自然坐标系

CONTENTS

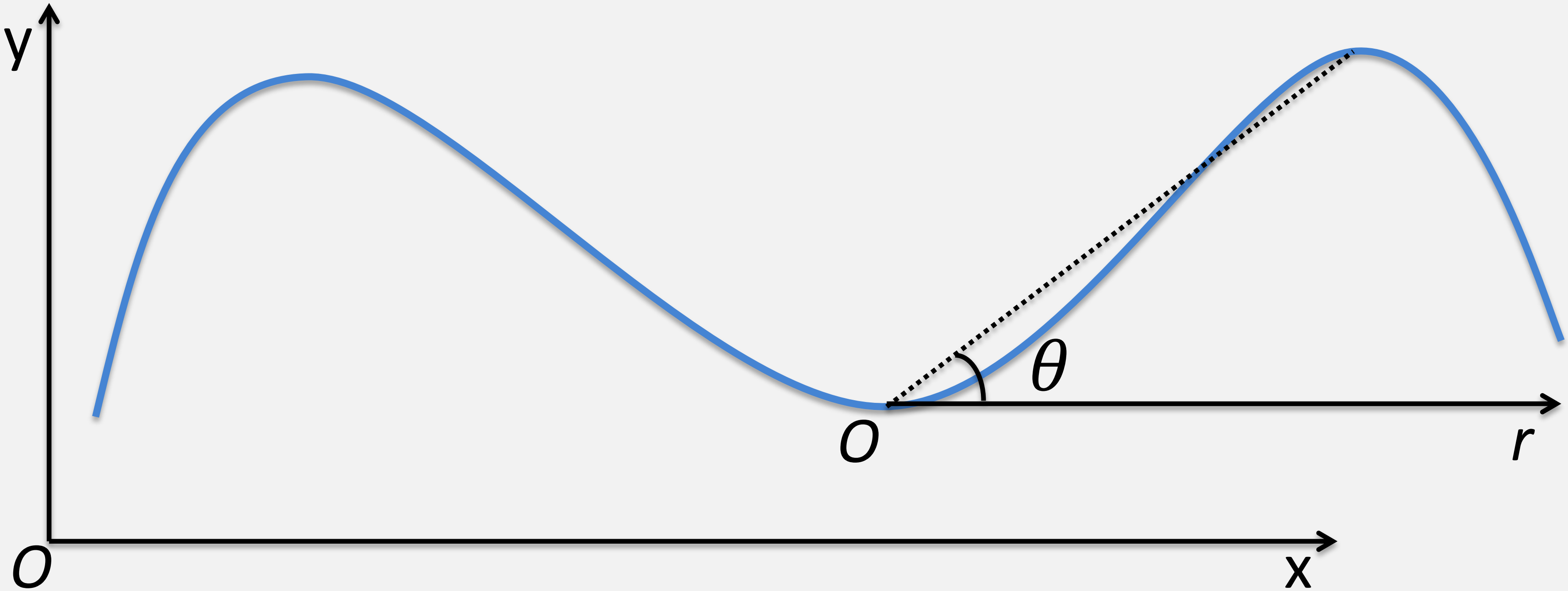
怎么才能方便的知道瞬时的速度大小呢？

在轨道某一点的加速度和管道受力情况又如何呢？

已知运动轨道情况下，用什么坐标系描述质点运动？

直角坐标： 运动轨道曲线是x,y的方程，即y坐标要随x坐标改变而改变。

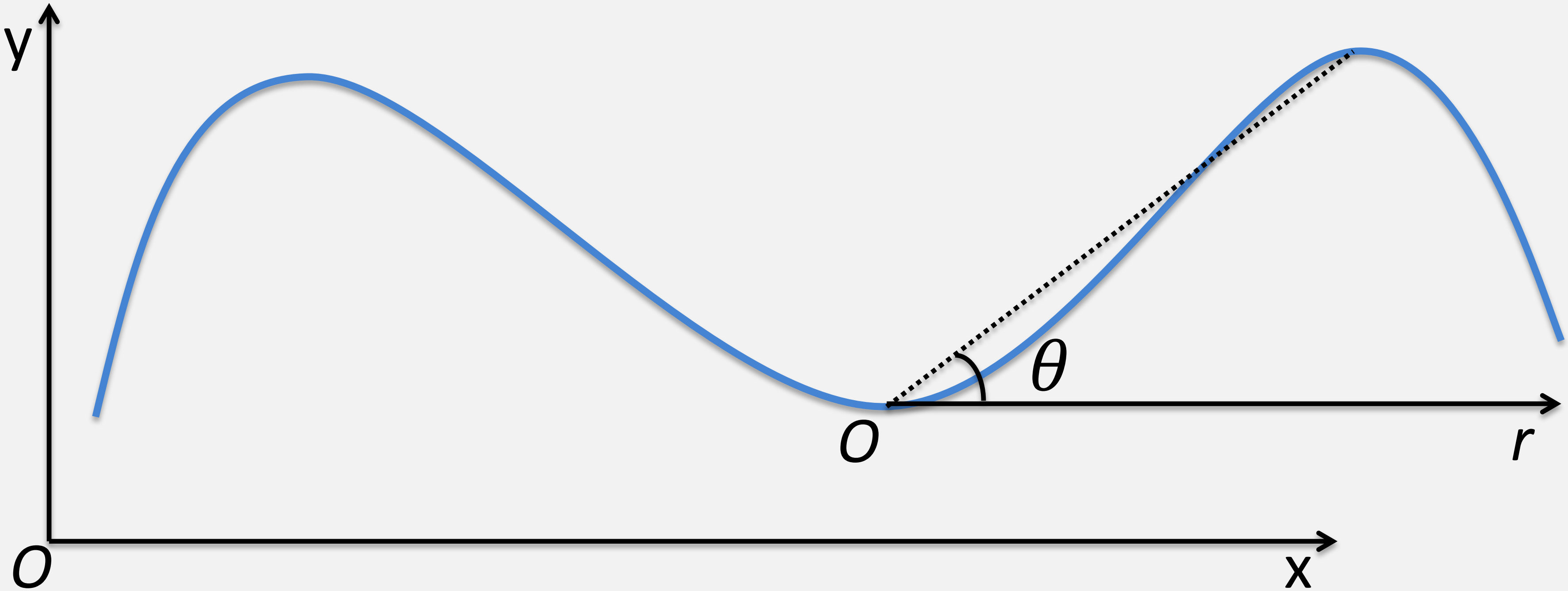
除已知的规则运动轨迹（如直线、抛物线），方程较复杂。



