

Topology-based Cognitive Image Processing

トポロジーを応用した認知画像処理

Sakamoto, Yoshiki

2020/01/29

Report on Master's Course Research

International Christian University

Outline:1

1. Introduction
2. Explanations
 1. Topology
 2. Homotopy
 3. Homology
 4. Cuboid
 5. Simplicial Complex

Outline:2

- 6. Filtration
- 7. Persistent Homology
- 8. Persistent Diagram
- 9. Transformed Persistent Diagram
- 9. Morphology
- 10. Xgdbost
- 11. Accuracy
- 3. Related Works

Outline:2

4. Proposal

1. Overview
2. Preprocessing
3. Extract Persistent Diagram
4. Convert To Persistent Image
5. Classify

Outline:3

- 5. Explanation
 - 1. Overview
 - 2. Target Data
 - 3. Result
 - 1. MNIST
 - 2. Cifar10
- 6. Conclusion
- 7. References

Introduction:1

- ▶ 自然画像分類において深層学習等の特徴量を使用しない手法の研究が活発
 - ▶ 分類精度が非常に高い
 - ▶ データの形や構造と処理の対応や意味は、現在研究段階
 - ▶ データの処理の解釈性に課題がのこる
- ▶ データの形（トポロジー）に注目した解析手法であるトポロジカルデータアナリシス（TDA）が数学分野で提唱されている

Introduction:2

- ▶ TDAの1手法として、パーシステントホモロジーが存在する
 - ▶ ホモロジーとは、データに含まれる「穴」を代数的に定義したもの
 - ▶ パーシステントホモロジーとは、データを時系列的に変換（フィルトレーション）し、ホモロジーをマルチスケールで抽出する手法
 - ▶ パーシステントホモロジーでは、空間点列を複数の解像度で認識することが出来る

Introduction:3

- ▶ 今回の研究では、物理や化学分野で利用されているパーシステントホモロジーの手法を画像認識の分野へ応用する
 - ▶ パーシステントホモロジーによって、データの形と構造に即した特徴量の抽出とその処理が期待できる
- ▶ 自然画像の点列集合をどのようにトポロジカルに解釈するのが課題となる
 - ▶ 物理や化学分野では、単体複体（二次元では、辺を共有する三角形の集まり）として対象の空間点列データをモデル化する
 - ▶ 今回の研究では、自然画像の点列集合であるピクセルを方体複体（二次元では辺を共有する四角形の集まり）としてモデル化した

Introduction:4

- ▶ トポロジカルに解釈した点列にどのような具体的なフィルトレーションを行うかも課題となる
 - ▶ 物理や化学分野では、分子や星等の半径を単純に増大することでフィルトレーションを行っている
 - ▶ 自然画像では空間点列がピクセルなため半径を単純に増大するフィルトレーションが行えない
 - ▶ 自然画像に対して、ピクセルの輝度に対する閾値を段階的に変化させ二値画像を取得することで対応させた（一部のすでに二値画像、もしくはそれに近いデータに対しては、モルフォロジ処理をフィルトレーションとして対応させた）

Introduction:5

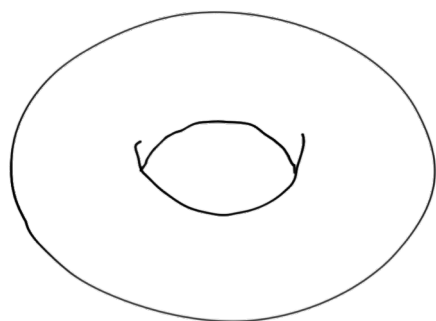
- ▶ パーシステントホモロジーから得られる特徴量はパーシステントダイアグラムと言われ、有限次元ではない特徴量である
 - ▶ そのままでは一般的な機械学習の手法に持ち込むことが困難
 - ▶ パーシステントイメージという手法を使い、パーシステントダイアグラムを有限な特徴量ベクトルに変換した

Explanations

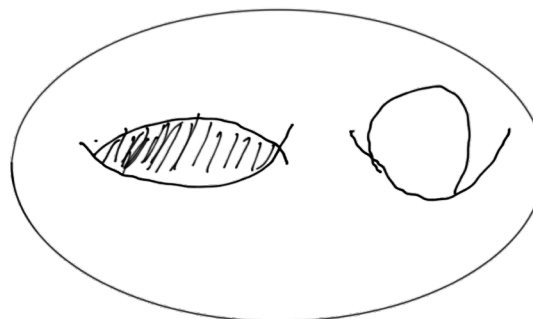
Topology:1

- ▶ 図形を分類する基準の一つである
 - ▶ 「切り貼りしない連続変形で重なり合う図形は同じもの」
- ▶ 他の分類基準では
 - ▶ 合同:図形が重なる
 - ▶ 相似:スケールを変えると図形がかさなる
- ▶ 日本語では位相幾何学と記述する
 - ▶ 英語ではTopologyと記述し、ToposとLogosの組み合わせた単語である
 - ▶ 幾何学という言葉は含まれていない
 - ▶ 具体的な空間や写像の幾何的性質を専門としているトポロジ研究者も多い

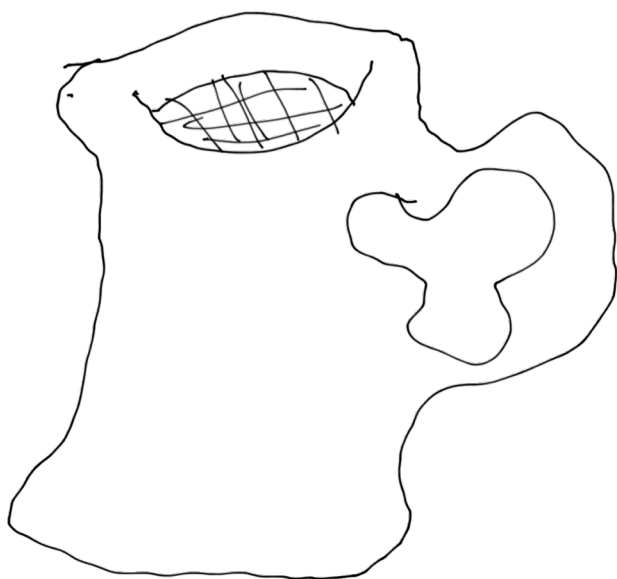
Topology:2



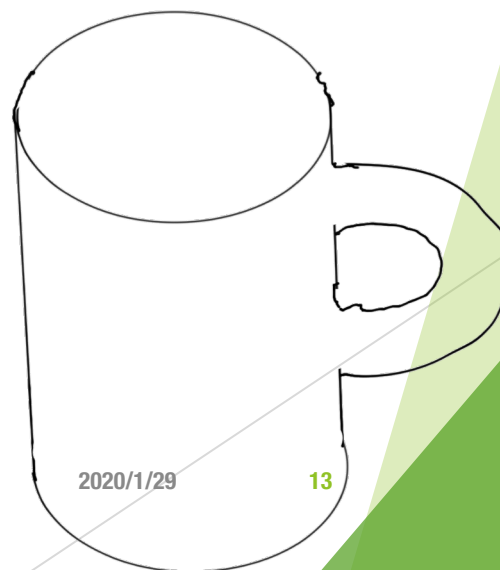
連続変形



連続変形



連続変形



Topology:3

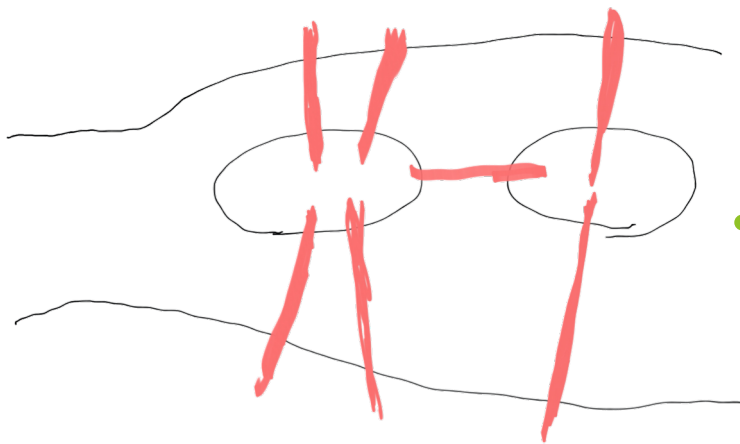
- ▶ トポロジーの本質と三つが上げられる
 1. 本質的な情報（不変量）を取り出す
 2. 連続的変形を厳密に扱う
 3. グローバル（全体的）な視点をもつ

