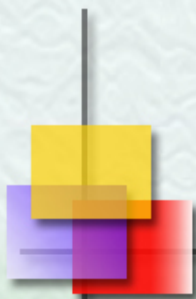


第五节 随机变量的函数的分布

- 一、离散型随机变量的函数的分布
- 二、连续型随机变量的函数的分布
- 三、小结



一、离散型随机变量的函数的分布

设 $f(x)$ 是定义在随机变量 X 的一切可能值 x 的集合上的函数, 若随机变量 Y 随着 X 取值 x 的值而取 $y = f(x)$ 的值, 则称随机变量 Y 为随机变量 X 的函数, 记作 $Y = f(X)$.

问题

如何根据已知的随机变量 X 的分布求得随机变量 $Y = f(X)$ 的分布?



例1 设 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

求 $Y = X^2$ 的分布律.

解 Y 的可能值为 $(-1)^2, 0^2, 1^2, 2^2$;

即 $0, 1, 4$.

$$P\{Y = 0\} = P\{X^2 = 0\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{4},$$



$$\begin{aligned} P\{Y = 1\} &= P\{X^2 = 1\} = P\{(X = -1) \cup (X = 1)\} \\ &= P\{X = -1\} + P\{X = 1\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$P\{Y = 4\} = P\{X^2 = 4\} = P\{X = 2\} = \frac{1}{4},$$

故 Y 的分布律为

Y	0	1	4
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

由此归纳出离散型随机变量函数的分布的求法.



离散型随机变量的函数的分布

如果 X 是离散型随机变量, 其函数 $Y = g(X)$ 也是离散型随机变量. 若 X 的分布律为

X	x_1	x_2	\cdots	x_k	\cdots
p_k	p_1	p_2	\cdots	p_k	\cdots

则 $Y = g(X)$ 的分布律为

$Y = g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	\cdots	$g(x_k)$	\cdots
p_k	p_1	p_2	\cdots	p_k	\cdots

若 $g(x_k)$ 中有值相同的, 应将相应的 p_k 合并.



例2 设

X	-1	1	2
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

求 $Y = X^2 - 5$ 的分布律.

解 Y 的分布律为

Y	-4	-1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



二、连续型随机变量的函数的分布

例3 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求随机变量 $Y = 2X + 8$ 的概率密度.

解 **第一步** 先求 $Y=2X+8$ 的分布函数 $F_Y(y)$.

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{2X + 8 \leq y\}$$



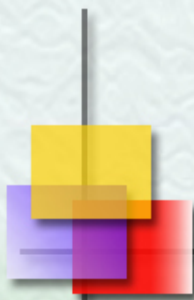
$$= P\{X \leq \frac{y-8}{2}\} = \int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x) dx$$

第二步 由分布函数求概率密度.

$$f_Y(y) = F'_y(y)$$

$$= [\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x) dx]'$$

$$= f_X(\frac{y-8}{2})(\frac{y-8}{2})',$$



所以
$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left(\frac{y-8}{2} \right) \cdot \frac{1}{2}, & 0 < \frac{y-8}{2} < 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8 < y < 16, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



例4 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3 e^{-x^2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

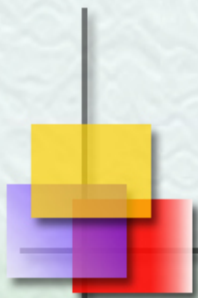
求随机变量 $Y = X^2$ 和 $Y = 2X + 3$ 的概率密度.

解 先求随机变量 $Y = X^2$ 分布函数,

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\}$$

$$= P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$



$$= \int_{-\infty}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx - \int_{-\infty}^{-\sqrt{y}} f_X(x) dx.$$

再由分布函数求概率密度.

