第一章　行列式

习题课

主要内容

x+y= 典型例题

测　验　题

帮助　返回

主要内容

1 n阶行列式的定义

2 n阶行列式的性质

3 行列式按行（列）展开

4 Cramer法则

上页 下页 返回

典　型　例　题

- 一、计算（证明）行列式
- 二、克拉默法则

2　利用范德蒙行列式计算

利用范德蒙行列式计算行列式，应根据范德蒙行列式的特点，将所给行列式化为范德蒙行列式，然后根据范德蒙行列式计算出结果。

例2　计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

解 D_n中各行元素分别是一个数的不同方幂,方幂次数自左至右按递升次序排列，但不是从0变到$n-1$,而是由1递升至n.若提取各行的公因子，则方幂次数便从0增至$n-1$，于是得到

$$D_n = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

上面等式右端行列式为n阶范德蒙行列式，由范德蒙行列式知

$$
\begin{aligned}
D_n &= n!\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i - x_j)\\
&= n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)\\
&\quad\bullet(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)]\\
&= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!.
\end{aligned}
$$

上页 下页 返回

３　用化三角形行列式计算

例3　计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

上页　下页　返回

解 将第$2,3,\cdots,n+1$列都加到第一列，得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & x & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

上页 下页 返回

提取第一列的公因子，得

$$D_{n+1}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

将第1列的$(-a_1)$倍加到第2列，将第1列的$(-a_2)$倍加到第3列，$\cdots$，将第1列的$(-a_n)$倍加到最后一列，得

上页 下页 返回

$$D_{n+1}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix}$$

$$=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i).$$

例4 计算 $D_n = \det(a_{ij})$, 其中$a_{ij} = |i - j|$

解:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

上页 下页 返回

$$\xlongequal[i=n,n-1,\cdots 2]{r_i - r_{i-1}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots n-1]{C_i + C_n} \begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & \cdots & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1)(-2^{n-2})(-1)$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$

4　用降阶法计算

例5　计算

$$D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

解　将 D_4 的第2、3、4行都加到第1行，并从第1行中提取公因子 $a+b+c+d$，得

上页　下页　返回

$$D_4=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\b&a&d&c\\c&d&a&b\\d&c&b&a\end{vmatrix},$$

再将第2、3、4列都减去第1列，得

$$D_4=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\b&a-b&d-b&c-b\\c&d-c&a-c&b-c\\d&c-d&b-d&a-d\end{vmatrix},$$

按第1行展开，得

$$D_4=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-b & c-b \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}.$$

把上面右端行列式第2行加到第1行，再从第1行中提取公因子$a-b-c+d$，得

$$D_4=(a+b+c+d)(a-b-c+d)$$

$$\bullet\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix},$$

再将第2列减去第1列，得

$$D_4=(a+b+c+d)(a-b-c+d)\bullet\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ d-c & a-d & b-c\\ c-d & b-c & a-d\end{vmatrix},$$

按第1行展开，得

$$D_4=(a+b+c+d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix}a-d & b-c\\ b-c & a-d\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a-b-c+d)\bullet[(a-d)^2-(b-c)^2]$$

$$=(a+b+c+d)(a-b-c+d)$$

$$\bullet(a+b-c-d)(a-b+c-d)$$

6　用递推法计算

例6　计算三对角行列式　$(a \neq b)$

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ab & a+b & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & ab & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & ab & a+b \end{vmatrix}$$

解 $D_n = (a+b)(-1)^{1+1} D_{n-1}$

$$+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} ab & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & ab & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & ab & a+b \end{vmatrix}$$

上页 下页 返回

第二个行列式再按第一列展开，得

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2} \quad (*)$$

对（*）式整理，得

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

依次递推下去，得

$$D_n - aD_{n-1} = b^2(D_{n-2} - aD_{n-3})$$

$$= \cdots$$

上页 下页 返回

$$= b^{n-2}(D_2 - aD_1)$$

$$= b^{n-2}((a+b)^2 - ab - a(a+b))$$

$$= b^n \qquad （1）$$

同样对（*）式还可整理为，

$$D_n - bD_{n-1} = a^n \qquad （2）$$

由（1）（2）两式得，

$$(b-a)D_n = b^{n+1} - a^{n+1}$$

上页 下页 返回

当 $a \neq b$ 时，

$$D_n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a}$$

上页 下页 返回

例7 求下面行列式的值

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} x-y+y & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

上页 下页 返回

$$= (x-y)D_{n-1} + y\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-y)D_{n-1} + y\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-z & y-z & \cdots & y-z \\ 0 & 0 & x-z & \cdots & y-z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-z \end{vmatrix}$$

$$= (x-y)D_{n-1} + y(x-z)^{n-1}$$

同理 $D_n = (x-z)D_{n-1} + z(x-y)^{n-1}$

$\therefore \quad (y-z)D_n = y(x-z)^n - z(x-y)^n$

当 $y \neq z$ 时

$$D_n = \frac{y(x-z)^n - z(x-y)^n}{y-z}$$

当 $y = z$ 时，见教材27页8（2）

上页 下页 返回

7　升阶法

例8　计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

其中　$a_1a_2\cdots a_n\neq 0$

解

$$D_n = D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

上页 下页 返回

$$
=\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
-1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-1 & 0 & 0 & \cdots & a_n
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_n
\end{vmatrix}
$$

$$
=\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)a_1a_2\cdots a_n
$$

解 当$x_1=0$时，

$$D_n=\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}=ax_2x_3\cdots x_n$$

同理，可得其余的结果。

当$x_1x_2\cdots x_n \neq 0$时，

$$D_n = D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a+x_1 & a & \cdots & a \\ 0 & a & a+x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}$$

上页 下页 返回

$$
=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}
$$

箭形行列式，自己计算

练习

计算下列n阶行列式

（1）
$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

（2）
$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

（3）$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 2+a_2 & \cdots & n-1+a_{n-1} & n+a_n \\ 2+a_1 & 3+a_2 & \cdots & n+a_{n-1} & 1+a_n \\ 3+a_1 & 4+a_2 & \cdots & 1+a_{n-1} & 2+a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n+a_1 & 1+a_2 & \cdots & n-2+a_{n-1} & n-1+a_n \end{vmatrix}$$

（4）$$D_n=\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}$$

5. 设四阶行列式$D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \\ d & b & c & a \\ a & b & d & c \end{vmatrix}$,

则$A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} =$ ________

6. 在五阶行列式中$a_{12}a_{53}a_{41}a_{24}a_{35}$的符号为_____

7. 在函数$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$中$x^3$的系数是_____

8. 四阶行列式$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} =$ ________

9. 若a,b为实数,则当$a=$____且$b=$____时,

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

上页 下页 返回

10. 排列 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n$ 可经____次对换后变为排列 $i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$.

二、计算下列行列式(每小题9分，共18分).

$$1.\ D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. $D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$

三、解答题（9分）. 问λ,μ取何值,齐次方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解?

四、证明(每小题8分，共24分).

1. $$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

$$= 0;$$

$$2.\ D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta};$$

3. 用数学归纳法证明

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right) \prod_{1 \le j < i \le n} \left(x_i - x_j\right), \left(n \ge 2\right)$$

上页 下页 返回