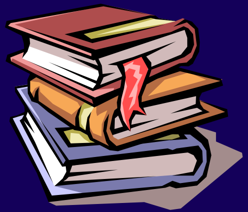
§4　线性方程组的解

一. 线性方程组的解(基本定理)

二. 矩阵方程有解的充要条件

三. 证明矩阵之积的秩的性质



返回 上页 下页 结束

一. 线性方程组的解(基本定理)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

即: $A\vec{x} = \vec{b}$

方程组(1)有解, 就称它是**相容的**,

方程组(1)无解, 就称它是**不相容的**.

定理3. n 元线性方程组 $A\vec{x} = \vec{b}$

① 无解 $\Longleftrightarrow R(A) < R(A,\vec{b})$

② 有唯一解 $\Longleftrightarrow R(A) = R(A,\vec{b}) = n$

③ 有无穷多解 $\Longleftrightarrow R(A) = R(A,\vec{b}) < n$

证: 只需证条件的充分性.

设 $R(A)=r$,无妨设增广矩阵 $B=(A,\vec{b})$的行最简形为

$$\widetilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{d_{r+1}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} \quad \longleftarrow \text{第}r\text{行}$$

① $R(A)<R(B)$, 则 $d_{r+1}=1$,$\widetilde{B}$ 中第 $r+1$ 行对应矛盾方程

$0=1$, **所以原方程组无解;**

② $R(A)=R(B)=n$, 则 $d_{r+1}=0$, 且 b_{ij} 都

不出现,故原方程组有唯一解:

$$x_1=d_1, x_2=d_2, \cdots, x_n=d_n$$

③ $R(A)=R(B)<n$, 则 $d_{r+1}=0$, $\widetilde{B}$ 对应方程组：

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - b_{12}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n-r}x_n + d_1 \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - b_{22}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r}x_n + d_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - b_{r2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r}x_n + d_r \end{cases}$$

令 $x_{r+1}=C_1,\cdots,x_n=C_{n-r}$,**则得原方程组的解:**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}C_1 - b_{12}C_2 - \cdots - b_{1,n-r}C_{n-r} + d_1 \\ -b_{21}C_1 - b_{22}C_2 - \cdots - b_{2,n-r}C_{n-r} + d_2 \\ \vdots \\ -b_{r1}C_1 - b_{r2}C_2 - \cdots - b_{r,n-r}C_{n-r} + d_r \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{n-r} \end{pmatrix}$$

$$= C_1\begin{pmatrix} -b_{11} \\ -b_{21} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -b_{12} \\ -b_{22} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + C_{n-r}\begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ -b_{2,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1, C_2, \cdots, C_{n-r} \in \mathrm{R} \qquad (2)$$

可见此时方程组有无穷多解. 证毕

说明: $R(A) = R(B) = r < n$ 时, (2)式包含了方程组 (1) 的任意一解, 称之为(1) 的**通解**.

二. 解线性方程组的步骤:

① 化增广矩阵B 为**行阶梯形**，看 $R(A)$,$R(B)$,
若$R(A)< R(B)$, 则方程组无解.

② 若 $R(A)=R(B) = r$，进一步化 B 为**行最简形**，
根据 r 写出唯一解或通解.

例1. 解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

解:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \underset{r_3 - r_1}{\overset{r_2 - 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2 \div (-3)}{\overset{r_3 - r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1 - 2r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_2 = -2x_3 - \frac{4}{3}x_4 \end{cases}$$

令 $x_3 = C_1, x_4 = C_2$，**得齐次方程通解:**

$$\begin{cases} x_1 = 2C_1 + \frac{5}{3}C_2 \\ x_2 = -2C_1 - \frac{4}{3}C_2 \\ x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2 \end{cases}$$

即

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (C_1, C_2 \in \mathrm{R})$$

例2. 求解 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$

解:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \div (-4)]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-7}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得:
$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{4}x_4 + \frac{5}{4} \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{4}x_4 - \frac{1}{4} \\ x_3 = \quad x_3 \\ x_4 = \qquad\quad x_4 \end{cases}$$

即得通解: $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{7}{4}\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\-\frac{1}{4}\\0\\0\end{pmatrix}$

$(C_1, C_2 \in \mathrm{R})$

例3. 求解 $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1\\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=2\\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4=3 \end{cases}$

解: $B=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\3&-1&5&-3&2\\2&1&2&-2&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&1\\0&5&-4&0&-1\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}$

$R(A)=2, R(B)=3,$ 故方程组无解.

例4. 给定

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$$

问 λ 取何值时, 此方程组 (1) 有唯一解; (2) 无解; (3) 有无限多解? 并在有无限多解时求其通解.

解法1.

$$B = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

避免如下类型初等变换:

$$r_i + \frac{1}{\lambda+1} r_j$$

$$(\lambda+1) r_j$$

$$r_i \div (\lambda+1)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-(1+\lambda)r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda(2+\lambda) & -\lambda(1+\lambda) \end{pmatrix}$$

返回 上页 下页 结束

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

(1) 当$\lambda \neq 0,\ \lambda \neq -3$ 时, $R(A)=R(B)=3$,方程组有唯一解;

(2) 当 $\lambda = 0$ 时, $B \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$,

$R(A)=1,\ R(B)=2$, 方程组无解;

(3) 当 $\lambda = -3$ 时, $B \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$R(A)=R(B)=2$, 方程组有无限多个解.

