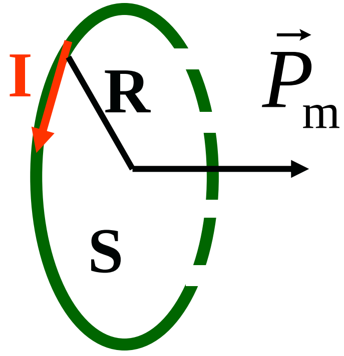
磁矩 $\vec{P}_{\mathrm{m}}$

在静电场中讨论过电偶极子, 并引入电矩 $\vec{P}_{\mathrm{e}}$,在磁场中可以类似的引入磁矩 $\vec{P}_{\mathrm{m}}$ 。

定义磁矩: $\vec{P}_{\mathrm{m}} = I\pi R^2 \vec{n}$

也可写成: $\vec{P}_{\mathrm{m}} = I\vec{S}$

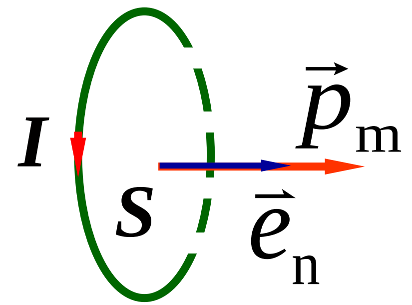


磁矩的大小为 $P_{\mathrm{m}} = IS$, 方向由右手螺旋定则给出。

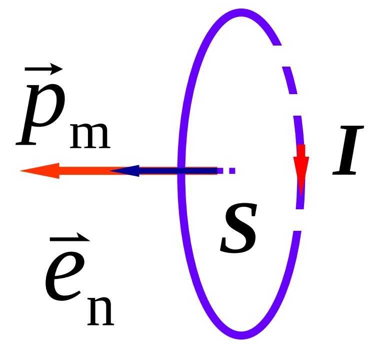
圆电流的磁感应强度可以写成：

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_o \vec{P}_{\mathrm{m}}}{2\pi x^3}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{P_{\mathrm{m}}}{x^3}\vec{n}$$



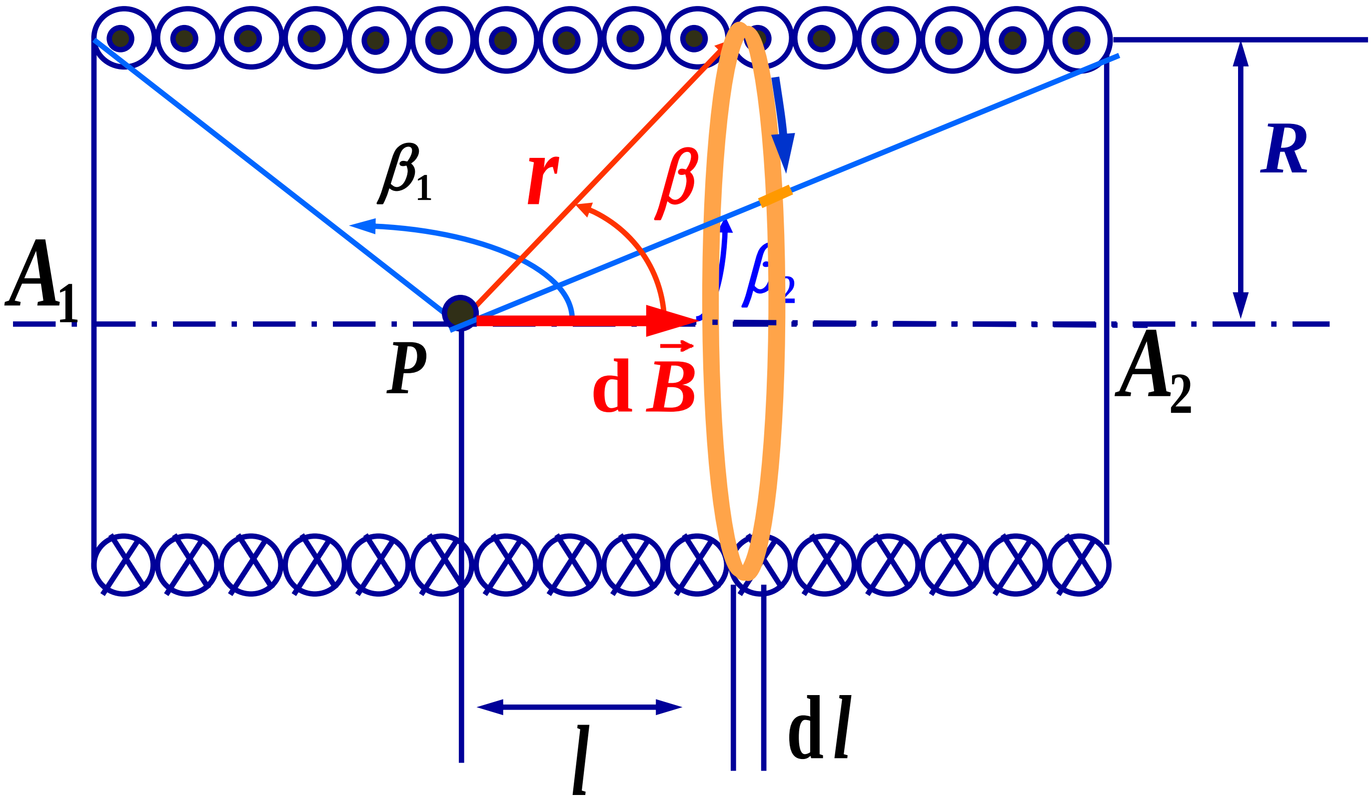
磁矩 $\vec{P}_{\mathrm{m}}=IS\vec{e}_{\mathrm{n}}$

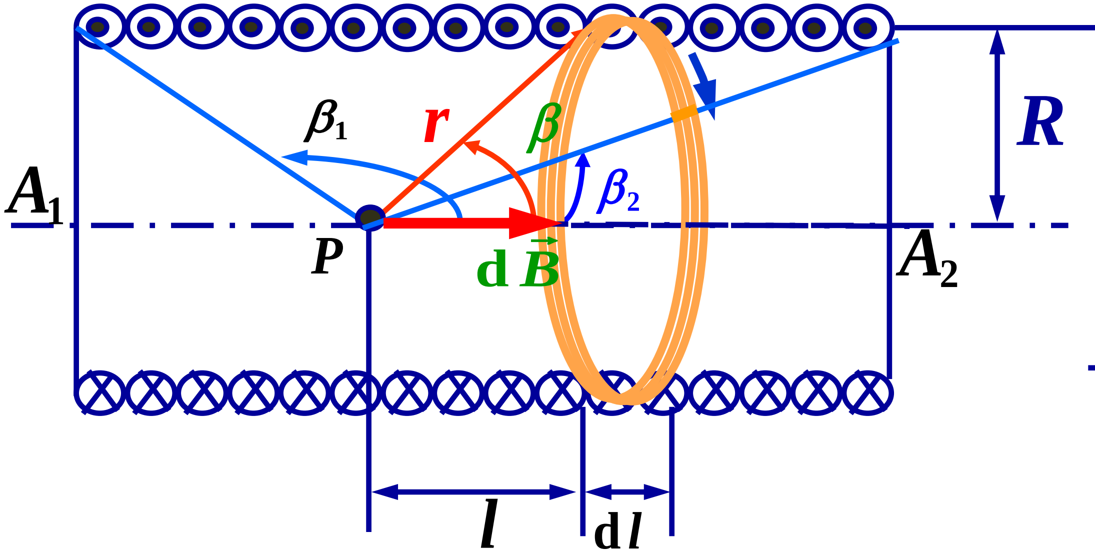


只有当圆电流的面积S 很小，或场点距圆电流很远时， 才能把圆电流叫做磁偶极子。

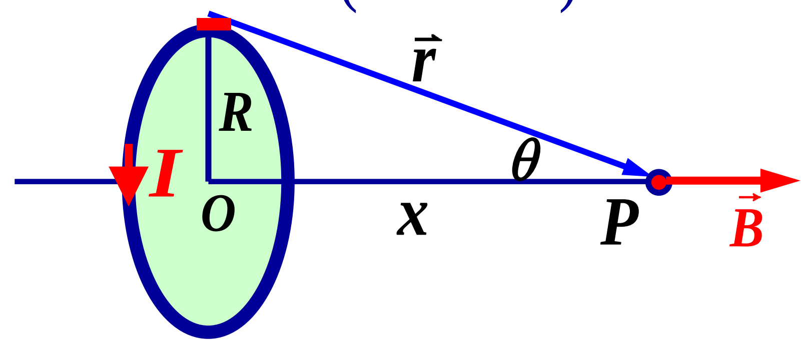
3. 载流直螺线管内部的磁场

设螺线管的半径为R，电流为I，每单位长度内有线圈n匝。求螺线管内P点的磁感应强度。





$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$



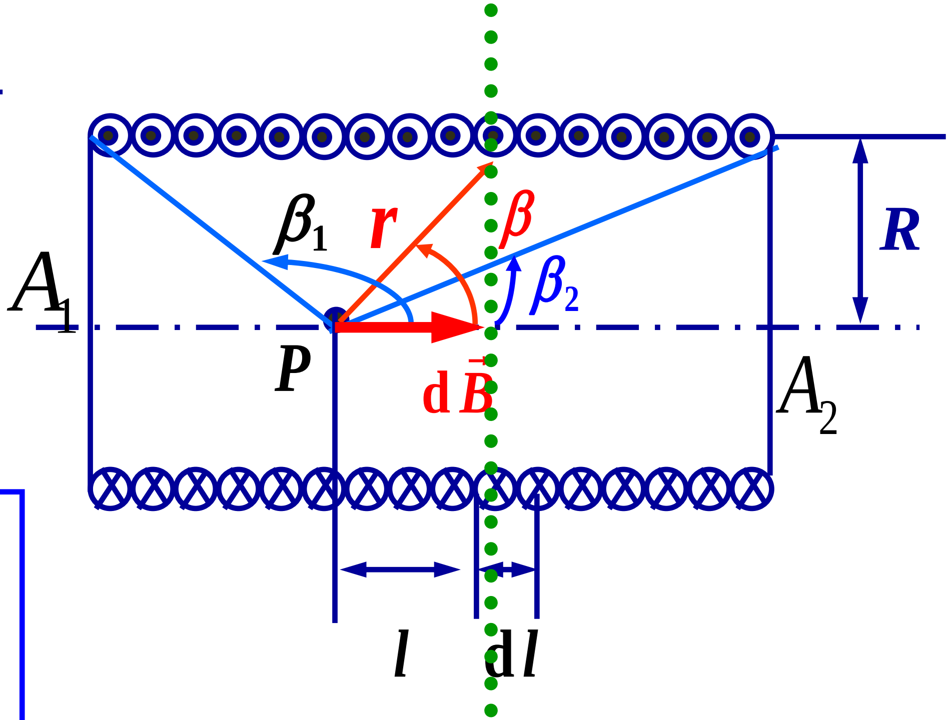
每匝线圈可作平面线圈处理，*ndl*匝线圈可看作*I’ = I ndl* 的一个圆电流。

这段线圈在*P*点产生的磁感应强度： $\mathrm{d}B=\dfrac{\mu_0 R^2(nI\,\mathrm{d}l)}{2(R^2+l^2)^{3/2}}$

(所有电流元在P点激发的磁场方向均向右)

$$\Rightarrow\quad B=\int_L \mathrm{d}B=\int_L\frac{\mu_0 R^2 nI\,\mathrm{d}l}{2(R^2+l^2)^{3/2}}$$

$$B=\int_L \mathrm{d}B=\int_L \frac{\mu_0 R^2 nI\,\mathrm{d}l}{2(R^2+l^2)^{3/2}}$$



由几何关系可知:

$$l=R\cot\beta,$$

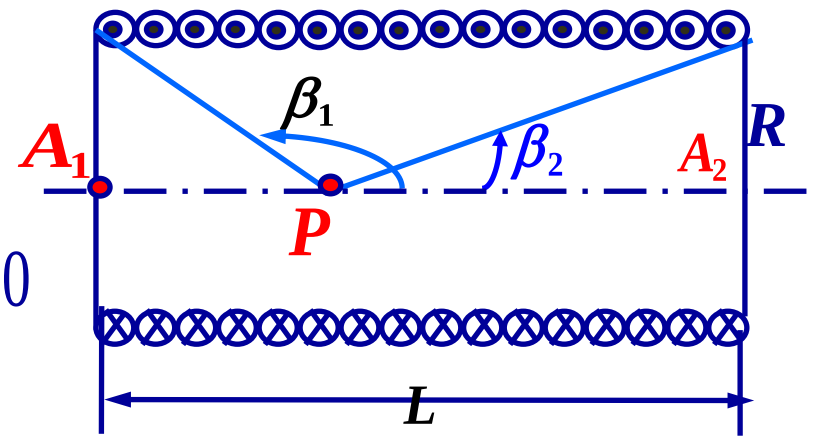
$$\mathrm{d}l=-R\csc^2\beta\,\mathrm{d}\beta.$$

$$R^2+l^2=R^2\csc^2\beta,$$

$$\therefore B=\frac{\mu_0}{2}nI\int_{\beta_1}^{\beta_2}[-\sin\beta]\mathrm{d}\beta=\frac{\mu_0}{2}nI(\cos\beta_2-\cos\beta_1)$$

