第十章
静电场

中国矿业大学北京理学院

§10-1 电荷　库仑定律

1. 电荷

摩擦起电和雷电：对电的最早认识

两种电荷：正电荷和负电荷

电性力：同号相斥、异号相吸

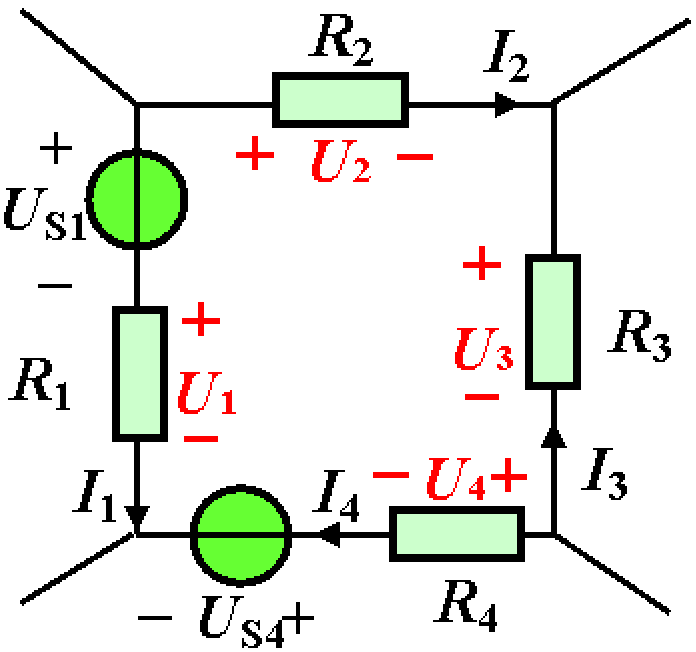
电荷量：物体带电的多少

电荷守恒定律

对于一个系统，如果没有净电荷出入其边界，则系统正负电荷的代数和保持不变。

如： $^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$

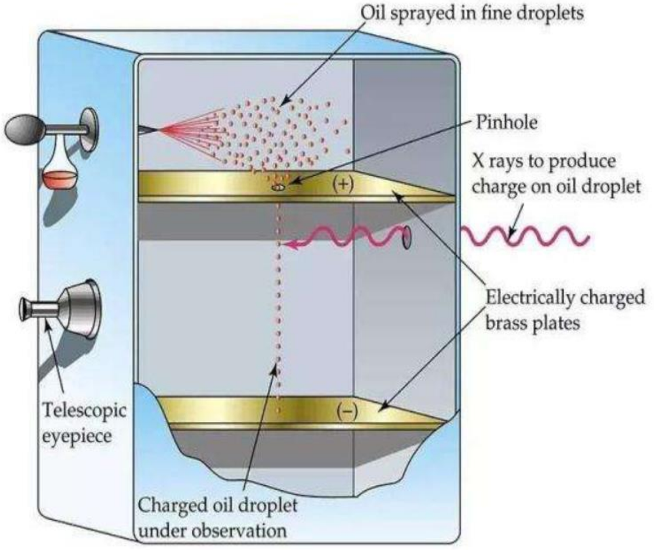
$$\gamma + \gamma \rightarrow e^{+} + e^{-}$$



电桥与基尔霍夫第一定律

电荷量子化

$$q = ne \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$



- e =1.602×10^{-19}库仑（C），为电子电量

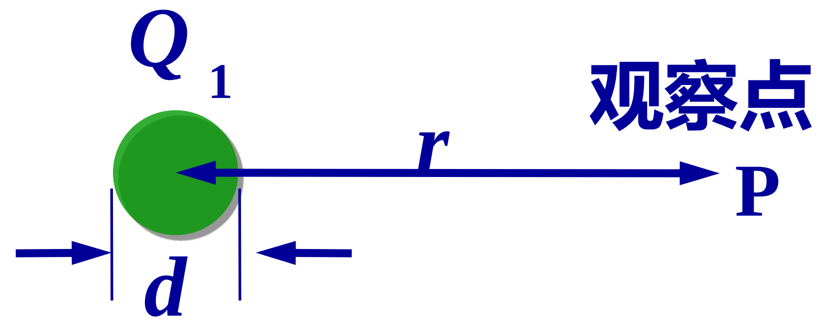
- 宏观带电体的带电量q>>e，准连续

密立根

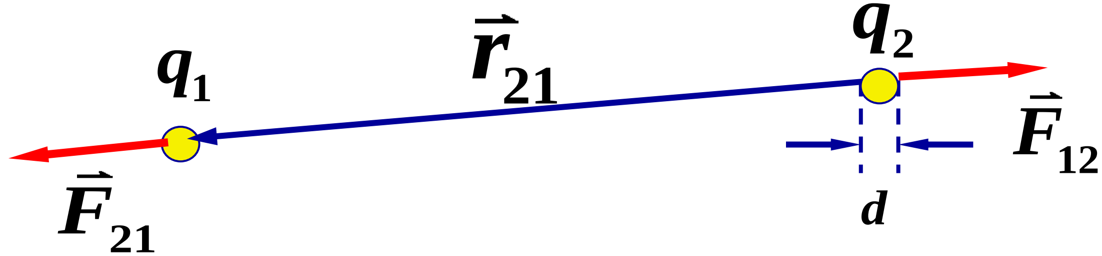
2. 库仑定律

点电荷

可以简化为点电荷的条件:



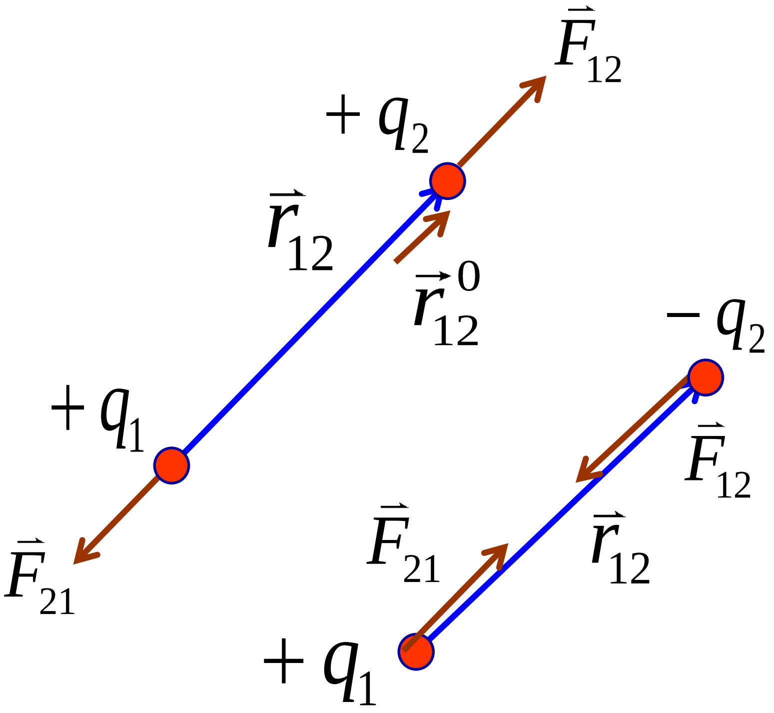
$d << r$



库仑定律：在真空中，两个静止点电荷之间相互作用力与这两个点电荷的电荷量q_1和q_2的乘积成正比，而与这两个点电荷之间的距离r_{12}（或r_{21}）的平方成反比，作用力的方向沿着这两个点电荷的连线，同号相斥，异号相吸。

标量式（大小）

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

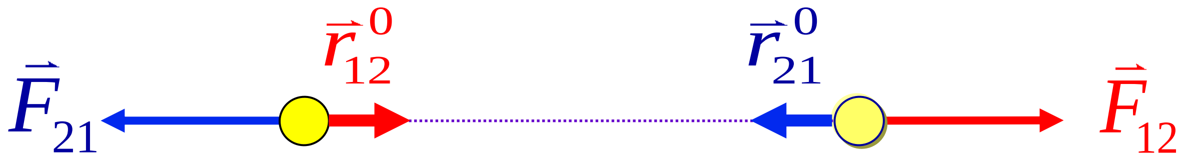


矢量式

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{r}_{12}^{\,0} \qquad \vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\vec{r}_{21}^{\,0}$$

1）库仑定律自动包含同性相斥，异性相吸这一性质

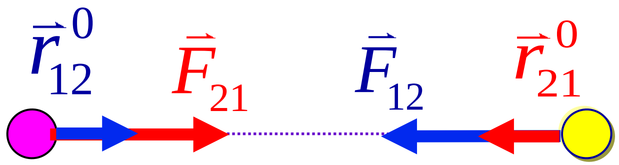
同号电荷：



$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{r}_{12}^{\,0} \qquad \vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\vec{r}_{21}^{\,0}$$

q_1和q_2同号，则 $q_1 q_2 > 0$， $\vec{F}_{12}$ 和 $\vec{r}_{12}^{\,0}$ 同向，$\vec{F}_{12}$ 与 $\vec{r}_{12}^{\,0}$ 同向，说明同号电荷之间**相互排斥**

异号电荷：



$$\vec{F}_{12}=k\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\vec{r}_{12}^{\,0} \qquad \vec{F}_{21}=k\frac{q_1q_2}{r_{21}^2}\vec{r}_{21}^{\,0}$$

q_1 和 q_2 异号，则 $q_1q_2<0$，$\vec{F}_{12}$ 和 $\vec{r}_{12}^{\,0}$ 反向，$\vec{F}_{21}$ 与 $\vec{r}_{21}^{\,0}$ 反向，说明异号电荷之间相互吸引

