§5 向量空间

一. 向量空间基本概念

二. 基变换与坐标变换举例

一.向量空间基本概念

定义6. 设 V 是n 维向量的非空集合, 若 V 对加法及数乘**封闭**, 则称 V 为**向量空间**.

例1. $R^3=\{(x,y,z)^T \mid x,y,z\in \mathrm{R}\}$

$V_1=\{(x,y,0)^T \mid x,y\in \mathrm{R}\}$ （XOY坐标面）

$R^n=\{(x_1,\cdots,x_n)^T \mid x_1,\cdots,x_n\in \mathrm{R}\}$

都是向量空间

例2. 齐次线性方程组的解集: $S=\{\vec{x} \mid A\vec{x}=\vec{0}\}$

是向量空间, 称为 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的**解空间**

非齐次线性方程组的解集: $S_1=\{\vec{x} \mid A\vec{x}=\vec{b}\}$

不是向量空间！

例3. 设$\vec{\alpha}, \vec{\beta}$为两已知 n 维向量,

$$L=\{\vec{x}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta} \mid \lambda, \mu \in \mathrm{R}\}$$

$$\forall\ \vec{x}_1=\lambda_1\vec{\alpha}+\mu_1\vec{\beta},\ \vec{x}_2=\lambda_2\vec{\alpha}+\mu_2\vec{\beta}\in L$$

$$\vec{x}_1+\vec{x}_2=(\lambda_1+\lambda_2)\vec{\alpha}+(\mu_1+\mu_2)\vec{\beta}\in L$$

$$k\vec{x}_1=(k\lambda_1)\vec{\alpha}+(k\mu_1)\vec{\beta}\in L$$

所以 L 为向量空间,称为由 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 生成的向量空间

说明: $L=\{\vec{x}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_m\vec{a}_m \mid \lambda_1,\cdots,\lambda_m\in\mathrm{R}\}$

称为由 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 生成的向量空间.

例如, R^n 可看作由n维坐标向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ 生成的向量空间.

例4. 设向量组 $A:\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 与 $B:\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s$ 等价,

$$L_1=\{\vec{x}=\lambda_1\vec{a}_1+\cdots+\lambda_m\vec{a}_m \mid \lambda_1,\cdots,\lambda_m\in\mathbf{R}\}$$

$$L_2=\{\vec{x}=\mu_1\vec{b}_1+\cdots+\mu_s\vec{b}_s \mid \mu_1,\cdots,\mu_s\in\mathbf{R}\}$$

证明 $L_1=L_2$.

证: $\forall\,\vec{x}\in L_1$, 则$\vec{x}$ 可由组A线性表示,

而组A **与组**B **等价**, $\therefore\ \vec{x}$ 可由组B线性表示,

即$\vec{x}\in L_2$, **因此** $L_1\subset L_2$

类似可证 : $\forall\ \vec{x}\in L_2$, 必有$\vec{x}\in L_1$, **因此** $L_2\subset L_1$

综上所述, $L_1=L_2$

定义7. **设有向量空间**V_1**与**V_2, **若**$V_1\subset V_2$, **则称** V_1**是**V_2 **的子空间**.

定义8. 设 V 为向量空间, $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r \in V$, 若

(1) $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ 线性无关

(2) V 中任一向量 $\vec{x}$ 均可由 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ 线性表示:

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_r\vec{a}_r$$

则称 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ 为 V 的一个**基**, 数 r 称为 V 的**维数**, V称为r **维向量空间**, $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 称为 $\vec{x}$ **在该组基下的坐标.**

例如, R^n 中任何 n 个线性无关向量都可作它的基 , 维数为 n .

特别, 单位坐标向量 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 称为 R^n 的**自然基**.

又如, 若 $R(A)= r$,

$A\vec{x} = \vec{0}$ 的解空间的基 —— 它的基础解系

维数 $= n - r$

说明: (1) 特殊情形: $V=\{\vec{0}\}$, V 无基, 维数为 0 .

(2) 基的作用: 刻画向量空间的构造.

