# 第十二章

# 无穷级数

## (习题课)

## 题组一：数项级数

1. 判断下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+2}\right)^{\frac{1}{n}}$

**解:** 设 $y=\left(\frac{1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{x}}$ 则 $\ln y=-\frac{1}{x}\ln(x^2+2)$

$\lim_{x\to\infty}\ln y=0$ $\therefore \lim_{x\to\infty} y=1$

即 $\lim_{n\to\infty} a_n=1$

所以 原级数发散.

$$(2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln^2\left(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$$

**解:** $$a_n = \ln^2\left(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right) \sim \left(\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)^2 \quad (n\to\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)^2}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\text{收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^2\left(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)\ \text{收敛.}$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{2n-1}}-e^{\frac{1}{2n+1}})$

**解:** $a_n = e^{\frac{1}{2n-1}} - e^{\frac{1}{2n+1}}$

$$\because s_n = (e - e^{\frac{1}{3}}) + (e^{\frac{1}{3}} - e^{\frac{1}{5}}) + (e^{\frac{1}{5}} - e^{\frac{1}{7}})$$

$$+ \cdots + (e^{\frac{1}{2n-1}} - e^{\frac{1}{2n+1}})$$

$$= e - e^{\frac{1}{2n+1}} \to e - 1 (n \to \infty)$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{2n-1}}-e^{\frac{1}{2n+1}})$收敛于$e-1$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\lambda \ln n}$

**解:** $a_n = 2^{-\lambda \ln n} = e^{\ln 2^{-\lambda \ln n}} = e^{-\lambda \ln n \ln 2}$

$= e^{\ln n^{-\lambda \ln 2}} = \dfrac{1}{n^{\lambda \ln 2}}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\lambda \ln n} \begin{cases} \lambda \ln 2 > 1\text{时}, & \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\lambda \ln n}\text{收敛}. \\ \lambda \ln 2 \le 1\text{时}, & \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\lambda \ln n}\text{发散}. \end{cases}$$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(1+\cos n)^n}{3^n}$

**解:** $0 \le a_n = \dfrac{n^2(1+\cos n)^n}{3^n} \le \dfrac{n^2 2^n}{3^n}$

设 $b_n = \dfrac{n^2 2^n}{3^n}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^2 2^n}{3^n}} = \dfrac{2}{3}$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛.　　故$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(1+\cos n)^n}{3^n}$收敛.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{2}{n})$

**解:** $a_n = 1-\cos\frac{2}{n} \sim \frac{1}{2}(\frac{2}{n})^2 \quad (n\to\infty)$

$$\because \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{2}(\frac{2}{n})^2}=1$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(\frac{2}{n})^2$收敛.

$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{2}{n})$收敛.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n})$

**解:** $\because \quad \sin\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}-\frac{1}{3!}(\frac{\pi}{n})^3+o[(\frac{\pi}{n})^3]$

设 $a_n=\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}$

$\therefore \quad a_n=\frac{1}{6}(\frac{\pi}{n})^3-o[(\frac{\pi}{n})^3]$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(\frac{\pi}{n})^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}(\frac{\pi}{n})^3-o[(\frac{\pi}{n})^3]}{(\frac{\pi}{n})^3}=\frac{1}{6}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\pi}{n})^3$收敛

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n})$收敛.

(8) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln[1+\frac{(-1)^n}{n^3}]$

**解:** $a_n = \ln[1+\frac{(-1)^n}{n^3}] \begin{cases} <0 & n\text{为奇数} \\ >0 & n\text{为偶数} \end{cases}$

$\because \quad |a_n| \sim \left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right| (n \to \infty)$

而 $\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right|$收敛

$\therefore \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln[1+\frac{(-1)^n}{n^3}]$收敛

2.判断级数的敛散性，

若收敛，是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^n}\sin\frac{\pi}{n+1}$

解: $\because \quad |a_n| \le \frac{1}{\pi^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^n}$收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^n}\sin\frac{\pi}{n+1}$绝对收敛.

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n-\ln n}$

**解:** $\because \quad u_n = \frac{1}{n-\ln n} > \frac{1}{n}$ 　　而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散

$\therefore \quad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n-\ln n}$非绝对收敛.

设 $f(x) = \frac{1}{x-\ln x} \quad (x \geq 2)$，则 $f'(x) = \frac{-(1-\frac{1}{x})}{(x-\ln x)^2} < 0$.

所以$f(x)$单调减. 　因此 $u_n > u_{n+1}$.