已知运动轨道情况下，用什么坐标系描述质点运动？

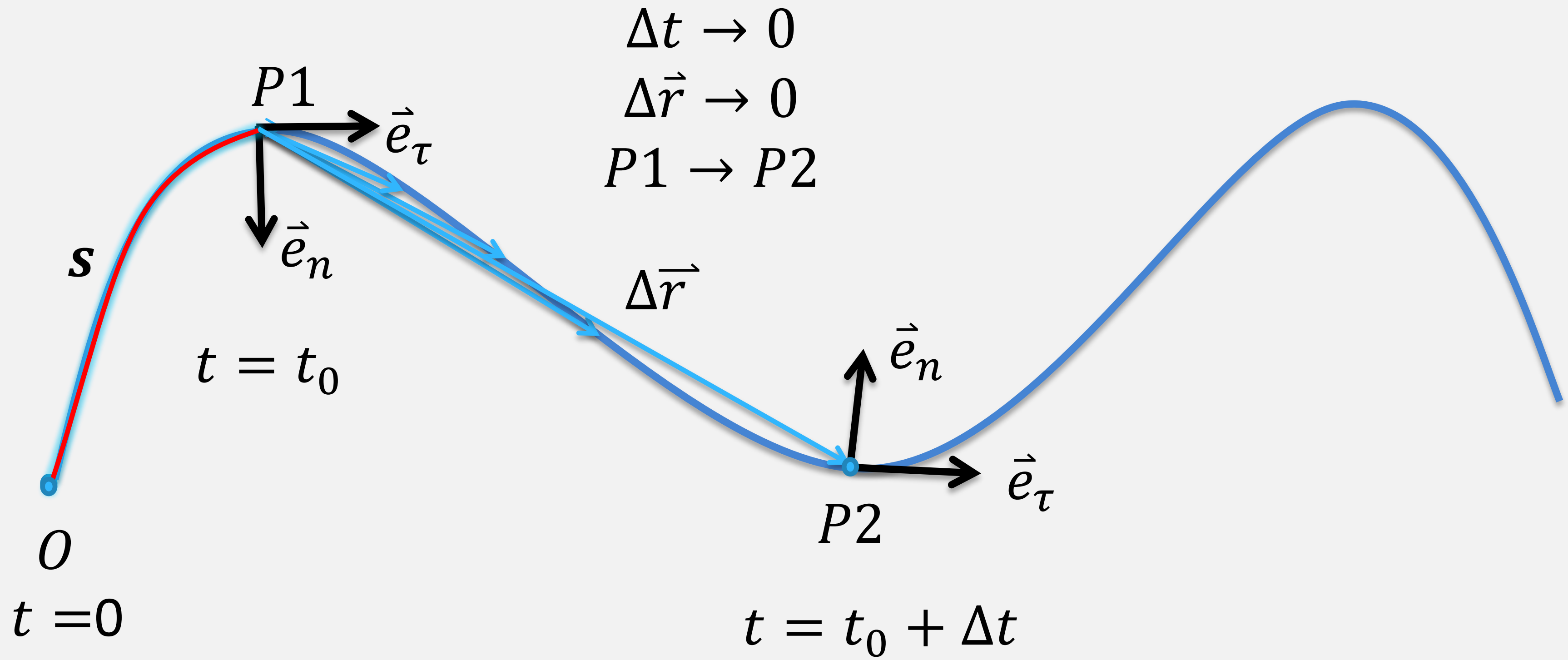
极坐标：运动轨道曲线是r,θ的方程，
如不是（类）圆周或绕转运动，方程较复杂。

质点的运动只有一个自由度，
即用一个变量（坐标）即可描述质点位置！！



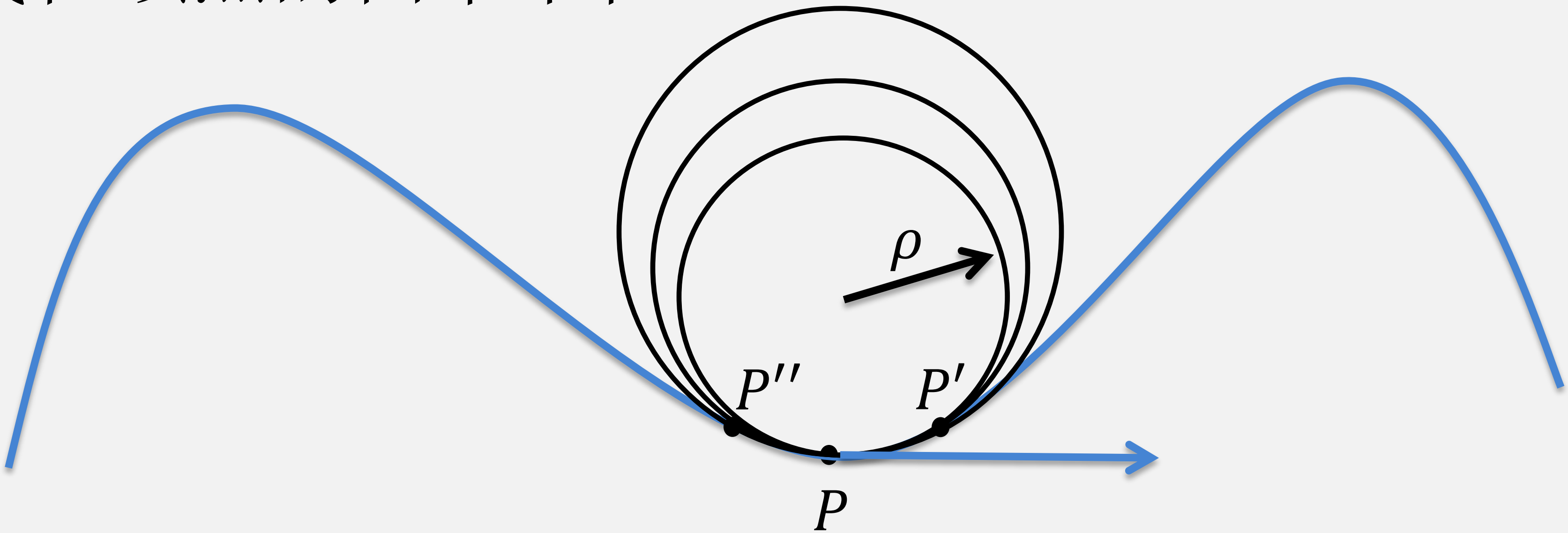
初识自然坐标系

切向分量：沿轨道切线指向指点运动方向
法向分量：沿轨道法向指向轨道凹的一侧



数学准备:密切圆(曲率圆)

这个圆与运动轨道在P点有共同的切线，被称作“密切圆”, P点密切圆的半径ρ，为曲线在该点的曲率半径。

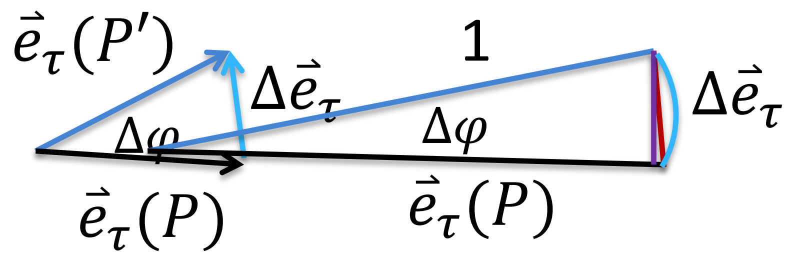


当$\Delta t \to 0$时， 有$\begin{cases} P' \to P \\ |\Delta\vec{r}| \to \Delta s \\ \Delta\varphi \to 0 \end{cases}$