(3) 向量空间与向量组的联系与区别

向量组	向量空间 V
向量的集合	特殊的向量组 (对加法,数乘封闭)
最大无关组 秩	基 (V的最大无关组) V 的维数 (V的秩)

除 $\{\vec{0}\}$ 外, 所有向量空间必定为无限集

(4) V 是 R^n 的子空间 $\Longrightarrow$ V 的维数 $\leq n$

$$\left.\begin{array}{r} V \text{ 是 } \mathrm{R}^n \text{ 的子空间} \\ V \text{ 的维数} = n \end{array}\right\} \Longrightarrow V=\mathrm{R}^n$$

例5. 设

$$A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix},\quad B=(\vec{b}_1,\vec{b}_2)=\begin{pmatrix}1&4\\0&3\\-4&2\end{pmatrix},$$

验证 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 是 R^3 的一个基,并求 $\vec{b}_1,\vec{b}_2$ 在此基中的坐标.

解: 设

$$\vec{b}_1=x_{11}\vec{a}_1+x_{21}\vec{a}_2+x_{31}\vec{a}_3$$

$$\vec{b}_2=x_{12}\vec{a}_1+x_{22}\vec{a}_2+x_{32}\vec{a}_3$$

两个问题同时解决

即 $$(\vec{b}_1,\vec{b}_2)=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\\x_{31}&x_{32}\end{pmatrix}$$ 记作 $B=AX$

$$(A,B)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{2}{3}&\frac{4}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}&1\\0&0&1&-1&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

可见 $R(A)=3$, $\therefore\ \vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 是 R^3 的一个基.

且有 $$(\vec b_1,\vec b_2)=(\vec a_1,\vec a_2,\vec a_3)\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{4}{3}\\ -\frac{2}{3} & 1\\ -1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

故$\vec b_1,\vec b_2$在基 $\vec a_1,\vec a_2,\vec a_3$中的坐标分别为

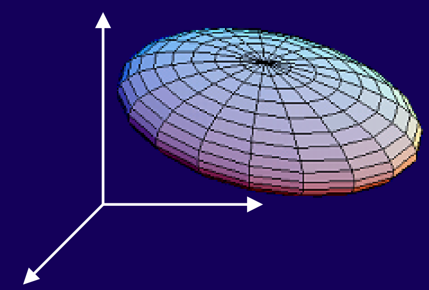
$$\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-1 \quad 与 \quad \frac{4}{3},\ 1,\ \frac{2}{3}$$

$$(\vec b_1,\vec b_2)=(\vec a_1,\vec a_2,\vec a_3)\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\\ x_{31} & x_{32}\end{pmatrix}$$

$$(A,B)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

二. 基变换与坐标变换举例

例6. $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 为R^3中的基，在R^3中取新基 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$，求用$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 表示$\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 的表示式(**基变换公式**)，并求向量在两个基中的坐标之间的关系式(**坐标变换公式**).



解: 记 $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$, $B=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$, 则

$$(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)B$$

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)A^{-1}$$

$$=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)\underbrace{A^{-1}B}_{P}$$

即基变换公式为 $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)P$

$P=A^{-1}B$ 称为**由旧基到新基**的**过渡矩阵**.

设 $\vec{x}=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{\vec{x}\text{在旧基中的坐标}}$　　$\vec{x}=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)\underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}}_{\vec{x}\text{在新基中的坐标}}$

故 $A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$　得 $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\underbrace{B^{-1}A}_{P^{-1}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

即从旧基到新基的坐标变换公式为:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(P为过渡矩阵)

小结

1. 概念: 向量空间, 基, 维数, 坐标

向量空间与向量组的区别与联系

- 子空间
- 由 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 生成的向量空间:

$$L = \{ \vec{x} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{a}_m \mid \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathrm{R} \}$$

- 齐次线性方程组的解空间

解空间的基, 维数

2. 基变换与坐标变换

思考题1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 是否为上述向量空间L的基?

上述向量空间L的维数是否$= m$?

思考题2. 向量空间

$$V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)^T \mid x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$$

其维数为 $\underline{\quad 3 \quad}$, 它的一组基为:

$$\underline{(1,-1,0,0)^T,(1,0,-1,0)^T,(1,0,0,-1)^T}$$

分析: V 是齐次线性方程组 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ 的解空间，其基础解系为:

$$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

作业:

P110　34，35，36 , 37，38