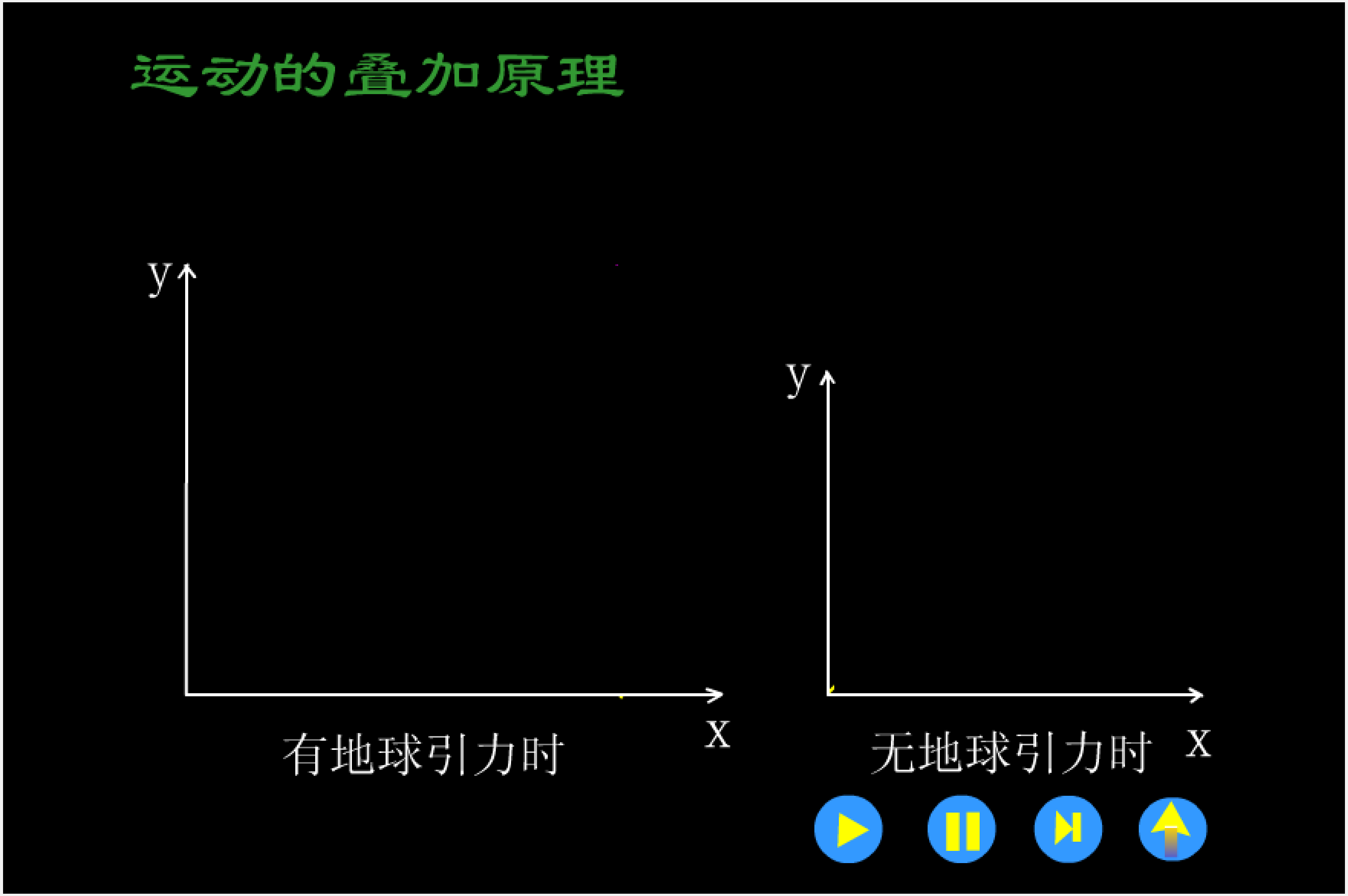
1.6 速度与加速度的坐标变换（相对运动）

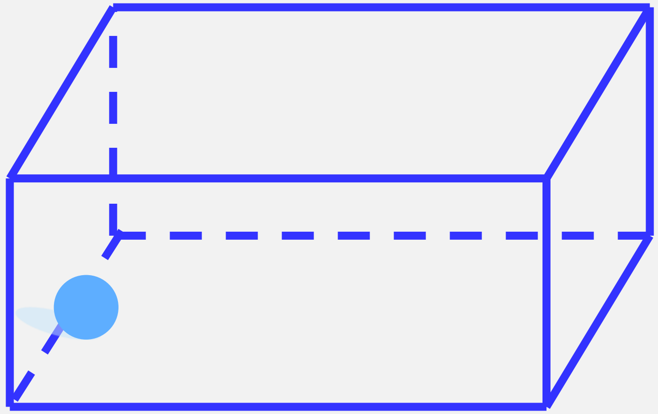
运动叠加原理



运动叠加原理

运动的描述具有相对性，在不同参考系中研究同一物体的运动情况，结果会完全不同。

火车在运动，一小球在车厢内运动，以火车或地面为参考系来研究小球的运动情况。



观察小球与火车的运动情况：

