中国矿业大学（北京）机电与信息工程学院 2014−2015 年度（下）学期 2014 级第一次月考试题

高等数学答案详解

一、选择题（每题 2 分，共 20 分）

1、答案：C

解析：对于两个函数的线性相关性，只需看它们的比值是否为常数：若为常数，则线性相关；否则线性无关。显然选 C，其中，$\cos x\sin x=\dfrac{1}{2}\sin 2x,\ln x^2=2\ln x$

2、答案：B

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{y(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{y'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{y''(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{e^{3x}-py'(x)-qy(x)}=2$

3、答案：B

解析：$(\vec a\cdot\vec b)\cdot\vec c$ 表示 $\vec a$ 与 $\vec b$ 作数量积得到的实数再与 $\vec c$ 作乘积，它与 $\vec c$ 共线；同理 $\vec a\cdot(\vec b\cdot\vec c)$ 是与 $\vec a$ 共线的向量，因此等式 $(\vec a\cdot\vec b)\cdot\vec c=\vec a\cdot(\vec b\cdot\vec c)$ 不一定成立；根据混合积的轮换对称性，可知 $\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)=(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c$ 成立；设 $\vec a$ 与 $\vec b$ 的夹角为 θ，而 $(\vec a\cdot\vec b)^2=|\vec a|^2|\vec b|^2\cos^2\theta,(\vec a)^2\cdot(\vec b)^2=|\vec a|^2|\vec b|^2$，故只有当 $\cos\theta=1$ 时，该等式才成立；$(\vec a+2\vec b)\times(\vec a+3\vec b)=\vec a\times\vec a+2\vec b\times\vec a+3\vec a\times\vec b+6\vec b\times\vec b=\vec a\times\vec b$

4、答案：D （1994.考研数学一）

解析：由方程组 $\begin{cases}x^2+4y^2-z^2=16\\4x^2+y^2+z^2=4\end{cases}$ 消去变量 z，可得 $x^2+y^2=4$，即得其在 xOy 坐标面上的投影曲线为 $\begin{cases}x^2+y^2=4\\z=0\end{cases}$，故其投影区域为 $\begin{cases}x^2+y^2\le 4\\z=0\end{cases}$

5、答案：A

解析：因为 $f'_x(x_0,y_0)$ 和 $f'_y(x_0,y_0)$ 存在仅能分别推出 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处连续和 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处连续，推不出 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续；反之，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续也无法推出两个偏导数的存在性

6、答案：D

解析：由于 D 中的 $y=c_1x+c_2e^x+(1-c_1-c_2)e^{-x}=c_1(x-e^{-x})+c_2(e^x-e^{-x})+e^{-x}$，其中 $x-e^{-x},e^x-e^{-x}$ 是对应的齐次方程的两个解，且 $x-e^{-x}$ 与 e^x-e^{-x} 线性无关，故 $y=c_1x+c_2e^x+(1-c_1-c_2)e^{-x}$ 是原方程的通解

主要考点：（1）一个 n 阶线性齐次方程的通解为 $y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$，其中 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 为该齐次方程的 n 个线性无关的特解；（2）非齐次通解＝齐次通解＋非齐次特解；（3）非齐次特解 y_1－非齐次特解 y_2＝齐次特解 Y

7、答案：A

解析：两直线方程的方向向量分别为 $\vec s_1=(2,-2,1),\vec s_2=(4,M,-2)$，由于两直线垂直，故

$$\vec s_1\cdot\vec s_2=(2,-2,1)(4,M,-2)=8-2M-2=0\Rightarrow M=3$$

8、答案：A

解析：求一个曲面在某个点的切平面方程，核心就是该点处的法向量，其法向量为 (F_x,F_y,F_z)，其中 $F_x=2x-y\sin(xy)+1=1$，$F_y=-x\sin(xy)+z=-1,\ F_z=y=1$，即法向量为 $(1,-1,1)$，因此切平面方程为 $x-y+z=-2$

9、答案：B

解析：先做变换：$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_0^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t+\int_{x-y}^{0}\psi(t)\mathrm{d}t=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_0^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x-y}\psi(t)\mathrm{d}t$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y)$$

综上可得：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

10、答案：D

解析：对等式 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+o(\Delta x)$ 两边取极限 $\Delta x\to 0$，则有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{1+x^2}$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，两边分别积分，可得：$\int\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，解得：$y=Ce^{\arctan x}$，由于 $y(0)=\pi$，带入方程可得 $C=\pi$，故 $y=\pi e^{\arctan x}$，从而 $y(1)=\pi e^{\arctan 1}=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

