§0.1 题组二

1. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx.$

解：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}d\sqrt{x} \\
&= 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \arcsin\sqrt{x}\ d(\arcsin\sqrt{x}) \\
&= (\arcsin\sqrt{x})^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = \frac{7\pi^2}{144}.
\end{aligned}$$

2. $\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{3}{5}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$

解法一：处理 $\sqrt{1-x^2}$, 可以用三角换元。令 $x=\sin t$.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{-\arcsin(\frac{3}{5})} \frac{\cos t dt}{\sin t\cos t} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{-\arcsin(\frac{3}{5})} \csc t\ dt \\
&= (\ln|\csc t-\cot t|)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{-\arcsin(\frac{3}{5})} = \ln(\frac{2+\sqrt{3}}{3}).
\end{aligned}$$

解法二：由于分母次数较高，考虑“倒变换” 令: $x=\frac{1}{t}$.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{-2}^{-\frac{5}{3}} \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{1-(\frac{1}{t^2})}} \\
&= \int_{-\frac{5}{3}}^{-2} \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt \\
&= (\ln|t+\sqrt{t^2-1}|)\Big|_{-\frac{5}{3}}^{-2} = \ln(\frac{2+\sqrt{3}}{3}).
\end{aligned}$$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin(2x)}dx.$

分析：利用三角公式去根号。

解:

$$\begin{aligned}
原式 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx \\
&= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x - \frac{\pi}{4})| dx \\
&= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin t| dt \qquad (令\ t = x - \frac{\pi}{4}) \\
&= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t\ dt \qquad (利用“偶倍”的性质) \\
&= -2\sqrt{2} \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} - 2.
\end{aligned}$$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x} dx.$

解:

$$\begin{aligned}
原式 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sec^2(\frac{x}{2}) d(\frac{x}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \tan(\frac{x}{2}) \\
&= [x \tan(\frac{x}{2})]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(\frac{x}{2}) dx \\
&= \frac{\pi}{2} + 2 \ln|\cos(\frac{x}{2})|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2} - \ln 2.
\end{aligned}$$

5. $\int_{-1}^{1} x^2(\arctan x + \sqrt{1-x^2}) dx$

解：利用偶倍奇零，

$$\begin{aligned}
原式 =& 2\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx \\
=& 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt \qquad (令\ x = \sin t) \\
=& 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (1 - \sin^2 t) dt \\
=& 2\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt\Big) \\
=& 2(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

注 0.1. 遇到三角函数的积分，尽量利用定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ 的公式解决比较简单。

6. 分析：由积分区间关于原点对称，尽管被积函数不具有奇偶性，但可以用公式：

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} (f(x) + f(-x))dx. \tag{1}$$

解：由 (1) 得：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\frac{\cos x}{1+e^x} + \frac{\cos(-x)}{1+e^{-x}}\Big)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

7. 解：由公式 (1) 有

$$\begin{aligned} \text{原式} =& \int_0^1 \Big(x\ln(1+e^x)^2 - x\ln(1+e^x)^2\Big)dx \\ =& 2\int_0^1 x\ln(\frac{1+e^x}{1+e^{-x}})dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

8. 分析：利用

$$\int_0^{\pi} f(\cos x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx. \tag{2}$$

解：取 $f(u) = e^u - e^{-u}$, 由 (2),

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\pi} f(\cos x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} - e^{-\sin x})dx = 0. \qquad (\text{偶倍奇零}). \end{aligned}$$

注 0.2. 若 $f(x)$ 定义域关于原点对称，则 $f(x)-f(-x)$ 为奇函数，$f(x)+f(-x)$ 为偶函数。

9. $\int_{-2}^{3} |x^2 + 2|x| - 3|dx$.

分析：考察绝对值函数（分段函数）的定积分：用分界点来划分积分区间，分段

积分；多个绝对值，需从内到外逐个讨论。

解：先看内层绝对值函数：$|x|$ 的分界点为 0, 将积分区间分成 $[-2,0]$,$[0,3]$. 所以

$$原式 = \int_{-2}^{0} |x^2-2x-3|dx + \int_{0}^{3} |x^2+2x-3|dx = \int_{-2}^{0} |(x-3)(x+1)|dx + \int_{0}^{3} |(x+3)(x-1)|dx.$$

第一个积分，$|(x-3)(x+1)|$ 的分界点为其零点 $x=-1$, $x=3$（舍去），其中 $x=-1$ 将积分区间分成 $[-2,-1],[-1,0]$. 第二个积分可以类似讨论。从而有

$$\begin{aligned}原式 &= \int_{-2}^{-1}(x-3)(x+1)dx - \int_{-1}^{0}(x-3)(x+1)dx \\ &\quad - \int_{0}^{1}(x+3)(x-1)dx + \int_{1}^{3}(x+3)(x-1)dx = \frac{49}{3}.\end{aligned}$$

10. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}$.

