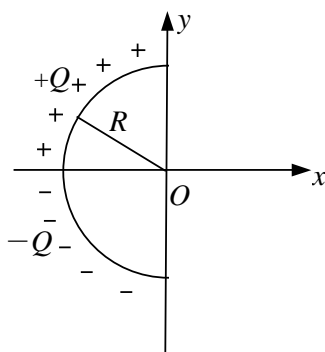
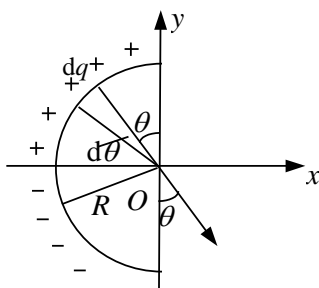


第十章 静电场

1. 一个细玻璃棒被弯成半径为 R 的半圆形，沿其上半部分均匀分布有电荷 $+Q$ ，沿其下半部分均匀分布有电荷 $-Q$ ，如图所示。试求圆心 O 处的电场强度。



解：在 θ 处取微小电荷： $dQ = \lambda dl = 2Q d\theta / \pi$



它在 O 处产生场强：

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} d\theta$$

按 θ 角变化，将 dE 分解成二个分量：

$$dE_x = dE \sin\theta = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} \sin\theta d\theta$$

$$dE_y = -dE \cos\theta = -\frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} \cos\theta d\theta$$

对各分量分别积分，积分时考虑到一半是负电荷

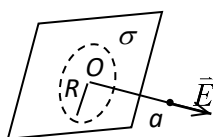
$$E_x = \frac{Q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2} \left[\int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \theta d\theta \right] = 0$$

$$E_y = \frac{-Q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2} \left[\int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta d\theta \right] = -\frac{Q}{\pi^2 \epsilon_0 R^2}$$

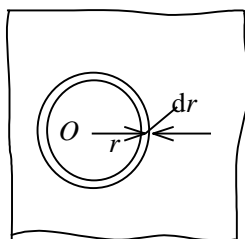
所以：

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = \frac{-Q}{\pi^2 \epsilon_0 R^2} \vec{j}$$

2. 如图所示，一电荷面密度为 σ 的“无限大”平面，在距离平面 a 处的一点 A 的场强大小的一半是由平面上的一个半径为 R 的圆面积范围内的电荷所产生的（AO 连线垂直于平面）。试求该圆半径的大小。



解：电荷面密度为 σ 的无限大均匀带电平面在任意点的场强大小为 $E = \sigma / (2\epsilon_0)$



以图中 O 点为圆心，取半径为 $r \rightarrow r + dr$ 的环形面积，其电量为：

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

它在距离平面为 A 的一点处产生的场强：

$$dE = \frac{\sigma a r dr}{2\epsilon_0 (a^2 + r^2)^{3/2}}$$

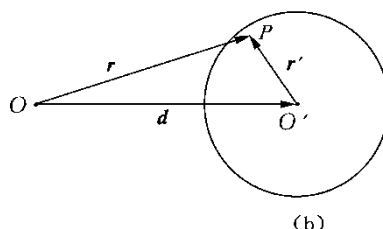
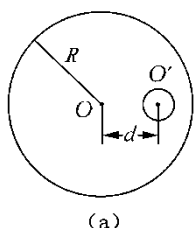
则半径为 R 的圆面积内的电荷在该点的场强为：

$$E = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(a^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right)$$

由题意,令 $E = \sigma/(4\varepsilon_0)$, 得到

$$R = \sqrt{3}a$$

3. 半径为 R 的均匀带电球体内的电荷体密度为 ρ ,若在球内挖去一块半径为 $r < R$ 的小球体, 如图所示. 试求: 两球心 O 与 O' 点的场强, 并证明小球空腔内的电场是均匀的.



解: 将此带电体看作带正电 ρ 的均匀球与带电 $-\rho$ 的均匀小球的组合, 如图(a)所示:

(1) $+\rho$ 球在 O 点产生电场 $\vec{E}_{10} = 0$,

$-\rho$ 球在 O 点产生电场

$$\vec{E}_{20} = \frac{4}{3} \frac{\pi r^3 \rho}{4\pi \varepsilon_0 d^3} \overrightarrow{OO'}$$

$\therefore O$ 点电场

$$\vec{E}_0 = \frac{r^3 \rho}{3\varepsilon_0 d^3} \overrightarrow{OO'}$$

(2) $+\rho$ 在 O' 产生电场

$$\vec{E}_{10'} = \frac{4}{3} \frac{\pi d^3 \rho}{4\pi \varepsilon_0 d^3} \overrightarrow{OO'}$$

$-\rho$ 球在 O' 产生电场 $\vec{E}_{20'} = 0$

$\therefore O'$ 点电场

$$\vec{E}_{0'} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \overrightarrow{OO'}$$

(3) 设空腔任一点 P 相对 O' 的位矢为 \vec{r}' , 相对 O 点位矢为 \vec{r} (如图(b))

则

$$\vec{E}_{PO} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}, \quad \vec{E}_{PO'} = -\frac{\rho \vec{r}'}{3\epsilon_0}$$

$$\therefore \vec{E}_P = \vec{E}_{PO} + \vec{E}_{PO'} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OO'} = \frac{\rho \vec{d}}{3\epsilon_0}$$

腔内场强是均匀的。

4. 半径为 R_1 和 $R_2 (R_2 > R_1)$ 的两无限长同轴圆柱面, 单位长度上分别带有电量 λ 和 $-\lambda$, 试求: (1) $r < R_1$; (2) $R_1 < r < R_2$; (3) $r > R_2$ 处各点的场强。

解: 高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$$

取同轴圆柱形高斯面, 侧面积 $S = 2\pi r l$, 则

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 2\pi r l$$

(1) $r < R_1$: $\sum q = 0, E = 0$

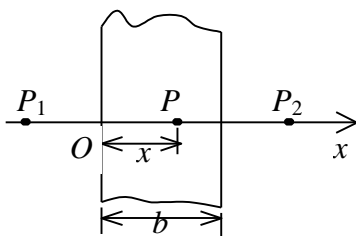
(2) $R_1 < r < R_2$: $\sum q = l\lambda$

$$\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ 沿径向向外}$$

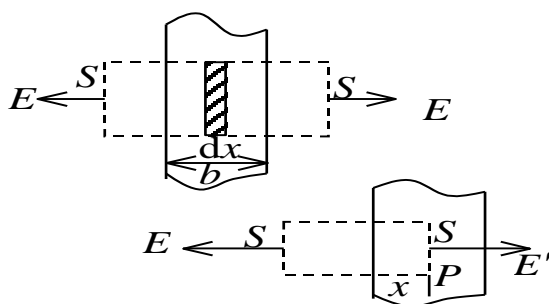
(3) $r > R_2$: $\sum q = 0$

$$\therefore E = 0$$

5. 如图所示, 一厚为 B 的“无限大”带电平板, 其电荷体密度分布为: $\rho = kx$ ($0 \leq x \leq B$), 式中 k 为一正的常量。求: (1) 平板外两侧任一点 P_1 和 P_2 处的电场强度大小; (2) 平板内任一点 P 处的电场强度; (3) 场强为零的点在何处?