Topology:4

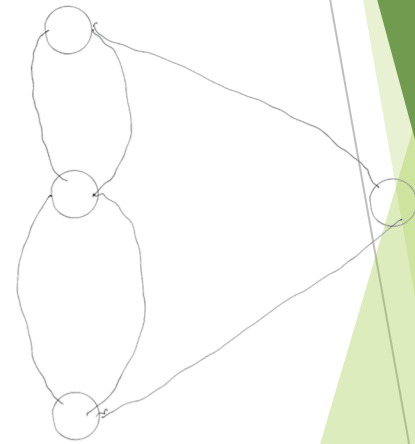
- ▶ 本質的な情報を取り出す例として、「オイラーのケーニヒスブルグの橋の問題」が有名
 - ▶ この問題は、7つの橋全てが重複なしに一度に一度で渡れるかを証明するものである
 - ▶ 彼は橋の長さや島の大きさが、この問題に無関係であることに気づくことができた
 - ▶ 橋をグラフ化（抽象化）することで問題の本質を捉えることが出来たのである
 - ▶ オイラーの発見したことはグラフの言葉で述べると

定理 グラフ G の全ての辺を一回だけ通る道が存在するための必要十分条件は、奇数本の辺が集まっている頂点が0個または二個であることである

Topology:5



抽象化



Topology:6

- ▶ また、オイラー標数(Euler characteristic)と呼ばれる数 $\chi(G)$ を定義した

グラフ G に対して

$$\chi(G) = G \text{の頂点の数} - G \text{の辺の数}$$

また、 G が平面グラフのとき、 G により \mathbb{R}^2 を分割して得られる有界な領域の数を考えると

$$G \text{の頂点の数} - G \text{の辺の数} + \text{有界な領域の数} = 1$$

になることを示し

平面 \mathbb{R}^2 を一点コンパクト化して球面 S^2 で考えると全ての領域が有界となり、

$$G \text{の頂点の数} - G \text{の辺の数} + \text{領域の数} = 2$$

という公式が得られる

Topology:7

- ▶ この公式を用いると、三次元正多面体などが分類できる
- ▶ オイラー標数は高次元の単体複体に、ホモロジー群を用いた定義に一般化された
- ▶ オイラー標数は、トポロジーの重要な手法として、ホモロジー群などの不変量を本質的な情報として抽出し調べることが確立した
 - ▶ オイラー標数は幾何学的対象に対するものだった
 - ▶ ホモロジー群に代数的対象も、位相不変量とし扱えるようになった

Homotopy:1

- ▶ 連続的変形の数学で表現の一つである

- ▶ トポロジーの1分野でもある

- ▶ 最も基本的なホモトピーとして、二つの連続写像

$$f, g : X \rightarrow Y$$

の間の連続手変形、つまり連続写像

$$H : X \times [0,1] \rightarrow Y$$

で $X \times \{0\}$ と $X \times \{1\}$ への制限が、それぞれ f と g であるものがあげられる

- ▶ 鎖複体(Chain complex)の間の写像に対しては、チェイン・ホモトピー(Chain homotopy)が定義される

Homotopy:2

- ▶ ホモトピーは「連続写像の連続的変形」以外も含まれる
 - ▶ Quillenがそれらを統一的に扱うために、モデル圏(model category)という概念を導入した
 - ▶ 彼はホモロジー代数の一般化としてホモトピー代数(homotopical algebra)とよんだ
 - ▶ これによって、ホモトピー論とモデル圏を同一視することができる

Homology

- ▶ 「穴」を代数的に定義したものである
 - ▶ 空間の“つながり具合を”代数的に取り出したものの位相不変量（位相不変性を持つ量）である
- ▶ ホモロジー群の大切な性質の一つに、位相不変性がある
 - ▶ これは、二つの位相空間が同相であるならば、各 q でそれらの q 次ホモロジー群は同型となる性質である

定義としては、幾何学的対象 X に対して

$$H_0(X) = R^{K_0} \quad K_0: \text{Number of Connected Component}$$

$$H_1(X) = R^{K_1} \quad K_1: \text{Number of Ring}$$

$$H_2(X) = R^{K_2} \quad K_2: \text{Number of Hole}$$

$$H_q(X) = R^{K_q} \quad K_q: \text{Number of } q - \text{dimensional "Hole"}$$

単体分割を持つ位相空間 X に対し、その単体分割 K を一つ取り出す

Simplicial Complex:1

- ▶ 単体複体とは、単体の集まりであり、単体同士の重なり
の条件
 - ▶ K 単体 (K 次元の三角形) をきちんと張り合わせて出来る幾
何学的対象である (例えば、ポリゴンなど)

定義としては、

1, $\sigma \in K$ に対し、 σ のどの辺単体も K に属する。

2, $\sigma, \tau \in K$ が $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ を満たすとき、 $\sigma \cap \tau$ は σ の辺単体であり、 τ の辺単体
でもある。

また、 K に含まれる単体の次元のうち、最大のものを K の次元とい
う

- ▶ 実際の計算では、チェック複体や α 複体、リップス複体
をしようする。

Simplicial Complex:2

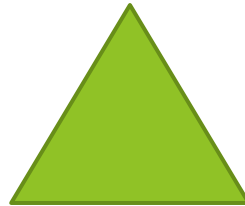


0次元の単体複体

点



一次元の単体複体
線



二次元の単体複体
三角形



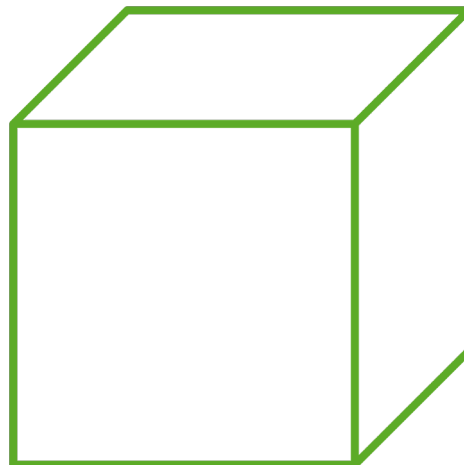
三次元の単体複体
四面体

Cuboid

- ▶ 二次元では四角形を基本にした複体である
- ▶ 三次元では六面体を基本にした複体である



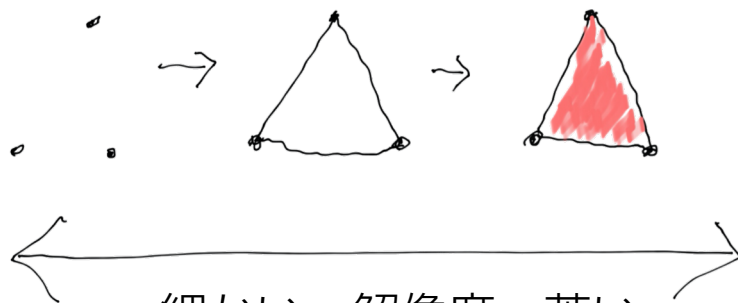
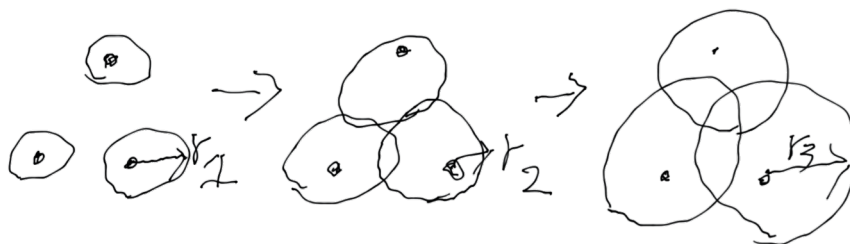
二次元の方体復体



三次元の方体復体

Filtration

- ▶ 単体複体（幾何的なデータ）の増大列のことをフィルトレーションという
 - ▶ 例えば、ある点の半径ハラメータ r を徐々に変化させることでリングを抽出する。



細かい 解像度 荒い

Persistent Homology

- ▶ 穴の存在だけでなく、大きさや位置、階層性についての情報も得られる。

単体複体のフィルトレーションに対して、そのパーシステントホモロジー群は次で定められる。

単体複体の有限型フィルトレーション

$$\mathbb{K}: k^0 \subset k^1 \subset \dots k^t \subset \dots$$

に対して、 k 次パーシステントホモロジー群 $PH_k(\mathbb{K})$

$$PH_k(\mathbb{K}) = Z_k(\mathbb{K})/B_k(\mathbb{K})$$

で定められる。

Persistent Diagram

- ▶ PHの特徴量を記述したものである
 - ▶ 点や線でなくShapeを使った特徴量のため、コンパクトかつロバストでInverseである
 - ▶ しかし、Non-Vector（有限次元ではない）な特徴量である
 - ▶ 具体的には、PHで得られたBirthとDeathをグラフにプロットしたものである。