解：$x=2$ 为唯一瑕点。令 $t=\sqrt{x-2}$, 则 $x=t^2+2$, $dx=2tdt$.

$$原式 = \int_0^{+\infty} \frac{2tdt}{t(t^2+9)}dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+9} = \frac{2}{3}\arctan(\frac{t}{3})\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{3}.$$

注 0.3. 若 $x=3$ 为瑕点，则需将划分积分区间为 $(2,3),(3,+\infty)$ 分别计算。

11. 解：令 $t=x+1$, 则

$$\begin{aligned}原式 &= \int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt \\ &= \int_{-1}^{0} 2^t dt + \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

§0.2　题组三

1. 分析：涉及函数值与定积分的关系时，考虑积分中值定理。从要证明的结论看，需要用罗尔定理。

证明：由已知条件，利用积分中值定理，$f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x^2}f(x)dx = e^{1-\eta^2}f(\eta), \eta \in (0,\frac{1}{2})$. 又 $f(1)=e^{1-1^2}f(1)$, 因此有

$$e^{1-1^2}f(1) = e^{1-\eta^2}f(\eta).$$

令 $g(x)=e^{1-x^2}f(x)$, 则 $g(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上连续，在 $(\eta,1)$ 内可导，且 $g(\eta)=g(1)$. 由罗尔中值定理，至少存在一点 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$ 使得$g'(\xi)=0$. 因此：$f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

2. 证明：令 $F(t)=\int_a^t f(x)dx-\int_t^b \frac{1}{f(t)}dt$. 则 $F(t)$ 在$[a,b]$ 上连续，且 $F(a)-\int_a^b f(t)dt<0,(\because f(t)>0), F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$, 故由零点定理，至少存在1点$\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^\xi f(x)dx=\int_\xi^b \frac{1}{f(x)}dx.$$

再证唯一性。$F'(t)=f(t)+\frac{1}{f(t)}>0,(\forall t\in[a,b])$, 所以 $F(t)$ 单调，故 ξ 唯一。

3. 证明：令 $f(x)=\int_0^x \frac{2+\sin t}{1+t}dt-\int_x^1 \frac{1+t}{2+\sin t}dt$. 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=-\int 0^1 \frac{1+t}{2+\sin t}dt<0$, $f(1)=\int_0^1 \frac{2+\sin t}{1+t}dt>0$, 由零点定理，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=0$. 又 $f'(x)=\frac{2+\sin x}{1+x}+\frac{1+x}{2+\sin x}\geq 2>0$, 因此 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调增，故根唯一。

4. 分析：观察等式左右两边 f 自变量位置的表达式，作相应变量替换。

解:（1）证明：若 $a=b$, 则等式两端都为零，成立。

若 $a\neq b$, 令 $x=a+(b-a)t$, 则 $dx=(b-a)$，且当 $x=a$ 时，$t=0$, $x=b$ 时，$t=1$.

$$左边=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)t]dt=右边.$$

（2）证明：

$$\begin{aligned}
等式左边&=\frac{1}{2}\int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{\sqrt{t}} \qquad (令t=x^2)\\
&=\frac{1}{2}\left(\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{1}{x}dx+\int_a^{a^2} f(x+\frac{a^2}{x})\frac{1}{x}dx\right) \qquad (令t=x)
\end{aligned}$$

如果我们可以证明

$$\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{1}{x}dx=\int_a^{a^2} f(x+\frac{a^2}{x})\frac{1}{x}dx \tag{3}$$

代入上式，即证得原结论。因此，我们只需证明等式 (3).

$$\begin{aligned}\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{1}{x}dx &= \int_{a^2}^a f(\frac{a^2}{u}+u)\frac{u}{a^2}\left(-\frac{a^2}{u^2}\right)du \qquad (\text{令 } u=\frac{a^2}{x})\\ &= \int_a^{a^2} f(x+\frac{a^2}{x})\frac{1}{x}dx \qquad (\text{令 } x=u).\end{aligned}$$

这证明了等式 (3) 从而原式得证。

五、1. 证明：

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx =& \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du \qquad (\text{令}u=x^2)\\ =& \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du\right)\end{aligned}$$

接下来，利用变量替换统一积分限。

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du &= \int_0^{\pi}\frac{\sin(t+\pi)}{\sqrt{t+\pi}}dt \qquad (\text{令}t=u-\pi)\\ &= -\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\pi}}dt = -\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{\sqrt{u+\pi}}du.\end{aligned}$$

代回原式得，

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx =& \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du-\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{\sqrt{u+\pi}}du\right)\\ =& \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin u\Big(\frac{1}{\sqrt{u}}-\frac{1}{\sqrt{u+\pi}}\Big)du>0.\end{aligned}$$

最后的不等号是因为: 被积函数非负，且不为常数函数 0.

