高等数学
单元自测(二)

一、填空（每小题4分，共16分）

1. 已知$y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\,(a>0)$，则

$$\frac{dy}{dx}=\underline{a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}\ln a\cdot ax^{a-1}+a^{a^x}\ln a\cdot a^x\ln a}$$

2.若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}\right]$，则 $df(t)=$ $\underline{e^{2t}(1+2t)dt}$

析： $\because$ $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}\right]$

$$=te^{2t}$$

即易得答案。

3.设 $\begin{cases} x = f(t) - \pi \\ y = e^{3t} - 1 \end{cases}$，其中 f 二阶可导且 $f'(t) \neq 0$，

则 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = $ $\underline{\dfrac{9e^{3t}f'(t) - 3e^{3t}f''(t)}{f'^3(t)}}$

析：x、y同时对t求导后可得：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3e^{3t}}{f'(t)}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3e^{3t}}{f'(x)}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{9e^{3t}f'(t) - 3e^{3t}f''(t)}{f'^3(t)}$$

再对上式求导易得答案。

4.已知曲线 $y=ax^2$ 与曲线 $y=\ln x$ 则$a=$ $\underline{\dfrac{1}{2e}}$ ，且公切线方程为 $\underline{y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\left(x-\sqrt{e}\right)}$ 。

析： 由题可得式子：

$$\frac{1}{x_0}=2ax_0 \qquad y_0=ax_0{}^2 \qquad y_0=\ln x_0$$

联立解得：

$$x_0=\sqrt{e} \qquad y_0=\frac{1}{2} \qquad k=\frac{1}{x_0}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

即易得公切线方程。

二、选择题（每小题4分，共16分）

1.设 $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ，则 $y'(1)=$ （D）

（A）2　　（B）e

（C）$\frac{1}{2}\ln 2$　　（D）$1-\ln 4$

2.若函数 $y=f(x)$ 满足 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则当 $\Delta x \to 0$ 时，$dy|_{x=x_0}$ 是（C）。

（A） 与 Δx 等价的无穷小；

（B） 比 Δx 低阶的无穷小；

（C） 与 Δx 同阶的无穷小；

（D） 比 Δx 高阶的无穷小。

3.设 $f(x)=3x^2+x^2|x|$ ，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数n为（C）

（A）0；（B）1；（C）2；（D）3。

析：由题，有：

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+x^3 & x\geq 0\\ 3x^2-x^3 & x<0\end{cases}$$

由上式易得结果。

4. 设a是实数，函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^a}\cos\dfrac{1}{x-1} & x>1 \\ 0 & x\le 1 \end{cases}$

则 $f(x)$ 在x=1处可导时，必有（A）。

（A）$a<-1$； （B）$-1\le a\le 1$；

（C） $0\le a<1$； （D）$a\ge 1$。

三、解下列各题（每小题7分，共42分）

1. 设 $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$ ，求 y' 。

解：应用求导公式解得：

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{x}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{a^2}{2}\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2}$$

$$=\frac{2x^2+a^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\sqrt{x^2+a^2}$$

2 .设 $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{(1+x)^2\sqrt[3]{2x-5}}$，求 dy。

解：

$$\ln y=\frac{1}{3}\ln(x-1)-2\ln(1+x)-\frac{1}{3}\ln(2x-5)$$

$$y'=y\left[\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{1+x}-\frac{2}{3(2x-5)}\right]$$

$$dy=y\left[\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{1+x}-\frac{2}{3(2x-5)}\right]dx$$

3 .设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} xe^t + t\cos x = \pi \\ y = \sin t + \cos^2 t \end{cases}$ 所确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ 。

解：当 $x=0$ 时： $t=\pi$

题中两式对 t 求导，可得：

$$x'e^t + xe^t + \cos x - t\sin x \cdot x' = 0 \Rightarrow \left.x'\right|_{t=\pi} = -\frac{1}{e^\pi}$$

$$y' = \cos t - 2\sin t\cos t \Rightarrow \left.y'\right|_{t=\pi} = -1$$

$$\therefore \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{dy/dt}{dx/dt}\right|_{t=\pi} = \frac{-1}{-1/e^\pi} = e^\pi$$

4 .设 $y=y(x)$ 由 $\sin xy+3x-y=1$ 所确定，求 $y''(0)$。

解：当 $x=0$ 时：$y=-1$

题中式子对x求导，可得：

$\cos xy\cdot(y+xy')+3-y'=0$ $\qquad$ $y'\big|_{x=0}=2$

上式再次对x求导：

$$-\sin xy\cdot(y+xy')^2+\cos xy\cdot(2y'+xy'')-y''=0$$

代值并解得： $y''\big|_{x=0}=4$

5 .设 $f(x)=x^2+(x-1)\arctan\dfrac{2x-1}{x^3+x^2-1}$ ，求 $f'(1)$。

解：$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+(x-1)\arctan\dfrac{2x-1}{x^3+x^2-1}-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[(x+1)+\arctan\frac{2x-1}{x^3+x^2-1}\right]$$

$$=2+\arctan 1$$

$$=2+\frac{\pi}{4}$$

6 .设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$ ，求 $f^{(n)}(x)$。

解：$\because\quad f(x)=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}$

$$\therefore\quad f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x+2)^{n+1}}-\frac{1}{(x+3)^{n+1}}\right]$$

四、（8分）过点（2，0），求与曲线 $y=2x-x^3$ 相切的直线方程。

解：设切点 (x_0, y_0) 则 $y_0 = 2x_0 - x_0^{\ 3}$ ①

又 $y' = 2-3x^2 \Rightarrow k = y'\big|_{x=x_0} = 2-3x_0^{\ 2}$

即得切线 $y - y_0 = \left(2-3x_0^{\ 2}\right)\cdot(x-x_0)$ ②

$\because$（2，0）在切线上

$\therefore -y_0 = \left(2-3x_0^{\ 2}\right)\cdot(2-x_0)$ ③

联立①③，解得：$x_0=1\quad y_0=1$

$$x_0=1+\sqrt{3}\quad y_0=-8-4\sqrt{3}$$

$$x_0=1-\sqrt{3}\quad y_0=-8+4\sqrt{3}$$

当 $x_0=1$ $\therefore$代值入②得： $x+y-2=0$

$y_0=1$

其它类同。

五、（10分）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$ 确定常数a,b，使 $f(x)$ 处处可导。

解： $$f(x)=\begin{cases} x^2 & x>1 \\ \dfrac{a+b+1}{2} & x=1 \\ ax+b & x<1 \end{cases},$$

由 $f(1^+)=f(1^-)=f(1)$ $\Rightarrow$ $a+b=1$

由 $f'_+(1)=f'_-(1)$ $\Rightarrow$ $a=2$

$$\therefore \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

六、（8分）设对任意x和y，函数$f(x)$和 $g(x)$满足

1. $f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$

2. $f(x)$和$g(x)$在点$x=0$处都可导，且$f(0)=0$，

$g(0)=1$，$f'(0)=1$，$g'(0)=0$，

证明：对任意$x\in(-\infty,+\infty)$ $f(x)$可微且 $f'(x)=g(x)$。

证：$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)g(\Delta x)+g(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)g(\Delta x) + g(x)f(\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)[g(\Delta x) - 1] + g(x)[f(\Delta x) - f(0)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)[g(\Delta x) - g(0)] + g(x)[f(\Delta x) - f(0)]}{\Delta x}$$

$$= f(x)g'(0) + g(x)f'(0) = g(x)$$

证毕。