解: (1) 由对称分析知, 平板外两侧场强大小处处相等、方向垂直于平面且背离平面。设场强大小为 E



作一柱形高斯面垂直于平面．其底面大小为 S ，如图所示．按高斯定理：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum q / \varepsilon_0$$

即：

$$2SE = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^b \rho S dx = \frac{kS}{\varepsilon_0} \int_0^b x dx = \frac{kSb^2}{2\varepsilon_0}$$

得到：

$$E = kb^2 / (4\varepsilon_0) \quad (\text{板外两侧})$$

(2) 过 P 点垂直平板作一柱形高斯面，底面为 S ．设该处场强为 E' ，如图所示．按高斯定理有：

$$(E' + E)S = \frac{kS}{\varepsilon_0} \int_0^x x dx = \frac{kSb^2}{2\varepsilon_0}$$

得到：

$$E' = \frac{k}{2\varepsilon_0} \left(x^2 - \frac{b^2}{2} \right) \quad (0 \leq x \leq b)$$

(3) $E' = 0$ ，必须是

$$x^2 - \frac{b^2}{2} = 0$$

可得

$$x = b / \sqrt{2}$$

6. 用高斯定理重新求解教材中的【例 10.20】: 电荷 Q 均匀地分布在半径为 R 的球体内, 试证明离球心 r ($r < R$) 处的电势为 $U = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$ 。

证明: 球的体积为 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, 电荷的体密度为 $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ 。

球内外的电场强度大小为 $E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$, ($r \leq R$);

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (r \geq R)。$$

取无穷远处的电势为零, 则 r 处的电势为

$$\begin{aligned} U &= \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^R E dr + \int_R^\infty E dr \\ &= \int_r^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r dr + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} r^2 \Big|_r^R + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_R^\infty \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (R^2 - r^2) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \\ &= \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}。 \end{aligned}$$

7. 一半径为 R 的带电球体, 其电荷体密度分布为: $\rho = \frac{qr}{\pi R^4}$ ($r \leq R$) (Q 为一正的常量),

$\rho = 0$ ($r > R$)。试求:

(1) 带电球体的总电荷;

(2) 球内、外各点的电场强度;

(3) 球内、外各点的电势。 注: 第(3)问在讲完电势后做!

解: (1) 在球内取半径为 r 、厚为 dr 的薄球壳, 该壳内所包含的电荷为:

$$dq = \rho dV = qr \cdot 4\pi r^2 dr / (\pi R^4) = 4qr^3 dr / R^4$$

则球体所带的总电荷为:

$$Q = \int_V \rho dV = (4q/R^4) \int_0^R r^3 dr = q$$

(2) 在球内作一半径为 r_1 的高斯球面, 按高斯定理有:

$$4\pi r_1^2 E_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{r_1} \frac{qr}{\pi R^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{qr_1^4}{\varepsilon_0 R^4}$$

得:

$$E_1 = \frac{qr_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4} \quad (r_1 \leq R), \quad \vec{E}_1 \text{ 方向沿半径向外}$$

在球体外作半径为 r_2 的高斯球面, 按高斯定理: $4\pi r_2^2 E_2 = q/\varepsilon_0$ 得:

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} \quad (r_2 > R), \quad \vec{E}_2 \text{ 方向沿半径向外}$$

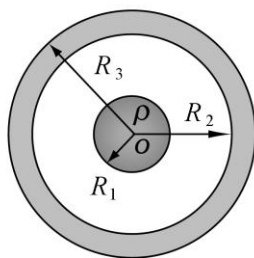
(3) 球内电势:

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_{r_1}^R \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^R \frac{qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4} dr + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{q}{3\pi\varepsilon_0 R} - \frac{qr_1^3}{12\pi\varepsilon_0 R^4} = \frac{q}{12\pi\varepsilon_0 R} \left(4 - \frac{r_1^3}{R^3} \right) \quad (r_1 \leq R) \end{aligned}$$

球外电势:

$$U_2 = \int_{r_2}^R \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \int_{r_2}^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \quad (r_2 > R)$$

8. 半径为 R_1 的均匀带电球体的电荷体密度为 ρ , 球外有一内外半径分别为 R_2 、 R_3 的同心导体球壳。试计算空间电场强度和电势分布。



解：要求电场强度分布，需先确定电荷的分布。因为处于静电平衡状态的导体内部场强处处为零，所以由高斯定理和电荷守恒定律可知，球壳内表面带电量为 $-Q$ ，外表面带电量为 Q ($Q = \rho R_1^3 \pi 4/3$)。由于带电体是球对称的，所以电荷必是球对称分布的。作半径为 r 的同心球面为高斯面，则由高斯定理可知

$$4\pi r^2 \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$$

当 $r \leq R_1$ 时

$$\sum q = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$E_1 = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0}$$

当 $R_1 \leq r \leq R_2$ 时

$$\sum q = Q = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_1^3$$

$$E_2 = \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2}$$

当 $R_2 < r < R_3$ 时

$$\sum q = 0$$

$$E_3 = 0$$

当 $r > R_3$ 时

$$\sum q = Q = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_1^3$$

$$E_4 = \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2}$$

电场分布的矢量形式为

$$\begin{cases} E_1 = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0}, & r \leq R_1 \\ E_2 = \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0, & R_1 \leq r \leq R_2 \\ E_3 = 0, & R_2 < r < R_3 \\ E_4 = \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0, & r > R_3 \end{cases}$$

选无穷远处为电势零参考点，由电势定义可求得各区域的电势为

当 $r \geq R_3$ 时

$$u = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{R_3} \mathbf{E}_4 \cdot d\mathbf{r} = \int_r^\infty \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r}$$

当 $R_2 \leq r \leq R_3$ 时

$$u = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{R_3} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_3}^\infty \mathbf{E}_4 \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_3}^\infty \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 R_3}$$

当 $R_1 \leq r \leq R_2$ 时

$$\begin{aligned} u &= \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{R_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_2}^{R_3} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_3}^\infty \mathbf{E}_4 \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_r^{R_2} \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2} dr + 0 + \int_{R_3}^\infty \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \end{aligned}$$

当 $0 \leq r \leq R_1$ 时

$$\begin{aligned} u &= \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{R_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_2}^{R_3} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_3}^\infty \mathbf{E}_4 \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_r^{R_1} \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2} dr + 0 + \int_{R_3}^\infty \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{\rho R_1^2}{2 \epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6 \epsilon_0} + \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

另解：

对电势分布也可直接用电势叠加原理求解，具体解法如下：若求空间任意一点 P 的电势，设 P 点距离球心为 r，则以半径为 r 的球面为界面，将电荷分为内、外两部分。内部电荷在场点 P 产生的电势就如同内部电荷全部集中在球心处的点电荷在 P 点产生的电势；而外部电荷可以视为由许多极薄的带电同心球壳叠加而成，每一个薄球壳在 P 点产生的电势就是此带电薄球壳单独存在时其本身的电势。所以

当 $r \geq R_3$ 时

$$u = u_{\text{内}} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} = \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 r}$$