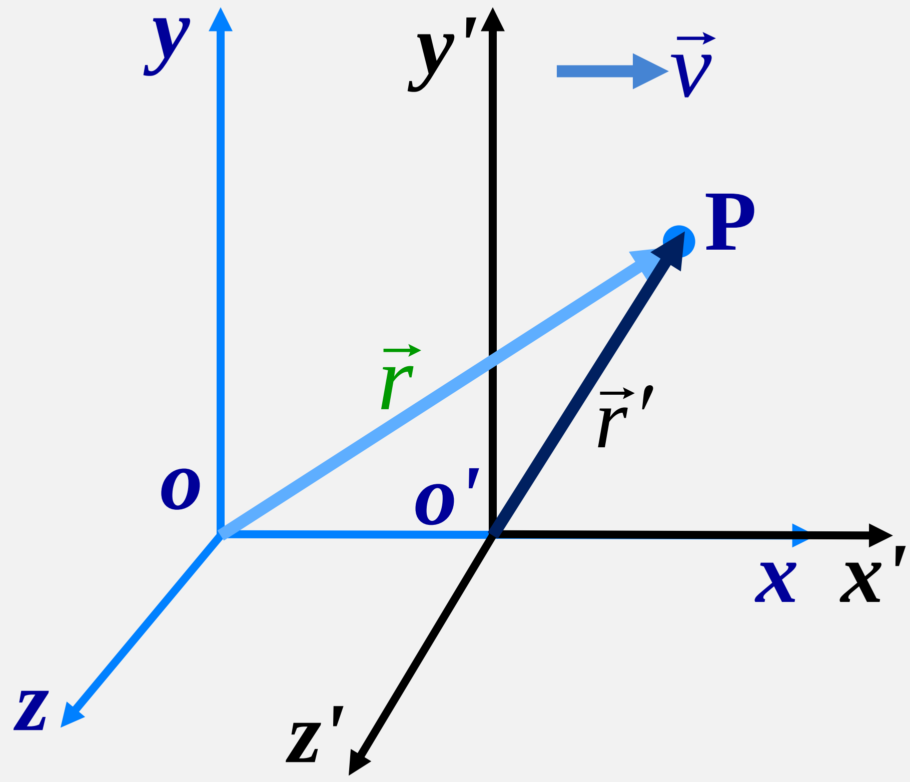
地面为参考系

火车为参考系

相对运动的数学描述

1. 伽利略坐标变换

不同参考系对同一个运动描述的结果不同，其结果之间是否有某种联系呢?



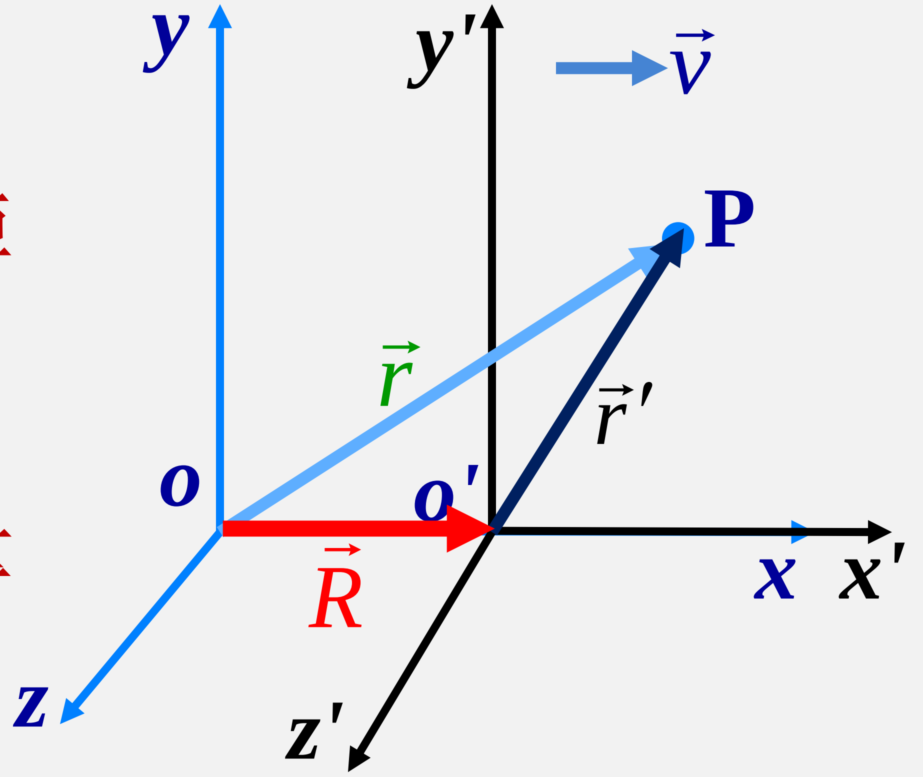
考虑两个作相对运动的参考系中的坐标系K(*Oxyz*)和K′(*O*′*x*′*y*′*z*′)。

