§5 二次型及其标准形

一. 引例

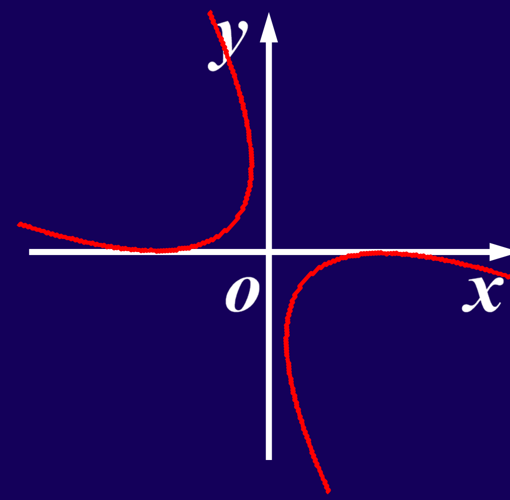
二. 二次型及其系数矩阵

三. 化二次型为标准形的正交变换法

四. 化二次型为标准形的配方法

一. 引例

平面解析几何中的二次曲线:

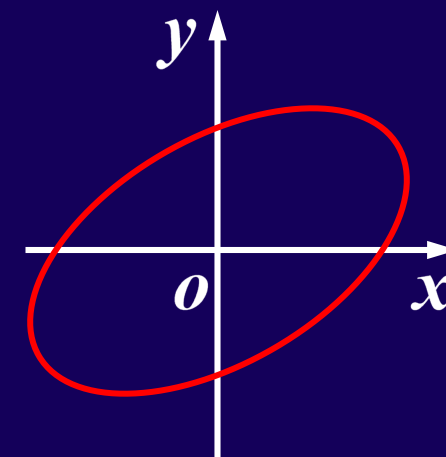


$$ax^2+bxy+cy^2=1$$

坐标旋转变换

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

即 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$



$$mx'^2+ny'^2=1$$

$m\,,n$ 同号 — 椭圆, 从而可知其长短轴

$m\,,n$ 异号 — 双曲线, 从而可知其实轴与虚轴

如何推广到 R^n ?

二. 二次型及其系数矩阵

定义8. 含 n 个变量的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

称为**二次型**(或**二次齐式**)

令 $a_{ij}=a_{ji}$, 二次型可写为:

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\&+a_{31}x_3x_1+a_{32}x_3x_2+a_{33}x_3^2+\cdots+a_{3n}x_3x_n\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+a_{n3}x_nx_3+\cdots+a_{nn}x_n^2\end{aligned}$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\underbrace{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)}_{\vec{x}^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}}$$

$$\Downarrow$$

$$f(\vec{x})=\vec{x}^T A\vec{x} \qquad (1)$$

可见, 二次型 $f(\vec{x})=\vec{x}^T A\vec{x} \xleftrightarrow{\text{1–1对应}}$ 对称矩阵 A

称 A 为二次型 f 的**系数矩阵**, f 为**矩阵 A 的二次型**,

A 的秩称为二次型 f **的秩**.

a_{ij} 均为实数时, 称 f 为**实二次型** (本课对象)

a_{ij} 均为复数时, 称 f 为**复二次型**

例如，$f(\vec{x}) = x^2 - 3z^2 - 4xy + yz$

$$= (x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -3 \end{pmatrix} \overset{r_2 + 2r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -3 \end{pmatrix}$$

所以，f 的秩 $= R(A) = 3$

任务：给定二次型 $f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathrm{T}} A \vec{x}$

$$\Big\downarrow \text{求可逆线性变换 } \vec{x} = C\vec{y}$$

$$f = (C\vec{y})^{\mathrm{T}} A (C\vec{y}) = \vec{y}^{\mathrm{T}} (\underline{C^{\mathrm{T}} A C}) \vec{y}$$

$$= k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2 \qquad (2)$$

(2) 式称为二次型的**标准形**或**法式**，

其系数矩阵为对角阵：$\begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix}$

若(2)式中 k_i 只取1, –1, 0, 例如

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \qquad (3)$$

称(3)式为二次型的**规范形**，

其系数矩阵为：$\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$

定义9. 设A, B 为n 阶方阵, 若存在可逆矩阵 C, 使

$$B = C^{\mathrm{T}} AC$$

则称矩阵A 与B **合同**, C 称为**合同变换矩阵**, $C^{\mathrm{T}}AC$ 称为**合同变换**.