$\rho = \overline{OP} = \overline{OQ}$为密切圆的半径，称为曲率半径

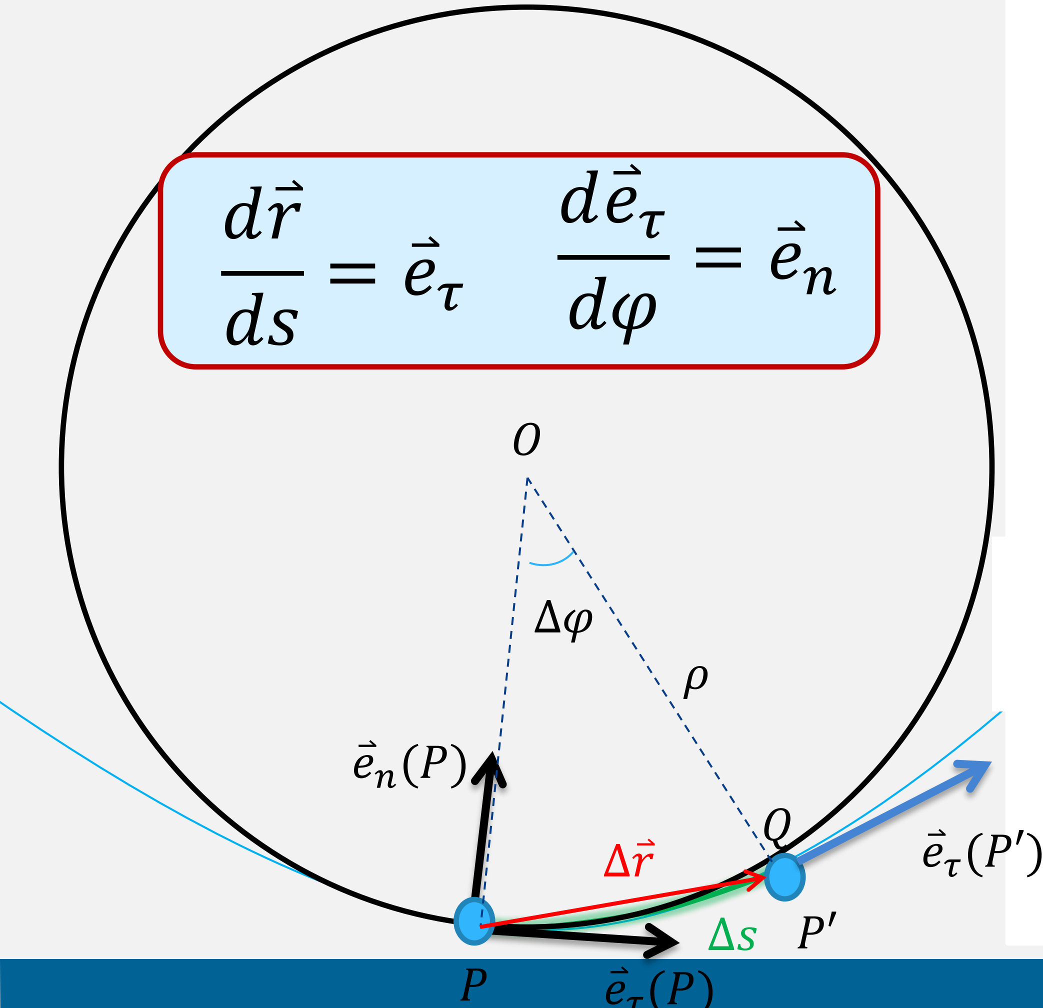
$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{e}_\tau$$

$$\lim_{\Delta\varphi \to 0} \Delta\vec{e}_\tau = \Delta\varphi \cdot \vec{e}_n(P)$$



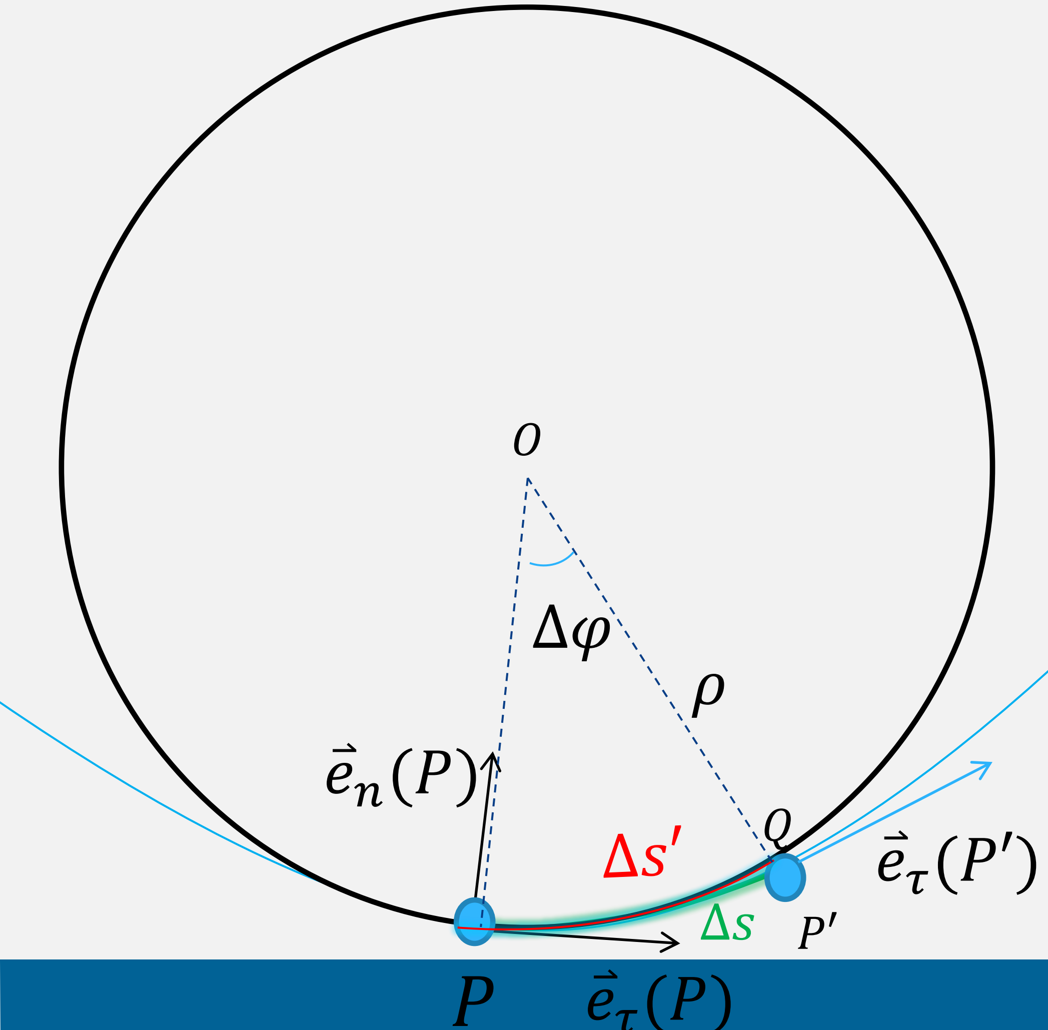
$$\frac{d\vec{e}_\tau}{d\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\vec{e}_\tau(P') - \vec{e}_\tau(P)}{\Delta\varphi}$$

