第一节　大数定律

一、问题的引入

二、基本定理

三、典型例题

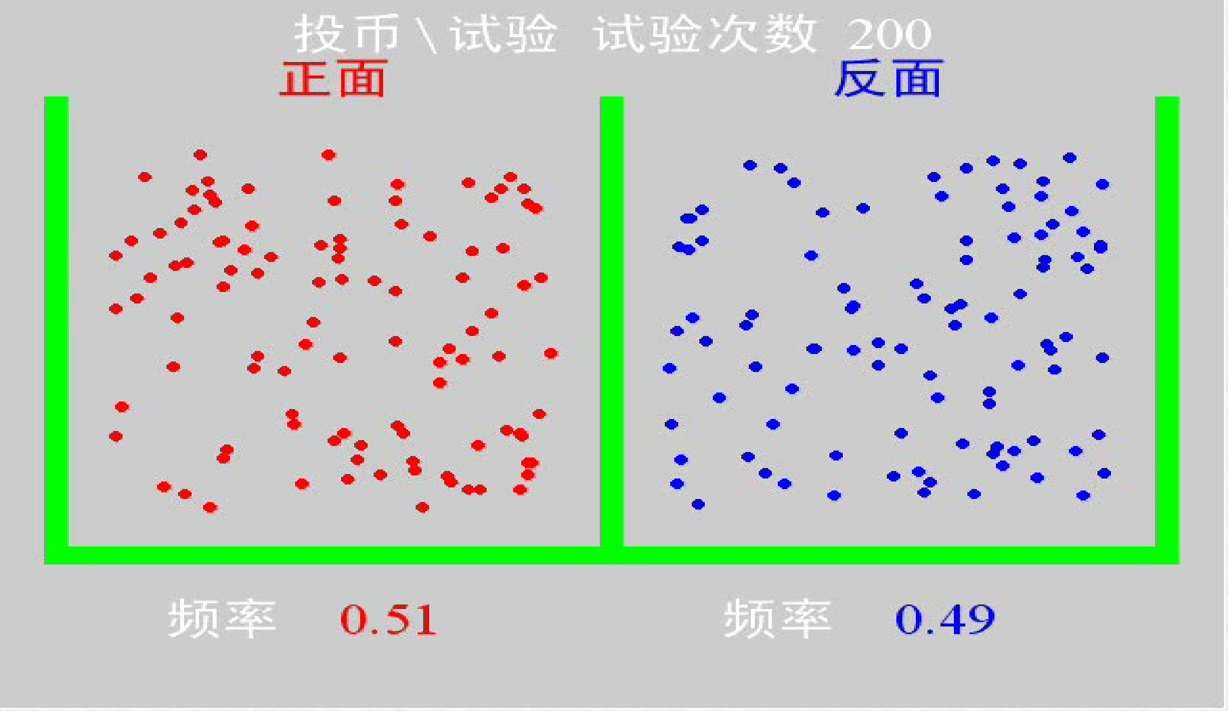
四、小结

一、问题的引入

实例　频率的稳定性

随着试验次数的增加, 事件发生的频率逐渐稳定于某个常数.

单击图形播放/暂停　ESC键退出



启示:从实践中人们发现大量测量值的算术平均值有稳定性.

二、基本定理

定理一（契比雪夫定理的特殊情况）

契比雪夫

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立，且具有相同的数学期望和方差：$E(X_k) = \mu$, $D(X_k) = \sigma^2$ $(k = 1, 2, \cdots)$，作前 n 个随机变量的算术平均 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$，则对于任意正数 ε 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\overline{X} - \mu| < \varepsilon\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

二、基本定理

定理

表达式的意义

$\{|\overline{X}-\mu|<\varepsilon\}$是一个随机事件，等式表明，当$n\to\infty$时这个事件的概率趋于1，即对于任意正数$\varepsilon$，当$n$充分大时，不等式$|\overline{X}-\mu|<\varepsilon$成立的概率很大。

且 ，

$D($

的算 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$，

数ε有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\overline{X}-\mu|<\varepsilon\}=\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

证明 $$E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu,$$

$$D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(X_k)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n},$$

由**契比雪夫不等式**可得

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n},$$

在上式中令 $n\to\infty$, 并注意到概率不能大于1, 则

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

关于定理一的说明:

当 n 很大时,随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的算术平均 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 接近于数学期望

$$E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_k) = \mu,$$

（这个接近是概率意义下的接近）

即在定理条件下, n个随机变量的算术平均, 当n无限增加时, 几乎变成一个常数.