2）库仑定律遵守牛顿第三定律

$$\vec{F}_{12}=k\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\vec{r}_{12}^{\,0} \qquad \vec{F}_{21}=k\frac{q_1q_2}{r_{21}^2}\vec{r}_{21}^{\,0}$$

$$k\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}=k\frac{q_1q_2}{r_{21}^2} \qquad \vec{r}_{12}=-\vec{r}_{21}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{21}=-\vec{\boldsymbol{F}}_{12}$$

作用力与反作用力

库伦定律表达式

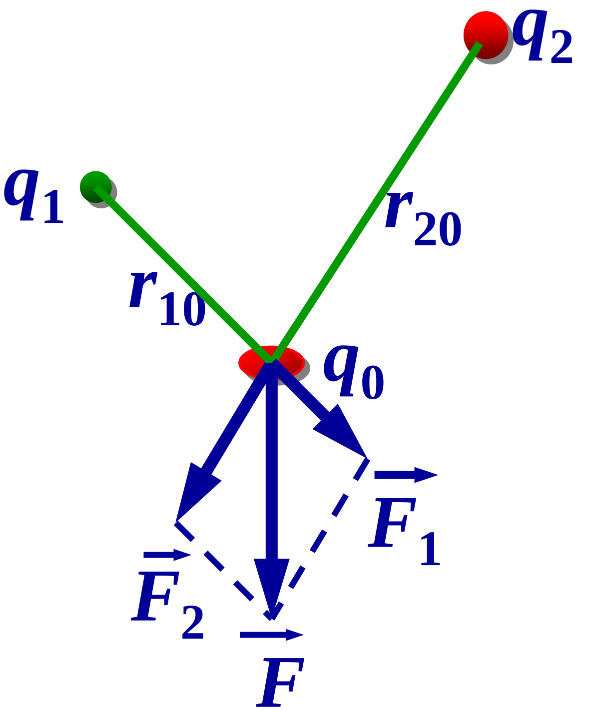
$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$

$k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ **是国际单位制中的比例系数**

$$\varepsilon_0=8.8542\times10^{-12}\ \mathrm{C^2\cdot N^{-1}m^{-2}}$$

叠加性

$$\vec{F}=\sum_i k\frac{q_0q_i}{r_{i0}^3}\vec{r}_{i0}$$



例： 按量子理论，在氢原子中，核外电子快速地运动着，并以一定的概率出现在原子核（质子）的周围各处，在基态下，电子在半径$r = 0.529\times 10^{-10}$m的球面附近出现的概率最大。试计算在基态下，氢原子内电子和质子之间的静电力和万有引力，并比较其大小。引力常数为$G = 6.67\times10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$。

解：按库仑定律计算，电子和质子之间的静电力为

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = 8.89\times10^9\times\frac{\left(1.60\times10^{-19}\right)^2}{\left(0.529\times10^{-10}\right)^2}\text{N}$$

$$= 8.22\times10^{-8}\text{N}$$

应用万有引力定律，电子和质子之间的万有引力为

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$= 6.67\times10^{-11}\times\frac{9.11\times10^{-31}\times1.67\times10^{-27}}{\left(0.529\times10^{-10}\right)^2}\text{N}$$

$$= 3.63\times10^{-47}\text{N}$$

由此得静电力与万有引力的比值为

$$\frac{F_e}{F_g} = 2.26\times10^{39}$$

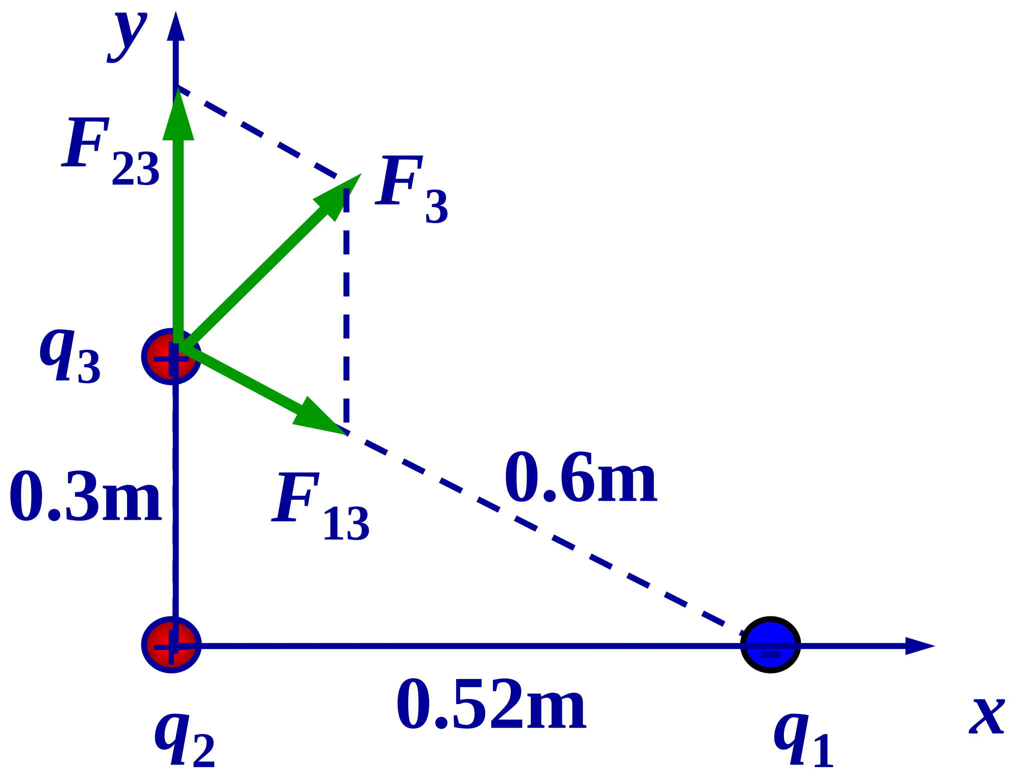
可见在原子中，电子和质子之间的静电力远比万有引力大，由此，在处理电子和质子之间的相互作用时，只需考虑静电力，万有引力可以略去不计。

而在原子结合成分子，原子或分子组成液体或固体时，它们的结合力在本质上也都属于电性力。

例：　图中三个点电荷所带的电荷量分别为q_1= - 86 μC, q_2= 50 μC, q_3= 65 μC。各电荷间的距离如图所示。

求：作用在q_3上合力的大小和方向。

解：建立如图所示的直角坐标系。



q_1作用于电荷q_3上的 $\vec{F}_{13}$ 的大小为：

$$F_{13}=9.0\times10^{9}\frac{\left(6.5\times10^{-5}\right)\times\left(8.6\times10^{-5}\right)}{\left(0.6\right)^{2}}=140\mathrm{N}$$

将力 $\vec{F}_{13}$ 沿x轴和y轴进行分解： $\vec{F}_{13}=F_x'\,\hat{i}+F_y'\,\hat{j}$

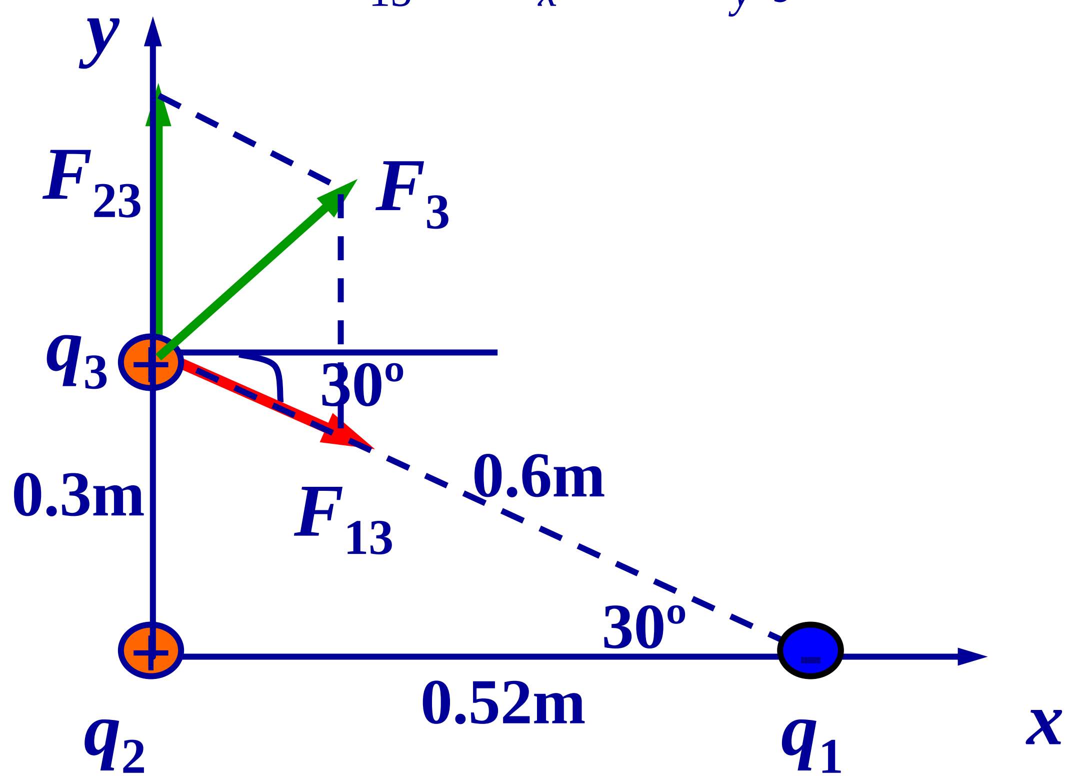
$$F_x'=F_{13}\cos30^{\circ}$$

$$=120\mathrm{N}$$

$$F_y'=-F_{13}\sin30^{\circ}$$

$$=-70\mathrm{N}$$

$$\therefore\vec{F}_{13}=120\,\hat{i}-70\,\hat{j}$$



电荷q_2作用于电荷q_3上的力$\vec{F}_{23}$大小为：

$$F_{23}=9.0\times10^{9}\frac{\left(6.5\times10^{-5}\right)\times\left(5.0\times10^{-5}\right)}{\left(0.3\right)^{2}}=325\text{N}$$

