

# 1.7 推理理论

- 推理的形式结构
- 判断推理是否正确的方法
- 推理定律与推理规则
- 构造证明

直接证明法, 附加前提证明法, 归缪法

# 推理的形式结构——问题的引入

推理举例：

(1) 正项级数收敛当且仅当部分和有上界.

(2) 若  $A \cup C \subseteq B \cup D$ , 则  $A \subseteq B$  且  $C \subseteq D$ .

**推理**：从前提出发推出结论的思维过程

上面(1)是正确的推理，而(2)是错误的推理.

**证明**：描述推理正确的过程.

# 推理的形式结构

**定义** 若对于每组赋值，或者  $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$  均为假，或者当  $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$  为真时， $B$  也为真，则称由  $A_1, A_2, \dots, A_k$  推  $B$  的**推理正确**，否则**推理不正确（错误）**。

“ $A_1, A_2, \dots, A_k$  推  $B$ ” 的推理正确

当且仅当  $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$  为重言式。

**推理的形式结构**:  $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$  或

前提:  $A_1, A_2, \dots, A_k$

结论:  $B$

若推理正确，则记作:  $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \Rightarrow B$ .

# 判断推理是否正确的方法

- 真值表法
  - 等值演算法
  - 主析取范式法
  - 构造证明法
- 判断推理是否正确
- 证明推理正确

说明：用前3个方法时采用形式结构

$$“A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B”.$$

用构造证明时, 采用

“前提:  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , 结论:  $B$ ”.

# 实例

例 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号, 则明天是5号. 今天是1号. 所以明天是5号.

解 设  $p$ : 今天是1号,  $q$ : 明天是5号.

推理的形式结构为:  $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

证明 (用等值演算法)

$$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee q \Leftrightarrow 1$$

得证推理正确

# 实例 (续)

(2) 若今天是1号, 则明天是5号. 明天是5号. 所以今天是1号.

解 设 $p$ : 今天是1号,  $q$ : 明天是5号.

推理的形式结构为:  $(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$

证明 (用主析取范式法)

$$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge q \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow \neg ((\neg p \vee q) \wedge q) \vee p$$

$$\Leftrightarrow \neg q \vee p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3$$

结果不含 $m_1$ , 故01是成假赋值, 所以推理不正确.

# 推理定律——重言蕴涵式

## 重要的推理定律

$$A \Rightarrow (A \vee B)$$

$$(A \wedge B) \Rightarrow A$$

$$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$$

$$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$$

$$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$$

附加律

化简律

假言推理

拒取式

析取三段论

假言三段论

等价三段论

构造性二难

# 推理定律 (续)

$(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$     构造性二难（特殊形式）

$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$

破坏性二难

**证明:** 描述推理过程的命题公式序列，其中每个命题公式或者是已知的前提，或者是由前面的命题公式应用推理规则得到的结论。



# 推理规则

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

(4) 假言推理规则

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{\therefore B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A \vee B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A \wedge B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{\therefore A \rightarrow C}$$

# 推理规则(续)

(9) 析取三段论规则

$$\frac{A \vee B \quad \neg B}{\therefore A}$$

(10) 构造性二难推理规则

$$\frac{A \rightarrow B \quad C \rightarrow D \quad A \vee C}{\therefore B \vee D}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\frac{A \rightarrow B \quad C \rightarrow D \quad \neg B \vee \neg D}{\therefore \neg A \vee \neg C}$$

(12) 合取引入规则

$$\frac{A \quad B}{\therefore A \wedge B}$$

# 构造证明之一——直接证明法

例 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我就有课. 若有课，  
今天必备课. 我今天下午没备课. 所以，  
明天不是星期一和星期三.

解 设  $p$ ：明天是星期一， $q$ ：明天是星期三，  
 $r$ ：我有课， $s$ ：我备课

推理的形式结构为

前提： $(p \vee q) \rightarrow r$ ,  $r \rightarrow s$ ,  $\neg s$

结论： $\neg p \wedge \neg q$

# 直接证明法 (续)

证明

①  $r \rightarrow s$

前提引入

②  $\neg s$

前提引入

③  $\neg r$

①②拒取式

④  $(p \vee q) \rightarrow r$

前提引入

⑤  $\neg(p \vee q)$

③④拒取式

⑥  $\neg p \wedge \neg q$

⑤置换

# 构造证明之二——附加前提证明法

欲证明

前提:  $A_1, A_2, \dots, A_k$

结论:  $C \rightarrow B$

等价地证明

前提:  $A_1, A_2, \dots, A_k, C$

结论:  $B$

理由: 
$$\begin{aligned} & (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow (C \rightarrow B) \\ \Leftrightarrow & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B) \\ \Leftrightarrow & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge C) \vee B \\ \Leftrightarrow & (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge C) \rightarrow B \end{aligned}$$

# 附加前提证明法 (续)

例 构造下面推理的证明:

2是素数或合数. 若2是素数, 则 $\sqrt{2}$ 是无理数.  
若 $\sqrt{2}$ 是无理数, 则4不是素数. 所以, 如果4是素数, 则2是合数.

用附加前提证明法构造证明

解 设  $p$ : 2是素数,  $q$ : 2是合数,  
 $r$ :  $\sqrt{2}$ 是无理数,  $s$ : 4是素数

推理的形式结构

前提:  $p \vee q, p \rightarrow r, r \rightarrow \neg s$

结论:  $s \rightarrow q$

# 附加前提证明法 (续)

证明

①  $s$

附加前提引入

②  $p \rightarrow r$

前提引入

③  $r \rightarrow \neg s$

前提引入

④  $p \rightarrow \neg s$

②③假言三段论

⑤  $\neg p$

①④拒取式

⑥  $p \vee q$

前提引入

⑦  $q$

⑤⑥析取三段论

请用直接证明法证明之

# 构造证明之三——归谬法(反证法)

欲证明

前提:  $A_1, A_2, \dots, A_k$

结论:  $B$

将 $\neg B$ 加入前提, 若推出矛盾, 则得证推理正确.

理由:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

括号内部为矛盾式当且仅当  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B)$  为重言式



# 归谬法 (续)

例 构造下面推理的证明

前提:  $\neg(p \wedge q) \vee r, r \rightarrow s, \neg s, p$

结论:  $\neg q$

证明 (用归谬法)

- |                     |        |
|---------------------|--------|
| ① $q$               | 结论否定引入 |
| ② $r \rightarrow s$ | 前提引入   |
| ③ $\neg s$          | 前提引入   |
| ④ $\neg r$          | ②③拒取式  |

# 归谬法 (续)

$$\textcircled{5} \neg(p \wedge q) \vee r$$

前提引入

$$\textcircled{6} \neg(p \wedge q)$$

④⑤析取三段论

$$\textcircled{7} \neg p \vee \neg q$$

⑥置换

$$\textcircled{8} \neg p$$

①⑦析取三段论

$$\textcircled{9} p$$

前提引入

$$\textcircled{10} \neg p \wedge p$$

⑧⑨合取

请用直接证明法证明之