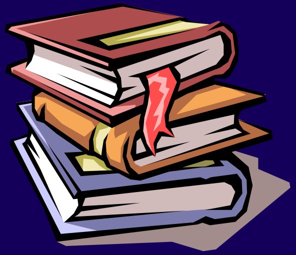
§3 相似矩阵

一.相似矩阵的概念与性质

二. 方阵 A 可对角化的条件



一. 相似矩阵的概念与性质

1. **定义7.** 设A, B为 n 阶方阵, 若存在可逆矩阵P, 使

$$P^{-1}AP = B$$

则称 A 与B **相似**, B 是A 的**相似矩阵**,

运算$P^{-1}AP$ 称为对 A 进行**相似变换**,

P 称为将A 变到B 的**相似变换矩阵**.

2. **定理3.** n 阶方阵A 与B 相似 $\Longrightarrow$ A, B 有相同的特征多项式 , 从而有相同的特征值 .

证: 因A 与B 相似, 所以存在可逆矩阵P , 使

$$P^{-1}AP = B$$

故 $$|B-\lambda E| = |P^{-1}AP-\lambda E| = |P^{-1}(A-\lambda E)P|$$

$$= |P^{-1}||A-\lambda E||P| = |A-\lambda E|$$

证毕

推论1. A 与 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似 $\Longrightarrow$ **A的特征值为** $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

推论2. $A = P\Lambda P^{-1}$(Λ同上), $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$

$\Longrightarrow$ $\varphi(A)$ **的特征值为** $\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2), \cdots, \varphi(\lambda_n)$.

证: 由P45-46 知 $\varphi(A) = P\varphi(\Lambda)P^{-1}$, **其中**

$$\varphi(\Lambda) = \begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

据推论1 $\varphi(A)$ **的特征值为** $\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2), \cdots, \varphi(\lambda_n)$.

3. $f(\lambda)$ 为A 的特征多项式 $\Longrightarrow f(A)=O$

证: 仅就 A 相似于对角阵的情形证明于下.

设 $P^{-1}AP=\text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) \overset{\text{记}}{=\!=} \Lambda$

则 $f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1}$

$$=P\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}P^{-1}$$

λ_i 为A 的特征值, $\therefore f(\lambda_i)=0$

$=POP^{-1}$

$=O$

二. 方阵 A 可对角化的充要条件

A 与对角阵相似, 则称 A 可对角化

分析: 设A可对角化, 即 $P^{-1}AP=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,

$$P=(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_n)$$

则有$AP=P\Lambda$, 即

$$A(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_n)=(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N\end{pmatrix}$$

$$=(\lambda_1\vec{p}_1,\lambda_2\vec{p}_2,\cdots,\lambda_n\vec{p}_n)$$

从而有 $A\vec{p}_i=\lambda_i\vec{p}_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$

因P 可逆, $\therefore \vec{p}_i\neq\vec{0}$, 故$\lambda_i$为$A$的特征值, $\vec{p}_i$为对应的特征向量, 而且因$R(P)=n$, $\therefore \vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_n$ 线性无关.

反之, 若A有n个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 对应的特征向量依次为 $\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_n$, 则有

$$(A\vec{p}_1,A\vec{p}_2,\cdots,A\vec{p}_n)=(\lambda_1\vec{p}_1,\lambda_2\vec{p}_2,\cdots,\lambda_n\vec{p}_n)$$

即

$$A\underbrace{(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_n)}_{\text{记作 }P}=\underbrace{(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{\text{记作 }\Lambda}$$

若 $\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_n$ 线性无关, 则 P 可逆, 从而

$$P^{-1}AP=\Lambda$$

综上所述, 得

定理4. n 阶方阵 A 可对角化 $\Longleftrightarrow$ A 有n 个线性无关的特征向量.

根据P123定理2, 得

推论. n 阶方阵 A 有 n 个**不相等的特征值** $\Longrightarrow$ A 可对角化

说明: 上述分析过程给出了将 A 对角化的方法

$$P^{-1}AP = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

即 $$A\underbrace{(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_n)}_{P} = \underbrace{(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

A 的 特征向量

A 的特征值

第一步. 求 A 的特征值和对应的特征向量

$$\lambda_1,\cdots,\lambda_n;\ \vec{p}_1,\cdots,\vec{p}_n$$

第二步. 令 $P=(\vec{p}_1,\cdots,\vec{p}_n)$, 则

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

例如, P142 例7:

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}}$$

特征值: $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=2$

特征向量: $\vec{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \vec{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\ \vec{p}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$ 线性无关

令 $P=(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)$, 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$.

问: P 是否唯一？ 若令 $P=(\vec{p}_2,\vec{p}_1,\vec{p}_3)$, $P^{-1}AP=?$

注意: A 有重特征值时, 其线性无关特征向量个数可能少于n, 例如, P122 例6, 此时A 不能对角化.

例1. 已知 $A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=3, \lambda_3=12$, 求 x 值, 并问 A 是否可对角化?

解: 根据特征值与矩阵迹的关系得

$$7+7+x=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=18$$

$$\therefore \quad x=4$$

对 $\lambda_1=\lambda_2=3$, 特征方程为 $(A-3E)\vec{x}=\vec{0}$

$$A-3E=\begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_3+r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore R(A-3E)=1$, $(A-3E)\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系含 2 个线性无关向量，因此 A 有3 个线性无关特征向量，故 A **可对角化.**

例2. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ 与对角阵 $\begin{pmatrix}5 & & \\ & y & \\ & & -4\end{pmatrix}$ 相似,求 x, y .

解: 由题设知, A 的特征值为 $\lambda_1=5, \lambda_2=y, \lambda_3=-4$

因此有: $\begin{cases}5+y-4=\mathrm{tr}(A)=1+x+1\\ 5\cdot y\cdot(-4)=|A|=-15x-40\end{cases}$

即 $\begin{cases}y=x+1\\ 20y=15x+40\end{cases}$

$\therefore \quad x=4, y=5$

(*) $|A-\lambda_1 E| \equiv 0$ (与x无关)

$|A-\lambda_2 E|=0$ 含 x, y

说明: 也可从特征方程

$$|A-\lambda E|=(1-\lambda)^2(x-\lambda)-16(x-\lambda)-8(1-\lambda)-32=0$$

利用 $\lambda_3=-4$ (*) 得 $x=4$, 再利用迹求 y.

小结

▲ 概念 $P^{-1}AP = B$

A 与 B 相似，B 是 A 的相似矩阵

P : 相似变换矩阵　　$P^{-1}AP$: 相似变换

- A 与 B 相似 $\Rightarrow A, B$ 有相同的特征多项式，从而有相同的特征向量

▲ A 可对角化 —— A 与对角阵相似

- n 阶方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量

$\Uparrow$

A 有 n 个不同特征值

A 的特征值

$$A\underbrace{(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \cdots, \vec{p}_n)}_{P} = \underbrace{(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \cdots, \vec{p}_n)}_{P} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

A 的 特征向量

作业

P135.
14，15， 16，17，19，20