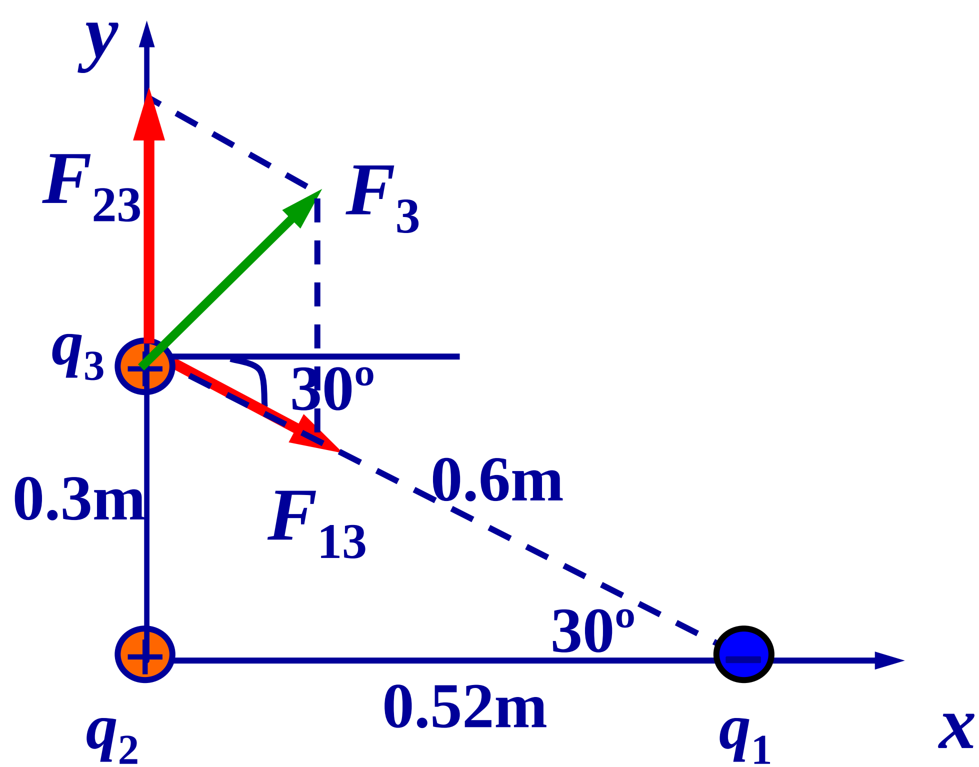
将力 $\vec{F}_{23}$ 沿x轴和y轴进行分解：

$$\vec{F}_{23}=F_x''\,\hat{i}+F_y''\,\hat{j}$$

$$F_x''=0$$

$$F_y''=+325\,\text{N}$$

$$\therefore\vec{F}_{23}=325\,\hat{j}$$

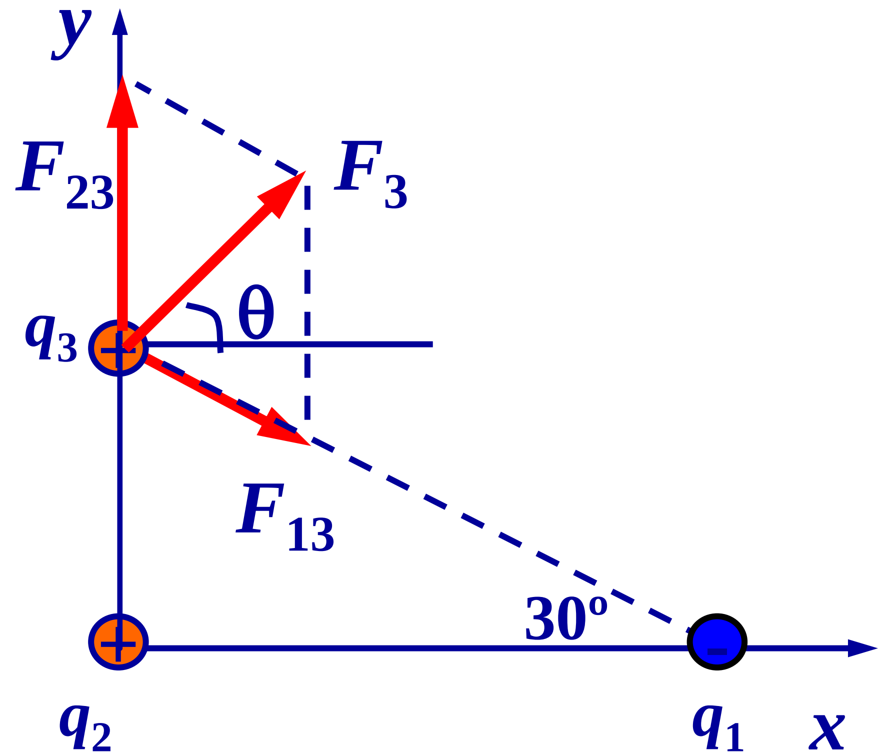


作用于电荷q_3上的合力为：

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

$$= (120\hat{i} - 70\hat{j}) + 325\hat{j}$$

$$= 120\hat{i} + 255\hat{j}$$



合力$\vec{F}_3$的大小为：

$$F_3 = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{120^2 + 255^2}\,\text{N} = 281.8\,\text{N}$$

合力F_3与x轴的夹角θ：$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{F_y}{F_x}$， $\therefore \theta = 64.8^\circ$

§10-2 静电场 电场强度

1. 电场

两种观点

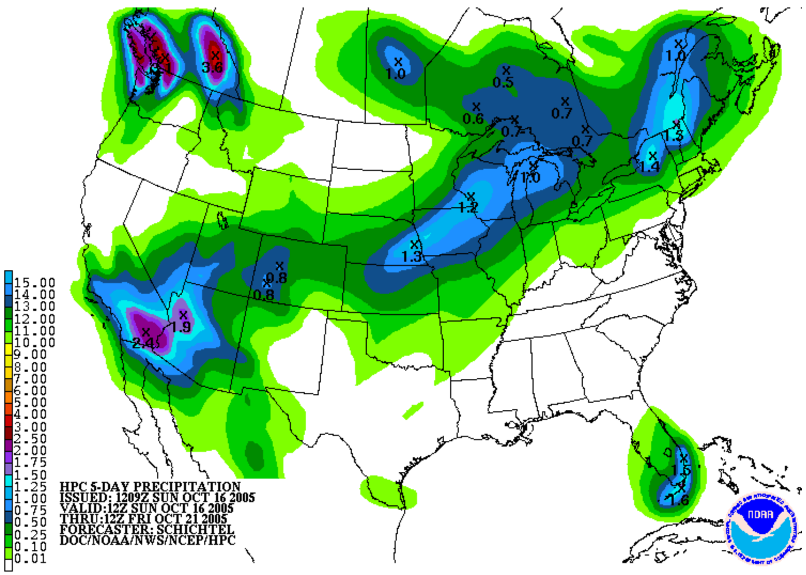
超距作用 电荷1 $\underset{\text{作用}}{\overset{\text{作用}}{\rightleftarrows}}$ 电荷2

电场 电荷1 $\xrightarrow{\text{产生}}$ 电场1 $\xrightarrow{\text{作用}}$ 电荷2

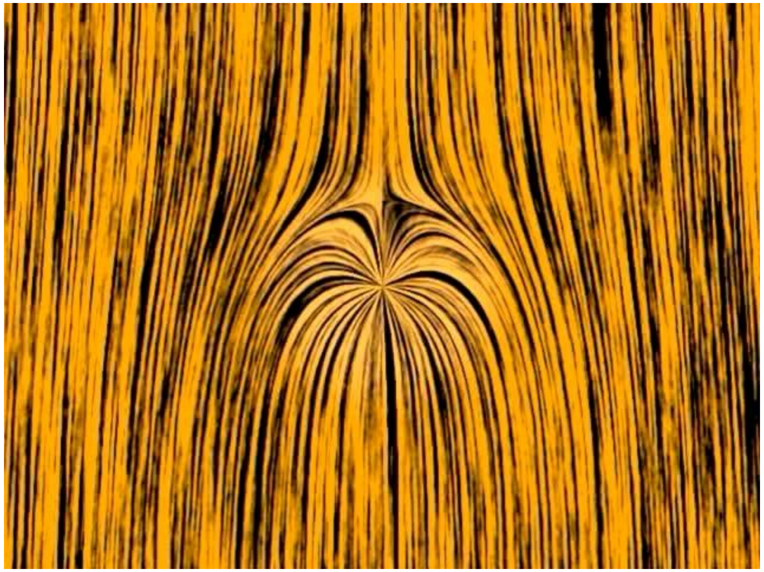
电荷2 $\xrightarrow{\text{产生}}$ 电场2 $\xrightarrow{\text{作用}}$ 电荷1