定理一的另一种叙述:

设随机变量 X_1, X

且具有相同的数学期望

$D(X_k) = \sigma^2 \; (k = 1, 2, \cdots$

依概率收敛于 μ, 即 $\overline{X}$

设$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$是一个随机变量序列, a是一个常数, 若对于任意正数 ε 有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|Y_n - a| < \varepsilon\} = 1$, 则称序列 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 依概率收敛于a, 记为

$$Y_n \xrightarrow{P} a$$

依概率收敛序列的性质:

设 $X_n \xrightarrow{P} a, \quad Y_n \xrightarrow{P} b,$

又设函数 $g(x,y)$ 在点 (a,b) 连续,

则 $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a,b).$

证明 因为 $g(x,y)$ 在 (a,b) 连续,

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0,$

使得当 $|x-a| + |y-b| < \delta$ 时,

$|g(x,y) - g(a,b)| < \varepsilon,$

于是 $\{|g(X_n,Y_n)-g(a,b)|\geq\varepsilon\}$

$$\subset\{|X_n-a|+|Y_n-b|\geq\delta\}$$

$$\subset\left\{|X_n-a|\geq\frac{\delta}{2}\right\}\cup\left\{|Y_n-b|\geq\frac{\delta}{2}\right\},$$

因此 $P\{|g(X_n,Y_n)-g(a,b)|\geq\varepsilon\}$

$$\leq P\left\{|X_n-a|\geq\frac{\delta}{2}\right\}+P\left\{|Y_n-b|\geq\frac{\delta}{2}\right\}\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|g(X_n,Y_n)-g(a,b)|<\varepsilon\}=1.$ [证毕]

定理二（伯努利大数定理）

伯努利

设 n_A 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数, p 是事件 A 在每次试验中发生的概率, 则对于任意正数 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1 \text{ 或 } \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}=0.$$

证明　　引入随机变量

$$X_k=\begin{cases}0, & \text{若在第}k\text{次试验中 }A\text{ 不发生},\\ 1, & \text{若在第}k\text{次试验中 }A\text{ 发生}, k=1,2,\cdots.\end{cases}$$

显然 $n_A = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$

因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是相互独立的,

且 X_k 服从以 p 为参数的 $(0-1)$ 分布,

所以 $E(X_k) = p, \quad D(X_k) = p(1-p), \quad k = 1, 2, \cdots.$

根据定理一有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) - p\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

即 $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

关于伯努利定理的说明:

伯努利定理表明事件发生的频率 $\frac{n_A}{n}$ 依概率收敛于事件的概率 p, 它以严格的数学形式表达了频率的稳定性.

故而当 n 很大时, 事件发生的频率与概率有较大偏差的可能性很小. 在实际应用中, 当试验次数很大时, 便可以用事件发生的频率来代替事件的概率.

定理三（辛钦定理）

辛钦资料

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立，服从同一分布，且具有数学期望 $E(X_k)=\mu$ $(k=1,2,\cdots)$，

则对于任意正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$

关于辛钦定理的说明:

(1) 与定理一相比，不要求方差存在；

(2) 伯努利定理是辛钦定理的特殊情况.

三、典型例题

例1 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立，

具有如下分布律：

X_n	$-na$	0	na
P	$\dfrac{1}{2n^2}$	$1-\dfrac{1}{n^2}$	$\dfrac{1}{2n^2}$

问是否满足契比雪夫定理？

解 独立性依题意可知，检验是否具有数学期望？

$$E(X_n) = -na^2 \cdot \frac{1}{2n^2} + 0 \cdot (1 - \frac{1}{n^2}) + na^2 \cdot \frac{1}{2n^2} = 0,$$

说明每一个随机变量都有数学期望,

检验是否具有有限方差?

$\because$

X_n^2	$(na)^2$	0	$(na)^2$
P	$\dfrac{1}{2n^2}$	$1-\dfrac{1}{n^2}$	$\dfrac{1}{2n^2}$

$$\therefore E(X_n^2)=2(na)^2\cdot\frac{1}{2n^2}=a^2,$$

$$\therefore D(X_n)=E(X_n^2)-[E(X_n)]^2=a^2.$$

说明离散型随机变量有有限方差,

故满足契比雪夫定理的条件.

例2 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布，且 $E(X_k)=0$, $D(X_k)=\sigma^2, k=1,2,\cdots$, 证明对任意正数 ε 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \sigma^2\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

解 因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是相互独立的，

所以 $X_1^2, X_2^2, \cdots, X_n^2, \cdots$ 也是相互独立的，

由 $E(X_k)=0$, 得 $E(X_k^2) = D(X_k) + [E(X_k)]^2 = \sigma^2$,

由辛钦定理知

对于任意正数 ε, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \sigma^2\right| < \varepsilon\right\} = 1.$

四、小结

三个大数定理
- 契比雪夫定理的特殊情况
- 伯努利大数定理
- 辛钦定理

频率的稳定性是概率定义的客观基础，而伯努利大数定理以严密的数学形式论证了频率的稳定性.