专给程序员设计的线性代数

liuyubobobo

初等矩阵和可逆性

求解矩阵的逆

求解矩阵的逆

矩阵中 $AB = BA = I$ ，则称B是A的逆矩阵，记做：$B = A^{-1}$

只有方阵才有逆矩阵。

假设矩阵A有逆矩阵，如何求解?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A \cdot A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

求解矩阵的逆

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \qquad A\cdot A^{-1}=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求解矩阵的逆

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \qquad A \cdot A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

求解矩阵的逆

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{21} \\ 3x_{11} + 4x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_{12} + 2x_{22} \\ 3x_{12} + 4x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

求解矩阵的逆

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{21} \\ 3x_{11} + 4x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{12} + 2x_{22} \\ 3x_{12} + 4x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases}$$

求解矩阵的逆

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{21} \\ 3x_{11} + 4x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_{12} + 2x_{22} \\ 3x_{12} + 4x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{array}\right) \leftarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

求解矩阵的逆

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{21} \\ 3x_{11} + 4x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & x_{11} \\ 0 & 1 & x_{21} \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_{12} + 2x_{22} \\ 3x_{12} + 4x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & x_{12} \\ 0 & 1 & x_{22} \end{array}\right)$$

求解矩阵的逆

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & x_{11} \\ 0 & 1 & x_{21} \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & x_{12} \\ 0 & 1 & x_{22} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 1 & x_{21} & x_{22} \end{array}\right)$$

求解矩阵的逆

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 1 & x_{21} & x_{22} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c:c} A & I \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{c:c} I & A^{-1} \end{array}\right)$$

求解矩阵的逆

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1.5 & -0.5 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1.5 & -0.5 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

求解矩阵的逆

$$\left(\begin{array}{cc:cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

不可能有无数解

可能无解，此时矩阵A没有逆矩阵

何时无解？　系数矩阵化为行最简形式时有0行！

遗留一个小问题：

求解矩阵的逆

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

遗留一个小问题：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

我们求出了右逆

如果一个方阵A有右逆B，则B也是A的左逆，
即B是A的逆

证明后续分晓：）

实现求解矩阵的逆

实践： 实现求解矩阵的逆

初等矩阵

初等矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

矩阵的某一行乘以一个常数

矩阵的一行加（减）另一行

交换矩阵的两行

初等矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

矩阵的某一行乘以一个常数

矩阵的一行加（减）另一行

交换矩阵的两行

回忆：矩阵可以表示变换

这些操作能不能用矩阵表示?

即： $E * A = A'$

初等矩阵

矩阵的某一行乘以一个常数

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a & k \cdot b & k \cdot c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

初等矩阵

矩阵的一行加（减）另一行

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{pmatrix}$$

初等矩阵

矩阵的一行加（减）另一行

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-g & b-h & c-i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

初等矩阵

矩阵的一行加（减）另一行 的若干倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d-pg & e-ph & f-pi \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

初等矩阵

交换矩阵的两行

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

初等矩阵

矩阵的某一行
乘以一个常数

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

单位矩阵的某一行
乘以一个常数

矩阵的一行加（减）
另一行的若干倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

单位矩阵的一行加（减）
另一行的若干倍

交换矩阵的两行

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

交换单位矩阵的两行

初等矩阵

矩阵的
初等变换

矩阵的某一行
乘以一个常数

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵的一行加（减）
另一行的若干倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

交换矩阵的两行

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

初等矩阵

初等矩阵

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

初等矩阵：对单位矩阵进行一次初等变换得到的结果矩阵

通常记做E

初等矩阵

初等矩阵：对单位矩阵进行一次初等变换得到的结果矩阵

通常记做E

回忆使用 Gauss-Jordan 消元法把矩阵化为行最简形式的过程：

寻找一系列初等矩阵E，使得：

$$E_p \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = rref(A)$$

初等矩阵和可逆性

初等矩阵和可逆性

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

初等矩阵对单位矩阵进行一次初等变换得到

因为初等变换是可逆的，所以初等矩阵是可逆的

初等矩阵和可逆性

$$E_1=\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2=\begin{pmatrix} 1/k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等矩阵对单位矩阵进行一次初等变换得到

因为初等变换是可逆的，所以初等矩阵是可逆的

初等矩阵和可逆性

$$E_1 = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1/k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 \cdot E_1 = I \qquad E_1 \cdot E_2 = I$$

初等矩阵和可逆性

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等矩阵和可逆性

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

初等矩阵和可逆性

回忆使用 Gauss-Jordan 消元法把矩阵化为行最简形式的过程：

寻找一系列初等矩阵E，使得：

$$E_p \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = rref(A) \; = I$$

如果A可逆，回忆之前的分析：

$$\left(\begin{array}{cc:cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

何时无解？ 系数矩阵化为行最简形式时有0行！

初等矩阵和可逆性

如果A可逆，存在一系列E，使得：

$$E_p \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I$$

$$E_p \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1}$$

$$E_p \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot I = A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{c:c} A & I \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{c:c} I & A^{-1} \end{array}\right)$$

初等矩阵的逆

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

为什么矩阵可逆这么重要

矩阵的逆为什么重要?