场的概念

场：物理量在空间和时间上的分布



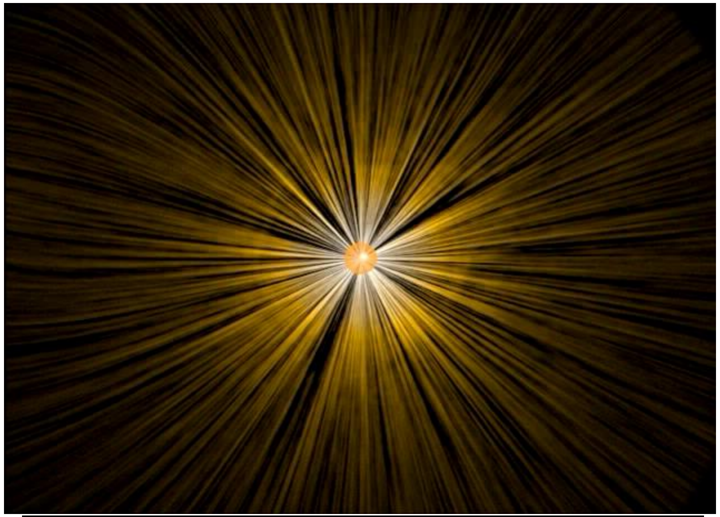
降水量地域分布
标量场 （大小）



流速场
矢量场（大小，方向）

电场

- 与电荷相互作用相关的物质在时间和空间上的分布
- 一种物质存在的形态
- 电荷与电荷之间相互作用的媒介



电荷 ⟷ 电场 ⟷ 电荷

- 爱因斯坦曾指出，场的思想是法拉第最富有创造性的思想，<u>是自牛顿以来最重要的发现。</u>

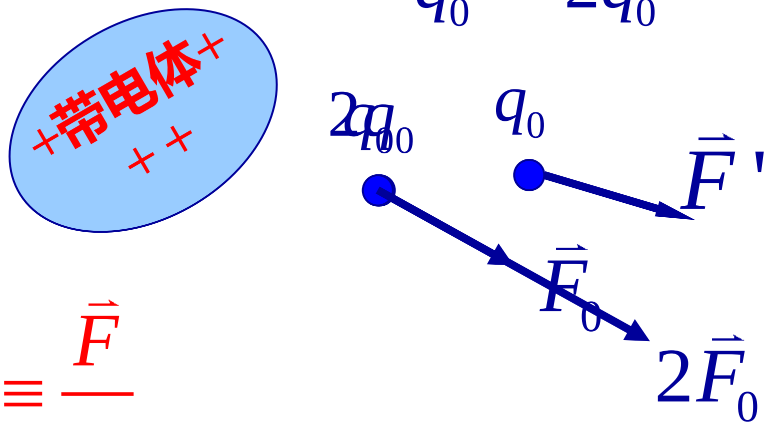
2. 电场强度E

电场的性质－－对处于其中的电荷有作用力

定量研究电场，引入试探点电荷q_0，

$$\frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{2\vec{F}_0}{2q_0} = \cdots$$

- **电量充分小，**
- **线度充分小，点电荷**



某一点电场强度定义：

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0}$$

单位电荷在该点所受的电场力

大小：试探电荷的受力大小与电量的比值

方向：正电荷的受力方向

单位：N/C （V/m）

3. 电场强度的计算　叠加原理

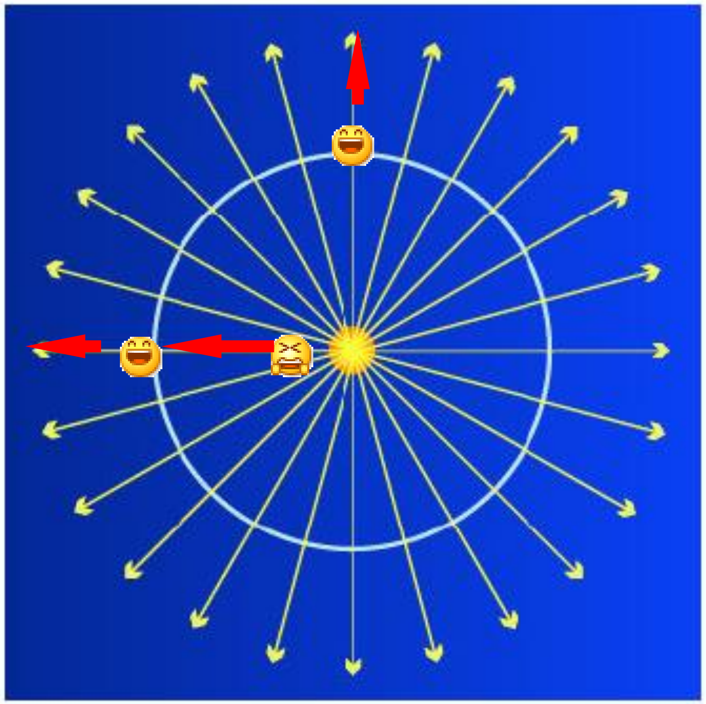
（1）点电荷的电场

（2）场强叠加原理和点电荷系的电场

（3）连续分布电荷的电场

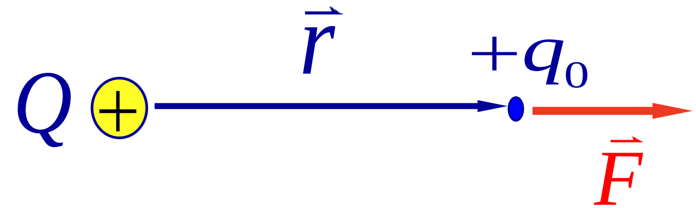
单个点电荷电场

点电荷 + Q的电场



$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \vec{E}(x, y, z)$$

电场强度?



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q \cdot q_0}{r^2}\hat{e}_r$$

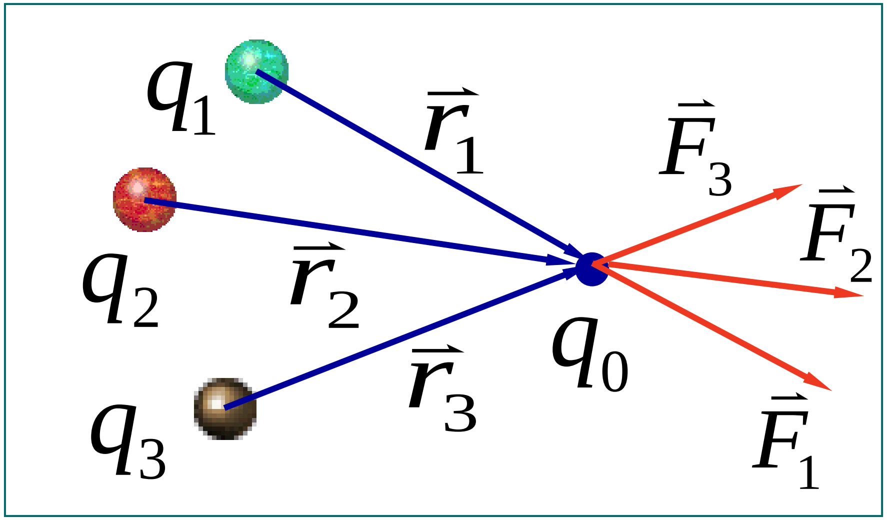
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r$$

电场强度大小?
电场强度方向?

点电荷系的电场

多个点电荷的电场

电荷受到的合力



$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\sum_{i=1}^{3}\overrightarrow{F_i}$$

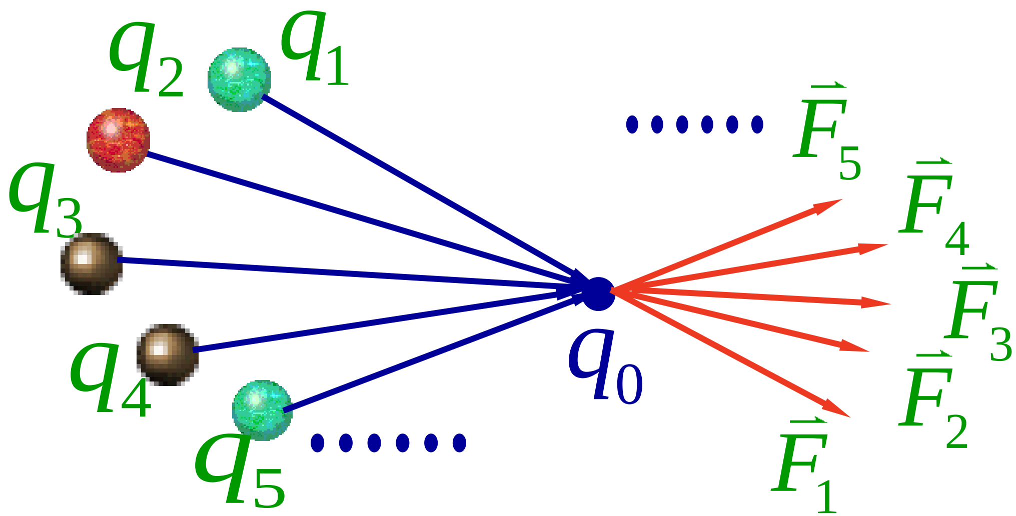
q_0处总电场强度

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{\sum_{i=1}^{3}\vec{F}_i}{q_0}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\vec{F}_i}{q_0}$$

