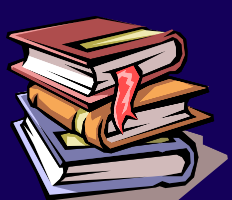
§4 实对称矩阵的对角化

一. 实对称矩阵的特征值与特征向量的特性

二. 实对称矩阵对角化的方法之一



一. 实对称矩阵的特征值与特征向量的特性

定理5. A为实对称矩阵 $\Longrightarrow$ A 的特征值为实数

证: 设 λ 为A 的特征值, $\vec{x}$为对应特征向量, 则有

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (\vec{x} \neq \vec{0}) \qquad ①$$

两边取共轭: $$A\overline{\vec{x}} = \overline{\lambda}\,\overline{\vec{x}} \qquad ②$$

$$\overline{\vec{x}}^{\mathrm{T}}(A\vec{x}) = (\overline{\vec{x}}^{\mathrm{T}}A)\vec{x} = (A\overline{\vec{x}})^{\mathrm{T}}\vec{x} \overset{②}{=\!=} \overline{\lambda}\,\overline{\vec{x}}^{\mathrm{T}}\vec{x} \qquad ③$$

由① $$\overline{\vec{x}}^{\mathrm{T}}(A\vec{x}) = \overline{\vec{x}}^{\mathrm{T}}(\lambda\vec{x}) = \lambda(\overline{\vec{x}}^{\mathrm{T}}\vec{x}) \qquad ④$$

③$-$④ $$(\overline{\lambda} - \lambda)(\overline{\vec{x}}^{\mathrm{T}}\vec{x}) = 0$$

而 $$\overline{\vec{x}}^{\mathrm{T}}\vec{x} = \sum_{i=1}^{n}\overline{x_i}\,x_i = \sum_{i=1}^{n}|\,x_i\,|^2 \overset{①}{\neq} 0$$

$$\therefore \quad \overline{\lambda} = \lambda$$

注: 实特征值对应的特征向量可取实向量.

返回 上页 下页 结束

定理6. A为**实对称矩阵**

$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ 均为} A \text{ 的特征值} \\ \vec{p}_1, \vec{p}_2 \text{ 为对应特征向量} \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{p}_1, \vec{p}_2$ **正交**

证: 已知 $A\vec{p}_1 = \lambda_1 \vec{p}_1, \quad \vec{p}_1 \neq \vec{0}$ $\quad \lambda_1 \neq \lambda_2,$

$A\vec{p}_2 = \lambda_2 \vec{p}_2, \quad \vec{p}_2 \neq \vec{0}$

因此 $\lambda_1 \vec{p}_1^T \vec{p}_2 = (A\vec{p}_1)^T \vec{p}_2 = (\vec{p}_1^T A^T)\vec{p}_2 = \vec{p}_1^T (A\vec{p}_2)$

$$= \lambda_2 \vec{p}_1^T \vec{p}_2$$

因 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\therefore \vec{p}_1^T \vec{p}_2 = 0$, 即 $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ 正交.

定理7. A为**实对称矩阵** $\Longrightarrow$ 必有**正交阵** P, 使

$$P^{-1}AP = P^T AP = \Lambda$$

其中对角阵 Λ 的对角元为A 的特征值. P128

(证明略)

推论. λ 为 n 阶**实对称矩阵** A 的 k 重特征值

$$\Longrightarrow \begin{cases} R(A-\lambda E)=n-k \\ \text{对应于}\lambda\text{, 恰有 } k \text{ 个线性无关的特征向量} \end{cases}$$

证: A为实对称矩阵, 据定理7, 必有**正交阵** P, 使

$$P^{-1}AP=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

因此 $$P^{-1}(A-\lambda E)P=P^{-1}AP-\lambda E=\Lambda-\lambda E$$

$$=\mathrm{diag}(\lambda_1-\lambda,\cdots,\lambda_n-\lambda)$$

因 λ 为A 的 k 重特征值, $\therefore \Lambda-\lambda E$ 的对角元中有且仅有 k 个零元, 因此

$$R(\Lambda-\lambda E)=n-k$$

$$R(A-\lambda E)=R(\Lambda-\lambda E)=n-k$$

从而齐次方程组 $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ 恰有k 个线性无关解 .

二. 实对称矩阵对角化的方法之一 复习

第一步. 由特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 求出 A 的所有特征值

第二步. 求 $\lambda=\lambda_k$ 对应的正交规范特征向量系

即 (1) 求 $|A-\lambda_k E|=0$ 的基础解系

(2) 用施米特正交化法将其正交规范化

第三步. 以 n 个正交规范特征向量为列构成矩阵 P, 则得

$$P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \quad (P\text{为正交阵!})$$

注意: λ_i 的特征向量放在 P 的第 i 列.