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X(\sqrt{y})(\sqrt{y})' - f_X(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot (\sqrt{y})^3 \cdot e^{-(\sqrt{y})^2} + 0 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \begin{cases} \frac{ye^{-y}}{2}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$



当 $Y=2X+3$ 时,有

$$y = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2},$$

$$f_Y(y) = F'_y(y) = \left[\int_{-\infty}^{\frac{y-3}{2}} f_X(x) dx \right]'$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{y-3}{2}\right)^3 e^{-\left(\frac{y-3}{2}\right)^2} \left(\frac{y-3}{2}\right)', & y \geq 3, \\ 0, & y < 3. \end{cases}$$



$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{y-3}{2} \right)^3 e^{-\left(\frac{y-3}{2} \right)^2}, & y \geq 3, \\ 0, & y < 3. \end{cases}$$

由上述例题可归纳出计算连续型随机变量的函数的概率密度的方法。



定理 设随机变量 X 的具有概率密度 $f_X(x)$, 其中 $-\infty < x < +\infty$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导, 且恒有 $g'(x) > 0$ (或恒有 $g'(x) < 0$), 则称 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty))$, $\beta = \max(g(-\infty), g(+\infty))$, $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.



例5 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 试证明 X 的线性函数 $Y = aX + b$ ($a \neq 0$) 也服从正态分布.

证明 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty.$$

设 $y = g(x) = ax + b$,

得 $x = h(y) = \frac{y-b}{a}$, 知 $h'(y) = \frac{1}{a} \neq 0$.



由公式 $f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

得 $Y = aX + b$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad -\infty < y < \infty.$$

$$= \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a} - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

得 $Y = aX + b$
 $\sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$

$$= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}}, \quad -\infty < y < \infty.$$



例6 设电压 $V = A \sin \Theta$, 其中 A 是一个已知的正常数, 相角 Θ 是一个随机变量, 且有 $\Theta \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 试求电压 V 的概率密度.

解 因为 $v = g(\theta) = A \sin \theta$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上恒有

$$g'(\theta) = A \cos \theta > 0,$$

所以反函数为 $\theta = h(v) = \arcsin \frac{v}{A},$

$$h'(v) = \frac{1}{\sqrt{A^2 - v^2}},$$



又由 $\Theta \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 知 Θ 的概率密度为

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

由定理得 $V = A \sin \Theta$ 的概率密度为

$$\varphi(v) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 - v^2}}, & -A < v < A, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



请同学们思考

设 $g(x)$ 是连续函数, 若 X 是离散型随机变量, 则 $Y = g(X)$ 也是离散型随机变量吗? 若 X 是连续型的又怎样?

答 若 X 是离散型随机变量, 它的取值是有限个或可列无限多个, 因此 Y 的取值也是有限个或可列无限多个, 因此 Y 是离散型随机变量. 若 X 是连续型随机变量, 那么 Y 不一定是连续型随机变量.



例如 设 X 在 $(0,2)$ 上服从均匀分布, 概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

又设连续函数 $y = g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

则 $Y = g(X)$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 可以计算出来:



由于 Y 的取值为 $[0,1]$, 所以

当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 0$;

当 $y > 1$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 1$;

当 $0 \leq y \leq 1$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\}$

$$= \int_{g(x) \leq y} f(x) dx = \int_{-\infty}^y f(x) dx$$

$$= \int_0^y \frac{1}{2} dx = \frac{y}{2}.$$



故 Y 的分布函数为
$$F_Y(Y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{y}{2}, & 0 \leq y \leq 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

因为 $F_Y(y)$ 在 $y=1$ 处间断, 故 $Y = g(X)$ 不是连续型随机变量, 又因为 $F_Y(y)$ 不是阶梯函数, 故 $Y = g(X)$ 也不是离散型随机变量.



三、小结

1. 离散型随机变量的函数的分布

若 $Y = g(X)$ 且 X 的分布律为：

X	x_1	x_2	\cdots	x_k	\cdots
p_k	p_1	p_2	\cdots	p_k	\cdots

则 $Y = g(X)$ 的分布律为

$Y = g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	\cdots	$g(x_k)$	\cdots
p_k	p_1	p_2	\cdots	p_k	\cdots



2. 连续型随机变量的函数的分布

方法1 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\}$
 $= \int_{g(x) \leq y} f_X(x) dx, \quad (-\infty < x < +\infty),$

再对 $f_Y(y)$ 求导得到 Y 的密度函数.

方法2

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

注意条件.