パーシステントホモロジー群に対して

$$PD_k(\mathbb{K}) = \{(I_i(b), I_i(d)) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 1, \dots, s + r\}$$

をk次パーシステント図と定める。

Transformed Persistent Diagram

- ▶ PDをBirthとPersistency で表されるグラフに変換したもの
 - ▶ Persistency は($\text{Death} - \text{Birth}$)で計算される

Morphology

- ▶ 画像に対して膨張処理と収縮処理を行い、画像の持つ構造を抽出する処理
- ▶ 画像の平滑化、孤立点除去、輪郭抽出やノイズ除去等に利用されている
- ▶ モルフォロジー処理は膨張・収縮処理で構成される
 - ▶ 膨張処理(Dilation)とは、注目した画素とその近傍に対して論理和(OR)をとる処理
 - ▶ 収縮処理(Erosion)とは、注目した画素とその近傍に対して論理積(AND)をとる処理
- ▶ モルフォロジー処理では、多くの場合膨張・収縮処理を繰り返し行う

Xgdbboost

- ▶ Gradient BoostingとRandom Forestsを組み合わせたアンサンブル学習である
 - ▶ ランダムフォレストとは、いくつもの決定木の集合であり、複数の決定木を利用することで過学習を緩和出来る
 - ▶ 勾配ブースティングとは、予測器を独立ではなく、逐次的に学習させるブースティングという手法の一つである
 - ▶ 代表的なブースティングの手法として、AdaBoostがあるが、AdaBoostはデータの重みを変えることで学習させる
 - ▶ 勾配ブースティングでは、残差誤差にフィットするように予測器を学習させる
- ▶ シグブーストの特徴として、高いスケーリング性、高速な計算、スパースなデータへの対応があげられる

Accuracy

- ▶ Accuracy(ACC)とは正解度、精度を意味する。
 - ▶ 正や負と予測したデータのうち、実際にそうであるものの割合

$$Accuracy = (TP + TN) / (TP + TN + FP + FN)$$

TP = True positive; FP = False positive;

TN = True negative; FN = False negative

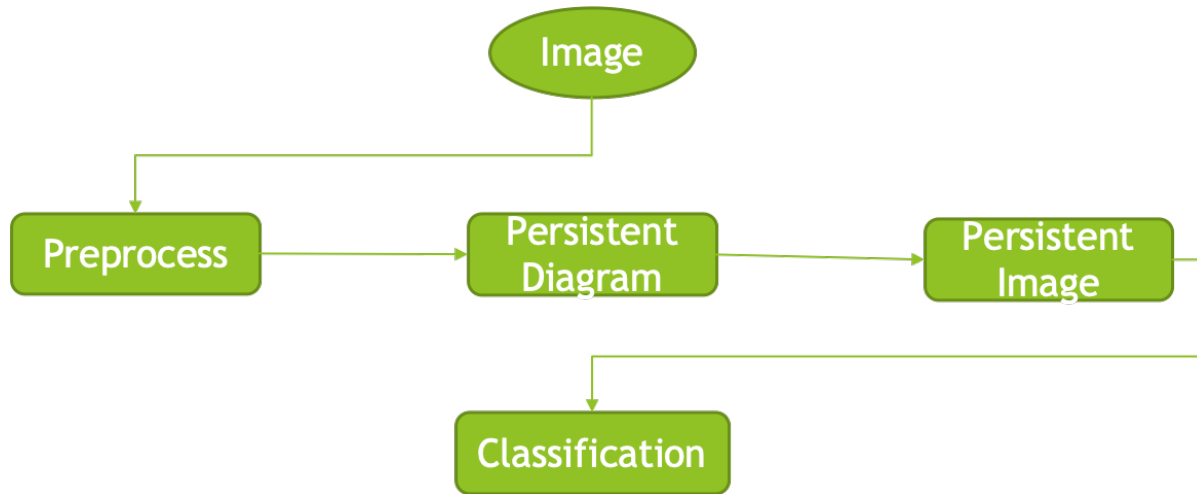
Related Works:1

- ▶ Persistent Homology and Materials Informatics
 - ▶ 材料化学の応用としてガラス構造解析、粒状システムの結晶化をホモロジーとパーシステントダイアグラムで分析する。
- ▶ Persistent homology analysis of craze formation
 - ▶ ガラス状ポリマーがわれる状態のナノボイドの挙動をパーシステントホモロジーで分析する。
- ▶ Persistence Diagrams with Linear Machine Learning Models
 - ▶ パーシステントダイアグラムに対して線形機械学習を適応する

Related Works:2

- ▶ A Roadmap for the Computation of Persistent Homology.
 - ▶ パーシステントホモロジーの計算理論やアルゴリズム、実装の一覧が紹介されている
- ▶ The union of balls and its dual shape.
 - ▶ 空間点列の抽象的な距離空間上の点の集合と、各点の間の距離を計算する手法を紹介している論文。

Proposal



Overview:1

Overview:2

- ▶ パーシステントホモロジーを自然画像に適用する。
 - ▶ 自然画像の特徴量を抽出し、その特徴量にもとづき分類を行う。
 - ▶ ピクセルを方体復体としてモデル化した。
1. 前処理
 1. 画像の白黒化
 2. PDがとれる画像群の生成

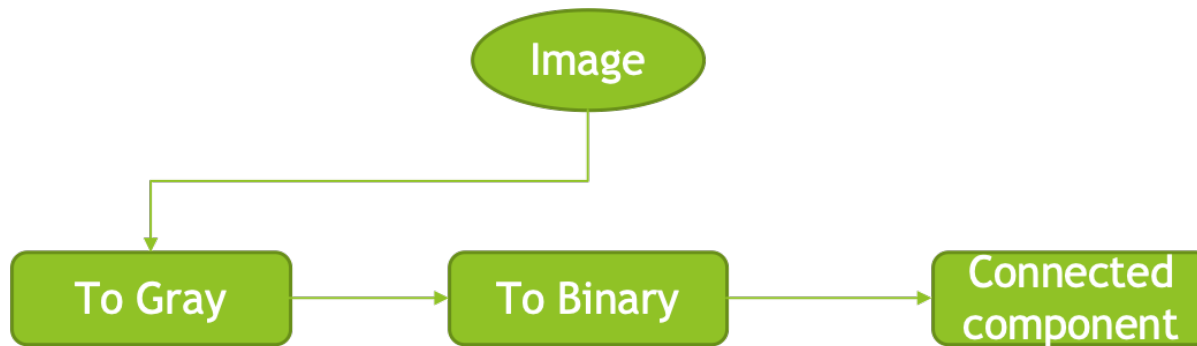
Overview:3

2. 特徴量抽出

1. PDの抽出
2. PIへの変換
3. PIを一次元ベクトル化

3. 分類

1. 一次元ベクトル化したPIを使用
2. シグブースト

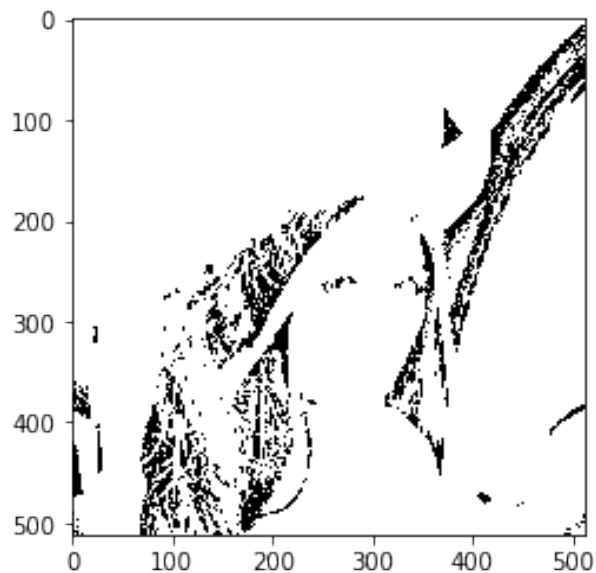


Preprocessing:1

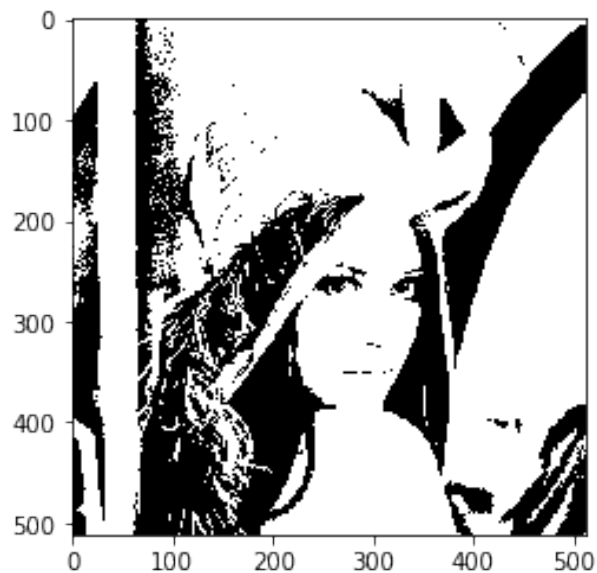
Preprocessing:2

1. 自然画像の輝度を取り出しグレースケール化
2. 0から255の二次元データを、閾値を設定し二値化
 - ▶ グレースケール画像の閾値を段階的設定し、二値化画像の画像群を生成