二、填空题（每题 2 分，共 38 分）

11、答案：$-4\vec i+2\vec j-4\vec k$ 或 $(-4,2,-4)$

解析：由 $\vec x//\vec a$，知存在唯一的常数 λ，使得：$\vec x=\lambda\vec a$，又由 $\vec a\cdot\vec x=-18$，得：$\vec a\cdot\vec x=\lambda\vec a\cdot\vec a=\lambda|\vec a|^2=-18$ 而 $|\vec a|^2=2^2+(-1)^2+2^2=9$，故 $\vec x=-2\vec a=-4\vec i+2\vec j-4\vec k$

12、答案：2015

解析：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2015}}\dfrac{\tan xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2015}}\dfrac{xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2015}}y=2015$

13、答案：$(x^2+y^2)z^2=64$ 或 $\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)z=8$

解析：绕谁旋转谁不变，$xz=8\Leftrightarrow x^2z^2=64\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)z^2=64$

14、答案：1

解析：根据点到到平面的距离公式，可得 $d=\dfrac{|1\times1+2\times2+1\times2-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1$

15、答案：1

解析：把平面方程化为截距式方程得：$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-3}+\dfrac{z}{1}=1$，故 $V=\dfrac{1}{6}|-3||-2||1|=1$

16、答案：$x-y+z+2=0$

解析：依题意知所求平面的法向量 $\vec{n}\perp\vec{s}_1,\vec{n}\perp\vec{s}_2$，则 $\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&-3\\0&-1&-1\end{vmatrix}=-(1,-1,1)$

由平面的点法式方程：$(x-1)-(y-2)+(z+1)=0$，即 $x-y+z+2=0$

17、答案：$\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

解析：由 $f(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$ 得：

$$f_x(x,y,z)=\frac{1}{yz}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}-1},f_y(x,y,z)=-\frac{x}{y^2z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}-1},f_z(x,y,z)=-\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}\left(\frac{1}{z^2}\right)\ln\frac{x}{y}$$

故 $\mathrm{d}f=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z=f_x(1,1,1)\mathrm{d}x+f_y(1,1,1)\mathrm{d}y+f_z(1,1,1)\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

18、答案：$-2f''_{11}+(2\sin x-y\cos x)f''_{12}+\cos xf'_2+y\sin x\cos xf''_{22}$ （1990.考研数学一）

解析：由复合函数求导法则，可得：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f'_1+y\cos xf'_2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=-2f''_{11}+2\sin xf''_{12}+\cos xf'_2-y\cos xf''_{21}+y\sin x\cos xf''_{22}\\&=-2f''_{11}+(2\sin x-y\cos x)f''_{12}+\cos xf'_2+y\sin x\cos xf''_{22}\end{aligned}$$

19、答案：$\dfrac{\pi}{3}$

解析：两直线的夹角 θ 满足：$\cos\theta=\dfrac{\vec{s}_1\vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$，而 $\vec{s}_1=(1,-2,1)$，$\vec{s}_2=(1,-1,0)\times(0,2,1)=(-1,-1,2)$

故 $\cos\theta=\dfrac{-1+2+2}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

20、答案：$\dfrac{\pi^2}{e^2}$ （1994.考研数学一）

解析：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{e^{-x}}{y}\cos\dfrac{x}{y}-e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{e^{-x}}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}+\dfrac{xe^{-x}}{y^3}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{xe^{-x}}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}$，则

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{\left(2,\frac{1}{\pi}\right)}=-\frac{\pi^2}{e^2}\cos2\pi+\frac{2\pi^3}{e^2}\sin2\pi+\frac{2\pi^2}{e^2}\cos2\pi=\frac{\pi^2}{e^2}$$

21、答案：$y=x\arctan x-\dfrac{\ln(1+x^2)}{2}+C_1x+C_2$

解析：$y'=\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C_1$，$y=\displaystyle\int(\arctan x+C_1)\mathrm{d}x=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$

其中，$y=\displaystyle\int\arctan x\mathrm{d}x=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

22、答案：z

解析：由 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 得 $F_x=-\dfrac{y}{x^2}F'_1-\dfrac{z}{x^2}F'_2,F_y=\dfrac{1}{x}F'_1,F_z=\dfrac{1}{x}F'_2$，隐函数求偏导法则知：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-\frac{y}{x^2}F'_1-\frac{z}{x^2}F'_2}{\frac{1}{x}F'_2}=\frac{yF'_1+zF'_2}{xF'_2},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{\frac{1}{x}F'_1}{\frac{1}{x}F'_2}=-\frac{F'_1}{F'_2}$$