讨论:

$$B=\frac{\mu_0}{2}nI(\cos\beta_2-\cos\beta_1)$$



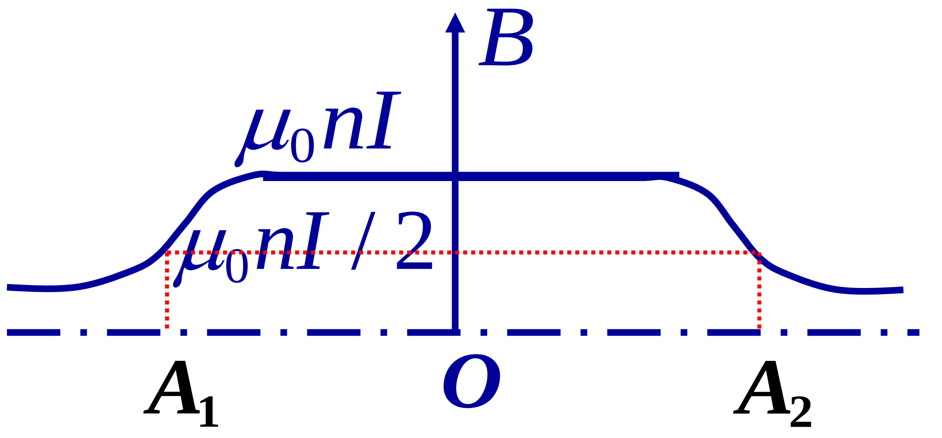
1）螺线管无限长， $\beta_1\to\pi,\beta_2\to 0$

$$B=\mu_0 nI$$

2）半无限长螺线管，端点圆心A1处， $\beta_1\to\pi/2,\beta_2\to 0,$

$$B=\mu_0 nI/2$$

3) 实际上，*L*>>*R*时，螺线管内部的磁场近似均匀，大小为 $\mu_0 nI.$

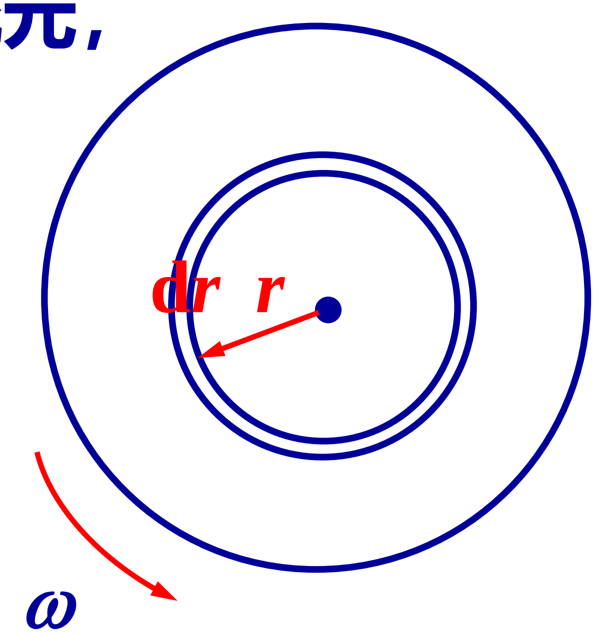


例题 一个半径为R的带电薄圆盘，电量+q均匀分布其上。圆盘以角速度ω，绕通过盘心O并与盘面垂直的轴匀速转动。 求：圆盘中心O处的磁感应强度。

解：带电圆盘转动形成圆电流，

取距盘心r处宽度为dr的圆环作圆电流元，

圆形电流元的电流强度为：



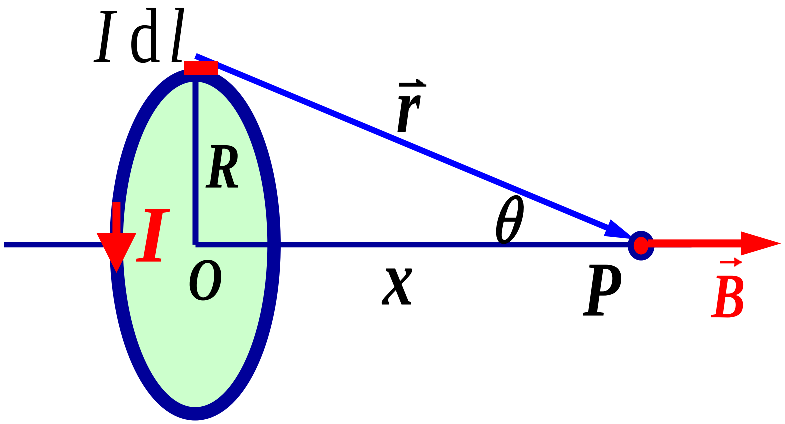
$$(I = \mathrm{d}q / \mathrm{d}t)$$

$$\mathrm{d}I = \frac{\omega}{2\pi}\frac{q}{\pi R^2} 2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{\omega q r\,\mathrm{d}r}{\pi R^2}$$

$$\mathrm{d}B = ?$$

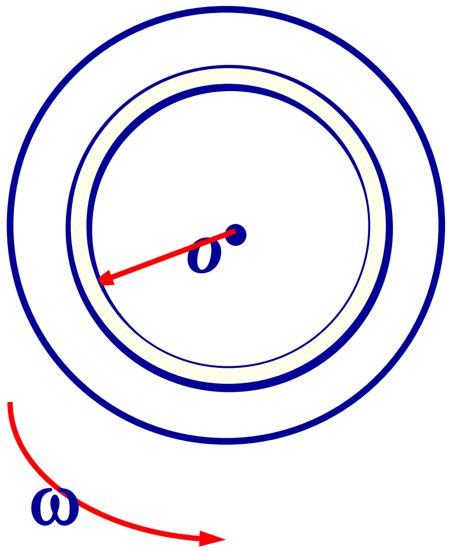
$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$B_o=\frac{\mu_0 I}{2R}\quad(x=0)$$



圆形电流元dr在O点激发的磁场为：

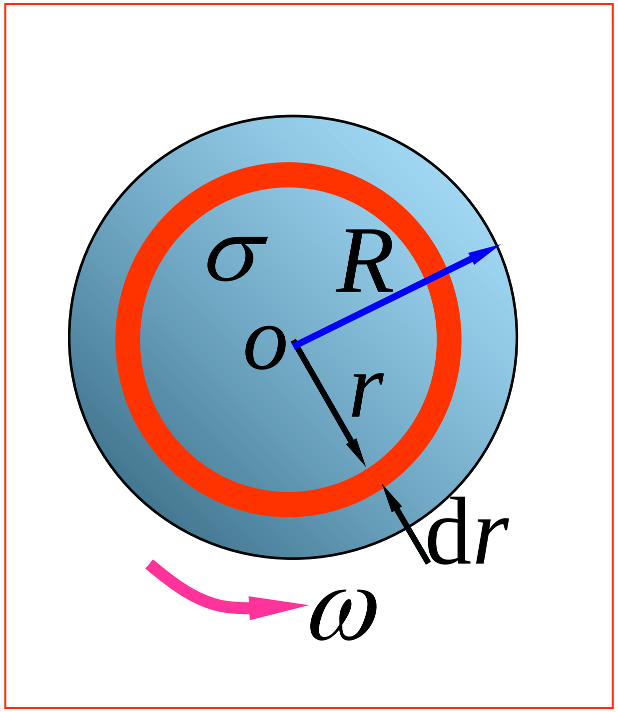
$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\,\mathrm{d}I}{2r}\qquad \mathrm{d}I=\frac{\omega}{2\pi}\frac{q}{\pi R^2}2\pi r\,\mathrm{d}r$$



其它电流元在O点激发的磁场方向相同

$$B=\frac{\mu_0\omega q}{2\pi R^2}\int_0^R \mathrm{d}r=\frac{\mu_0\omega q}{2\pi R}$$

解法二　运动电荷的磁场



$$\mathrm{d}B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}qv}{r^2}$$

$$\mathrm{d}q = \frac{q}{\pi R^2} 2\pi r \mathrm{d}r$$

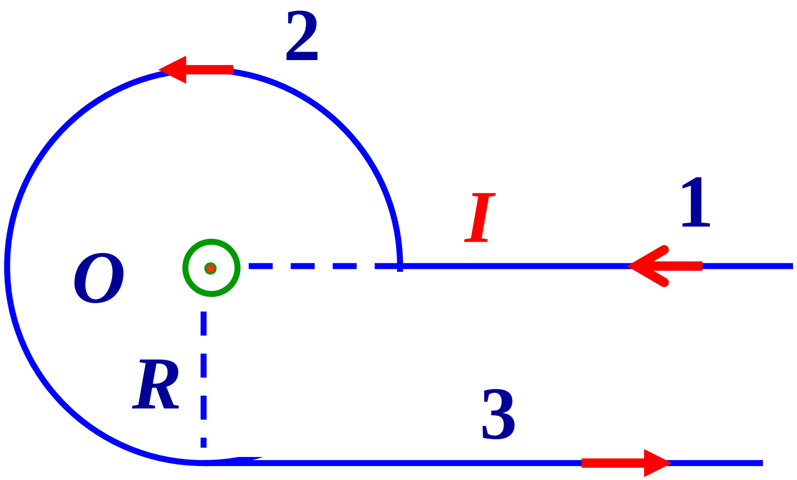
$$v = \omega r$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{q\omega}{R^2}\mathrm{d}r$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{q\omega}{R^2}\int_0^R \mathrm{d}r = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{q\omega}{R}$$

作业：第11章 1，2，3，4

例：如图，求O 点的磁感应强度。



解

$$B_1 = 0$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3\mu_0 I}{8R}$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$\theta_1 = \pi/2 \quad \theta_2 = \pi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

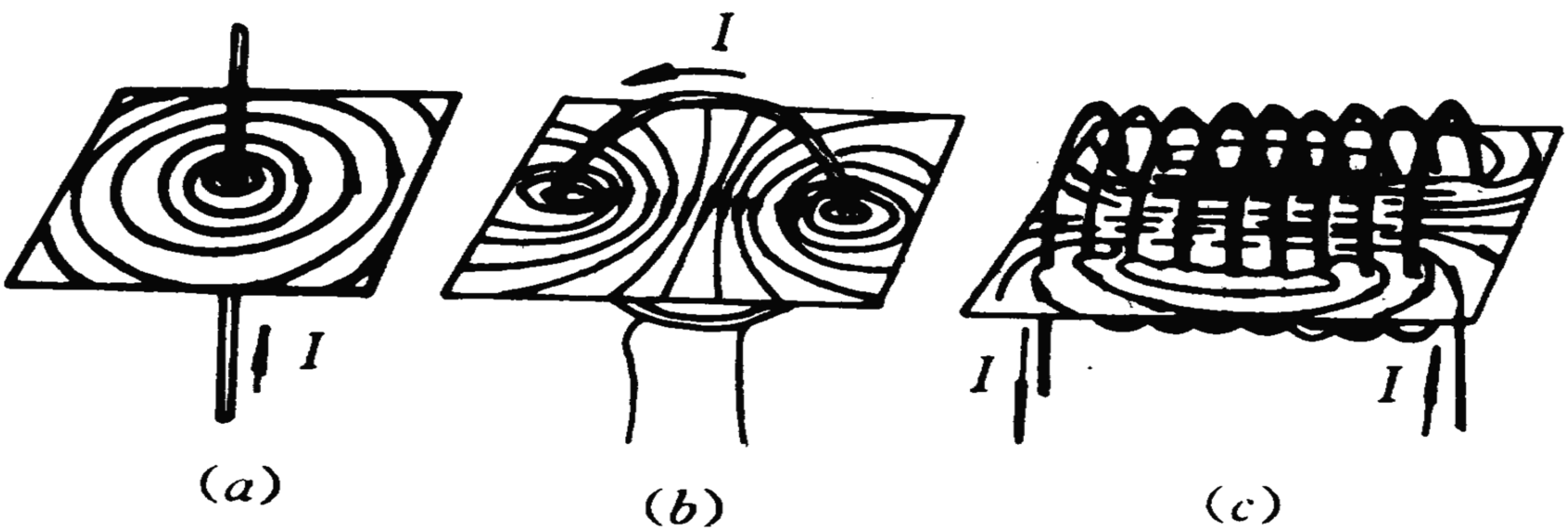
$$B = B_1 + B_2 + B_3$$

§11-3 磁通量　稳恒磁场的高斯定理

1. 磁感线　磁通量

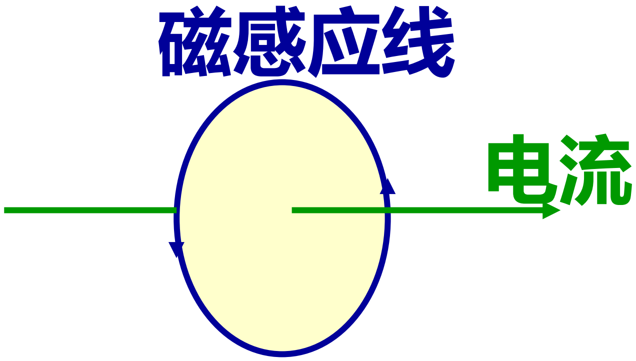
磁感线与磁感应强度B

规定：曲线上每一点的切线方向就是该点的磁感强度 B 的方向，曲线的疏密程度表示该点的磁感强度 B 的大小.