注意:
$Q = P^{-1}AP$
— Q与A相似

性质1: A 与B 合同 $\Longrightarrow$ $R(B) = R(A)$

根据矩阵秩的性质4(P69) 即知结论成立

性质2. A 为对称矩阵$\Longrightarrow$任给可逆矩阵C, A 的合同矩阵 $B = C^{\mathrm{T}}AC$ 仍为对称矩阵.

证: $B^{\mathrm{T}} = (C^{\mathrm{T}}AC)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}AC = B$, $\therefore B$ 对称

证毕

说明: (1) 经可逆变换 $\vec{x} = C\vec{y}$ 二次型的秩不变.

(2) 化二次型为标准形的方法不唯一, C 也不唯一

任务： 给定二次型 $f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathrm{T}} A \vec{x}$

$\Big\downarrow$ 求**可逆线性变换** $\vec{x} = C\vec{y}$

$$f = (C\vec{y})^{\mathrm{T}} A (C\vec{y}) = \vec{y}^{\mathrm{T}} (\underline{C^{\mathrm{T}} A C}) \vec{y}$$

$$= k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2 \qquad (2)$$

$k_i = \lambda_i$

化二次型为标准形的方法:

(1) 正交变换法

根据： 任给对称阵A, 必存在正交阵P, 使

$$P^{\mathrm{T}} A P = P^{-1} A P = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

(2) 配方法

(3) 初等变换法 (不要求)

三. 化二次型为标准形的正交变换法

定理10. 任给二次型 $f=\vec{x}^{\mathrm{T}}A\vec{x}\ (A^{\mathrm{T}}=A)$, 总存在**正交变换** $\vec{x}=P\vec{y}$, 使 f 化为**标准形**:

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为A 的特征值, P 的列为对应特征向量.

推论: 任给二次型 $f(\vec{x})=\vec{x}^{\mathrm{T}}A\vec{x}\ (A^{\mathrm{T}}=A)$, 总有**可逆变换** $\vec{x}=C\vec{z}$, 使 $f(C\,z)$ 为**规范形**. 证明

证明思路:

$$f\xrightarrow[\vec{x}=P\vec{y}]{\text{正交变换}}\text{标准形}\xrightarrow[\vec{y}=K\vec{z}]{\text{可逆变换}}\text{规范形}$$

将 f 化为标准形的步骤:

1. 写出 f 矩阵 A
2. 求A的特征值与**正交规范特征向量系** $\lambda_1,\cdots,\lambda_n;\vec{p}_1,\cdots,\vec{p}_n$
3. 令 $P=(\vec{p}_1,\cdots\vec{p}_n)$, $\vec{x}=P\vec{y}$, 则得

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

例1. 求正交变换 $\vec{x} = P\vec{y}$ 把下述二次型化为标准形:

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

解: f 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{c_1 + c_i} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,3,4]{r_i - r_1} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -\lambda-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\lambda+1} \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -\lambda-1 & -2 \\ -2 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3(\lambda+3)$$

得A的特征值 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$

对$\lambda_1 = -3$, 解$(A+3E)\vec{x} = \vec{0}$

$$A+3E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单位化得 $\vec{p}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

对$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$, 解 $(A-E)\vec{x} = \vec{0}$

$$A - E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[i=1,2,3]{r_i - r_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{\xi}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

它们已经两两正交, 将其单位化得:

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{p}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

于是得正交阵 $P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \end{pmatrix}$

A的特征值
$\lambda_1=-3,$
$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$

通过正交变换 $\vec{x}=P\vec{y},$ 二次型化为

$$f=-3y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$$

* 若要进一步把它化为规范形, 令:

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{3}}z_1,\quad y_2=z_2,$$
$$y_3=z_3,\quad y_4=z_4$$

即 $\vec{y}=K\vec{z},\ K=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

得 $f=-z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2$

问: 将 f 化为规范形的线性变换矩阵是什么?

