第4章

冲量和动量

笛卡尔学派和布莱尼兹学派之争

- **17**世纪的法国物理学家、数学家笛卡尔**(René Descartes)**
- 德国物理学家、数学家莱布尼兹**(Gottfried Wilhelm von Leibniz)**

1596-1653

1646-1716

- 功效与速度成正比 **v.s.** 功效与速度平方成正比
- 笛卡尔：从时间角度出发，力为原始概念，引出"运动量"**mv**。并使用**Ft=mv**为基本方程。
- 布莱尼兹：从空间角度出发，功为原始量，使用 **Fs=mv²/2** 为基本方程，力是推导出来的一种概念。

CONTENTS

CONTENTS

力的空间累积效应： $\vec{F}$ 对 $\vec{r}$ 积累 $\longrightarrow W$

- 动量和冲量

力的时间累积效应：$\vec{F}$ 对 t 积累 $\longrightarrow \vec{I}$

由牛顿第二定律：

$$\boxed{\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}}$$

$$\boxed{\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{P}=\mathrm{d}(m\vec{v})}$$

积分,得 $\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\int_{P_1}^{P_2}\mathrm{d}\vec{P}=\vec{P}_2-\vec{P}_1=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$

- 基本概念

1. 动量 $\vec{P} = m\vec{v}$

描述质点运动状态的物理量。

2. 冲量 $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t$

描述力对时间累积作用的物理量。

$\vec{F}$为恒力时，$\vec{I} = \vec{F}\Delta t$

Δt很短时，$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t = \bar{\vec{F}}\Delta t$ （$\bar{\vec{F}}$为平均作用力）

- # 质点的动量定理

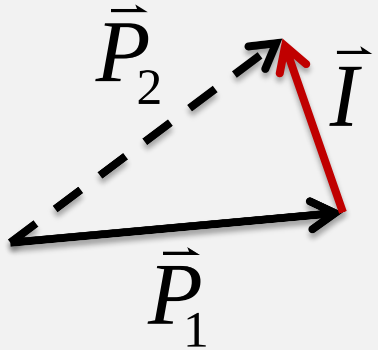
在给定时间间隔内

质点所受合外力的冲量 = 质点动量的增量

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)\mathrm{d}t=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=\Delta\vec{P}$$

(1) $\vec{P}$ 为状态量;

$\vec{I}$ 为过程量, 方向沿 $\Delta\vec{P}$的方向。



$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)\mathrm{d}t=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=\Delta\vec{P}$$

(2) 动量的物理意义:

由动量定理，在相等的冲量作用下，不同质量的物体，其速度变化是不相同的，但它们的动量的变化却是一样的，所以从过程角度来看，动量比速度能更恰当地反映了物体的运动状态。因此，一般描述物体作机械运动时的状态参量，用动量比用速度更确切些。动量和位矢是描述物体机械运动状态的状态参量。

(3) $\vec{F}$ 为质点所受到的合外力。

(4) 动能定理适用于惯性系。 （牛二）

(5) 动量定理

（矢量叠加原理）

分量表示

$$I_x = \int F_x \mathrm{d}t = mv_{2x} - mv_{1x}$$

$$I_y = \int F_y \mathrm{d}t = mv_{2y} - mv_{1y}$$

$$I_z = \int F_z \mathrm{d}t = mv_{2z} - mv_{1z}$$

某方向受到冲量，该方向上动量就增加。

(6) 微分形式

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$$

积分形式

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{d}t = \Delta\vec{P}$$

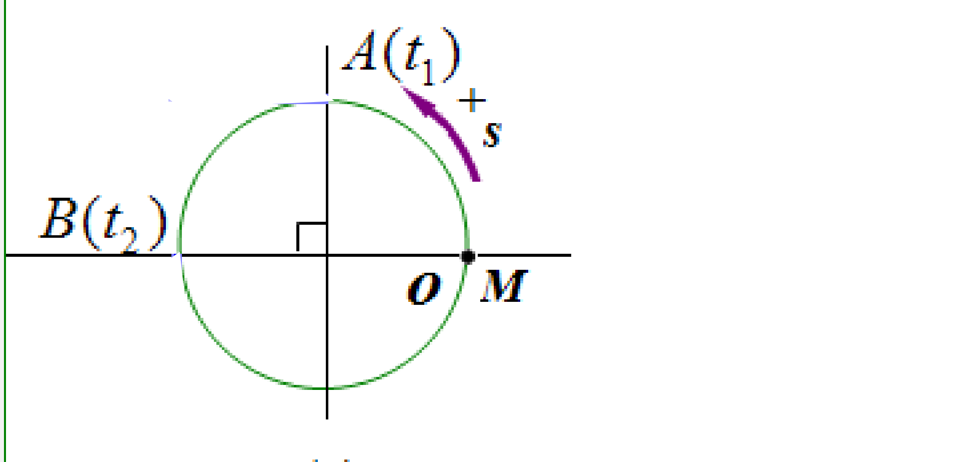
例1 质量 m=1kg 的小球M，从O点开始沿半径R=2m的圆周运动，如图。以O点为自然坐标原点，已知M的运动学方程为$s = 0.5\pi t^2 \mathrm{m}$ 。求从$t_1=\sqrt{2}\mathrm{s}$ 到$t_2=2\mathrm{s}$ 这段时间内作用于小球M的合力的冲量。

解 以M为研究对象小球的速度

$S(t_1)=\pi=C/4$

$S(t_2)=2\pi=C/2$

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\pi t$$



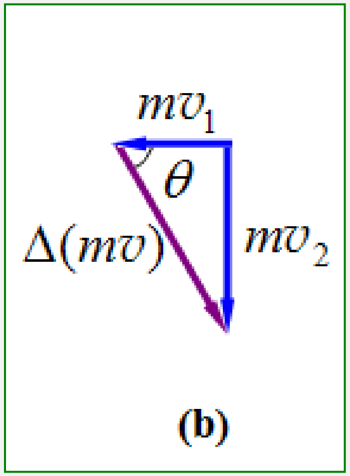
(a)