注意：没说是匀速直线运动！不需要是惯性系！

对于同一个质点P，在两个坐标系中的所对应的位置矢量从图中易见矢量关系：

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

成立的条件：经典时空观！



有如下结论：

空间绝对性：空间两点距离的测量与坐标系无关。

$$\Delta r = \Delta r'$$

时间绝对性：时间的测量与坐标系无关。

$$t = t'$$

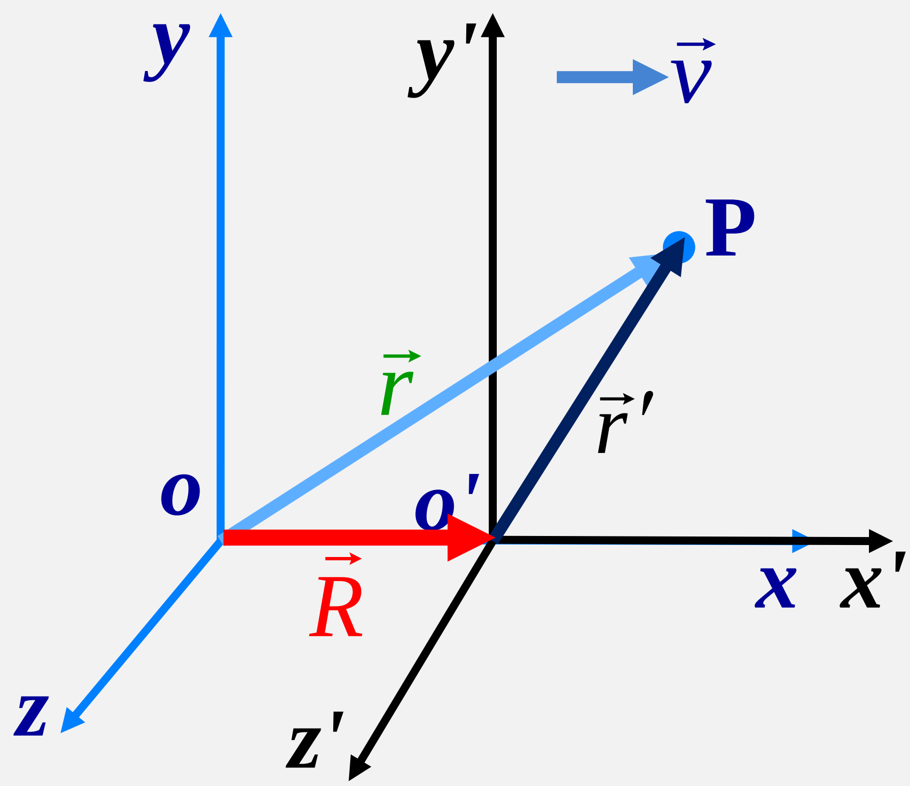
若坐标系K(*Oxyz*)和K′(*O′x′y′z′*)相对作匀速直线运动，且在$t=0$时刻坐标原点重合。则*P*点在K系和K′系的空间、时间坐标的对应关系为：

$$\vec{r}'=\vec{r}-\vec{R}=\vec{r}-\vec{v}t$$

$$t'=t$$

此即经典时空观下的伽利略坐标变换式

$$\begin{cases} x'=x-vt \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=t \end{cases}$$



2． 伽利略速度变换

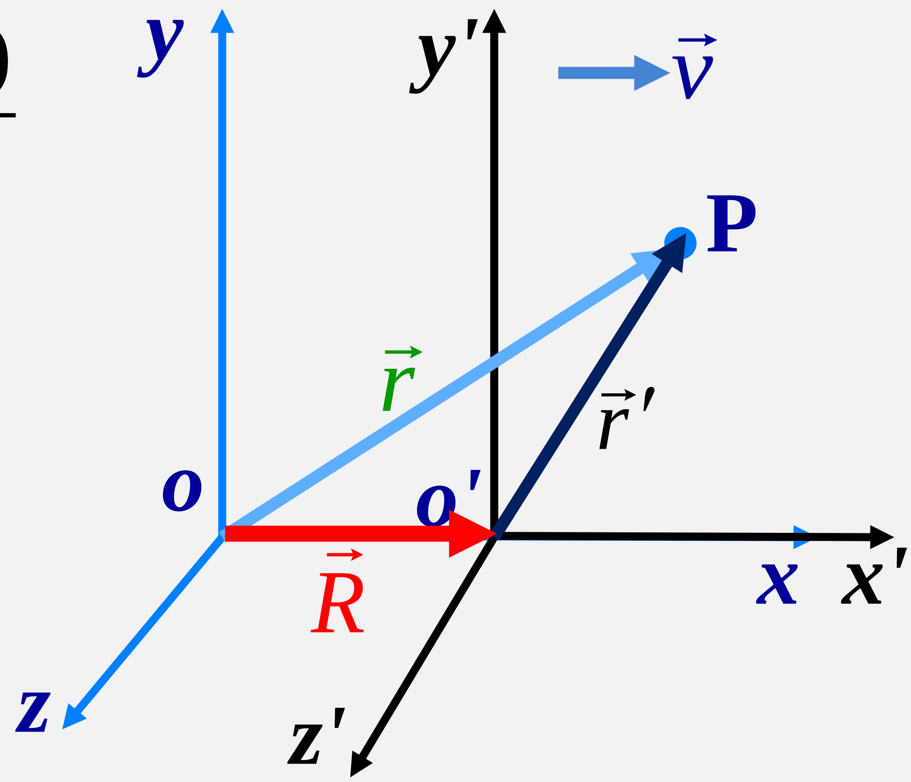
若此时K′系相对K系的速度为 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}$

质点在两个坐标系中的速度分别为 $\vec{v}_{\mathrm{K}}, \vec{v}_{\mathrm{K}'}$

$$\vec{v}_{\mathrm{K}'}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{r}-\vec{R})}{\mathrm{d}t}$$

