Práctica 1 Aprendizaje Automático

Antonio Álvarez Caballero

Generación y visualización de datos

Ejercicio 1

En primer lugar, creamos una función que crea un data.frame con valores aleatorios según una distribución uniforme. *N* es el número de filas del data.frame, *dim* el número de columnas y *rango* el rango donde estarán los valores.

```
simula_unif <- function(N, dim, rango){
  res <- data.frame(matrix(nrow = N, ncol = dim))

  for(i in 1:N){
    res[i,] <- runif(dim, rango[1], rango[length(rango)])
  }

  names(res) <- c("X", "Y")

  return(res)
}
```

Ejercicio 2

Del mismo modo creamos una función análoga para la distribución *normal* o *gaussiana*.

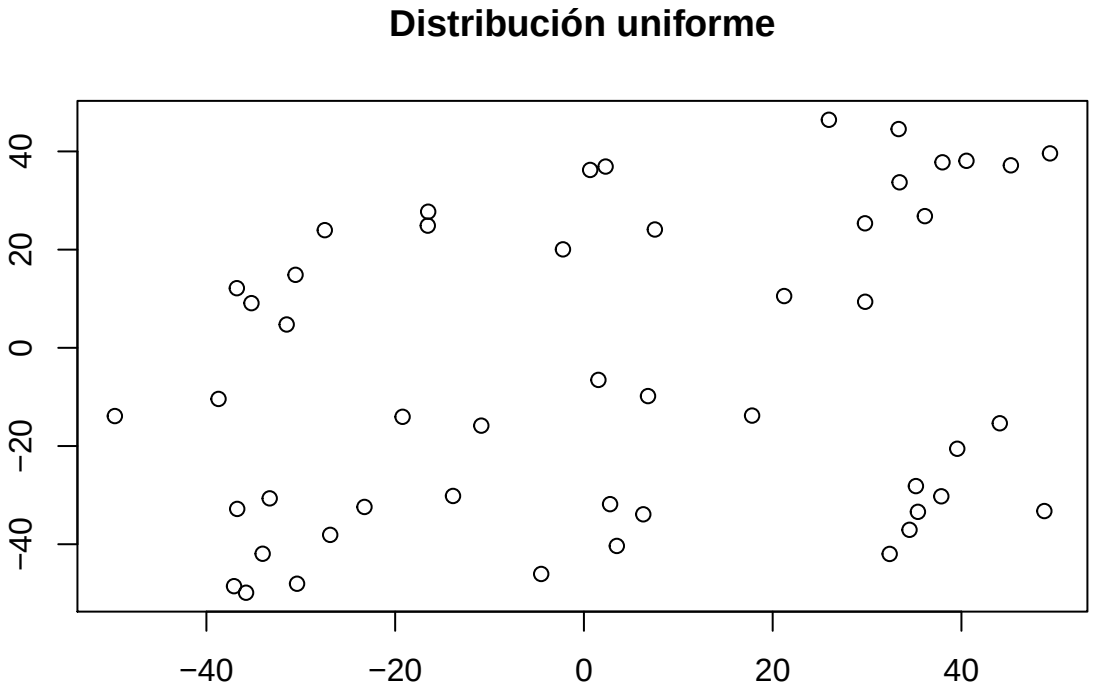
```
simula_gauss <- function(N, dim, sigma){
  res <- data.frame(matrix(nrow = N, ncol = dim))

  for(i in 1:N){
    res[i,] <- rnorm(dim, sd = sqrt(sigma))
  }

  names(res) <- c("X", "Y")

  return(res)
}
```

Ejercicios 3 y 4

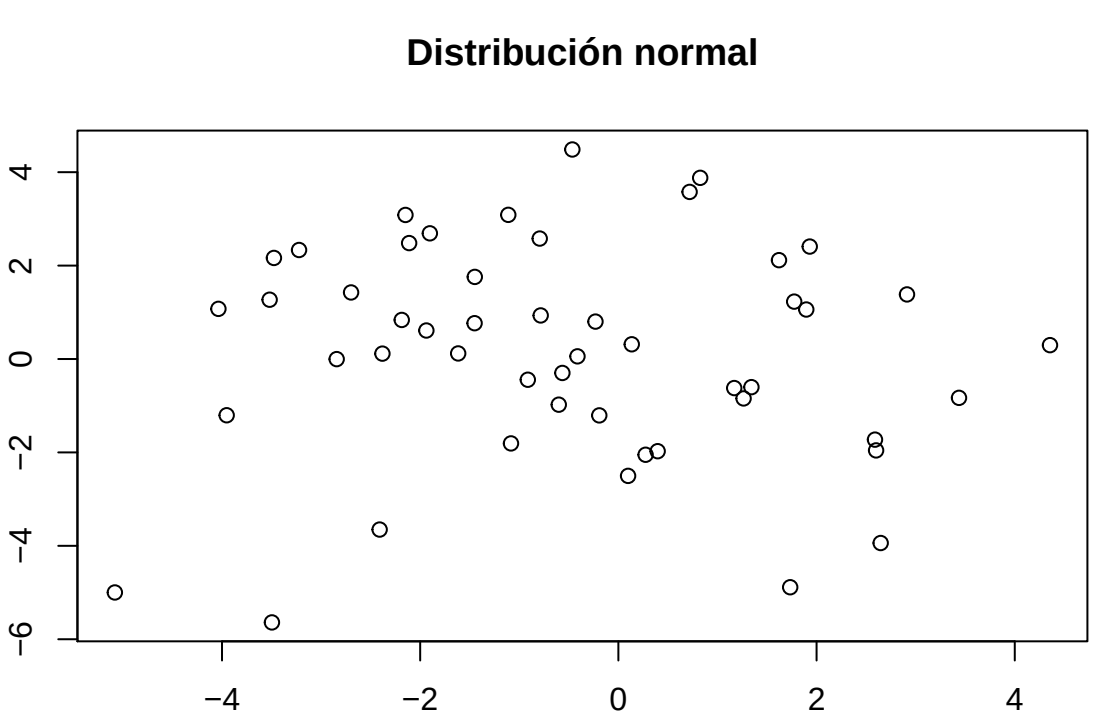
Ahora asignamos los resultados a sendos objetos del tipo *data.frame* y las dibujamos.

```
muestra.uniforme <- simula_unif(50, 2, -50:50)
muestra.gaussiana <- simula_gauss(50, 2, 5:7)
```

```r
plot(muestra.uniforme, main = "Distribución uniforme", xlab = "", ylab = "")
```




```r
plot(muestra.gaussiana, main = "Distribución normal", xlab = "", ylab = "")
```



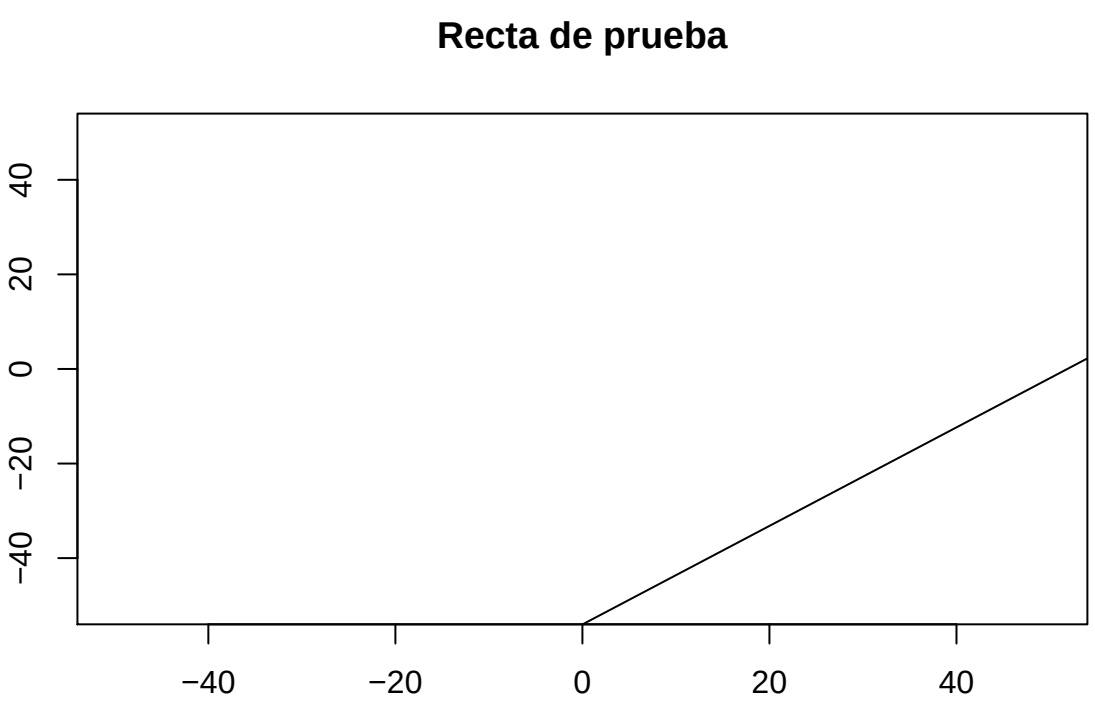
Ejercicio 5

Ahora escribimos una pequeña función para calular una recta aleatoria dado un intervalo. Daremos la recta con la ecuación punto pendiente, por lo que tenemos que calcular la pendiente y la desviación.

```
simulaRecta <- function(intervalo){
  A <- runif(2, intervalo[1], intervalo[length(intervalo)])
  B <- runif(2, intervalo[1], intervalo[length(intervalo)])

  # La pendiente m es el cociente de las diferencias de las componentes
  m <- (A[2] - B[2]) / (A[1] - B[1])

  # La traslación b la sacamos despejando de y = ax + b
  b <- A[2] - m * A[1]

  # Lo devolvemos en este orden para ser consistentes con abline
  return(c(b,m))
}
```

Generamos una recta aleatoria en $[-50, 50]$

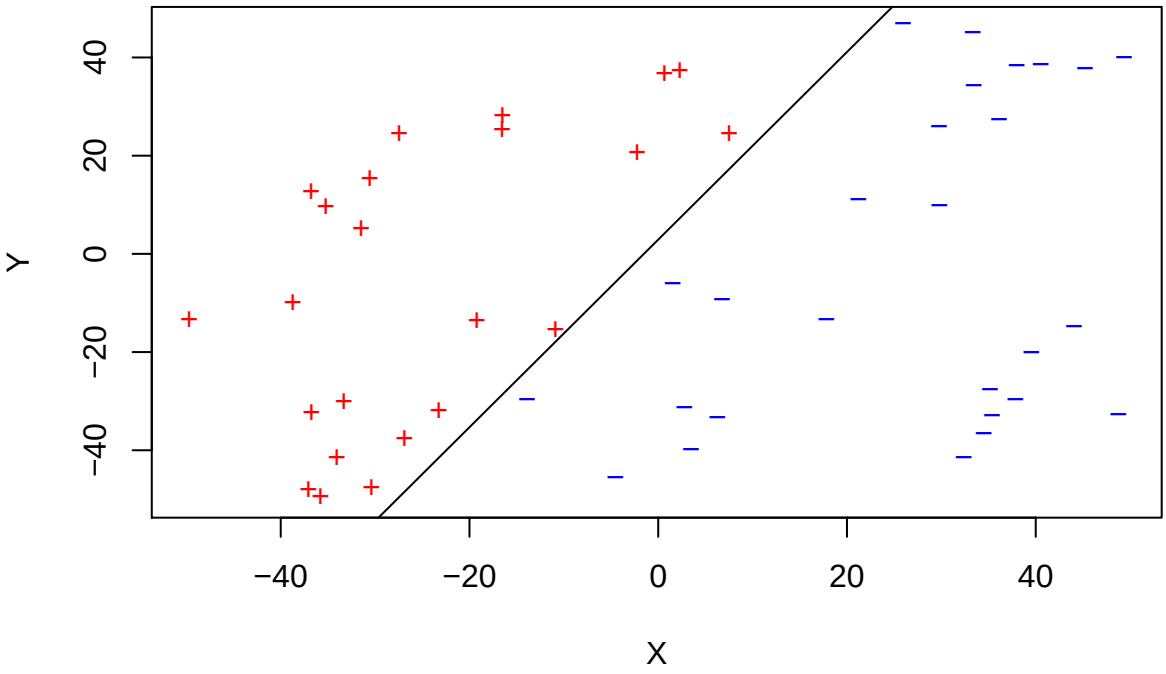
```
rectaPrueba <- simulaRecta(-50:50)

plot(1, type="n",main="Recta de prueba", xlab="", ylab="", xlim=c(-50, 50), ylim=c(-50, 50))
abline(coef = rectaPrueba)
```



Ejercicio 6

Ahora clasificamos los datos de la muestra uniforme según otra recta aleatoria. Guardamos las muestras clasificadas para próximos ejercicios.

