# 第七节　单侧置信区间

一、问题的引入

二、基本概念

三、典型例题

四、小结

# 一、问题的引入

在以上各节的讨论中,对于未知参数$\theta$,我们给出两个统计量$\underline{\theta}, \overline{\theta}$,得到$\theta$的双侧置信区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$.

但在某些实际问题中, 例如, 对于设备、元件的寿命来说, 平均寿命长是我们希望的, 我们关心的是平均寿命$\theta$的“下限”; 与之相反, 在考虑产品的废品率$p$时, 我们常关心参数$p$的“上限”, 这就引出了单侧置信区间的概念.

# 二、基本概念

## 1. 单侧置信区间的定义

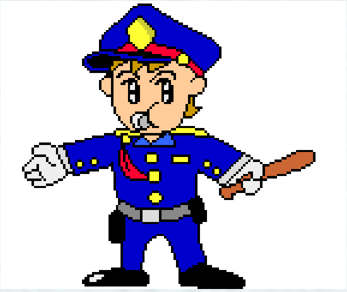
对于给定值 $\alpha\,(0<\alpha<1)$，若由样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 确定的统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，对于任意 $\theta \in \Theta$ 满足

$$P\{\theta > \underline{\theta}\} \geq 1-\alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, +\infty)$ 是 $\theta$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间，$\underline{\theta}$ 称为 $\theta$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限.

又如果统计量 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,对于任意$\theta\in\Theta$满足 $P\{\theta<\overline{\theta}\}\geq 1-\alpha$,

则称随机区间$(-\infty,\overline{\theta})$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间,$\overline{\theta}$称为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信上限.



## 2. 正态总体均值与方差的单侧置信区间

设正态总体 $X$ 的均值是$\mu$, 方差是$\sigma^2$ (均为未知),

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本，由 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

有 $P\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

即 $P\left\{\mu > \overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

于是得 $\mu$ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1),+\infty\right),$$

$\mu$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信下限 $\underline{\mu}=\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1).$

又根据 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$

有 $P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}=1-\alpha,$

即 $P\left\{\sigma^2 < \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right\} = 1-\alpha,$

于是得 $\sigma^2$ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(0,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right),$$

$\sigma^2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限

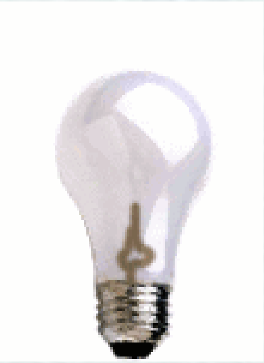
$$\overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}.$$

# 三、典型例题

**例1** 设从一批灯泡中, 随机地取5只作寿命试验, 测得寿命(以小时计)为 1050, 1100, 1120, 1250, 1280, 设灯泡寿命服从正态分布, 求灯泡寿命平均值的置信水平为 0.95 的单侧置信下限.

**解** $1-\alpha=0.95,\quad n=5,\quad \bar{x}=1160,\quad s^2=9950,$

$$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(4)=2.1318,$$



$\mu$ 的置信水平为 0.95 的置信下限

$$\underline{\mu}=\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)=1065.$$

**例2** 设总体 $X$ 在$[0,\theta]$上服从均匀分布，其中 $\theta$ $(\theta>0)$ 未知，$(X_1, X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 $X$ 的样本，给定 $\alpha$，求 $\theta$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信下限和置信上限.

**解** 令 $X_h = \max\{X_1, X_2,\cdots,X_n\}$,

对于给定的 $\alpha$，找 $0<\underline{\theta}\le 1$，使 $P\left\{\theta > \dfrac{X_h}{\underline{\theta}}\right\} = 1-\alpha$,

即 $1-\alpha = \int_0^{\underline{\theta}} nz^{n-1}\mathrm{d}z = \underline{\theta}^n$，于是 $\underline{\theta} = \sqrt[n]{1-\alpha}$,

所以 $P\left\{\dfrac{X_h}{\sqrt[n]{1-\alpha}} < \theta\right\} = 1-\alpha$,

$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信下限 $\underline{\theta}=\dfrac{X_h}{\sqrt[n]{1-\alpha}}$.

对于给定的$\alpha$, 找$0<\overline{\theta}<1$, 使 $P\left\{\theta<\dfrac{X_h}{\overline{\theta}}\right\}=1-\alpha$,

即 $1-\alpha=\int_{\overline{\theta}}^{1} nz^{n-1}\mathrm{d}z=1-\overline{\theta}^{n}$, 于是 $\overline{\theta}=\sqrt[n]{\alpha}$,

所以 $P\left\{\theta<\dfrac{X_h}{\sqrt[n]{\alpha}}\right\}=1-\alpha$,

$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信上限$\overline{\theta}=\dfrac{X_h}{\sqrt[n]{\alpha}}$.

# 四、小结

正态总体均值 $\mu$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(-\infty, \boxed{\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)}\right), \quad \left(\boxed{\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)}, +\infty\right),$$

单侧置信上限 $\overline{\mu}$　　　单侧置信下限 $\underline{\mu}$

正态总体方差 $\sigma^2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(0, \boxed{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}}\right).$$

单侧置信上限 $\overline{\sigma^2}$