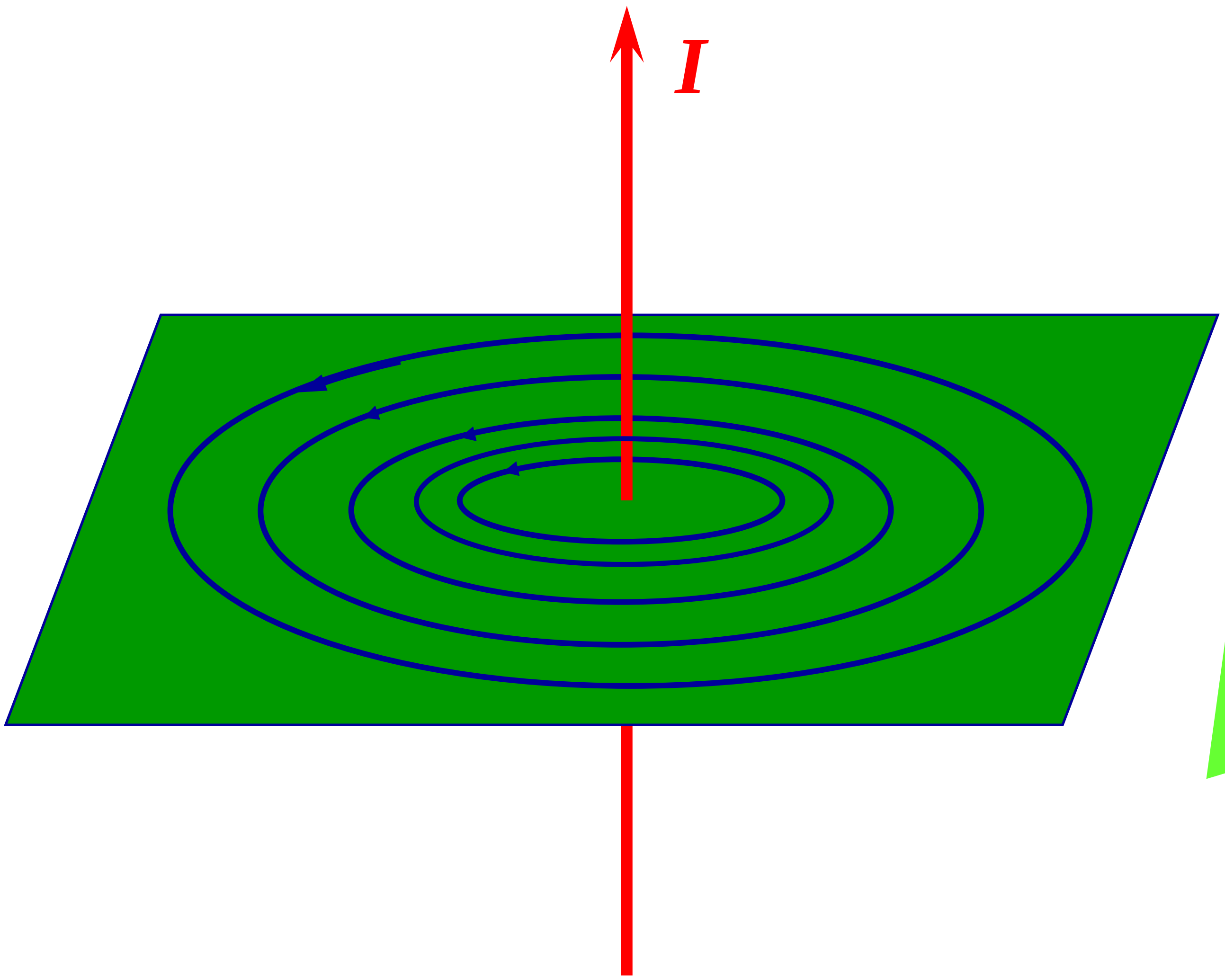


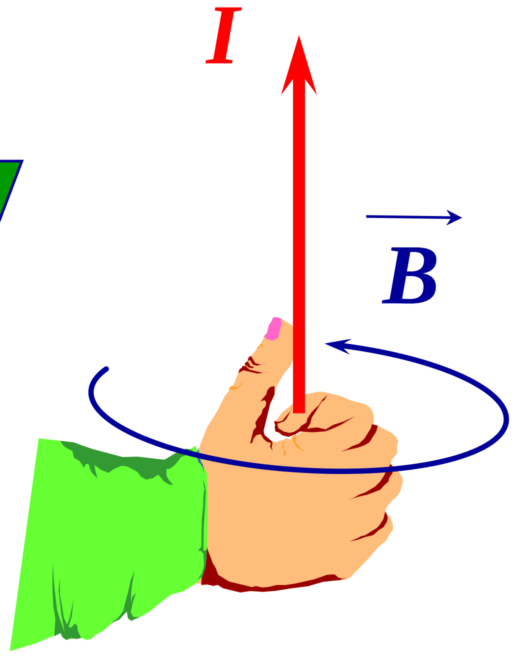
磁感应线的性质

- 与电流套连
- 闭合曲线(磁单极子不存在)
- 互不相交
- 方向与电流成右手螺旋关系

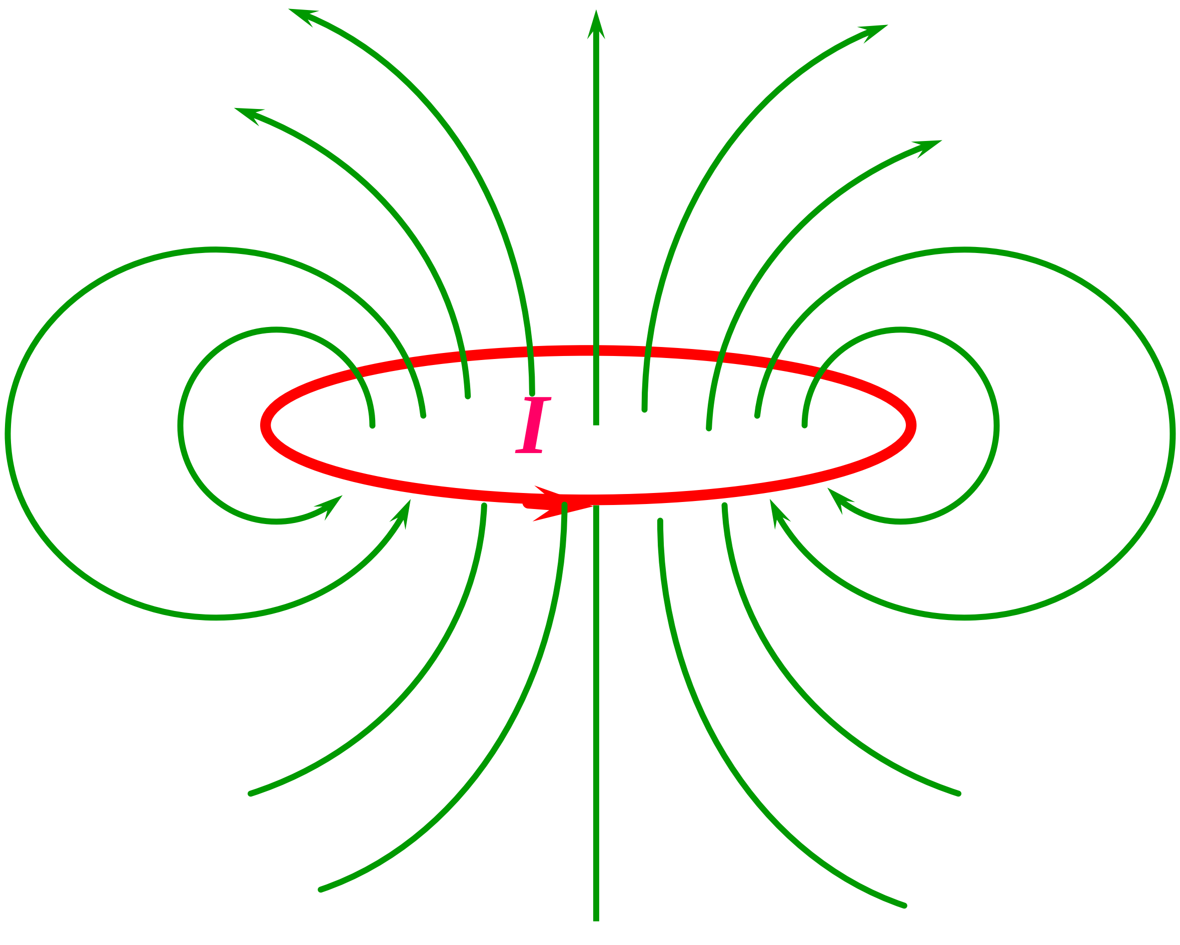


直线电流的磁感应线

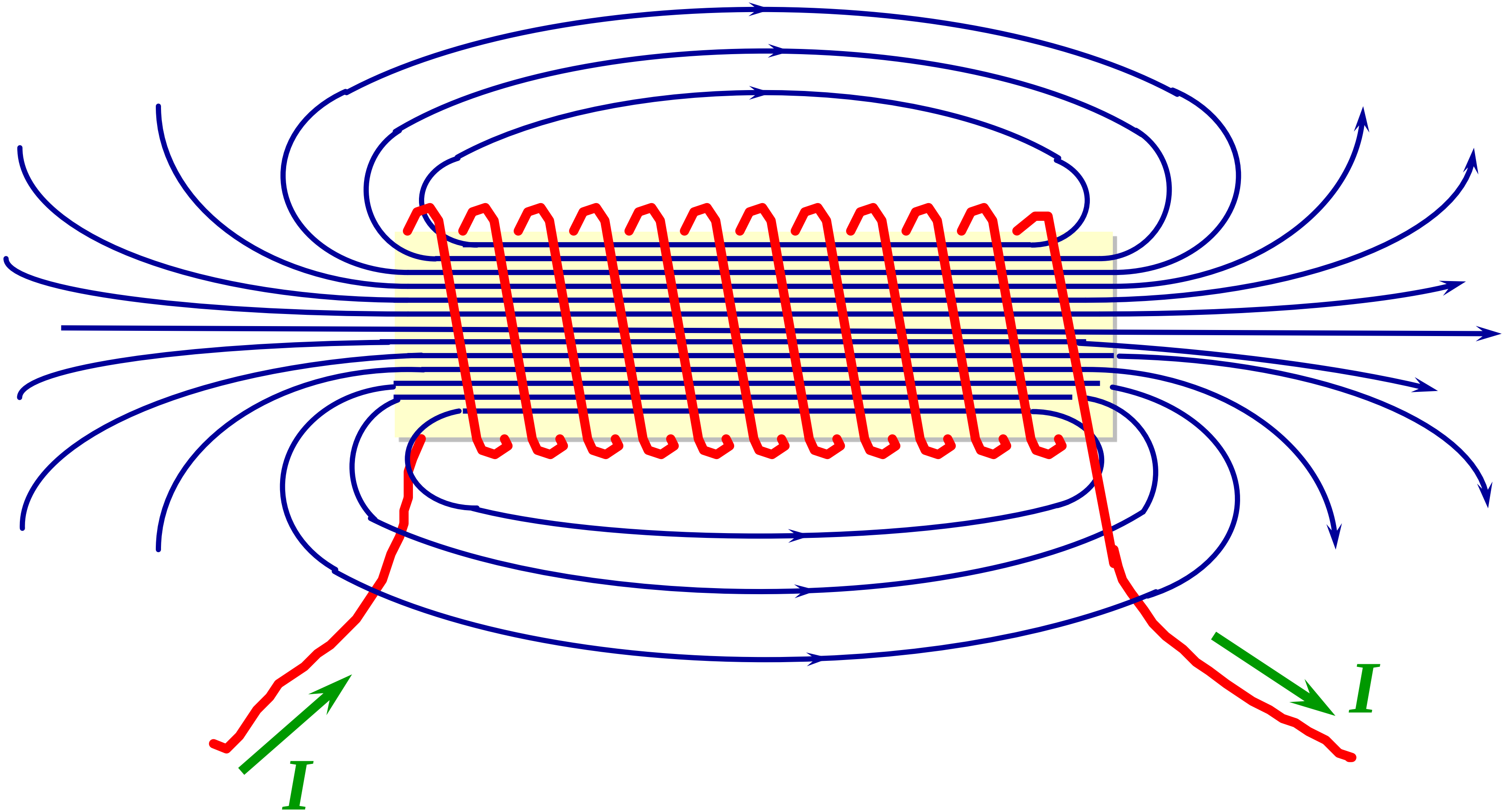




圆电流的磁感应线



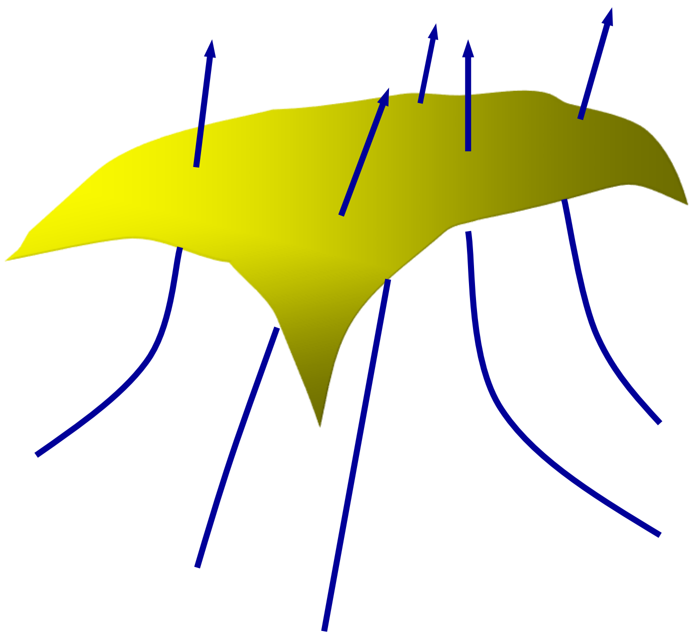
通电螺线管的磁感应线

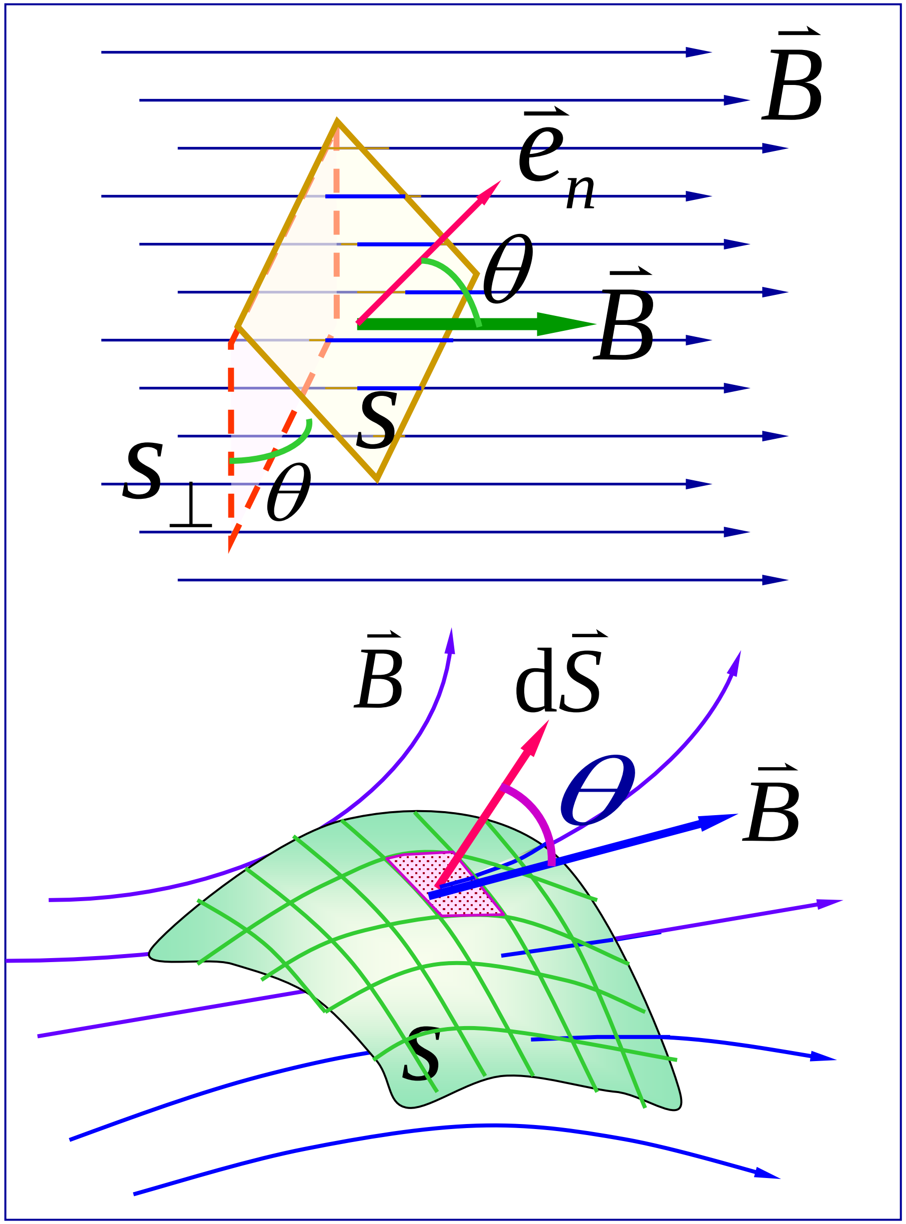


规定：通过磁场中某点处垂直于$\vec{B}$矢量的单位面积的磁感应线数等于该点$\vec{B}$矢量的量值。磁感应线越密，磁场越强；磁感应线越稀，磁场就越弱，磁感线的分布能形象地反映磁场的方向和大小特征。

磁通量

磁通量：穿过磁场中任一给定曲面的磁感线总数。





$$\Phi = BS\cos\theta = BS_\perp$$

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \vec{B}\cdot\vec{e}_n S$$

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S\cos\theta$$

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\boxed{\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

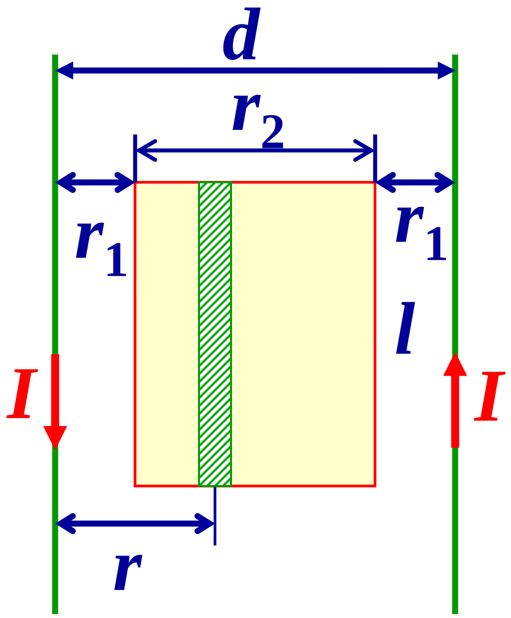
单位：韦伯（Wb）

$$1\mathrm{Wb} = 1\mathrm{T}\times 1\mathrm{m}^2$$

例：求穿过位于两通以相反电流的无限长载流直导线间矩形面积的磁通量。

解：在距离左边导线r处选一宽dr的矩形条，则

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi (d - r)}$$



$$\mathrm{d}\varphi = B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d - r}\right) l \mathrm{d}r$$

$$\varphi = \int \mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_{r_1}^{r_1 + r_2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d - r}\right) \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{r_1 + r_2}{r_1}$$