又$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n} = 0$

由莱布尼茨定理可知$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n-\ln n}$条件收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\sqrt{n^2+k^2}\,\pi$

**解:** 令 $\sqrt{n^2+k^2}=m$  $\lim_{m\to\infty} \sin m\pi = 0$

令 $\sqrt{n^2+k^2}=2m+\frac{1}{2}$  $\lim_{m\to\infty} \sin(2m\pi+\frac{1}{2}\pi)=1$

因此可知，

$$\lim_{n\to\infty}\sin\sqrt{n^2+k^2}\,\pi \quad \text{不存在}$$

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\sin\frac{n\pi}{2}}\frac{n^a}{2^n}\quad(a>0)$$

**解:** 设$u_n=(-1)^{\sin\frac{n\pi}{2}}\frac{n^a}{2^n}$

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^a}{2^{n+1}}}{\dfrac{n^a}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\sin\frac{n\pi}{2}}\frac{n^a}{2^n}\quad(a>0)$ 绝对收敛.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na^n}\quad (a>0)$

**解:** 设 $u_n=\frac{(-1)^n}{na^n}$

而 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{na^n}}=\frac{1}{a}$

$\therefore$ 当 $a>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na^n}$ 绝对收敛.

当 $a=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛.

当$0 < a < 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{na^n} \neq 0$$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{na^n}$ 发散.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}$ $(p > 0, a\text{为实数})$

**解:** $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a^{n+1}}{(n+1)^p} \right| \Big/ \left| \frac{a^n}{n^p} \right| = |a|$

$-1 < a < 1$时，级数绝对收敛.

$a > 1$时，级数发散.

$a = 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} p > 1\text{时，级数收敛.} \\ 0 < p \le 1\text{时，级数发散.} \end{cases}$

$a = -1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ $\begin{cases} p > 1\text{时，级数绝对收敛.} \\ 0 < p \le 1\text{时，级数条件收敛.} \end{cases}$

$a < -1$时，级数发散.

3.证明下列各题

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $na_n \quad (n=1,2,\cdots)$ 有界,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 绝对收敛.

**解:** $\because \quad |na_n| \le M \qquad \therefore \quad a_n^2 \le \dfrac{M^2}{n^2}$

$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{M^2}{n^2}$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 绝对收敛.

(2) 若 $p>1$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n = a$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

**解:** 由条件可知,

$$\exists M>0, \quad 使 \quad |n^p a_n| \le M$$

$$\therefore \quad |a_n| \le \frac{M}{n^p} \qquad 而 p>1 时，\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^p} 收敛$$

那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 都收敛.

**解:** $\because$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都收敛

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n{}^2 + b_n{}^2)$收敛

又 $|a_n b_n| \leq \frac{1}{2}(a_n{}^2 + b_n{}^2)$

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛

取$b_n = \frac{1}{n}$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$收敛.

(4) 设 $0 \le b_n \le a_n \ (n=1,2,\cdots)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n \operatorname{arctg} n}$ 收敛.

**解:** 由条件知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ , $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛.

$$\therefore \ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{收敛}$$

$$\text{又} \ \sqrt{a_n b_n \operatorname{arctg} n} \le \frac{1}{2}(a_n + b_n) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\therefore \ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n \operatorname{arctg} n} \text{收敛}$$

(5) 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ , $b_n = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{n}$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

**解:** $\because \quad a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$

$$\therefore \quad b_n = \frac{a_n + a_{n+2}}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1 + \tan^2 x) dx$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x d(\tan x)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \tan^{n+1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛

(6) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt[3]{x}dx}{x^2+2x+5}$ 绝对收敛.

**解:**

$$|u_n|=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt[3]{x}dx}{x^2+2x+5}\le\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt[3]{x}dx}{5}=\frac{1}{5}\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\bigg|_0^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{3}{20}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}<\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\qquad\because\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\text{收敛}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt[3]{x}dx}{x^2+2x+5}\quad\text{绝对收敛.}$$

# 题组二：函数项级数

1. 求收敛域

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^n}{n}x^n$

**解:** $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{3^n+(-1)^n}{n}\Big/\dfrac{3^{n+1}+(-1)^{n+1}}{n+1}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1+(-\frac{1}{3})^n}{3-(-\frac{1}{3})^n}=\frac{1}{3}$$

当$x=\dfrac{1}{3}$时，级数为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^n}{n}(\frac{1}{3})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-\frac{1}{3})^n}{n}$

$$\because \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1+(-\frac{1}{3})^n}{n} \Big/ \frac{1}{n} = 1$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-\frac{1}{3})^n}{n} \text{发散}$$

当$x = -\dfrac{1}{3}$时，级数为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{n}(-\frac{1}{3})^n$ 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n3^n}]$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n3^n}}{\frac{1}{3^n}}=0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\text{收敛}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}\text{收敛} \quad \text{又} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\text{收敛}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n3^n}\right]\text{收敛}$$