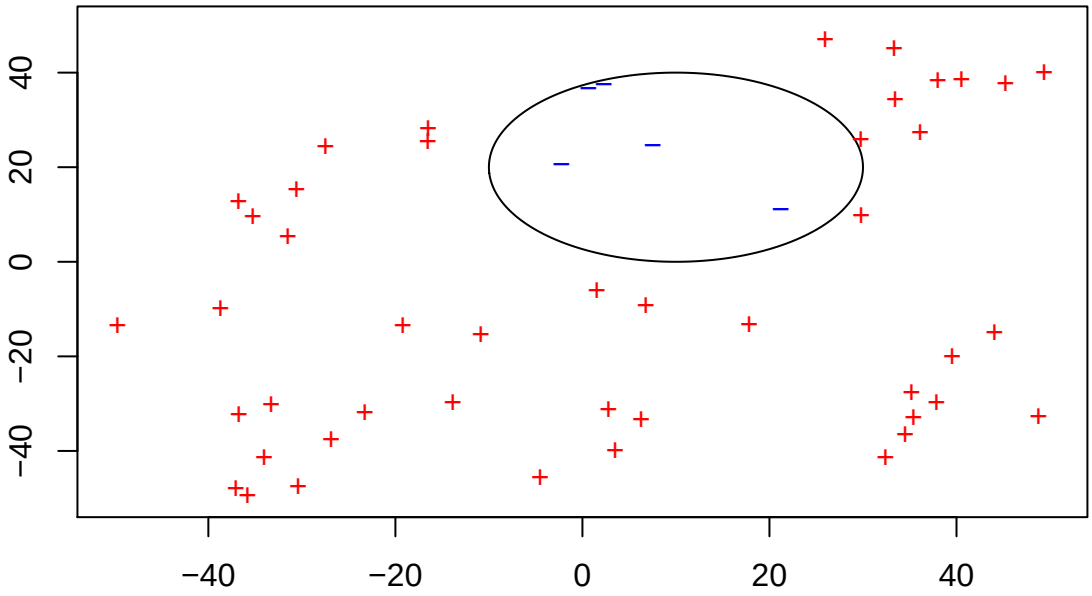
```
rectaClasificacion <- simulaRecta(-50:50)

muestra.uniforme.etiquetada <- cbind(muestra.uniforme, Etiqueta = sign(muestra.uniforme$Y -
    rectaClasificacion[2] * muestra.uniforme$X - rectaClasificacion[1]))

muestra.uniforme.positiva <- subset(muestra.uniforme.etiquetada, Etiqueta ==
    1)

muestra.uniforme.negativa <- subset(muestra.uniforme.etiquetada, Etiqueta ==
    -1)

formas <- ifelse(muestra.uniforme.etiquetada$Etiqueta == 1, "+", "-")
colores <- ifelse(muestra.uniforme.etiquetada$Etiqueta == 1, "red", "blue")

plot(muestra.uniforme, pch = formas, col = colores)

abline(coef = rectaClasificacion)
```



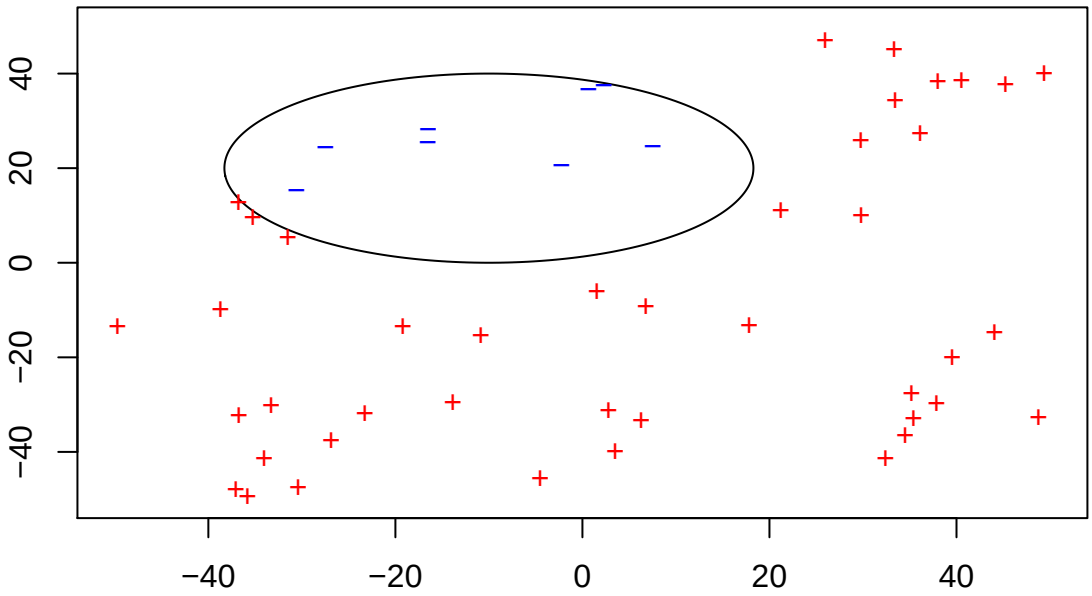
Ejercicio 7

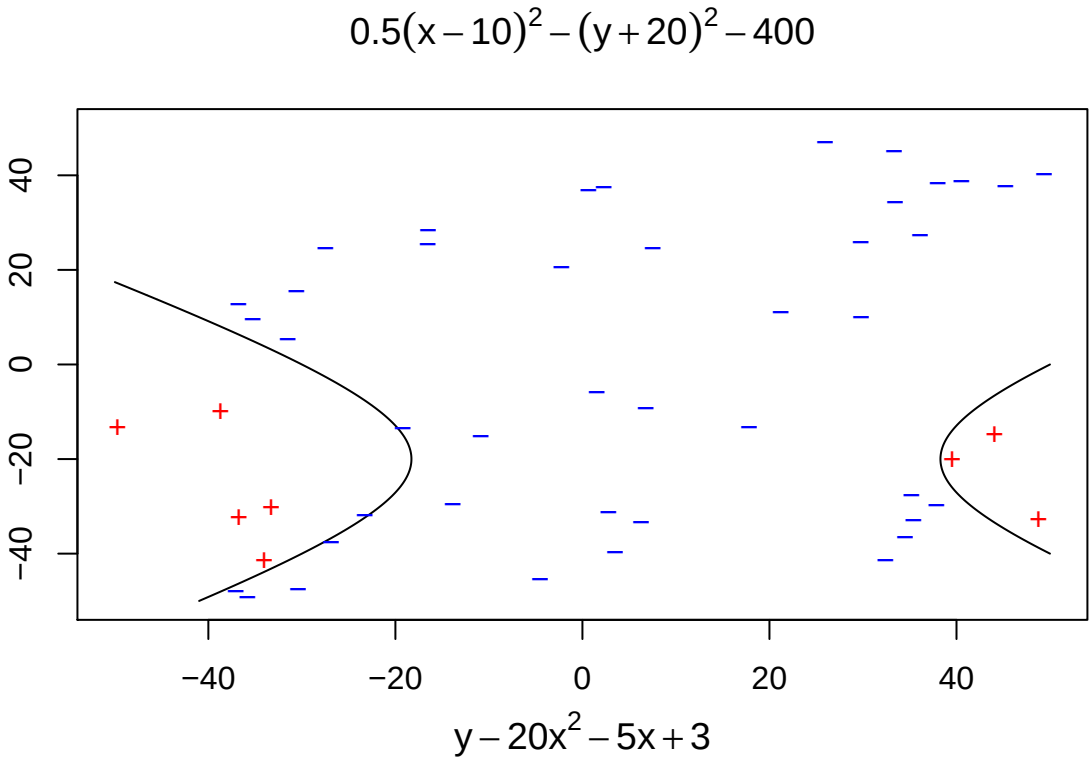
Una vez hemos clasificado los datos con una recta, clasificamos con otro tipo de funciones.