当 $R_2 \leq r \leq R_3$ 时

$$u = u_{\text{内}} + u_{\text{外}} = 0 + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_3} = \frac{\rho R_1^3}{3 \epsilon_0 R_3}$$

当 $R_1 \leq r \leq R_2$ 时

$$u = u_{\text{内}} + u_{\text{外}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$= \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

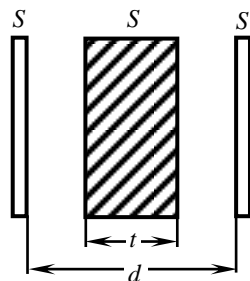
当 $0 \leq r \leq R_1$ 时

$$u = u_{\text{内}} + u_{\text{外}} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\epsilon_0 r} + \int_r^{R_1} \frac{\rho \cdot 4\pi r'^2 dr'}{4\pi\epsilon_0 r'} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$= \frac{\rho R_1^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right)$$

9. 一空气平行板电容器，两极板面积均为 S ，板间距离为 d （ d 远小于极板线度），在两极板间平行地插入一面积也是 S ，厚度为 t （ $t < d$ ）的金属片，如图所示。试求：

- (1) 电容 C 的值；
- (2) 金属片放在两极板间的位置对电容值有无影响？



解：设极板上分别带电荷 $+q$ 和 $-q$ ；金属片与 A 板距离为 d_1 ，与 B 板距离为 d_2 ；金属片与 A 板间场强为

$$E_1 = \frac{q}{\epsilon_0 S}$$

金属板与 B 板间场强为

$$E_2 = \frac{q}{\epsilon_0 S}$$

金属片内部场强为 $E' = 0$

则两极板间的电势差为

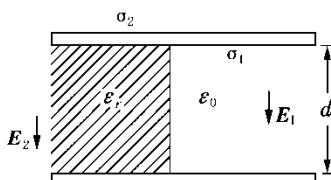
$$U_A - U_B = \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{q}{\epsilon_0 S} (d_1 + d_2) = \frac{q}{\epsilon_0 S} (d - t)$$

由此得

$$C = \frac{q}{U_A - U_B} = \frac{\epsilon_0 S}{d - t}$$

因 C 值仅与 d 、 t 有关，与 d_1 、 d_2 无关，故金属片的安放位置对电容值无影响。

10. 如图所示，在平行板电容器的一半容积内充入相对介电常数为 ϵ_r 的电介质。试求：在有电介质部分和无电介质部分极板上自由电荷面密度的比值。



解：如图所示，充满电介质部分场强为 \vec{E}_2 ，真空部分场强为 \vec{E}_1 ，自由电荷面密度分别为 σ_2 与 σ_1 ，由

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

得

$$D_1 = \sigma_1, D_2 = \sigma_2$$

而

$$D_1 = \epsilon_0 E_1, D_2 = \epsilon_0 \epsilon_r E_2$$

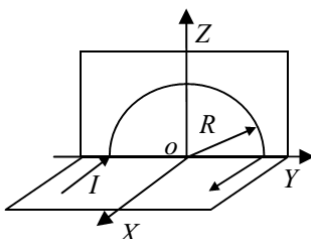
于是

$$E_1 = E_2 = \frac{U}{d}$$

$$\therefore \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{D_2}{D_1} = \epsilon_r$$

第十一章 静磁场

1. 如图所示的载流导线，图中半圆的半径为 R ，直线部分伸向无限远处。求圆心 O 处的磁感应强度 B 。



解：在直线磁场公式

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

中，令 $\theta_1 = 0$ 、 $\theta_2 = \pi/2$ ，或者 $\theta_1 = \pi/2$ 、 $\theta_2 = \pi$ ，就得半无限长导线在端点半径

为 R 的圆周上产生的磁感应强度 $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$

两无限长半直线在 O 点产生的磁场方向都向着 Z 方向，大小为 $B_z = \mu_0 I / 2\pi R$

半圆在 O 处产生的磁场方向沿着 X 方向，大小为 $B_x = \mu_0 I / 4R$

O 点的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = -B_x \mathbf{i} - B_z \mathbf{k} = -\frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{i} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \mathbf{k}$$

场强大小为

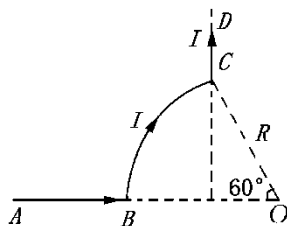
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sqrt{4 + \pi^2}$$

与 X 轴的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{B_z}{B_x} = \arctan \frac{2}{\pi}$$

2. 如图所示， AB 、 CD 为长直导线， \widehat{BC} 为圆心在 O 点的一段圆弧形导线，其半径为 R 。若

通以电流 I ，求 O 点的磁感应强度。



解： O 点磁场由 AB 、 BC 、 CD 三部分电流产生。其中

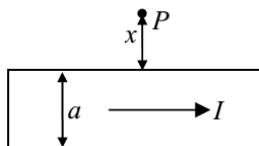
AB 产生 $\vec{B}_1 = 0$

BC 产生 $B_2 = \frac{\mu_0 I}{12R}$ ，方向垂直向里

CD 段产生 $B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{R}{2}} (\sin 90^\circ - \sin 60^\circ) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$ ，方向 \perp 向里

$\therefore B_0 = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6})$ ，方向 \perp 向里。

3. 如图所示，宽度为 a 的薄长金属板中通有电流 I ，电流沿薄板宽度方向均匀分布。求在薄板所在平面内距板的边缘为 x 的 P 点处的磁感应强度。



解：电流分布在薄板的表面上，单位长度上电流密度，即面电流的线密度为 $\delta = I/a$ ，

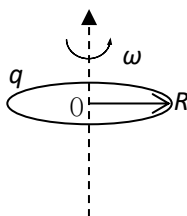
以板的下边缘为原点，在薄板上取一宽度为 dl 的通电导线，电流强度为 $dI = \delta dl$ 。在 P 点产生磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \delta dl}{2\pi(x+a-l)}$$

磁场方向垂直纸面向外。由于每根电流产生的磁场方向相同，总磁场为

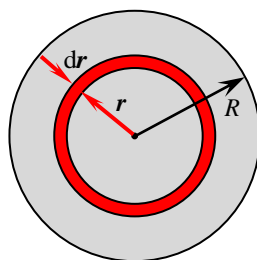
$$B = \int_0^a \frac{\mu_0 \delta dl}{2\pi(x+a-l)} = -\frac{\mu_0 \delta}{2\pi} \ln(x+a-l) \Big|_{l=0}^a = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln(1 + \frac{a}{x})$$

4. 一个圆盘半径为 R ，电荷 q 均匀分布于表面，圆盘绕通过圆心垂直盘面的轴转动，角速度为 ω 。求圆盘中心处的磁感应强度。



解：在圆盘上取半径为 r 、宽度为 dr 的同心圆环，其带电量为

$$dq = \frac{q}{\pi R^2} 2\pi r dr$$



圆环上的电流为

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\frac{q}{\pi R^2} 2\pi r dr}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{q\omega}{\pi R^2} r dr$$

dI 在圆心处激发的磁感强度大小为

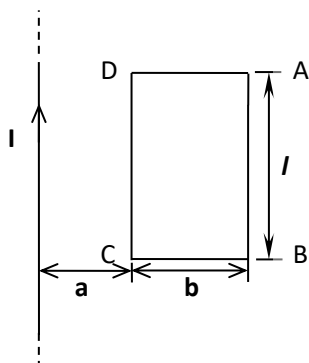
$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0}{2r} \frac{q\omega}{\pi R^2} r dr = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2} dr$$