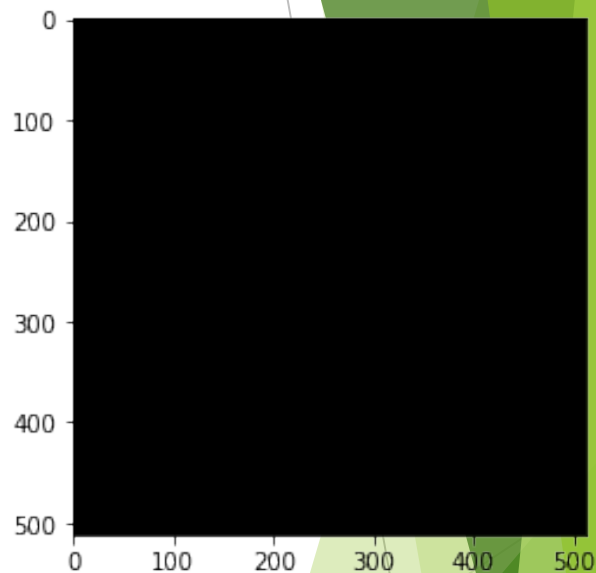
Preprocessing:3



閾値を50にして二値化



閾値を100にして二値化



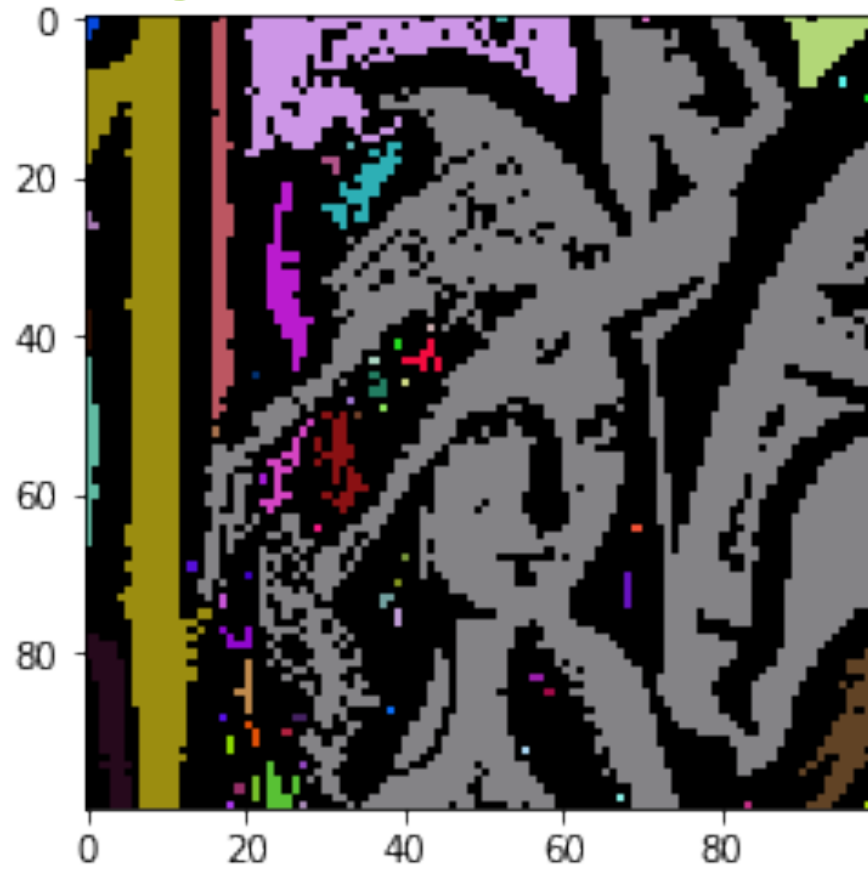
閾値を250にして二値化

Preprocessing:4

3. 黒点の縦横の連結を基準に、連結成分を抽出

- ▶ パーシステンシーの計算のために、二値化画像の画像群に適用し、連結成分群を抽出
 - ▶ 連結成分抽出にはOpenCVのAPIを使用
 - ▶ 二値画像が入力で、連結成分のラベルとラベリングされた画像が出力される
 - ▶ なお、内部的にはSAUF Algorithmで実装されている

Preprocessing:5

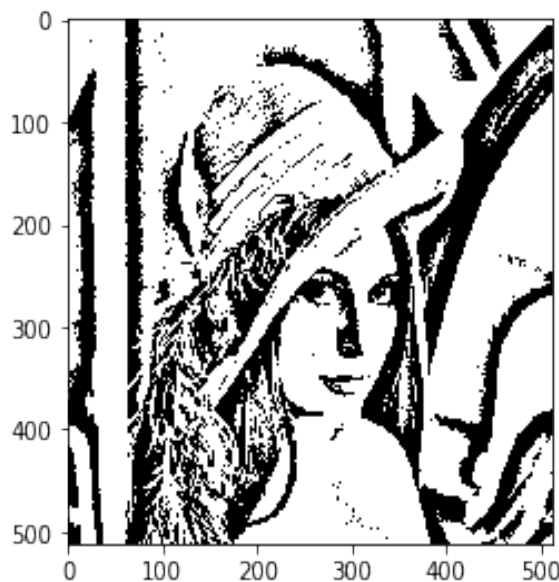


連結成分抽出

Preprocessing:6

- ▶ すでに二値化された画像、もしくはそれに近い場合 (MNIST等)
- ▶ 前述の方法ではパーシステンシーの計算が困難。
- ▶ モルフォロジー処理によって、段階的な連結成分群を抽出する。
 - ▶ 二値化された画像に近いものは、あらかじめ完全に二値化する (アダプティブスラッシュホルド等)
 - ▶ 増大数列としてダイレーションをフィルトレーションと見なした。
 - ▶ 増大数列ではないが、エロージョンもフィルトレーションと見なし、生成される。画像群を二倍にした。