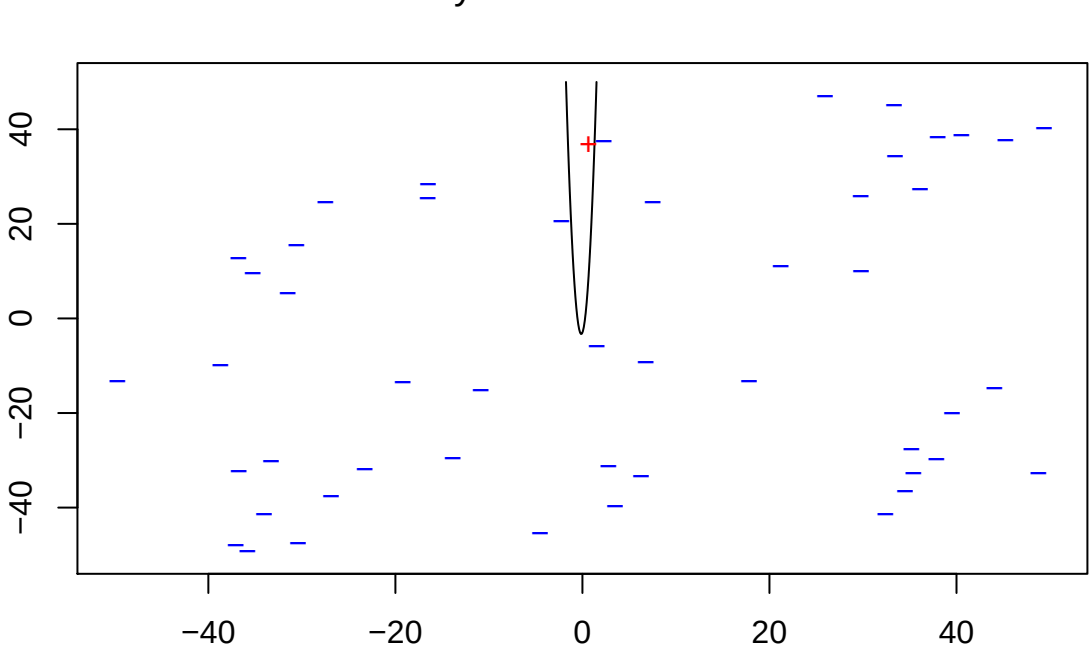
$$(x-10)^2+(y-20)^2-400$$



$$0.5(x+10)^2+(y-20)^2-400$$







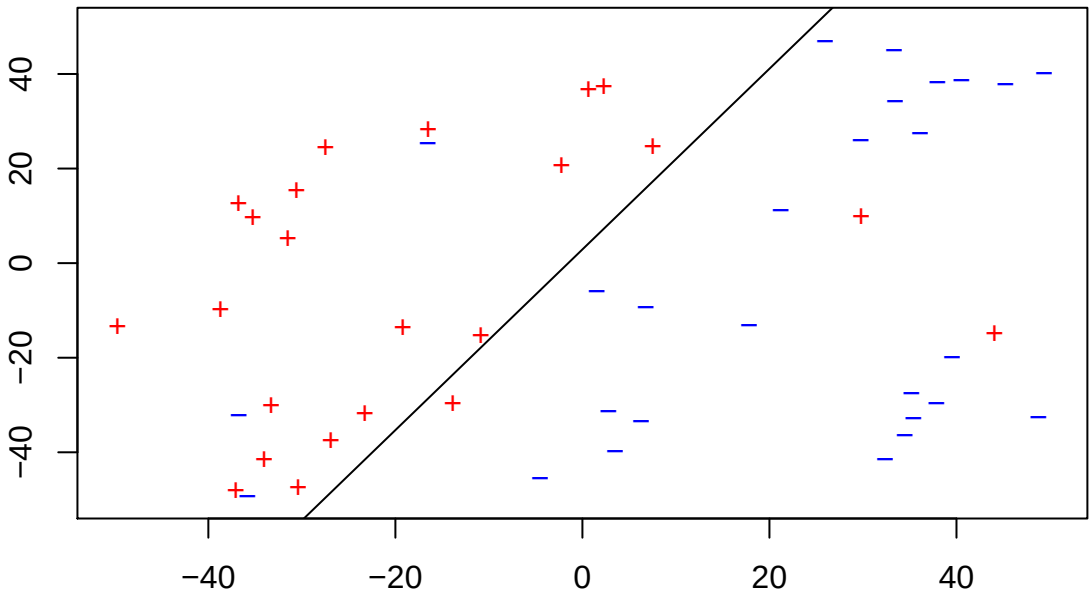
Parece que las regiones no lineales no serán tan fáciles de predecir como las lineales. Un algoritmo sencillo como el *PLA* no podrá separar estos datos.

Ejercicio 8

Tomamos la muestra clasificada y creamos un vector de booleanos con el 10% *TRUE* y el restante *FALSE*. Así luego extraeremos una porción de la muestra.

```
# Tomamos la porción deseada
porcion <- 10
numero.datos.positivos <- ceiling(nrow(muestra.uniforme.positiva) * porcion/100)
numero.datos.negativos <- ceiling(nrow(muestra.uniforme.negativa) * porcion/100)

# Generamos vectores de booleanos
vector.aleatorio.muestras.positivas <- c(rep(FALSE, numero.datos.positivos),
    rep(TRUE, nrow(muestra.uniforme.positiva) - numero.datos.positivos))

vector.aleatorio.muestras.negativas <- c(rep(FALSE, numero.datos.negativos),
    rep(TRUE, nrow(muestra.uniforme.negativa) - numero.datos.negativos))

# Los reordenamos
vector.aleatorio.muestras.positivas <- sample(vector.aleatorio.muestras.positivas)
vector.aleatorio.muestras.negativas <- sample(vector.aleatorio.muestras.negativas)

# Separamos
muestra.uniforme.positiva.nueva <- muestra.uniforme.positiva[vector.aleatorio.muestras.positivas,
    ]
muestra.uniforme.negativa.nueva <- muestra.uniforme.negativa[vector.aleatorio.muestras.negativas,
    ]

# Volvemos a unir
muestra.uniforme.positiva.nueva <- rbind(muestra.uniforme.positiva.nueva,
    muestra.uniforme.negativa[!vector.aleatorio.muestras.negativas, ])

muestra.uniforme.negativa.nueva <- rbind(muestra.uniforme.negativa.nueva,
    muestra.uniforme.positiva[!vector.aleatorio.muestras.positivas, ])

muestra.uniforme.positiva.nueva$Etiqueta <- 1
muestra.uniforme.negativa.nueva$Etiqueta <- -1
```

Ahora mostramos los nuevos resultados



Al haber cambiado las etiquetas, los nuevos datos no son linealmente separables, luego el *PLA* no convergerá.

Ajuste del algoritmo Perceptron (PLA)

Ejercicio 1

Vamos a escribir una función que implemente el algoritmo *Perceptron* o *PLA*. *Datos* es un *data.frame* con cada muestra por fila, *label* el vector de etiquetas, el cual debe tener la misma longitud que los datos de muestra, *max_iter* es el número máximo de iteraciones del algoritmo y *vini* es el vector inicial, que debe tener la misma dimensión que los datos.

```
ajusta_PLA <- function(datos, label, max_iter, vini){
  cambio <- TRUE
  w <- vini
  iteraciones <- 0
  errores <- 0
  X <- cbind(1,datos)

  while (cambio && iteraciones < max_iter){
    cambio <- FALSE
    errores <- 0
    for (i in 1:nrow(datos)){
      x_i <- as.numeric(X[i,])
      prodEscalar <- crossprod(w,x_i)
      if (sign(prodEscalar) != label[i]){
        cambio <- TRUE
        errores <- errores + 1
        w <- w + label[i] * x_i
      }
    }
    iteraciones <- iteraciones + 1
  }
```

```
  resultado <- list("Peso inicial" = vini ,"Pesos" = w,
                    "Iteraciones" = iteraciones, "Errores" = errores,
                    "Recta" = c(-w[1]/w[3], -w[2]/w[3]) )
  return (resultado)
}
```

Ejercicio 2

Vamos a hacer una simulación de prueba. Tomamos los datos de la muestra uniforme y un vector de etiquetas aleatorio.

```
etiquetas <- t(as.vector(muestra.uniforme.etiquetada["Etiqueta"]))
vini <- rep(0,3)

resultado <- ajusta_PLA(muestra.uniforme, etiquetas, 100, vini)

w <- as.vector(resultado$Pesos)
iteraciones <- as.numeric(resultado$Iteraciones)

print(iteraciones)
```

```
## [1] 3
```

```
mediaIteraciones <- 0

for (i in 1:10){
  vini <- runif(3, 0,1)
  print(vini)
  resultado <- ajusta_PLA(muestra.uniforme, etiquetas, 100, vini)
  mediaIteraciones <- mediaIteraciones + as.numeric(resultado$Iteraciones)
  print(resultado$Iteraciones)
}
```

```
## [1] 0.7120449 0.6921819 0.2605972
## [1] 3
## [1] 0.35961356 0.48126674 0.05552475
## [1] 3
## [1] 0.8716329 0.2241864 0.6137978
## [1] 3
## [1] 0.7852743 0.6781014 0.4587150
## [1] 3
## [1] 0.88137107 0.79311452 0.07931007
## [1] 3
## [1] 0.2620294 0.2664431 0.4751918
## [1] 3
## [1] 0.2555615 0.2817887 0.7604727
## [1] 3
## [1] 0.06461388 0.05177023 0.39075008
## [1] 3
## [1] 0.3270345 0.5473843 0.8684330
## [1] 3
## [1] 0.0992748 0.5737763 0.1939429
## [1] 3
```

```
mediaIteraciones <- mediaIteraciones / 10

print(mediaIteraciones)
```

```
## [1] 3
```

De estos resultados podemos decir que si los datos son separables, el *PLA* converge rápidamente.

Ejercicio 3

Vamos a ejecutar el *PLA* con un conjunto de datos no separable.

```
muestra.uniforme.no.separable <- rbind(cbind(muestra.uniforme.positiva.nueva),
                                       cbind(muestra.uniforme.negativa.nueva))

rownames(muestra.uniforme.no.separable) <- NULL

etiquetas <- t(as.vector(muestra.uniforme.no.separable["Etiqueta"]))

vini <- rep(0,3)

resultado <- ajusta_PLA(muestra.uniforme.no.separable[,c("X","Y")], etiquetas, 10, vini)
print(resultado$Errores)
```

```
## [1] 11
```

```
resultado <- ajusta_PLA(muestra.uniforme.no.separable[,c("X","Y")], etiquetas, 100, vini)
print(resultado$Errores)
```

```
## [1] 15
```

```
resultado <- ajusta_PLA(muestra.uniforme.no.separable[,c("X","Y")], etiquetas, 1000, vini)
print(resultado$Errores)
```

```
## [1] 14
```

Visto los resultados, podemos afirmar que sobre un conjunto no separable de datos, el *PLA* no converge y por tanto no da buenas soluciones por muchas iteraciones que le permitamos.

Ejercicio 4

Tomemos la función cuadrática del Ejercicio 7 y realicemos el mismo procedimiento.

```
f <- function(x,y) {(x-10)^2 + (y-20)^2 - 400}

muestra.uniforme.circular <- cbind(muestra.uniforme,
                                   Etiqueta = sign(f(muestra.uniforme$X, muestra.uniforme$Y)))

etiquetas <- t(as.vector(muestra.uniforme.circular["Etiqueta"]))

vini <- rep(0,3)

resultado <- ajusta_PLA(muestra.uniforme.circular[,c("X","Y")], etiquetas, 10, vini)
print(resultado$Errores)
```

```
## [1] 20
```

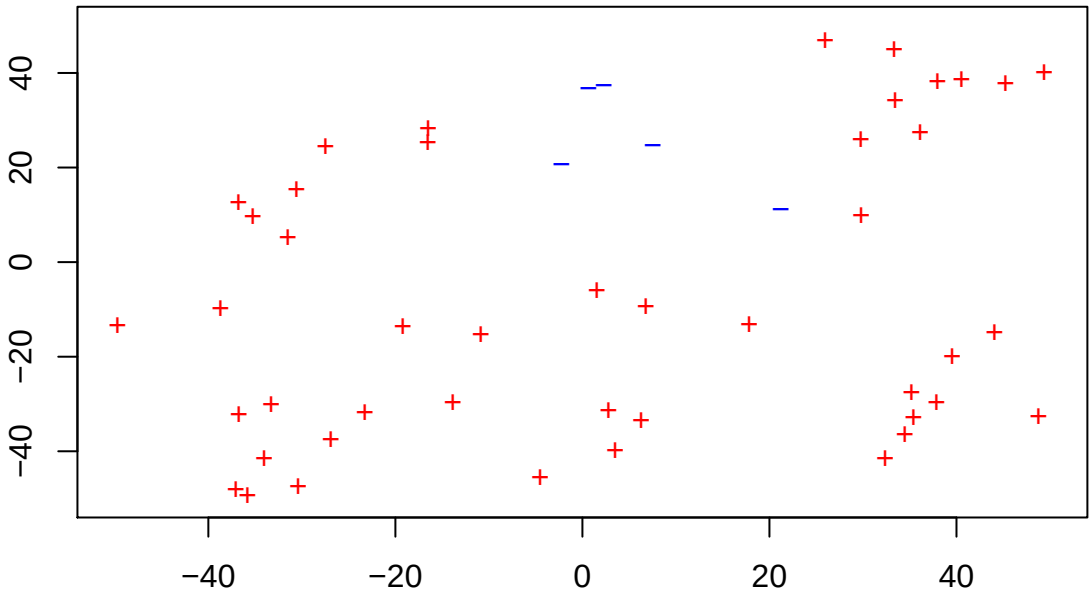
```
resultado <- ajusta_PLA(muestra.uniforme.circular[,c("X","Y")], etiquetas, 100, vini)
print(resultado$Errores)
```

```
## [1] 10
```

```
resultado <- ajusta_PLA(muestra.uniforme.circular[,c("X","Y")], etiquetas, 1000, vini)
print(resultado$Errores)
```

```
## [1] 8
```

```
plot(1, type="n", xlab="", ylab="", xlim=c(-50, 50), ylim=c(-50, 50))

points(subset(muestra.uniforme.circular,Etiqueta ==  1), pch = "+", col = "red")
points(subset(muestra.uniforme.circular,Etiqueta == -1), pch = "-", col = "blue")

abline(coef = resultado$Recta)
```