对于线性系统： $Ax = b$

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

$$x = A^{-1} \cdot b$$

如果在A不变，b会变化的条件下，大大加快计算速度

矩阵的逆为什么重要?

对于线性系统: $Ax = b$ $x = A^{-1} \cdot b$

如果在A不变，b会变化的条件下，大大加快计算速度

经济系统中，对IT，电子，矿产，房产的投入 x_{it} x_e x_m x_h

$$x_{it} = 100 + 0.2x_e + 0.1x_m + 0.5x_h$$

$$x_e = 50 + 0.5x_{it} + 0.2x_m + 0.1x_h$$

$$x_m = 20 + 0.4x_e + 0.3x_h$$

$$x_h = 666 + 0.2x_{it}$$

矩阵的逆为什么重要?

更关键的是：矩阵的逆和很多重要的命题连接在了一起

对于方阵A

线性系统Ax=0只有唯一解，x=0

矩阵A可逆

$$rref(A) = I$$

A是非奇异矩阵

A可以表示成一系列初等矩阵的乘积

矩阵的逆为什么重要?

更关键的是：矩阵的逆和很多重要的命题连接在了一起　这些命题是等价的

对于方阵A

线性系统Ax=0只有唯一解，x=0

矩阵A可逆

A是非奇异矩阵

$rref(A) = I$

A可以表示成一系列初等矩阵的乘积

矩阵的逆为什么重要?

更关键的是：矩阵的逆和很多重要的命题连接在了一起　这些命题是等价的

对于方阵A

矩阵A可逆

A是非奇异矩阵

线性系统Ax=0只有唯一解，x=0

$$rref(A) = I$$

A可以表示成一系列初等矩阵的乘积

矩阵的逆为什么重要?

对于方阵A　　矩阵A可逆 $\longrightarrow$ 线性系统Ax=0只有唯一解，x=0

$$A \cdot x = O$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot O$$

$$I \cdot x = O$$

$$x = O$$

矩阵的逆为什么重要?

对于方阵A　　线性系统Ax=0只有唯一解，x=0 $\longrightarrow$ $rref(A) = I$

假设A为n*n矩阵

Ax=0有唯一解，则有n个未知数，且rref(A)有n个非零行

根据行最简形式的定义：　$rref(A) = I$

矩阵的逆为什么重要?

对于方阵A $rref(A) = I$ $\longrightarrow$ A可以表示成一系列初等矩阵的乘积

$$E_p \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = rref(A) = I$$

$$(E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot \ldots \cdot E_p^{-1}) \cdot E_p \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = (E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot \ldots \cdot E_p^{-1}) \cdot I$$

$$E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot \ldots \cdot I \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = (E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot \ldots \cdot E_p^{-1}) \cdot I$$

$$I \cdot A = (E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot \ldots \cdot E_p^{-1}) \cdot I$$

$$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot \ldots \cdot E_p^{-1}$$

矩阵的逆为什么重要?

对于方阵A

A可以表示成一系列初等矩阵的乘积 → A可逆

$$A = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot \ldots \cdot E_p$$

$$B = E_p^{-1} \cdot \ldots \cdot E_3^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_1^{-1}$$

$$A \cdot B = I$$

$$B = (E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot \ldots \cdot E_p)^{-1}$$

之前证明过：$(X \cdot Y)^{-1} = Y^{-1} \cdot X^{-1}$

$$B \cdot A = I$$

A可逆，且A的逆矩阵为B

矩阵的逆为什么重要?

更关键的是：矩阵的逆和很多重要的命题连接在了一起　这些命题是等价的

对于方阵A

矩阵A可逆

A是非奇异矩阵

线性系统Ax=0只有唯一解，x=0

$$rref(A) = I$$

A可以表示成一系列初等矩阵的乘积

矩阵的逆为什么重要?

这些命题是等价的

对于方阵A

矩阵A可逆(A是非奇异矩阵)

线性系统Ax=0只有唯一解，x=0

$$rref(A) = I$$

A可以表示成一系列初等矩阵的乘积

Ax=b只有唯一解

矩阵的逆为什么重要?

$P \Leftrightarrow Q$ $\qquad\qquad$ $\neg P \Leftrightarrow \neg Q$

矩阵A可逆(A是非奇异矩阵) $\Leftrightarrow$ $rref(A) = I$

矩阵A不可逆(A是奇异矩阵) $\Leftrightarrow$ $rref(A) \neq I$ A的行最简形式存在零行

$$\left(\begin{array}{cc:cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

可能无解，此时矩阵A没有逆矩阵

何时无解? 系数矩阵化为行最简形式时有0行!

矩阵的逆为什么重要?