质点在 A 点的动量大小、方向

$$mv_1 = \sqrt{2}\pi \ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$$

质点在 B 点的动量大小、方向

$$mv_2 = 2\pi \ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$$



根据动量定理 $\vec{I} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \Delta(m\vec{v})$

由图 (b) 可知

$$\left|\Delta(mv)\right| = \sqrt{(mv_1)^2 + (mv_2)^2}$$

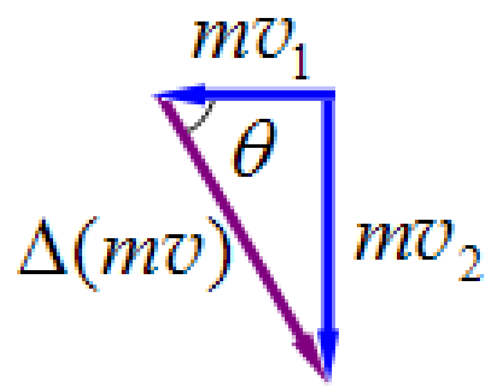
$$= \sqrt{2\pi^2 + 4\pi^2} = \sqrt{6}\pi \ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$$

$$|I| = \sqrt{6}\pi = 7.69\ \ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$$

冲量的方向

$$\tan\theta = \frac{mv_2}{mv_1} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = 54^\circ 44'$$

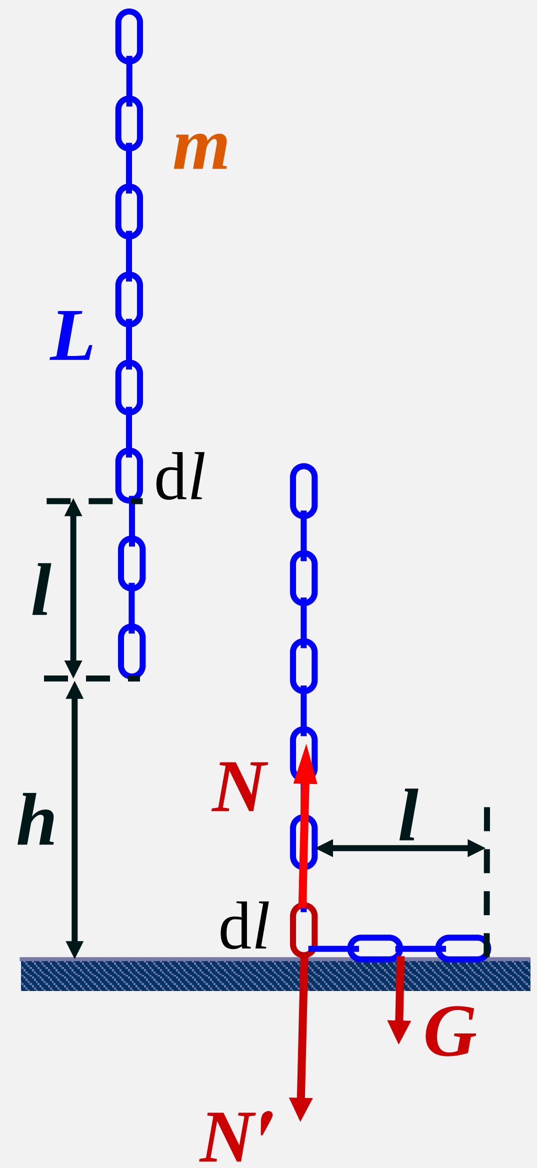


(b)

