组合分析

第8 章 组合分析初步

- 8.1 加法法则与乘法法则
- 8.2 基本排列组合的计数方法
- 8.3 递推方程的求解与应用

8.1 加法法则和乘法法则

- 加法法则与乘法法则
- 应用实例

加法法则

事件 A有 m 种产生方式，事件 B 有 n 种产生方式，则 “事件 A 或 B”有 $m+n$ 种产生方式.

使用条件：事件 A与 B 产生方式不重叠

适用问题：分类选取. 方式分别计数，再相加.

推广：事件 A_1 有 n_1 种产生方式，事件 A_2有 n_2 种产生方式，…, 事件 A_{k} 有 n_k 种产生的方式，则 “事件A_1 或 A_2或…A_k” 有 $n_1+n_2+\ldots+n_k$ 种产生的方式.

乘法法则

事件 A 有 m 种产生方式，事件 B 有 n 种产生方式，则“事件 A 与 B”有 mn 种产生方式.

使用条件：事件A与B产生方式相互独立

适用问题：分步选取. 方式是连续的步骤，各步相互独立，分别计数，然后相乘.

推广：事件 A_1 有 n_1 种产生方式，事件 A_2 有 n_2 种产生方式，…, 事件 A_k 有 n_k 种产生的方式，则“事件 A_1 与 A_2 与 …A_k”有 $n_1n_2…n_k$ 种产生的方式.

应用实例

例1　由数字 1、2、3、4、5 构成 3 位数.

(1) 如果各位数字都不相同，那么有多少种方法?

(2) 如果必须是偶数，则有多少种方法?

(3) 其中可以被 5 整除的有多少个?

(4) 其中比300大的有多少个?

解　(1)　$5 \times 4 \times 3 = 60$.

(2)　个位为2,4，十位、百位各5种：　$2 \times 5 \times 5 = 50$.

(3)　个位为5，十位和百位同(2)：　$1 \times 5 \times 5 = 25$.

(4)　百位取3,4或5，十位和个位各5种:

$$3 \times 5 \times 5 = 75.$$

应用实例

例2 求 1400 的不同的正因子个数

解 $1400 = 2^3\,5^2\,7$

正因子为：$2^i\,5^j\,7^k$，

$0 \le i \le 3,\quad 0 \le j \le 2,\quad 0 \le k \le 1$

$$N = (3+1)(2+1)(1+1) = 24$$

8.2 基本排列组合的计数方法

- 排列组合的分类
- 集合的排列
- 集合的组合
- 多重集的排列
- 多重集的组合

排列组合的分类

选取问题：设 n 元集合 S，从 S 中选取 r 个元素. 根据是否有序，是否允许重复可将该问题分为四个子类型

	不重复	重复
有序	集合排列　$P(n,r)$	多重集排列
无序	集合组合　$C(n,r)$	多重集组合

集合的排列

从 n 元集 S 中有序、不重复选取的 r 个元素称为 S 的一个r 排列，S 的所有 r 排列的数目记作 P_n^r

$$P_n^r = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-r)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!} & n \ge r \\ 0 & n < r \end{cases}$$

S 的 r- 环排列 数 $= \dfrac{P_n^r}{r} = \dfrac{n!}{r(n-r)!}$

集合的组合

从 n 元集 S 中无序、不重复选取的 r 个元素称为 S 的一个 r 组合，S 的所有 r 组合的数目记作 C_n^r

$$C_n^r = \begin{cases} \dfrac{P_n^r}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} & n \geq r \\ 0 & n < r \end{cases}$$

证明方法：

公式代入

组合证明（一一对应）

基本计数公式的应用

例1 从1—300中任取3个数使得其和能被3整除有多少种方法?

解 令 $A=\{1, 4, \ldots, 298\}$，$B=\{2, 5, \ldots, 299\}$

$C=\{3, 6, \ldots, 300\}$

将方法分类:

分别取自 A, B, C: 各 C_{100}^{3}

A, B, C各取1个: C_{100}^{1}

$$N = 3C_{100}^{3} + (C_{100}^{1})^{3} = 1485100$$

基本计数公式的应用（续）

例2 求1000！的末尾有多少个0?