$$=\vec{v}_{\mathrm{K}}-\vec{v}$$

$$\vec{v}_{\mathrm{K}}=\vec{v}_{\mathrm{K}'}+\vec{v}_{\mathrm{K}'\mathrm{K}}$$



在直角坐标系中的分量形式

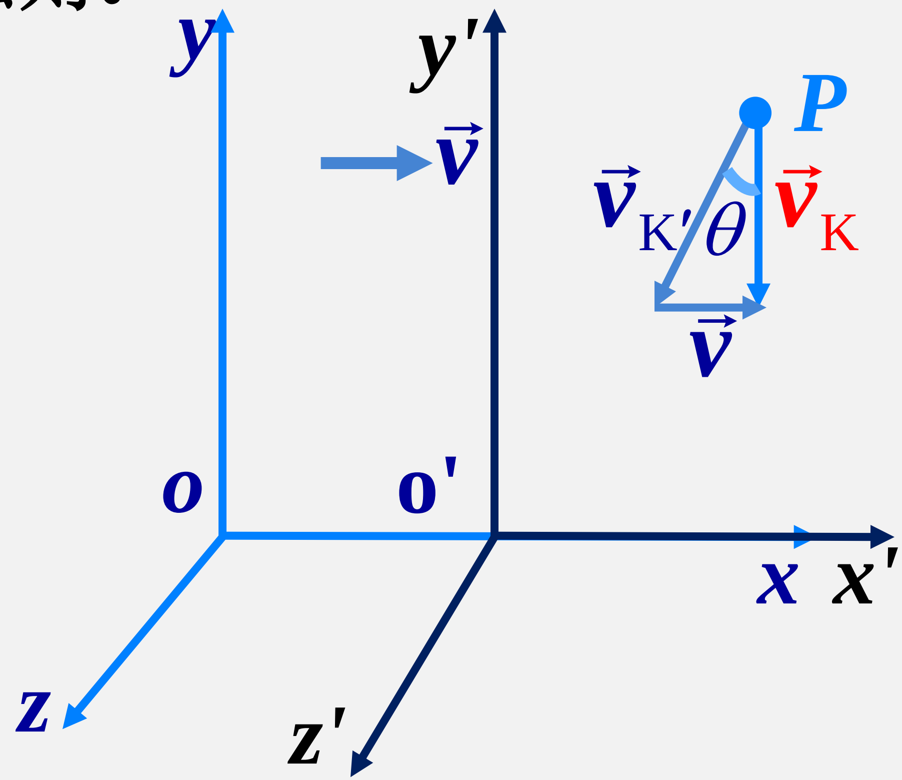
$$v_{\mathrm{K}'x}=v_{\mathrm{K}x}-v$$

$$v_{\mathrm{K}'y}=v_{\mathrm{K}y}$$

$$v_{\mathrm{K}'z}=v_{\mathrm{K}z}$$

相对于地面竖直下落的物体，作出各个坐标系中的速度方向，满足矢量三角形法则。

$$\tan\theta = \frac{v}{v_{\mathrm{K}}}$$



为便于记忆，通常把速度变换式写成下面的形式

$$\vec{v}_K = \vec{v}_{K'} - \vec{v}_{KK'}$$

注意：低速运动的物体满足速度变换式，并且可通过实验证实，对于高速运动（接近光速）的物体，上面的变换式失效。

3. 加速度变换

设该时刻K′系相对于K系的加速度为 $\vec{a}_0$，由定义

$$\because \vec{v}_{K'} = \vec{v}_K - \vec{v},\ t' = t$$

$$\therefore \frac{d\vec{v}_{K'}}{dt'} = \frac{d\vec{v}_K}{dt'} - \frac{d\vec{v}}{dt'} = \frac{d\vec{v}_K}{dt} - \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_K - \vec{a}_0$$

$$\vec{a}_K = \vec{a}_{K'} + \vec{a}_0$$

$$\vec{a}_0 = 0,\ \vec{a}_K = \vec{a}_{K'}$$

表明质点的加速度相对于作匀速运动的各个参考系不变。

伽利略变换：

$$\vec{r}_{\mathrm{K}} = \vec{r}_{\mathrm{K}'} + \vec{r}_{\mathrm{K}'\mathrm{K}} = \vec{r}_{\mathrm{K}'} + \vec{v}t$$

$$\vec{v}_{\mathrm{K}} = \vec{v}_{\mathrm{K}'} + \vec{v}_{\mathrm{K}'\mathrm{K}}$$

$$\vec{a}_{\mathrm{K}} = \vec{a}_{\mathrm{K}'} + \vec{a}_{\mathrm{K}'\mathrm{K}}$$

1. 上述结论纯粹是运动学的结论，完全从速度、加速度的定义出发，丝毫不涉及动力学（没有出现力、质量）。

2.上述结论与**K**系和**K′**系是否为惯性系没有任何关系。所以**K**系和**K′**系不仅仅是做相对匀速直线运动的惯性系，我们可以拓展到更一般的结论，并借此机会提醒大家，不要局限我们的思维，不要局限我们的视野。

