第六章

定积分应用

(习题课)

题组一：　　几何应用

1. 求由两抛物线 $y^2=-2(x-1)$ 及 $y^2=2x$ 所围平面图形的面积。

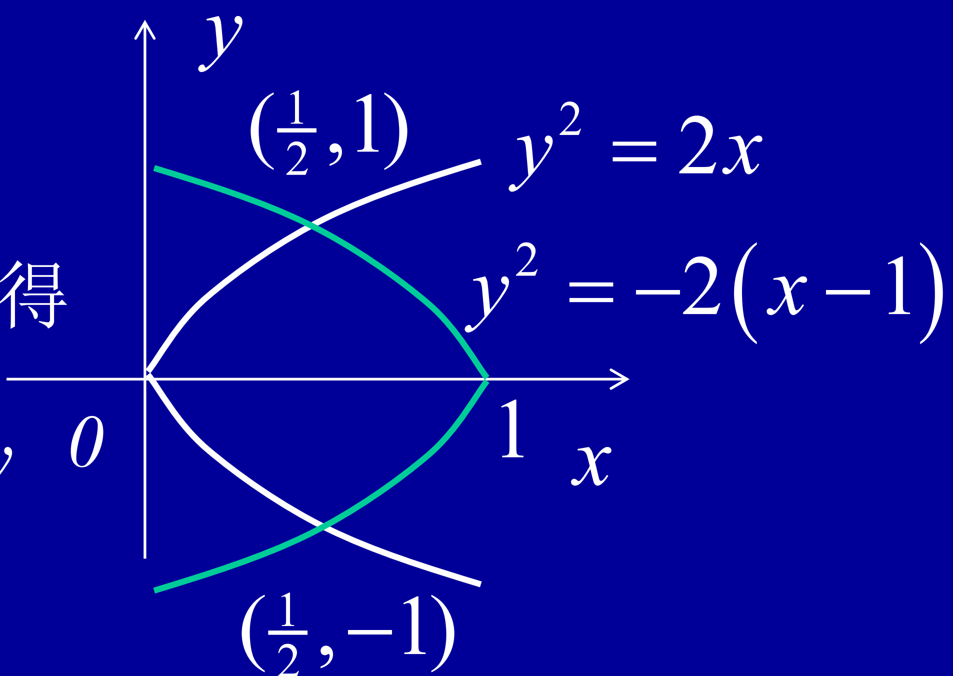
解: $\begin{cases} y^2=2x \\ y^2=-2(x-1) \end{cases}$

$\Longrightarrow (\frac{1}{2},-1)\ (\frac{1}{2},1)$

由对称性,取 y 为积分变量得

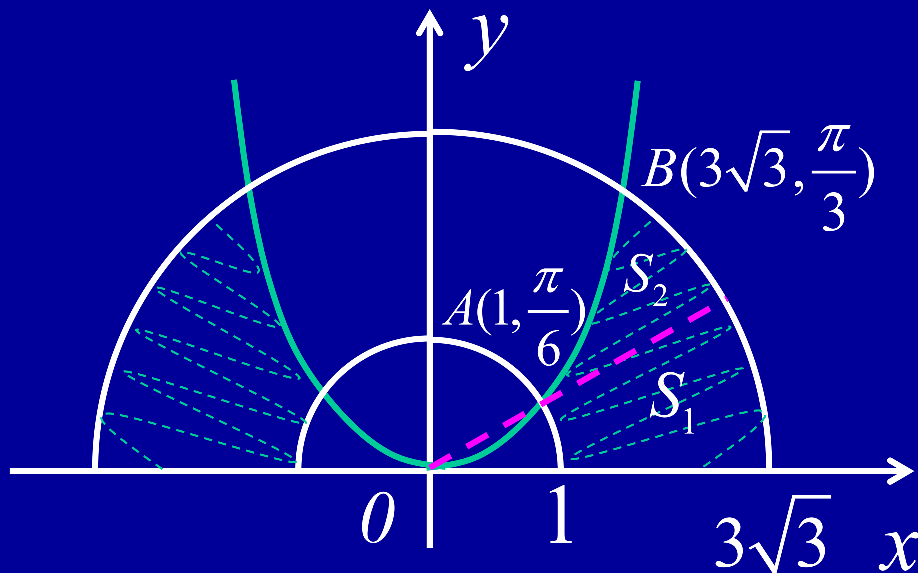
$$S=2\int_0^1[(1-\frac{y^2}{2})-\frac{y^2}{2}]dy$$