这些命题是等价的　　这些命题的否命题也是等价的

对于方阵A

矩阵A可逆(A是非奇异矩阵)

线性系统Ax=0只有唯一解，x=0

$$rref(A) = I$$

A可以表示成一系列初等矩阵的乘积

Ax=b只有唯一解

矩阵的LU分解

矩阵的分解

数的分解　　66 = 2 * 3 * 11　　质因数分解

一个矩阵也可以分解成为几个矩阵乘积的形式

矩阵分解有不同的目的

矩阵的LU分解，提高计算效率为目的。

矩阵的LU分解

将矩阵A分解为 $A = L \cdot U$

以方阵为例：

L： Lower Triangle Matrix
下三角矩阵

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

U： Upper Triangle Matrix
上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

矩阵的LU分解

将矩阵A分解为 $A = L \cdot U$

以方阵为例：

L： Lower Triangle Matrix

下三角矩阵

单位下三角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}$$

U： Upper Triangle Matrix

上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

矩阵的LU分解

将矩阵A分解为 $A = L \cdot U$ 以方阵为例

回忆高斯消元的过程

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

高斯消元法的过程，通过初等变换，把一个矩阵变成了上三角矩阵！

矩阵的LU分解

将矩阵A分解为 $A = L \cdot U$ 以方阵为例

高斯消元法的过程，通过初等变换，把一个矩阵变成了上三角矩阵！

$$E_p \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = U$$

$$E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot \ldots \cdot E_p^{-1} \cdot E_p \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot \ldots \cdot E_p^{-1} \cdot U$$

$$I \cdot A = (E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot \ldots \cdot E_p^{-1}) \cdot U$$

$$A = L \cdot U \longrightarrow L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot \ldots \cdot E_p^{-1}$$

矩阵的LU分解

将矩阵A分解为 $A = L \cdot U$ 以方阵为例

$$E_p \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = U \qquad L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot \ldots \cdot E_p^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵的LU分解

将矩阵A分解为 $A = L \cdot U$ 以方阵为例

$$E_p \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = U \qquad L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot \ldots \cdot E_p^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -9 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵的LU分解

将矩阵A分解为 $A = L \cdot U$ 以方阵为例

$$E_p \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = U \qquad L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot \ldots \cdot E_p^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -9 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

矩阵的LU分解

将矩阵A分解为 $A = L \cdot U$ 以方阵为例

$$E_p \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = U \qquad L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot \ldots \cdot E_p^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -9 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

方便计算，主元位置不归一

矩阵的LU分解

将矩阵A分解为 $A = L \cdot U$ 以方阵为例

$$E_p \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = U \qquad L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot \ldots \cdot E_p^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

矩阵可以进行LU分解的条件：对A进行高斯消元的过程

不需要交换两行的位置

矩阵的LU分解

为什么进行矩阵的LU分解

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

在解Ax=b的过程中

LU分解：O(0.5n^3)

$$L \cdot U \cdot x = b$$

设Ux=y　　$L \cdot y = b$　　O(n^2)求出y

$U \cdot x = y$　　O(n^2)求出x

矩阵的LU分解

在解Ax=b的过程中　　LU分解：O(0.5n^3)　+2*O(n^2)

对比求解矩阵的逆：　　求逆：O(2*n^3)　+O(n^2)

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 1 & x_{21} & x_{22} \end{array}\right)$$

$$x = A^{-1} \cdot b$$

实现矩阵的LU分解

实践：实现矩阵的LU分解

非方阵的LU分解，
矩阵的LDU分解和PLU分解

矩阵的LU分解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

矩阵的LU分解

LU分解可以用于非方阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

矩阵的LU分解

LU分解可以用于非方阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

矩阵的LU分解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad U=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A=L\cdot U$$

矩阵的LU分解

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&-3&5\end{pmatrix}\qquad L=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&3&1\end{pmatrix}\qquad U=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&14\end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&3&1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&14\end{pmatrix}\qquad U=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A=L\cdot D\cdot U$$

矩阵的LU分解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & -9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵的LU分解

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&8&6\\3&-3&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&-6\\3&-3&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&-6\\0&-9&-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-9&-4\\0&0&-6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\4&0&1\end{pmatrix}$$

矩阵的LU分解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \underset{P}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{L}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{U}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}}$$

