科学計算研究室 Pythonゼミ　フォローアップ
～10. 常微分方程式の数値解法(Runge-Kutta法)～

2021-04-14 福田　浩

1　Python スクリプト

$\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ で f が x の n 次多項式である場合

```
n, N = input().split(" ")
n = int(n)
N = int (N)

dx = float(input())

x, y = input().split(" ")
x = float(x)
y = float(y)
a = []
for i in range(n+1):
    aa = float(input())
    a.append(aa)

for i in range(N+1):
    print(x,y)
    for j in range(n+1):
        y += a[j]*pow(x,     j)/6*1*dx
        y += a[j]*pow(x+dx/2,j)/6*4*dx
        y += a[j]*pow(x+dx,  j)/6*1*dx
    x += dx
```

$\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ で $f(x)$ が $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ の場合

```
import math
N = int(input())
dx = float(input())
x, y = input().split(" ")
x = float(x)
y = float(y)

for i in range(N+1):
    print(x,y)
    y += pow(math.cos(x     ),-2)/6*1*dx
    y += pow(math.cos(x+dx/2),-2)/6*4*dx
    y += pow(math.cos(x+dx  ),-2)/6*1*dx
    x += dx
```

2 課題の解答

$\dfrac{dy}{dx} = 2x$ で，初期値 `x=0`，`y=0`，スライス幅可変の時の，`x=10` での誤差

スライス幅	計算値	理論値	誤差
0.1	99.9999	100	~0 %
0.05	99.9999	100	~0 %
0.025	99.9999	100	~0 %

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ で，初期値 `x=0`，`y=0`，スライス幅可変の時の，`x=1.5` での誤差

スライス幅	計算値	理論値	誤差
0.1	14.3012	14.1014	1.417 %
0.05	14.1226	14.1014	0.150 %
0.025	14.1031	14.1014	0.012 %

3 誤差の深掘り

- $y = x^2$ を 2 次式で近似しながら計算を進めるので，スライス幅が 0.1 であっても，誤差は 2 進小数の丸め誤差レベル[1] になる
- $y = \tan(x)$ では，スライス幅のべき乗に比例して誤差は小さくなる
  - スライス幅が 0.0001 に達すると，誤差は 2 進小数の丸め誤差レベルになる

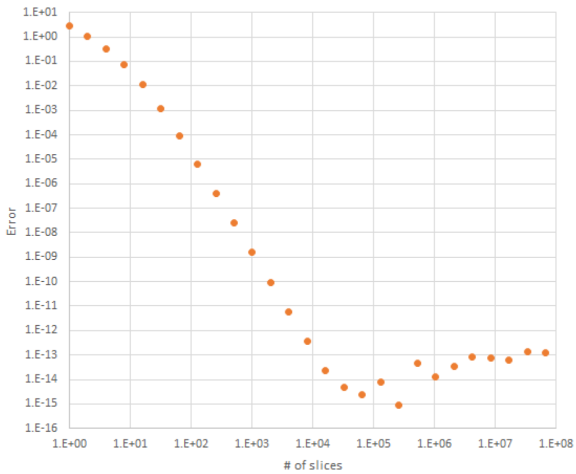

Figure 1: Runge-Kutta 法の誤差の収束の様子 $\left(\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$.

[1] 10^{-16} 程度