说明: 若不做(2), 上述过程仍能将 A 对角化($P^{-1}AP=\Lambda$)

只是不能保证 $P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP$

例1. 设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, 求一个正交阵 P, 使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵.

解: $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&1\\-1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{r_1-r_2}\begin{vmatrix}1-\lambda&\lambda-1&0\\-1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_2+c_1}\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\-1&-\lambda-1&1\\1&2&-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(\lambda+2)$$

得 A 的特征值: $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=\lambda_3=1.$

对 $\lambda_1=-2$, 解 $(A+2E)\vec{x}=\vec{0}$

$$A+2E=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系: $\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单位化, 得 $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

对 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 解 $(A - E)\vec{x} = \vec{0}$

$$A - E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系: $\vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

将其正交化: $\vec{\eta}_2 = \vec{\xi}_2, \|\vec{\eta}_2\|^2 = 2$

$$\vec{\eta}_3 = \vec{\xi}_3 - \frac{[\vec{\xi}_3, \vec{\eta}_2]}{\|\vec{\eta}_2\|^2}\vec{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{\eta}_3\|^2 = \frac{3}{2}$$

将 $\vec{\eta}_2,\vec{\eta}_3$ 单位化

$$\vec{p}_2=\frac{\vec{\eta}_2}{\|\vec{\eta}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{p}_3=\frac{\vec{\eta}_3}{\|\vec{\eta}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

令 $P=(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

则有 $P^{-1}AP=P^{T}AP=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$

说明: 若取 $P=(\vec{p}_2,\vec{p}_1,\vec{p}_3)$, 则 $P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & -2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$

例2. 设 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, 求 A^n.

A 对称 $\Longrightarrow$ A 可对角化:

$$P^{-1}AP=\Lambda$$

$$\Longrightarrow A^n=P\Lambda^n P^{-1}$$

解: 第一步. 将A 对角化.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

得A 的特征值: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=3.$

对 $\lambda_1=1$, 解$(A-E)\vec{x}=\vec{0}$, 由

$$A-E=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \text{得 } \vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

对 $\lambda_2=3$, 解$(A-3E)\vec{x}=\vec{0}$, 由

$$A-3E=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \text{得 } \vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

令 $P=(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

则 $P^{-1}=\dfrac{1}{|P|}P^*=\dfrac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1 & \\ & 3\end{pmatrix}$$

所以 $A=P\Lambda P^{-1}$

第二步. 求 A^n.

$$A^n=P\Lambda^n P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & 3^n\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n & 1-3^n\\ 1-3^n & 1+3^n\end{pmatrix}$$

问: 能否避免求 P^{-1}? 如何避免?

例2. 设 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, 求 A^n.

A 对称 $\Longrightarrow$ A 可对角化:

$P^{\mathrm{T}}AP=\Lambda$ (P为正交阵)

$\Longrightarrow A^n=P\Lambda^n P^{\mathrm{T}}$

解法2: 第一步. 将A 对角化.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

得A 的特征值: $\lambda_1=1, \lambda_2=3.$

对 $\lambda_1=1$, 解 $(A-E)\vec{x}=\vec{0}$, 由

$$A-E=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \text{得 } \vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}, \vec{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

对 $\lambda_2=3$, 解 $(A-3E)\vec{x}=\vec{0}$, 由

$$A-3E=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \text{得 } \vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}, \vec{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

令 $P=(\vec{p}_1,\vec{p}_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$\lambda_1=1,\ \lambda_2=3$

$\vec{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

$\vec{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

则P为正交矩阵,

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1 & \\ & 3\end{pmatrix}$$

所以 $A=P\Lambda P^{-1}=P\Lambda P^{\mathrm{T}}$

第二步 求 A^n.

$$A^n=P\Lambda^n P^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & 3^n\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n & 1-3^n\\ 1-3^n & 1+3^n\end{pmatrix}$$

小结

1. 实对称矩阵的特点

- 特征值均为实数
- 不同的特征值对应特征向量**正交**
- 必有**正交阵** P, 使 $P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda$

即
$$\begin{pmatrix} \vec{p}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \vec{p}_1^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} A\,(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

λ_i 为A 的特征值, $\vec{p}_i$ 为对应特征向量

2. 实对称矩阵对角化的方法之一：正交相似变换法

作业

P.136　22，23，25