置换矩阵

矩阵的PLU分解

非方阵的PLUP’分解和
再看矩阵的乘法

矩阵的LU分解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

继续高斯消元，需要交换矩阵的两列

初等变换只能交换矩阵的两行

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

矩阵的LU分解

继续高斯消元，需要交换矩阵的两列

初等变换只能交换矩阵的两行

交换矩阵的两列，需要右乘以置换矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

矩阵的LU分解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

继续高斯消元，需要交换矩阵的两列

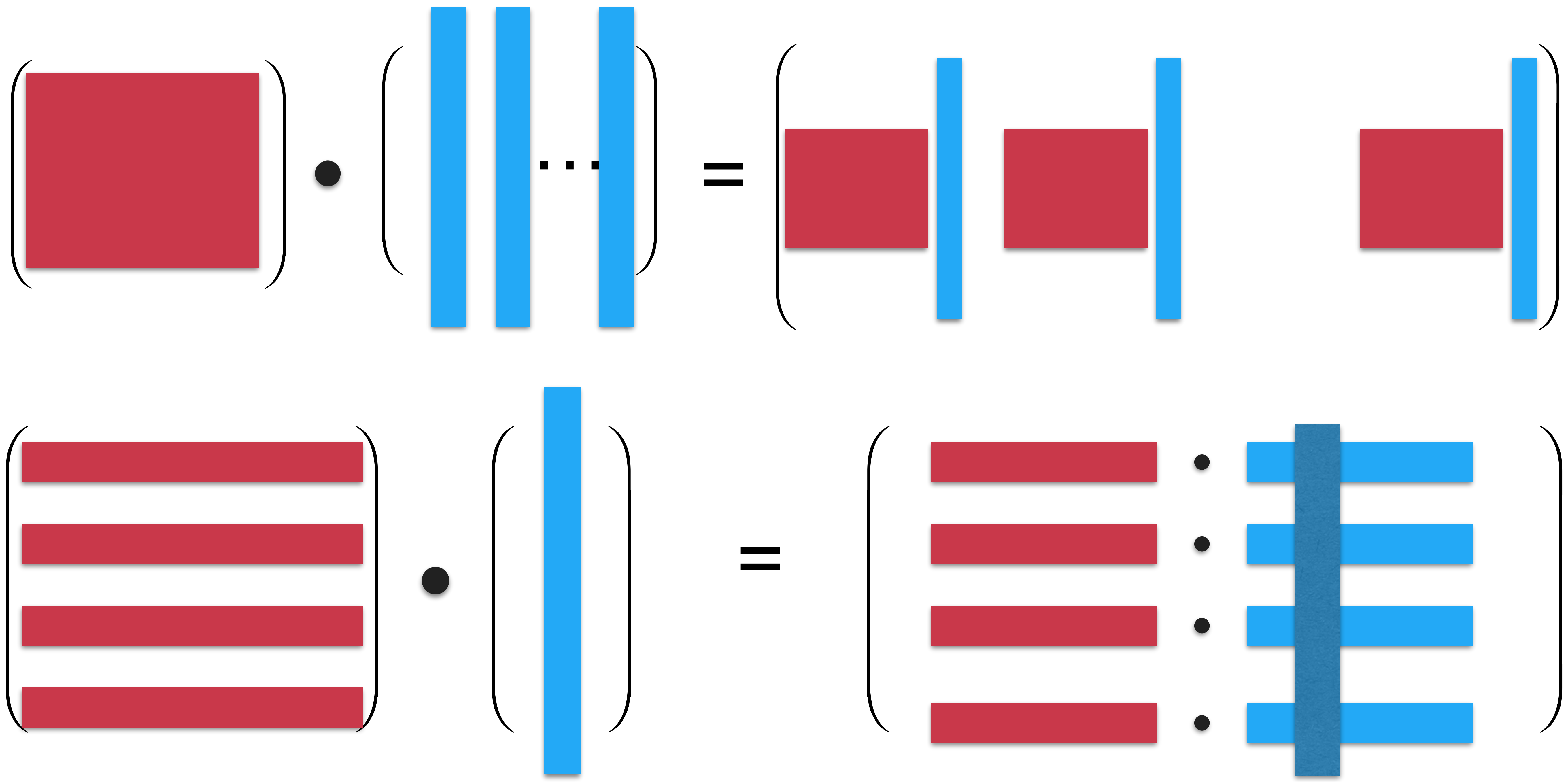
$$A = P \cdot L \cdot U \cdot P'$$

列交换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

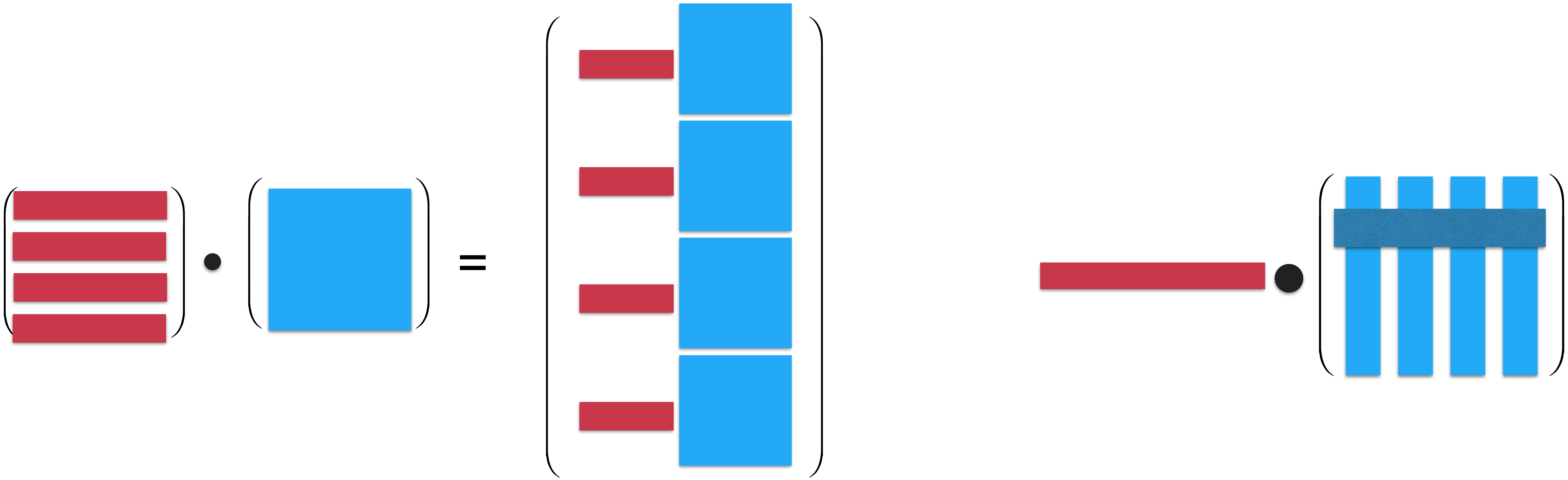
列交换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

