第四节　相互独立的随机变量

一、随机变量的相互独立性

二、二维随机变量的推广

三、小结

一、随机变量的相互独立性

1.定义

设$F(x,y)$及$F_X(x),F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数.若对于所有x,y有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},$$

即

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量X和Y是相互独立的.

2.说明

(1) 若离散型随机变量 (X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立

$$\Leftrightarrow P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

即 $p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}.$

(2) 设连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$，边缘概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$，则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$.

(3) X 和 Y 相互独立，则

$f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立.

例1 已知 (X,Y) 的分布律为

(X,Y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
p_{ij}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	α	β

(1) 求 α 与 β 应满足的条件;

(2) 若 X 与 Y 相互独立,求 α 与 β 的值.

解 将 (X,Y) 的分布律改写为

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\bullet} = P\{X = x_i\}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3}+\alpha+\beta$
$p_{\bullet j} = P\{Y = y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\alpha$	$\frac{1}{18}+\beta$	$\frac{2}{3}+\alpha+\beta$

(1)由分布律的性质知 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \dfrac{2}{3}+\alpha+\beta=1,$

故α与β应满足的条件是：$\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 且 $\alpha+\beta=\dfrac{1}{3}.$

(2) 因为 X 与 Y 相互独立, 所以有

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}, \quad (i = 1,2;\ j = 1,2,3)$$

特别有

$$p_{12} = p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 2} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} + \alpha\right) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{9},$$

又 $\alpha + \beta = \frac{1}{3}$, 得 $\beta = \frac{1}{9}$.

例2 设随机变量 X 和 Y 相互独立,并且 X 服从 $N(a,\sigma^2)$,Y 在 $[-b,b]$ 上服从均匀分布,求 (X,Y) 的联合概率密度.

解 由于 X 与 Y 相互独立,

所以 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

又 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty<x<\infty$;

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2b}, & -b\le y\le b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

得 $$f(x,y)=\frac{1}{2b}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

其中 $-\infty<x<\infty,\quad -b\le y\le b.$

当 $|y|>b$ 时, $f(x,y)=0.$

例3 设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 (X, Y) 的分布律.

解 因为 X 与 Y 相互独立，所以

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\}.$$

$$P\{X = 1, Y = 2\} = P\{X = 1\} P\{Y = 2\} = 0.3 \times 0.6 = 0.18,$$

$$P\{X = 1, Y = 4\} = P\{X = 1\} P\{Y = 4\} = 0.3 \times 0.4 = 0.12,$$

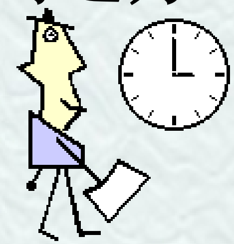
$$P\{X=3,Y=2\}=P\{X=3\}P\{Y=2\}=0.7\times0.6=0.42,$$

$$P\{X=3,Y=4\}=P\{X=3\}P\{Y=4\}=0.7\times0.4=0.28.$$

因此 (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

例4 一负责人到达办公室的时间均匀分布在8~12时,他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7~9时,设他们两人到达的时间相互独立, 求他们到达办公室的时间相差不超过 5 分钟的概率.



解 设 X 和 Y 分别是负责人和他的秘书到达办公室的时间, 由假设 X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1/4, & 8<x<12, \\ 0, & \text{其它},\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}1/2, & 7<x<9, \\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