圆盘中心处的磁感强度大小

$$B = \int dB = \int_0^R \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2} dr = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R}$$

方向垂直于纸面。

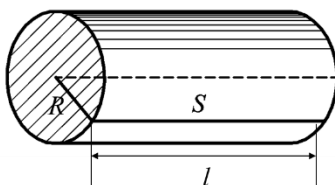
5. 如图所示，载流长直导线中的电流为 I ，求穿过矩形回路的磁通量。



解: $B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$, $d\varphi_m = B_x dS = B_x l dx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi x} dx$,

$$\varphi_m = \int d\varphi_m = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I l}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

6. 一无限长直圆柱状导体, 半径为 R , 其中通有电流 I , 并且在其横截面上电流密度均匀分布。(1) 求导体内、外磁感应强度的分布。(2) 在导体内部作一长度为 l 的平面 S , 如图所示, 试计算通过平面的磁通量。



解: (1) 圆柱体轴对称, 以轴上一点为圆心取垂直轴的平面内半径为 r 的圆为安培环路

$$\because \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 \sum I$$

当 $r \geq R$ $\sum I = I$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

当 $r \leq R$ $\sum I = \frac{I r^2}{R^2}$

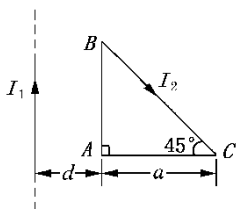
$$\therefore \oint_r \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{I r^2}{R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

(2) 磁通量

$$\Phi_m = \int_{(s)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^R \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} l dr = \frac{\mu_0 I l}{4\pi}$$

7. 如图所示, 长直电流 I_1 附近有一等腰直角三角形线框, 通以电流 I_2 , 二者共面. 求 $\triangle ABC$ 的各边所受的磁力。



解:

$$\vec{F}_{AB} = \int_B^A I_2 d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$F_{AB} = I_2 a \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi d}$$

方向垂直 AB 向左

$$\vec{F}_{AC} = \int_A^C I_2 d\vec{l} \times \vec{B}$$

方向垂直 AC 向下, 大小为

$$F_{AC} = \int_d^{d+a} I_2 dr \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}$$

同理 \vec{F}_{BC} 方向垂直 BC 向上, 大小

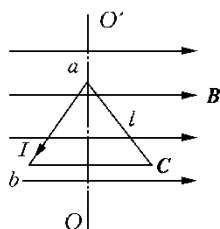
$$F_{BC} = \int_d^{d+a} I_2 dl \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

$$\because dl = \frac{dr}{\cos 45^\circ}$$

$$\therefore F_{BC} = \int_a^{d+a} \frac{\mu_0 I_2 I_1 dr}{2\pi r \cos 45^\circ} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\sqrt{2}\pi} \ln \frac{d+a}{d}$$

8. 边长为 $l=0.1\text{m}$ 的正三角形线圈放在磁感应强度 $B=1\text{T}$ 的均匀磁场中, 线圈平面与磁场方向平行. 如图所示, 使线圈通以电流 $I=10\text{A}$, 求:

- (1) 线圈每边所受的安培力；
 (2) 对 OO' 轴的磁力矩大小；
 (3) 从所在位置转到线圈平面与磁场垂直时磁力所作的功。



解：(1) $\vec{F}_{bc} = I\vec{l} \times \vec{B} = 0$

$\vec{F}_{bc} = I\vec{l} \times \vec{B} = 0$ 方向 \perp 纸面向外，大小为

$$F_{ab} = IlB \sin 120^\circ = 0.866 \text{ N}$$

$\vec{F}_{ca} = I\vec{l} \times \vec{B}$ 方向 \perp 纸面向里，大小

$$F_{ca} = IlB \sin 120^\circ = 0.866 \text{ N}$$

(2) $P_m = IS$

$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$ 沿 $\overrightarrow{OO'}$ 方向，大小为

$$M = ISB = I \frac{\sqrt{3}l^2}{4} B = 4.33 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$$

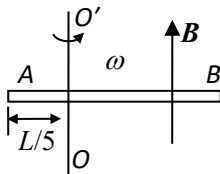
(3) 磁力功 $A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$

$$\because \Phi_1 = 0 \quad \Phi_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 B$$

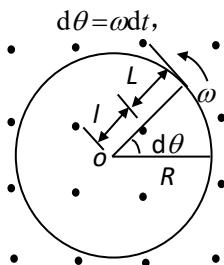
$$\therefore A = I \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 B = 4.33 \times 10^{-2} \text{ J}$$

第十二章 电磁感应

1. 一条铜棒长为 L ，水平放置，可绕距离 A 端为 $L/5$ 处和棒垂直的轴 OO' 在水平面内旋转，每秒转动一周。铜棒置于竖直向上的匀强磁场中，如图所示，磁感应强度 B 。求铜棒两端 A 、 B 的电势差，何端电势高。



解：设想一个半径为 R 的金属棒绕一端做匀速圆周运动，角速度为 ω ，经过时间 dt 后转过的角度为



扫过的面积为 $dS = R^2 d\theta / 2$,

切割的磁通量为 $d\Phi = BdS = BR^2 d\theta / 2$,

电动势的大小为 $\mathcal{E} = d\Phi/dt = \omega BR^2 / 2$ 。

根据右手螺旋法则，圆周上端点的电势高。

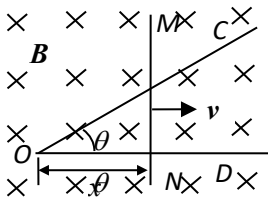
AO 和 BO 段的动生电动势大小分别为

$$\mathcal{E}_{AO} = \frac{\omega B}{2} \left(\frac{L}{5}\right)^2 = \frac{\omega BL^2}{50}, \quad \mathcal{E}_{BO} = \frac{\omega B}{2} \left(\frac{4L}{5}\right)^2 = \frac{16\omega BL^2}{50}.$$

由于 $BO > AO$ ，所以 B 端的电势比 A 端更高， A 和 B 端的电势差为

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{BO} - \mathcal{E}_{AO} = \frac{3\omega BL^2}{10}.$$

2. 如图，有一弯成 θ 角的金属架 COD 放在磁场中，磁感应强度 B 的方向垂直于金属架 COD 所在平面，一导体杆 MN 垂直于 OD 边，并在金属架上以恒定速度 v 向右滑动， v 与 MN 垂直，设 $t=0$ 时， $x=0$ ，求下列两情形，框架内的感应电动势 \mathcal{E}_i 。(1) 磁场分布均匀，且 B 不随时间改变；(2) 非均匀的交流磁场 $B = Kx \cos \omega t$ 。