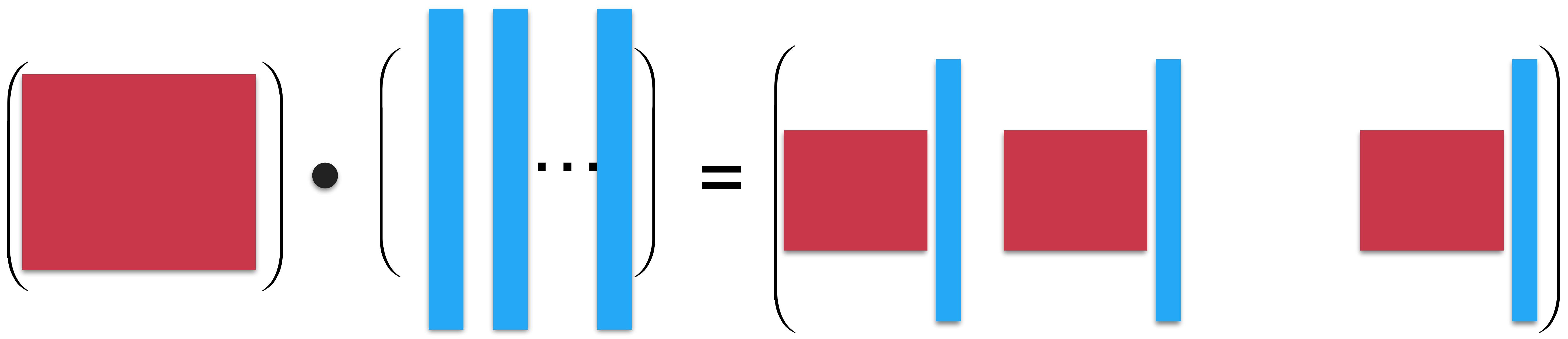


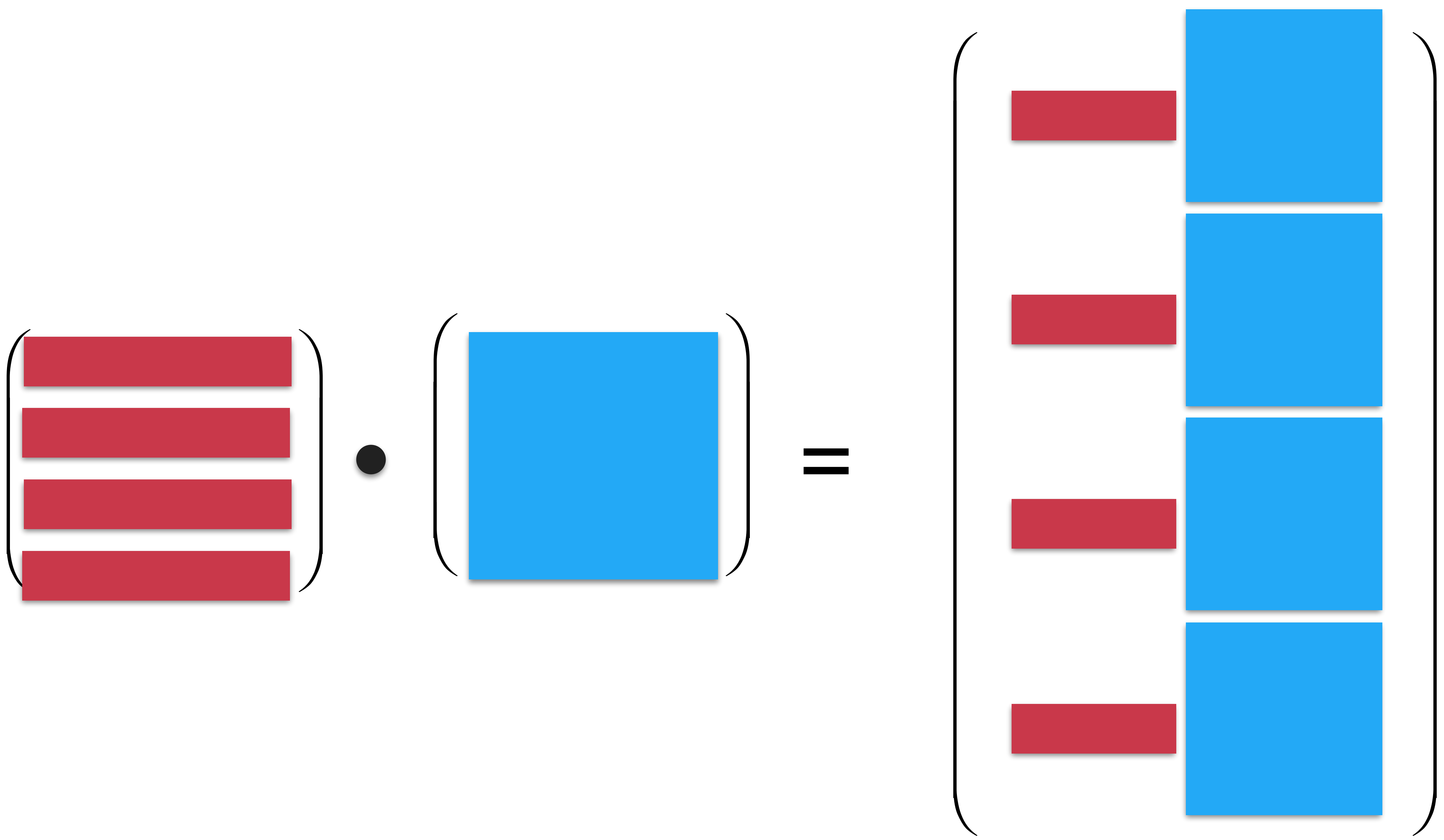
行交换

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$



矩阵乘法

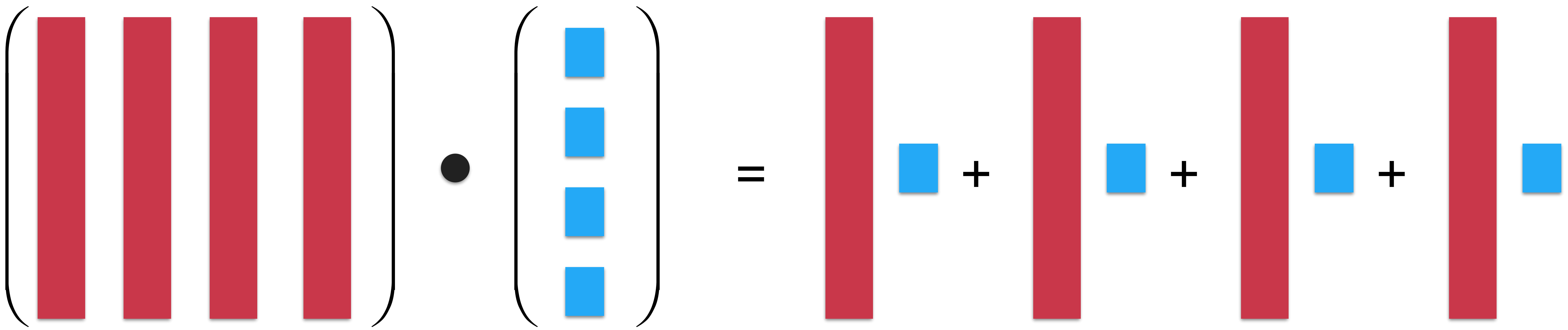