$$= \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta\varphi \cdot \vec{e}_n(P)}{\Delta\varphi} = \vec{e}_n(P)$$



$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{e}_\tau \qquad \frac{d\vec{e}_\tau}{d\varphi} = \vec{e}_n}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{e}_\tau \qquad \frac{d\vec{e}_\tau}{d\varphi}=\vec{e}_n}$$



$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\Delta s=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\Delta s'$$

$$\boxed{\rho=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta\varphi}=\frac{ds}{d\varphi}}$$

我们关心的是质点的运动状态即 速度、速率、加速度。

那么在自然坐标系下，质点的速度、加速度的形式是怎么样的呢？

自然坐标系下的速度和加速度

由速度的定义，得

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$
$$= \vec{e}_\tau\cdot\frac{ds}{dt} = v\cdot\vec{e}_\tau$$

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{e}_\tau \quad \frac{d\vec{e}_\tau}{d\varphi} = \vec{e}_n \quad \frac{ds}{d\varphi} = \rho}$$

速度只有切向分量

由加速度的定义，得

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\cdot\vec{e}_\tau)$$
$$= \dot{v}\cdot\vec{e}_\tau + v\cdot\frac{d\vec{e}_\tau}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_\tau}{dt} = \frac{d\vec{e}_\tau}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \vec{e}_n\cdot$$