解：(1) 经过时间 t ，导体杆前进的距离为 $x = vt$ ，杆的有效长度为 $l = \tan \theta = (\tan \theta)t$ ，电动势由 N 指向 M，M 点电势高，大小为 $\varepsilon_i = Blv = Bv^2(\tan \theta)t$ 。

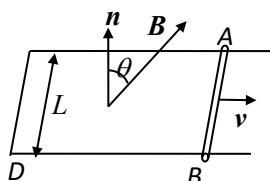
(2) 取顺时针为回路绕向的正方向，则通过该面的磁通量为

$$\Phi = \int_0^x Kx^2 \tan \theta \cos \omega t dx = \frac{Kx^3 \cos \omega t \tan \theta}{3}$$

感应电动势为

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{Kx^3 \omega \sin \omega t \tan \theta}{3} - Kx^2 v \cos \omega t \tan \theta \\ &= \frac{Kv^3 t^3 \omega \sin \omega t \tan \theta}{3} - Kv^3 t^2 \cos \omega t \tan \theta \end{aligned}$$

3. 如图所示，匀强磁场 B 与矩形导线回路的法线 n 成 $\theta = 60^\circ$ 角， $B = kt$ (k 为大于零的常数)。长为 L 的导体杆 AB 以匀速 v 向右平动，求回路中 t 时刻的感应电动势的大小和方向 (设 $t = 0$ 时， $x = 0$)。



解：经过时间 t ，导体杆运动的距离为 $x = vt$ ，

扫过的面积为

$$S = Lx = Lvt,$$

通过此面积的磁通量为

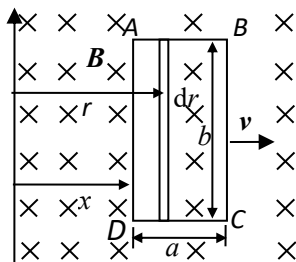
$$\Phi = BS = BS \cos \theta = Lvkt^2/2.$$

感应电动势的大小为

$$\varepsilon = d\Phi/dt = Lvkt.$$

由于回路中磁通量在增加，而感应电流的磁通量阻碍原磁通量增加，其磁场与原磁场的方向相反，所以感应电动势的方向是顺时针的。

4. 长为 b ，宽为 a 的矩形线圈 $ABCD$ 与无限长直载流导线共面，且线圈的长边平行于长直导线，线圈以速度 v 向右平动， t 时刻 AD 边距离长直导线为 x ；且长直导线中的电流按 $I = I_0 \cos \omega t$ 规律随时间变化，如图所示。求回路中的电动势 ε 。



解：电流 I 在 r 处产生的磁感应强度为 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ，

穿过面积元 $dS=bdr$ 的磁通量为 $d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi r} dr$,

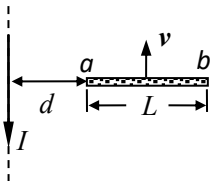
穿过矩形线圈 $ABCD$ 的磁通量为 $\Phi = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \int_x^{x+a} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \ln\left(\frac{x+a}{x}\right)$,

回路中的电动势为

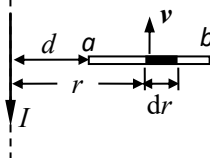
$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{x+a}{x}\right) \frac{dI}{dt} + I \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} \right) \frac{dx}{dt} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} \left[\omega \ln\left(\frac{x+a}{x}\right) \sin \omega t + \frac{av \cos \omega t}{x(x+a)} \right].\end{aligned}$$

显然, 第一项是由于磁场变化产生的感生电动势, 第二项是由于线圈运动产生的动生电动势。

5. 如图, 导线 ab 以速率 v 沿平行于长直载流导线的方向运动, ab 与直导线共面, 且与它垂直。导线中电流强度为 I , ab 长 L , a 端到直导线的距离为 d , 求导线 ab 中的动生电动势, 并判断哪端电势较高。



解: 在导线 ab 所在直线上距长直载流导线 r 处取一线元 dr , 方向向右。

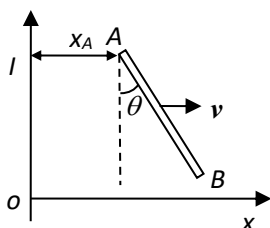


$$d\varepsilon_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi r} dr,$$

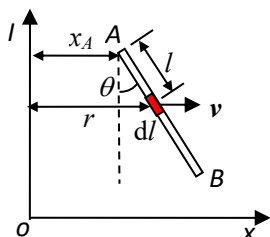
$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b d\varepsilon = \int_d^{d+L} \frac{\mu_0 Iv}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi} \ln \frac{d+L}{d}$$

$\varepsilon_{ab} > 0$, 电动势的方向由 a 指向 b , b 端电势较高。

6. 如图所示, 一长直载流导线电流强度为 I , 铜棒 AB 长为 L , A 端与直导线的距离为 x_A , AB 与直导线的夹角为 θ , 以水平速度 v 向右运动。铜棒与载流直导线共面, 求 AB 棒的电动势为多少, 何端电势高?



解：在棒上长为 l 处取一线元 dl ，在垂直于速度方向上的长度为 $dl_{\perp} = dl \cos \theta$ ；线元到直线之间的距离为 $r = x_A + l \sin \theta$ ，



直线电流在线元处产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x_A + l \sin \theta)}。$$

由于 B ， v 和 dl_{\perp} 相互垂直，线元上动生电动势的大小为

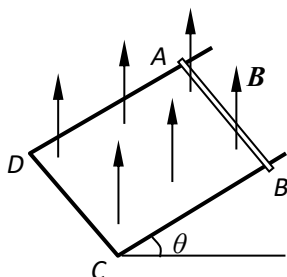
$$d\varepsilon = Bv dl_{\perp} = \frac{\mu_0 Iv \cos \theta dl}{2\pi(x_A + l \sin \theta)}，$$

棒的动生电动势为

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\mu_0 Iv \cos \theta}{2\pi} \int_0^L \frac{dl}{x_A + l \sin \theta} = \frac{\mu_0 Iv \cos \theta}{2\pi \sin \theta} \int_0^L \frac{d(x_A + l \sin \theta)}{x_A + l \sin \theta} \\ &= \frac{\mu_0 Iv}{2\pi} \cot \theta \ln \frac{x_A + L \sin \theta}{x_A}， \end{aligned}$$

A 端的电势高。

7. 如图所示，质量为 m ，长为 l ，电阻为 R 的金属棒 AB 放置在一个倾斜的光滑 U 形框架上，并由静止下滑，磁场 \mathbf{B} 垂直向上。求：（1） U 形框架为绝缘时， AB 棒内的动生电动势与时间的函数关系；（2） U 形框架为导体时（不计电阻）， AB 棒下滑速度随时间的变化关系，最大速度为多少？



解: (1) $\varepsilon_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \overline{BA} = vB \sin \alpha \cdot l = vBl \cos \theta$

\therefore 在斜面上, $mg \sin \theta = ma$, $\therefore a = g \sin \theta$

$$v = at = gt \sin \theta, \therefore \varepsilon_i = gt \sin \theta \cdot Bl \cos \theta = \frac{1}{2} Bgl t \sin 2\theta$$