$$=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3$$

场的叠加原理

- **n个点电荷组成的电荷系**



电荷受到的合力

$$\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

注意：矢量的叠加

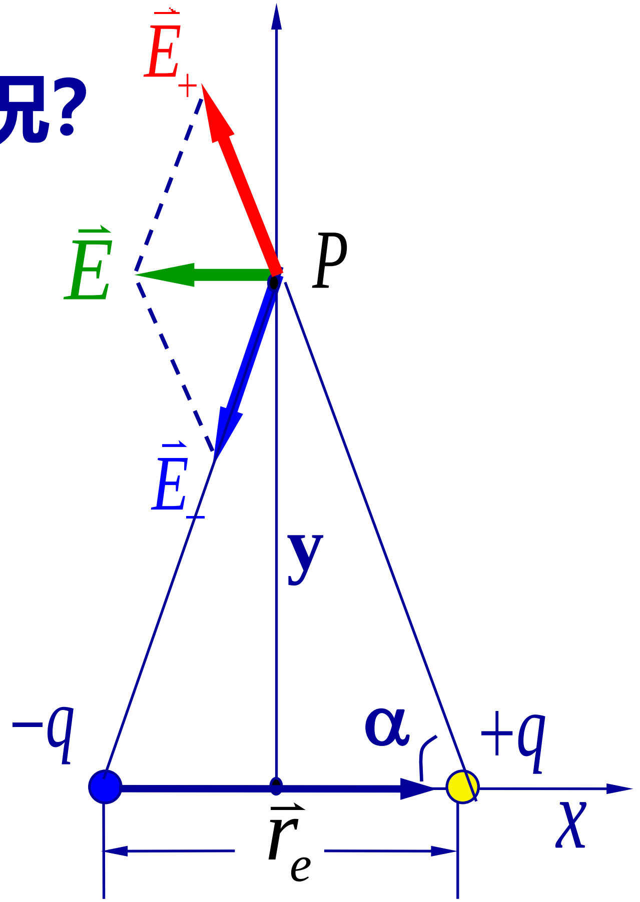
$$\vec{E}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i}{q_0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\vec{F}_i}{q_0}=\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots\cdots+\vec{E}_n$$

点电荷系在空间任一点所激发的总场强等于各个点电荷单独存在时在该点各自所激发的场强的矢量和

电场强度的计算——电偶极子

例： 电偶极子中垂线上P点的场强情况?

正负电荷分别在P点的场强



$$\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (y^2 + r_e{}^2/4)} \hat{e}_r^+$$

$$\vec{E}_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (y^2 + r_e{}^2/4)} \hat{e}_r^-$$

$$\hat{e}_r^+ = -\cos\alpha \hat{i} + \sin\alpha \hat{j}$$

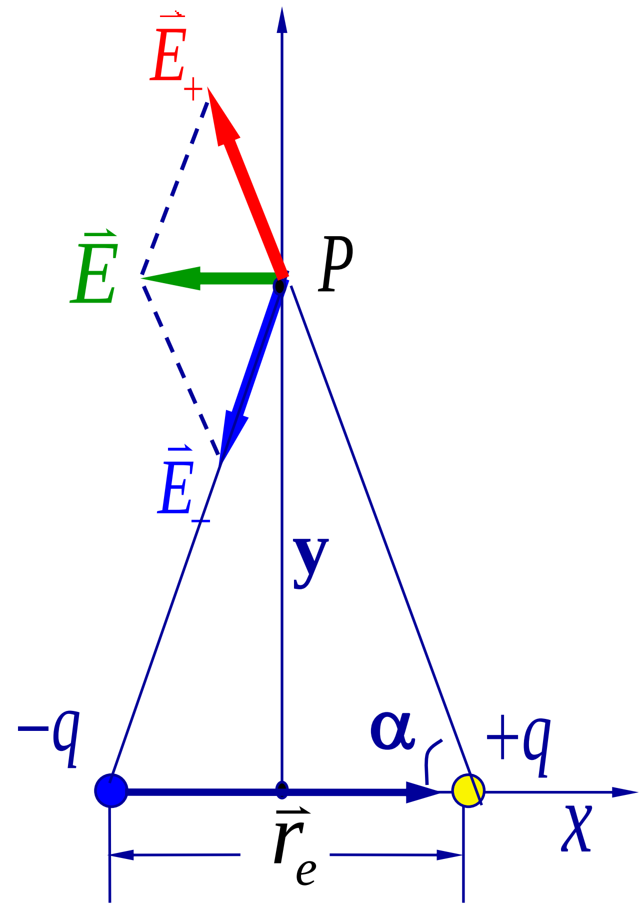
$$\hat{e}_r^- = -\cos\alpha \hat{i} - \sin\alpha \hat{j}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = -\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 (y^2 + r_e{}^2/4)} \cos\alpha \hat{i}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = -\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 (y^2 + r_e^{\,2}/4)} \cos\alpha \hat{i}$$

几何关系

$$\cos\alpha = \frac{r_e/2}{\sqrt{y^2 + r_e^{\,2}/4}}$$



$$\vec{E} = -\frac{q r_e}{4\pi\varepsilon_0 (y^2 + r_e^{\,2}/4)^{\frac{3}{2}}} \hat{i}$$

$$\approx -\frac{q r_e}{4\pi\varepsilon_0 y^3} \hat{i} \qquad y >> r_e$$

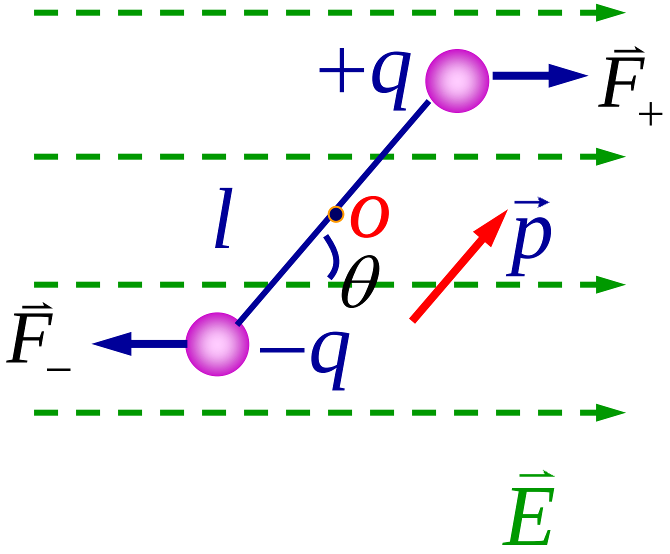
电偶极矩 $\vec{p}_e = q\vec{r}_e \qquad \vec{r}_e = r_e \hat{i}$

$$\vec{E} = -\frac{\vec{p}_e}{4\pi\varepsilon_0 y^3}$$

例 电偶极子在均匀电场中受到的力偶矩。

解： 在匀强电场中电偶极子的电荷受力

$$\vec{F}_+ = q\vec{E} \qquad \vec{F}_- = -q\vec{E}$$



相对于O点的力矩大小：

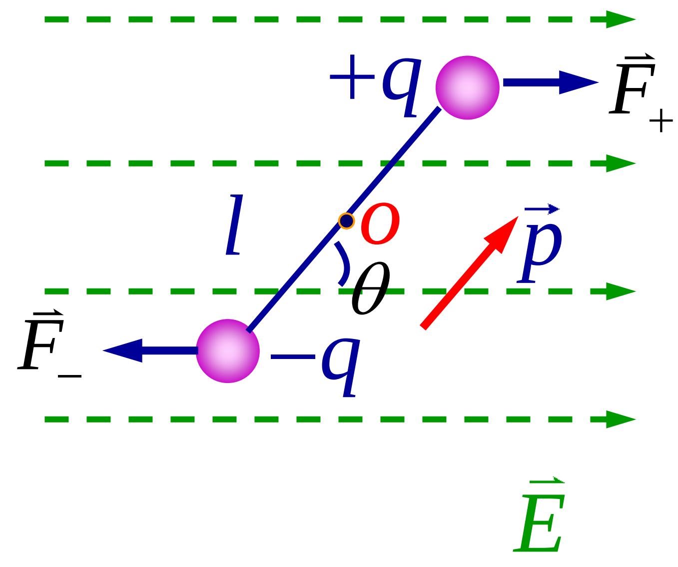
$$M = F_+ \cdot \frac{1}{2} l \sin\theta + F_- \cdot \frac{1}{2} l \sin\theta$$

$$= qlE\sin\theta$$

或 $$\vec{M} = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

讨论：

$$\vec{M} = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$



(1) $\theta = \pi/2$ **力偶矩最大。**

(2) $\theta = 0$ **力偶矩为零。**

(电偶极子处于稳定平衡)

