2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

- 等值式
- 基本等值式

  量词否定等值式

  量词辖域收缩与扩张等值式

  量词分配等值式
- 前束范式

等值式与基本等值式

定义 若$A \leftrightarrow B$为逻辑有效式，则称A与B是等值的，记作 $A \Leftrightarrow B$，并称$A \Leftrightarrow B$为等值式.

基本等值式:

命题逻辑中16组基本等值式的代换实例

如，$\forall xF(x) \to \exists yG(y) \Leftrightarrow \neg\forall xF(x) \vee \exists yG(y)$

$\neg(\forall xF(x) \vee \exists yG(y)) \Leftrightarrow \neg\forall xF(x) \wedge \neg\exists yG(y)$ 等

消去量词等值式 设$D=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$

$\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$

$\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n)$

基本等值式(续)

量词辖域收缩与扩张等值式

设$A(x)$是含x自由出现的公式，B中不含x的出现

关于全称量词的：

$\forall x(A(x)\lor B)\Leftrightarrow \forall xA(x)\lor B$

$\forall x(A(x)\land B)\Leftrightarrow \forall xA(x)\land B$

$\forall x(A(x)\to B)\Leftrightarrow \exists xA(x)\to B$

$\forall x(B\to A(x))\Leftrightarrow B\to \forall xA(x)$

关于存在量词的:

$\exists x(A(x)\lor B)\Leftrightarrow \exists xA(x)\lor B$

$\exists x(A(x)\land B)\Leftrightarrow \exists xA(x)\land B$

$\exists x(A(x)\to B)\Leftrightarrow \forall xA(x)\to B$

$\exists x(B\to A(x))\Leftrightarrow B\to \exists xA(x)$

基本的等值式(续)

量词否定等值式

设$A(x)$是含x自由出现的公式

$$\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow \exists x\,\neg A(x)$$

$$\neg\,\exists xA(x)\Leftrightarrow\forall x\,\neg A(x)$$

量词分配等值式

$$\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$$

$$\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$$

注意：$\forall$对$\vee$无分配律，$\exists$对$\wedge$无分配律, 即

$$\forall x(A(x)\vee B(x))\not\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$$

$$\exists x(A(x)\wedge B(x))\not\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$$

例

例 将下面命题用两种形式符号化

(1) 没有不犯错误的人

(2) 不是所有的人都爱看电影

解 (1) 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：x犯错误.

$$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

$$\Leftrightarrow\forall x\neg(F(x)\wedge\neg G(x))$$

$$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

(2) 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：爱看电影.

$$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow\exists x\neg(F(x)\rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

前束范式

定义 设A为一个一阶逻辑公式, 若A具有如下形式 $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$, 则称$A$为前束范式, 其中$Q_i$ $(1\le i\le k)$为$\forall$或$\exists$，B为不含量词的公式.

例如，$\forall x\exists y(F(x)\rightarrow(G(y)\wedge H(x,y)))$

$\forall x\neg(F(x)\wedge G(x))$

是前束范式, 而

$\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$

$\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$

不是前束范式.

换名规则

换名规则：将量词辖域中出现的某个约束出现的个体变项及对应的指导变项，改成其他辖域中未曾出现过的个体变项符号，公式中其余部分不变，则所得公式与原来的公式等值.

公式的前束范式

定理（前束范式存在定理）一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式

求前束范式：使用重要等值式、置换规则、换名规则进行等值演算.

例 求下列公式的前束范式

(1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

解

$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x)\vee\neg F(x))$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$

两步结果都是前束范式，说明前束范式不惟一.

例(续)

(2) $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

解 $\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$　　（量词否定等值式）

$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$　　（量词分配等值式）

或者

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall y\neg G(y)$　　(换名规则)

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$　　(量词辖域扩张)

例(续)

(3) $\exists xF(x)\lor\neg\forall xG(x)$

解 $\Leftrightarrow\exists xF(x)\lor\exists x\neg G(x)$

$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\lor\neg G(x))$

或 $\Leftrightarrow\exists xF(x)\lor\neg\exists yG(y)$

$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\lor\exists y\neg G(y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(F(x)\lor\neg G(y))$

(4) $\forall xF(x)\to\exists y(G(x,y)\land\neg H(y))$

解 $\Leftrightarrow\forall zF(z)\to\exists y(G(x,y)\land\neg H(y))$

$\Leftrightarrow\exists z\exists y(F(z)\to(G(x,y)\land\neg H(y)))$

例(续)

(5) $\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,z)))$

解 $\Leftrightarrow\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists u(G(x,u)\wedge H(x,z)))$

$\Leftrightarrow\forall x\exists u(F(x,y)\rightarrow G(x,u)\wedge H(x,z)))$

注意：∀与∃不能颠倒

苏格拉底三段论的正确性

"凡是人都要死的. 苏格拉底是人. 所以苏格拉底是要死的."

设$F(x)$：x是人，$G(x)$：x是要死的，a：苏格拉底.

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\land F(a)\rightarrow G(a)$$

设前件为真，即$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$与$F(a)$都为真.

由于$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$为真，故$F(a)\rightarrow G(a)$为真.

由$F(a)$ 与$F(a)\rightarrow G(a)$为真，根据假言推理得证$G(a)$为真.