Cuestionario de teoría 2

Antonio Álvarez Caballero
analca3@correo.ugr.es

17 de noviembre de 2015

1. Cuestiones

Cuestión 1. Identificar la/s diferencia/s esencial/es entre el plano afín y el plano proyectivo. ¿Cuáles son sus consecuencias? Justificar la contestación.

Solución. iii

Cuestión 2. Verificar que en coordenadas homogéneas el vector de la recta definida por dos puntos puede calcularse como el producto vectorial de los vectores de los puntos ($l = x \times x'$). De igual modo el punto intersección de dos rectas l y l' está dado por $x = l \times l'$

Solución. Sean $x = (a, b)$ e $y = (c, d)$ dos puntos del plano afín. En el plano proyectivo, con coordenadas homogéneas, equivalen a, permitiendo la licencia de los nombres, $x = (a, b, 1)$ e $y = (c, d, 1)$. Veamos su producto vectorial.

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{pmatrix} = i(b-d)+j(c-a)+k(ad-bc) = (b-d, c-a, ad-bc) = (\frac{b-d}{ad-bc}, \frac{c-a}{ad-bc}, 1) = l$$

Ahora comprobemos si dicha recta (dada por ese vector) contiene dichos puntos, es decir,

$$l^T(x \times y) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{b-d}{ad-bc} \\ \frac{c-a}{ad-bc} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (a, b, 1) = 0$$

$$\frac{ab-bd}{ad-bc} + \frac{bc-ab}{ad-bc} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{bc-ad}{ad-bc} + 1 = 0 \Leftrightarrow -1+1 = 0$$

☺

Cuestión 3. Sean x y l un punto y una recta respectivamente en un plano proyectivo $P1$ y suponemos que la recta l pasa por el punto x, es decir $l^T x = 0$. Sean x' y l' un punto y una recta del plano proyectivo P' donde al igual que antes $(l')^T x' = 0$. Supongamos que existe un homografía de puntos H entre ambos planos proyectivos, es decir $x' = Hx$. Deducir de las ecuaciones anteriores la expresión para la homografía G que relaciona los vectores de las rectas, es decir G tal que $l' = Gl$. Justificar la respuesta

Solución. Partimos de

$$(l')^T x' = 0$$

Usando la homografía H deducimos que

$$(l')^T H x = 0$$

Ahora reagrupamos y lo escribimos como

$$((l')^T H)x = 0$$

Como sabemos que $l^T x = 0$ deducimos

$$((l')^T H) = l^T$$

Trasponemos ambos lados de la ecuación (la traspuesta invierte el orden del producto)

$$H^T l' = l$$

Ahora multiplicamos por la inversa de H^T por la izquierda en ambos miembros (podemos hacerlo, ya que al ser una matriz homografía es invertible, ver cuestión 6)

$$l' = (H^T)^{-1} l$$

Por tanto nuestra conclusión es

$$G = (H^T)^{-1}$$

Cuestión 4. Suponga la imagen de un plano en donde el vector $l = (l_1, l_2, l_3)$ representa la proyección de la recta del infinito del plano en la imagen. Sabemos que si conseguimos aplicar a nuestra imagen una homografía G tal que si $l' = Gl$, siendo $l'^T = (0, 0, 1)$ entonces habremos rectificado nuestra imagen llevándola de nuevo al plano afín. Suponiendo que la recta definida por l no pasa por el punto $(0, 0)$ del plano imagen. Encontrar la homografía G. Justificar la respuesta

Solución. cosas

Cuestión 5. Identificar los movimientos elementales (traslación, giro, escala, cizalla, proyectivo) representados por las homografías H_1, H_2, H_3 y H_4:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución. Vamos a descomponer cada homografía en transformaciones conocidas. Si no digo lo contrario, la descomposición se hace con esta heurística: cojo 2 matrices de transformación (eligiendo las que parezcan más probables), las multiplico e intento ajustar contantes.

- H_1: Es claro que se trata de Traslación * Escala * Cizalla
- H_2: Descomponiendo ambas matrices queda Rotación * Traslación * Escala * Cizalla

$$H_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

- H_3: Descomponiendo queda Escala * Cizalla * Proyección

$$H_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

- H_4:

Cuestión 6. ¿Cuáles son las propiedades necesarias y suficientes para que una matriz defina una homografía entre planos? Justificar la respuesta

Solución. Por definición[1], una homografía es un isomorfismo entre espacios proyectivos. Este isomorfismo viene inducido por un isomorfismo entre los espacios vectoriales de los que proviene dicho proyectivo. Por tanto, para que una matriz defina una homografía, debe inducir un isomorfismo entre espacios vectoriales, lo cual se cumple si y solamente si la matriz es invertible, que equivale a que su determinante sea distinto de cero. Así, cualquier matriz invertible definirá un isomorfismo entre espacios vectoriales, y por tanto un isomorfismo entre los espacios proyectivos inducidos.

