

## ～ 7. 数値積分 (台形公式)～

2021-03-24 福田 浩

### 1 原理

#### 1.1 考え方

関数  $f(x)$  の区間  $a$  から  $b$  の定積分は、関数  $f(x)$  と  $x$  軸で囲まれる面積となる。関数を細くスライスして、それぞれを  $(x_i, 0), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+1}, 0)$  を頂点とする台形の面積  $\{f(x_i) + f(x_{i+1})\} (x_{i+1} - x_i)/2$  の総和で近似する。  $h = x_2 - x_1$  とすれば、

$$\int_a^b f(x) dx \sim \sum_{x_i=a}^{\frac{b-a}{h}-1} \{f(x_i) + f(x_{i+1})\} h/2 \quad (1)$$

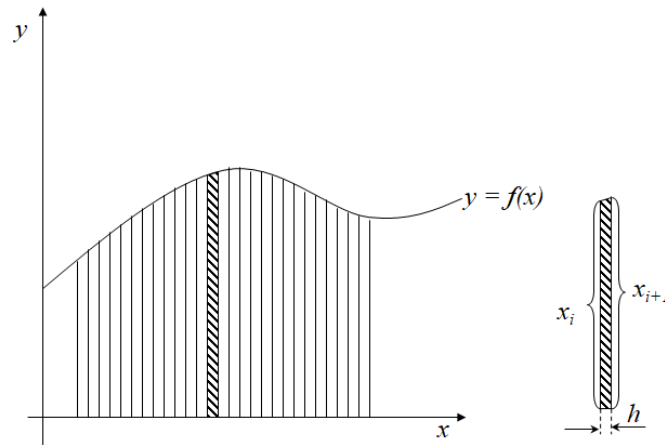


Figure 1: 台形公式のイメージ.

#### 1.2 アルゴリズム

C++ソースコードを参照のこと

- 5 行目：多項式の次数  $d$ ，分割数  $n$ ，積分下限  $x_1$ ，積分上限  $x_2$ ，及び多項式の係数  $*a$  を受け取り，台形面積  $s$  を返す関数 `trape` の定義
- 10 行目：台形の高さ  $h$  の計算
- 11 行目：台形面積計算開始
- 17 行目：多項式から台形の上底，下底を計算し，台形の高さ  $h$  を掛けて，面積  $s$  に足し込み
- 14 行目：17 行目の計算の例外処理 (積分区間の両端だけは  $1/2$  にする)
- 23～28 行目：定積分の解析解

## 2 課題

$n$  次多項式の定積分に対し，台形公式による数値積分プログラムを Python で実装せよ

- 積分区間  $[x_1, x_2]$  を標準入力から入力する機能を備えること
- 多項式の次数  $d$  と，台形の個数  $n$  を標準入力から入力する機能を備えること
- 各係数  $a[i]$  を標準入力から入力する機能を備えること
- 台形公式による数値積分 (数値解) を求めるとともに，解析解，数値解，数値解の誤差 (%表示) を標準出力に出力する機能を備えること
- 以下の 2 つの定積分を台形の数 10 個，20 個，30 個の場合で求め，解析解，数値解，数値解の誤差を求めよ

$$\int_0^2 (-x^2 + 2x) dx$$

$$\int_1^2 (x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 740) dx$$

本課題は，8. 数値積分 (Simpson 公式) と内容がかなり近い．協力して課題にあたり，プログラム等を共有しても良いし，それぞれ別々に取り組み，プログラムに個性を出しても良い

### 3 参考：C++ソースコード

```
1  #include <iostream>
2  #include <math.h>
3  using namespace std;
4
5  double trape(int d, int n, double x1, double x2, double *a){
6
7      double s, x, h;
8      s = 0;
9      x = x1;
10     h = (x2-x1)/n;
11     for(int i=0;i<n+1;i++){
12         x = x1+h*i;
13         if(i==0 || i==n){
14             for(int j=0;j<d+1;j++) s += a[j]*pow(x,j)*h/2;
15         }
16         else{
17             for(int j=0;j<d+1;j++) s += a[j]*pow(x,j)*h;
18         }
19     }
20     return s;
21 }
22
23 double exact(int d, double x1, double x2, double *a){
24
25     double theory = 0;
26     for(int i=0;i<d+1;i++) theory += a[i]/(i+1)*(pow(x2,i+1)-pow(x1,i+1));
27     return theory;
28 }
29
30 int main(void){
31
32     int d, n;
33     double x1, x2, a[10], calc_result, theory_result;
34
35     cin >> x1 >> x2;
36     cin >> d >> n;
37     for(int i=0;i<d+1;i++) cin >> a[i];
38
39     calc_result = trape(d, n, x1, x2, a);
40     theory_result = exact(d, x1, x2, a);
41
42     cout << "approx.:" << "\t" << calc_result << endl;
43     cout << "exact:"<< "\t\t" << theory_result << endl;
44     cout << "error:"<< "\t\t" << theory_result - calc_result << "\t(";
45     cout << (calc_result - theory_result)/theory_result*100 << "%)" << endl;
46
47     return 0;
48 }
```

## 4 更なる検討

台形公式による数値解は，解析解と比較して誤差が出る．誤差がマイナスの場合もあれば，プラスの場合もある．以下の2つの定積分を台形公式で求め，その誤差の符号を考察せよ．

$$\int_0^2 (-x^2 + 2x) dx$$

$$\int_0^2 (x^2 - 2x + 1) dx$$

ヒント：可視化 (グラフ化) してみることを．