答: $C=PK$

四. 化二次型为标准形的配方法

例1. 化二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ 为标准形, 并求所用的变换矩阵.

解:

$$f = (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3)$$
$$+ x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_2x_3$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ 即 $\underbrace{\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = \quad\quad y_2 + 2y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}}_{\vec{x} = C\vec{y}}$

$$= y_1^2 + y_2^2$$

变换矩阵 $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(|C| = 1 \neq 0)$

例2. 化下述二次型为规范形, 并求所用的变换矩阵.

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$ (P131 例16)

解: 令 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1\vec{y}$

则 $f = 2(y_1^2 - y_2^2) + 2(y_1 - y_2)y_3 - 6(y_1 + y_2)y_3$

$= \underline{2y_1^2} - 2y_2^2 \underline{- 4y_1y_3} - 8y_2y_3$

与书中不一样

$= 2(y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2) - 2(y_2^2 - 4y_2y_3 + 4y_3^2) + 6y_3^2$

$= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 + 2y_3)^2 + 6y_3^2$

令 $\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}(y_1 - y_3) \\ z_2 = \sqrt{2}(y_2 + 2y_3) \\ z_3 = \sqrt{6}y_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}z_3 \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 - \frac{2}{\sqrt{6}}z_3 \\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}z_3 \end{cases}$

返回 上页 下页 结束

亦即 $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = C_2 \vec{z}$$

所求规范形: $f = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$

线性变换为: $\vec{x} = C_1 \vec{y} = C_1 C_2 \vec{z} \overset{\text{记}}{=\!=} C\vec{z}$

变换矩阵为

$$C = C_1 C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\left(|C| = \frac{1}{\sqrt{6}} \neq 0\right)$$

注意: 变换不一样, 变换矩阵也不一样, 但规范形不变.

(标准形也可能不一样)

小结

1. 概念：二次型 $f(\vec{x})=\vec{x}^T A\vec{x}$ A为对称矩阵

二次型的标准形，规范形

2. 化二次型为标准形的方法:

正交变换法 — 本质上是化对称阵为对角阵

优点: 保二次曲面几何形状不变

配方法

优点: 简单, 但可能导致曲面伸缩变形

作业 P136

26, 28

§7 正定二次型

- 一. 惯性定理及二次型分类
- 二. 二次型为正定的充要条件

一. 惯性定理及二次型分类

二次型的标准形不唯一,

但标准形的项数不变 $(=R(A))$,

其中正项项数不变, 负项项数不变. 即

定理11 (惯性定理) 设有二次型 $f=\vec{x}^T A\vec{x}$, 其秩为 r,

在两个实线性变换 $\vec{x}=C\vec{y}, \vec{x}=P\vec{z}$ 下, f 分别化为

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ry_r^2 \quad (k_i\neq 0)$$

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ry_r^2 \quad (\lambda_i\neq 0)$$

$\Longrightarrow$ $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 中的**正系数**个数

$=\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 中的**正系数**个数 (证明略)

二次型的标准形中正系数个数称为**正惯性指数**,

负系数个数称为**负惯性指数**.

定义10. $f=\vec{x}^{\mathrm{T}}A\vec{x}$ 为实二次型,

若对任何 $\vec{x}\neq\vec{0}$, 都有 $f>0$, 则称 f 为**正定二次型**,

系数矩阵A称为**正定矩阵**;

若对任何 $\vec{x}\neq\vec{0}$, 都有 $f<0$, 则称 f 为**负定二次型**,

系数矩阵A称为**负定矩阵**.