(2) 此时, 在 BADC 回路中产生感应电流, 所以 AB 还受安培力作用, 大小为

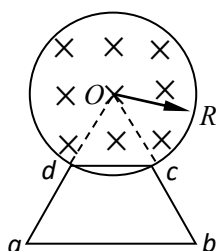
$$F_i = BIl = Bl \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{B^2 l^2}{R} v \cos \theta, \text{ 方向水平向右。}$$

$$\text{沿斜面, } mg \sin \theta - F_i \cos \theta = ma = m \frac{dv}{dt},$$

$$\text{即 } mg \sin \theta - \frac{B^2 l^2 \cos^2 \theta}{R} v = m \frac{dv}{dt}$$

$$\text{解得 } v_{\max} = \frac{mgR \sin \theta}{B^2 l^2 \cos^2 \theta} (1 - e^{-\frac{B^2 l^2 \cos^2 \theta}{mR} t}), \quad v_{\max} = \frac{mgR \sin \theta}{B^2 l^2 \cos^2 \theta}.$$

8. 在半径为 R 的细长螺线管内有 $\frac{dB}{dt} > 0$ 的均匀磁场, 一等腰梯形金属框 $abcd$ 如图放置。已知, $ab=2R$, $cd=R$, 求: (1) 各边产生的感生电动势; (2) 线框的总电动势。



解：（1）径向上的电动势为零，即 $\varepsilon_{ad} = \varepsilon_{cd} = 0$ ，在 ΔOdc 中，以 dc 为底，设 h_1 为高

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} R h_1 \cdot B = \frac{1}{2} R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R \cdot B = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 B$$

$$\therefore \varepsilon_1 = \varepsilon_{cd} = \left| \frac{d\Phi_1}{dt} \right| = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \frac{dB}{dt} \quad \text{方向 } d \rightarrow c$$

在 ΔOab 中， $\Phi_2 = \frac{1}{6} \pi R^2 \cdot B$ ，

$$\therefore \varepsilon_2 = \varepsilon_{ab} = \left| \frac{d\Phi_2}{dt} \right| = \frac{\pi R^2}{6} \frac{dB}{dt} \quad \text{方向 } a \rightarrow b$$

（2）线框总电动势

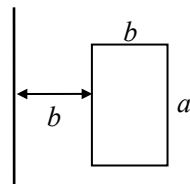
$$\varepsilon_i = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2 \frac{dB}{dt}$$

9. 如图，边长分别为 a 、 b 的矩形线圈，放在一无限长导线的旁边且二者共面。求：线圈与长直导线间的互感。

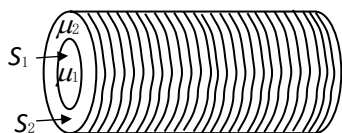
解： 设长直电流为 I ，它产生的磁场通过矩形线圈的磁通为

$$\Phi_{12} = \int_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_b^{2b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 2$$

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 2 \quad (\text{H})$$



10. 管长 l ，匝数 N 的螺线管，管心是两个套在一起的同轴圆柱体，其截面积分别为 S_1 和 S_2 ，磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 ，如图所示。求该螺线管的自感系数。



解：设通电流 I ，则两介质中的磁场分别为 $B_1 = \mu_1 \frac{N}{l} I$ ， $B_2 = \mu_2 \frac{N}{l} I$

$$\therefore \Phi_1 = B_1 S_1 = \frac{\mu_1 N I}{l} S_1, \quad \Phi_2 = B_2 S_2 = \frac{\mu_2 N I}{l} S_2$$

$$\Psi = N(\Phi_1 + \Phi_2) = \frac{N^2 I}{l} (\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2), \quad \therefore L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N^2}{l} (\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2)$$

第十三章 波动光学

1. 在杨氏双缝实验中, 双缝间距 $d=0.20\text{mm}$, 缝屏间距 $D=1.0\text{m}$, 试求:

(1) 若第二级明条纹离屏中心的距离为 6.0mm , 计算此单色光的波长;

(2) 相邻两明条纹间的距离.

解: (1) 由 $x_{\text{明}} = \frac{D}{d} k\lambda$ 知, $6.0 = \frac{1 \times 10^3}{0.2} \times 2\lambda$,

$$\therefore \lambda = 0.6 \times 10^{-3} \text{ mm} = 6000 \text{ \AA}$$

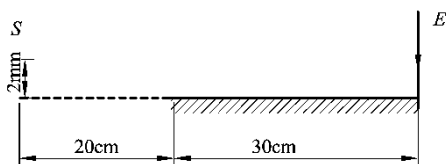
$$(2) \Delta x = \frac{D}{d} \lambda = \frac{1 \times 10^3}{0.2} \times 0.6 \times 10^{-3} = 3 \text{ mm}$$

2. 在双缝装置中, 用一很薄的云母片($n=1.58$)覆盖其中的一条缝, 结果使屏幕上的第七级明条纹恰好移到屏幕中央原零级明纹的位置. 若入射光的波长为 5500 \AA , 求此云母片的厚度.

解: 设云母片厚度为 e , 则由云母片引起的光程差为 $\delta = ne - e = (n-1)e$
按题意 $\delta = 7\lambda$

$$\therefore e = \frac{7\lambda}{n-1} = \frac{7 \times 5500 \times 10^{-10}}{1.58-1} = 6.6 \times 10^{-6} \text{ m} = 6.6 \text{ }\mu\text{m}$$

3. 洛埃镜干涉装置如题 4 图所示, 镜长 30cm , 狭缝光源 S 在离镜左边 20cm 的平面内, 与镜面的垂直距离为 2.0mm , 光源波长 $\lambda = 7.2 \times 10^{-7}\text{m}$, 试求位于镜右边缘的屏幕上第一条明条纹到镜边缘的距离.



解: 镜面反射光有半波损失, 且反射光可视为虚光源 S' 发出. 所以由 S 与 S' 发出的两光束到达屏幕上距镜边缘为 x 处的光程差为

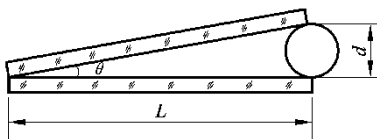
$$\delta = (r_2 - r_1) + \frac{\lambda}{2} = d \frac{x}{D} + \frac{\lambda}{2}$$

第一明纹处, 对应 $\delta = \lambda$

$$\therefore x = \frac{\lambda D}{2d} = \frac{7.2 \times 10^{-5} \times 50}{2 \times 0.4} = 4.5 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

4. 如图 7, 波长为 6800 \AA 的平行光垂直照射到 $L = 0.12 \text{ m}$ 长的两块玻璃片上, 两玻璃片一边相互接触, 另一边被直径 $d = 0.048 \text{ mm}$ 的细钢丝隔开. 求:

- (1) 两玻璃片间的夹角 $\theta = ?$
- (2) 相邻两明条纹间空气膜的厚度差是多少?
- (3) 相邻两暗条纹的间距是多少?
- (4) 在这 0.12 m 内呈现多少条明条纹?