例2质量为 m 的匀质链条, 全长为 L,开始时, 下端与地面的距离为 h。

求当链条自由下落在地面上的长度为 l 时，地面所受链条的作用力？

解 取自由下落在地面上的长度为 l 的一段链条为研究对象，受力分析如图所示。



则

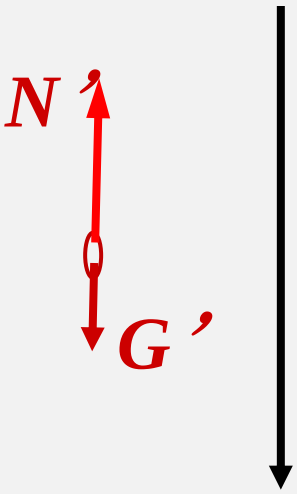
$$N - N' - G = 0$$

取即将落地的一小段dl 为研究对象

则 $$\mathrm{d}m = \frac{m}{L}\mathrm{d}l$$

dl 在落地时的速度

$$v = \sqrt{2g(l+h)}$$



dl 受力如图所示

取向下为正方向，并忽略重力

根据动量定理

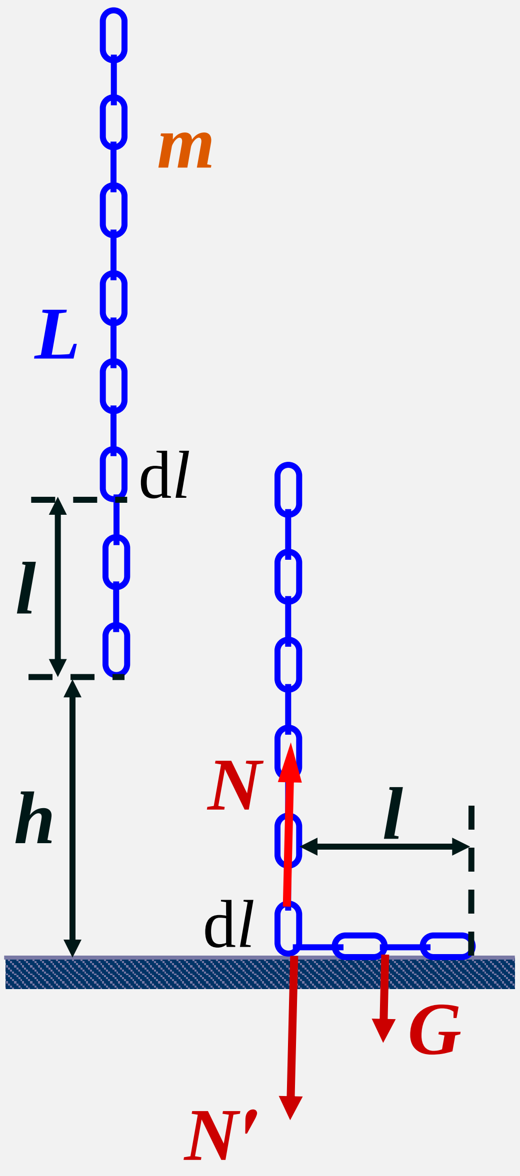
$$-N'\mathrm{d}t = 0 - v\mathrm{d}m$$

$$N' = \frac{v\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = v\frac{m}{L}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

$$= v^2\frac{m}{L} = \frac{2m(l+h)g}{L}$$

地面受力

$$F = N' + (l\frac{m}{L})g = \frac{m}{L}(3l+2h)g$$



例3一篮球质量0.58 kg, 从2.0 m高度下落,到达地面后,以同样速率反弹, 接触时间仅0.019 s。

求 对地平均冲力?

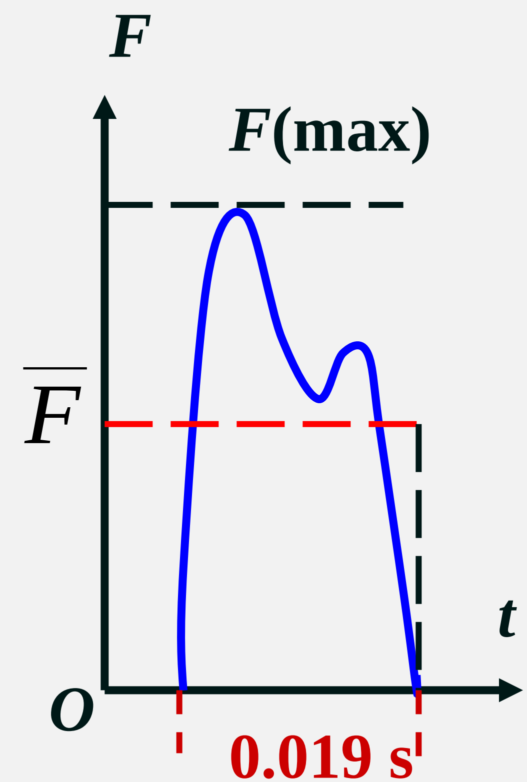
解 篮球到达地面的速率(机械能守恒)

$$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times 9.8\times 2}=6.3(\mathrm{m/s})$$

由动量定理 $\overline{F}\Delta t = mv-(-mv)$

对地平均冲力

$$\overline{F}=\frac{2mv}{\Delta t}=\frac{2\times 0.58\times 6.3}{0.019}=3.8\times 10^{2}(\mathrm{N})$$



相当于 40 kg 重物所受重力!

作业：

CONTENTS

4.2 质点系动量定理

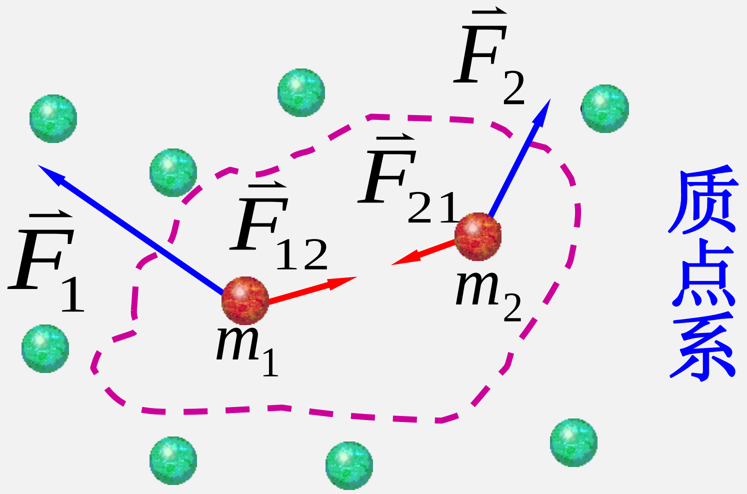
外力：系统外对质点的作用力。

内力：系统内质点间的相互作用力。

两个质点

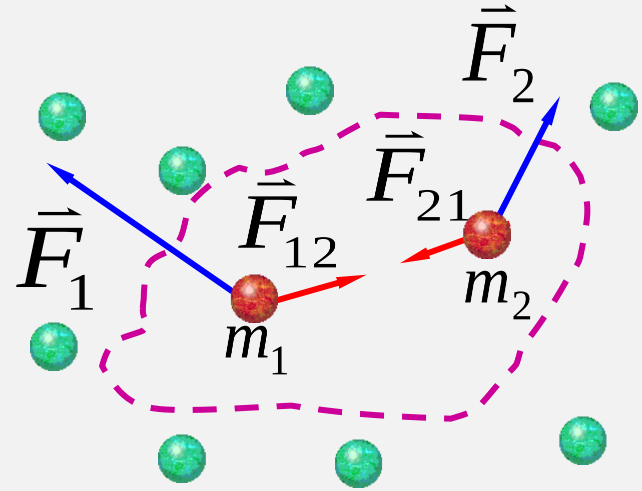
$$m_1: \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}_1}{\mathrm{d}t}$$

$$m_2: \quad \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}_2}{\mathrm{d}t}$$



$$\therefore \quad \vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}$$

$$=\frac{\mathrm{d}\vec{P}_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{P}_2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{P}_1+\vec{P}_2)$$



