的运算及证明
- 三、矩阵的分块运算

一、矩阵的运算

例 1　计算

$$\begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix}_{n\times n}^{2}$$

解

$$\begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix}_{n\times n}^{2}$$

$$= \left[\frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} \right]^{2}$$

$$=\frac{1}{n^2}\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}^2$$

$$=\frac{1}{n^2}\begin{pmatrix} n(n-1) & -n & \cdots & -n \\ -n & n(n-1) & \cdots & -n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & -n & \cdots & n(n-1) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix}$$

在此例中，$A^2 = A$，所以A是幂等矩阵.

例２ 设$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,试将$f(\lambda)=|\lambda E-A|$写成$\lambda$的多项式,并验证$f(A)=0$.

解

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -b \\ -c & \lambda-d \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc,$$

由此得

$$f(A)=A^2-(a+d)A+(ad-bc)E$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$+ (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即$f(A)=0.$

二、逆矩阵的运算及证明

- A, B 为 n 阶方阵

$AB=E$ (或 $BA=E$) $\Longleftrightarrow$ A 可逆, 且 $A^{-1}=B$

- 方阵 A 可逆 $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$

$\Longleftrightarrow$ A 为非奇异矩阵

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*} \qquad A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

例3 已知矩阵A的伴随矩阵 A^*=diag(1,1,1,8)，

且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$， 求 B

解 由已知 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$ 两边右乘A得

$$AB=B+3A$$

两边左乘A^*得 $A^*AB=A^*B+3A^*A$

即 $|A|B=A^*B+3|A|E$

由题设, $|A|\neq 0$

根据 $AA^*=|A|E$ **得** $|A|=2$

所以 $2B = A^*B + 6E$

即 $(2E - A^*)B = 6E$

$\because \det(2E - A^*) = -6 \neq 0$

$\therefore B = 6(2E - A^*)^{-1}$

$$= 6diag(1,1,1,-\frac{1}{6})$$

$$= diag(6,6,6,-1)$$

例4

设 A, B 为 n 阶方阵, $AB+B=2E$, 证明 B 可逆, 并求 B^{-1}

解: 由 $AB+B=2E$ 得

$$\frac{1}{2}(A+E)B=E$$

$$\therefore \quad B^{-1}=\frac{1}{2}(A+E)$$

例5 设 $A^k=0$（k为正整数），证明

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$$

证明：$\because\ (E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$

$$=(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$$

$$-A(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$$

$$=E-A^k\quad=E$$

$$\therefore\quad (E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$$

例6 设矩阵 A 可逆，**证明其伴随阵** A^*也可逆，且 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$。

证明：

$\because$ A 可逆，$\therefore$ $|A|\neq 0$, 且 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$

又 $\because A^{-1}(A^{-1})^*=\left|A^{-1}\right|E$

$$\therefore \frac{1}{|A|}A^*(A^{-1})^*=\frac{1}{|A|}E$$

$$\therefore (A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$$

上页 下页 返回

思考题

1. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+A-4E=O$

(1) 证明 A 可逆，并求 A^{-1}　　提示：$A(A+E)=4E$

(2) 证明 $A-E$ 可逆，并求 $(A-E)^{-1}$

提示：$A^2+A-2E=2E \Rightarrow (A-E)(A+2E)=2E$

2. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2=10E$

(1) 证明 A 可逆，并求 A^{-1}　　$A^{-1}=\frac{1}{10}A$

(2) 证明 $A-3E$ 可逆，并求 $(A-3E)^{-1}$

提示：$A^2-9E=E$

(3) 计算 $|A|, |A^{-1}|$　　提示：$|A|^2=10^n$

(4) A 必等于 $\pm\sqrt{10}E$ 吗？　　否！反例：$\boxed{A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}}$

三、矩阵的分块运算

例5 设A,B都是n阶可逆矩阵,证明$D=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$必为可逆矩阵,并求$D$的逆矩阵.