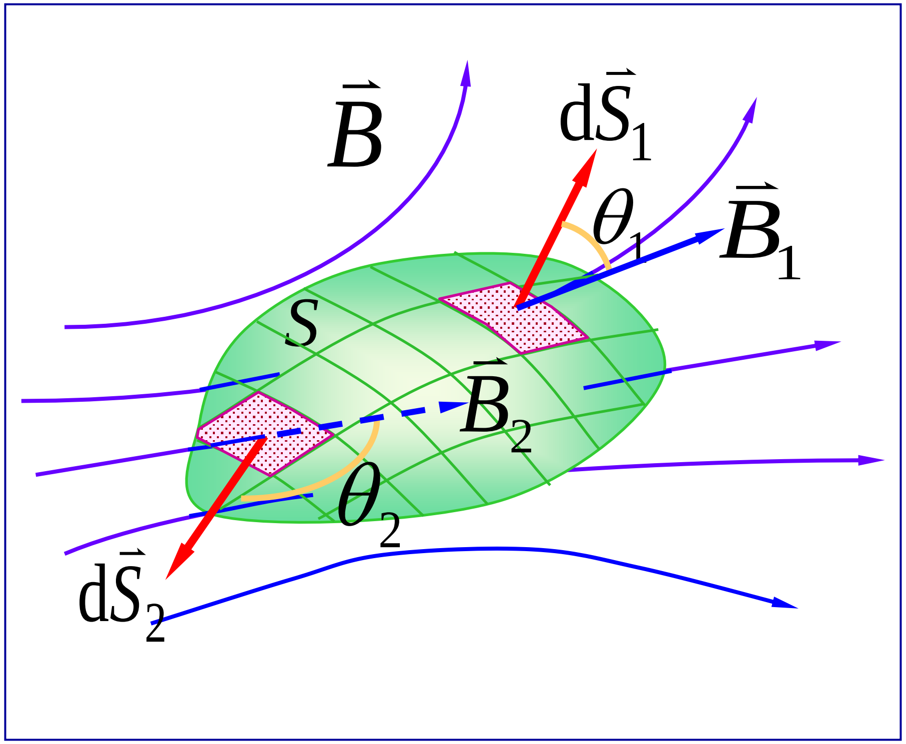
2. 磁场的高斯定理

通过闭合曲面的电通量 ⟷ 闭合曲面内的电量

由磁感应线的闭合性可知，对任意闭合曲面，穿入的磁感应线条数与穿出的磁感应线条数相同，因此，通过任何闭合曲面的磁通量为零。

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

高斯定理的积分形式



$$\mathrm{d}\Phi_1 = \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 > 0$$

$$\mathrm{d}\Phi_2 = \vec{B}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 < 0$$

$$\oiint_S B\cos\theta \mathrm{d}S = 0$$

- **磁场高斯定理**

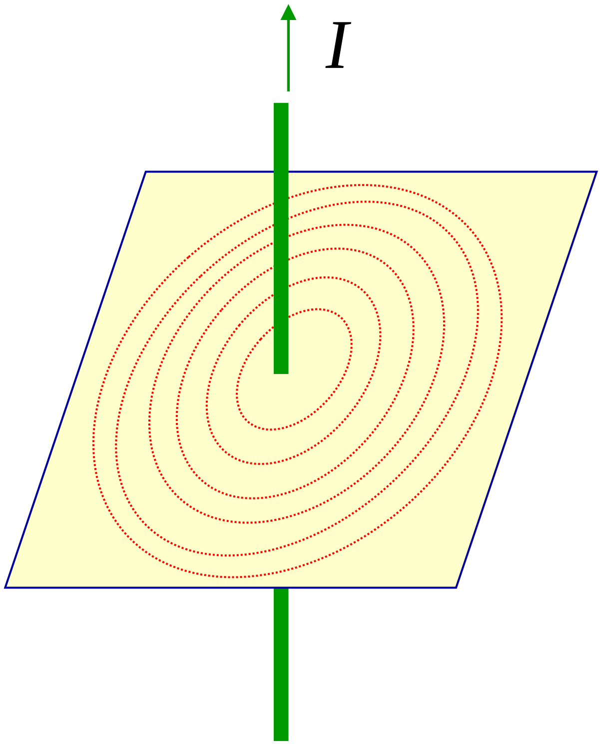
$$\boxed{\oiint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$

- **物理意义：通过任意闭合曲面的磁通量必等于零**
  (故磁场是无源的.)

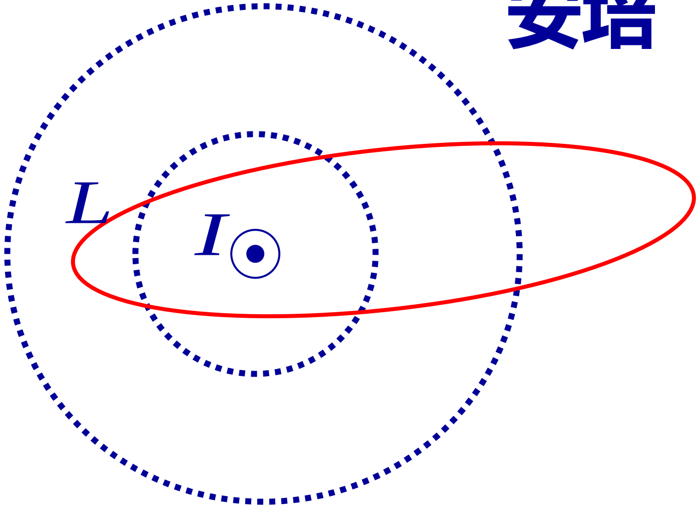
§11-4 安培环路定理

1. 安培环路定理

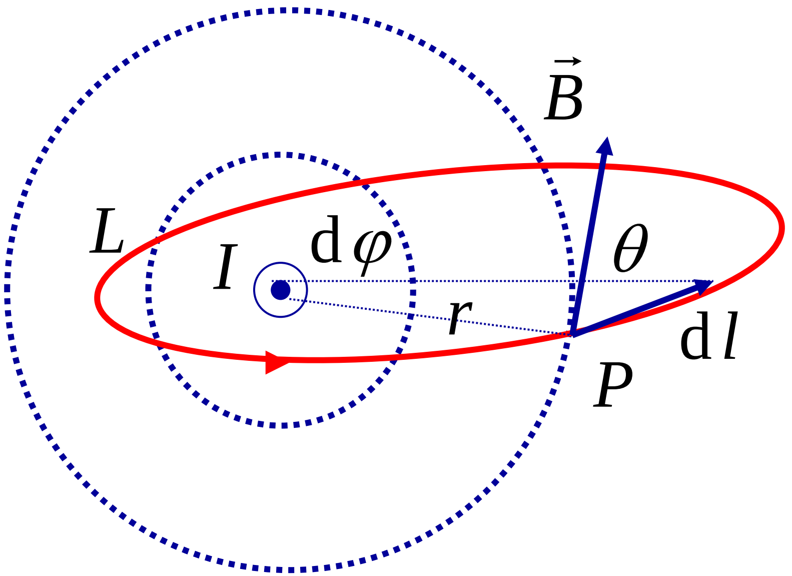
（1） 环路包围电流



安培



在垂直于导线的平面内任作的环路上取一点，到电流的距离为*r*，磁感应强度的大小：



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

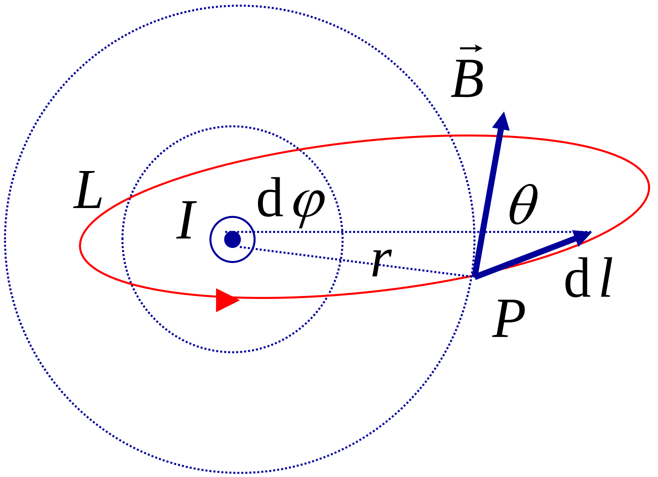
由几何关系得： $\cos\theta\,\mathrm{d}l = r\,\mathrm{d}\varphi$

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\cos\theta\,\mathrm{d}l = \oint_L Br\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \mu_0 I$$

如果闭合曲线不在垂直于导线的平面内：



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \vec{B}\cdot(\mathrm{d}\vec{l}_{\perp} + \mathrm{d}\vec{l}_{//})$$

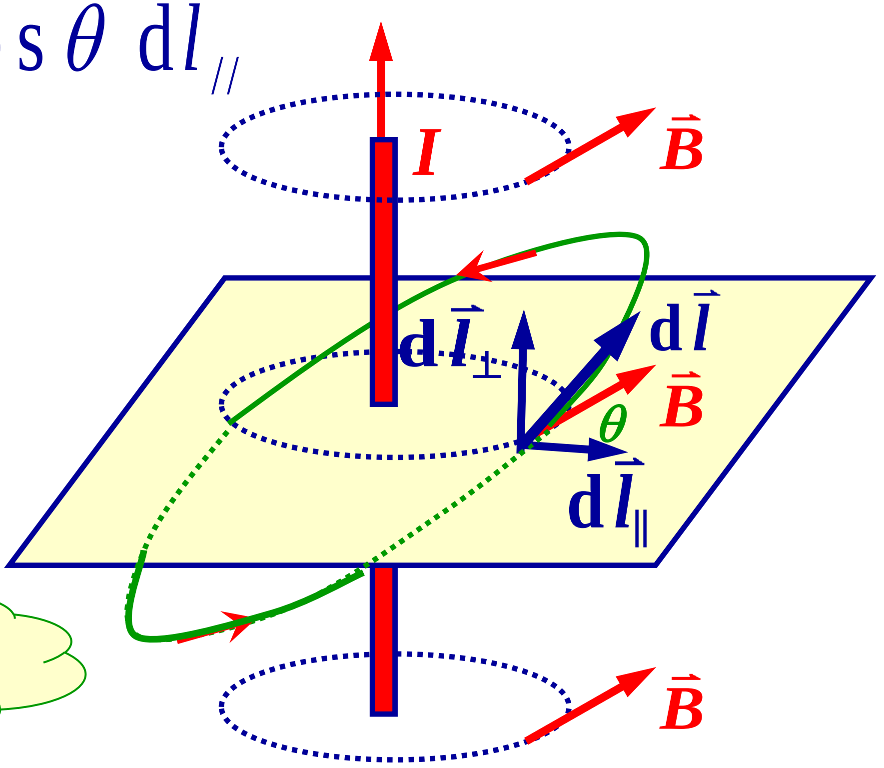
$$= \oint_L B\cos 90^{\circ}\,\mathrm{d}l_{\perp} + \oint_L B\cos\theta\,\mathrm{d}l_{//}$$

$$= 0 + \oint_L B r\,\mathrm{d}\varphi$$

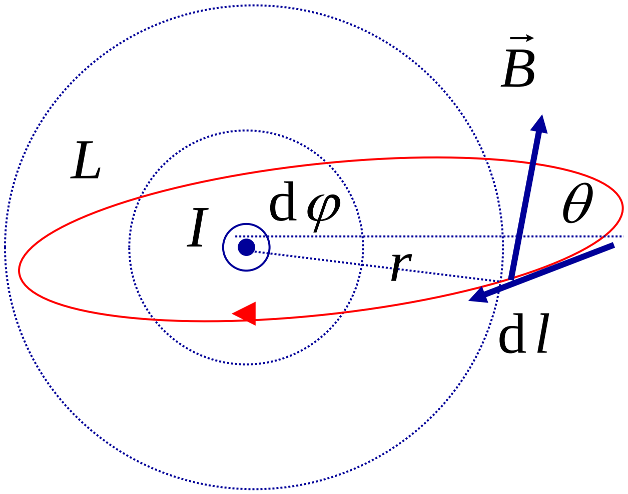
$$= \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\,r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \mu_0 I$$

结果一样！



如果沿同一路径但改变绕行方向积分：



$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\cos(\pi-\theta)\,\mathrm{d}l$$

$$= \oint_L - B\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

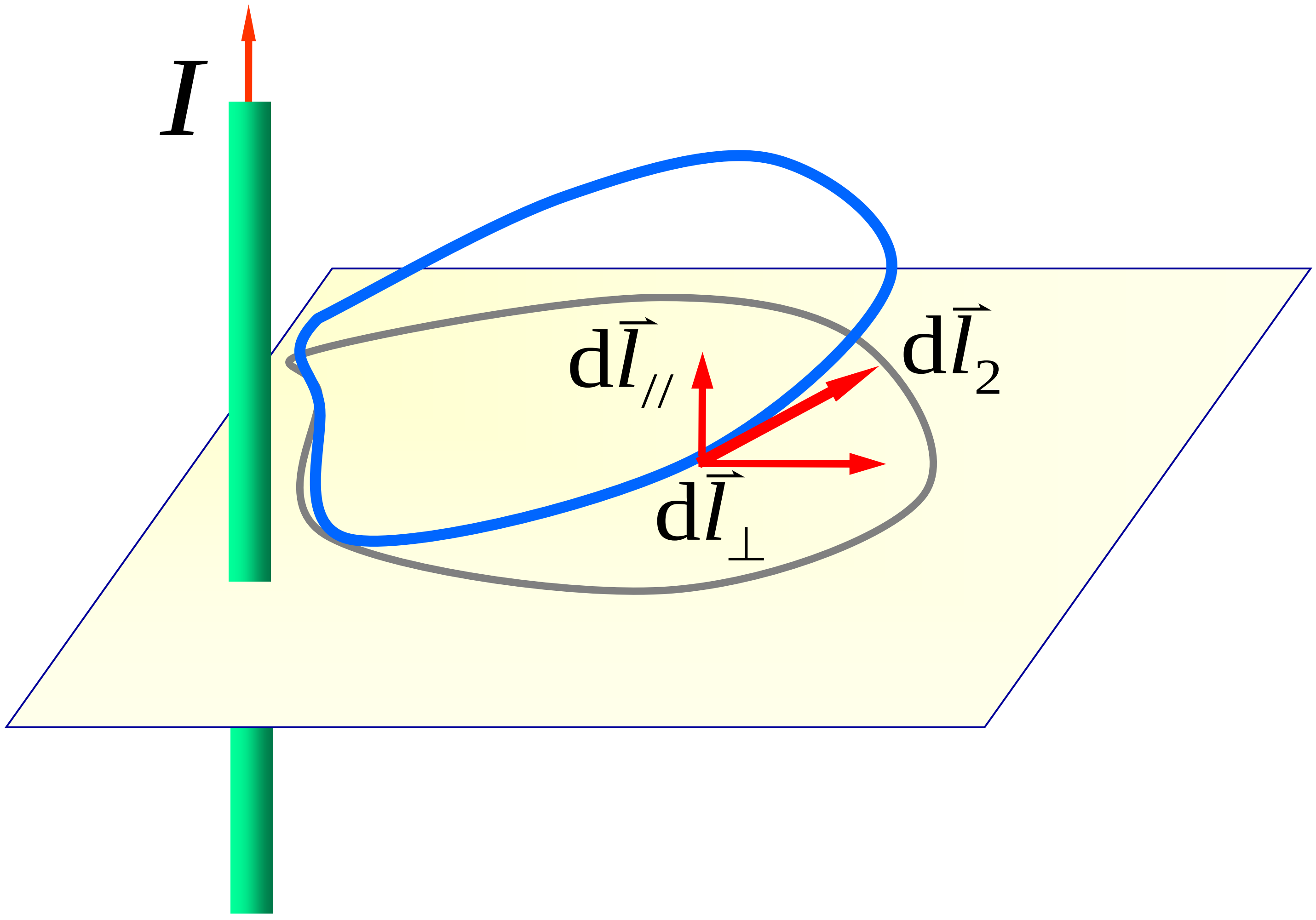
$$= -\int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= -\mu_0 I$$

结果为负值

以上表明：磁感应强度矢量的环流与闭合曲线的形状无关，它只和闭合曲线内所包围的电流有关。

（2） 环路不包围电流



(2) 环路不包围电流

$$\mathrm{d}l\cos\theta = r\mathrm{d}\phi \qquad \mathrm{d}l'\cos\theta' = -r'\mathrm{d}\phi$$