解 $1000! = 1000 \times 999 \times 998 \times \ldots \times 2 \times 1$

将上面的每个因子分解，若分解式中共有 i 个5, j 个2，那么 $\min\{ i, j \}$ 就是 0 的个数.

1, …, 1000 中有

500 个是 2 的倍数，$j > 500$;

200 个是 5 的倍数，

40 个是 25 的倍数（多加40个5），

8 个是 125 的倍数（再多加8个5），

1 个是 625 的倍数（再多加1个5）

$i = 200 + 40 + 8 + 1 = 249$. $\min\{ i, j \}=249$.

多重集的排列

多重集 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$， $0<n_i\leq+\infty$

(1) 全排列 $r=n$, $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$

$$N=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

证明：分步选取，先放 a_1, 有 $C_n^{n_1}$种方法；再放 a_2, 有$C_{n-n_1}^{n_2}$ 种方法，... , 放a_k有 $C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}$ 种方法

$$N=C_n^{n_1}C_{n-n_1}^{n_2}\ldots C_{n-n_1-\ldots n_{k-1}}^{n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

(2) 若 $r\leq n_i$时，每个位置都有 k 种选法，得 k^r.

多重集的组合

当$r \le n_i$， 多重集 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$ 的组合数为 $N=\dfrac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!}=C_{k+r-1}^{r}$

证明 一个 r 组合为 $\{x_1\cdot a_1, x_2\cdot a_2, \ldots, x_k\cdot a_k\}$， 其中 $x_1+x_2+\ldots+x_k=r$, x_i 为非负整数. 这个不定方程的非负整数解对应于下述排列

$$\underbrace{1\ldots1}_{x_1\text{个}}\;0\;\underbrace{1\ldots1}_{x_2\text{个}}\;0\;\underbrace{1\ldots1}_{x_3\text{个}}\;0\;\ldots\ldots\;0\;\underbrace{1\ldots1}_{x_k\text{个}}$$

r 个1，k-1个 0 的全排列数为 $N=\dfrac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!}=C_{k+r-1}^{r}$

实例

例3 r 个相同的球放到 n 个不同的盒子里，每个盒子球数不限，求放球方法数.

解：设盒子的球数依次记为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 则满足下述方程：

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$， $x_1, x_2, \ldots, x_n$为非负整数

该方程的解的个数为：

$$N = \frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} = C_{k+r-1}^{r}$$

实例

例4 排列 26个字母，使得a与b之间恰有7个字母，求方法数.

解：固定a 和 b 中间选7个字母，有 $2P_{24}^{7}$ 种方法

将它看作大字母与其余 17个全排列有18！种，

$$N = 2P_{24}^{7} \cdot 18!$$

实例（续）

例5

(1) 10个男孩，5个女孩站成一排，若没女孩相邻，有多少种方法？

(2) 如果站成一个圆圈，有多少种方法？

解:

(1) $P_{10}^{10} P_{11}^{5}$

(2) $\dfrac{1}{10} P_{10}^{10} P_{10}^{5}$

实例（续）

例6 把 $2n$ 个人分成 n 组，每组2人，有多少分法?

解：相当于 $2n$ 不同的球放到 n 个相同的盒子，每个盒子 2个，放法为

$$N = \frac{(2n)!}{(2!)^n n!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

实例（续）

例7 9本不同的书，其中4本红皮，5本白皮.

(1) 9本书的排列方式数有多少？

(2) 若白皮书必须放在一起，那么有多少方法?

(3) 若白皮书必须放在一起，红皮书也必须放在一起，那么有多少方法?

(4) 若把皮和红皮书必须相间，有多少方法?

解:

(1) 9!　　**(2) 5！ 5！**

(3) 5！ 4！ 2！　　**(4) 5！ 4！**