故级数收敛域为 $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}).$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{(n+1)^2 2^{n+1}}(x-3)^n$

**解:** 令 $y=x-3$，则级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{(n+1)^2 2^{n+1}}y^n$ .

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\dfrac{3n-2}{(n+1)^2 2^{n+1}}\right|}{\left|\dfrac{3(n+1)-2}{(n+2)^2 2^{n+2}}\right|}=2$$

当 $y=2$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{(n+1)^2 2}$

$\because$ $\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3n-2}{(n+1)^2 2}}{\dfrac{1}{n+1}}=\frac{3}{2}$ $\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{(n+1)^2 2}$发散

当 $y=-2$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3n-2}{(n+1)^2 2}$

$$u_n = \frac{3n-2}{(n+1)^2 2} \to 0 \ (n \to \infty)$$

设 $f(x) = \frac{3x-2}{(x+1)^2 2}$， 则 $f'(x) = \frac{7-3x}{2(x+1)^3} < 0$ (当 $x > \frac{7}{3}$ 时)

显然 $n$ 从 3 开始满足 $u_n > u_{n+1}$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3n-2}{(n+1)^2 2}$ 条件收敛.

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2 2^{n+1}} y^n$ 的收敛域为 $[-2,2)$.

所以原级数的收敛域为 $-2 \le x-3 < 2$ 即 $1 \le x < 5$.

2. 将下列函数按指定形式展开

(1) 将 $f(x)=\arctan\dfrac{4+x^2}{4-x^2}$ 展开为 $x$ 的幂级数.

**解:** $$f'(x)=\frac{8x}{16+x^4}\quad=\frac{x}{2}\frac{1}{1+(x/2)^4}$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x}{2})^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x}{2})^{4n+1}\qquad(\,|\frac{x}{2}|<1\,)$$

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x}{2})^{4n+1}dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x \left(\frac{x}{2}\right)^{4n+1} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2^{4n+1}(4n+2)}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2^{4n+1}(4n+2)} \quad (|x| < 2)$$

(2) 将 $f(x)=\dfrac{1}{(2+x)^2}$ 展开为 $x$ 的幂级数.

**解:** 因为 $\quad (-\dfrac{1}{2+x})'=\dfrac{1}{(2+x)^2}$

$$-\frac{1}{2+x}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x}{2})^n \qquad (|\frac{x}{2}|<1)$$

$$\frac{1}{(2+x)^2}=\quad[-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x}{2})^n]'$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}x^{n-1} \qquad (|x|<2).$$

(3) 将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-2}$ 在 $x=1$ 处展开.

**解:** $\dfrac{1}{x^2-x-2}=\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$$=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-(x-1)}-\frac{1}{6}\frac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$(|x-1|<1)$ $\left(\left|\dfrac{x-1}{2}\right|<1\right)$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right](x-1)^n$$

$(|x-1|<1$ 即 $0<x<2$ ).

(4) 将 $f(x)=\sin x+\cos x$ 展开为 $x+\dfrac{\pi}{4}$ 的幂级数.

**解:** $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$

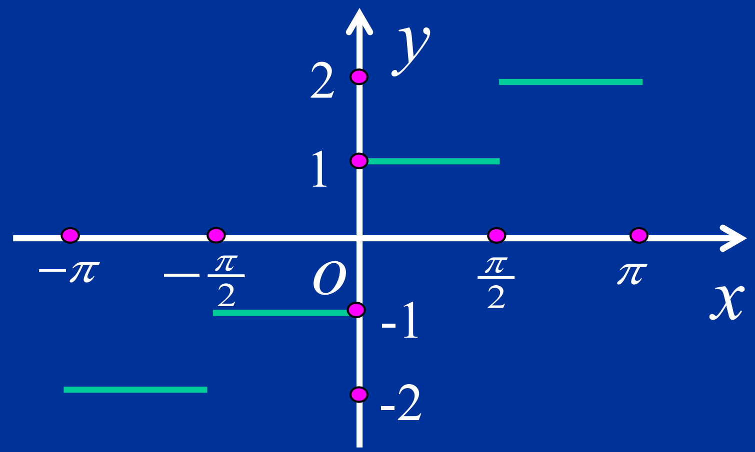
$$=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+\frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

(5) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\\ 2, & \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$，将 $f(x)$ 分别展开为正弦级数和余弦级数.