2. 证明：将不等式中的 b 换成 t, 构造积分上限函数

$$F(t)=\int_a^t xf(x)-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)dx, \quad t>a.$$

则利用积分中值定理，对任意的 $t > a$,

$$\begin{aligned}F'(t) =& tf(t) - \frac{1}{2}\int_a^t f(x)dx - \frac{a+t}{2}f(t)\\ =& \frac{1}{2}\left((t-a)f(t) - \int_a^t f(x)dx\right)\\ =& \frac{1}{2}\left((t-a)f(t) - (t-a)f(\xi)\right) \qquad (\xi \in (a,t))\\ =& \frac{1}{2}(t-a)(f(t) - f(\xi)) > 0.\end{aligned}$$

故 $F(t)$ 在$(a, +\infty)$ 上单调递增，从而 $F(b) \geq F(a) = 0$, 即：

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

3. 证明：我们先证明第二个不等号。为此，构造积分上限函数

$$F(t) = [\int_0^t f(x)dx]^2 - \int_0^t f^3(x)dx, t \in [0,1].$$

则有 $F(0) = 0$. 因此，为证明 $F(1) > 0$, 只需证明 F 单增，即 $F'(t) > 0$.

$$F'(t) = 2\int_0^t f(x)dxf(t) - f^3(t) = f(t)\left(2\int_0^t f(x)dx - f^2(t)\right).$$

由条件 $f'(x) > 0, f(0) = 0$ 知 $f(x) > f(0) = 0$.

再令 $g(t) = 2\int_0^t f(x)dx - f^2(t)$, 则 $g(0) = 0$, 且

$$g'(t) = 2f(t) - 2f(t)f'(t) = 2f(t)(1 - f'(t)) > 0.$$

因此，$g(t)$ 单增，从而 $g(t) > g(0) = 0$.

故 $F'(t) = f(t)g(t) > 0$, 故 $F(t)$ 单增，$F(1) > F(0) = 0$. 这就证明了第二个不等式。

最后，我们证明第一个不等式。此不等式的证明类似于证明中学的柯西不等式：

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|. \tag{4}$$

为证不等式 (4), 我们考虑向量 $\vec{x}+k\vec{y}, k\in\mathbb{R}$. 显然，

$$(\vec{x}+k\vec{y})\cdot(\vec{x}+k\vec{y}) = |\vec{x}+k\vec{y}|^2 \geq 0. \qquad (\star)$$

所以，关于 k 的二次函数

$$(\vec{x}+k\vec{y})\cdot(\vec{x}+k\vec{y}) = |\vec{y}|^2k^2 + (2\vec{x}\cdot\vec{y})k + |\vec{x}|^2$$

恒非负。因此，判别式

$$\Delta = (2\vec{x}\cdot\vec{y})^2 - 4|\vec{y}|^2|\vec{x}|^2 \leq 0,$$

这就证明了不等式 (4)。

我们仿照上述证明来证明我们题目中的第一个不等式。其中$\vec{x}$ 变成 $f(x)$, y 变成了常数函数 1. 替代 $(\star)$ 中不等式的是如下的不等式

$$\int_0^1 (f(x)+k)^2 dx \geq 0, \qquad \forall\ k\in\mathbb{R}.$$

由此式出发，仿照不等式 (4) 的证明过程即可。细节留作练习。

4. 分析：欲估计定积分，只需要估计被积函数 $f(x)$ 的值。我们需要用“导数的界” M 来估计函数值 $f(x)$, 联系两者的桥梁是微分中值定理。

证明：我们先来估计$|f(x)|$在 $[0,a]$ 上的值。对任意的 $x\in[0,a]$,

$$|f(x)| = |f(x)-f(0)| = |f'(\xi)|x \leq Mx.$$

利用积分的绝对值不等式和单调性有，

$$\left|\int_0^a f(x)dx\right| \leq \int_0^a |f(x)|dx \leq \int_0^a Mxdx = \frac{Ma^2}{2}.$$

证毕。