科学計算研究室 Pythonゼミ

∼ 11. 偏微分方程式 その1∼

2021-04-12 福田　浩

1　原理

偏微分方程式は，下記のようにして解くことが出来る．まず，微小区間 h に対して $u_{i,j}$ の前後の格子点上の関数値 $u_{i-1,j}$, u_{i+1}, j を用いて差分近似を考える．

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \tag{3}$$

式 1 を後退差分近似，式 2 を前進差分近似，式 3 を中央差分近似と呼ぶ．

2 次の偏導関数は，さらにこの考え方を進めて，

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{(\partial u/\partial x)_{i,j} - (\partial u/\partial x)_{i-1,j}}{h} \tag{4}$$

$$= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \tag{5}$$

で示すことが出来る．

2　放物型偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6}$$

のタイプの偏微分方程式を，放物型偏微分方程式と呼ぶ．代表的な例として．1 次元の熱伝導方程式がある．1 次元の熱伝導方程式は，下記の通りである．

$$\rho C\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{7}$$

ここで，T は温度 (K), x は位置 (m)，ρ は密度 (kg/m^3)，C は比熱 (J/(kg·K)，λ は熱伝導率 (W/(m· K)) である．これを差分化すると，

$$\frac{T_i^{N+1} - T_i^N}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C}\left\{\frac{T_{i+1}^N - 2T_i^N + T_{i+1}^N}{\Delta x^2}\right\} \tag{8}$$

$$T_i^{N+1} = T_i^N + \frac{\lambda\Delta t}{\rho C}\left\{\frac{T_{i+1}^N - 2T_i^N + T_{i+1}^N}{\Delta x^2}\right\} \tag{9}$$

ここで上の添え字は時間 t を表し，下の添え字は位置 x を表す．

3　課題

放物型偏微分方程式の数値解法プログラムを Python で実装せよ

- 1000K に熱した長さ 1m の鉄の棒の両端を 300K の熱浴につけた時の，鉄棒全体の温度の時間変化を出力せよ
- 以下の物性値を使え
  - 密度 ρ: 7874 kg/m^3
  - 比熱 C: 461 J/(kg·K)
  - 熱伝導率 λ: 80.4 W/(m·K)
- 長さ方向には 11 分割し，時間変化は 10 分毎に出力せよ．
- 1 時間後の鉄棒中央部分の温度 (K) を求めよ．

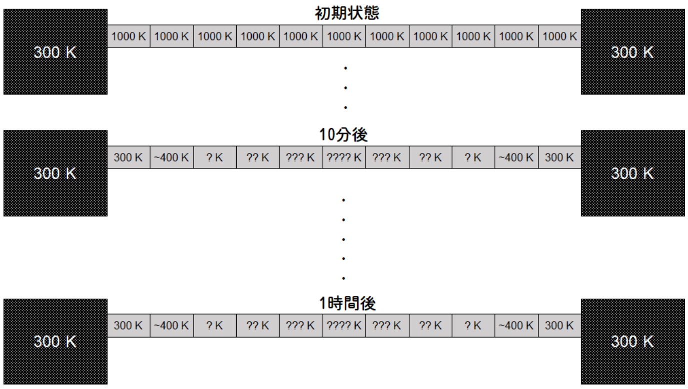

Figure 1: 課題のイメージ．

4　参考 1：C++ソースコード

```
#include <iostream>
#define N 10
using namespace std;

int main(void){

    double u_old[N+1], u_new[N+1], lamb, rho, c, dx;

    lamb = 80.4;
    rho = 7874;
    c = 461;
    dx = 0.1;

    for(int i=1; i<N; i++) u_old[i] = 1000;
    u_old[0]=300;
    u_old[N]=300;

    for(int t=0;t<3601;t++){
```

```
        for(int i=1;i<N;i++){
            u_new[i] = u_old[i] + lamb/(rho*c*dx*dx)
                        *(u_old[i+1] - 2*u_old[i] + u_old[i-1]);
        }
        for(int i=1; i<N; i++){
            u_old[i] = u_new[i];
        }
        if((t%10==0)&&(t%600==0)) {
            cout << t << "\t";
            for(int i=0; i<N+1; i++) cout << u_old[i] << "\t";
            cout << endl;
        }
    }
    return 0;
}
```

5 参考 2：熱伝導方程式

- 熱伝導率 λ の材料の位置 x における断面積 A を通過する熱 q は，そこでの温度勾配 $\frac{\partial T}{\partial x}|_x$ に比例する．
- 密度 ρ，比熱 C の材料において，断面積 A，微小区間 $x \sim x + \Delta x$ に保存される熱は $\rho C A \Delta x T(x,t)$ である．
- 微小区間に保存されるエネルギー ΔE は，そこに流れ込むエネルギー E_{in} と流れ出すエネルギー E_{out} の差．

$$
\begin{aligned}
E_{in} - E_{out} &= \Delta E && (10)\\
\Delta E &= \rho C A \Delta x T(x, t+\Delta t) - \rho C A \Delta x T(x,t) && (11)\\
E_{in} &= -\Delta t \lambda A \frac{\partial u}{\partial x}|_x && (12)\\
E_{out} &= -\Delta t \lambda A \frac{\partial u}{\partial x}|_{x+\Delta x} && (13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\Delta t \lambda A \frac{\partial T}{\partial x}|_x + \Delta t \lambda A \frac{\partial T}{\partial x}|_{x+\Delta x} &= \rho C A \Delta x T(x, t+\Delta t) - \rho C A \Delta x T(x,t) && (14)\\
\Delta t \lambda \cancel{A} \left(\frac{\partial T}{\partial x}|_{x+\Delta x} - \frac{\partial T}{\partial x}|_x \right) &= \rho C \cancel{A} \Delta x \left(T(x, t+\Delta t) - T(x,t) \right) && (15)\\
\lambda \frac{\frac{\partial T}{\partial x}|_{x+\Delta x} - \frac{\partial T}{\partial x}|_x}{\Delta x} &= \rho C \frac{T(x, t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t} && (16)
\end{aligned}
$$

ここで，$\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{\partial T}{\partial x}|_{x+\Delta x} - \frac{\partial T}{\partial x}|_x}{\Delta x} &\to \frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} && (17)\\
\frac{T(x, t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t} &\to \frac{\partial T}{\partial t} && (18)
\end{aligned}
$$

なので，

$$
\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}
$$