例题：某人以4km/h的速度向东行进时，感觉风从正北吹来。如果速度增加一倍，则感觉风从东北方向吹来。求相对于地面的风速和风向。

解：作矢量三角形图，取地面为K系，人为K′系

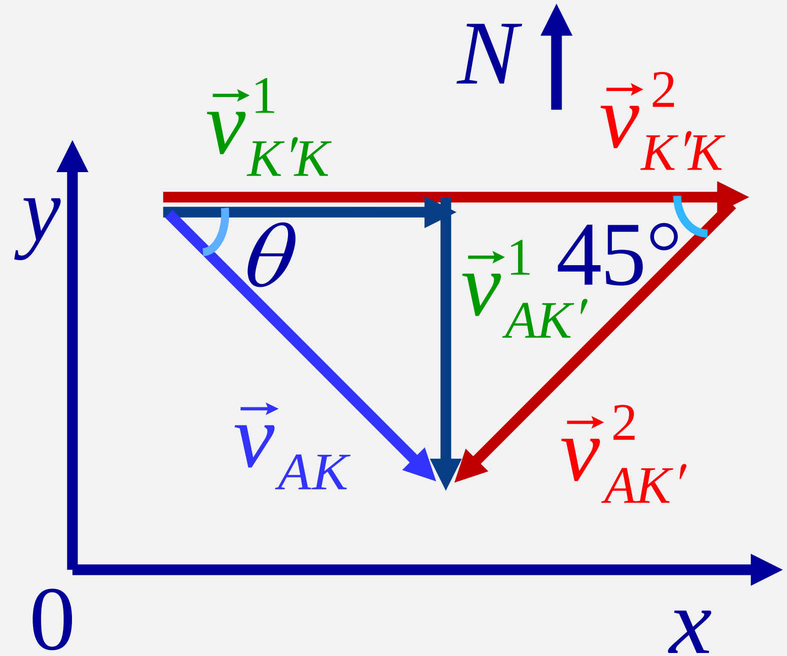
$$\vec{v} = \vec{v}_{AK} = \vec{v}^{\,1}_{AK'} + \vec{v}^{\,1}_{K'K}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{AK} = \vec{v}^{\,2}_{AK'} + \vec{v}^{\,2}_{K'K}$$

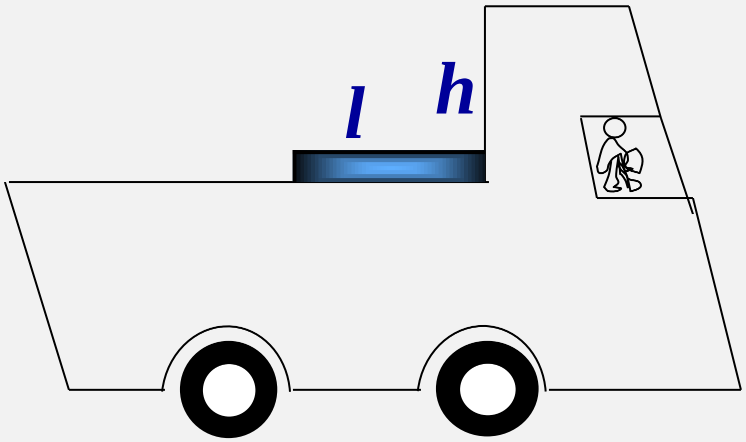
$$\theta = ?$$

$$\because \quad 45^\circ, \quad \vec{v}^{\,2}_{K'K} = 2\vec{v}^{\,1}_{K'K}$$

$$\therefore \ \theta = \frac{\pi}{4}, \quad |\vec{v}_{AK}| = 4\sqrt{2}\mathrm{km/h} \approx 5.66\mathrm{km/h}$$



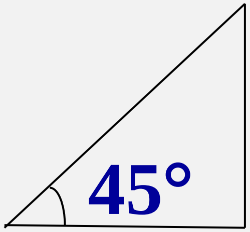
例：一货车在行驶过程中，遇到5m/s竖直下落的大雨，车上紧靠挡板平放有长为l = 1m的木板。如果木板上表面距挡板最高端的距离h = 1m，问货车以多大的速度行驶，才能使木板不致淋雨？

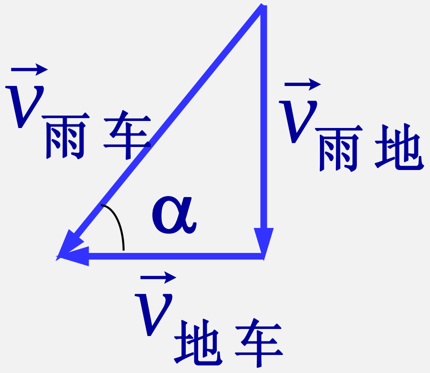


解：车在前进的过程中，雨相对于车向后下方运动，使雨不落在木板上，挡板最上端处的雨应飘落在木板的最左端的左方。

$$\alpha = 45^\circ$$

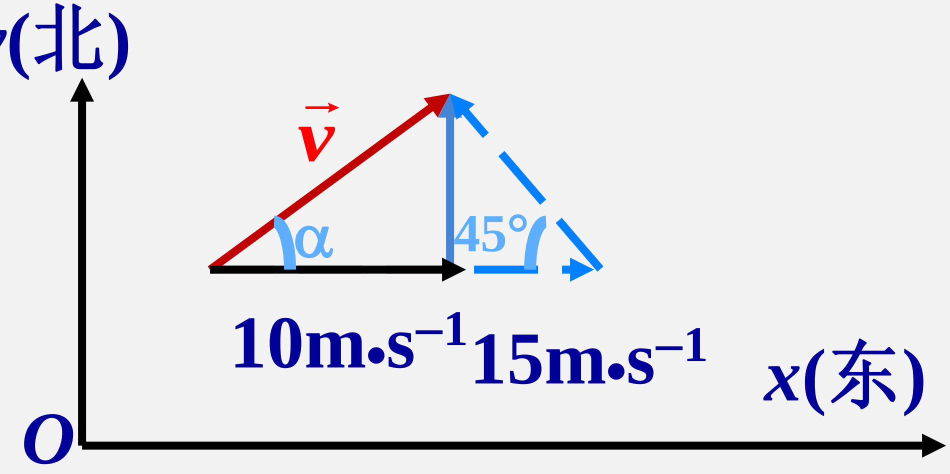
$$v_{车} = \left| v_{地车} \right| = \left| v_{雨地} \right| = 5(\mathrm{m/s})$$





例：某人骑摩托车向东前进，其速率为$10 m \cdot s^{-1}$时觉得有南风，当其速率为$15 m \cdot s^{-1}$时，又觉得有东南风，试求风速度。