$$= \omega ?$$

定义

$$a_\tau = \dot{v}$$

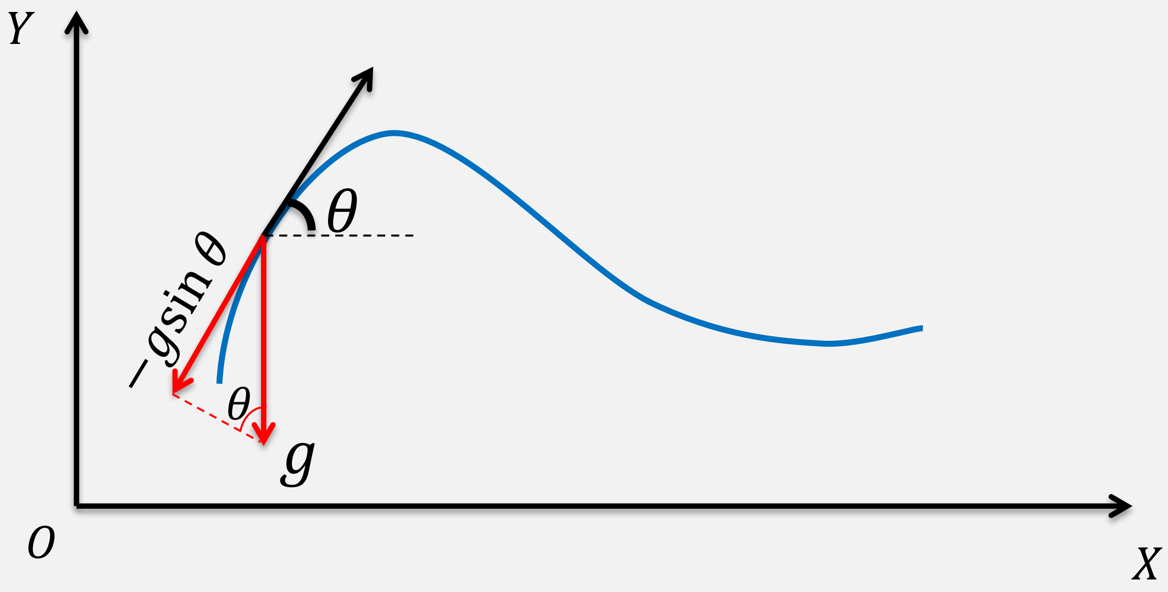
$$\vec{a} = a_\tau\vec{e}_\tau + v\cdot\frac{v}{\rho}\vec{e}_n$$
$$= a_\tau\vec{e}_\tau + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

切向加速度a_τ为速率随时间的变化率

法向加速度a_n为v^2/ρ改变速度方向的量

法向加速可以看作以速率v做半径为ρ的圆周运动所需要的向心加速度

例题：由光滑钢丝弯曲成竖直平面里一条曲线，质点穿在此钢丝上，可沿着它滑动（如下图所示）．已知其切向加速度为$-g\sin\theta$．θ是曲线切向与水平方向的夹角．试求质点在各处的速率．

