科学計算研究室 Pythonゼミ　フォローアップ

～9. 常微分方程式の数値解法(Euler 法)～

2021-04-07 福田　浩

1　Python スクリプト

$\frac{dy}{dx} = f(x)$ で f が x の n 次多項式である場合

```
n, N = input().split(" ")
n = int(n)
N = int(N)
dx = float(input())
x, y = input().split(" ")
x = float(x)
y = float(y)
a=[]
for i in range(n+1):
    aa= float(input())
    a.append(aa)

for i in range(N+1):
    print(x, y)
    for j in range(n+1):
        y += a[j]*pow(x,j)*dx
    x += dx
```

$\frac{dy}{dx} = f(x)$ で $f(x)$ が $\frac{1}{\cos^2 x}$ の場合

```
import math
N = int(input())
dx = float(input())
x, y = input().split(" ")
x = float(x)
y = float(y)

for i in range(N+1):
    print(x, y)
    y += pow(math.cos(x),-2)*dx
    x += dx
```

2　課題の解答

$\frac{dy}{dx} = 2x$ で，初期値 x=0，y=0，スライス幅可変の時の，x=10 での誤差

スライス幅	計算値	理論値	誤差
0.1	98.9999	100	1 %
0.05	99.4999	100	0.5 %
0.025	99.7500	100	0.25 %

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ で，初期値 x=0，y=0，スライス幅可変の時の，x=1.5 での誤差

スライス幅	計算値	理論値	誤差
0.1	7.89421	14.1014	-44 %
0.05	10.2138	14.1014	-28 %
0.025	11.9026	14.1014	-16 %

3　誤差の深掘り

- $y = x^2$ の $x = 10$ での傾きは，$dy/dx = 20$ であり，この場合は，スライス幅が 0.1 であっても 1%の誤差に収まる
- $y = \tan(x)$ の $x = 1.5$ での傾きは，$dy/dx \sim 200$ であり，この場合は，スライス幅が 0.1 だと 40%以上の誤差になる
- 以上のことから，Euler 法では，傾きが大きい区間がある関数を含む微分方程式の解法としては限界があることがわかる
- $y = \tan(x)$ の $x = 1.5$ での計算値は，スライス数が 1,000 程度でないと，1%を下回ることが出来ない

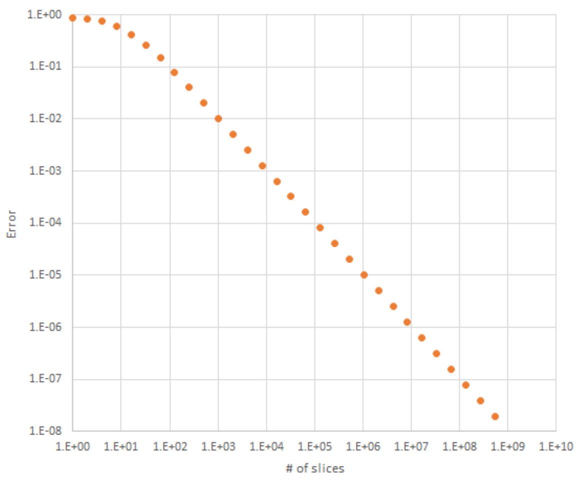

Figure 1: Euler 法の誤差の収束の様子 $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}\right)$.

- 誤差の低減には，次回の課題である Runge-Kutta 法が有効である