解：取风为研究对象，骑车人和地面作为两个相对运动的参考系。作图



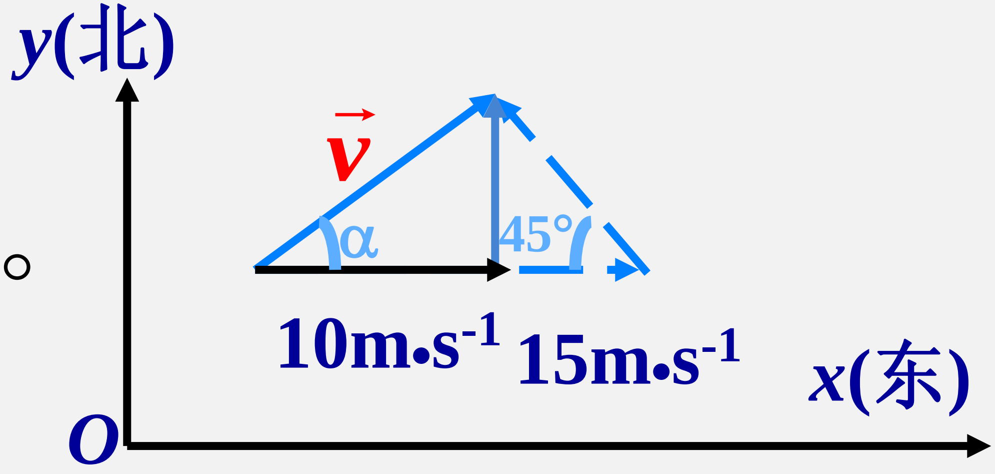
根据速度变换公式得到：

$$\vec{v} = \vec{v}_{AK} = \vec{v}^{1}_{AK'} + \vec{v}^{1}_{K'K}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{AK} = \vec{v}^{2}_{AK'} + \vec{v}^{2}_{K'K}$$

由图中的几何关系，知：

$$v_x = v^1_{\mathrm{K'K}} = 10(\mathrm{m/s})$$



$$v_y = (v^2_{\mathrm{K'K}} - v^1_{\mathrm{K'K}})\tan 45^\circ$$

$$= 15 - 10 = 5(\mathrm{m/s})$$

风速的大小：

$$v = \sqrt{10^2 + 5^2}$$

$$= 11.2(\mathrm{m/s})$$

风速的方向：

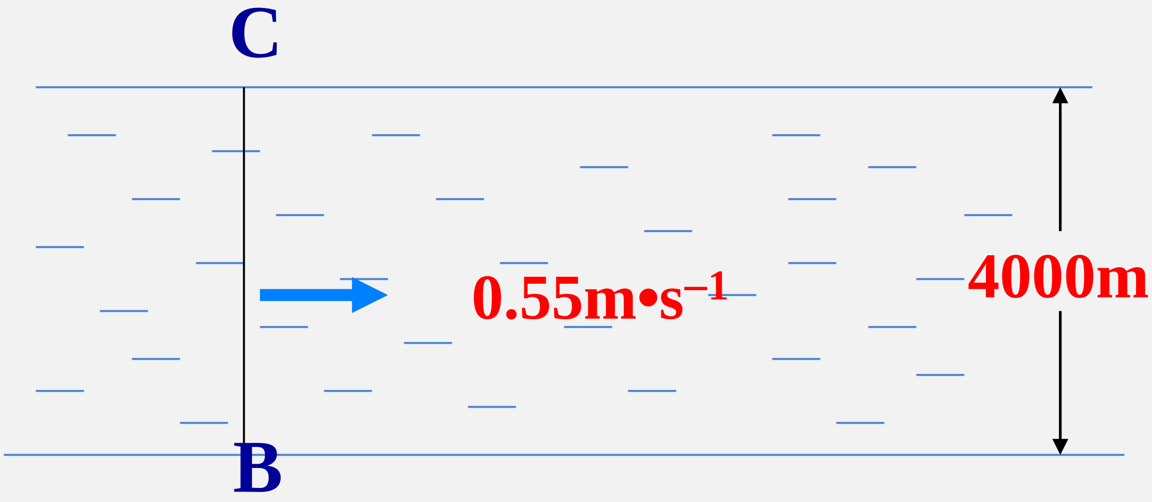
$$\alpha = \arctan\frac{5}{10} = 26^\circ 34'$$

为东偏北26°34'

例：一人能在静水中以$1.1 m \cdot s^{-1}$的速率划船前进，今欲横渡一宽度为4000m、水流速度为$0.55 m \cdot s^{-1}$的大河。