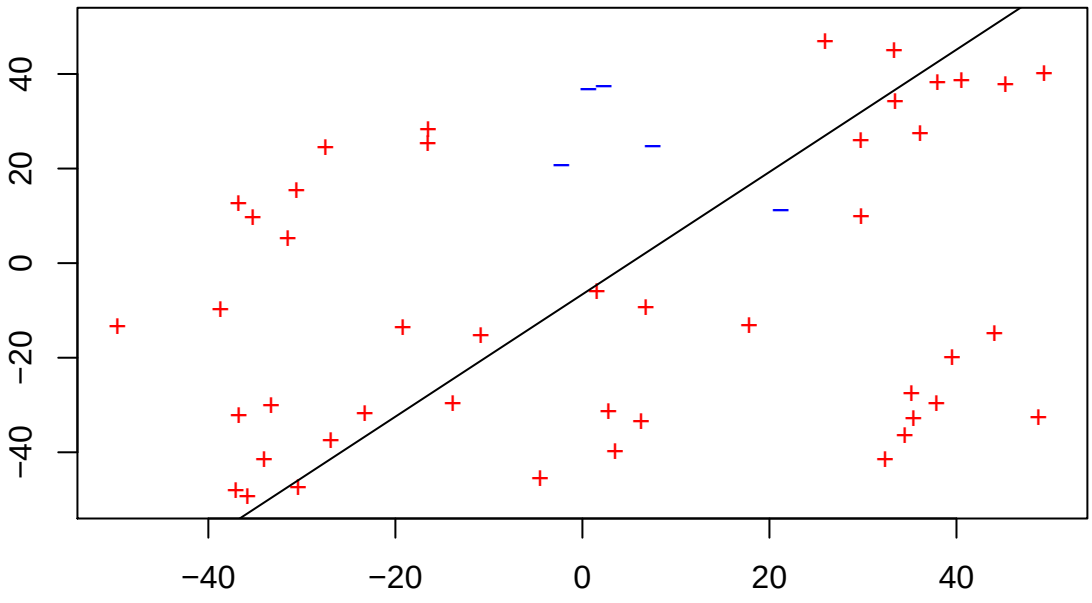


Con este conjunto de datos, en los que la separabilidad tiene forma circular, el *PLA* no sirve absolutamente de nada: contra más iteraciones, menos clasifica al dejar todos los datos a un lado.

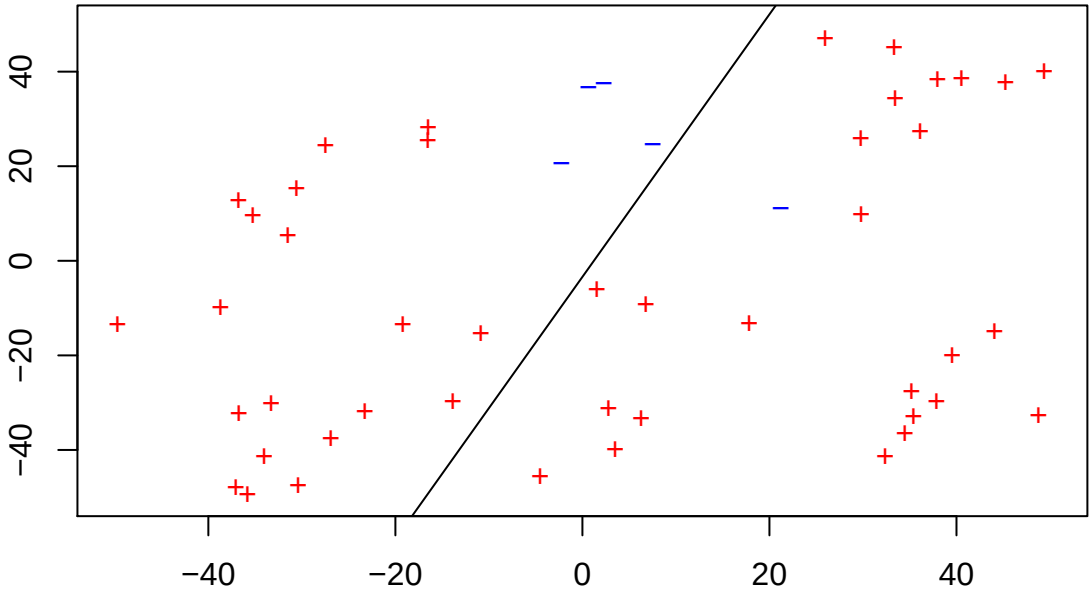
Ejercicio 5

Vamos a modificar la función *ajusta_PLA* para que vaya haciendo plot cada iteración.

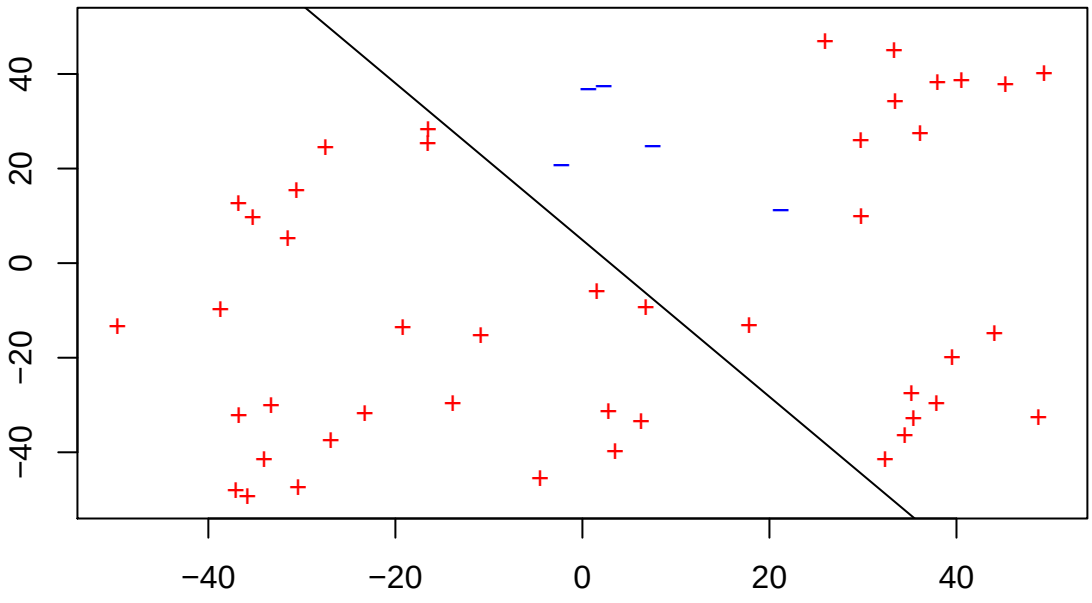
```
ajusta_PLA_PLOT <- function(datos, label, max_iter, vini){
  cambio <- TRUE
  w <- vini
  iteraciones <- 0
  errores <- 0
  X <- cbind(1,datos)

  datos.etiquetados <- cbind(datos, Etiqueta = t(label))

  while (cambio && iteraciones < max_iter){
    cambio <- FALSE
    errores <- 0
    for (i in 1:nrow(datos)){
      x_i <- as.numeric(X[i,])
      prodEscalar <- crossprod(w,x_i)
      if (sign(prodEscalar) != label[i]){
        cambio <- TRUE
        errores <- errores + 1
        w <- w + label[i] * x_i
      }
    }
    ### PLOT
    recta <- c(-w[1]/w[3], -w[2]/w[3])
    plot(0, type="n", xlab="", ylab="", xlim=c(-50, 50), ylim=c(-50, 50))

    points(subset(datos.etiquetados,Etiqueta ==  1), pch = "+", col = "red")
    points(subset(datos.etiquetados,Etiqueta == -1), pch = "-", col = "blue")

    abline(coef = recta)

    ###############
    iteraciones <- iteraciones + 1
    print(paste("Iteracion", iteraciones))
    print(paste("Errores:",errores))
  }

  resultado <- list("Peso inicial" = vini ,"Pesos" = w,
                    "Iteraciones" = iteraciones, "Errores" = errores,
                    "Recta" = c(-w[1]/w[3], -w[2]/w[3]) )
  return (resultado)
}

vini <- rep(0,3)

resultado <- ajusta_PLA_PLOT(muestra.uniforme.circular[,c("X","Y")], etiquetas, 15, vini)
```



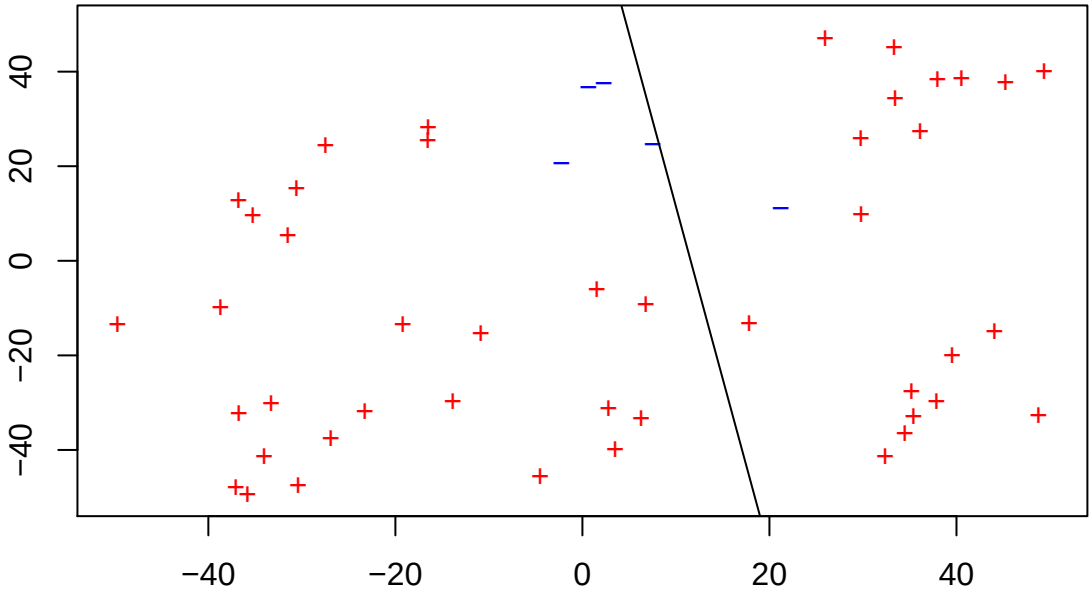

```
## [1] "Iteracion 1"
## [1] "Errores: 26"
```