(求通解的过程见P76)

解法2. 根据方程组有唯一解 $\Longleftrightarrow$ 系数行列式 $\neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2+r_3} (3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(3+\lambda)$$

因此, 当 $\lambda \neq 0, \lambda \neq -3$ 时, 方程组有唯一解；

当 $\lambda = 0$ 时,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = 1, R(B) = 2$, 方程组无解;

当$\lambda=-3$时，$B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -2 & -3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$R(A)=R(B)=2$，方程组有无限多解，其通解为

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$$

说明:

1. 两种解法的比较

解法1的优点: 对任何线性方程组都可用.

缺点: 用含参数的表达式作初等变换时要对特殊情况进行讨论

解法2的优点: 简单, 避免了对含参矩阵作初等变换.

缺点: 只能用于系数矩阵为方阵的情形.

2. Cramer法则的局限性: 只适用于系数矩阵为方阵且其行列式不等于 0 的情形

线性方程组理论中两个最基本的定理

定理4. n 元齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 有非零解

$$\Longleftrightarrow \quad R(A)<n.$$

定理5. 线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解

$$\Longleftrightarrow \quad R(A)=R(A,\vec{b}).$$

二. 矩阵方程有解的充要条件

引入: 要同时解 l 个以 A 为系数矩阵的线性方程组:

$$A\vec{x}_i = \vec{b}_i \quad (i = 1,2,\cdots,l)$$

$$(A,\vec{b}_i) \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,n-r} & d_{1i} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,n-r} & d_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{r,n-r} & d_{ri} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1i} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} (i = 1,2,\cdots,l)$$

i 不同,仅最后一列不同

因此记 $X = (\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_l)$, $B = (\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_l)$, 问题转化为解矩阵方程: $AX=B$. 解法: 将(A,B) 化为行阶梯形

线性方程组基本定理及其推广

基 本 定 理	推 广 到 矩 阵 方 程
定理5. 线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解 $\Longleftrightarrow R(A)=R(A,\vec{b})$	**定理6.** 矩阵方程 $AX=B$ 有解 $\Longleftrightarrow R(A)=R(A,B)$
定理7. n 元齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 有非零解 $\Longleftrightarrow R(A)<n$	**定理8.** 矩阵方程 $A_{m\times n}X_{n\times l}=O$ 只有零解 $\Longleftrightarrow R(A)=n$

定理3. n 元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$

① 无解 $\Longleftrightarrow R(A)<R(A,\vec{b})$

② 有唯一解 $\Longleftrightarrow R(A)=R(A,\vec{b})=n$

③ 有无穷多解 $\Longleftrightarrow R(A)=R(A,\vec{b})<n$

例5. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & t \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, B为非零3阶矩阵, 且 $AB=O$, 则 $t=$ __**3**__.

分析：因 $AB=O$, B为非零3阶矩阵, 故矩阵方程 $AX=O$ 有非零解B, 所以 $R(A)<3$.

$$A \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad t=3$$

返回 上页 下页 结束

三. 证明矩阵之积的秩的性质

定理8. 若 $AB=C$, 则 $R(C)\le \min\{R(A),R(B)\}$.

证: 由 $AB=C$ 知, 矩阵方程 $AX=C$ 有解B

于是根据定理6

$$R(A)=R(A,C)$$

而 $R(C)\le R(A,C)$, 所以 $R(C)\le R(A)$;

又 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}$, 由前述结果得 $R(C^{\mathrm{T}})\le R(B^{\mathrm{T}})$, 即

$$R(C)\le R(B)$$

综上所述, 得

$$R(C)\le \min\{R(A),R(B)\}$$

小结

一. 本章主要内容：

1. 矩阵的初等变换及初等矩阵. 概念: P57-63

性质: $\begin{cases} \text{1. 初等矩阵}P\text{ 可逆}, P^{-1}\text{为与}P\text{ 同类的初等矩阵} \\ \text{2. }PA\text{ — 对}A\text{作行变换}, AP\text{ — 对}A\text{ 作列变换} \end{cases}$

应用: (重点)

(1) 解线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}:(A,\vec{b})\overset{r}{\sim}$ 行最简形

(2) 解矩阵方程 $AX=B:(A,B)\overset{r}{\sim}$ 行最简形

解 $YA=B$: 转化为解 $A^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}$

(3) 求方阵的逆: $(A,E)\overset{r}{\sim}(E,A^{-1})$

(4) 求矩阵的秩.

初等矩阵主要用于理论证明, 注意利用:

A可逆 $\Longleftrightarrow A=P_1P_2\cdots P_s$ (初等矩阵之积)

2. 矩阵的秩. 概念(P66), 性质

矩阵 A 的秩 = A 的最高阶非零子式的阶数

= A 的行阶梯形的非零行数

= A 的标准形 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 中的 r

3. 线性方程组的基本定理 (P71 定理3)

矩阵方程的基本定理

#16

二. 矩阵求逆的方法

1. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ 适用于2阶矩阵. 公式的理论意义大.

2. $(A, E) \overset{r}{\sim} (E, A^{-1})$

3. 利用 “$AB=E$ (或 $BA=E$) $\Rightarrow$ A可逆, 且$A^{-1}=B$ ”

作业

P79　　15；16；17；18