列交换

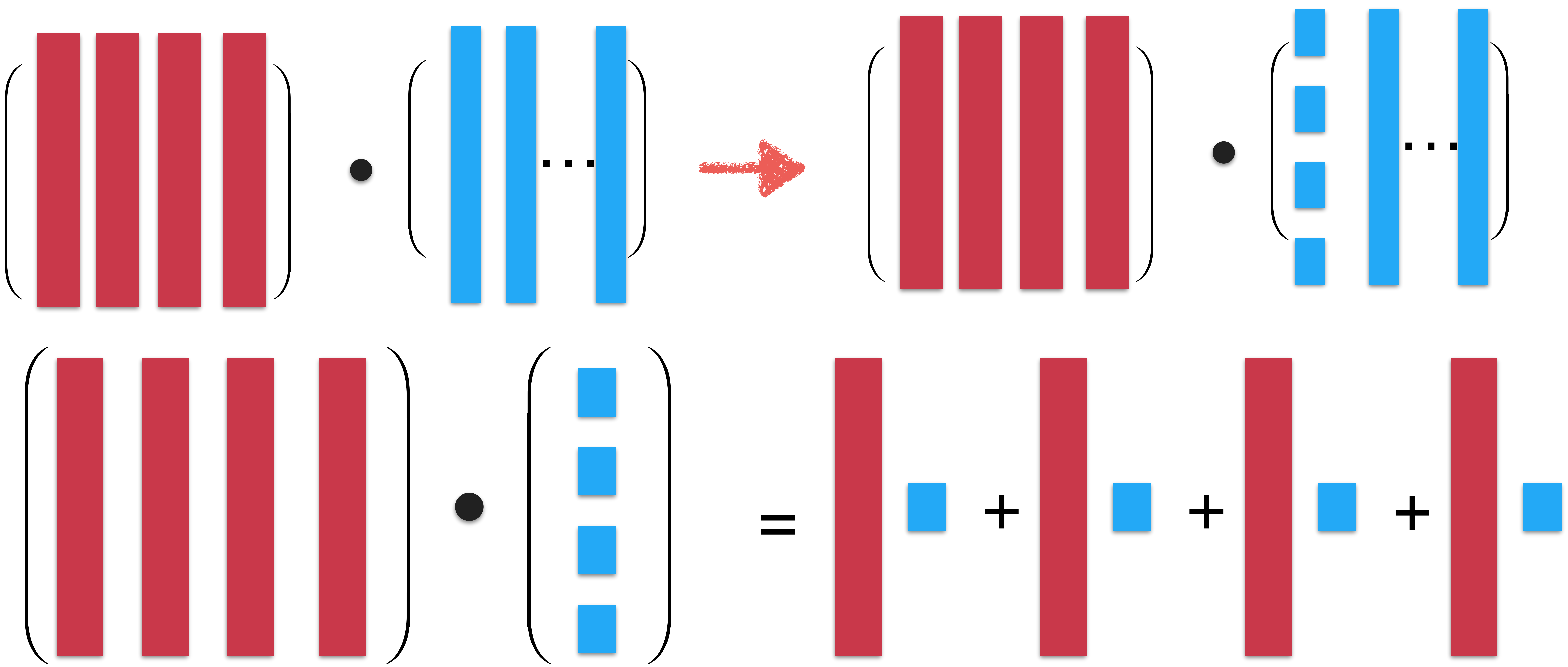
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 4x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} y$$