故 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{yF'_1+zF'_2}{F'_2}+\dfrac{-yF'_1}{F'_2}=z$

23、答案：$y''-2y'+2y=0$

解析：所求方程对应的特征方程的特征根为：$r_1=1+i,r_2=1-i$，即可得特征方程 $r^2-2r+2=0$

即可得所求方程 $y''-2y'+2y=0$（提示：$r^2+ar+b=0$ 中，$a=-(r_1+r_2),b=r_1r_2$）

24、答案：①

解析：对于①，根据“无穷小与有界函数的乘积为无穷小”，得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$；

对于②，$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ 在第一次求极限中，y 为变量，x 相对于 y 为常数，所以

$$\lim_{y\to0} f(x,y)=\lim_{y\to0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to0}\left(x\sin\frac{1}{y}\right)+0=x\lim_{y\to0}\sin\frac{1}{y}+0$$

显然极限不存在，故 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ 极限不存在

同理知③ $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$ 也不存在

25、答案：36

解析：**方法 1**：由 $\vec a+\vec b+\vec c=\vec 0$ 知 $(\vec a+\vec b+\vec c)\times\vec b=\vec 0\Leftrightarrow \vec a\times\vec b=\vec b\times\vec c$，同理 $(\vec a+\vec b+\vec c)\times\vec a=\vec 0\Leftrightarrow\vec a\times\vec b=\vec c\times\vec a$

又 $|\vec a|^2+|\vec b|^2=|\vec c|^2$ 知三个向量构成了一个直角三角形，且 $\vec a\perp\vec b$，故 $|\vec a\times\vec b+\vec b\times\vec c+\vec c\times\vec a|=3|\vec a\times\vec b|=36$

方法 2：$\vec a+\vec b+\vec c=\vec 0\Leftrightarrow\vec c=-(\vec a+\vec b)$，故有

$$|\vec a\times\vec b+\vec b\times\vec c+\vec c\times\vec a|=|\vec a\times\vec b-\vec b\times(\vec a+\vec b)-(\vec a+\vec b)\times\vec a|=|\vec a\times\vec b-\vec b\times\vec a-\vec b\times\vec a|=3|\vec a\times\vec b|=36$$

26、答案：$x+y-2z-3=0$

解析：设 $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}=t$，则 $x=t+3,y=2t-2,z=t$，代入 $x-2y+z-3=0$，解得：$t=2$，故交点 $C(5,2,2)$，带入平面的三点式方程（详见课本 P_{21} 例 8，此处不再赘述）或根据混合积的知识，可得：

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z\\ 1 & 1 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{vmatrix}=0，即 x+y-2z-3=0$$

三、解答题（共 42 分）

27、解：直线 L 的一般式为：$\begin{cases}x-y-1=0\\ y+z-1=0\end{cases}$，故过直线 L 的平面束方程可设为：$x-y-1+\lambda(y+z-1)=0$

整理后得 $x+(\lambda-1)y+\lambda z-\lambda-1=0$；

所求平面应与已知平面垂直，即 $(1,\lambda-1,\lambda)(1,-1,2)=0$ 解得 $\lambda=-2$ ························5 分

所求投影直线 L' 的一般式方程为 $\begin{cases}x-3y-2z+1=0\\ x-y+2z-1=0\end{cases}$ ························7 分

直线的一个方向向量可取 $\vec s=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 1 & -3 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=-2(4,2,-1)$，且过点 $(0,0,\frac{1}{2})$

将其化为标准式可得 $\frac{x}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-1}$ ························10 分

28、解：（2006.考研数学一，有删改）由 $z=f(u),u=\sqrt{x^2+y^2}$，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'\cdot\frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'\cdot\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$ ························8 分

根据题设条件 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 可得：$f''+f'\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$ ························10 分

29、解：（1）连续性，只需证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$ 即可，

由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\cdot\frac{\pi}{2}=0=f(0,0)$，因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续 ························3 分

（2）由于 $f(x,0)=0$，故 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$ ························5 分

又 $f(0,y)=\begin{cases}y\arctan\frac{1}{|y|}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\frac{y\arctan\frac{1}{|y|}}{y}=\frac{\pi}{2}$，因此 $f_y(0,0)=\frac{\pi}{2}$ ························8 分