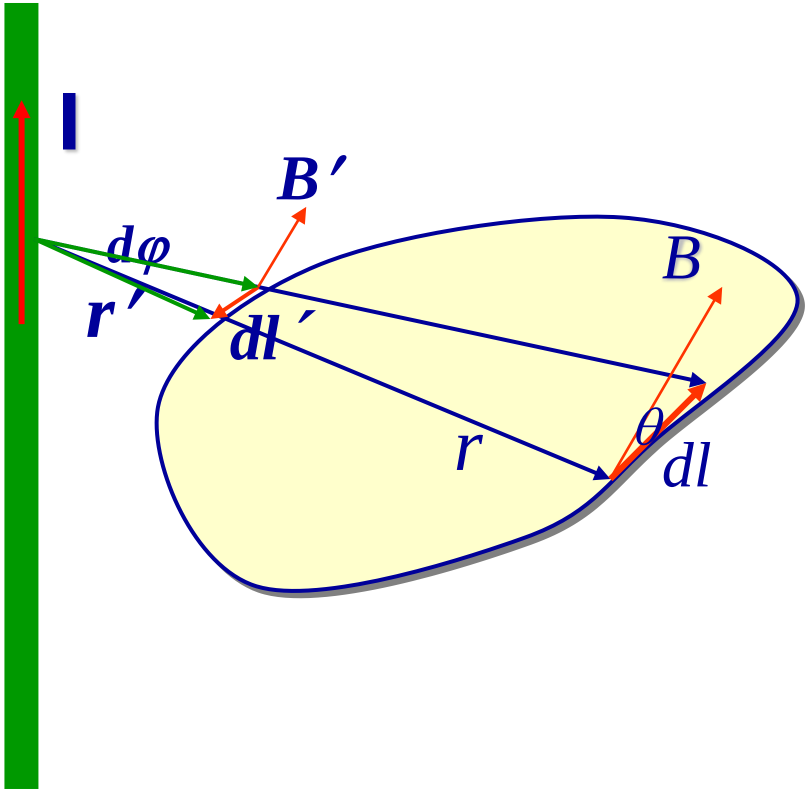
$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \qquad B' = \frac{\mu_o I}{2\pi r'}$$

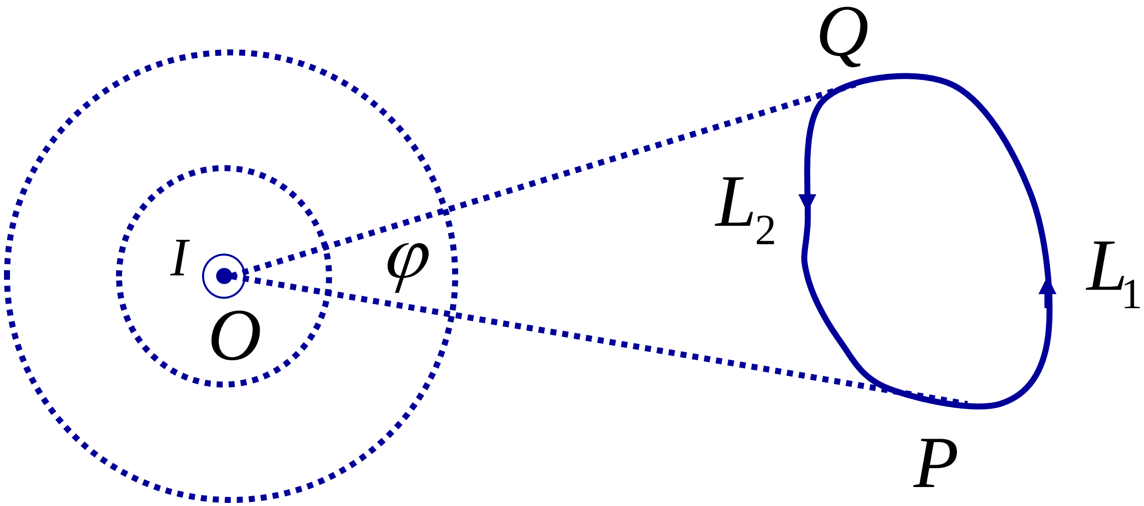
$$\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \vec{B}'\cdot\mathrm{d}\vec{l}'$$

$$= B\mathrm{d}l\cos\theta + B'\mathrm{d}l'\cos\theta'$$

$$= \frac{\mu_o I}{2\pi r}r\mathrm{d}\phi - \frac{\mu_o I}{2\pi r'}r'\mathrm{d}\phi$$

$$= 0$$





$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{L_1} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{L_2} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

结果为零！

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\int_{L_1} \mathrm{d}\varphi - \int_{L_2} \mathrm{d}\varphi\right) = 0$$

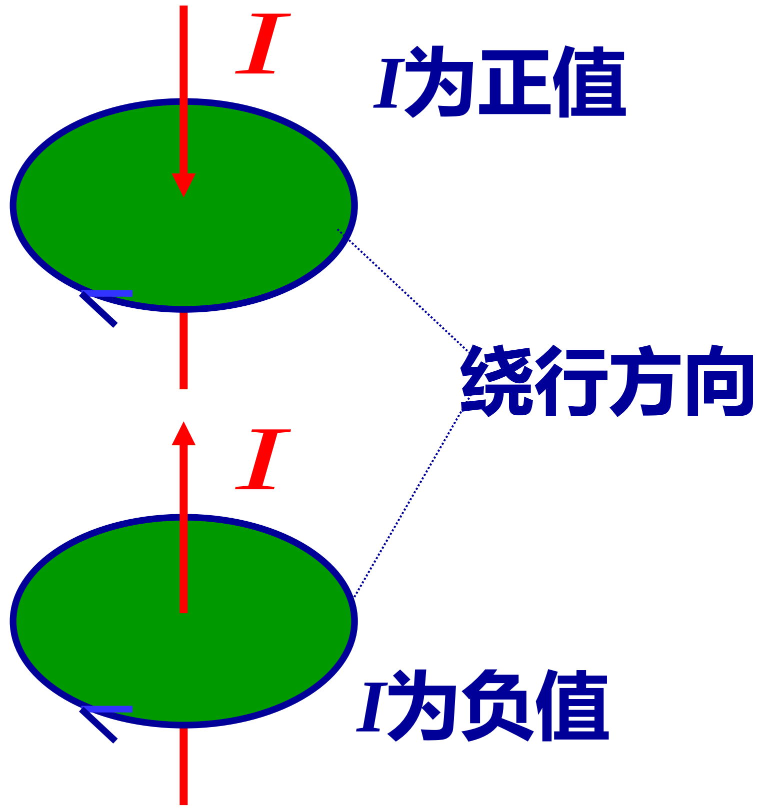
表明：闭合曲线不包围电流时，磁感应强度矢量的环流为零。

安培环路定理

在磁场中，沿任一闭合曲线$\vec{B}$矢量的线积分（称$\vec{B}$矢量的环流），等于真空中的磁导率μ_0乘以穿过以这闭合曲线为边界所张<u>任意曲面</u>的各恒定电流的代数和。

安培环路定理

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I$$



电流I的正负规定：积分路径的绕行方向与电流成右手螺旋关系时，电流I为正值；反之I为负值。

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

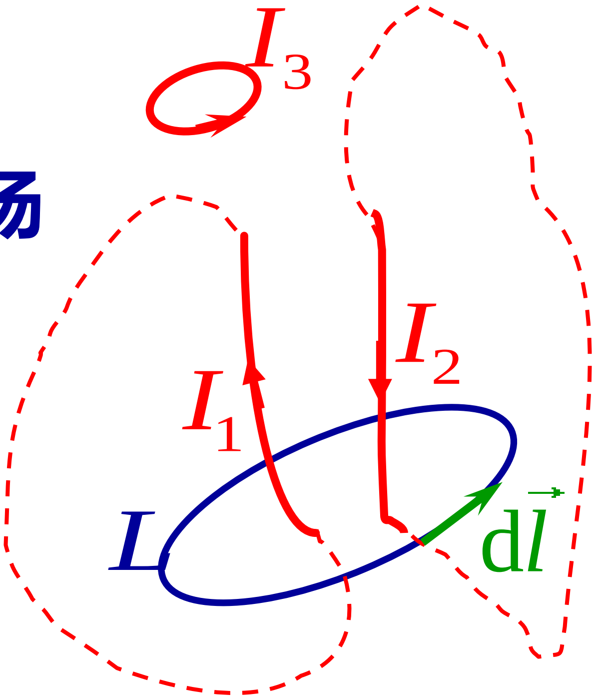
各字母物理含义：

$\vec{B}$ … **空间所有电流共同产生的磁场**

L … **在场中任取的一闭合线，任意规定一个绕行方向**

$d\vec{l}$ … **L上的任一线元**

$\sum I$ … **环路所包围的所有电流的代数和**



多个电流：

P点的磁感应强度为 $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4$

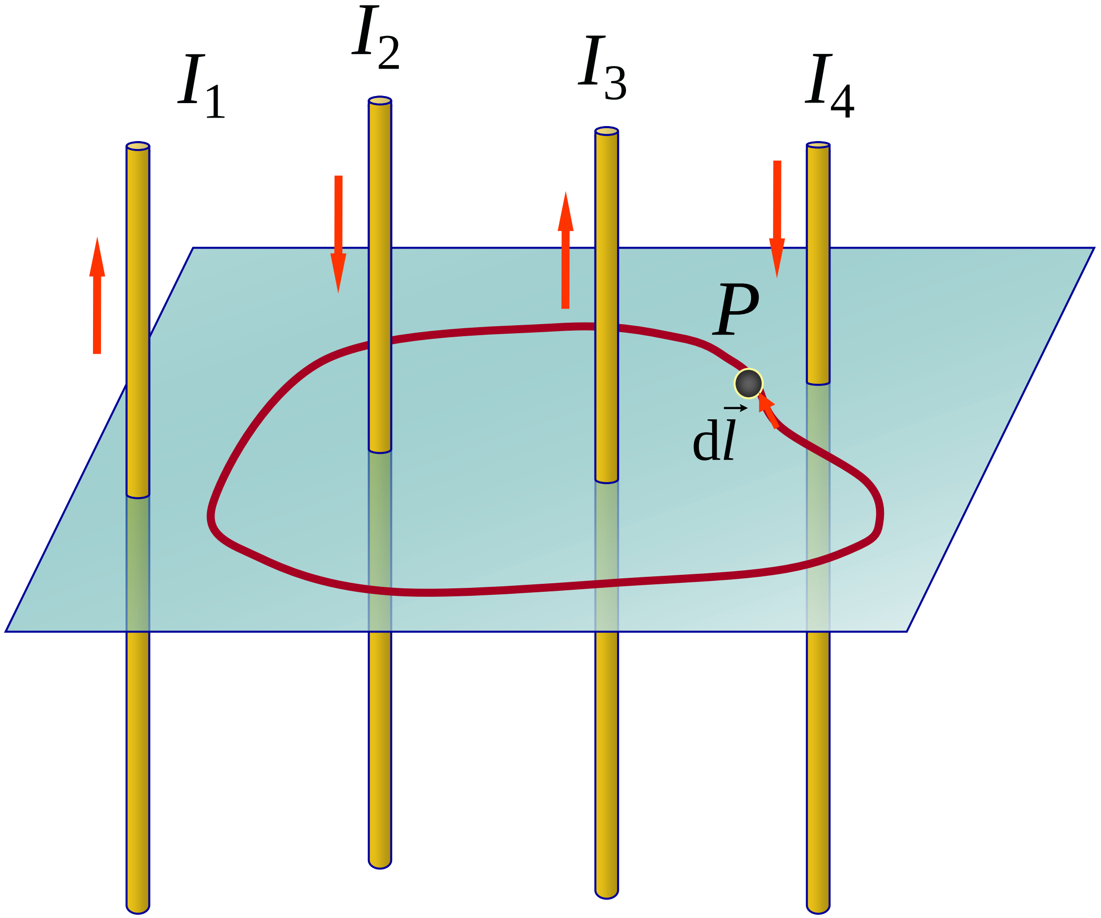
$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \left(\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \oint_L \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_L \vec{B}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$+ \oint_L \vec{B}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_L \vec{B}_4 \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

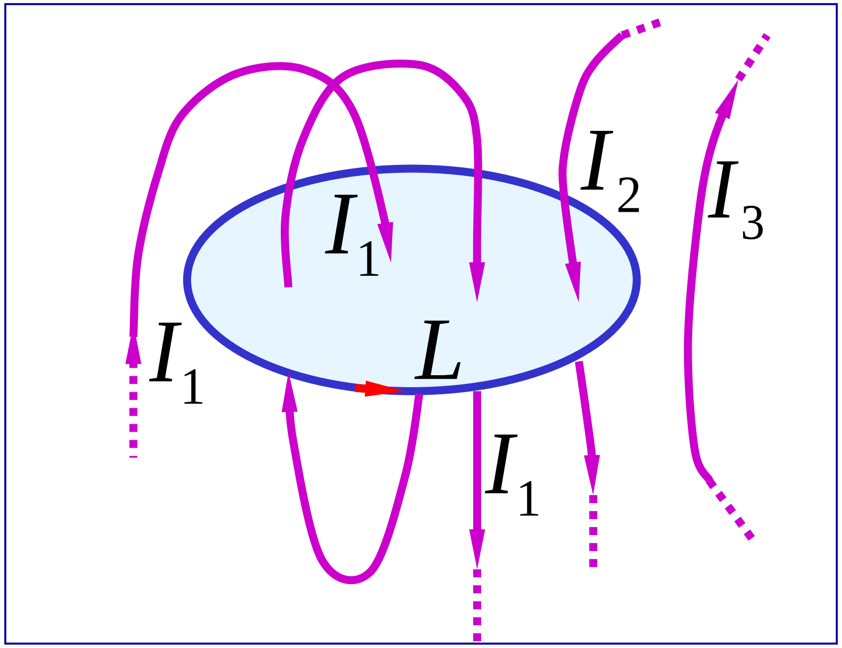
$$= \mu_0 \left(I_3 - I_2\right)$$

$$= \mu_0 \sum I_{in}$$



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0(-I_1 + I_1 - I_1 - I_2)$$

$$= -\mu_0(I_1 + I_2)$$



问 1）$\vec{B}$是否与回路L外电流有关?

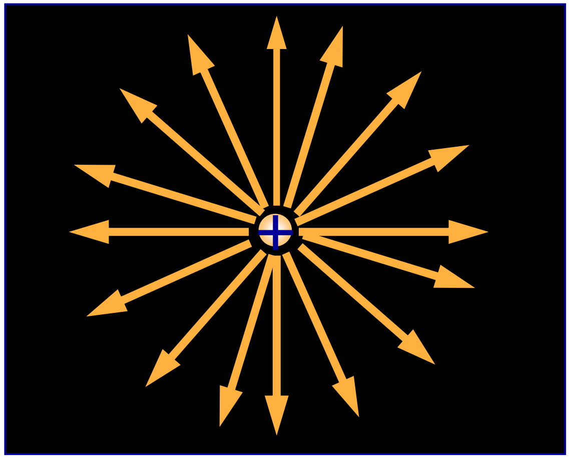
2）若 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$，是否回路$L$上各处$\vec{B} = 0$？

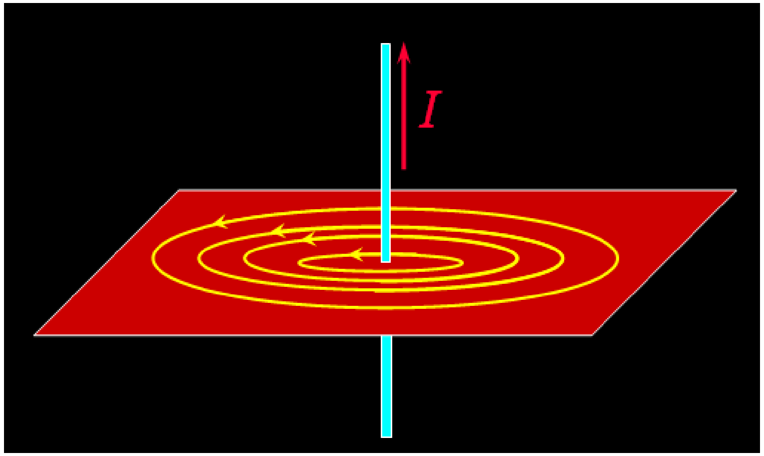
是否回路L内无电流穿过?