(1) 若要达到河正对岸的一点，应如何确定划行方向？需要多少时间？

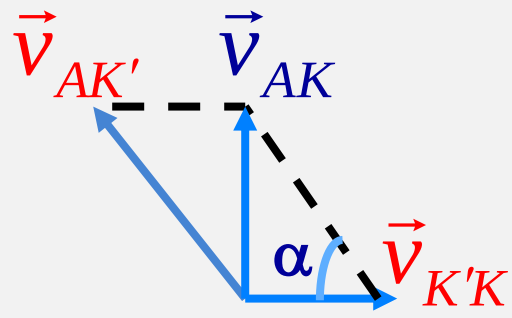
(2) 如希望用最短的时间过河，应如何确定划行方？船到达对岸的位置在何处？



解：（1）相对运动的问题，以船为研究对象，分别选择岸k、水k'作为参考系：

根据分析：船对水的速度方向应垂直于河岸

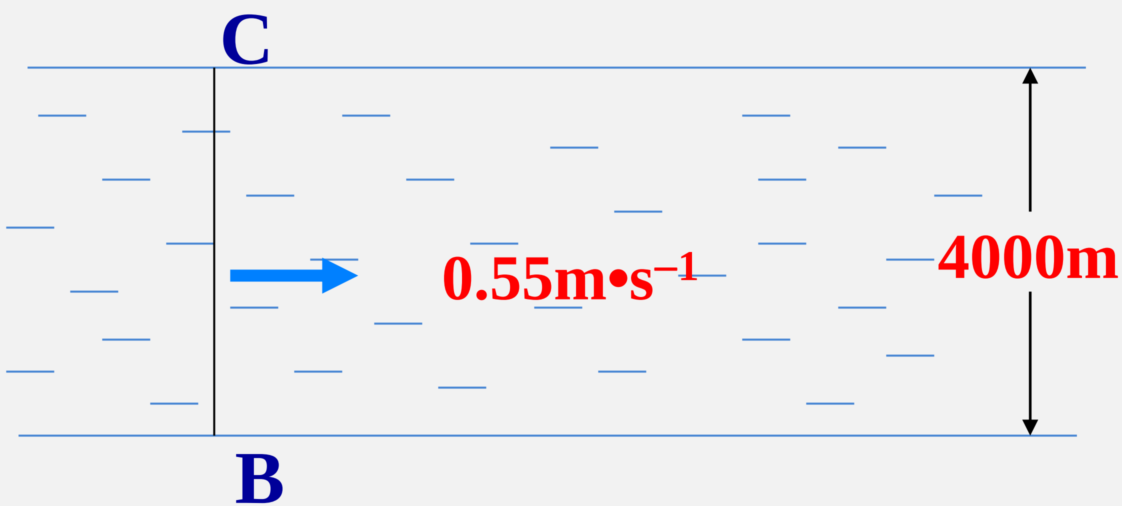
$$\vec{v}_{AK}=\vec{v}_{AK'}+\vec{v}_{K'K}$$



$$\cos\alpha=\left|\frac{v_{\mathrm{K'K}}}{v_{\mathrm{AK'}}}\right|=\frac{0.55}{1.1}=0.5$$

$$\alpha=\arccos(0.5)$$

$$=60^{\circ}$$



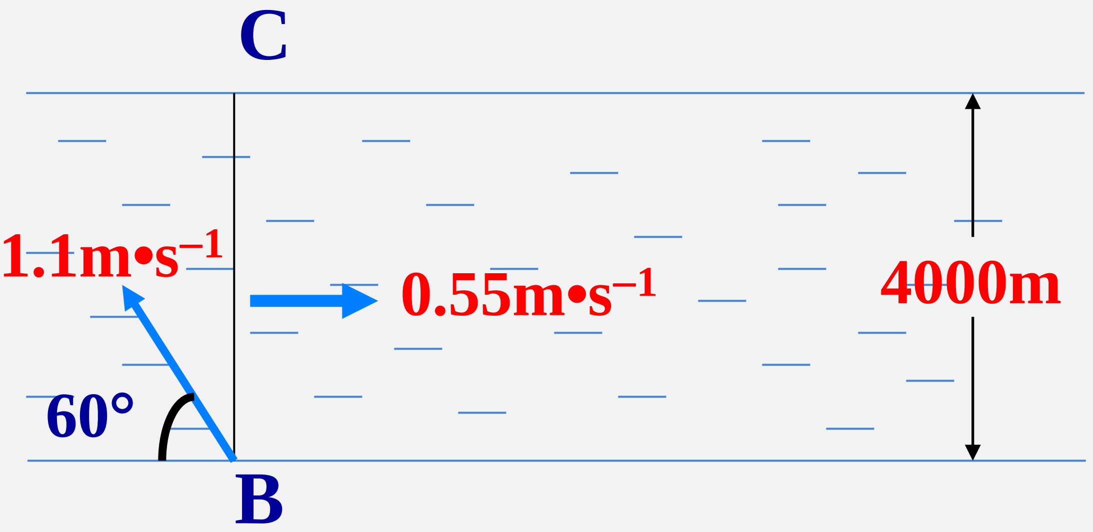
$$v_{AK} = v_{AK'} \sin 60^{\circ} = 1.1 \times \sqrt{3} / 2$$

$$\approx 0.9526(\mathrm{m/s})$$

需要时间：

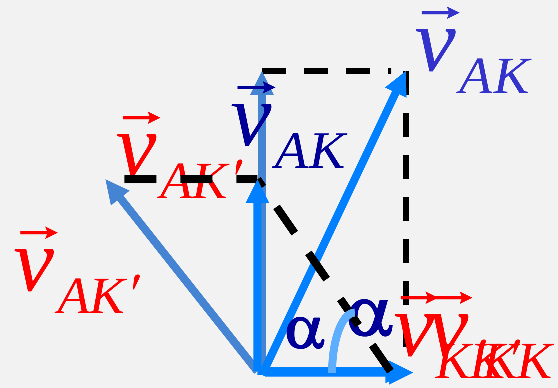
$$t = 4000 / 0.9526 \approx 4199(\mathrm{s})$$