（3）只需证明 $\Delta z=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)$ 是否等于 $f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y+o(\rho)$（其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$）

$$\because\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta y\arctan\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}-\frac{\pi}{2}\Delta y}{\rho}$$

而 $\Delta x=\rho\cos\theta,\Delta y=\rho\sin\theta$，则上式极限成为

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho\sin\theta\arctan\frac{1}{\rho}-\frac{\pi}{2}\rho\sin\theta}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\sin\theta(\arctan\frac{1}{\rho}-\frac{\pi}{2})=0$$

因此，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微 ························14 分

30、解：因 $f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$，代入 $x=0$，得 $f(0)=0$

且 $f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，代入 $x=0$，得 $f'(0)=1$，又 $f''(x)=-\sin x-f(x)$

记 $y=f(x)$，即得初值问题 $\begin{cases} y''+y=-\sin x \\ y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1 \end{cases}$ ·································· 5 分

上述微分方程对应的齐次方程的特征方程有根 $r_{1,2}=\pm i$，而自由项为 $-\sin x$，$\lambda+i\omega=i$ 是特征方程的根，故令 $y^*=x(A\cos x+B\sin x)$ 是原方程的特解，带入微分方程比较系数，得：$A=\frac{1}{2}, B=0$，即 $y^*=\frac{1}{2}x\cos x$，于是得到通解：

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$$ ································ 10 分

且 $$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}x\sin x$$

由 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$ 得：$C_1=0, C_2=\frac{1}{2}$

故 $$y=f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$$ ································14 分

下面 3 个题目因为考虑到考试范围与课程进度的原因，删去了

1、设 $f(x,y)=2x^2+y^2$，则 $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(1,1)=$____________，沿梯度方向的方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)}=$__________

答案：$(4,2)$，$2\sqrt{5}$

解析：先求偏导数 $f_x(x,y)=4x, f_y(x,y)=2y$，故 $f_x(1,1)=4, f_y(1,1)=2$，则 $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(1,1)=(4,2)$，故 $\vec{e}_l=\frac{\sqrt{5}}{5}(2,1)$

则 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)}=\frac{\sqrt{5}}{5}(4\times 2+2\times 1)=2\sqrt{5}$

2、椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在第一卦限内的切平面与三坐标面所围成的四面体的最小体积为_____

答案：$\frac{\sqrt{3}}{2}abc$

解析：此椭球在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面为：$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$，化简, 得：

$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z=1$$

此平面在三个坐标轴上的截距分别为：$\frac{a^2}{x_0},\frac{b^2}{y_0},\frac{c^2}{z_0}$，则此切平面与三坐标面所围成的四面体的体积

$V=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$

由题意可知，体积存在最小值，要使 V 最小，则需 $x_0y_0z_0$ 最大；即求目标函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 下的最大值，其中 $x>0, y>0, z>0$，拉格朗日函数设为：

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

由 $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=yz-\frac{2x\lambda}{a^2}=0; \\ \frac{\partial L}{\partial y}=xz-\frac{2y\lambda}{b^2}=0; \\ \frac{\partial L}{\partial z}=xy-\frac{2z\lambda}{c^2}=0; \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$，解得 $x=\frac{a}{\sqrt{3}}, y=\frac{b}{\sqrt{3}}, z=\frac{c}{\sqrt{3}}$，故 $V_{\min}=V(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$

3、证明：函数 $f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值点，但无极小值点

证明：令 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=-(1+e^y)\sin x=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}=e^y\cos x-e^y-ye^y=0 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} x=2n\pi \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=(2n+1)\pi \\ y=-2 \end{cases}$ ······················· 4 分

又 $f_{xx}(x,y)=-(1+e^y)\cos x, f_{xy}(x,y)=-e^y\sin x, f_{yy}(x,y)=e^y(\cos x-2-y)$ ···················· 6 分

于是，在驻点 $(2n\pi,0)$ 处，$AC-B^2=(-2)(-1)-0^2>0$，且 $A=-2<0$

所以，驻点 $(2n\pi,0)$ 都是极大值点，极大值为 2；·· 8 分

在驻点 $((2n+1)\pi,-2)$ 处，$AC-B^2=(1+e^{-2})(-e^{-2})<0$，且 $A=-2<0$

所以，驻点 $((2n+1)\pi,-2)$ 都是不是极值点 $(n=1,2,\cdots)$ ··································· 10 分