**解:** 对 $f(x)$ 做奇周期延拓如图, 则

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nx dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2\sin nx dx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{6}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots\\ \dfrac{2}{n\pi}[(-1)^{\frac{n}{2}}-1], & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

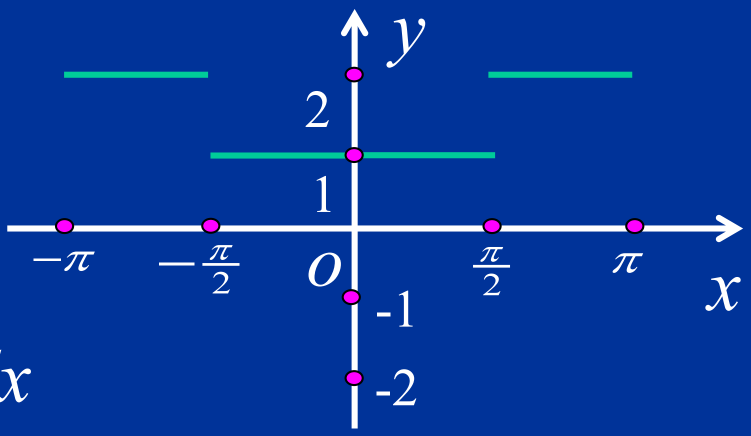



所以正弦级数为

$$f(x)=\frac{6}{\pi}\sin x-\frac{2}{\pi}\sin 2x+\frac{6}{3\pi}\sin 3x+\cdots\ (\,0<x<\pi\,,\,x\neq\frac{\pi}{2}\,)$$

接(5)

对 $f(x)$ 做偶周期延拓如图， 则




$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cos nx dx$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{-2}{n\pi}, & n = 1,3,5,\cdots \\ 0, & n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2dx$$

$$= 3$$

所以余弦级数为

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\cos x + \frac{2}{3\pi}\cos 3x - \frac{2}{5\pi}\cos 5x + \cdots$$

$$\left(0 < x < \pi, \ x \neq \frac{\pi}{2}\right)$$

3.求和函数

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和.

**解:**

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$

则 $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}\quad(|x|<1)$

$$S(x)-S(0)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$s(x) = \arctan x\Big|_0^x + s(0)$$

$$= \arctan x \qquad (|x| \le 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = s(1)$$

$$= \arctan 1$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}(2x+1)^n$ 并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)2^n}$ 的和.

**解:** 令 $y=2x+1$， 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}(2x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}y^n=\sum_{n=1}^{\infty}y^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}y^n$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}y^n=\frac{y}{1-y}\qquad(|y|<1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}y^n=\frac{1}{y}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{y}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^y y^n dy$$

$$=\frac{1}{y}\int_0^y\sum_{n=1}^{\infty}y^n dy$$

接(2)

$$=\frac{1}{y}\int_0^y \frac{y}{1-y}dy \quad =\frac{1}{y}[-\ln(1-y)-y] \qquad (\,|\,y\,|<1\,)$$

$$\therefore \quad S(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}y^n \quad =\frac{y}{1-y} \quad +\frac{\ln(1-y)}{y}+1 \qquad (\,|\,y\,|<1\,)$$

因此 $S(x)=\dfrac{2x+1}{-2x}+\dfrac{\ln(-2x)}{2x+1}+1 \qquad (\,|\,2x+1\,|<1\,)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)2^n}= \; S(y)\Big|_{y=\frac{1}{2}} \quad =2-2\ln 2 \; .$$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

**解:** 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，则 $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ .

$$S(x)+S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=e^{x}$$

$$S(x)-S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{n}}{n!}=e^{-x}$$

$$S(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}.$$

4.其他

(1) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

**解:** 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2nx^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$

$$=2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}-\frac{x}{1-x}=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'-\frac{x}{1-x}$$

$$=2x\left(\frac{x}{1-x}\right)'-\frac{x}{1-x}=\frac{x^2+x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=3\ .$$

(2) 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 计算 $\int_0^1\frac{\ln x}{1+x}dx$

解: $\int_0^1\frac{\ln x}{1+x}dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\ln x dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n\ln x dx$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{-1}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n^2})+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$

$$=-\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6}$$

$$=-\frac{\pi^2}{12}.$$

(3) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2\cdot 1}+\frac{5}{2^2\cdot 2\,!}+\frac{7}{2^3\cdot 3\,!}+\cdots+\frac{2n+1}{2^n\cdot n\,!}\right)$

**解:** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2\cdot 1}+\frac{5}{2^2\cdot 2\,!}+\frac{7}{2^3\cdot 3\,!}+\cdots+\frac{2n+1}{2^n\cdot n\,!}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n n!}$

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}\quad(|x|<+\infty)$ .

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}\right)'=\left(x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}\right)'=[x(e^{x^2}-1)]'$$

$$=2x^2e^{x^2}+e^{x^2}-1$$

原极限 $=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{e}-1$.