$$=\frac{4}{3}$$



2. 求由 $y=\frac{2}{3}x^2$，$y=0$，$x^2+y^2=1$ 及 $x^2+y^2=27$

所围平面图形的面积。



解: 边界曲线的极坐标

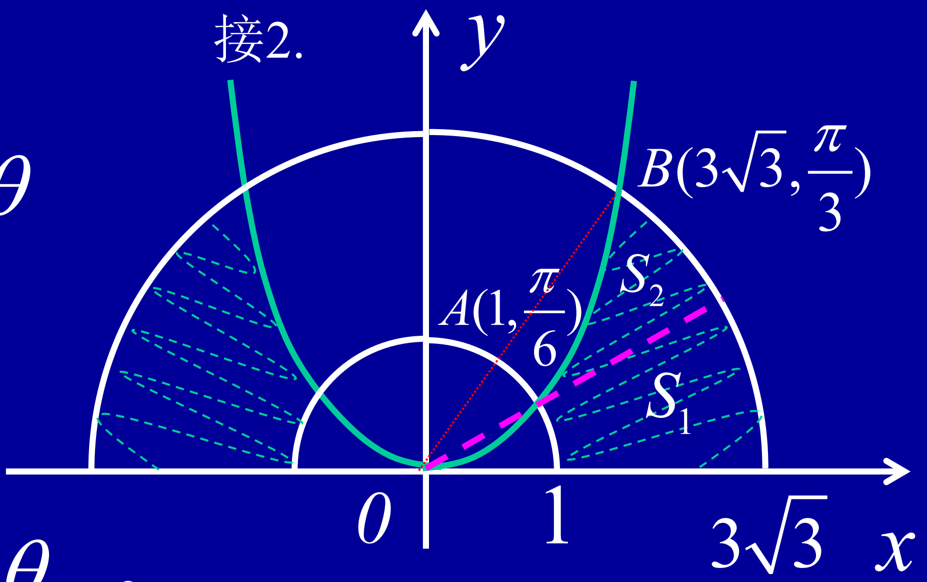
方程分别为 $r=\frac{3\sin\theta}{2\cos^2\theta}$,

$r=1$，$r=3\sqrt{3}$，$\theta=0$.

$$\begin{cases} r=\frac{3\sin\theta}{2\cos^2\theta} \\ r=1 \end{cases} \Longrightarrow A(1,\frac{\pi}{6})$$

$$\begin{cases} r=\frac{3\sin\theta}{2\cos^2\theta} \\ r=3\sqrt{3} \end{cases} \Longrightarrow B(3\sqrt{3},\frac{\pi}{3})$$

过 OA 作辅助线如图,



$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}[(3\sqrt{3})^2-1^2]d\theta$$

$$=\frac{13}{6}\pi$$

$$S_2=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}[(3\sqrt{3})^2-(\frac{3\sin\theta}{2\cos^2\theta})^2]d\theta$$

$$=\frac{9}{4}\pi-\frac{9}{8}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^4\theta}d\theta$$

$$=\frac{9}{4}\pi-\frac{9}{8}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\tan^2\theta)d\tan\theta$$

$$=\frac{9}{4}\pi-1$$

$$S=2(S_1+S_2)$$

$$=\frac{41}{6}\pi$$

3. 由 $y=\sin x \quad \left(x\in[0,\ \pi]\right)$ 与 x 轴所围的图形分别绕 x 轴, y 轴及 $y=1$ 旋转,求各旋转体的体积.