而 $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$

$$\therefore \quad \vec{F}_1+\vec{F}_2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{P}_1+\vec{P}_2)$$

n 个质点组成的系统

由于内力总是成对出现的，其矢量和为零。

$$\vec{F}_{合外} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \vec{P}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{合}\mathrm{d}t = \Delta\vec{P}$$

作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量。—— 质点系的动量定理。

微分形式 $\vec{F}_{合}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{P}$

积分形式 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{合}\mathrm{d}t = \int_{P_1}^{P_2}\mathrm{d}\vec{P} = \Delta\vec{P}$

讨论

1. 动量的改变量。

2. 定理仅适应于惯性系。

注意

1. 区分外力和内力。

2. 内力仅能改变系统内某个物体的动量，但不能改变系统的总动量。

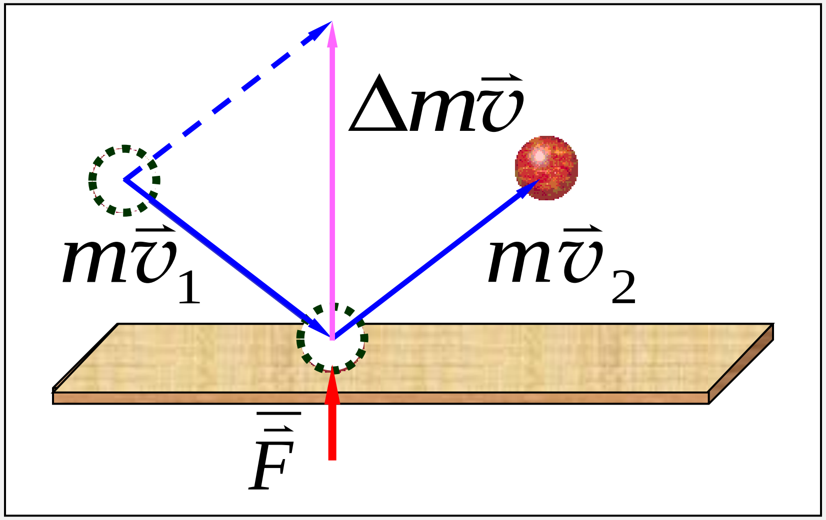
动量定理常应用于碰撞问题

$$\bar{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t}{t_2 - t_1} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

注意：

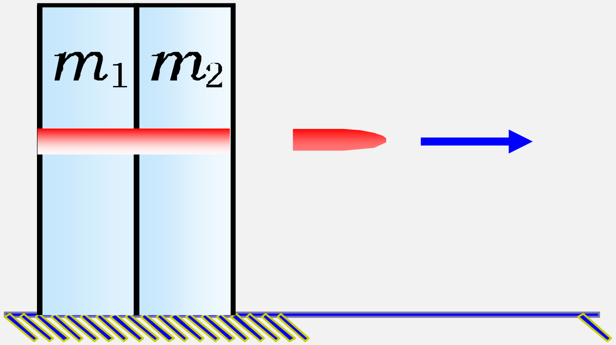
当 $\Delta\vec{p}$ 一定时，

Δt 越小，则 $\bar{F}$ 越大。



例2 一子弹水平地穿过并排静止放置在光滑水平面上的木块，已知两木块的质量分别为 m_1、m_2，子弹穿过两木块的时间各为 Δt_1、Δt_2，设子弹在木块中所受的阻力为恒力 $\boldsymbol{F}$。

求 子弹穿过后， 两木块各以多大速度运动？



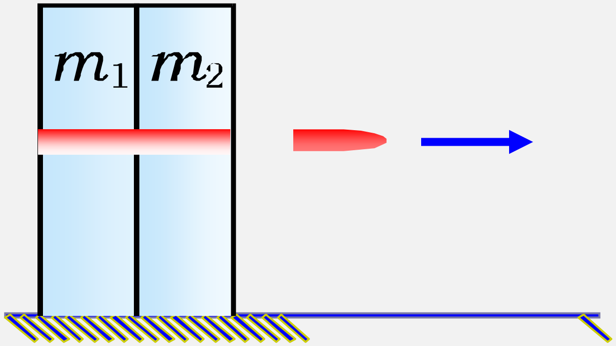
解 子弹穿过第一木块时, 两木块速度相同, 均为 v_1

$$F\Delta t_1 = \left(m_1 + m_2\right)v_1 - 0$$

子弹穿过第二木块后, 第二木块速度变为v_2

$$F\Delta t_2 = m_2 v_2 - m_2 v_1$$

解得



$$v_1 = \frac{F\Delta t_1}{m_1 + m_2}$$

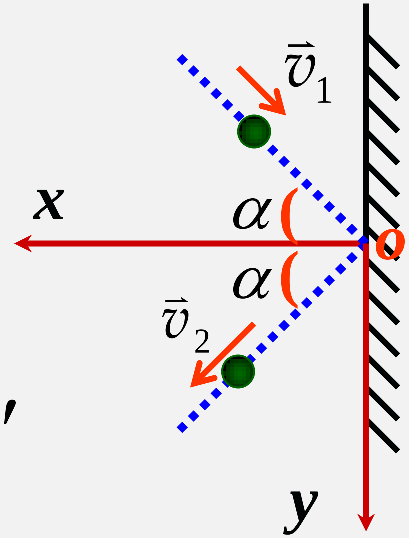
$$v_2 = \frac{F\Delta t_1}{m_1 + m_2} + \frac{F\Delta t_2}{m_2}$$