列视角

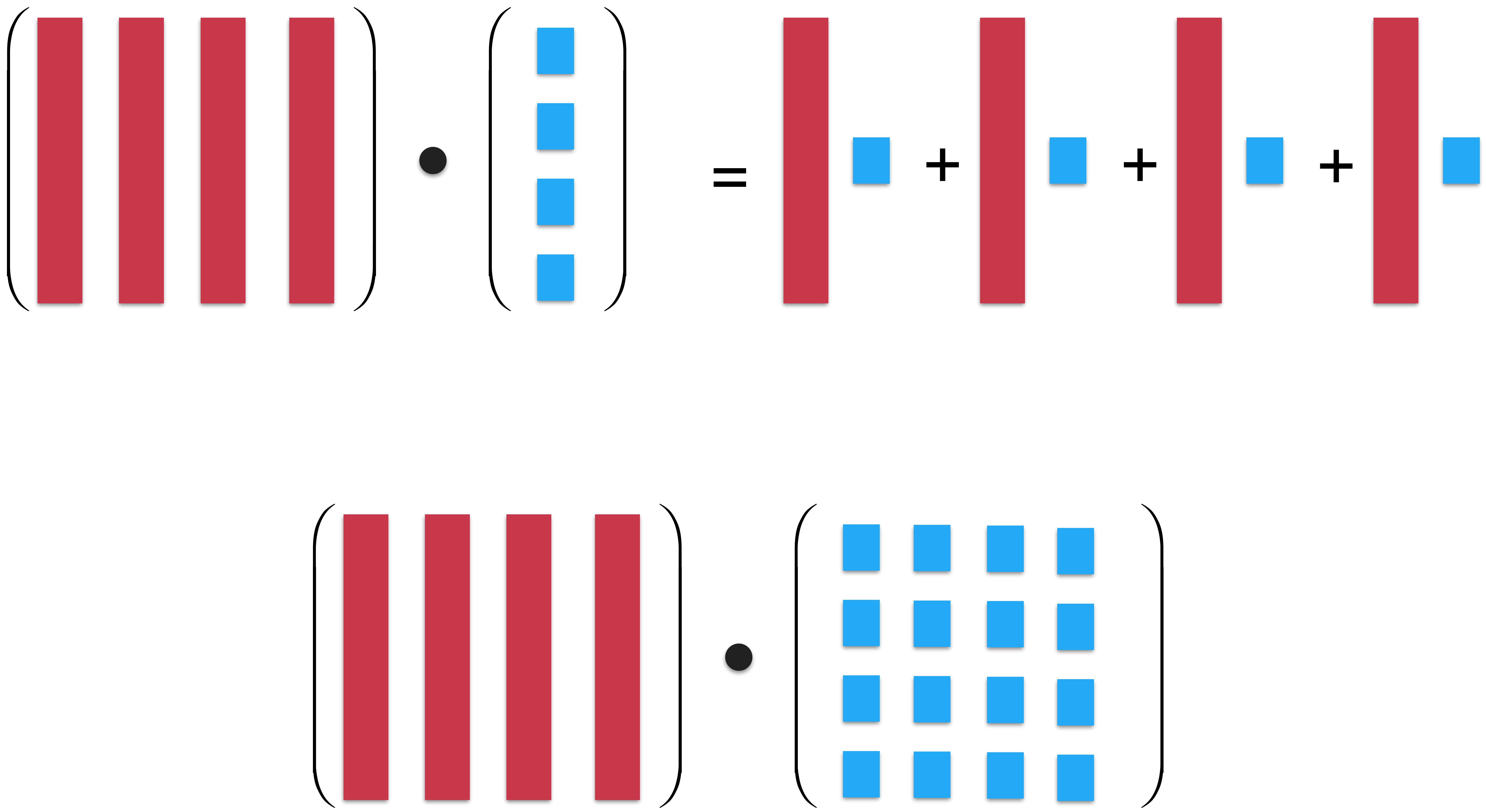


列交换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$



再看矩阵乘法



再看矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} - & \vec{r_1} & - \\ - & \vec{r_2} & - \\ & \dots & \\ - & \vec{r_m} & - \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{c_1} & \vec{c_2} & \dots & \vec{c_n} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r_1} \cdot \vec{c_1} & \vec{r_1} \cdot \vec{c_2} & \dots & \vec{r_1} \cdot \vec{c_n} \\ \vec{r_2} \cdot \vec{c_1} & \vec{r_2} \cdot \vec{c_2} & \dots & \vec{r_2} \cdot \vec{c_n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \vec{r_m} \cdot \vec{c_1} & \vec{r_m} \cdot \vec{c_2} & \dots & \vec{r_m} \cdot \vec{c_n} \end{pmatrix}$$

$$res_{ij} = \vec{r_i} \cdot \vec{c_j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$$