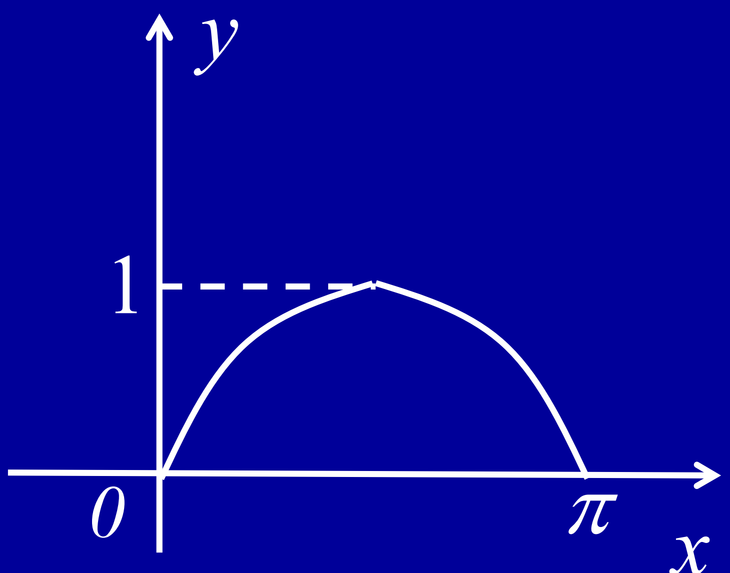
解:

$$V_x=\int_0^{\pi}\pi y^2dx$$

$$=\int_0^{\pi}\pi\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\pi^2$$

$$V_y=\int_0^{\pi}2\pi xydx$$

$$=\int_0^{\pi}2\pi x\sin xdx=2\pi^2$$



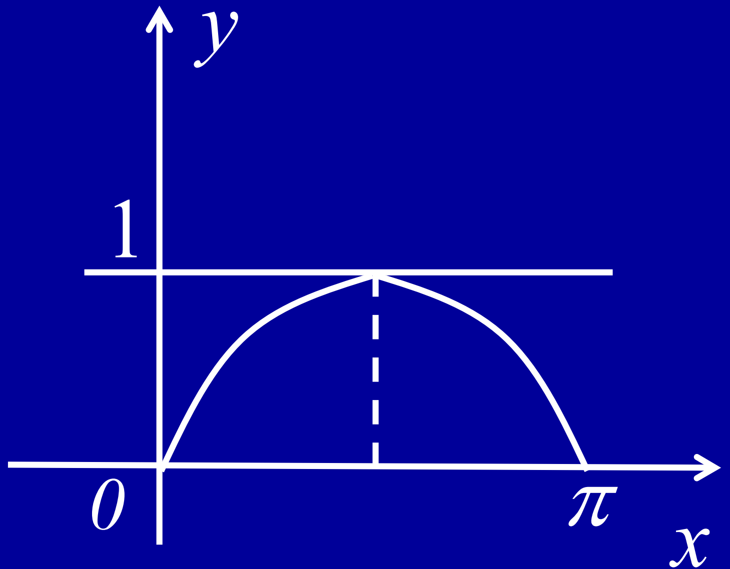
接3.

$$V_{y=1} = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1^2-(1-y)^2]dx$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1^2-(1-\sin x)^2]dx$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}[2\sin x-\sin^2 x]dx$$

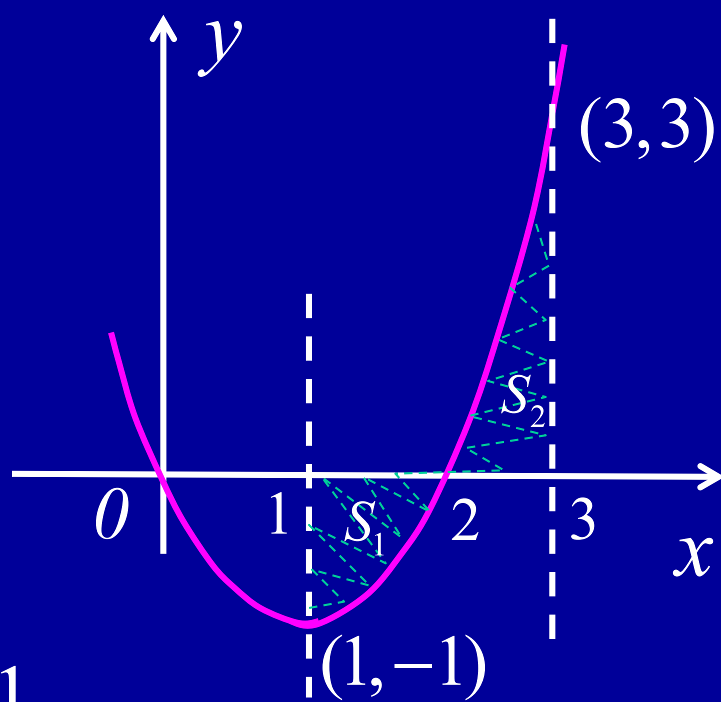
$$=4\pi-\frac{\pi^2}{2}$$



4. 求曲线 $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$ 所围平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积 V .