说明: 正定二次型和正定矩阵在工程技术和最优化问题中有着广泛的应用.

例如, 二元函数极值点的判别问题

$\big\downarrow$ 推广

n 元函数极值点的判别

(见 《线性代数》, 江龙,魏兵,中国矿业大学出版社, 2004年8月)

二. 二次型为正定的充要条件

定理10. 实二次型 $f=\vec{x}^{\mathrm{T}}A\vec{x}$ 正定 $\Longleftrightarrow$ f 的标准形中 n 个系数全为正 (即正惯性指数 $=n$)

证: 设 $\vec{x}=C\vec{y}$ (C可逆) 使 $f(\vec{x})=f(C\vec{y})=\sum_{i=1}^{n}k_i y_i^2$

"$\Leftarrow$" 已知 $k_i>0\ (i=1,\cdots,n)$

$\forall\,\vec{x}\neq\vec{0},\ \vec{y}=C^{-1}\vec{x}\neq\vec{0},\ \therefore\ f(\vec{x})>0$

"$\Rightarrow$" 设 $f(\vec{x})$ 正定, 假设某 $k_i\le 0$,

取 $\vec{y}=\vec{e}_i=(0,\cdots,1,\cdots)^{\mathrm{T}},\ \ \vec{x}=C\vec{y}=C\vec{e}_i\neq\vec{0}$

则 $f(\vec{x})=f(C\vec{e}_i)=k_i\le 0$

与 f 正定矛盾, 故假设不真. 证毕

推论: A 为对称矩阵, 则

A 正定 $\Longleftrightarrow$ A 的特征值 >0

定理11. A 为对称矩阵, 则

A正定 $\Longleftrightarrow$ A 的顺序主子行列式 >0, 即

$$a_{11}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\ \cdots\cdots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$$

A负定 $\Longleftrightarrow$ A 的顺序主子行列式 满足:

奇阶为负, 偶阶为正

即 $$a_{11}<0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \cdots\cdots, (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$$

(证明略)

例1. 判别 $f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$ 的正定性.

解: f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}$

$$a_{11}=-5<0,\ \begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0,\ |A|=-80<0$$

$\therefore$ f 为负定二次型

f 的标准形为

$$f=k_1u^2+k_2v^2+k_3w^2$$

$$k_1,k_2,k_3>0$$

正定二次型的几何意义:

$f(x,y)$ 为正定二次型,

$f(x,y)=c\ (c>0)$: 以原点为中心的椭圆

$f(x,y,z)$ 为正定二次型,

$f(x,y,z)=c\ (c>0)$: 以原点为中心的椭球

例2. 判断曲面 $f(x,y,z)=3x^2+4y^2+5z^2-4xy-4yz=1$ 是否为椭球.

解: f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$$a_{11}=3>0,\quad \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=8>0,\quad |A|=28>0$$

$\therefore$ f 为正定二次型, 故 $f(x,y,z)=1$ 为椭球.

小结

1. 概念: 正定二次型 $f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathrm{T}} A\vec{x} > 0,\ \forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n$

负定二次型 $f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathrm{T}} A\vec{x} < 0,\ \forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n$

2. 二次型的不变量:

二次型的秩($=R(A)$) = 标准形中的非零项数

正(负)惯性指数 = 标准形中的正(负)系数个数

3. 正定矩阵 — 特殊的实对称矩阵

A为正定矩阵 $\Leftrightarrow A$ 对称, 且 $\forall \vec{x} \neq \vec{0},\ \vec{x}^T A\vec{x} > 0$

$\Leftrightarrow A$ 对称, 且其所有特征值 $\lambda_i > 0$

$\Leftrightarrow A$ 对称, 且其顺序主子行列式 > 0

负定矩阵 — 特殊的实对称矩阵

……………

作业 P136

32， 33， 34

返回 上页 下页 结束