再看矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} - & \overrightarrow{r_1} & - \\ - & \overrightarrow{r_2} & - \\ & \dots & \\ - & \overrightarrow{r_m} & - \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \overrightarrow{c_1} & \overrightarrow{c_2} & \dots & \overrightarrow{c_n} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \overrightarrow{c_1} & \overrightarrow{c_2} & \dots & \overrightarrow{c_k} \\ | & | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} - & \overrightarrow{r_1} & - \\ - & \overrightarrow{r_2} & - \\ & \dots & \\ - & \overrightarrow{r_k} & - \end{pmatrix}$$

$$res_{ij} = \overrightarrow{r_i} \cdot \overrightarrow{c_j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$(\overrightarrow{c_1} \cdot \overrightarrow{r_1})_{ij} \quad (\overrightarrow{c_2} \cdot \overrightarrow{r_2})_{ij} \qquad (\overrightarrow{c_k} \cdot \overrightarrow{r_k})_{ij}$$

再看矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} - & \vec{r_1} & - \\ - & \vec{r_2} & - \\ & \dots & \\ - & \vec{r_m} & - \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{c_1} & \vec{c_2} & \dots & \vec{c_n} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{c_1} & \vec{c_2} & \dots & \vec{c_k} \\ | & | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} - & \vec{r_1} & - \\ - & \vec{r_2} & - \\ & \dots & \\ - & \vec{r_k} & - \end{pmatrix}$$

$$res_{ij} = \vec{r_i} \cdot \vec{c_j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$$

$$(\vec{c_1} \cdot \vec{r_1})_{ij} \quad (\vec{c_2} \cdot \vec{r_2})_{ij} \quad (\vec{c_k} \cdot \vec{r_k})_{ij} \qquad res = \vec{c_1} \cdot \vec{r_1} + \vec{c_2} \cdot \vec{r_2} + \dots + \vec{c_k} \cdot \vec{r_k}$$

再看矩阵乘法

列视角看矩阵乘法

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{c_1} & \vec{c_2} & \dots & \vec{c_k} \\ | & | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} - & \vec{r_1} & - \\ - & \vec{r_2} & - \\ & \dots & \\ - & \vec{r_k} & - \end{pmatrix} = \vec{c_1} \cdot \vec{r_1} + \vec{c_2} \cdot \vec{r_2} + \dots + \vec{c_k} \cdot \vec{r_k}$$

再看矩阵乘法

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} - & \overrightarrow{r_1} & - \\ - & \overrightarrow{r_2} & - \\ & \dots & \\ - & \overrightarrow{r_m} & - \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \overrightarrow{c_1} & \overrightarrow{c_2} & \dots & \overrightarrow{c_n} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{c_1} & \overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{c_2} & \dots & \overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{c_n} \\ \overrightarrow{r_2} \cdot \overrightarrow{c_1} & \overrightarrow{r_2} \cdot \overrightarrow{c_2} & \dots & \overrightarrow{r_2} \cdot \overrightarrow{c_n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \overrightarrow{r_m} \cdot \overrightarrow{c_1} & \overrightarrow{r_m} \cdot \overrightarrow{c_2} & \dots & \overrightarrow{r_m} \cdot \overrightarrow{c_n} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \overrightarrow{c_1} & \overrightarrow{c_2} & \dots & \overrightarrow{c_k} \\ | & | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} - & \overrightarrow{r_1} & - \\ - & \overrightarrow{r_2} & - \\ & \dots & \\ - & \overrightarrow{r_k} & - \end{pmatrix} = \overrightarrow{c_1} \cdot \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{c_2} \cdot \overrightarrow{r_2} + \dots + \overrightarrow{c_k} \cdot \overrightarrow{r_k}$$

矩阵的LU分解

$$A = L \cdot U$$

$$A = L \cdot D \cdot U$$

$$A = P \cdot L \cdot U$$

$$A = P \cdot L \cdot U \cdot P'$$

矩阵的逆为什么重要?

这些命题是等价的	这些命题的否命题也是等价的
对于方阵A	矩阵A可逆(A是非奇异矩阵)
	线性系统Ax=0只有唯一解，x=0
	$rref(A) = I$
	A可以表示成一系列初等矩阵的乘积
	Ax=b只有唯一解

初等矩阵和可逆性

其他

欢迎大家关注我的个人公众号：是不是很酷

专给程序员设计的线性代数

liuyubobobo