

～ 9. 常微分方程式の数値解法 (Euler 法) ～

2021-03-31 福田 浩

1 原理

微分方程式 $\frac{dy}{dx} = f(x)$ で、 x_0 の時 y_0 であるとき、 $x_1 = x_0 + h$ の時の y の値 y_1 を、 $y_1 = y_0 + h \times \text{傾き} = y_0 + hf(x)$ で近似して求める方法。

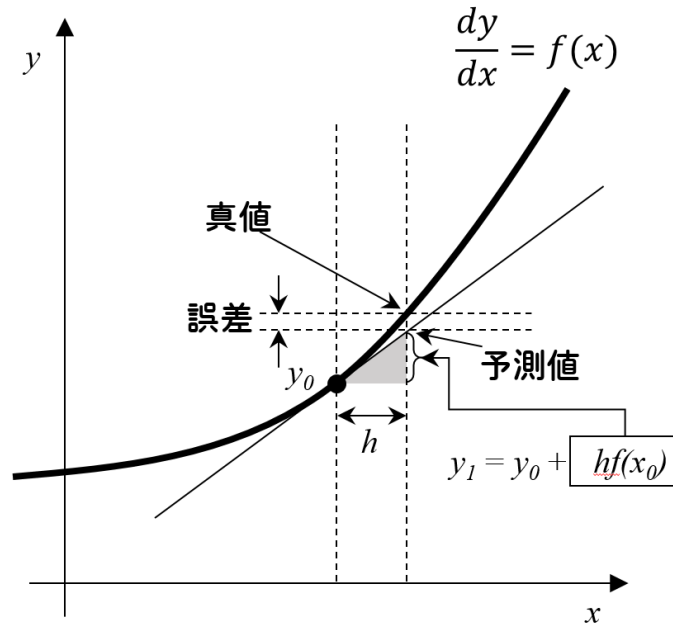


Figure 1: Euler 法のイメージ.

誤差が大きいという課題があるが、考え方はシンプルであるため、微分方程式の数値解法の入門としてよく取り上げられる。

2 課題

微分方程式の数値解法プログラムを Python で実装せよ

$\frac{dy}{dx} = f(x)$ で f が x の n 次多項式である場合

- 多項式の次数 n と、スライス個数 N を標準入力から入力する機能を備えること
- スライス幅 dx を標準入力から入力する機能を備えること
- x, y の初期値を標準入力から入力する機能を備えること
- 各係数 $a[i]$ を標準入力から入力する機能を備えること
- Euler 法で求めた y の値を標準出力に出力する機能を備えること
- $\frac{dy}{dx} = 2x$ で、初期値 $x=0, y=0$ 、スライス幅 $dx=0.1, 0.05, 0.025$ の時、 $x=10$ の値を求め、理論値と比較せよ

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \text{ で } f(x) \text{ が } \frac{1}{\cos^2 x} \text{ の場合}$$

- スライス個数 N を標準入力から入力する機能を備えること
- スライス幅 dx を標準入力から入力する機能を備えること
- x, y の初期値を標準入力から入力する機能を備えること
- Euler 法で求めた y の値を標準出力に出力する機能を備えること
- 初期値 $x=0, y=0$, スライス幅 $dx=0.1, 0.05, 0.025$ の時, $x=1.5$ の値を求め, 理論値と比較せよ

3 参考：C++ソースコード

$$\frac{dy}{dx} = f \text{ で } f \text{ が } 2x \text{ の場合}$$

```

1  #include <iostream>
2  #include <math.h>
3
4  using namespace std;
5
6  int main(void){
7      double x, y, dx, a[10];
8      int n, N;
9
10     cin >> n >> N;
11     cin >> dx;
12     cin >> x >> y;
13     for (int i=0;i<n+1;i++){
14         cin >> a[i];
15     }
16
17     for(int i=0;i<N+1;i++){
18         cout << x << "\t" << y << endl;
19         for(int j=0;j<n+1;j++){
20             y += a[j]*pow(x,j)*dx;
21         }
22         x += dx;
23     }
24     return 0;
25 }
```

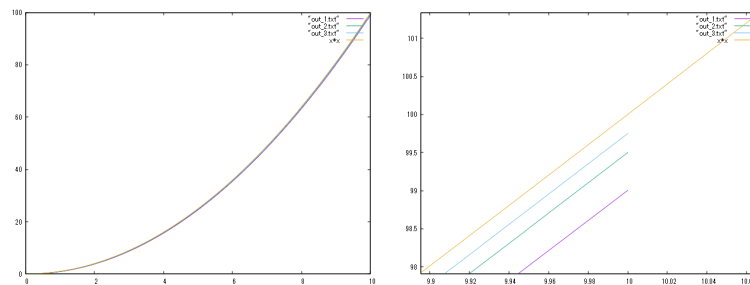


Figure 2: out_1: スライス幅 0.1, out_2: スライス幅 0.05, out_3: スライス幅 0.025

$$\frac{dy}{dx} = f \text{ で } f \text{ が } \frac{1}{\cos^2 x} \text{ の場合}$$

```

1  #include <iostream>
2  #include <math.h>
3
4  using namespace std;
5
6  int main(void){
7      double x, y, dx, a[10];
8      int N;
9
10     cin >> N;
11     cin >> dx;
12     cin >> x >> y;
13     for(int i=0;i<N+1;i++){
14         cout << x << "\t" << y << endl;
15         y += pow(cos(x),-2)*dx;
16         x += dx;
17     }
18     return 0;
19 }
```

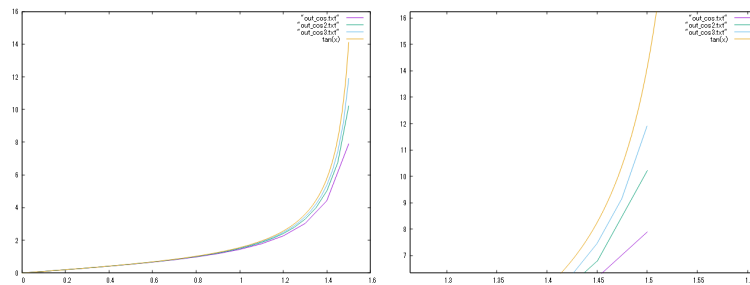


Figure 3: out_1: スライス幅 0.1, out_2: スライス幅 0.05, out_3: スライス幅 0.025

4 更なる検討

Euler 法の計算誤差を考察せよ。

- $\frac{dy}{dx} = 2x$ の計算結果と理論値を比較せよ
- $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ の計算結果と理論値を比較せよ