高等数学
单元自测(四)

一、填空（每小题4分，共20分）

1. $\dfrac{1}{1+\sin x}$ 的全体原函数为 $\underline{tgx-\sec x+C}$

提示：$\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x}dx$

$$=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx=\tan x-\sec x+c$$

2.若 $\int R\left(\sin^2 x, \cos^2 x\right) dx = \int R\left(\frac{u^2}{1+u^2}, \frac{1}{1+u^2}\right) \frac{1}{1+u^2} du$

则 $u =$ $\underline{\quad tgx \quad}$

3. $\int xf''(x)dx = \underline{xf'(x) - \int f'(x)dx = xf'(x) - f(x) + C}$

首 页 | 上一页 | 下一页 | 尾 页 | 结 束 | 返 回

4. 设 $f(x)$ 有原函数 $x\ln x$，则 $\int xf'(x)dx=$ $\underline{x+c}$

提示：$f(x)=(x\ln x)'=\ln x+1$

$$\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx=x+c$$

5. 设 $f'(e^x)=x+1$，且 $f(1)=0$，则 $f(x)=$ $\underline{x\ln x}$

提示：$f'(x)=\ln x+1$

$$f(x)=\int(\ln x+1)dx=x\ln x+c$$

$$f(1)=0\Rightarrow c=0$$

二、写出下列函数的凑微分形式（10分）

例. $\int f(ax+b)dx = \underline{\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)}$

1. $\int f(ax^n+b)x^{n-1}dx = \underline{\frac{1}{an}\int f(ax^n+b)d(ax^n+b)}$

2. $\int f\left(a^{x}+b\right)a^{x}dx=\dfrac{1}{\ln a}\int f\left(a^{x}+b\right)d\left(a^{x}+b\right)$

$$3.\int f\left[\ln \varphi(x)\right]\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \underline{\int f\left[\ln \varphi(x)\right]d\left(\ln \varphi(x)\right)}$$

4. $\int f(a\tan x+b)\sec^2 xdx=$ $\underline{\frac{1}{a}\int f(atgx+b)d(atgx+b)}$

5. $\int f\left(\arctan\frac{x}{a}\right)\frac{1}{a^2+x^2}dx =$

$$\underline{\frac{1}{a}\int f\left(\arctan\frac{x}{a}\right)d\left(arctg\frac{x}{a}\right)}$$

三. 计算不定积分（50分）

1. $\int \frac{1}{x^4-1}dx$

解：原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4-1}dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{x^2-1}dx - \int \frac{dx}{x^2+1}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}arctgx + C$$

2． $\int\left(\sin^5 x+\cos^2 x\right)dx$

解： $\int \sin^5 x dx = -\int\left(1-\cos^2 x\right)^2 d\cos x$

$$= -\int\left(1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right)d\cos x$$

$$= -\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C_1$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int\left(1+\cos 2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C_2$$

原式 $= -\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C_2$

3．$\int x^2\sqrt{1+8x^3}\,dx$

解：原式 $=\frac{1}{3}\int\sqrt{1+(2x)^3}\,dx^3$

$$=\frac{1}{24}\int\left(1+8x^3\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+8x^3\right)$$

$$=\frac{1}{24}\cdot\frac{2}{3}\left(1+8x^3\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{36}\left(1+8x^3\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

4 . $\int \frac{x dx}{x^4 + 2x^2 + 5}$

解：原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^4 + 2x^2 + 5} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + 2t + 5}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 + 4}$$

$$= \frac{1}{4} arctg \frac{t+1}{2} + C$$

$$= \frac{1}{4} arctg \frac{x^2+1}{2} + C$$

5 . $\int \sin^2 \sqrt{x}dx$

解： 设 $t=\sqrt{x}$ 则 $x=t^2$ $dx=2tdt$

原式 $=\int 2t\sin^2 tdt$

$$=\int 2t\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt = \int (t-t\cos 2t)dt$$

$$=\frac{1}{2}t^2-\left[\frac{t\sin 2t}{2}-\int\frac{1}{2}\sin 2tdt\right]$$

$$=\frac{1}{2}t^2-\frac{t\sin 2t}{2}-\frac{1}{4}\cos 2t+C$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{x}}{2}\sin 2\sqrt{x}-\frac{1}{4}\cos 2\sqrt{x}+C$$

6. $\int \frac{\ln\left(1+e^{x}\right)}{e^{x}}dx$

解：原式 $=-e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)+\int \frac{e^{x}\cdot e^{-x}}{1+e^{x}}dx$

$$=-\frac{\ln\left(1+e^{x}\right)}{e^{x}}+\int \frac{1+e^{x}-e^{x}}{1+e^{x}}dx$$

$$=-\frac{\ln\left(1+e^{x}\right)}{e^{x}+x}+x-\ln\left(1+e^{x}\right)+C$$

7. $\displaystyle\int \frac{\left(x^2+1\right)\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$

解：设 $x=\sin t$

$$\text{原式}=\int \frac{\left(\sin^2 t+1\right)t\cos t}{\sin^2 t\cos t}dt$$

$$=\int\left(t+t\csc^2 t\right)dt \quad =\frac{1}{2}t^2-\int td\left(\cot t\right)$$

$$=\frac{1}{2}t^2-t\cot t+\int \cot t dt$$

$$=\frac{1}{2}t^2-t\cot t+\ln\left(\sin t\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(\arcsin x\right)^2-arc\sin x\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\ln\left|x\right|+C$$