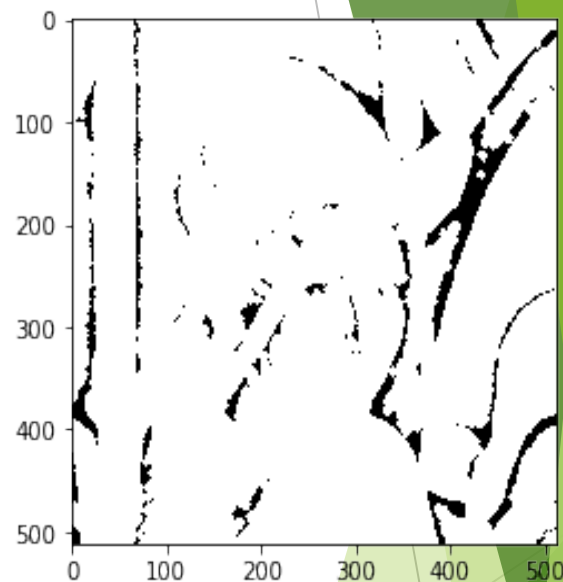
Preprocessing:7



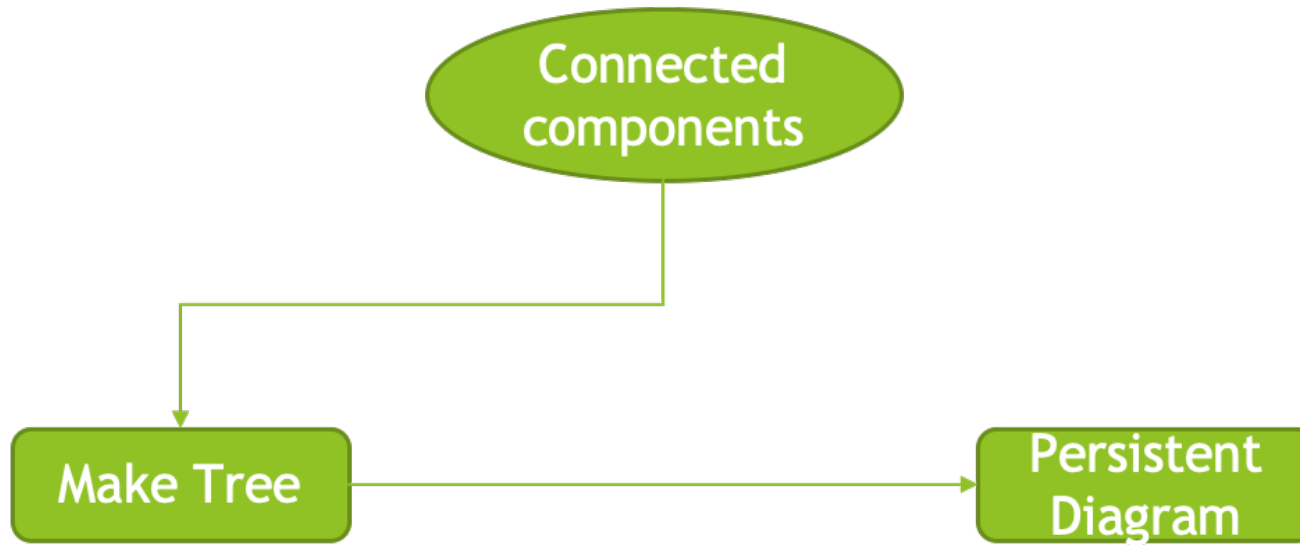
アダプティブスラッシュホルド



ダイレーション



エロージョン



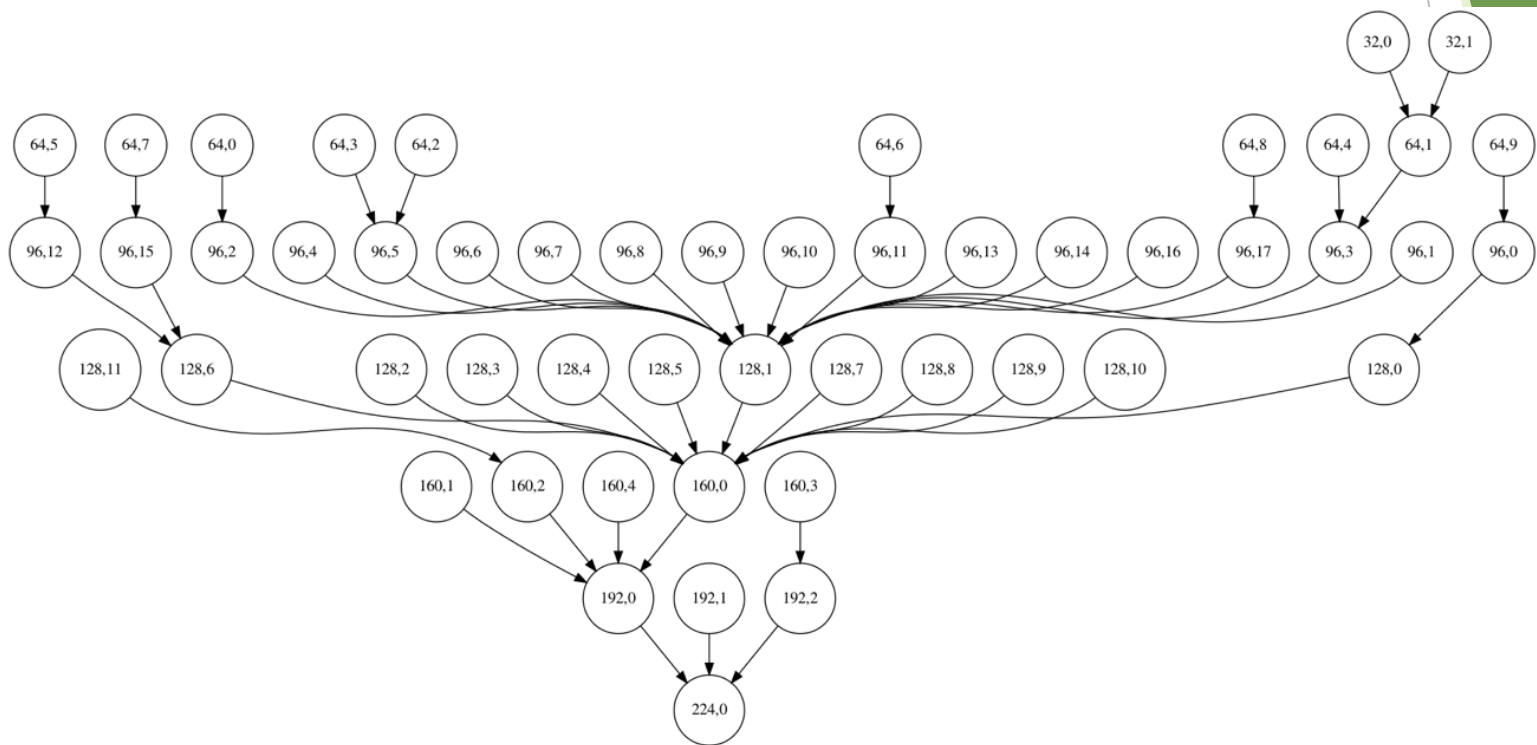
Extract Persistent Diagram:1

Extract Persistent Diagram:2

- ▶ 連結成分群から、パーシステントダイアグラムを抽出する
 - ▶ PDは連結成分のBirthtimeとDeathtimeで記述される
 - ▶ 閾値をTimeとする（モルフォロジの場合は試行回数）
 - ▶ 無から連結成分が出現した時Birth
 - ▶ 複数の連結成分が、次世代のより大きな連結成分に包含されたとき、Birthtimeが一番小さい連結成分以外をDeath
 - ▶ パーシステンシーが長い連結成分が、特徴量として有意だと仮定しているため