解: 设 S_1 旋转所得的体积为 V_1,

S_2 旋转所得的体积为 V_2 .



方法一: 取 y 为积分变量得

$$V_1 = \pi\int_{-1}^{0}[(1+\sqrt{1+y})^2 - 1^2]dy$$

$$= \pi\int_{-1}^{0}(2\sqrt{1+y} + 1 + y)dy$$

$$= \pi[\frac{4}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}} + y + \frac{1}{2}y^2]_{-1}^{0} = \frac{11}{6}\pi$$

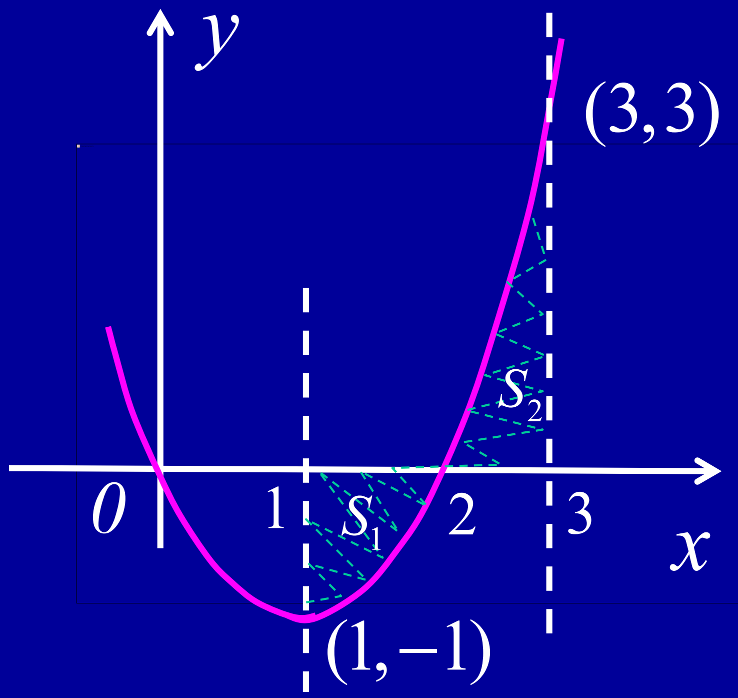
$$V_2 = \pi\int_{0}^{3}[3^2 - (1+\sqrt{1+y})^2]dy$$

$$=\pi\int_0^3 (7-2\sqrt{1+y}-y)dy$$

$$=\pi[7y-\frac{4}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}y^2]_0^3=(21-\frac{83}{6})\pi$$

$$V=V_1+V_2\ =9\pi$$

解法二:取 x 为积分变量得



$$V=\ -\int_1^2 2\pi xydx+\int_2^3 2\pi xydx$$

$$=-\int_1^2 2\pi x(x^2-2x)dx$$

$$+\int_2^3 2\pi x(x^2-2x)dx$$

$$=-2\pi(\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3)\Big|_1^2+2\pi(\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3)\Big|_2^3\ =9\pi$$

6. 证明:曲线 $y=\sin x\ \left(0\le x\le 2\pi\right)$ 的弧长等于椭圆 $x^2+2y^2=2$ 的周长.