解: (1) 由图知, $L \sin \theta = d$, 即 $L \theta = d$

$$\text{故 } \theta = \frac{d}{L} = \frac{0.048}{0.12 \times 10^3} = 4.0 \times 10^{-4} \text{ (弧度)}$$

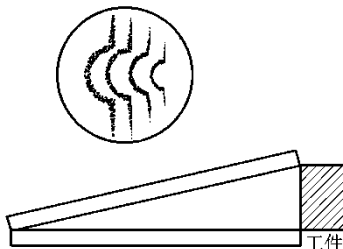
$$(2) \text{ 相邻两明条纹空气膜厚度差为 } \Delta e = \frac{\lambda}{2} = 3.4 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$(3) \text{ 相邻两暗纹间距 } l = \frac{\lambda}{2\theta} = \frac{6800 \times 10^{-10}}{2 \times 4.0 \times 10^{-4}} = 850 \times 10^{-6} \text{ m} = 0.85 \text{ mm}$$

$$(4) \Delta N = \frac{L}{l} \approx 141 \text{ 条}$$

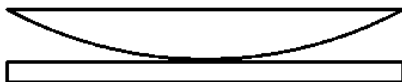
5. 用劈尖干涉来检测工件表面的平整度, 当波长为 λ 的单色光垂直入射时, 观察到的干涉条纹如题 9 图所示, 每一条纹的弯曲部分的顶点恰与左邻的直线部分的连线相切. 试说明工件缺陷是凸还是凹? 并估算该缺陷的程度.

解: 工件缺陷是凹的. 故各级等厚线(在缺陷附近的)向棱边方向弯曲. 按题意, 每一条纹弯曲部分的顶点恰与左邻的直线部分连线相切, 说明弯曲部分相当于条纹向棱边移动了一条, 故相应的空气隙厚度差为 $\Delta e = \frac{\lambda}{2}$, 这也是工件缺陷的程度.



6. 当牛顿环装置中的透镜与玻璃之间的空间充以液体时, 第十个亮环的直径由 $d_1 =$

$1.40 \times 10^{-2} \text{m}$ 变为 $d_2 = 1.27 \times 10^{-2} \text{m}$, 求液体的折射率.



解: 由牛顿环明环公式

$$r_{\text{空}} = \frac{D_1}{2} = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}}$$

$$r_{\text{液}} = \frac{D_2}{2} = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2n}}$$

两式相除得 $\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{n}$, 即 $n = \frac{D_1^2}{D_2^2} = \frac{1.96}{1.61} \approx 1.22$

7. 白光垂直照射到空气中一厚度为 3800\AA 的肥皂膜上, 设肥皂膜的折射率为 1.33, 试问该膜的正面呈现什么颜色? 背面呈现什么颜色?

解: 由反射干涉相长公式有

$$2ne + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (k=1,2,\dots)$$

得 $\lambda = \frac{4ne}{2k-1} = \frac{4 \times 1.33 \times 3800}{2k-1} = \frac{20216}{2k-1}$

$$k=2, \lambda_2 = 6739 \text{\AA} \quad (\text{红色})$$

$$k=3, \lambda_3 = 4043 \text{\AA} \quad (\text{紫色})$$

所以肥皂膜正面呈现紫红色.

由透射干涉相长公式 $2ne = k\lambda \quad (k=1,2,\dots)$

所以 $\lambda = \frac{2ne}{k} = \frac{10108}{k}$

当 $k=2$ 时, $\lambda = 5054 \text{\AA} \quad (\text{绿色})$

故背面呈现绿色.

8. 在折射率 $n_1=1.52$ 的镜头表面涂有一层折射率 $n_2=1.38$ 的 MgF_2 增透膜, 如果此膜适用于波长 $\lambda = 5500 \text{\AA}$ 的光, 问膜的厚度应取何值?

解: 设光垂直入射增透膜, 欲透射增强, 则膜上、下两表面反射光应满足干涉相消条件, 即

$$2n_2e = (k + \frac{1}{2})\lambda \quad (k=0,1,2,\dots)$$

$$\begin{aligned}\therefore e &= \frac{(k + \frac{1}{2})\lambda}{2n_2} = \frac{k\lambda}{2n_2} + \frac{\lambda}{4n_2} \\ &= \frac{5500}{2 \times 1.38}k + \frac{5500}{4 \times 1.38} = (1993k + 996) \text{ \AA}\end{aligned}$$

令 $k = 0$ ，得膜的最薄厚度为 996 \AA 。当 k 为其他整数倍时，也都满足要求。

9. 把折射率为 $n = 1.632$ 的玻璃片放入迈克耳逊干涉仪的一条光路中，观察到有 150 条干涉条纹向一方移过。若所用单色光的波长为 $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ ，求此玻璃片的厚度。

解：设插入玻璃片厚度为 d ，则相应光程差变化为

$$2(n-1)d = \Delta N\lambda$$

$$\therefore d = \frac{\Delta N\lambda}{2(n-1)} = \frac{150 \times 5000 \times 10^{-10}}{2(1.632-1)} = 5.9 \times 10^{-5} \text{ m} = 5.9 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

10. 一单色平行光垂直照射一单缝，若其第三级明条纹位置正好与 6000 \AA 的单色平行光的第二级明条纹位置重合，求前一种单色光的波长。

解：单缝衍射的明纹公式为

$$a \sin \varphi = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

当 $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ 时， $k = 2$ 。当 $\lambda = \lambda_x$ 时， $k = 3$ 。重合时 φ 角相同，所以有

$$a \sin \varphi = (2 \times 2 + 1) \frac{6000}{2} = (2 \times 3 + 1) \frac{\lambda_x}{2}$$

$$\text{得 } \lambda_x = \frac{5}{7} \times 6000 = 4286 \text{ \AA}$$

11. 单缝宽 0.10 mm ，透镜焦距为 50 cm ，用 $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ 的绿光垂直照射单缝。求：(1) 位于透镜焦平面处的屏幕上中央明条纹的宽度和半角宽度各为多少？(2) 若把此装置浸入水中 ($n = 1.33$)，中央明条纹的半角宽度又为多少？

解：中央明纹的宽度为 $\Delta x = 2 \frac{\lambda}{na} f$ ，半角宽度为 $\theta = \sin^{-1} \frac{\lambda}{na}$

(1) 空气中， $n = 1$ ，所以

$$\Delta x = 2 \times 0.5 \times \frac{5000 \times 10^{-10}}{0.10 \times 10^{-3}} = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{5000 \times 10^{-10}}{0.10 \times 10^{-3}} = 5.0 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

(2) 浸入水中, $n = 1.33$, 所以有

$$\Delta x = 2 \times 0.50 \times \frac{5000 \times 10^{-10}}{1.33 \times 0.10 \times 10^{-3}} \approx 3.76 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{5000 \times 10^{-10}}{1.33 \times 0.1 \times 10^{-3}} \approx 3.76 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

12. 已知天空中两颗星相对于一望远镜的角距离为 $4.84 \times 10^{-6} \text{ rad}$, 它们都发出波长为 5500 \AA 的光, 试问望远镜的口径至少要多大, 才能分辨出这两颗星?