Extract Persistent Diagram:3

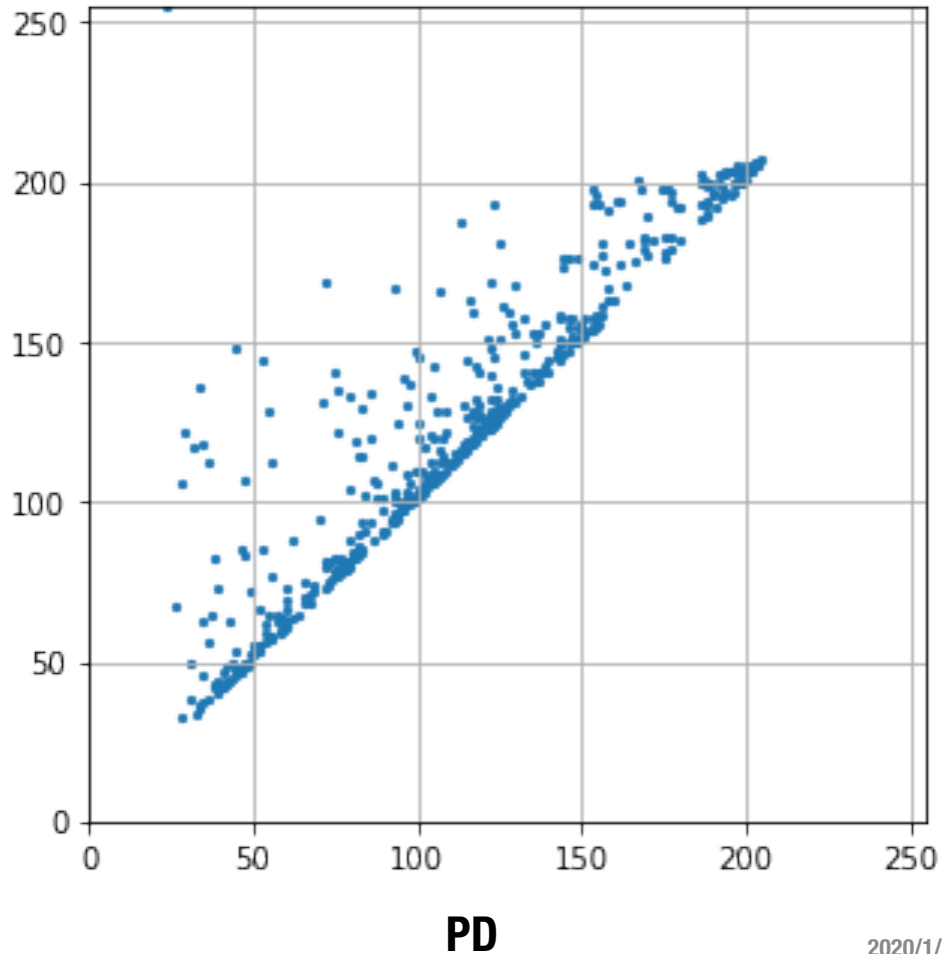
- ▶ 連結成分の出現と消失をツリーとして実装した。

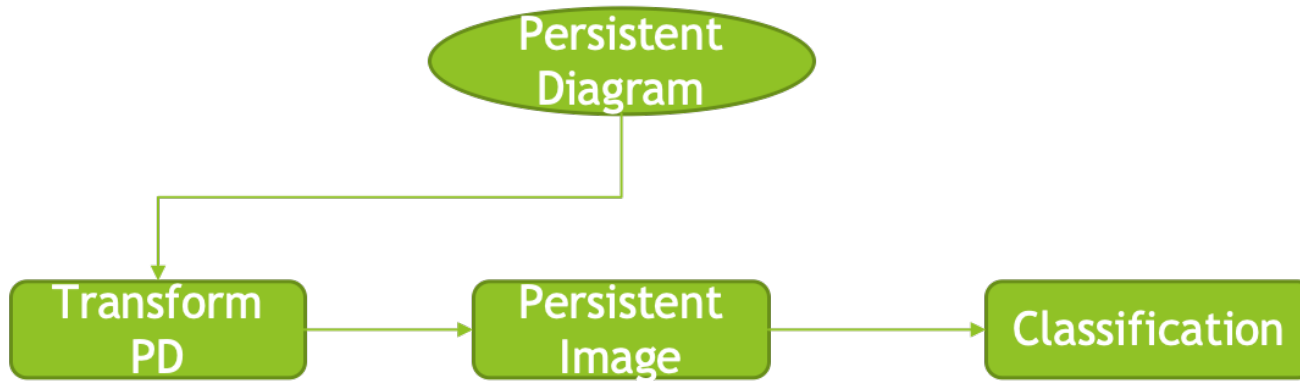


Extract Persistent Diagram:4

- ▶ ノードは連結成分
- ▶ エッジは包含関係
- ▶ ツリーの上下方向がタイム
- ▶ ツリーを作るにあたって、連結成分の世代間の包含関係を知る必要がある
- ▶ ノードのBirthtimeをX軸にDeathtimeをY軸にプロットして、パーシステントダイアグラムを生成した
 - ▶ ほとんどの連結成分が対角線上にある
 - ▶ 対角線から離れている寿命が長い連結成分は貴重である

Extract Persistent Diagram:5



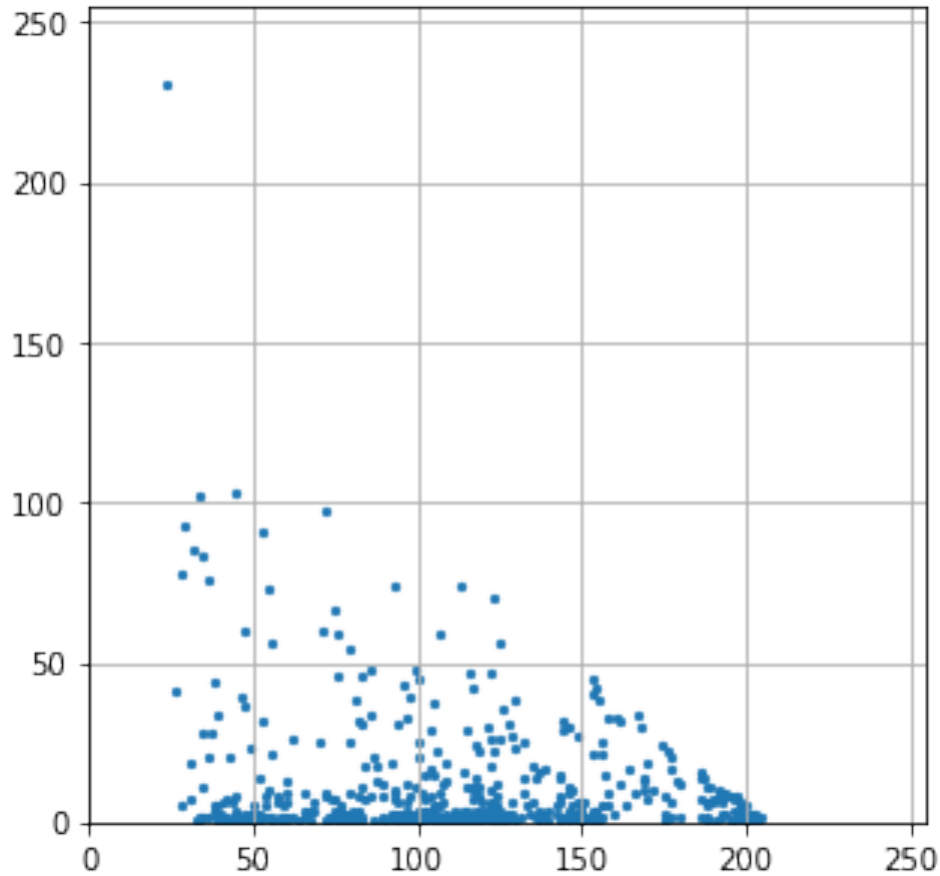


Convert to Persistent Image:1

Convert to Persistent Image:2

- ▶ PDは入力データによって取り得る次元数がことなる
- ▶ PIにすることで、PDを有限で可逆な特徴量に変換する
 - ▶ PIを生成するにはPDをBirthとPersistencyで表されるグラフに変換する。
 - ▶ これをTransformedPDという
 - ▶ Persistencyは(Death – Birth)で計算される
 - ▶ Y軸上に寿命がプロットされる。

Convert to Persistent Image:3



TPD(TransformedPD)

2020/1/29

52

Convert to Persistent Image:4

- ▶ PIは以下で示す、式によってTransformedPDから生成する。

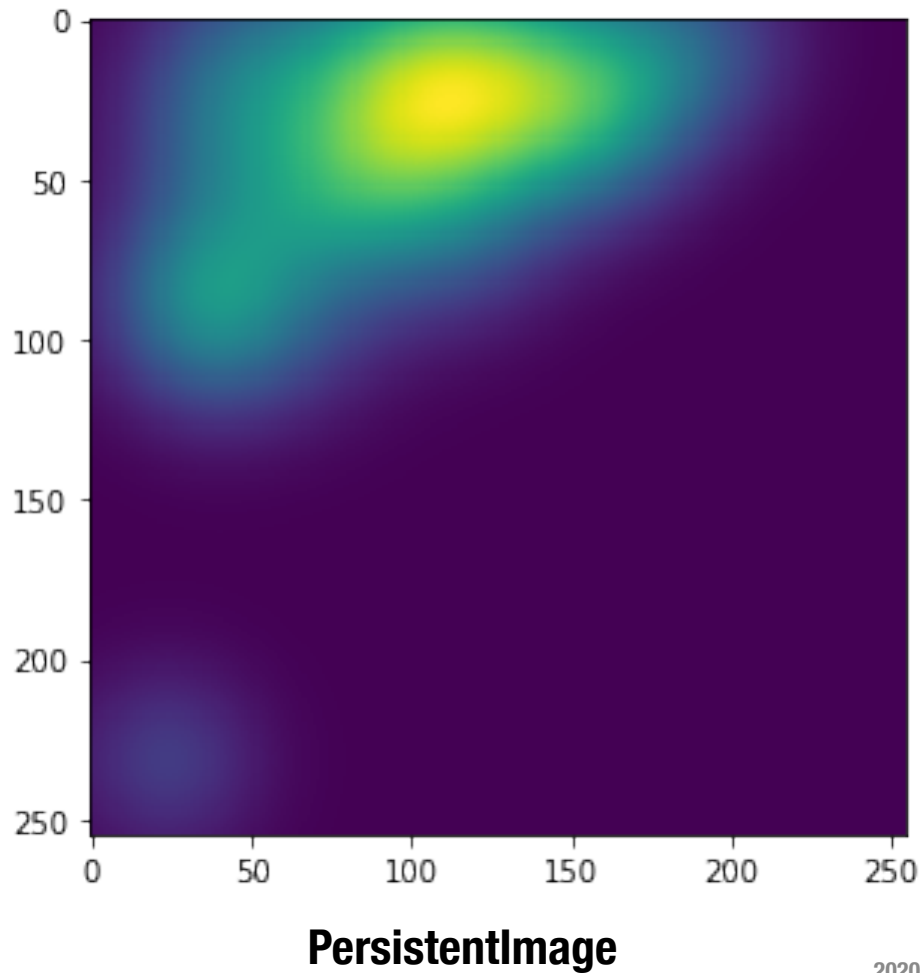
$$PI(x, y) = \sum_{u \in TPD} f(u) \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\left[(x-u_x)^2 + (y-u_y)^2\right] / 2\sigma^2}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq 0, \\ \frac{t}{b} & \text{if } 0 < t < b, \\ 1 & \text{if } t \geq b. \end{cases}$$

b is biggest persistence number.