8. $\int \cos \ln x dx$

解：原式 $= x\cos x \ln x + \int \frac{x \sin \ln x}{x} dx$

$= x\cos \ln x + \int \sin \ln x dx$

$= x\cos \ln x + x\sin x \ln x - \int \frac{x\cos \ln x}{x} dx$

$\therefore \int \cos \ln x dx$

$= \frac{1}{2} x(\cos \ln x + \sin \ln x) + C$

9. $\int e^{\sin x}\cdot\dfrac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$

解： 原式 $=\int e^{\sin x}x\cos x dx-\int e^{\sin x}\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

$\because \int xe^{\sin x}\cos x dx=\int xe^{\sin x}d\sin x$

$=\int x de^{\sin x}$

$=xe^{\sin x}-\int e^{\sin x}dx$

$$-\int e^{\sin x}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=-\int e^{\sin x}d\frac{1}{\cos x}=\frac{-e^{\sin x}}{\cos x}+\int e^{\sin x}dx$$

$\therefore$ 原式 $=xe^{\sin x}-e^{\sin x}\sec x+C$

10. $\int \max\{1, x^2\} dx$

解： $\because \max\{1, x^2\}dx = \begin{cases} 1 & |x| \le 1 \\ x^2 & |x| > 1 \end{cases}$

$$\therefore F(x) = \int \max\{1, x^2\} dx = \begin{cases} x + C_1 & |x| \le 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + C_2 & x > 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + C_3 & x < -1 \end{cases}$$

$F(x)$ 连续 $\quad F(1^+) = F(1) = F(1^-)$

$F(-1^+) = F(-1) = F(-1^-)$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + C_2 = 1 + C_1 \Rightarrow C_2 = \frac{2}{3} + C_1 \quad C_3 = C_1 - \frac{2}{3}$$

$$\therefore F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}+c & x<-1\\ x+c & |x|\le 1\\ \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}+c & x>1\end{cases}$$

四、（8分）设 $I_n=\int x^{\alpha}\ln^n xdx$（其中$n$为自然数，$\alpha$为大于0的常数），证明：

$$I=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln^n x-\frac{n}{\alpha+1}I_{n-1}$$，并计算 $\int x^5\ln^3 xdx$

证：
$$I_n=\frac{1}{\alpha+1}\int\ln^n xdx^{\alpha+1}$$

$$=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln^n x-\frac{n}{\alpha+1}\int\frac{x^{\alpha+1}\ln^{n-1}x}{x}dx$$

$$=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln^n x-\frac{n}{\alpha+1}\int x^{\alpha}\ln^{n-1}xdx$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \ln^n x - \frac{n}{\alpha+1} I_{n-1}$$

$$I_0 = \int x^\alpha dx$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$$

$\alpha = 5, \quad n = 3$ 时

$$I_3 = \frac{x^6}{6}\left(\ln^3 x - \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{6}\ln x - \frac{1}{36}\right) + C$$

五、解下列各题（12分）

1．一物体由静止开始作直线运动，在t秒末的速度是$3t^2(m/s)$，问

（1）在3秒时物体离开出发点的距离是多少？

（2）需要多少时间走完$343m$？

解:（1） $\because \quad v(t)=3t^2$

$\therefore \quad s(t)=\int 3t^2dt=t^3+C$

由 $s(0)=0, c=0$

$s(t)=t^3 \qquad s(3)=27$

（2）$\because \quad t^3=343$

$\therefore \quad t=7$秒

2 .函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y'=f'(x)$ 的图象是一条二次抛物线，开口向着y轴的正向，且与x轴交于 $x=0$ 和 $x=2$ ，若 $f(x)$ 的极大值为4，极小值为0，求 $f(x)$

解：设 $f'(x)=ax(x-2)\quad(a>0)$

$$f(x)=\int f'(x)dx$$

$$=\int\left(ax^2-2ax\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}ax^3-ax^2+C$$

$$f(0)=C, f(2)=-\frac{4}{3}a+C$$

接2

$$\because f'(0)=0,\ f'(2)=0$$

且 $f''(x)=2ax-2a$，$f''(0)<-2a<0.$

$$\therefore f(0)=4.$$

即 $C=4$

$$f''(2)=2a>0$$

$$\therefore\ f(2)=0\ \Rightarrow\ -\frac{4}{3}a+4=0\ \Rightarrow\ a=3$$

$$\therefore f(x)=x^3-3x^2+4$$

六、（附加题10分）设 $f(x)$的原函数 $F(x)>0$ 且 $F(0)=0$，当 $x\geq 0$ 时有 $f(x)F(x)=\sin^2 2x$ 求 $f(x)$

解: $\int f(x)F(x)dx=\frac{1}{2}F^2(x)+C_1$

$$\int \sin^2 2xdx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 4x)dx$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+C_2$$

$$\therefore\ F^2(x)=2\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C=x-\frac{1}{4}\sin 4x+C$$

$\because\ F(0)=0\qquad\therefore\quad C=0$

$$\because \quad F(x) > 0$$

$$\therefore \quad F(x) = \sqrt{x - \frac{1}{4}\sin 4x}$$

$$\therefore \quad f(x) = F'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x - \frac{1}{4}\sin 4x}}(1 - \cos 4x)$$

$$= \frac{1 - \cos 4x}{\sqrt{4x - \sin 4x}}$$