解: 椭圆的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=\sin t \end{cases}\quad (0\le t\le 2\pi)$

设正弦曲线的弧长为 s_1，椭圆的周长为 s_2， 由对称性

$$s_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx \xrightarrow{\text{令}t=\frac{\pi}{2}-x} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt$$

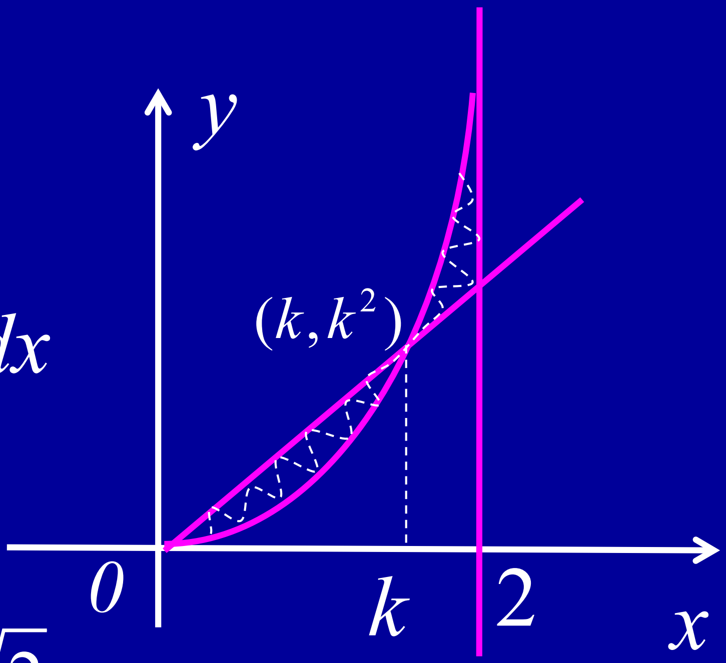
$$s_2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt$$

$$\therefore s_1 = s_2$$

题组三：　综合题

1. 设 $0<k<2$，当 k 为何值时,曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=kx$ 及 $x=2$ 所围图形的面积最小。

解: $\begin{cases} y=x^2 \\ y=kx \end{cases} \Longrightarrow (0,0),(k,k^2)$



$$A=\int_0^k (kx-x^2)dx+\int_k^2 (x^2-kx)dx$$

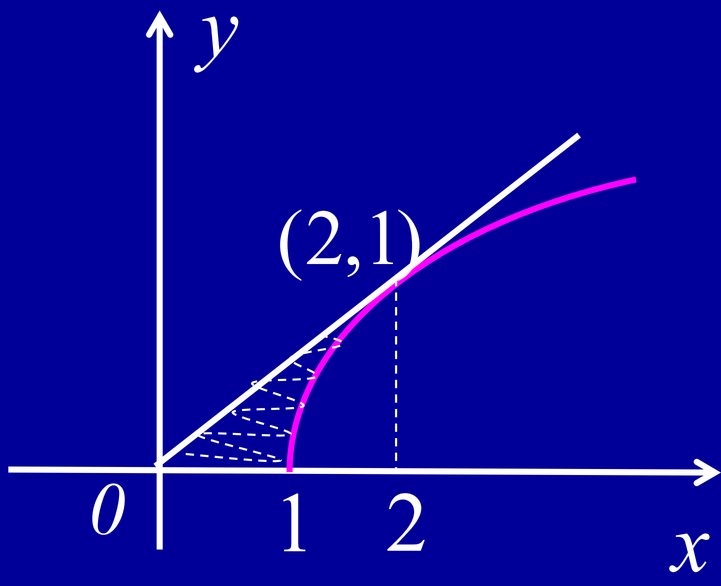
$$=\frac{k^3}{3}-2k+\frac{8}{3}$$

$$A'(k)=k^2-2=0 \Longrightarrow k=\sqrt{2}$$

而 $A''(\sqrt{2})=2\sqrt{2}>0$ 所以 $k=\sqrt{2}$ 为极小值点，

故 $k=\sqrt{2}$ 时图形的面积最小。

2. 设曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由此曲线，切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积与表面积。



解: 设切点为 $(x_0,\sqrt{x_0-1})$，

则切线方程为

$$\begin{cases} y-\sqrt{x_0-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0) \\ \text{切线过点}(0,0) \end{cases} \Longrightarrow x_0=2$$

$\Longrightarrow$ 切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$，切点为 $(2,1)$.

接2.