- ▶ 具体的には、TPDから点の密度（ガウスカーネル密度）を計算し、寿命による重み付けをおこなっている。
- ▶ PIのX、Yの解像度は特徴量の表現力に影響しにくいと言われている。

Convert to Persistent Image:5



Classify

- ▶ PIは二次元データであるため、一次元データに変換した
- ▶ シグブーストという決定木の一種のアルゴリズムを使用し画像分類をおこなった
 - ▶ 木による分類のため、特徴量ベクトルの圧縮や正規化等の後処理は行わなかった

Explanation

Overview

- ▶ 自然画像の分類で評価した
- ▶ 環境
 - ▶ マシンのスペック
 - ▶ MacBook Pro 15-inch, 2018 6-Core Intel Core i9 CPU 8950HK
2.9 GHz 32 GB 2400 MHz DDR4
 - ▶ ソフトウェア・ライブラリ
 - ▶ Python3.7, OpenCV, Xgboost, Numba, scikit-learn, Scikit-image, Numpy, Matplotlib, Jupyter
- ▶ 分類精度である**ACC**を使い数値で評価した

Target Data:1

- ▶ MNIST(Mixed National Institute of Standards and Technology database)
 - ▶ トレインデータ数6万
 - ▶ テストデータ数1万
 - ▶ 手書きの数字「0～9」に正解ラベルが与えられるデータセット

Target Data:2

▶ Cifar10

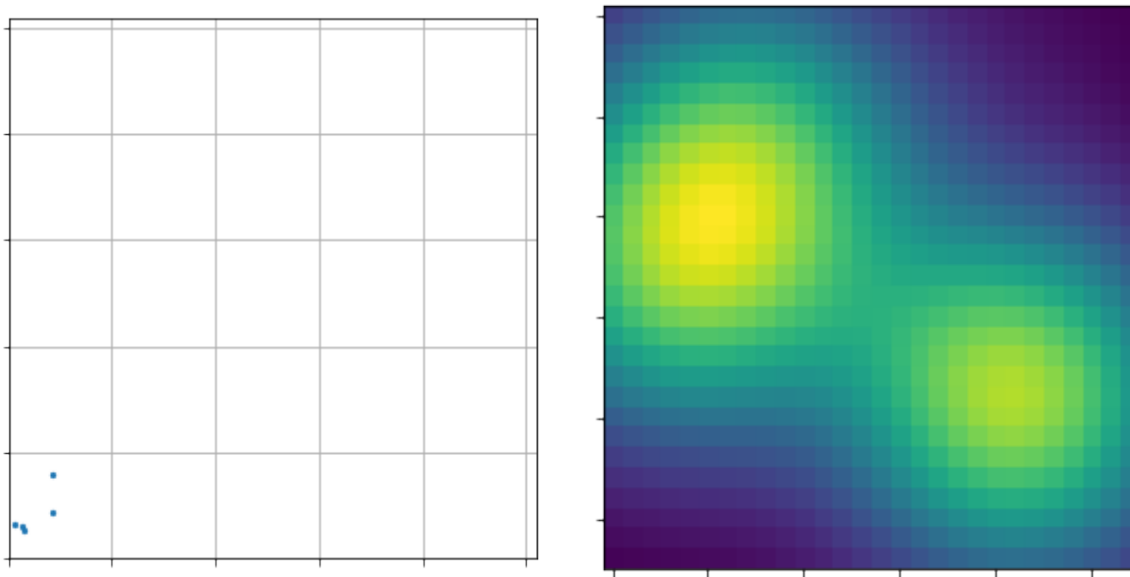
- ▶ トレインデータ数5万
- ▶ テストデータ数1万
- ▶ 10種類の自然画像(airplane, automobile, bird, cat, deer, dog, frog, horse, ship, truck)
- ▶ 画像サイズは32x32ピクセル、RGBの3チャンネル画像
- ▶ PythonのcPickle形式でデータが提供されている。

Result(MNIST):1

▶ MNIST

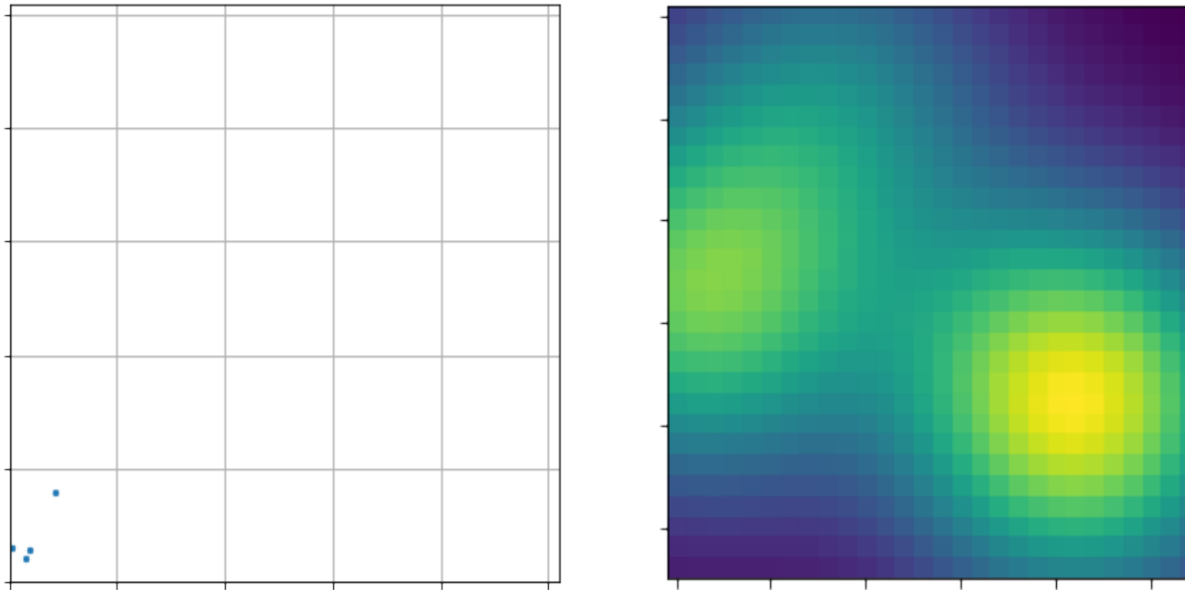
- ▶ 文字データでグレイスケールかつ二値に近い画像で単純データ
- ▶ 二値画像取得後モルフォロジ処理（ダイレーション、エロージョン）をおこないパーシステントダイアグラムを抽出
- ▶ モルフォロジの論理和・論理積をとる座標 (X,Y) 近傍として、 $(X,Y-1), (X-1,Y), (X+1,Y), (X,Y+1)$ とした
- ▶ 以下に、パーシステントダイアグラムとパーシステントイメージを示す。