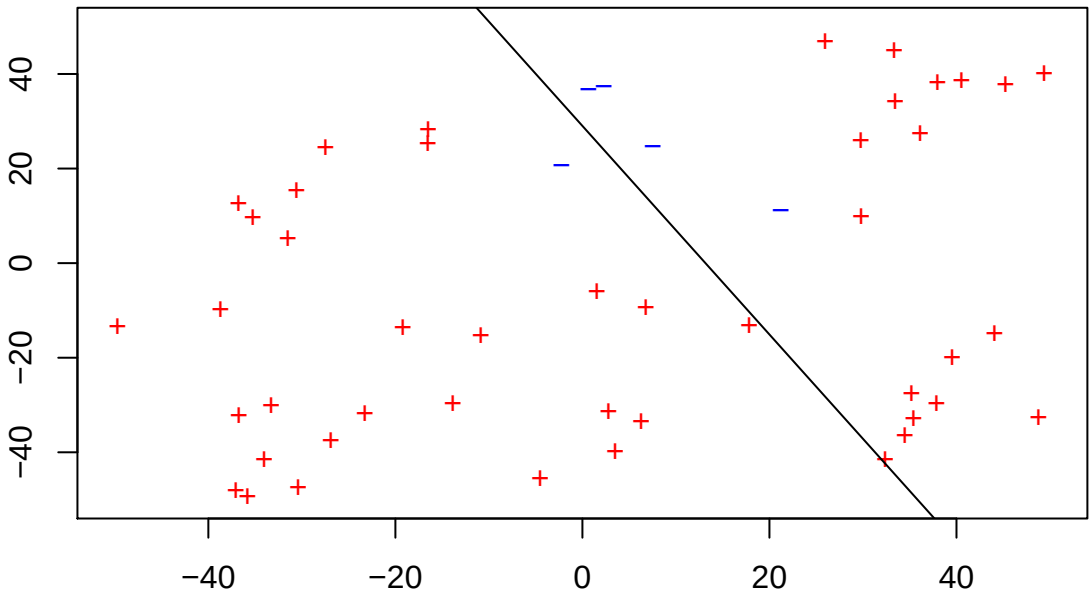

```
## [1] "Iteracion 2"
## [1] "Errores: 25"
```



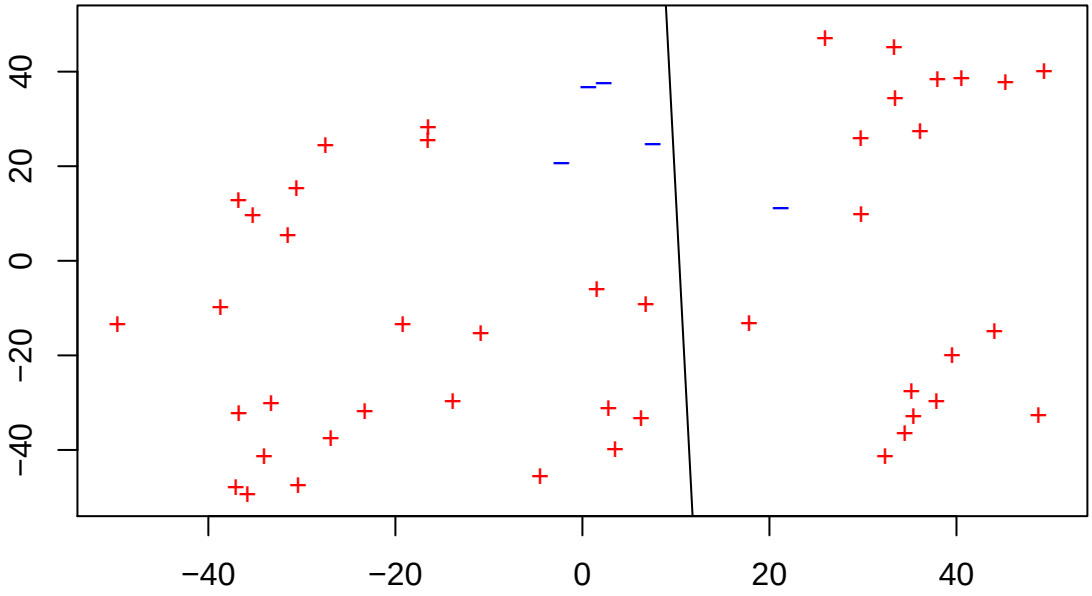

```
## [1] "Iteracion 3"
## [1] "Errores: 25"
```



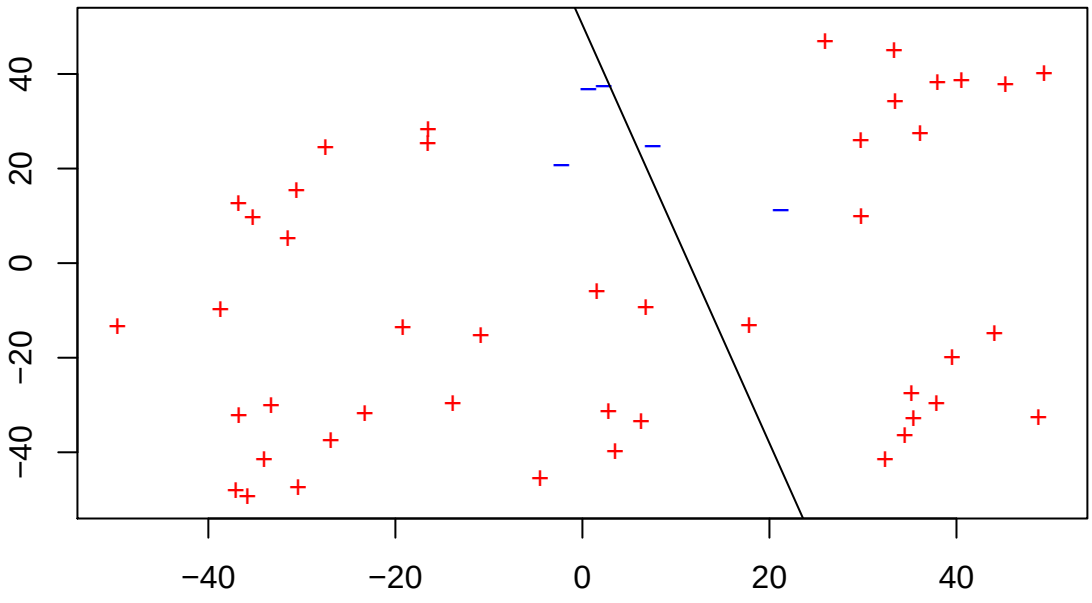

```
## [1] "Iteracion 4"
## [1] "Errores: 22"
```



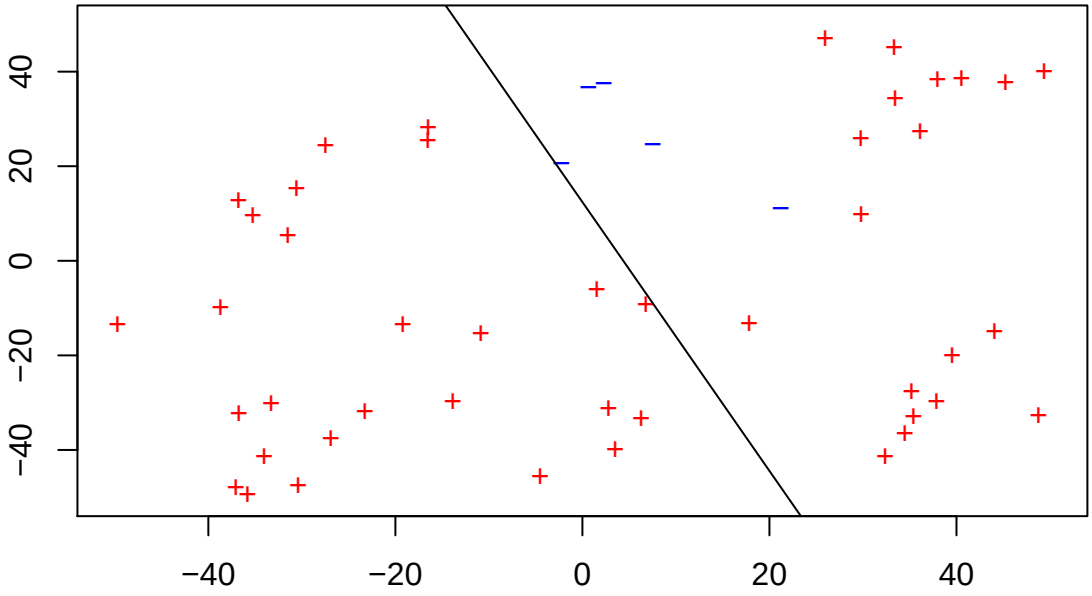

```
## [1] "Iteracion 5"
## [1] "Errores: 27"
```



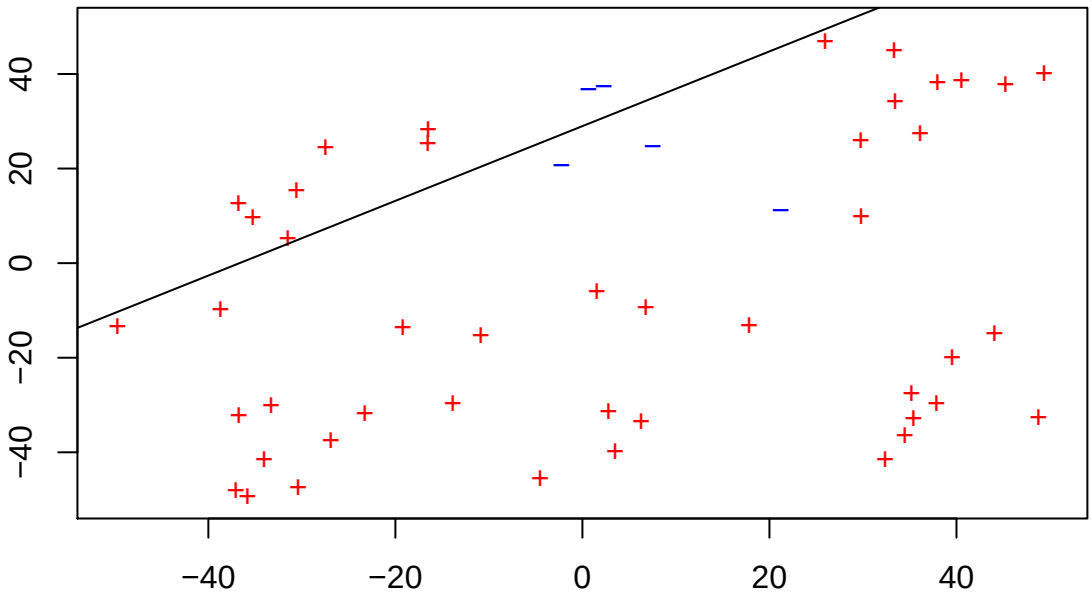

```
## [1] "Iteracion 6"
## [1] "Errores: 26"
```



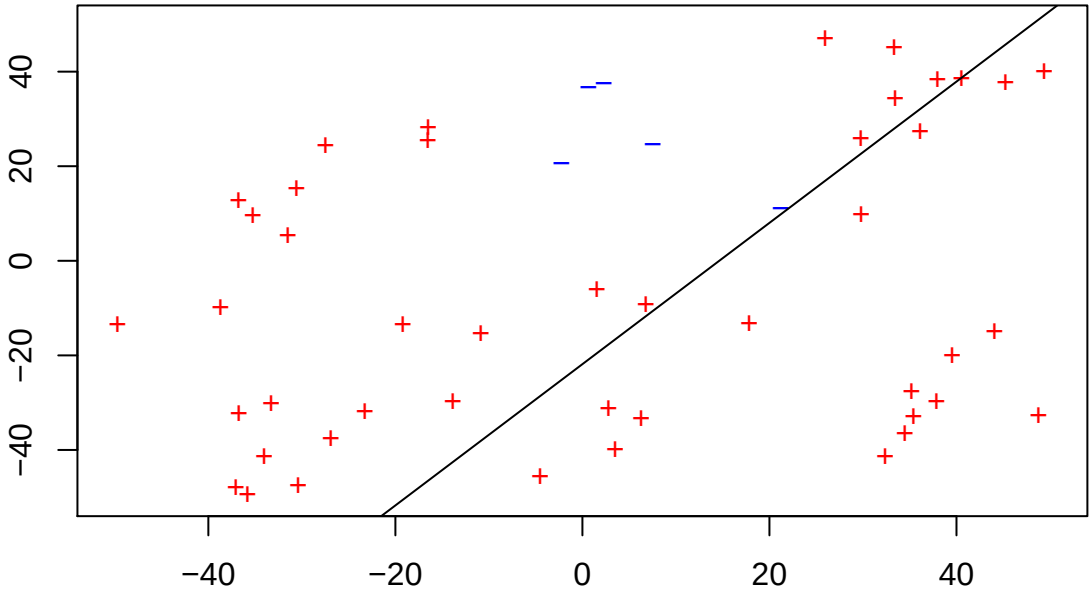

```
## [1] "Iteracion 7"
## [1] "Errores: 27"
```