例3一钢球m = 0.05kg , v = 10m/s,以与钢板法线呈45°的方向撞击在钢板上，并以相同的速率和角度弹回。设球与钢板的碰撞时间为$\triangle t$ = 0.05s 。

求： 在此碰撞时间内钢板所受的平均冲力。

解： 作用时间$\triangle t$很短,可以忽略重力的影响。

(内力远大于外力)

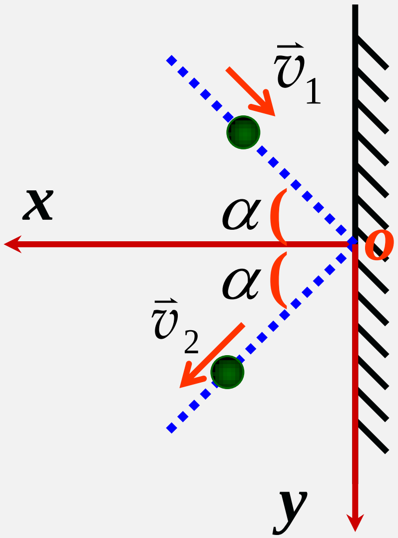


钢板对球的平均冲力 $\vec{F}$

球对钢板的平均冲力 $\vec{F}'$ $\quad \vec{F} = -\vec{F}'$

对钢球：

$$\vec{F}\cdot\Delta t=\Delta\vec{P}=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$$



分量式 $\overline{F}_x\cdot\Delta t=mv_{2x}-mv_{1x}$

$$=mv\cos\alpha-(-mv\cos\alpha)=2mv\cos\alpha$$

$$\overline{F}_y\cdot\Delta t=mv_{2y}-mv_{1y}$$

$$=mv\sin\alpha-mv\sin\alpha$$

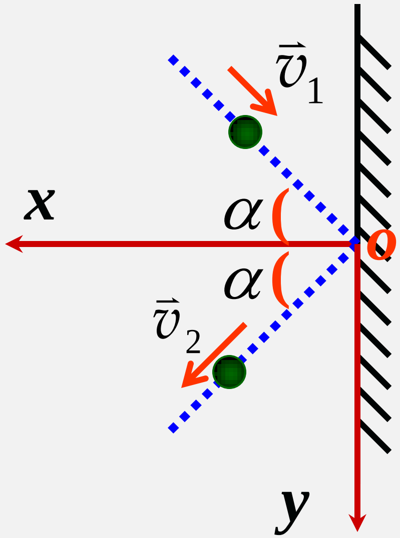
$$=0$$

钢球所受的平均冲力为

$$\overline{F} = \overline{F}_x = \frac{2mv\cos\alpha}{\Delta t}$$

$$= \frac{2\times 0.05\times 10\times \cos 45^{\circ}}{0.05}$$

$$= 14.1(\mathrm{N})$$



钢板所受的平均冲力 $\overline{F}' = 14.1\mathrm{N}$，

方向沿 x 轴负向。

动量与动能的比较

momentum & kinetic energy

	动量 (momentum)	动能 (kinetic energy)
物理量	动量 (momentum)	动能 (kinetic energy)
表达式	$\vec{p} = m\vec{v}$	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$
单　位	kg·m/s (千克·米/秒)	J(焦耳)(或N·m牛顿·米)
性　质	矢量	标量
变化量	△P由力的冲量决定 对于给定两个时刻t1和t2: △P与惯性系的选择无关	△Ek由力的功决定 对于给定两个时刻t1和t2: △Ek随惯性系的不同而不同

- 关　系

$$E_k = p^2/(2m)$$

CONTENTS

❖ 动量守恒定律

由质点的动量定理：

$$\vec{F}_{合} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

得 $\vec{F}_{合} = 0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0$

即 $\vec{p} = \mathrm{const}$

一个质点所受的合(外)力为零时，这个质点的动量将保持不变。

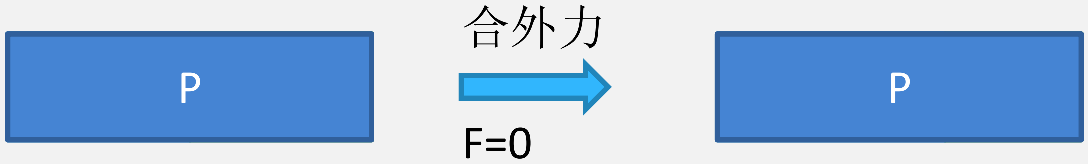
由质点系的动量定理：

$$\vec{F}_{合外} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

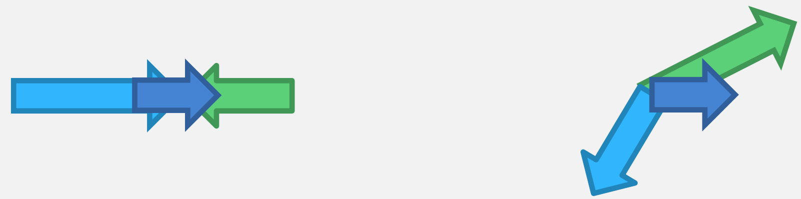
得 $\vec{F}_{合外} = 0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0$

即 $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \mathrm{const}$

一个质点系所受的合外力为零时，这个系统的总动量将保持不变。



- 系统总动量守恒，但每个质点的动量可能变化。



- 若系统总动量守恒，大小和方向都不变化。
- 在碰撞、打击、爆炸等相互作用时间极短的过程中， 相互作用的内力远大于外力，故往往可忽略外力近似动量守恒。
- 若总动量不守恒，动量守恒可在某一方向上成立。