★注意：

- 任意形状稳恒电流，安培环路定理都成立。
- 环流虽然仅与所围电流有关，但磁场却是所有电流在空间产生磁场的叠加。
- 安培环路定理仅仅适用于恒定电流产生的恒定磁场，恒定电流本身总是闭合的，因此安培环路定理仅仅适用于闭合的载流导线。对任意一段设想的载流导线是不成立的.
- 电流方向与L的环绕方向服从右手螺旋关系的 I 为正，否则为负。

静电场 VS 恒定磁场





高斯定理：

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

有源场，“源” “汇”

$$\oiint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

无源场

环路定理：

$$\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

无旋场，保守力场

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

有旋场，非保守力场

2. 安培环路定理的应用

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

应用安培环路定理的解题步骤：

(1)分析**磁场的对称性**；

(2)**过场点选择适当的路径**，使得 $\vec{B}$ 沿此环路的积分易于计算：$\vec{B}$ 的量值恒定，$\vec{B}$ 与 $\mathrm{d}\vec{l}$ 的夹角处处相等；

(3)**求出环路积分**；

(4)用右手螺旋定则确定所选定的**回路包围电流的正负**，最后由磁场的安培环路定理求出磁感应强度 $\vec{B}$ 的大小。

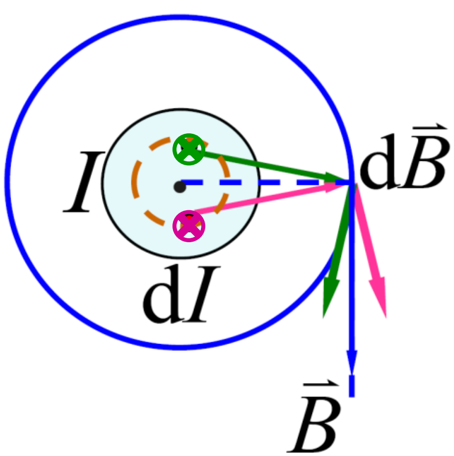
（1） 长直圆柱形载流导线内外的磁场

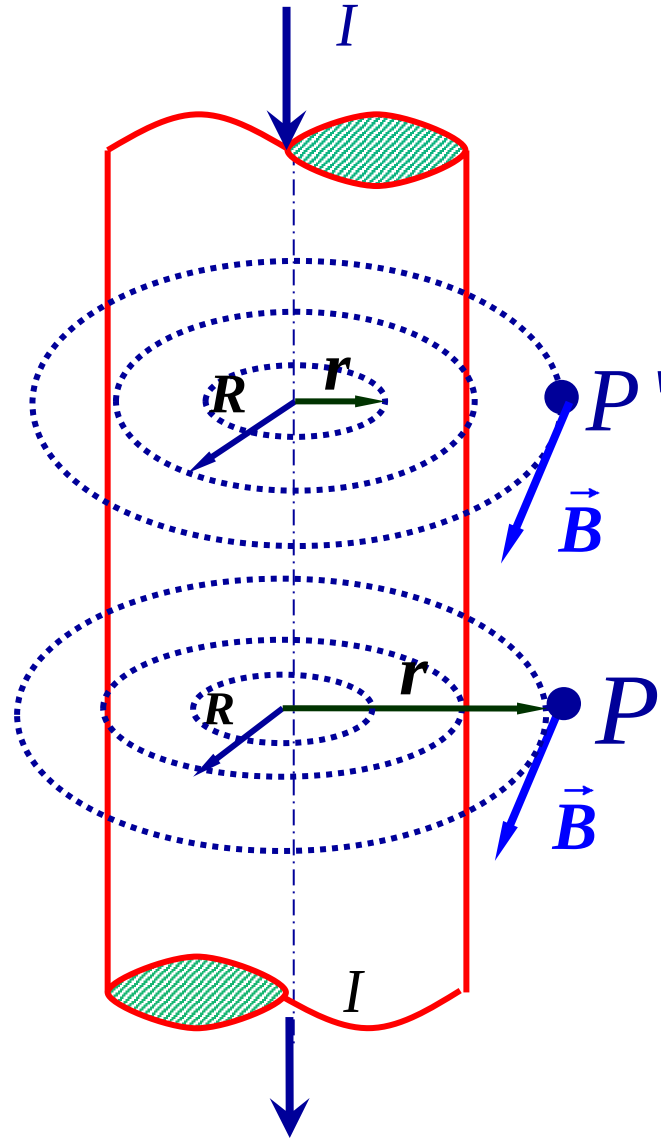
① 圆柱电流呈轴对称分布，

磁场关于圆柱形的轴线具有对称性，

② 导线可近似看作**无限长**，

磁感应线是垂直于电流的同心圆。且： $B_P = B_{P'}$





过P点，取以轴线为圆心的圆形回路，(积分路径沿顺时针)

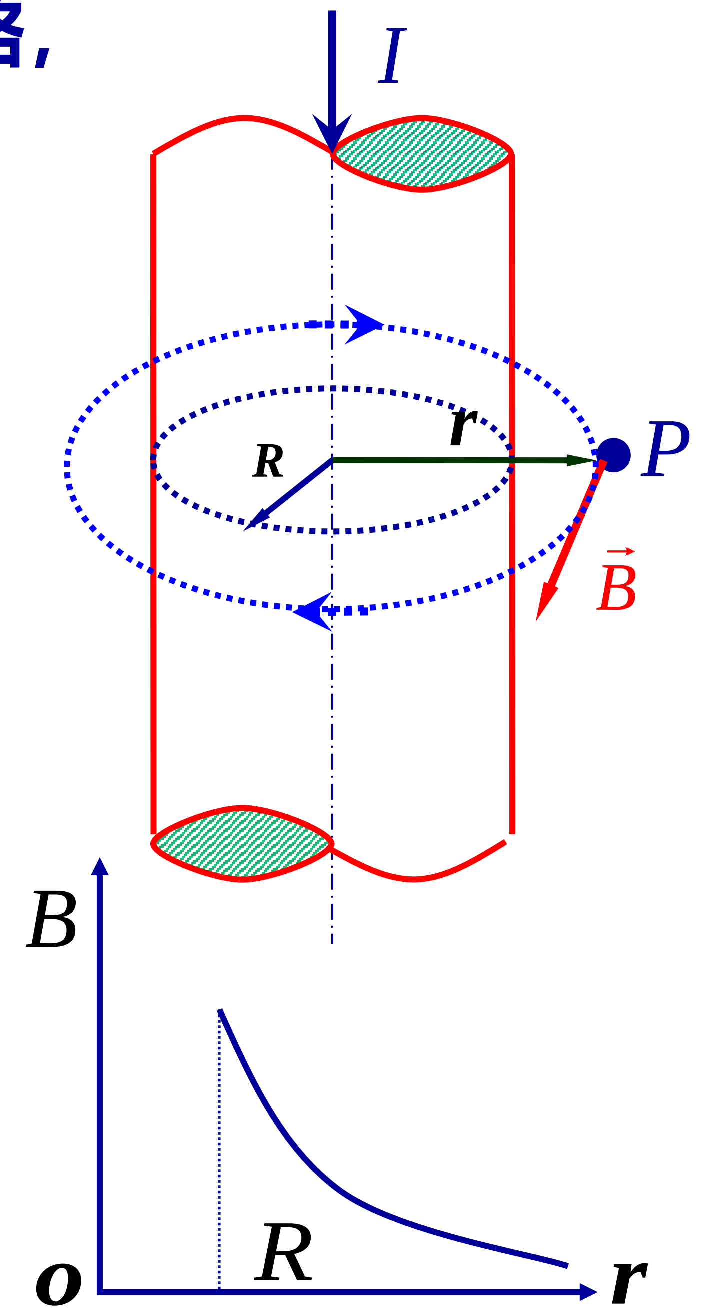
$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint \underline{\underline{B}}\cdot dl = B\cdot 2\pi r,$$

1)当 $r > R$ $\qquad \mu_0 \sum I = \mu_0 I,$

$$\therefore\ B\cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\therefore\ B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

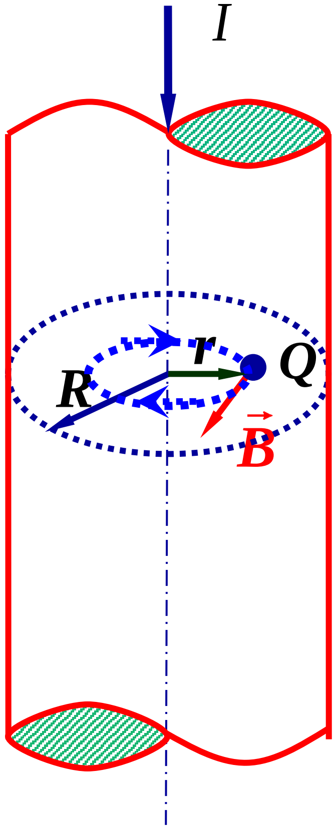


2) 当 $r < R$，且电流均匀分布在圆柱形导线截面上时，

$$\mu_0 \sum I' = \mu_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I$$

$$\therefore B \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I$$

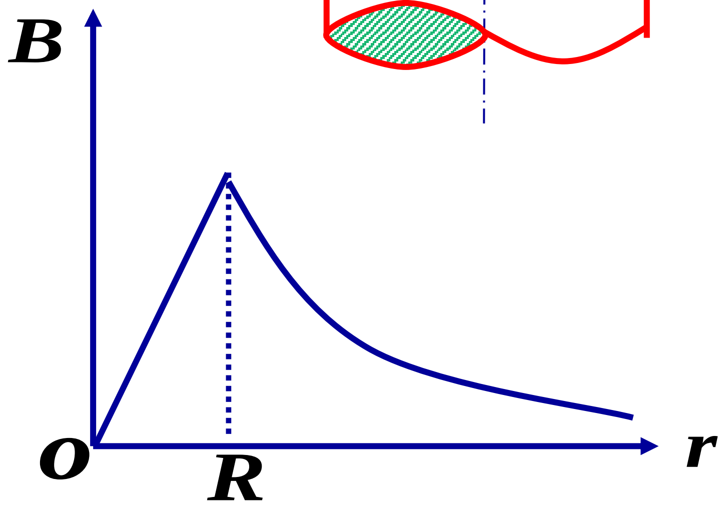
$$\therefore B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ir}{R^2}$$



3) 当 $r < R$，且电流均匀分布在圆柱形导线的表面层时

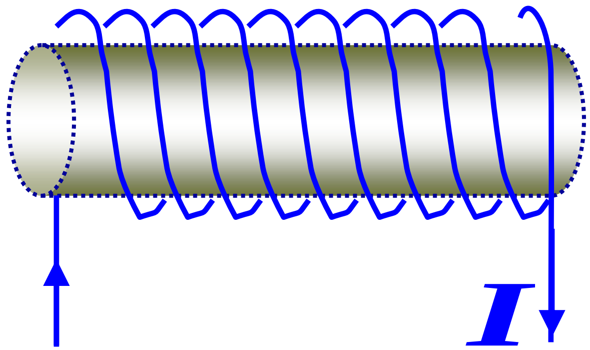
$$\mu_0 \sum I = 0,$$

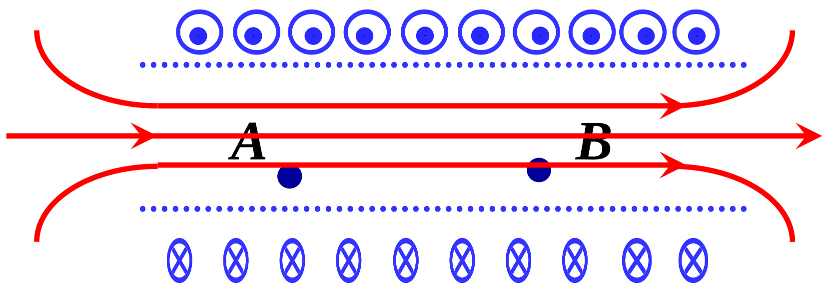
$$\therefore B \cdot 2\pi r = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$



（2）载流长直螺线管内的磁场

绕得均匀紧密的长螺线管，通有电流 I。





① 电流轴对称分布，磁场具有轴对称性；

② 螺线管可近似看作无限长，

螺线管内的磁感应线平行于中心轴线；

同一磁感应线上各点的 B 相同；

③ 螺线管外的磁感应强度很弱，可近似忽略。

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = B \cdot \overline{AB}$$

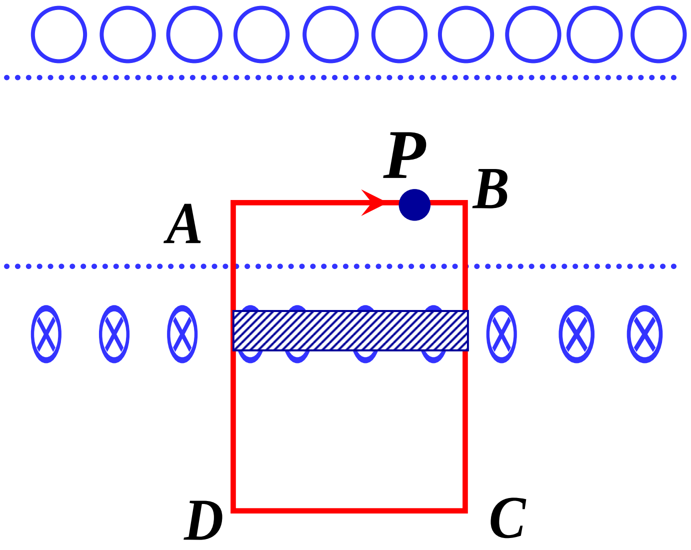
闭合回路内所包含的电流：

$$\mu_0 \sum I = \mu_0 * n\overline{AB} * I$$

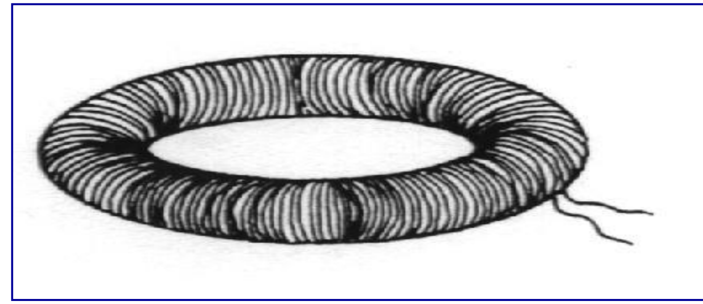
$$\boxed{\because \oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I}$$

$$\therefore B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

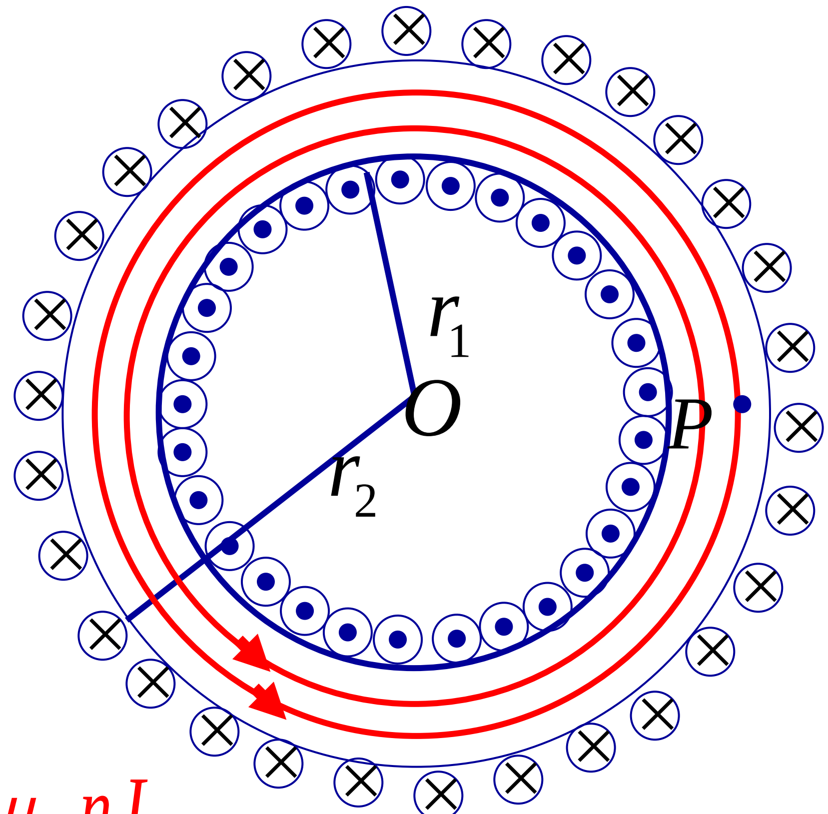
P点任意取：螺线管内的*B*分布均匀。



（3）载流螺绕环内的磁场



环上线圈的总匝数为N，电流为I。



$$\because \ \vec{B} \,//\, \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\therefore \int_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\oint_L \mathrm{d}l$$

$$= B2\pi r$$

$$= \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \xrightarrow{r_2 - r_1 << r} B = \mu_0 nI$$

