中国矿业大学(北京)

2011级《概率论与数理统计》期末考试卷（B卷）

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八
得　分								
阅卷人								

本试卷可能用到的分位点及相关数据： $t_{0.025}(8)=2.3060, t_{0.025}(9)=2.2622$

一．填空题（每小题3分，共24分）

1、已知$P(A)=0.5, P(A\cup B)=0.6$, 若A,B互斥，则$P(B)=$______，若A,B相互独立，则$P(B)=$ ________________。

2、设离散型随机变量X分布律为$P(X=k)=5A(\frac{1}{2})^k \quad (k=1,2,\cdots)$，则$A=$________

3、设$X\sim N(0,1), Y=X^2$,则Y的密度函数$f_Y(y)=$________________________

4、设随机变量X服从参数为1的指数分布，则X的期望为__________。

5、设总体$X\sim N(0,1)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_5)$是来自X的样本，要使

$$Y=\frac{1}{2}(X_1+X_2)^2+b(X_3+X_4+X_5)^2\sim\chi^2(2),$$

则$b=$ ________________.

6、某手表厂生产的某种手表的走时误差(单位：秒/日)服从正态分布，检验员从装配线上随机抽取9只手表进行检测，得到样本均值的观察值为$\bar{x}=0.28$，样本标准差的观察值为$s=2.79$，则该手表走时误差的均值μ的置信水平为0.95的置信区间为__________________。(结果保留小数点后面3位)

7、设随机变量X，Y的相关系数为0.3，$EX=EY=0, E(X^2)=E(Y^2)=2,$则$E[(X+Y)^2]=$____________.

二、（本题 11 分）根据临床记录知道某试验有如下效果：癌症患者对该试验呈阳性反应的概率为0.95，而非癌症患者对该试验呈阳性反应的概率仅为0.01。被试验人群患癌症的概率为0.005，若某人对这项试验呈阳性，问此人患癌症的概率是多少？

三、**（本题 10 分）**设X,Y相互独立且同分布，具有概率密度为$f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

求$X+Y$的概率密度函数.

四、（本题 24 分，每小题 6 分）设(X,Y)具有概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

求$E(Y), D(Y), Cov(X,Y), \rho_{XY}$.

五、（本题 11 分）设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_{300}$(相互独立且服从均匀分布$U(0,2)$，利用中心极限定理近似的方法求 $P\{285\le \sum_{i=1}^{300} X_i \le 320\}$.（结果直接用标准正态分布的分布函数表示即可）

六、**（本题 20 分，每小题 10 分）** 设总体 $X \sim N\left(\mu,\ \sigma_0^2\right)$，其中 μ 是未知参数，$\sigma_0^2 > 0$ 已知，$\left(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n\right)$ 是从该总体中抽取的一个样本，

（1）求未知参数 μ 的矩估计量 $\hat{\mu}_{MM}$.

（2）求未知参数 μ 的最大似然估计量 $\hat{\mu}_{MLE}$.

2011级《概率论与数理统计》期末考试卷（B卷）

参考答案与解析

一．填空题（每小题3分，共24分）

1. 解：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，若$A,B$互斥，则$P(AB)=0$，此时$P(B)=0.1$；

若A,B相互独立，则$P(AB)=P(A)P(B)$，此时$P(B)=0.2$

2. 解：离散型随机变量的分布律满足$\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i=1$，故

$$\sum_{k=1}^{\infty}5A\left(\frac{1}{2}\right)^k=5A\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=5A=1\text{，即 }A=0.2\text{。}$$

3. 解：因$Y=X^2$，故Y在$[0,+\infty)$上取值，从而$y<0$时，$f_Y(y)=0$；

若$y\geq 0$，注意到$X\sim N(0,1)$，故Y的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X^2\leq y\}=P\{-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y}\}=P\{X\leq\sqrt{y}\}-P\{X\leq-\sqrt{y}\}$$
$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})=2\Phi(\sqrt{y})-1\text{。}$$

对式子$F_Y(y)=2\Phi(\sqrt{y})-1$两边关于y求导，可得：

$$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[2\int_{-\infty}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t-1\right]=2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\text{。}$$

于是Y的概率密度函数$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, y\geq 0\\ 0, \quad\quad \text{others}\end{cases}$。