(3) $\theta = \pi$ **力偶矩为零。**

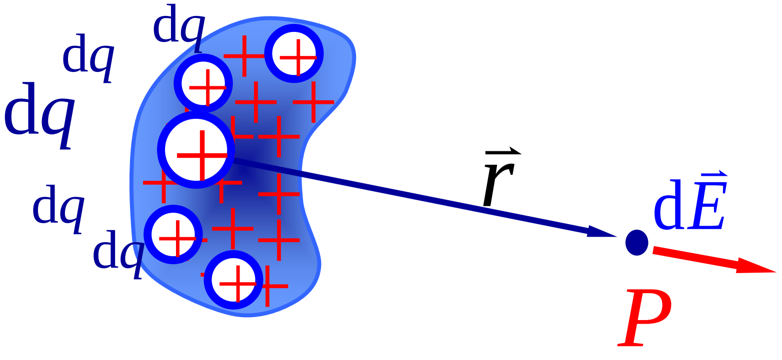
(电偶极子处于非稳定平衡)

电荷连续分布带电体的电场强度

处理方法：可以将带电体分割成许多“电荷元”

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q}{r^3}\vec{r}$$



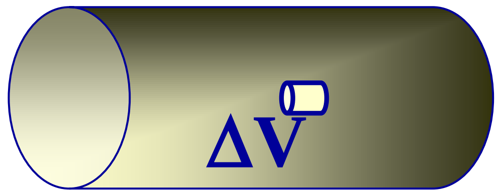
场强叠加原理

体电荷分布　　面电荷分布　　线电荷分布

电场强度的计算——电荷连续分布

电 荷 连 续 分 布 的 情 况 (电荷密度)

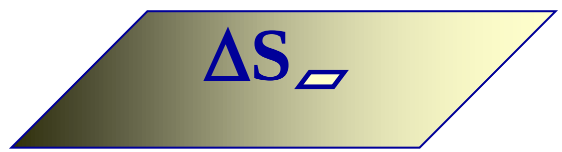
电荷体密度



$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$$

$$\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V$$

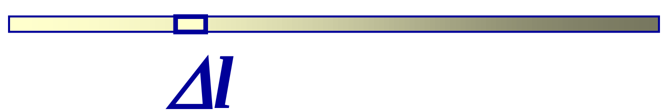
电荷面密度



$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$$

$$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{ds}$$

电荷线密度



$$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$$

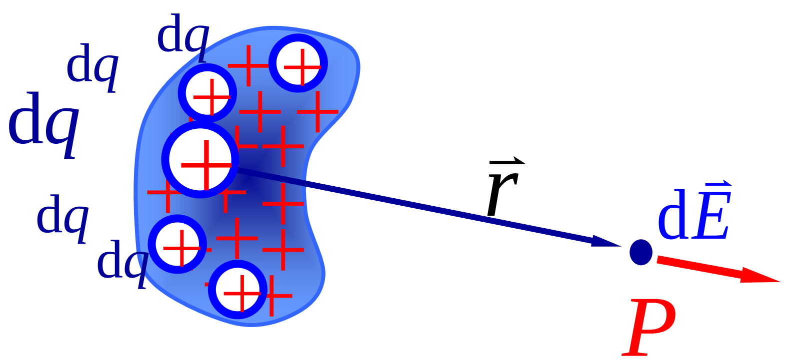
$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l$$

电荷连续分布带电体的电场强度

处理方法：可以将带电体分割成许多“电荷元”

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q}{r^3}\vec{r}$$



场强E表达式：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V\frac{\rho\mathrm{d}V}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S\frac{\sigma\mathrm{d}S}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l\frac{\lambda\mathrm{d}l}{r^3}\vec{r}$$

体电荷分布　　面电荷分布　　线电荷分布

电场强度的计算方法

离散型 $\vec{E}=\sum \vec{E}_i=\sum \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}\vec{r}_i$

连续型 $\vec{E}=\int d\vec{E}=\int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$

计算的步骤大致如下：

1）根据给定的电荷分布，恰当地选择**电荷元dq**和**坐标系**

2）由选取的电荷元**dq**，写出**dq 在待求点的场强的表达式** $d\vec{E}$

3）由选取适当的坐标系，将场强的矢量表达式**投影分解为标量表示式** $dE=dE_x i+dE_y j+dE_z k$

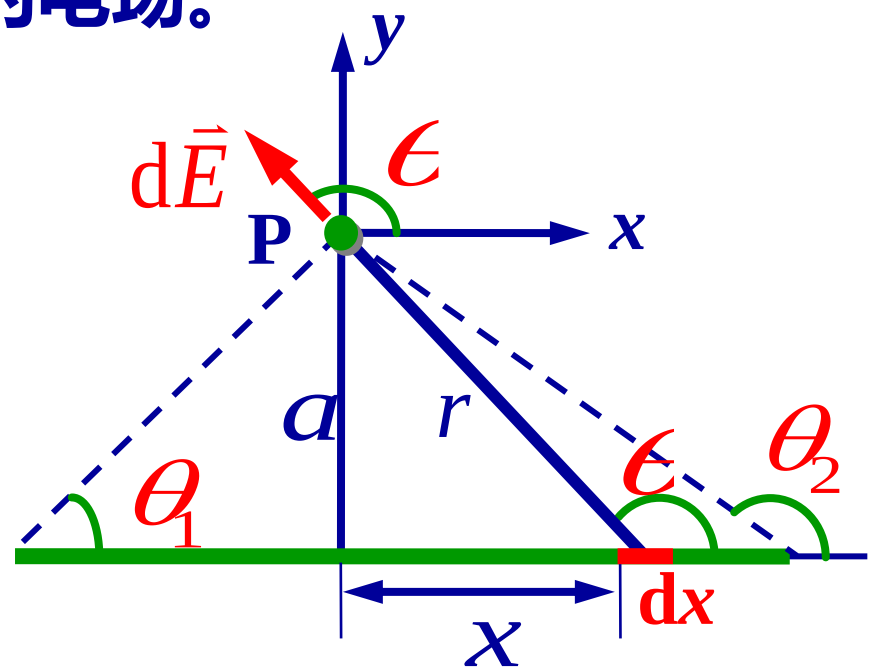
4）根据电场强度叠加原理，对每个分量进行**求和**（离散型）或**积分**（连续型），得出总场强

连续带电体的电场例题

- 均匀带电直线的电场
- 均匀带电圆环轴线上的电场
- 均匀带电圆盘轴线上的电场

例：求一均匀带电直线在P点的电场。

解：建立直角坐标系



取线元dx　　带电 $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{r^2}$$

将 $\mathrm{d}\vec{E}$ 投影到坐标轴上

$$\mathrm{d}E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{r^2}\cos\theta \qquad \mathrm{d}E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{r^2}\sin\theta$$

$$E_x = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta\,\mathrm{d}x \qquad E_y = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\sin\theta\,\mathrm{d}x$$

积分变量代换

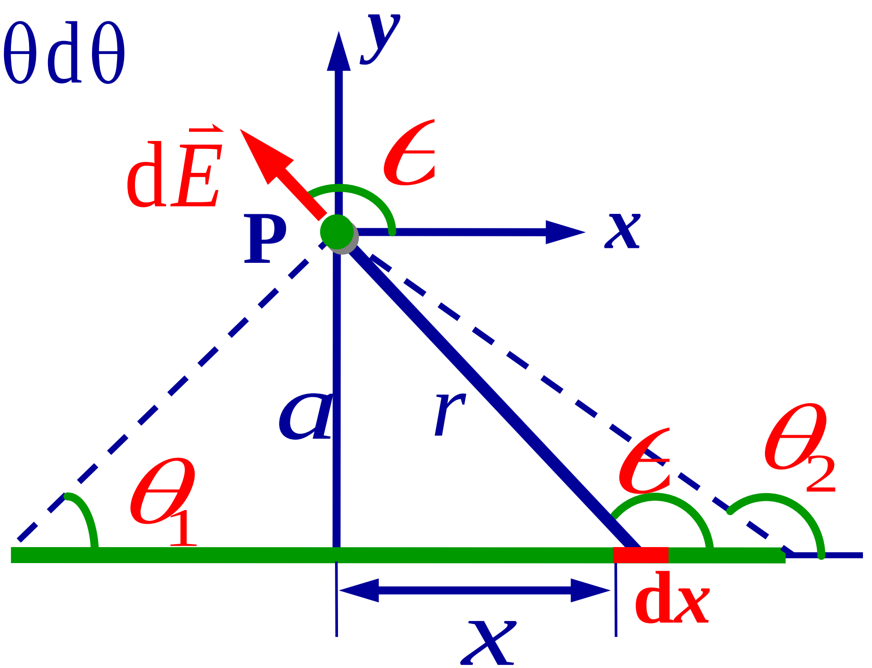
$$r = a/\sin\theta \qquad x = -a\,\mathrm{ctg}\,\theta \qquad \mathrm{d}x = a\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

代入积分表达式

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos\theta}{a^2\csc^2\theta}a\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

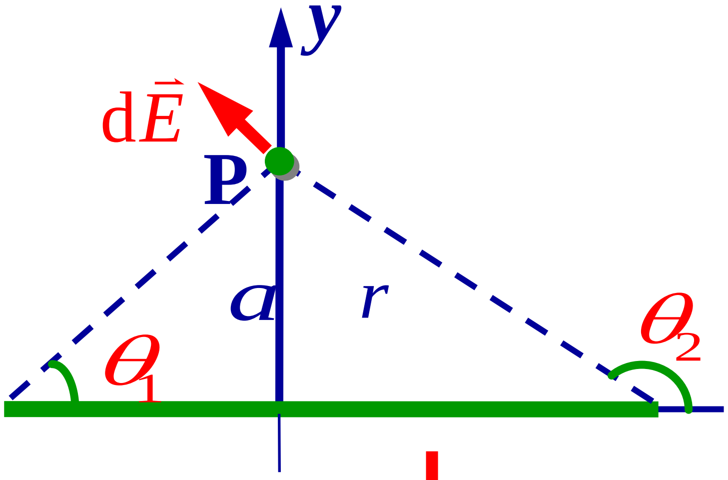
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$



