中国矿业大学(北京)

2011级《概率论与数理统计》期末考试卷（A卷）

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八
得　分								
阅卷人								

一 、填空题（每小题3分，共21分）

1、设$P(A)=0.6$，$P(B)=0.4$，$P(A|B)=0.5$，则$P(\overline{A}\cup B)=$____

2、随机变量K服从均值为1的指数分布，则方程$4x^2+4Kx+K+2=0$有实根的概率为________；

3、设$X\sim P(\lambda)$(泊松分布),且$E\left[(X-1)(X-2)\right]=1$,则 $\lambda=$________；

4、随机变量$X\sim U(0,1), Y\sim P(0.3)$,相关系数$\rho_{XY}=\dfrac{1}{4}$，则$Cov(X,Y)=$__________；

5、设随机变量X和Y都服从标准正态分布$N(0,1)$，且二者相互独立，则X^2/Y^2的分布为__________；

6、设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ未知，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是X的样本观测值，以$\overline{x}$，s^2分别表示样本均值和样本方差的观测值。若σ^2未知，则μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为________；若σ^2已知，则μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为__________________.

二、（9分）已知男子有5%是色盲患者，女子有0.25%是色盲患者.今从男女为比例为2:1的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

三、（10分）设顾客在银行窗口等待服务的时间 X（以分钟计）服从参数为5的指数分布，王大爷在银行窗口等待服务，若超过10分钟他就离开，他每月到银行5次，用 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，写出 Y 的分布律。

四、（18分）设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{3}xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 求关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度并判断 X，Y 是否相互独立；

(2) 求 $\mathrm{P}(X+Y\ge 1)$；

(3) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

五、（12分）设(X,Y)具有概率密度为$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，

求$E(X), D(X), Cov(X,Y)$.

六、（10分）一保险公司有10 000个汽车投保人，每个投保人索赔金额的数学期望为280美元，标准差为800美元，利用利用中心极限定理近似的方法计算索赔总金额超过 2700 000美元的概率？(结果直接用标准正态分布的分布函数来表示)

七、（10分）设总体X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本，求θ的矩估计量$\hat{\theta}$及其方差$D(\hat{\theta})$.

八、（10分）设总体X服从参数为θ（θ未知）的指数分布，即其概率密度为

$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ $X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自该总体的简单随机样本，试求θ的最大似然估计量并验证所求估计量是否为无偏估计量.

2011级《概率论与数理统计》期末考试卷（A卷）

参考答案与解析

一 、填空题（每小题3分，共21分）

1. 解：由于$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)=1-P(A)+P(AB)=0.4+P(AB)$，而

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\Rightarrow P(AB)=P(A|B)P(B)=0.2,$$

故$P(\overline{A}\cup B)=0.6$。

2. 解：依题意随机变量K的概率密度函数为$f(k)=\begin{cases}e^{-k}, k>0\\ 0, \quad k\le 0\end{cases}$。

则原方程有实根，即为$\Delta=(4K)^2-4\cdot 4(K+2)=16(K^2-K-2)\ge 0$。

即$K^2-K-2\ge 0\Leftrightarrow K\ge 2$或$K\le -1$。

故$P\{K\ge 2, K\le -1\}=1-P\{-1<K<2\}=1-\int_{-1}^{2}f(k)\mathrm{d}k=1-\int_{0}^{2}e^{-k}\mathrm{d}k=e^{-2}$。

3. 解：$E[(X-1)(X-2)]=E(X^2-3X+2)=E(X^2)-3E(X)+2=1$。而$E(X)=\lambda$。

$$E(X^2)=E(X(X-1)+X)=E(X(X-1))+E(X)=\sum_{x=1}^{\infty}x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}+\lambda=\sum_{x=2}^{\infty}x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}+\lambda$$

$$=e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}+\lambda=e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}+\lambda=e^{-\lambda}\lambda^2e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda。$$

(或者$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\lambda+\lambda^2$)。

故$E[(X-1)(X-2)]=\lambda^2+\lambda-3\lambda+2=1\Rightarrow\lambda^2-2\lambda+1=0\Rightarrow\lambda=1$。

4. 解：由于$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$，而$X$服从(0,1)上的均匀分布，其方差

$D(X)=\frac{(0-1)^2}{12}=\frac{1}{12}$，$Y$服从参数为0.3的泊松分布，其方差$D(Y)=0.3$，故

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}{4}=\frac{1}{8\sqrt{10}}。$$

5. 解：自由度为(1,1)的F分布。

6. 解：$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$；$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$.

二、（9 分）解：以 A_1 表示事件“选出的是男性”，以 A_2 表示事件“选出的是女性”，以 B 表示事件“选出的是色盲患者”

由已知条件知

$$P(A_1)=\frac{2}{3},P(A_2)=\frac{1}{3},P(B\mid A_1)=5\%,P(B\mid A_2)=0.25\%$$

由“贝叶斯公式”，可得：

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)}=\frac{40}{41}。$$

三、(10 分)解:顾客在窗口等待服务超过10 min 的概率为 $p=\int_{10}^{\infty}f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{10}^{\infty}\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-x/5}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2}$. 故顾客区银行一次因未等到服务而离开的概率为 e^{-2}，从而 $Y\sim b\left(5,\mathrm{e}^{-2}\right)$.