Cuestión 7. ¿Qué propiedades de la geometría de un plano quedan invariantes si se aplica una homografía general sobre él? Justificar la respuesta.

Solución. Para una homografía en general, lo único que queda invariante serán las líneas rectas, que seguirán siendo rectas (3 puntos alineados seguirán estándolo tras la transformación). Si particularizamos, con una transformación afín conservamos también el paralelismo y las proporciones. Y si ahondamos aún más, con una aplicación lineal conservamos lo anterior y además llevan el origen en el origen (no hay traslaciones).

Cuestión 8. ¿Cuál es la deformación geométrica más fuerte que se puede producir sobre la imagen de un plano por el punto de vista de la cámara? Justificar la respuesta.

Solución. La proyección, ya que lo único que conserva son las líneas rectas. Esta deformación produce, entre otras cosas, que las líneas paralelas ya no lo sean, produciendo deformaciones difíciles de reconstruir (aunque ya bastante estudiadas, ya que tienen muchos grados de libertad).

Cuestión 9. ¿Qué información de la imagen usa el detector de Harris para seleccionar puntos? ¿El detector de Harris detecta patrones geométricos o fotométricos? Justificar la contestación.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Homography

Solución. Este detector utiliza la invarianza horizontal y vertical de la intensidad luminosa de los píxeles en busca de esquinas. Por tanto, lo que está detectando son patrones geométricos. Se basa en los valores propios de la matriz de error SSD en busca de cambios bruscos de intensidad.

Cuestión 10. ¿Sería adecuado usar como descriptor de un punto Harris los valores de los píxeles de su región de soporte? En caso positivo identificar cuando y justificar la respuesta

Solución. Generalmente no, ya que sería muy sensible frente a cualquier homografía que no sea una traslación.

Cuestión 11. ¿Qué información de la imagen se codifica en el descriptor de SIFT? Justificar la contestación.

Solución. En el descriptor de SIFT se almacena un histograma de la orientación de los gradientes de cada píxel de una zona detectada. El histograma está formado por 8 direcciones del gradiente.

Cuestión 12. Describa un par de criterios que sirvan para establecer correspondencias (matching) entre descriptores de regiones extraídos de dos imágenes. Justificar la idoneidad de los mismos

Solución. cosas

Cuestión 13. Cual es el objetivo principal en el uso de la técnica RANSAC. Justificar la respuesta

Solución. El objetivo principal es dar una alternativa de función de coste a la de mínimos cuadrados. Esto quiere decir que, matemáticamente, busca realizar una regresión lineal entre un conjunto de puntos en el que la minimización por mínimos cuadrados no es suficiente para conseguir una buena homografía (que es lo que buscamos con dicha regresión). Esto lo consigue trazando líneas aleatorias entre las muestras y tomar la que mejor nos convenga según un criterio de satisfacibilidad de las muestras.

En Visión por Computador se usa al estimar una homografía entre dos conjuntos de puntos. Así se desechan las correspondencias *peores* entre ambos conjuntos y se consigue estimar una buena homografía.

Cuestión 14. ¿Si tengo 4 imágenes de una escena de manera que se solapan la 1-2, 2-3 y 3-4. ¿Cuál es el número mínimo de puntos en correspondencias necesarios para montar un mosaico? Justificar la respuesta

Solución. Para cada par de imágenes necesitamos como mínimo 4 imágenes. Este mínimo lo cumple el criterio RANSAC. Así que para 4 imágenes y 3 correspondencias, con 4 puntos por correspondencia, necesitaremos 12 puntos en total como mínimo para montar un mosaico con dichas imágenes.

Cuestión 15. En la confección de un mosaico con proyección rectangular es esperable que aparezcan deformaciones de la realidad. ¿Cuáles y porqué?.¿Bajo qué condiciones esas deformaciones podrían desaparecer? Justificar la respuesta

Solución. Se esperan deformaciones de las imágenes más a los extremos. Esto es debido al *error* que se va acumulando al realizar las proyecciones por homografías de coordenadas esféricas al plano. Para evitar estas deformaciones podemos usar una técnica común: empezar las proyecciones desde la imagen central y llegar hasta ambos extremos. Así las homografías no son tan fuertes y deforman menos la imagen. Pero en el contexto de que haya muchas imágenes con un cambio fuerte de coordenadas esféricas, la deformación será más clara y cada vez será más difícil realizar un mosaico con poca deformación.