若$F_x=0$，

$$p_x=\sum_i m_i v_{ix}=C_1$$

若$F_y=0$，

$$p_y=\sum_i m_i v_{iy}=C_2$$

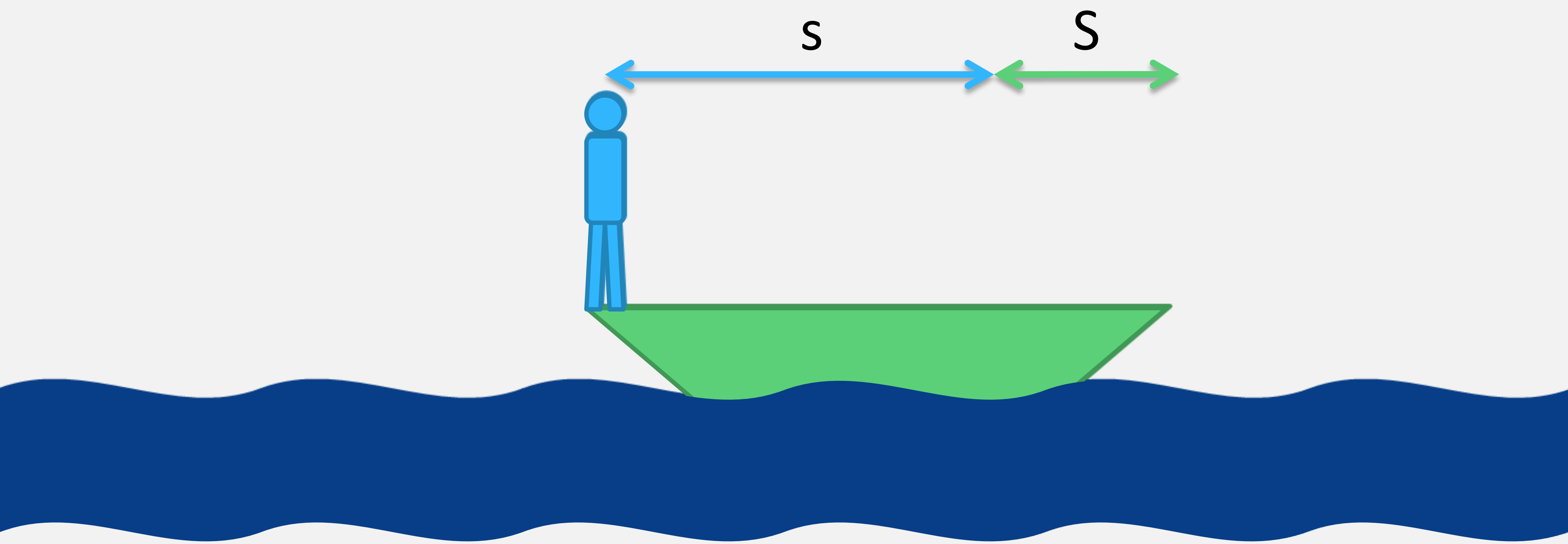
$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

- 定律中的速度是对同一惯性系的速度
- 动量和是同一时刻的动量之和。

- 动量守恒定律只适用于惯性系。

- 动量守恒定律在微观高速范围仍适用。

例1 一长为l=4m，质量为M=150kg的船，静止浮在湖面上。今有一质量m=50kg的人，从船头走到船尾，如图所示。求人和船相对于湖岸各移动的距离，设水对船的阻力忽略不计。

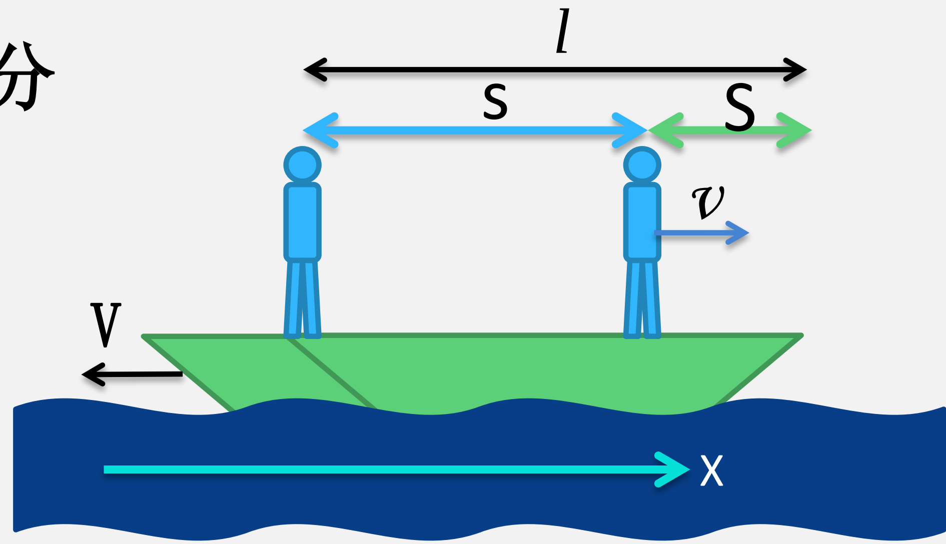


解 选人和船组成的系统为研究对象，水平方向动量守恒，取向右为坐标正方向

$$mv - MV = 0$$

上式两边同乘 $\mathrm{d}t$，并积分

$$m\int_0^t v\mathrm{d}t - M\int_0^t V\mathrm{d}t = 0$$



用 S 和 s 分别表示船和人相对于湖岸移动的距离，则有

$$S = \int_0^t V\mathrm{d}t \qquad s = \int_0^t v\mathrm{d}t \qquad \therefore ms = MS$$