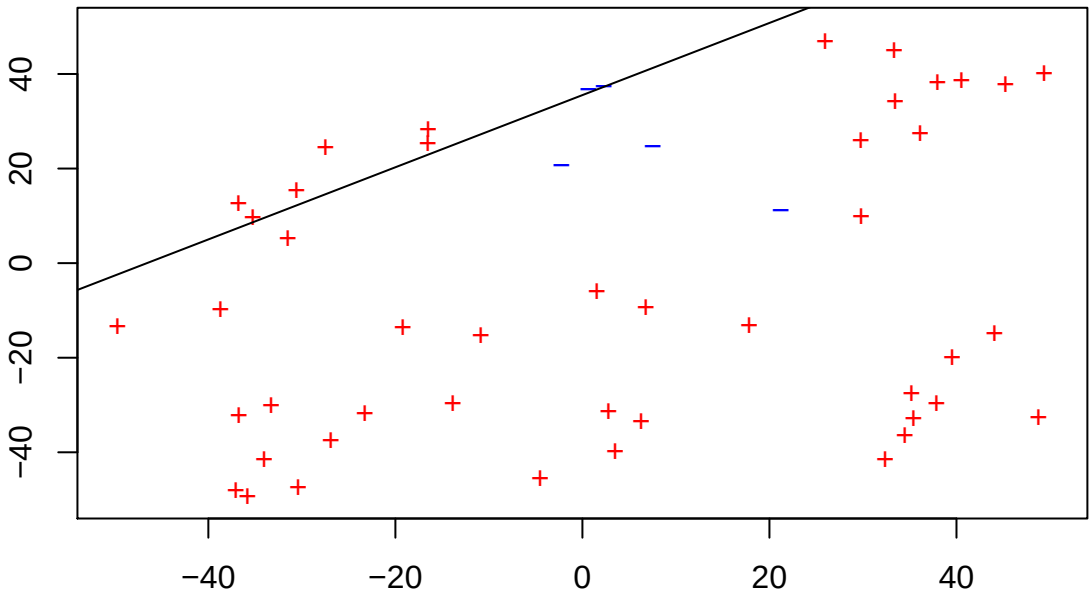

```
## [1] "Iteracion 8"
## [1] "Errores: 26"
```



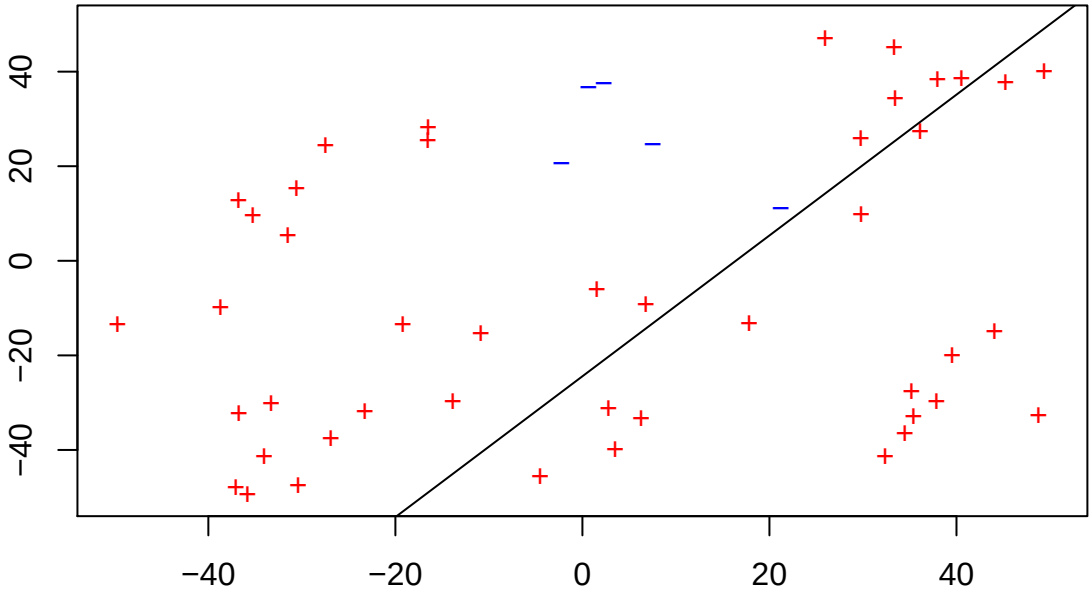

```
## [1] "Iteracion 9"
## [1] "Errores: 22"
```



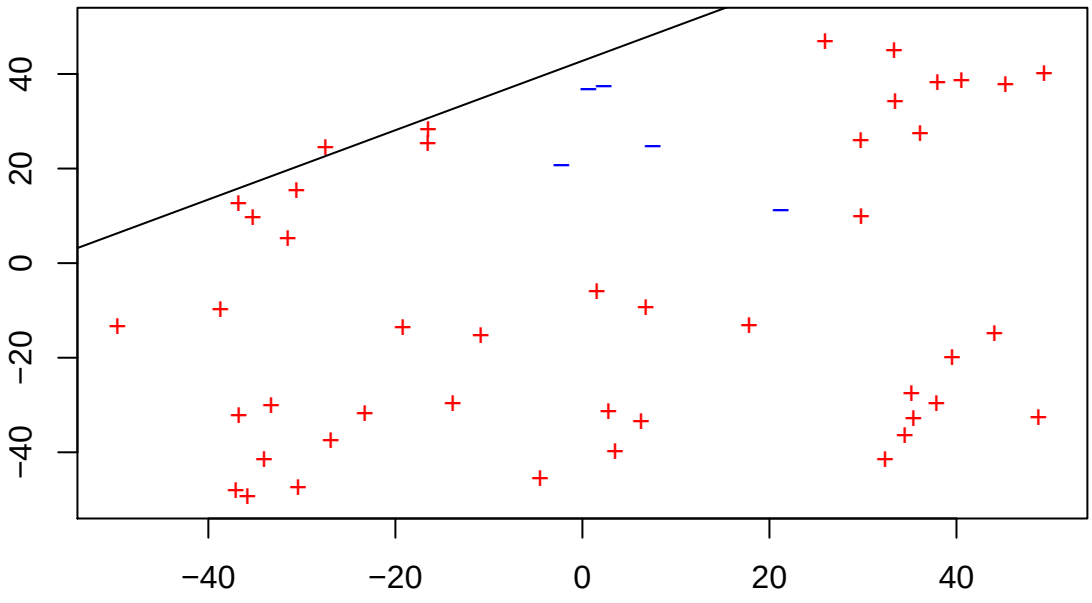

```
## [1] "Iteracion 10"
## [1] "Errores: 20"
```



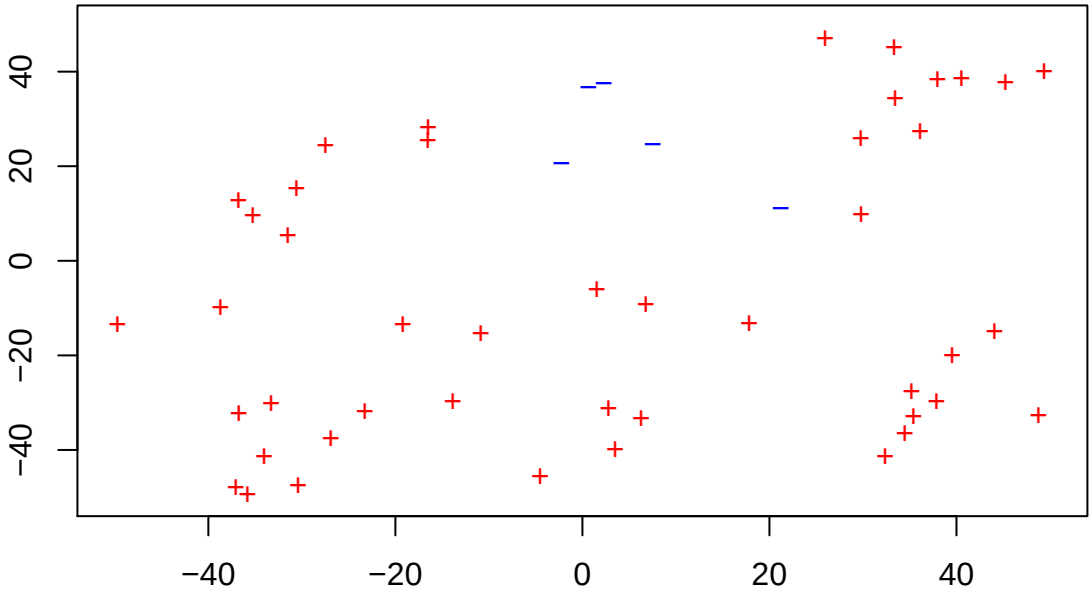

```
## [1] "Iteracion 11"
## [1] "Errores: 17"
```



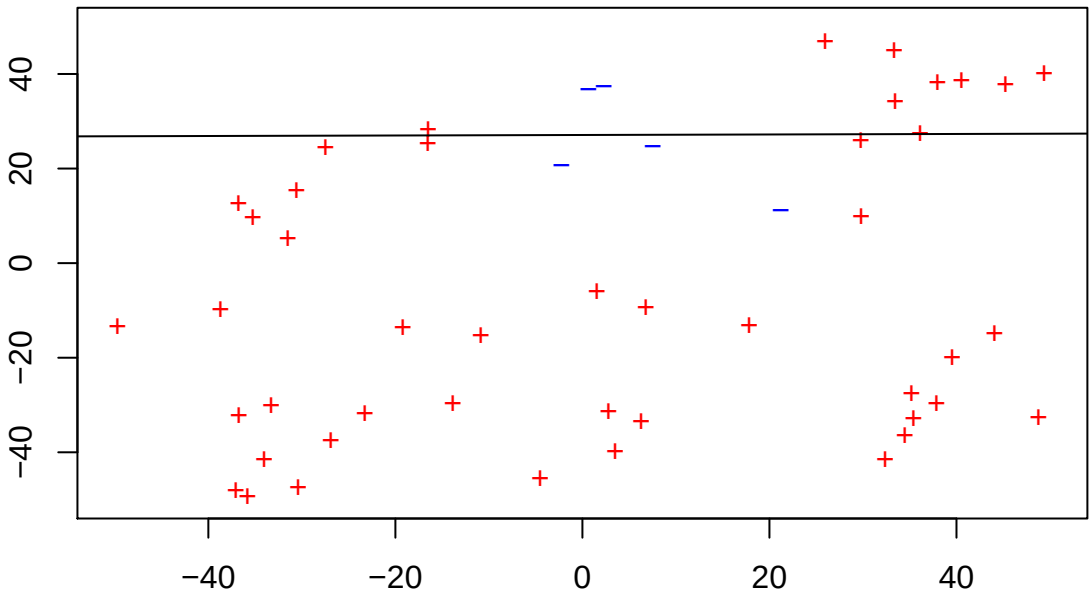

```
## [1] "Iteracion 12"
## [1] "Errores: 20"
```




```
## [1] "Iteracion 13"
## [1] "Errores: 17"
```




```
## [1] "Iteracion 14"
## [1] "Errores: 9"
```




```
## [1] "Iteracion 15"
## [1] "Errores: 15"
```

```
print(resultado$Errores)
```

```
## [1] 15
```