若在外部再做一个环路，可得 $\sum I_i = 0 \longrightarrow B_{\mathrm{out}} = 0$

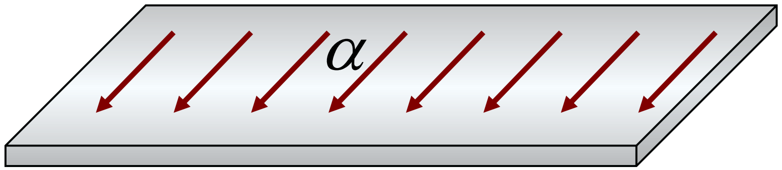
例题 求无限大载流平面外一点的磁感应强度。

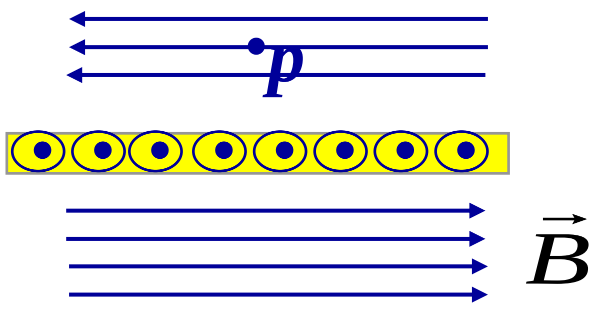
设电流的线密度为 α（即在平面内，通过垂直于电流方向的单位长度上的电流强度）。

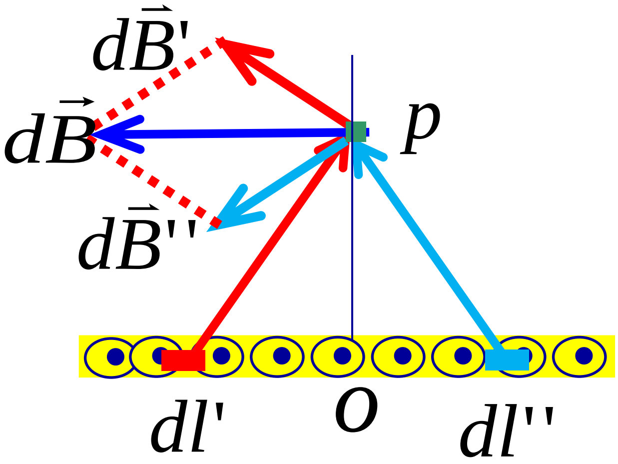
解：分析电流对称性可知，

①磁感应强度方向在垂直于电流方向的平面内；在平面两侧，磁场方向是反平行的。

②到载流平面距离相等的点的磁感应强度大小相等。







③过 P 点选取如图所示的矩形闭合回路，

应用安培环路定理：$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I$

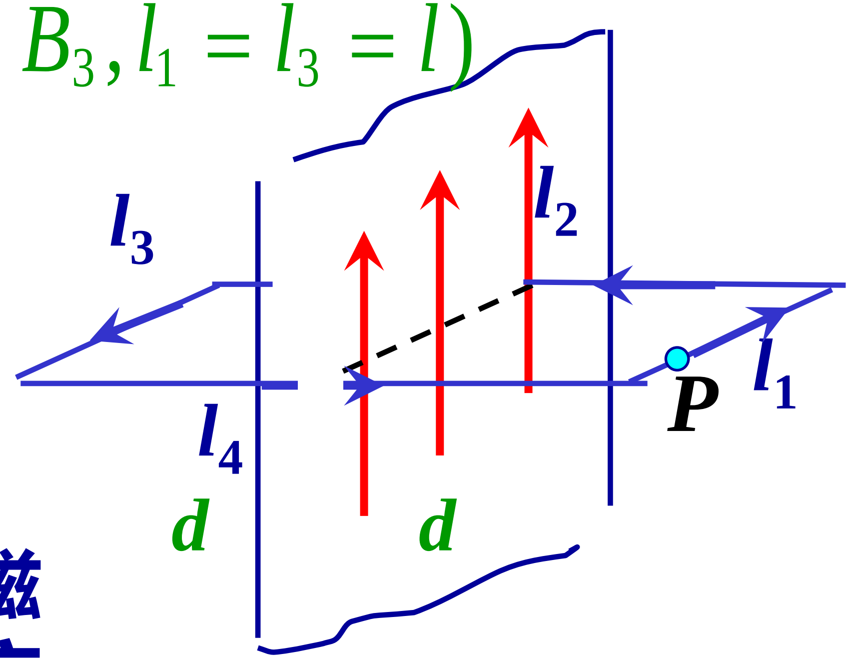
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{B}_1\cdot d\vec{l} + \int_{l_2} \cancel{\vec{B}_2\cdot d\vec{l}} + \int_{l_3} \vec{B}_3\cdot d\overleftarrow{l} + \int_{l_4} \cancel{\vec{B}_4\cdot d\vec{l}}$$

$$= B_1 l_1 + B_3 l_3 \ (B_1 = B_3, l_1 = l_3 = l)$$

$$= 2Bl$$

$$\mu_0 \sum I = \mu_0 \cdot \alpha \cdot l$$

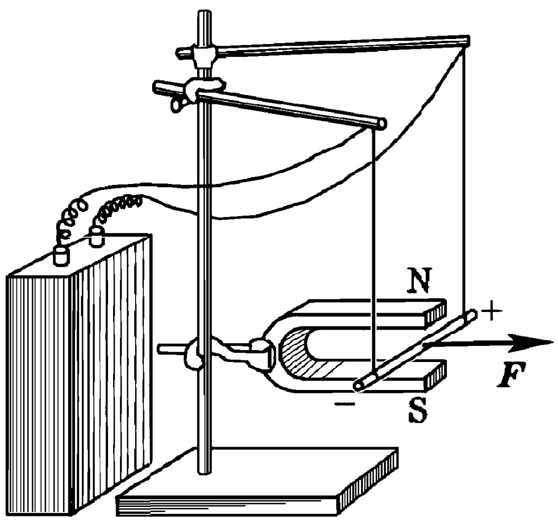
$$\therefore B = \frac{\mu_0}{2}\alpha$$

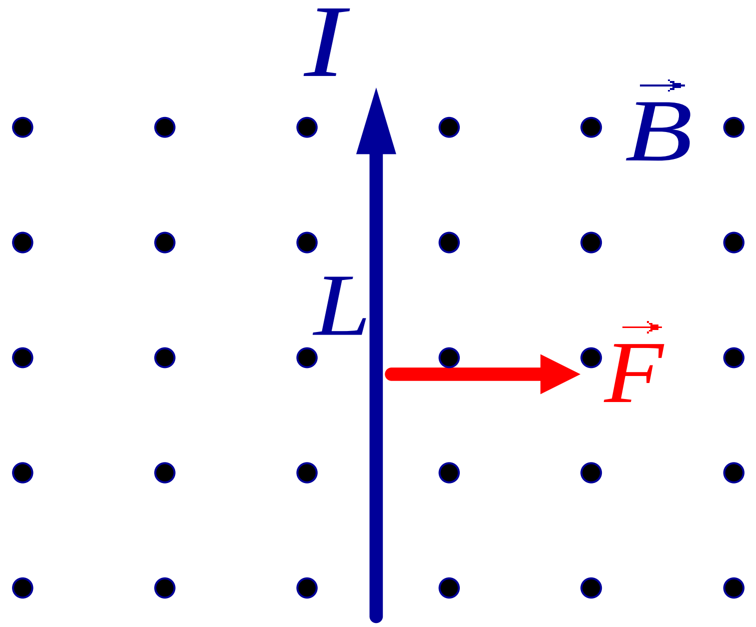


无限大均匀平面电流两侧的磁场是均匀磁场，大小相等，方向相反。

§11-5 磁场对电流的作用

1. 磁场对载流导线的作用





磁铁→电流

安培力：$F = BIL$

安培力

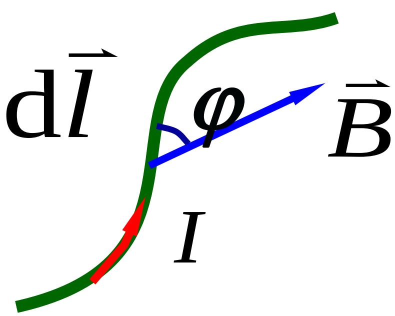
$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

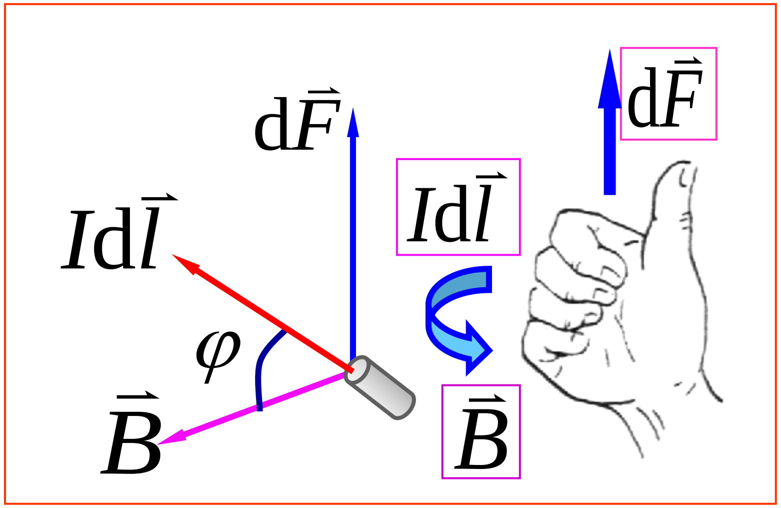
大小： $\mathrm{d}F = I\,\mathrm{d}l\,B\sin\theta$

方向： 右手螺旋定则

任意形状载流导线在外磁场中所受的安培力

$$\vec{F} = \int_l \mathrm{d}\vec{F} = \int_l I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$





例：在磁感强度为B的均匀磁场中，通过一半径为R的半圆导线中的电流为I。若导线所在平面与B垂直。求该导线所受的安培力。

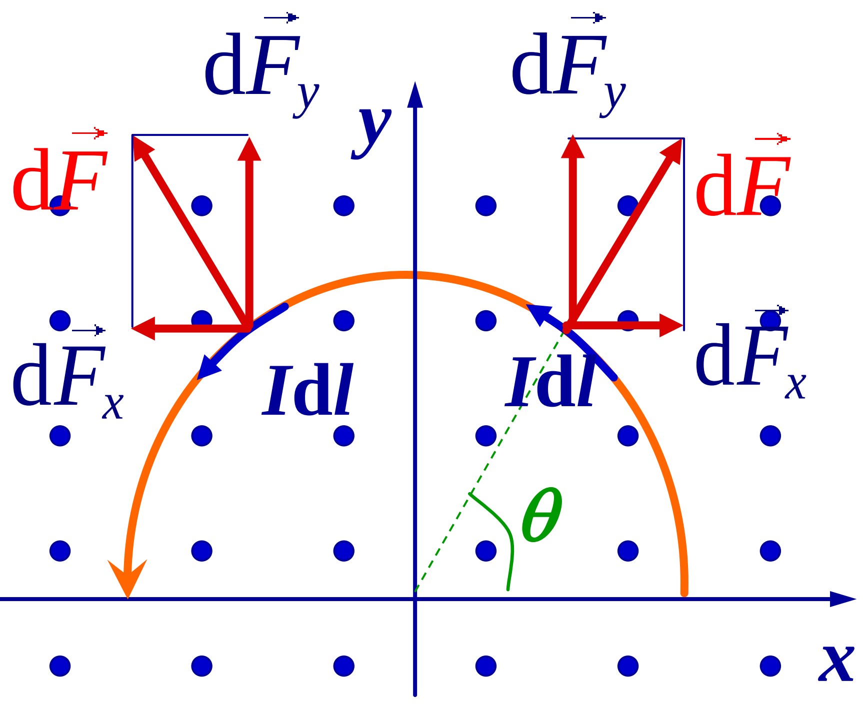
$$\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

解：在导线上取电流元，

$$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}F_x\,\hat{i} + \mathrm{d}F_y\,\hat{j},$$

由电流分布的对称性，分析导线受力的对称性。

$$\therefore F_{合} = \int \mathrm{d}F_y$$



由安培定律， $\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$

$$\mathrm{d}F = I\mathrm{d}l \cdot B \cdot \sin 90^\circ = BI\mathrm{d}l,$$

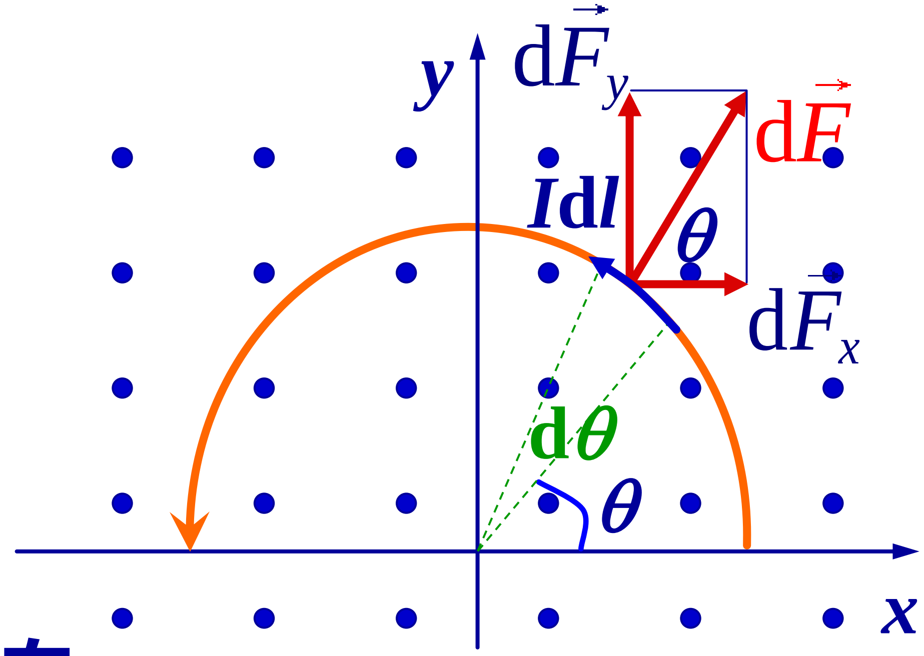
$$\therefore \mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F \cdot \sin\theta = BI\mathrm{d}l \cdot \sin\theta$$