由图知 $s + S = l$

$$s = l - S = 3\mathrm{m}$$

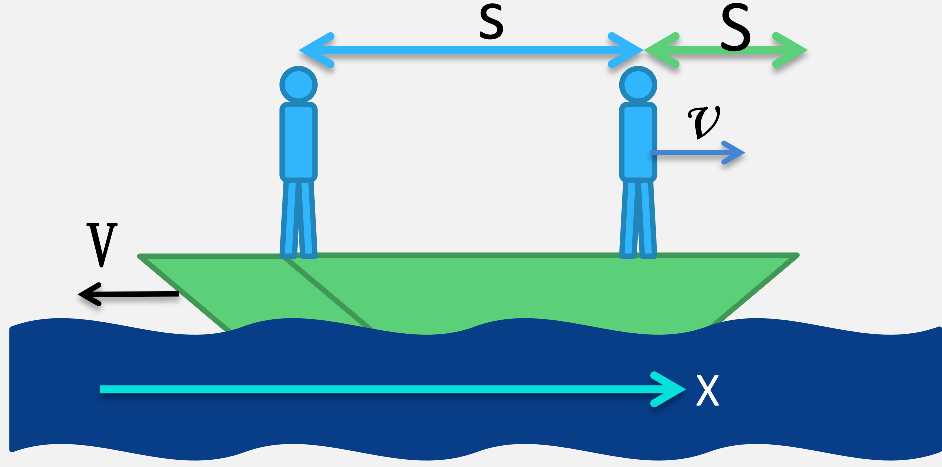
$$S = \frac{m}{M+m}l = \frac{50}{150+50} \times 4 = 1\mathrm{m}$$

方法二： 选人和船组成的系统为研究对象，水平方向动量守恒，取向右为坐标正方向

选船为动系，岸为静系

人相对船的速度 v'

船相对岸的速度 V



$$m(v'-V)-MV=0$$

上式两边同乘，dt并积分

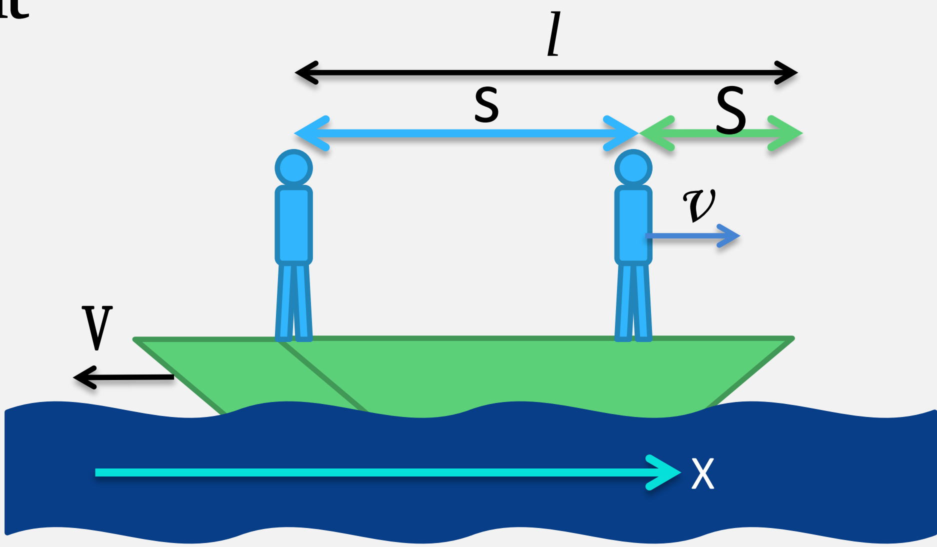
$$m\int_0^t (v'-V)\mathrm{d}t-M\int_0^t V\mathrm{d}t=0$$

用 S 表示船相对于湖岸移动的距离，则

$$S=\int_0^t V\mathrm{d}t$$

人相对船移动的距离为

$$l=\int_0^t v'\mathrm{d}t$$



$$\therefore ml=(m+M)S$$

则

$$S=\frac{m}{M+m}l=\frac{50}{150+50}\times 4=1\,\mathrm{m}$$

由图知 $s+S=l$ $s=l-S=3\,\mathrm{m}$

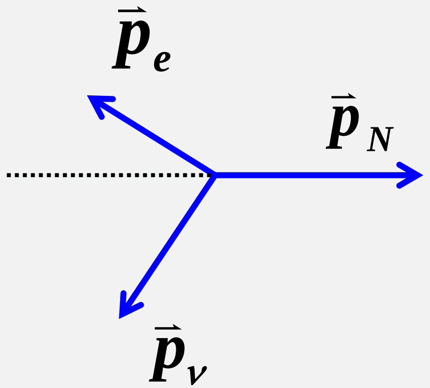
例2 静止的原子核衰变时辐射出一个电子和一个中微子后成为一个新的原子核。

已知电子的动量为1.2×10^{-23} kgm/s，中微子的动量为6.4×10^{-23} kgm/s，它们的运动方向相互垂直。

求 新原子核的动量的大小和方向。

解 原子衰变前后系统动量守恒

$$\vec{p}_e+\vec{p}_\nu+\vec{p}_N=0$$



因为 $\vec{p}_e$ 与 $\vec{p}_\nu$ 垂直：

$$p_N=\sqrt{p_e^2+p_\nu^2}=6.51\times10^{-23}\mathrm{kgms}^{-1}$$

解 原子衰变前后系统动量守恒

$$\vec{p}_e + \vec{p}_\nu + \vec{p}_N = 0$$

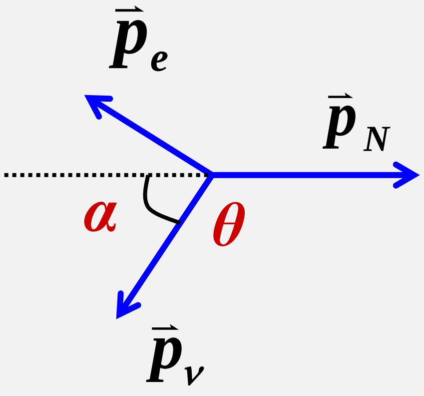
因为$\vec{p}_e$与$\vec{p}_\nu$垂直：

$$p_N = \sqrt{p_e^2 + p_\nu^2} = 6.51 \times 10^{-23}\,\mathrm{kgms}^{-1}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{p_e}{p_\nu}\right)$$