同理可算出 $$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

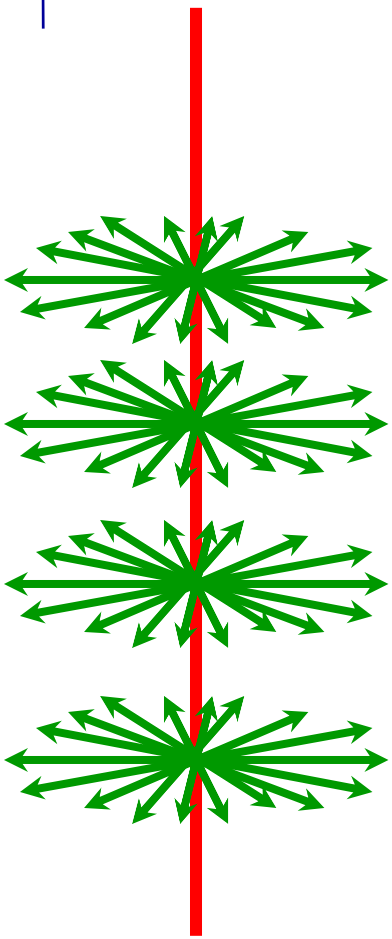


当直线长度 $L \to \infty$ $\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 \to 0 \\ \theta_2 \to \pi \end{cases}$

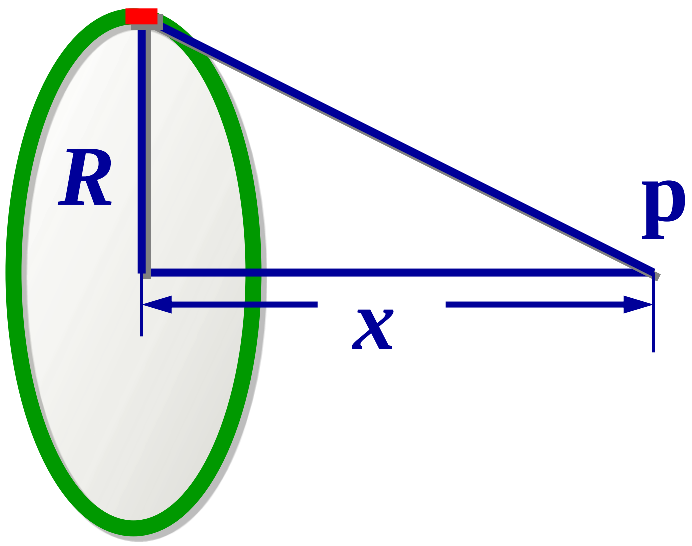
$$E_x = 0 \quad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \times 2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

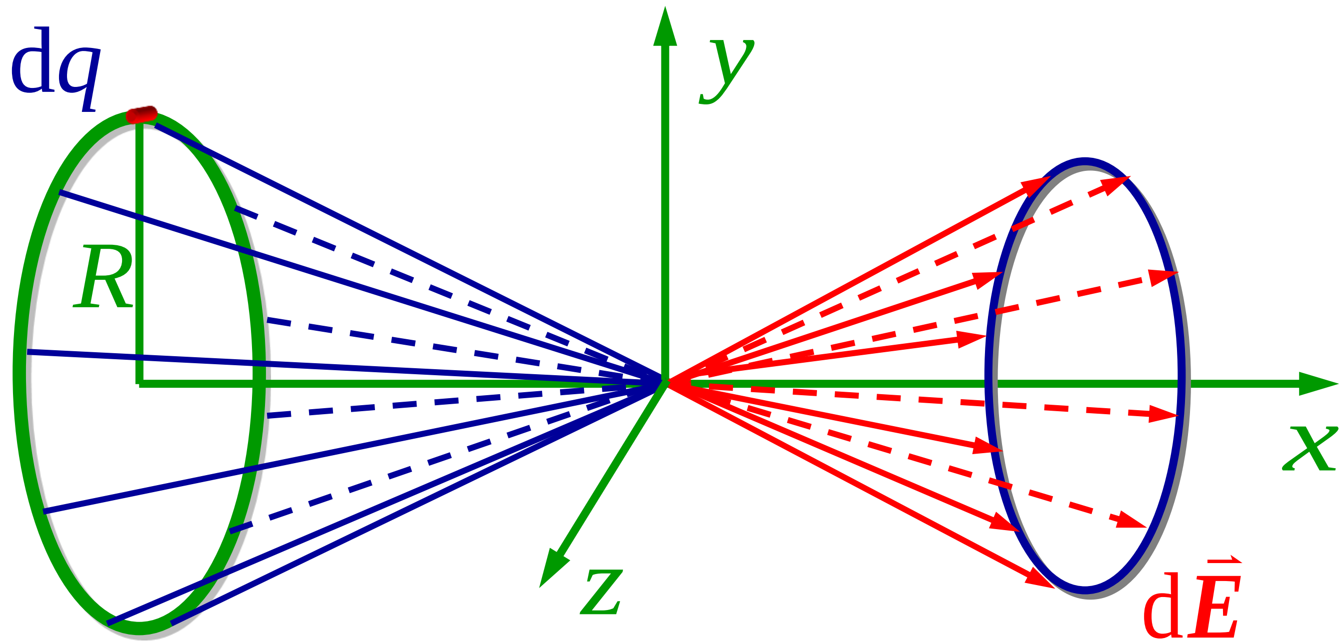
无限长均匀带电直线的场强：

$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$



例： 求一均匀带电圆环轴线上任一点x处的电场。

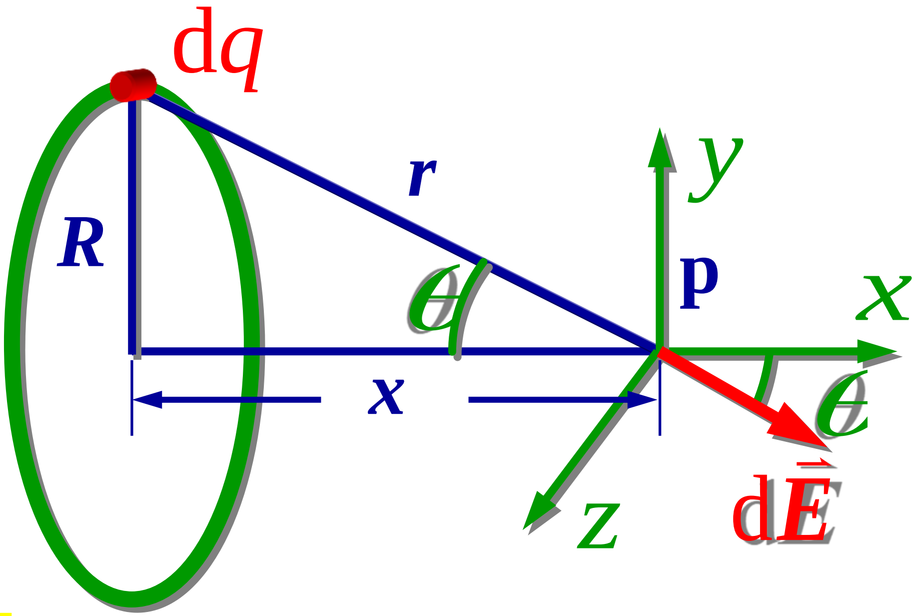




当dq 位置发生变化时，它所激发的电场 $\mathrm{d}\vec{E}$ **矢量构成了一个圆锥面。**

所以，由对称性 $E_y = E_z = 0$

解： $$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}$$



由对称性 $E_y=E_z=0$

$$E=E_x=\int \mathrm{d}E\cdot\cos\theta$$

$$=\frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int \mathrm{d}q=\frac{q\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$=\frac{qx/r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$$

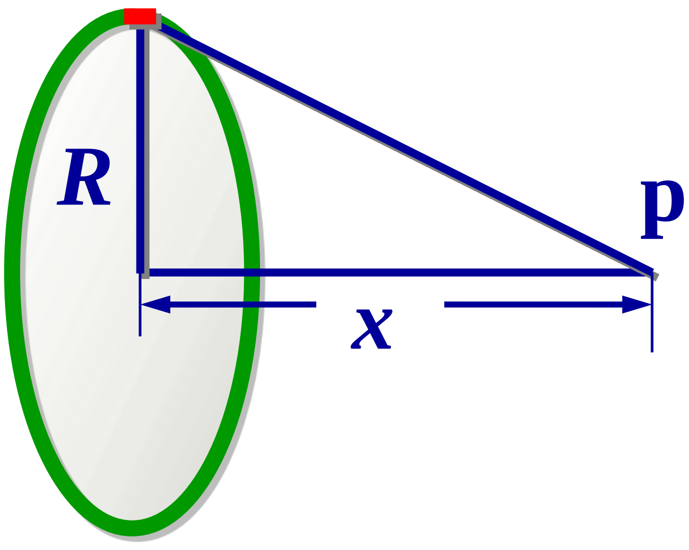
$$E = E_x = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