证 因为$\det D=\det A\cdot\det B\neq 0(\because A,B$均可逆,$\det A\neq 0,\det B\neq 0)$,所以$D$为可逆矩阵.

设 $D^{-1}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$,其中$X_{ij}$均为$n$阶矩阵$(i,j=1,2)$,

$$D \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} AX_{11} & AX_{12} \\ CX_{11} + BX_{21} & CX_{12} + BX_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} (E\text{是}n\text{阶单位阵})$$

依矩阵相等的定义有 $\begin{cases} AX_{11} = E, AX_{12} = O, \\ CX_{11} + BX_{21} = O, \\ CX_{12} + BX_{22} = E, \end{cases}$

从而得 $X_{11}=A^{-1},\qquad X_{12}=O,$

$$X_{21}=-B^{-1}CA^{-1},\quad X_{22}=B^{-1},$$

故 $$D^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

作业 P54-56

3 ; 18 ; 19 ; 20 ; 21; 22;

23; 24

上页 下页 返回

第二章　测试题

一、填空题（每小题4分，共32分）.

1. 设A为n阶方阵，A^*为其伴随矩阵，$\det A=\dfrac{1}{3}$，则

$$\det\left(\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}-15A^*\right)=\underline{\qquad\qquad}$$

2. 设3阶方阵$A\neq O$，$B=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&t\\3&5&3\end{pmatrix}$，且$AB=O$，则

$t=\underline{\qquad\qquad}$

上页　下页　返回

3.已知$A^3 = E$,则$A^{-1} =$________

4.矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的逆矩阵$A^{-1} =$________

5. 设4阶矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

则A的逆矩阵$A^{-1} =$______

6. 若n阶矩阵A满足方程$A^2+2A+3E=0$,则

$A^{-1}=$ ________

7. 设A为三阶矩阵,且$|A|=1$, $|2A^{-1}+3A^*|=$ ________

8. 设$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,则$A^n=$ ____________

二、(6分) 设A、B均为n阶方阵,且$B=B^2$, $A=E+B$,证明A可逆,并求其逆.

三、(6分) 设n阶实方阵$A \neq O$, 且$A^* = A^T$, 证明A可逆.

四、(8分) 解下列矩阵方程.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

五、(20分) 求下列矩阵.

$$(1)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n, \quad (2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1, \quad 2);$$

$$(3)\ A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^n.$$

六、(6分)设$A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$, $AB=A+2B$, 求 B.

七、(每小题3分, 共6分)设n阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^*，证明：

(1)若$|A|=0$,则$|A^*|=0$; (2) $|A^*|=|A|^{n-1}$.

八、(每小题5分，共10分) 求下列矩阵的逆矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\-1&3&0&0&0\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&3&0&0&0\\2&8&0&0&0\\1&0&1&0&1\\0&1&2&3&2\\2&3&3&1&1\end{pmatrix}.$$

九、(6分) 设$P^{-1}AP=B$,求A^{11}.其中

$$P=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

上页 下页 返回

测试题答案

一、1. $(-1)^n 3$; 2. $t=4$; 3. A^2; 4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 1/8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -5/2 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$;

6. $-\frac{1}{3}(A+2E)$;

7.125;　　8. $\begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$.

二、$A^{-1}=(B+E)^{-1}=E-\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}(3E-A)$.

四、$X=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

五、1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n=\begin{cases} E, & (n\text{为偶数}) \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, & (n\text{为奇数}) \end{cases}$;

上页 下页 返回

$$2.\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix};\qquad 3.\begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

六、$B = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$

八、1. $\begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 4 & -3/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7/12 & -1/6 & -1/6 & 1/2 \\ 3 & -7/6 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ -2 & 11/12 & 7/6 & 1/6 & -1/2 \end{pmatrix}$.

九、$\begin{pmatrix} 2731 & 2732 \\ -683 & -684 \end{pmatrix}$.

上页 下页 返回