A la vista de estos resultados, proponemos la siguiente mejora: guardar el mejor resultado en una variable y devolverlo.

```
ajusta_PLA_MOD <- function(datos, label, max_iter, vini){
  cambio <- TRUE
  w <- vini
  iteraciones <- 0
  errores <- 0
  X <- cbind(1,datos)
  mejor <- vini
  mejor_errores <- nrow(datos)

  while (cambio && iteraciones < max_iter){
    cambio <- FALSE
    errores <- 0
    for (i in 1:nrow(datos)){
      x_i <- as.numeric(X[i,])
      prodEscalar <- crossprod(w,x_i)
      if (sign(prodEscalar) != label[i]){
        cambio <- TRUE
        errores <- errores + 1
        w <- w + label[i] * x_i
      }
    }
    if (errores < mejor_errores){
      mejor <- w
      mejor_errores <- errores
    }
    iteraciones <- iteraciones + 1
  }

  resultado <- list("Peso inicial" = vini ,"Pesos" = mejor,
                    "Iteraciones" = iteraciones, "Errores" = mejor_errores,
                    "Recta" = c(-w[1]/w[3], -w[2]/w[3]) )
  return (resultado)
}
```

Si lo ejecutamos con el mismo conjunto de antes nos devuelve

```
resultado <- ajusta_PLA_MOD(muestra.uniforme.circular[,c("X","Y")], etiquetas, 15, vini)
print(resultado$Errores)
```

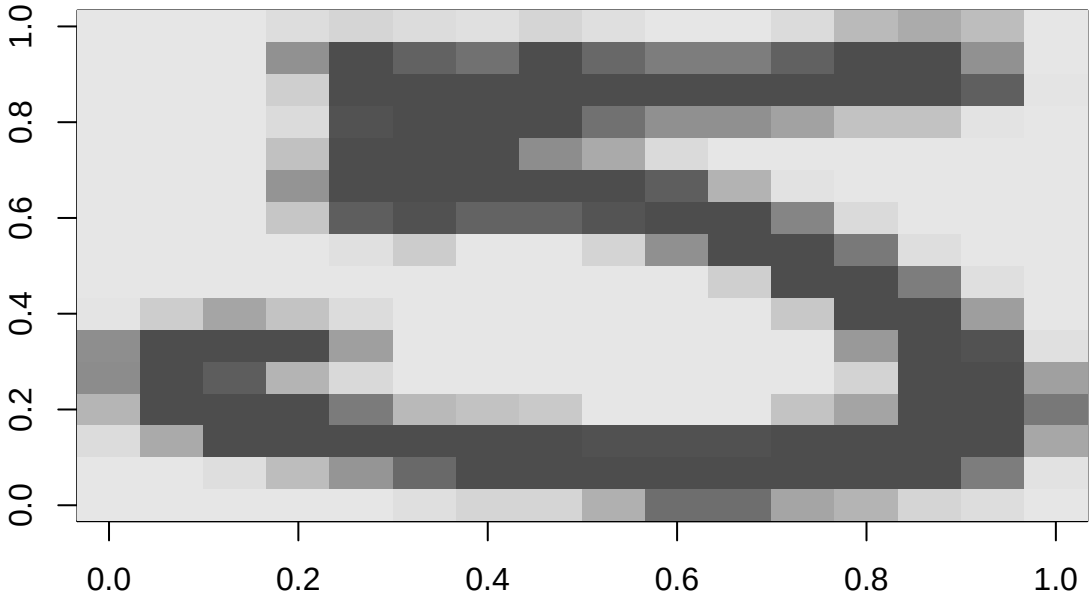
```
## [1] 9
```

Regresión lineal

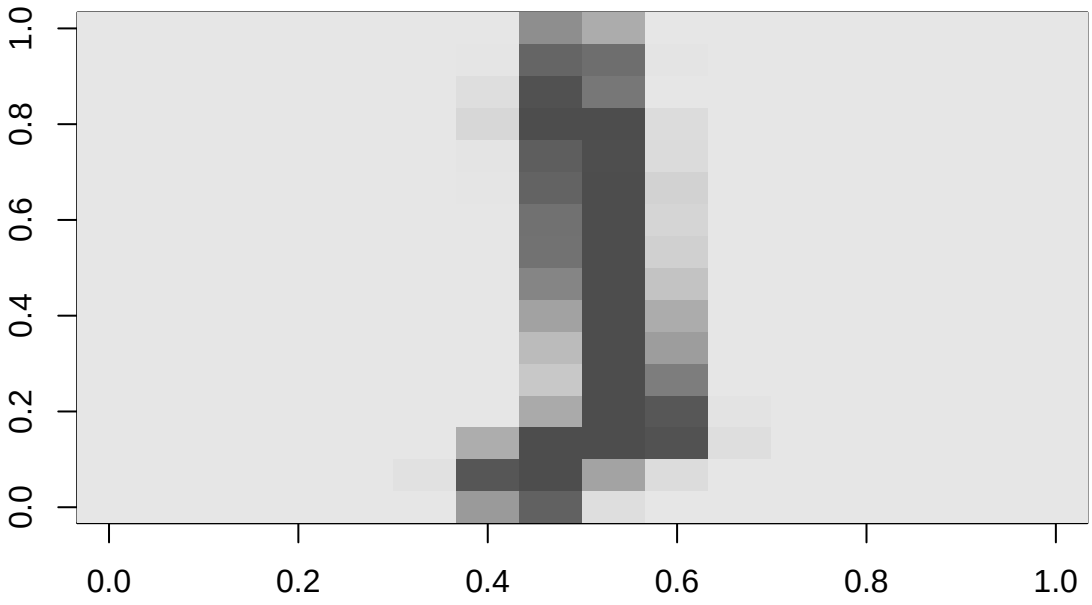
Ejercicios 1 y 2

Leeremos los números desde el fichero de entrenamiento y guardaremos las instancias de 1's y 5's en sendas listas de matrices.

```
archivo  <- read.csv("datos/zip.train", header = FALSE, sep = " ")
colnames(archivo)[1] <- "ID"
archivo["V258"] <- NULL

numeros_5 <- subset(archivo, ID == 5)
numeros_5["ID"] <- NULL
numeros_5 <- data.matrix(numeros_5)

numeros_1 <- subset(archivo, ID == 1)
numeros_1["ID"] <- NULL
numeros_1 <- data.matrix(numeros_1)

numeros_5_matrix <- lapply(split(numeros_5, 1:nrow(numeros_5)),
                           function(m) {
                             mtx <- matrix(0.5*(1-m), nrow = 16, ncol = 16)
                             return(mtx[,16:1])
                             })
image(numeros_5_matrix[[1]], col = gray.colors(256))
```




```
numeros_1_matrix <- lapply(split(numeros_1, 1:nrow(numeros_1)),
                           function(m) {
                             mtx <- matrix(0.5*(1-m), nrow = 16, ncol = 16)
                             return(mtx[,16:1])
                             })
image(numeros_1_matrix[[50]], col = gray.colors(256))
```



Ejercicio 3

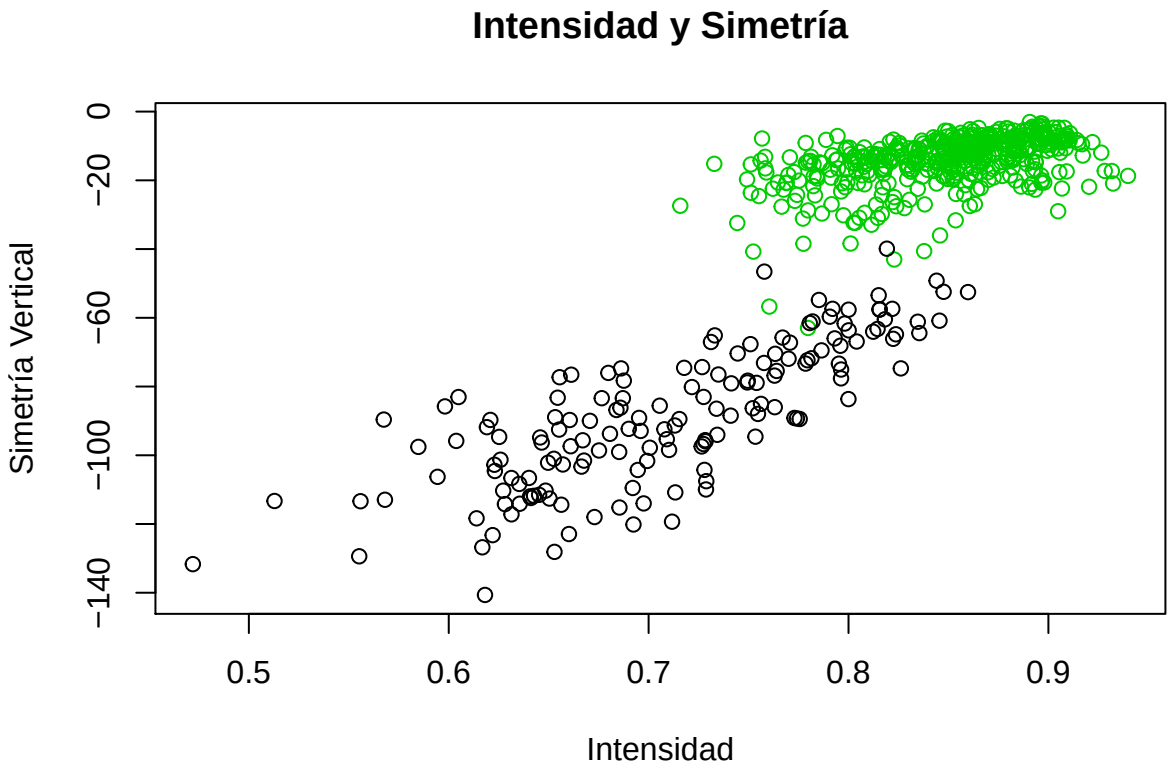
Para cada número, calcularemos su media y su simetría vertical.

```
medias_1 <- lapply(numeros_1_matrix, mean)
medias_5 <- lapply(numeros_5_matrix, mean)

simetriaVertical <- function(vector) {
  simetria <- 2*sum(abs(vector[1:(length(vector)/2)] - vector[(length(vector)/2+1):length(vector)]))
  return(simetria)
}

simetrias_1 <- lapply(numeros_1_matrix,function(m) -sum(apply(m,1,simetriaVertical)) )
simetrias_5 <- lapply(numeros_5_matrix,function(m) -sum(apply(m,1,simetriaVertical)) )
```

Ejercicio 4

Ahora representamos en una nube de puntos la simetría y la media de la intensidad de los números.

```
datos_1 <- data.frame(Medias = as.numeric(medias_1), Simetrias = as.numeric(simetrias_1),
                      Etiqueta = 1)
datos_5 <- data.frame(Medias = as.numeric(medias_5), Simetrias = as.numeric(simetrias_5),
                      Etiqueta = -1)

datos <- rbind(datos_1, datos_5)
plot(datos$Medias, datos$Simetrias, main = "Intensidad y Simetría",
     xlab = "Intensidad", ylab = "Simetría Vertical", col = as.numeric(datos$Etiqueta) + 2)
```



Ejercicio 5

Aplicamos el algoritmo de regresión explicado en clase para obtener un clasificador lineal.