1. 当 *x*=0 时，即在圆环中心处

$$E = 0$$

2. 当 *x* >>*R*，则

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$



可以把带电圆环视为一个点电荷

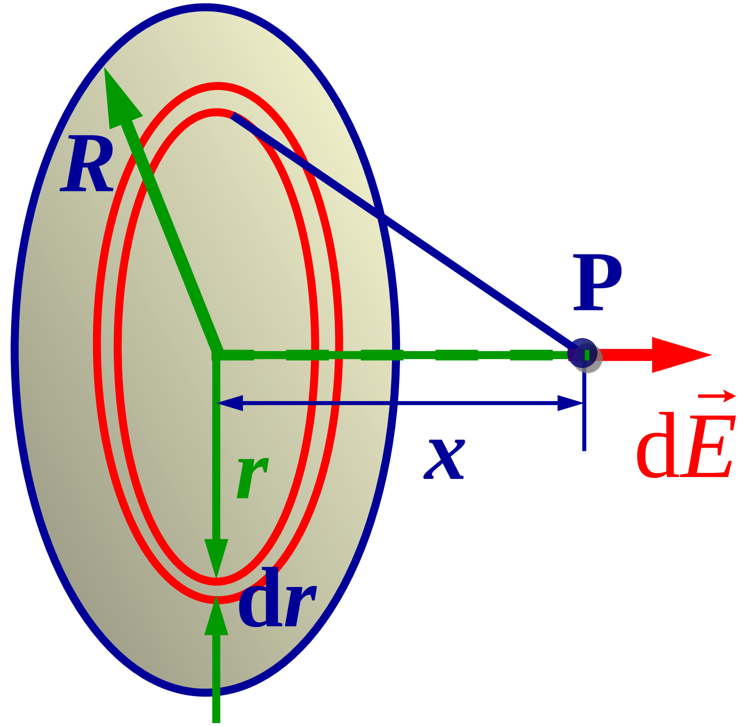
例： 求均匀带电圆盘轴线上任一点的电场。

解：由均匀带电圆环轴线上一点的电场

$$E=\frac{xq}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$$

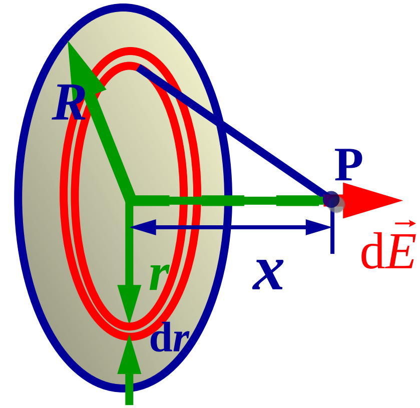
$$\mathrm{d}E=\frac{x\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{x\sigma\cdot 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}}$$



$$E=\frac{2\pi\sigma x}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]$$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]$$



讨论：（1）当 $R >> x$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

无限大均匀带电平面的场强，匀强电场

（2）当 $R << x$

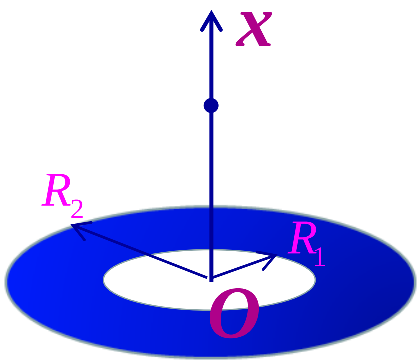
$$\because\quad \frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}=\left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{x}\right)^2$$

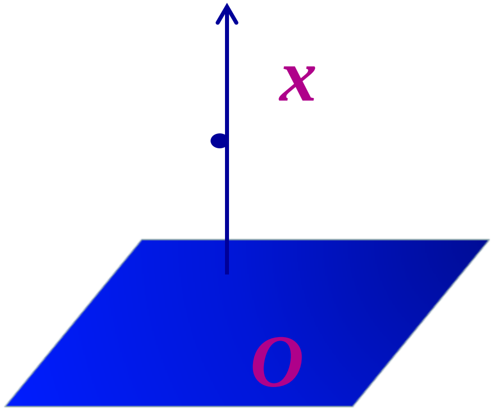
$$\therefore\quad E=\frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 x^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

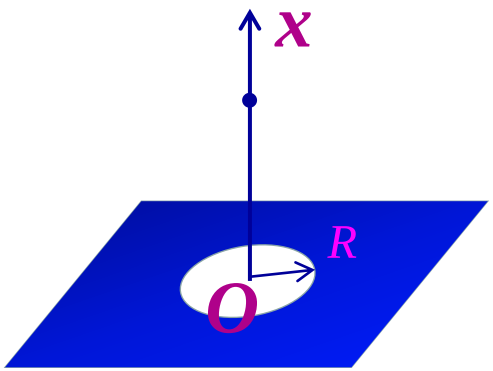
可视为点电荷的电场

讨论

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}}\right]$$







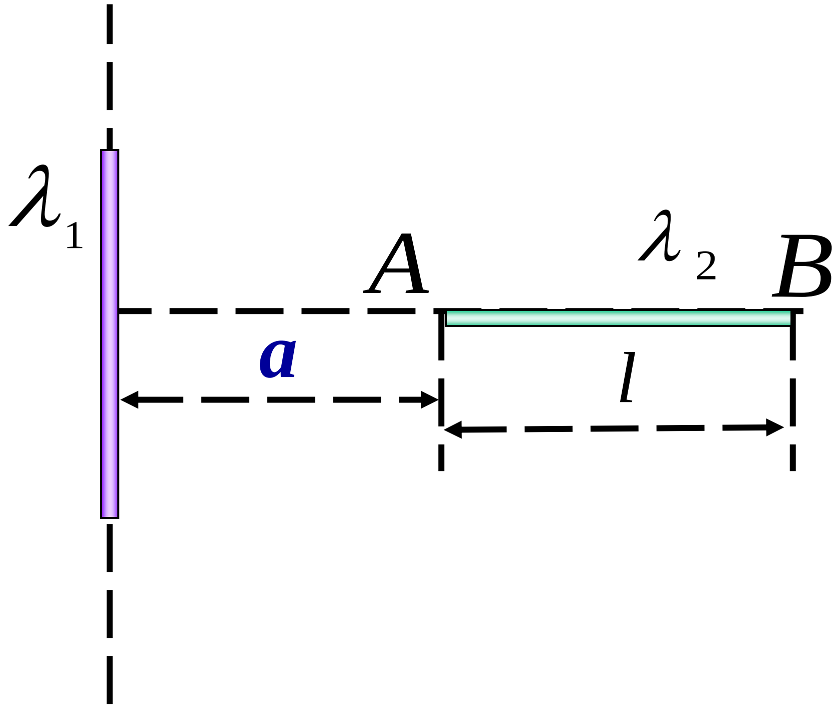
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{x}{(R_1^2 + x^2)^{1/2}} - \frac{x}{(R_2^2 + x^2)^{1/2}}\right]$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

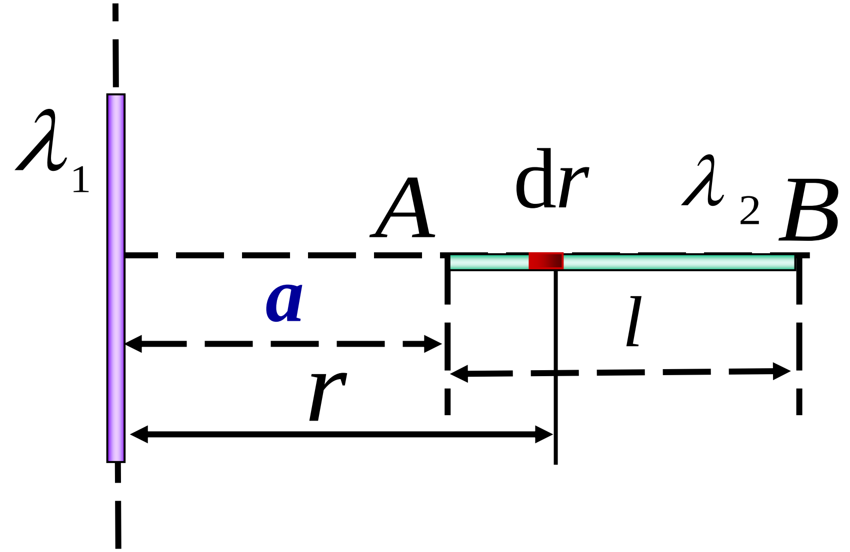
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}}$$

无限大平面

例：如图，一均匀带电的无限长直线段，电荷线密度 λ_1，另有一均匀带电直线段，长度为l，电荷密度为λ_2，两线互相垂直且共面，若带电线段近端距长直导线为a。求它们之间的相互作用力。



解： 在 l 上取电荷元



$$\mathrm{d}q = \lambda_2 \mathrm{d}r$$

$\mathrm{d}q$ 受到的电场力

$$\mathrm{d}F = E\mathrm{d}q = E\lambda_2 \mathrm{d}r$$

电荷元处的场强 $E = \dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$

各电荷元所受力的方向相同，故

$$F = \int_a^{a+l} \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}\lambda_2 \mathrm{d}r = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a+l}{a}$$

网盘作业：第10章　1，2

https://pan.baidu.com/s/1xzGnt
dBXDmwI0vZMEOD9yQ
密码：w96p