$$\approx 70(\mathrm{min})$$



（2） 分析速度的合成

需要的时间最短，要求垂直于河岸的方向的速度分量最大。水流速度$v_{K'K}$方向平行于河岸对过河时间没有影响。



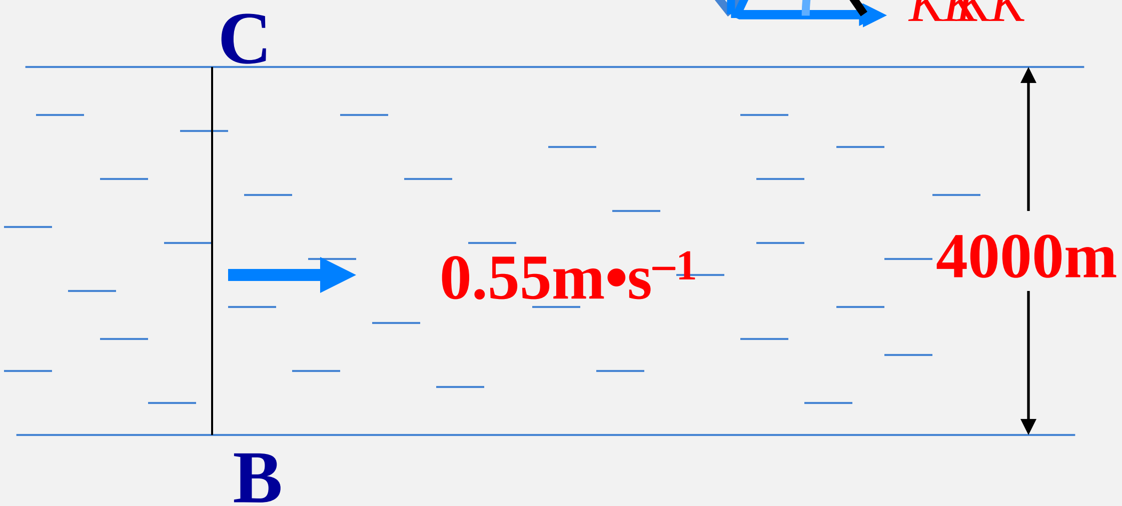
而v_{AK}大小不变，只有垂直于河岸的时候，即α = 90°，合成速度垂直分量最大。

$$t = 4000 / v_{AK}$$

$$= 4000 / 1.1$$

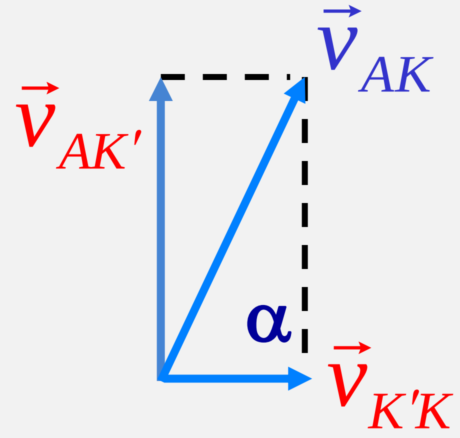
$$\approx 3636.36(\mathrm{s})$$

$$\approx 60.6(\mathrm{min})$$



根据相对运动速度关系

$$\vec{v}_{AK} = \vec{v}_{AK'} + \vec{v}_{K'K}$$

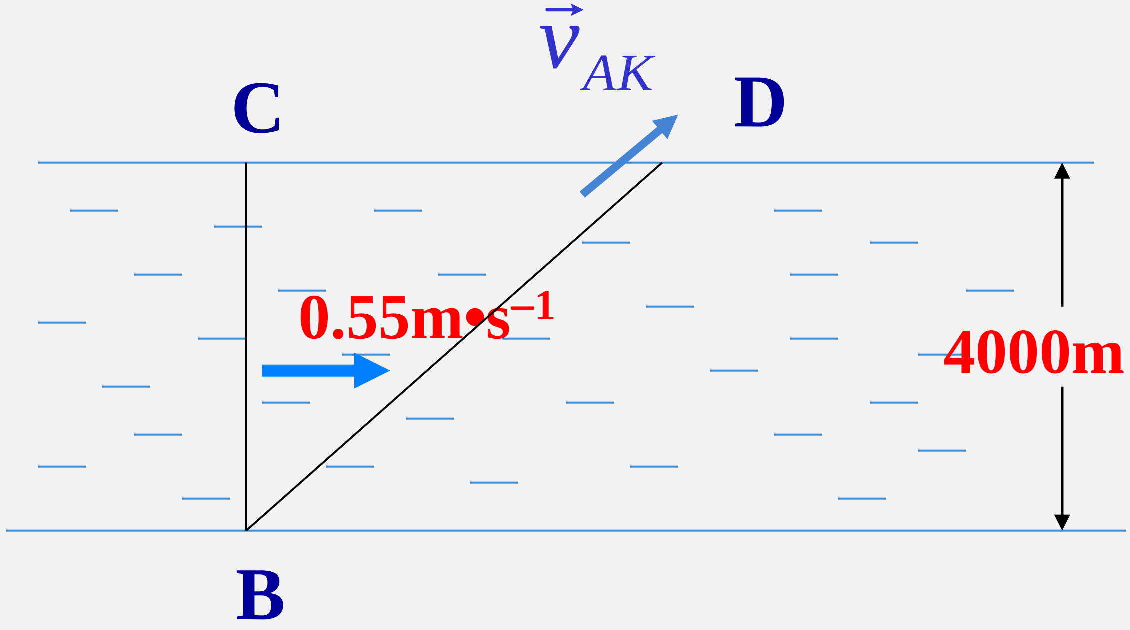


利用几何关系：

$$CD = \frac{v_{AK'}}{v_{AK}} BC$$

$$= \frac{0.55}{1.1} \times 4000$$

$$= 2000 \ \text{(m)}$$



作业：第一章 **1.8**

THANKS

FOR YOUR ATTENTION