由几何关系， $\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta,$

$$\therefore F_{合} = \int \mathrm{d}F_y$$

$$= BIR\int_0^\pi \sin\theta \cdot \mathrm{d}\theta$$

$$= 2BIR$$



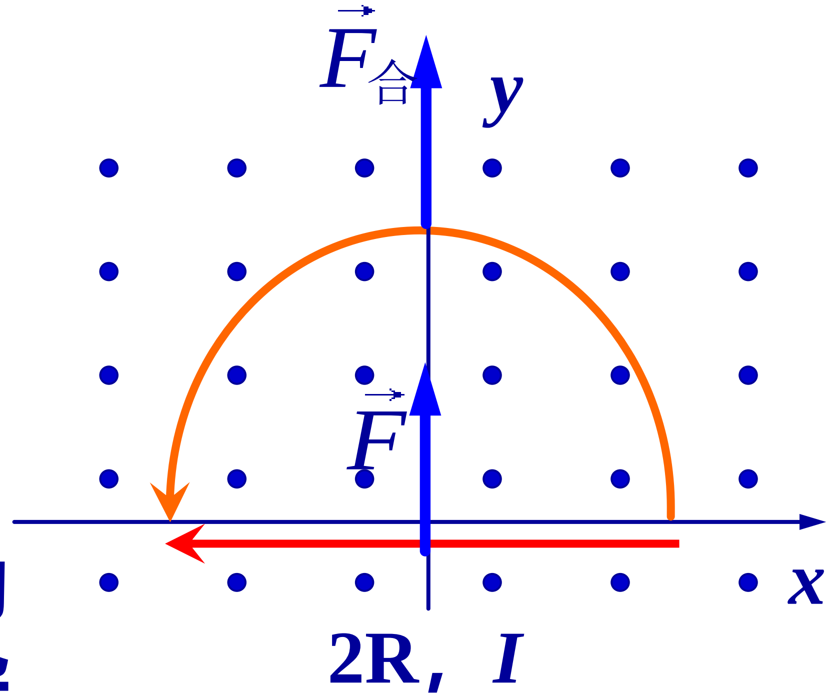
安培力F的方向：y轴正方向。

$$F_{合} = 2BIR.$$

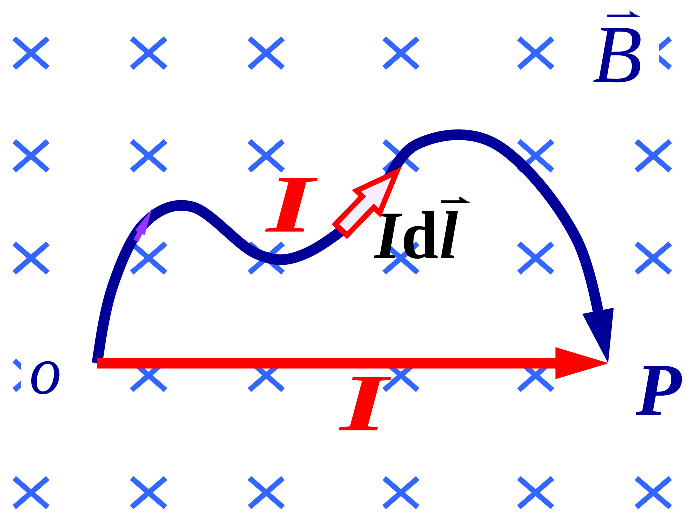
考虑从右端指向左端的长度为$2R$的电流 I，

$$F = 2BIR.$$

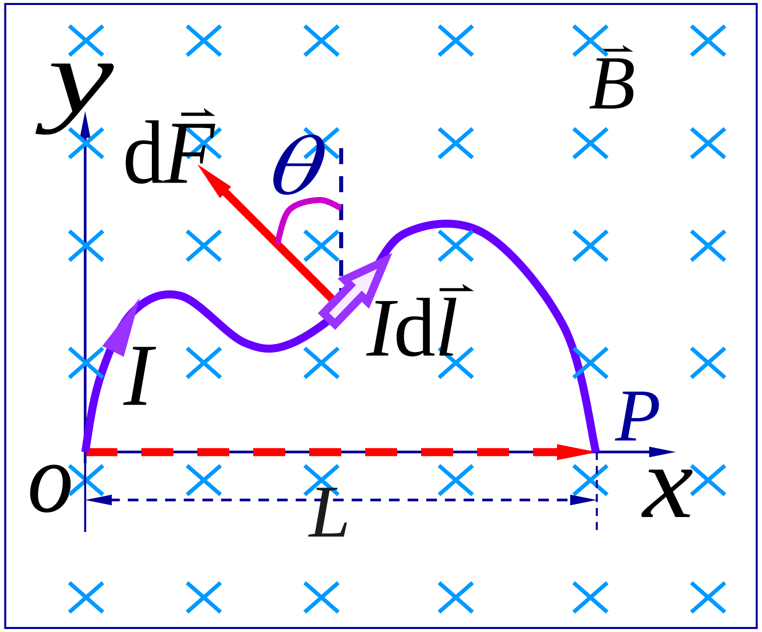
∴ 半圆形载流导线上所受的磁力，与两个端点相连的直导线所受到的磁力相等。



推广：任意弯曲的载流导线，在均匀磁场中受到的安培力，等效于两个端点相连的直导线受到的安培力。



例 求如图不规则的平面载流导线在均匀磁场中所受的力，已知 $\vec{B}$ 和 I。



解 取一段电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$

$$\left|\mathrm{d}\vec{F}\right| = \left|I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}\right| = BI\mathrm{d}l\sin\left(90^0\right)$$

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\sin\theta = BI\mathrm{d}l\sin\theta$$

$$\mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F\cos\theta = BI\mathrm{d}l\cos\theta$$

$$F_x = \int \mathrm{d}F_x = BI\int_0^0 \mathrm{d}y = 0$$

$$F_y = \int \mathrm{d}F_y = BI\int_0^l \mathrm{d}x = BIl$$

$$\vec{F} = \vec{F}_y = BIl\vec{j}$$

结论 任意平面载流导线在均匀磁场中所受的力，与其始点和终点相同的载流直导线所受的磁场力相同.

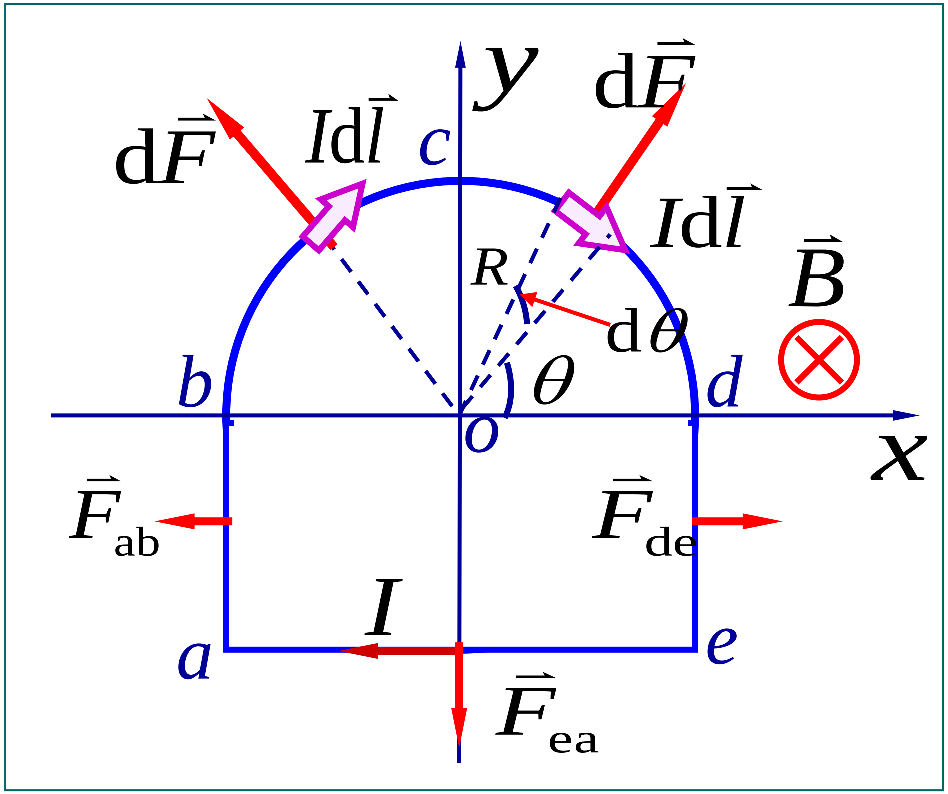
例2 平面内有一刚性闭合线圈 $abcdea$，通有电流 I。电流为顺时针方向，线圈放在磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中，求磁场作用于该线圈的安培力。

解 $\vec{F}_{\mathrm{de}} = -\vec{F}_{\mathrm{ab}} = IlB\vec{i}$

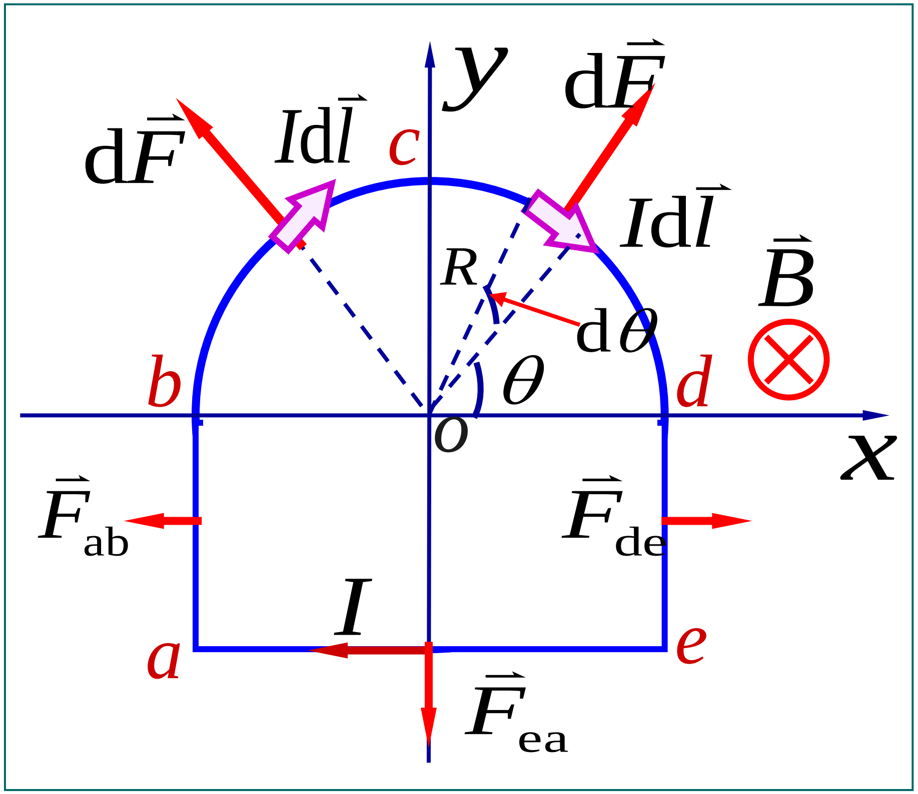
$$\vec{F}_{\mathrm{ea}} = -I(2R)B\vec{j}$$

bcd **段受力**

$$\mathrm{d}F = BI\mathrm{d}l$$



$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cos\theta \quad \mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F\sin\theta$$



$$F_x = 0$$

$$F_y = \int \mathrm{d}F_y = \int \mathrm{d}F\sin\theta$$

$$= \int BI\mathrm{d}l\sin\theta$$

$$= -\int_{\pi}^{0} BIR\mathrm{d}\theta\sin\theta = 2IBR$$

$$\therefore F_{合} = 0$$

另解 $\vec{F} = \oint I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I(\oint \mathrm{d}\vec{l}) \times \vec{B} = 0$

例3 求一载流导线框 $CDEFC$ 在无限长直导线磁场中的受力。

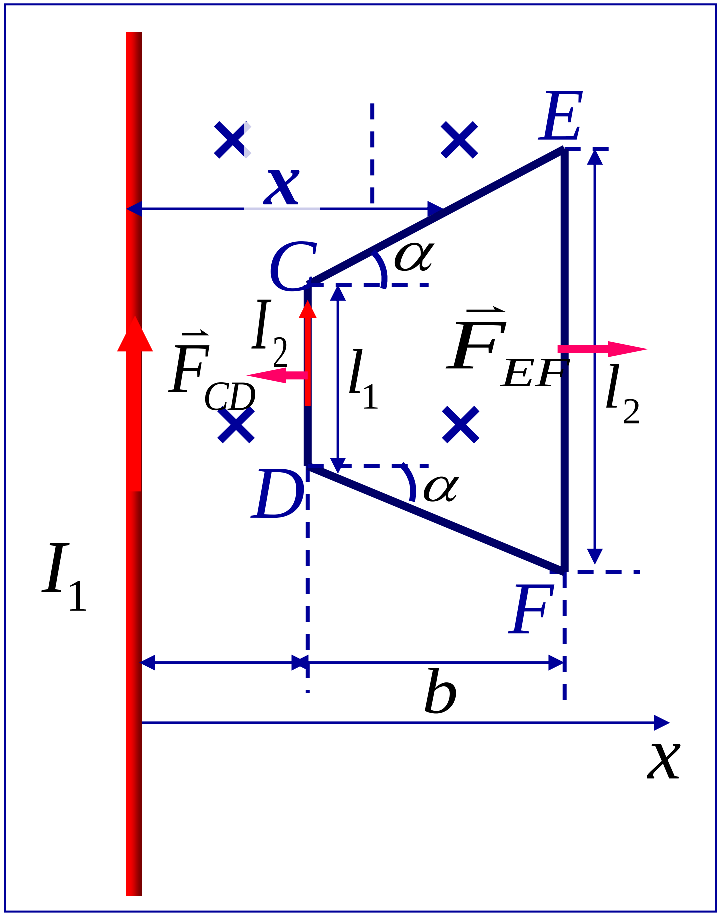
解 $B=\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$

$$F_{CD}=I_2 l_1 B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}I_2 l_1$$

方向向左。

$$F_{EF}=I_2 l_2 B_2=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+b)}I_2 l_2$$

方向向右。



CE 段受力

$$\mathrm{d}F = BI_2\mathrm{d}l \qquad \mathrm{d}l\cos\alpha = \mathrm{d}x$$

$$F_{\mathrm{CE}} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} I_2 \frac{\mathrm{d}x}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\cos\alpha} \ln\frac{a+b}{a}$$

FD 段受力

$$F_{\mathrm{FD}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\cos\alpha} \ln\frac{a+b}{a}$$

$$\therefore \vec{F}_{合} = (F_{\mathrm{EF}} - F_{\mathrm{CD}} - 2F_{\mathrm{CE}}\sin\alpha)\vec{i}$$