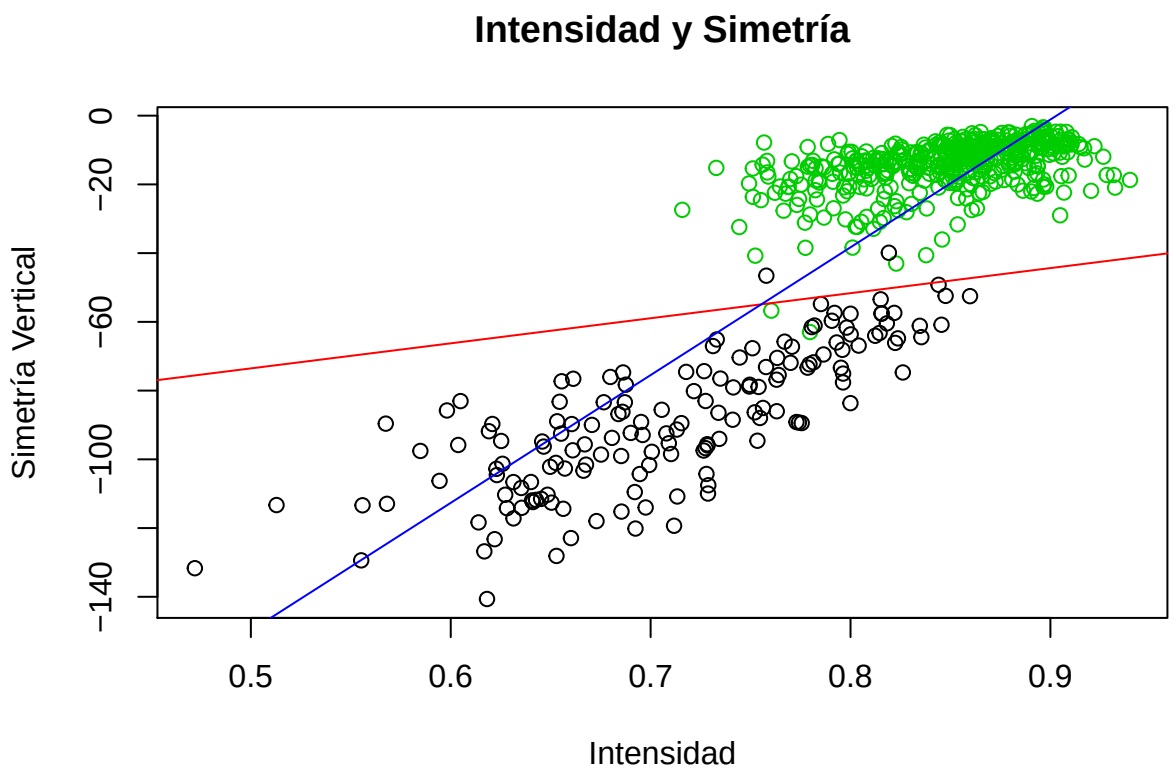
```
regres_lin <- function(datos, label, pesos = FALSE) {

  # Si no hay columnas es porque le hemos pasado un vector para hacer regresión
  # Si hay columnas es porque queremos hacer un clasificador
  if (is.null(ncol(datos)))
    X <- cbind(1, as.numeric(datos))
  else
    X <- cbind(1, data.matrix(datos))

  X.svd <- svd(X)

  V <- X.svd$v
  D <- X.svd$d
  Di <- diag(ifelse(D>0.0001, 1/D, D))

  Xt.X.inv <- V %*% Di^2 %*% t(V)

  pseudoinversa <- Xt.X.inv %*% t(X)

  w <- pseudoinversa %*% as.numeric(label)

  # Si es regresión o el vector de pesos es distinto a 3, se devuelve el vector
  # Si no, se devuelve la recta asociada
  if (is.null(ncol(datos)) || length(w) != 3 || pesos == TRUE)
```

```
    return(w)
  else
    return(c(-w[1]/w[3], -w[2]/w[3]))
}
```

Ejercicio 6

Una vez tenemos el algoritmo, lo probamos. Se dibujan dos rectas: una azul y una roja. La azul se corresponde con la recta de regresión de la simetría con respecto a la intensidad. La roja es un clasificador con regresión, que ajusta el par (intensidad, simetría) a la etiqueta de los datos.

```
muestras.clasificacion <- cbind(datos$Medias, datos$Simetrias)
etiquetas.clasificacion <- datos$Etiqueta
muestras.regresion <- datos$Medias
etiquetas.regresion <- datos$Simetrias
recta.clasificacion <- regres_lin(muestras.clasificacion, etiquetas.clasificacion)
recta.regresion <- regres_lin(muestras.regresion, etiquetas.regresion)

plot(datos$Medias, datos$Simetrias, main = "Intensidad y Simetría", xlab = "Intensidad", ylab = "Simetr
abline(recta.clasificacion, col = "red")
abline(recta.regresion, col = "blue")
```



El clasificador se comporta bastante bien dentro de la muestra, ya que sólo se deja algunos outliers. El regresor no se comporta igual, ya que como los datos no forman una recta, quedan muchísimos datos fuera.

Ejercicio 7

Vamos a generar diversas muestras y ver cómo se comporta la regresión lineal en problemas de clasificación.

Apartado a)

Aquí analizamos el error dentro de la muestra de nuestro clasificador.

```
intervalo <- -10:10
muestras <- simula_unif(100, 2, intervalo)

errores <- 0
for (i in 1:1000) {
  f <- simulaRecta(intervalo)
  etiquetas <- sign(muestras$Y - f[2]*muestras$X - f[1])
  g <- regres_lin(muestras,etiquetas)
  etiquetas.regresion <- sign(muestras$Y - g[2]*muestras$X - g[1])

  errores <- errores + sum(etiquetas != etiquetas.regresion)/length(etiquetas)
}
errores <- errores / 1000
```

El E_{in} es 6.589%, lo cual nos da una estimación de lo bueno que puede ser nuestro clasificador dentro de la muestra.

Apartado b)

Veamos cómo se comporta el regresor lineal fuera de la muestra.

```
intervalo <- -10:10
muestras <- simula_unif(100, 2, intervalo)

errores <- 0
for (i in 1:1000) {
  f <- simulaRecta(intervalo)
  etiquetas <- sign(muestras$Y - f[2]*muestras$X - f[1])
  g <- regres_lin(muestras,etiquetas)

  muestras.nuevas <- simula_unif(1000, 2, intervalo)
  etiquetas.f <- sign(muestras.nuevas$Y - f[2]*muestras.nuevas$X - f[1])
  etiquetas.g <- sign(muestras.nuevas$Y - g[2]*muestras.nuevas$X - g[1])

  errores <- errores + sum(etiquetas.f != etiquetas.g)/length(etiquetas.f)
}
errores <- errores / 1000
```

El E_{out} es 6.1145%, lo cual nos da a entender que fuera de la muestra, también se comporta bien nuestro clasificador.

Apartado c)

Ahora veamos cómo se comporta el *PLA* cuando toma como vector inicial una recta de regresión.

```
intervalo <- -10:10
muestras <- simula_unif(10, 2, intervalo)

iteraciones <- 0
iteraciones.cero <- 0
for (i in 1:100) {
  f <- simulaRecta(intervalo)
  etiquetas <- sign(muestras$Y - f[2]*muestras$X - f[1])
  w <- regres_lin(muestras,etiquetas, TRUE)
  w.cero <- rep(0,3)

  resultado <- ajusta_PLA(muestras, etiquetas, 10000, w)
  resultado.cero <- ajusta_PLA(muestras, etiquetas, 10000, w.cero)

  iteraciones <- iteraciones + resultado$Iteraciones
  iteraciones.cero <- iteraciones.cero + resultado.cero$Iteraciones
}
iteraciones <- iteraciones / 100
iteraciones.cero <- iteraciones.cero / 100
```

El número de iteraciones medio es 8.48, y el de iteraciones con vector inicial 0 es 11.88, con lo que vemos que con regresión podemos dar un vector inicial para el *PLA* que hace que éste converga de manera más rápida.

Ejercicio 8

Estudiemos el uso de transformeaciones no lineales en el ámbito del Aprendizaje Automático. Generamos una muestra de 1000 puntos en $[-10, 10] \times [-10, 10]$ y meteremos ruido en un 10% de los datos.

```
f <- function(X,Y) { sign(X^2 + Y^2 - 25) }
muestras <- simula_unif(1000, 2, c(-10,10))

etiquetas <- apply(muestras,1, function(m) { do.call(f, as.list(m)) } )

porcion <- 10
numero.datos.ruido <- ceiling(nrow(muestras) * porcion / 100)
Ein <- 0

for (i in 1:1000) {
  ruido <- sample(c(rep(-1,numero.datos.ruido),
                                          rep(1, nrow(muestras) - numero.datos.ruido)))
  etiquetas.ruido <- etiquetas * ruido

  g <- regres_lin(muestras,etiquetas)
  etiquetas.g <- sign(muestras$Y - g[2]*muestras$X - g[1])

  Ein <- Ein + sum(etiquetas.ruido != etiquetas.g)/length(etiquetas.ruido)
}

Ein <- Ein / 1000
```

El E_{in} es 27.2502%, lo cual es nos dice que más del 10% de los datos (los de ruido y algunos más) han sido mal clasificados. Por tanto esta solución no es buena. Vamos a aplicar una transformación a ver que ocurre. Analizaremos el error fuera de la muestra de la regresión utilizando el vector $(1, x_1, x_2, x_1x_2, x_1^2, x_2^2)$.

```
muestras.transformadas <- data.frame(X0 = 1, X1 = muestras$X, X2 = muestras$Y,
                                     X1X2 = muestras$X * muestras$Y,
                                     X1_2 = (muestras$X)^2,
                                     X2_2 = (muestras$Y)^2 )

regresion.transformada <- regres_lin(muestras.transformadas[,-1], etiquetas.ruido)
print(regresion.transformada)
```

```
##               [,1]
## [1,] -0.2153233805
## [2,] -0.0060359148
## [3,]  0.0021283337
## [4,]  0.0001814654
## [5,]  0.0095158392
## [6,]  0.0098611352
```

Una vez tenemos un vector de pesos para este problema, vamos a analizar el error fuera de la muestra, a ver cómo se comporta el regresor con esta transformación.

```
Eout <- 0

for (i in 1:1000) {
  muestras.fuera <- simula_unif(1000, 2, c(-10,10))
  muestras.transformadas.fuera <- data.frame(X0 = 1, X1 = muestras.fuera$X,
                                     X2 = muestras.fuera$Y,
                                     X1X2 = muestras.fuera$X * muestras.fuera$Y,
                                     X1_2 = (muestras.fuera$X)^2,
                                     X2_2 = (muestras.fuera$Y)^2 )


  etiquetas.buenas <- apply(muestras.fuera, 1, function(m) { do.call(f, as.list(m)) } )
  pesos.transformada <- regres_lin(muestras.transformadas[,-1], etiquetas.ruido)
  etiquetas.fuera <- apply(muestras.transformadas.fuera, 1, function(m) {
                                                              sign(sum(pesos.transformada * m))
                                                            } )

  Eout <- Eout + sum(etiquetas.buenas != etiquetas.fuera)/length(etiquetas.buenas)

}

Eout <- Eout / 1000
```

En este caso el Eout es 2.3338%. La transformación parece que ha servido puesto fuera de la muestra el clasificador se muestra bastante fiable.