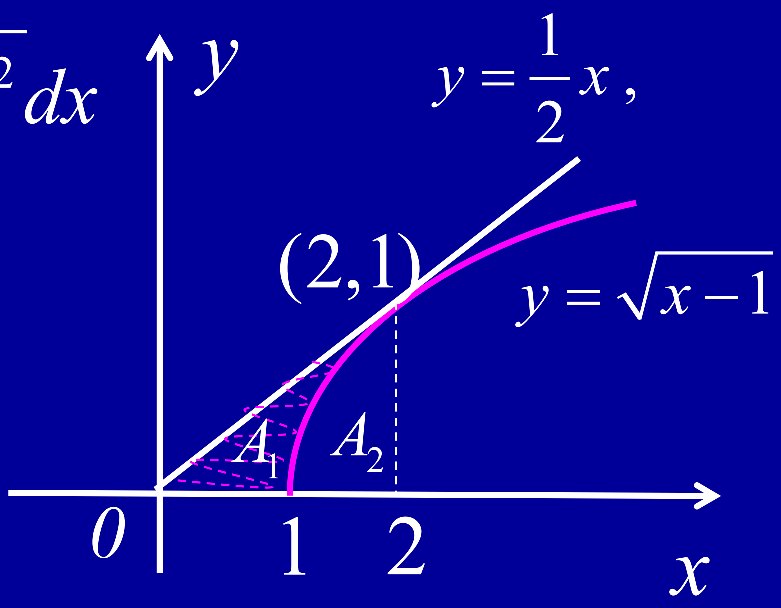
$$V = \pi\int_0^2 (\frac{1}{2}x)^2 dx - \pi\int_1^2 (\sqrt{x-1})^2 dx$$

$$= \cdots\cdots$$

$$S = \int_0^2 2\pi \cdot \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{1+(\frac{1}{2}x)'^2}\, dx$$

$$+\int_1^2 2\pi \cdot \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{1+(\sqrt{x-1})'^2}\, dx$$

$$= \cdots\cdots$$



3. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导,且 $f'(x)>0$, $f(a)>0$,

试证：对如图所示的两个面积 $A(t)$, $B(t)$ 而言,存在

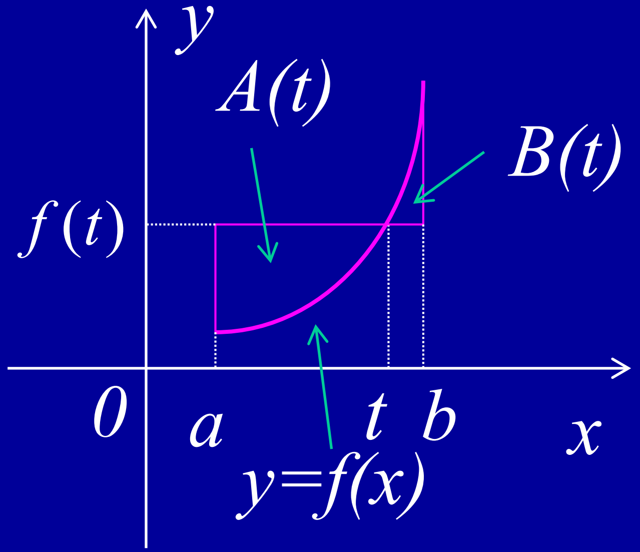
唯一的 $\xi\in(a, b)$, 使得 $\dfrac{A(\xi)}{B(\xi)}=2003.$

解: 显然

$$A(t)=\int_a^t[f(t)-f(x)]dx$$

$$B(t)=\int_t^b[f(x)-f(t)]dx$$

设 $F(t)=A(t)-2003B(t)$



问题归结为证明方程 $F(t)=0$在 (a, b) 内有唯一实根。

接3.

显然 $F(t)$ 在 $[a, b]$ 内连续 .

又因为 $f'(x) > 0$， 所以 $f(x)$ 单增, $f(a) < f(x) < f(b)$

而 $F(a) = A(a) - 2003B(a)$

$$= -2003\int_a^b [f(x) - f(a)]dx < 0$$

$$F(b) = A(b) - 2003B(b) = \int_a^b [f(b) - f(x)]dx > 0$$

由零点定理, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F(\xi) = 0$.

又 $F'(t) = A'(t) - 2003B'(t)$

$$= f'(t)(t-a) + 2003 f'(t)(b-t) > 0$$

所以 $F(t)$ 在 (a, b) 内单增. 故 ξ 唯一.