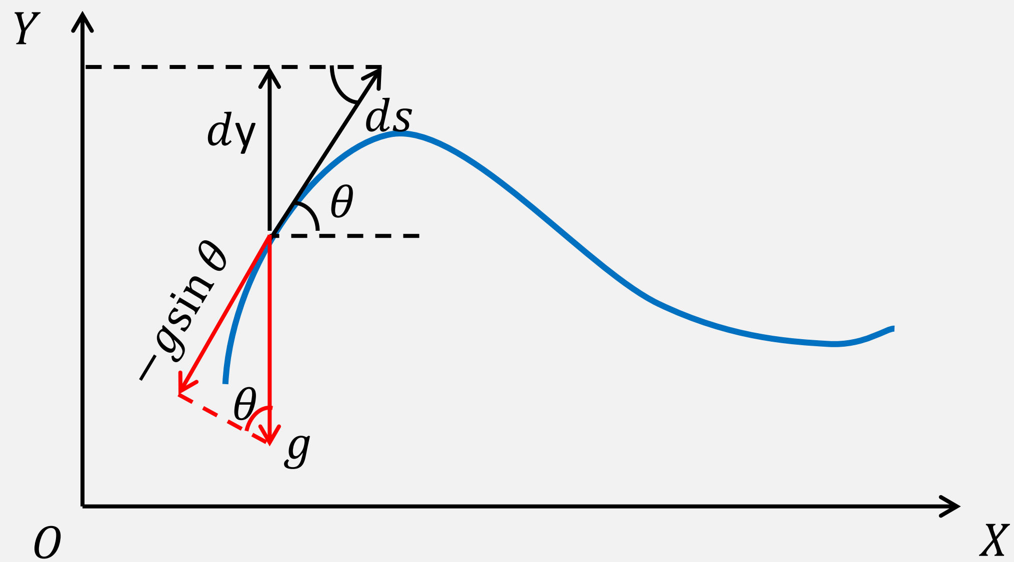


由右图几何关系，可以得到

$$\boxed{\frac{dy}{ds} = \sin\theta}$$

由切向加速度定义，可知

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -g\sin\theta$$



结合以上两式

$$\Rightarrow dv = -g\sin\theta dt = -g\frac{dy}{ds}dt$$

因为 $ds/dt = v$，所以有

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_0$$

$$dv = -\frac{g}{v}dy \Rightarrow vdv = -gdy$$

能量守恒定律！

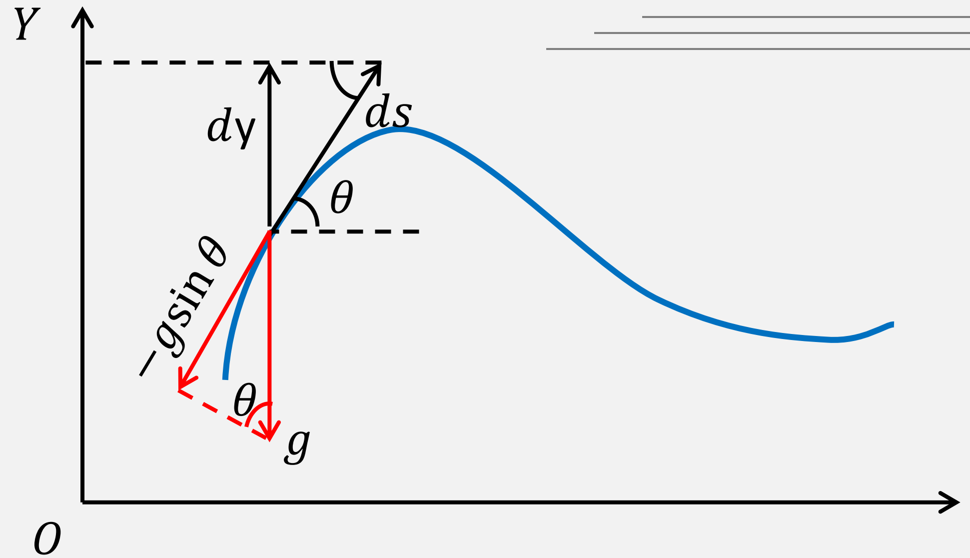
对等式两边积分，得到

$$\int_{v_0}^{v_1} vdv = -g\int_{y_0}^{y_1} dy \Rightarrow v_1^2 - v_0^2 = 2g(y_0 - y_1)$$

改写公式，得 $v^2 = v_0^2 + 2g(y_0 - y)$

由右图几何关系，可以得到

$$\boxed{\frac{dy}{ds} = \sin\theta}$$



由切向加速度定义，可知

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -g\sin\theta$$

结合以上两式

$$\Rightarrow dv = -g\sin\theta dt = -g$$

获得自然坐标ds与直角坐标dy之间的关系成为解题的关键；此外需要牢记自然坐标系下的速度、加速度公式。

因为 $ds/dt = v$ ，所以有

$$dv = -\frac{g}{v}dy \Rightarrow vdv = -g$$

对等式两边积分，得到

$$\int_{v_0}^{v_1} vdv = -g\int_{y_0}^{y_1} dy \Rightarrow v_1^2 - v_0^2 = 2g(y_0 - y_1)$$

改写公式，得 $$v^2 = v_0^2 + 2g(y_0 - y)$$

小结

- 切向：沿轨道切线指向指点运动方向
- 法向：沿轨道法向指向轨道凹的一侧

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{e}_\tau \qquad \frac{d\vec{e}_\tau}{d\varphi} = \vec{e}_n \qquad \frac{ds}{d\varphi} = \rho$$

- 速度只有切向分量
- 切向加速度$\boldsymbol{a_\tau}$为速率随时间的变化率
- 法向加速度为$\boldsymbol{v^2/\rho}$改变速度方向的量

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e}_\tau$$

$$\vec{a} = a_\tau \vec{e}_\tau + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n$$

THANKS

FOR YOUR ATTENTION