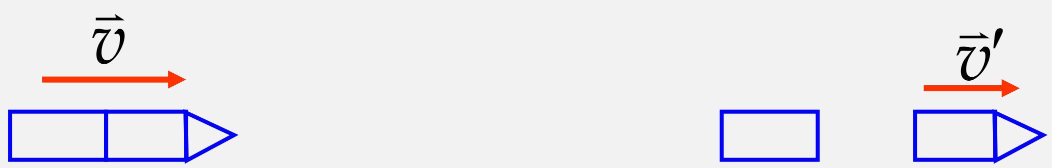
$$= \arctan\frac{1.2 \times 10^{-23}}{6.4 \times 10^{-23}} = 61.9^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 180^\circ - 61.9^\circ = 118.1^\circ$$



例3 一火箭以$v = 2.5\times10^3$m/s的速率相对地面沿水平方向飞行时分离成两部分， 前部是质量为100kg 的仪器舱， 后部是质量为200kg的燃料容器，若前部相对后部的水平速率为1000m/s。

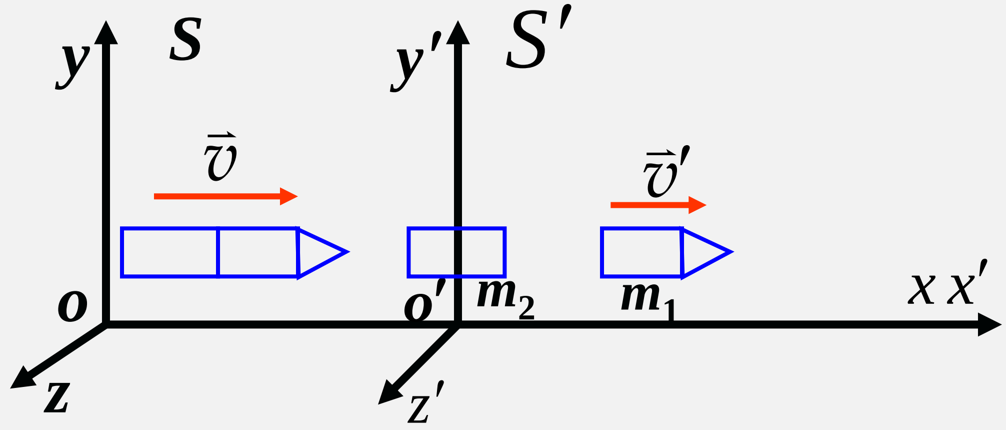
求:他们相对地面的速度。



解 取地面为固定参考系 $S(Oxyz)$

燃料容器m_2为运动参考系 $S'(Ox'y'z')$

设 $\vec{v}$ 为火箭分离前相对S 的速度，$\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ 为分离后仪器舱 m_1 和燃料容器 m_2 相对 S 的速度，$\vec{v}'$ 为分离后 m_1 相对于m_2(S') 的速度。



由伽利略速度变换：

$$\vec{v}_1 = \vec{v}' + \vec{v}_2$$

同在水平方向上,故上式为：

$$v_1 = v' + v_2$$

火箭分离前后只受重力,水平方向动量守恒。

对同一惯性系 S，有

$$(m_1 + m_2)v = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

解上两式, 得：$v_2 = v - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} v'$

代入数据有：

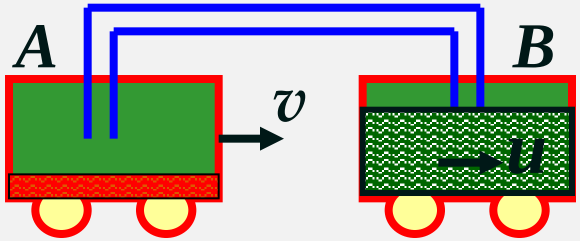
$$v_1 = 2.17 \times 10^3 \mathrm{m/s}$$

同理，得

$$v_2 = 3.17 \times 10^3 \mathrm{m/s}$$

例5如图示,两部运水的卡车A、B在水平面上沿同一方向运动, B的速度为u,从B上以6kg/s的速率将水抽至A上，水从管子尾部出口垂直落下，车与地面间的摩擦不计，时刻 t 时，A车的质量为M，速度为v 。

求 时刻 t , A 的瞬时加速度。

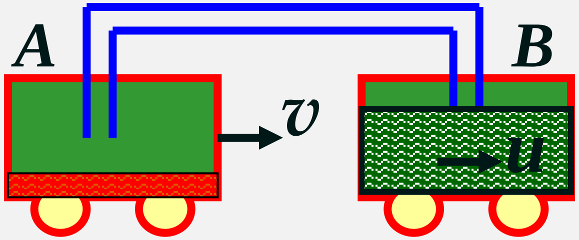


解 选A车M和Δt时间内抽至A车的水Δm为研究系统，水平方向上动量守恒

$$Mv + \Delta m u = (M + \Delta m)v'$$

$$v' = \frac{Mv + \Delta m u}{M + \Delta m} \qquad \Delta v = v' - v = \frac{\Delta m(u - v)}{M + \Delta m}$$

$$\Delta v \approx \frac{\Delta m}{M}(u - v)$$



$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{u - v}{M} = \frac{6}{M}(u - v)$$

作业：

50

THANKS

FOR YOUR ATTENTION

Last Page