故 Y 的分布律为

$$P\{Y=k\}=\binom{5}{k}\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^k\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)^{5-k}，\quad k=0,1,2,3,4,5\,.$$

四、（18 分）解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y=2x^2+\frac{2}{3}x$，$0\le x\le 1$。

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\frac{y}{6}，\quad 0\le y\le 2。$$

由于 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，故 X 、Y 不是相互独立的。

(2) $P\{X+Y\ge 1\}=1-P\{X+Y<1\}=1-P\{X<1-Y\}$

$$=1-\int_0^1\int_0^{1-y}\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\frac{7}{72}=\frac{65}{72}。$$

(3)代入公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y$，可得 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$ 。

上式中被积函数非零的条件是 $\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le z-x\le 2\end{cases}$，即 $\begin{cases}0\le x\le 1\\z-2\le x\le z\end{cases}$。

当 $0<z<1$ 时，$f_Z(z)=\int_0^z\left[x^2+\frac{1}{3}x(z-x)\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^z(2x^2+xz)\mathrm{d}x=\frac{7}{18}z^3$；

当$1 \le z \le 2$时，$f_Z(z)=\int_0^1\left[x^2+\frac{1}{3}x(z-x)\right]dx=\frac{1}{3}\int_0^1(2x^2+xz)dx=\frac{2}{9}+\frac{z}{6}$；

当$2<z<3$时，$f_Z(z)=\int_{z-2}^1\left[x^2+\frac{1}{3}x(z-x)\right]dx=\frac{1}{3}\int_{z-2}^1(2x^2+xz)dx=-\frac{7}{18}z^3+2z^2-\frac{19}{6}z+2$。

在z的其他取值情况下，$f_Z(z)=0$。

五、（12 分）解：$E(X)=E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^1x(x+y)dy=\frac{7}{12}$

$D(X)=D(Y)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_0^1dx\int_0^1x^2(x+y)dy-\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{11}{144}$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^1xy(x+y)dy=\frac{1}{3}$

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{3}-\left(\frac{7}{12}\right)^2=-\frac{1}{144}$

六、（10 分）设第k个投保人的索赔金额为$X_k(k=1,2,\cdots,10000)$，记$X=\sum_{k=1}^{10000}X_k$。

依题意，有$E(X_k)=280,\sqrt{D(X_k)}=800$，由“独立同分布的中心极限定理”可知，随机变量

$$Z=\frac{\sum_{k=1}^{10000}X_k-280\times10000}{\sqrt{10000}\cdot800}=\frac{X-2800000}{80000}。$$

近似地服从正态分布$(0,1)$，于是

$$P\{X>2700000\}=P\left\{\frac{X-2800000}{80000}>\frac{2700000-2800000}{80000}\right\}=P\left\{\frac{X-2800000}{80000}>-1.25\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{X-2800000}{80000}\le-1.25\right\}\approx1-\Phi(-1.25)=\Phi(1.25)=0.8944。$$

七、（10 分）解：$\mu_1=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^\theta x\frac{6x(\theta-x)}{\theta^3}dx=\frac{6}{\theta^3}\int_0^\theta x^2(\theta-x)dx$

$$=\frac{6}{\theta^3}\int_0^\theta(\theta x^2-x^3)dx=\frac{6}{\theta^3}\left[\frac{\theta}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^\theta=\frac{\theta}{2}$$

由此可得：$\theta=2\mu_1$。

在上式中，以$\overline{X}$代替μ_1，可得θ的矩估计量为$\hat{\theta}=2\overline{X}$。

故$D(\hat{\theta})=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})=4D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nX_i\right)=\frac{4}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^nX_i\right)$

$$=\frac{4}{n^2}D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{4}{n}D(X)$$

而 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}x^2\frac{6x(\theta-x)}{\theta^3}\mathrm{d}x=\frac{6}{\theta^3}\int_0^{\theta}x^3(\theta-x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{6}{\theta^3}\int_0^{\theta}(\theta x^3-x^4)\mathrm{d}x=\frac{6}{\theta^3}\left[\frac{\theta}{4}x^4-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\theta}=\frac{3\theta^2}{10}$$

故 $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{3\theta^2}{10}-\frac{\theta^2}{4}=\frac{\theta^2}{20}$

故 $D(\hat{\theta})=\frac{\theta^2}{5n}$。

八、（10 分）$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x_i}{\theta}}=\theta^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}$，故 $\ln L(\theta)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$。

令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，可得：$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{X}$。

因 $E(\hat{\theta})=E(\overline{X})=\theta$，故所求估计量是 θ 的无偏估计量。