注意：解题过程中应用了变限积分的求导：设$f(x)$可积，$g(x)$可导，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{g(x)}f(t)\mathrm{d}t=f[g(x)]\cdot g'(x)\text{。}$$

4. 解：方法1：由题可知：$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, x>0\\ 0,\ \text{others}\end{cases}$，故$X$的期望

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\left[-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty}=1\text{。}$$

方法2：直接套用结论，即参数为θ的指数分布的期望也为θ。

5. 解：因$X_1,X_2,\cdots,X_5$是总体$N(0,1)$的一个样本，故$X_1+X_2\sim N(0,2), X_3+X_4+X_5\sim N(0,3)$。

且两者相互独立，因此$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1),\frac{X_3+X_4+X_5}{\sqrt{3}}\sim N(0,1)$。

且两者相互独立，按照χ^2分布的定义：$\frac{(X_1+X_2)^2}{2}+\frac{(X_3+X_4+X_5)^2}{3}\sim\chi^2(2)$，即$b=\frac{1}{3}$。

6. 解：由于σ^2未知，故均值μ的置信水平为0.95的置信区间为

$$\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=\left(0.28\pm\frac{2.79}{3}\times 2.306\right)=(-1.865,2.425)$$

其中，$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306$。

7. 解：$E\left[(X+Y)^2\right]=E(X^2)+E(Y^2)+2E(XY)=4+2E(XY)$。

又$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2;D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=2$。

故$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{2}=0.3$，即$\mathrm{Cov}(X,Y)=0.6$。

而$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(XY)=0.6$，故$E\left[(X+Y)^2\right]=4+2\times 0.6=5.2$。

二、（本题11分）解：用B表示“对试验呈阳性反应”，A表示“癌症患者”，则$\overline{A}$表示“非癌症患者”。显然有：$P(A)=0.005,P(\overline{A})=0.995,P(B|A)=0.95,P(B|\overline{A})=0.01,$

根据“贝叶斯公式”可知所求概率：

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(AB)}{P(AB)+P(\overline{A}B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{95}{294}$$

三、（本题10分）解：由“卷积公式”知$Z=X+Y$的概率密度为：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

当$z>0$时，$f_Z(z)=\int_0^z x\mathrm{e}^{-x}(z-x)\mathrm{e}^{-(z-x)}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-z}\int_0^z x(z-x)\mathrm{d}x=\frac{z^3}{6\mathrm{e}^z}$

当$z\le 0$时，由于$f_X(x)=0$知，$f_Z(z)=0$，故$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z^3}{6\mathrm{e}^z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

四、（本题24分，每小题6分）解：(2) $E(X)=E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 x(x+y)\mathrm{d}y=\frac{7}{12}$

$$D(X)=D(Y)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 x^2(x+y)\mathrm{d}y-\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{11}{144}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 xy(x+y)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{3}-\left(\frac{7}{12}\right)^2=-\frac{1}{144}$$

五、（本题 11 分）解：依题意有 $E(X_i)=1, D(X_i)=\frac{1}{3}$。由“李雅普诺夫中心极限定理”，可知

$$Z_n=\frac{\sum_{i=1}^{300}X_i-\sum_{i=1}^{300}E(X_i)}{\sqrt{300\times\frac{1}{3}}}=\frac{\sum_{i=1}^{300}X_i-300}{10}\sim N(0,1)\text{。}$$

因此 $P\left\{285\le\sum_{i=1}^{300}X_i\le 320\right\}=P\left\{\frac{285-300}{10}\le\frac{\sum_{i=1}^{300}X_i-300}{10}\le\frac{320-300}{10}\right\}$

$$\approx\Phi(2)-\Phi(-1.5)=\Phi(2)+\Phi(1.5)-1=0.9104\text{。}$$

六、（本题 20 分，每小题 10 分）解：（1）设 $\mu_1=E(X)=\mu$，用 $\overline{X}$ 代替 μ_1 可得参数 μ 的矩估计量 $\hat{\mu}_{MM}=\overline{X}$。

（2）因正态总体为连续型，其密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_0^2}}$，

所以似然函数为：$L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2}\right\}=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$

$$\ln L(\mu)=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma_0^2-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

故似然方程为 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\mu)}{\mathrm{d}\mu}=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0$

解方程得：$\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{X}$，故 $\hat{\mu}_{MLE}=\overline{X}$。