解: 由最小分辨角公式 $\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$

$$\therefore D = 1.22 \frac{\lambda}{\theta} = 1.22 \times \frac{5.5 \times 10^{-5}}{4.84 \times 10^{-6}} = 13.86 \text{ cm}$$

13. 试指出当衍射光栅的光栅常数为下述三种情况时, 哪些级次的衍射明条纹缺级? (1) $a+b=2a$; (2) $a+b=3a$; (3) $a+b=4a$.

解: 由光栅明纹条件和单缝衍射暗纹条件同时满足时, 出现缺级. 即

$$\begin{cases} (a+b) \sin \varphi = \pm k \lambda & (k = 0, 1, 2, \dots) \\ a \sin \varphi = \pm k' \lambda & (k' = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

可知, 当 $k = \frac{a+b}{a} k'$ 时明纹缺级.

(1) $a+b=2a$ 时, $k = 2, 4, 6, \dots$ 偶数级缺级;

(2) $a+b=3a$ 时, $k = 3, 6, 9, \dots$ 级次缺级;

(3) $a+b=4a$, $k = 4, 8, 12, \dots$ 级次缺级.

14. 波长 $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ 的单色光垂直入射到一光栅上, 第二、第三级明条纹分别出现在 $\sin \varphi = 0.20$ 与 $\sin \varphi = 0.30$ 处, 第四级缺级. 求: (1) 光栅常数; (2) 光栅上狭缝的宽度; (3) 在 $90^\circ > \varphi > -90^\circ$ 范围内, 实际呈现的全部级数.

解: (1) 由 $(a+b) \sin \varphi = k \lambda$ 式

对应于 $\sin \varphi_1 = 0.20$ 与 $\sin \varphi_2 = 0.30$ 处满足:

$$0.20(a+b) = 2 \times 6000 \times 10^{-10}$$

$$0.30(a+b) = 3 \times 6000 \times 10^{-10}$$

得 $a+b = 6.0 \times 10^{-6} \text{ m}$

(2) 因第四级缺级, 故此须同时满足

$$(a+b)\sin\varphi = k\lambda$$

$$a\sin\varphi = k'\lambda$$

$$\text{解得 } a = \frac{a+b}{4}k' = 1.5 \times 10^{-6} k'$$

取 $k' = 1$ ，得光栅狭缝的最小宽度为 $1.5 \times 10^{-6} \text{ m}$

(3) 由 $(a+b)\sin\varphi = k\lambda$

$$k = \frac{(a+b)\sin\varphi}{\lambda}$$

当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ，对应 $k = k_{\max}$

$$\therefore k_{\max} = \frac{a+b}{\lambda} = \frac{6.0 \times 10^{-6}}{6000 \times 10^{-10}} = 10$$

因 ± 4 ， ± 8 缺级，所以在 $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$ 范围内实际呈现的全部级数为

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 9$ 共 15 条明条纹 ($k = \pm 10$ 在 $k = \pm 90^\circ$ 处看不到).

第十五章 量子物理

1. 从铝中移出一个电子需要 4.2 eV 的能量, 今有波长为 2000 \AA 的光投射到铝表面. 试问: (1)由此发射出来的光电子的最大动能是多少?(2)遏止电压为多大?(3)铝的截止(红限)波长有多大?

解: (1)已知逸出功 $A = 4.2 \text{ eV}$. 据光电效应公式 $h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + A$, 则光电子最大动能:

$$\begin{aligned} E_{k\max} &= \frac{1}{2}mv_m^2 = h\nu - A = \frac{hc}{\lambda} - A \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{2000 \times 10^{-10}} - 4.2 \times 1.6 \times 10^{-19} \\ &= 3.23 \times 10^{-19} \text{ J} = 2.0 \text{ eV} \end{aligned}$$

$$(2) \because eU_a = E_{k\max} = \frac{1}{2}mv_m^2$$

$$\therefore \text{遏止电势差} \quad U_a = \frac{3.23 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19}} = 2.0 \text{ V}$$

$$(3) \text{红限频率 } \nu_0, \therefore h\nu_0 = A, \text{ 又 } \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{截止波长} \quad \lambda_0 &= \frac{hc}{A} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{4.2 \times 1.60 \times 10^{-19}} \\ &= 2.96 \times 10^{-7} \text{ m} = 0.296 \mu\text{m} \end{aligned}$$

2. 在康普顿效应的实验中, 若散射光波长是入射光波长的 1.2 倍, 则散射光子的能量 ε 与反冲电子的动能 E_k 之比 ε / E_k 等于多少?

解: 由 $h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2$

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = h\nu_0 - h\nu = h(\nu_0 - \nu)$$

$$\varepsilon = h\nu$$

$$\therefore \frac{\varepsilon}{E_k} = \frac{h\nu}{h(\nu_0 - \nu)} = \frac{\nu}{\nu_0 - \nu} = 5$$

$$\text{已知 } \frac{\lambda}{\lambda_0} = 1.2 \text{ 由 } c = \lambda\nu \therefore \frac{\nu_0}{\nu} = 1.2$$

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{1}{1.2} \text{ 则 } \frac{\nu}{\nu_0 - \nu} = \frac{1}{1.2 - 1} = \frac{1}{0.2} = 5$$

3. 若一个光子的能量等于一个电子的静能, 试求该光子的频率、波长、动量. 已知电子的静止质量及普朗克常数为 $m_0 = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 。

解: 当 $h\nu = m_0 c^2$ 时, 则

$$\nu = \frac{m_0 c^2}{h} = \frac{9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2}{6.63 \times 10^{-34}}$$

$$= 1.236 \times 10^{20} \text{ Hz}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 2.4271 \times 10^{-12} \text{ m} = 0.02 \text{ \AA}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = 2.73 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

或

$$E = cp$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{m_0 c^2}{c} = m_0 c = 9.11 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8 = 2.73 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4. 粒子在一维无限深势阱中运动, 其波函数为:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (0 < x < a)$$

若粒子处于 $n=1$ 的状态, 在 $0 \sim \frac{1}{4}a$ 区间发现粒子的概率是多少?

$$\text{解: } dw = |\psi|^2 dx = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx$$

\therefore 在 $0 \sim \frac{a}{4}$ 区间发现粒子的概率为:

$$\begin{aligned} p &= \int_0^{\frac{a}{4}} dw = \int_0^{\frac{a}{4}} \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \int_0^{\frac{a}{4}} \frac{2a}{a\pi} \sin^2 \frac{\pi x}{a} d\left(\frac{\pi}{a}x\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{a/4} \frac{1}{2} [1 - \cos 2 \frac{\pi x}{a}] d\left(\frac{\pi}{a}x\right) = 0.091 \end{aligned}$$

5. 原子内电子的量子态由 n, l, m_l, m_s 四个量子数表征. 当 n, l, m_l 一定时, 不同的量子态数目是多少? 当 n, l 一定时, 不同的量子态数目是多少? 当 n 一定时, 不同的量子态数目是多少?

解：(1) 2 ($\because m_s = \pm \frac{1}{2}$)

(2) $2(2l+1)$ ，每个 l 有 $2l+1$ 个 m_l ，每个 m_l 可容纳 $m_s = \pm \frac{1}{2}$ 的 2 个量子态。

(3) $2n^2$