由于 X,Y 相互独立, 得 (X,Y) 的概率密度为

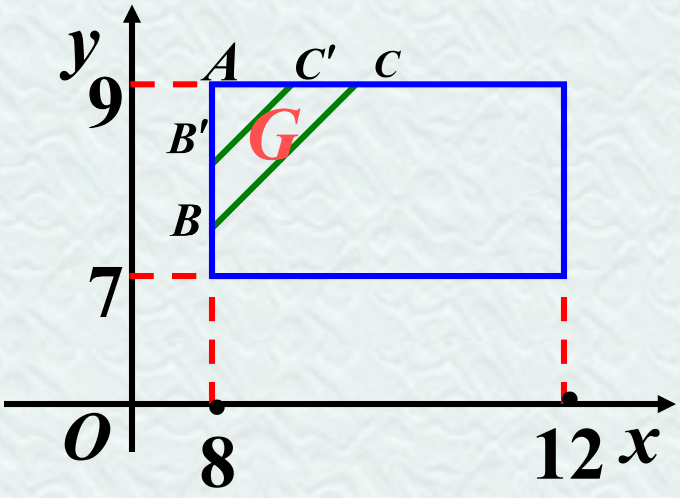
$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$=\begin{cases}1/8, & 8<x<12,7<y<9,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$P\{|X-Y|\le 1/12\}$$

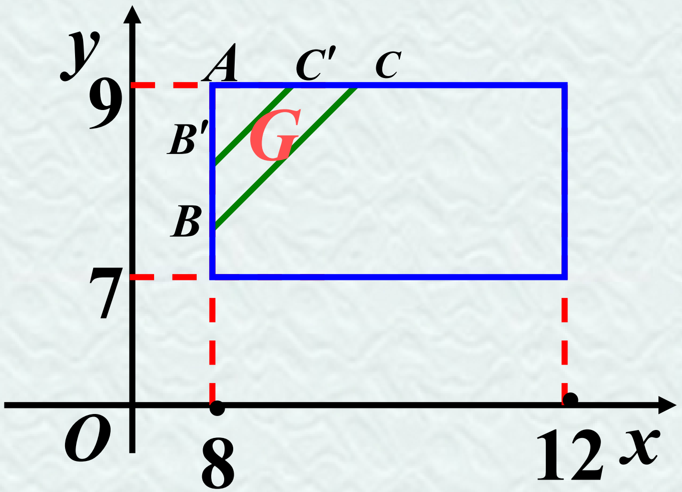
$$=\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{8}\times(G\text{的面积}).$$



而 G的面积 $=\Delta ABC$的面积 $-\Delta AB'C'$的面积

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{12}\right)^2=\frac{1}{6}.$$



于是 $P\{|X-Y|\le 1/12\}$

$$=\frac{1}{8}\times(G\text{ 的面积})=\frac{1}{48}.$$

因此负责人和他的秘书到达办公室的时间相差不超过5分钟的概率为$\dfrac{1}{48}$.

二、二维随机变量的推广

1.分布函数

n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\},$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为任意实数.

2.概率密度函数

若存在非负函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 使对于任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$= \int_{-\infty}^{x_n} \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mathrm{d} x_1 \mathrm{d} x_2 \cdots \mathrm{d} x_n,$$

则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度函数.

3.边缘分布函数

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \infty, \cdots, \infty)$$

称为 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于 X_1 的**边缘分布函数**.

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \infty, \infty, \cdots, \infty)$$

称为n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$关于(X_1, X_2)的**边缘分布函数**.

其它依次类推.

4.边缘概率密度函数

若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度，则 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 关于 X_1，关于 (X_1,X_2) 的边缘概率密度分别为

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n,$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4\cdots\mathrm{d}x_n.$$

同理可得 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的 $k(1\le k<n)$ 维边缘概率密度.

5. 相互独立性

若对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的.

若对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

$$= F_1(x_1, x_2, \cdots, x_m) F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

其中F_1, F_2, F依次为随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$,$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$和$(X_1, X_2, \cdots, X_m, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$的分布函数,则称随机变量$(X_1, \cdots, X_m)$与$(Y_1, \cdots, Y_n)$相互独立.

6.重要结论

定理 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 和 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 相互独立,则$X_i(1,2,\cdots,m)$和$Y_j(j=1,2,\cdots,n)$相互独立.又若 h,g是连续函数,则 $h(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 和 $g(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 相互独立.

三、小结

1. 若离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}.$$

2. 设连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$，边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$，则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$

3. X 和 Y 相互独立，则 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立.