Result(MNIST):2



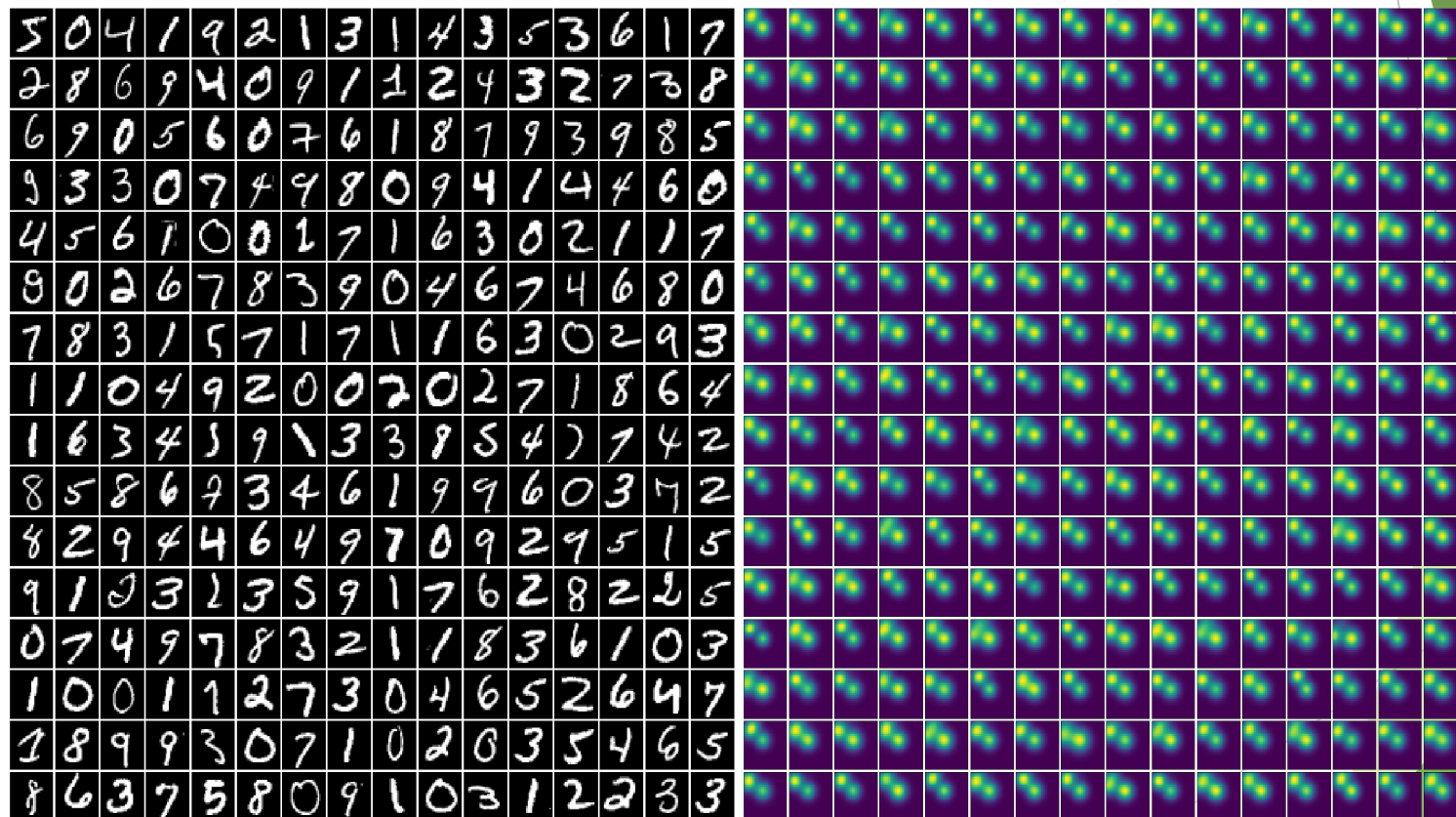
0のパーシステントダイアグラムとパーシステントイメージ

Result(MNIST):3

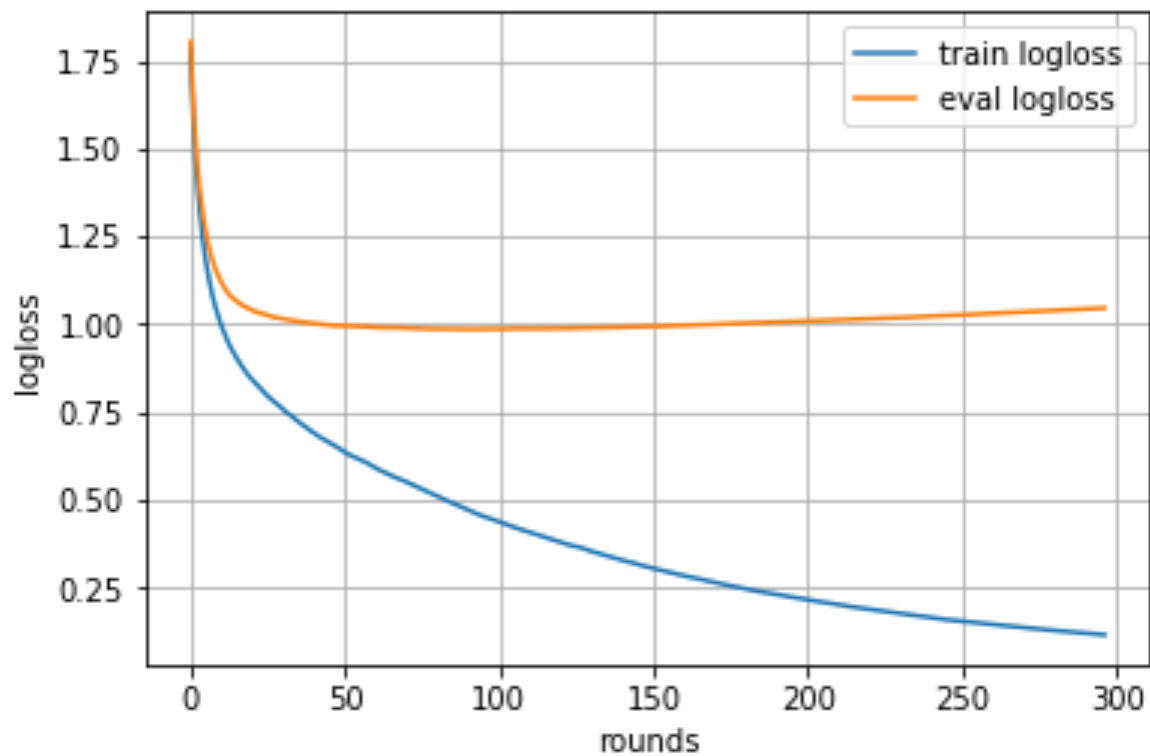


1のパーシステントダイアグラムとパーシステントイメージ

Result(MNIST):4



Result(MNIST):5



MNISTのLoglossグラフ

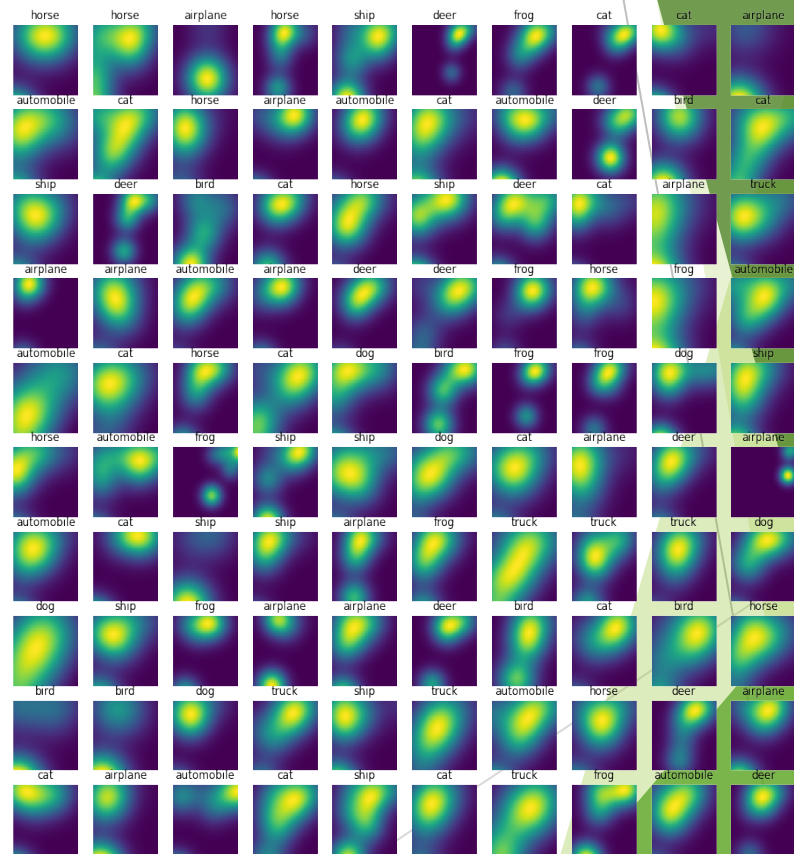
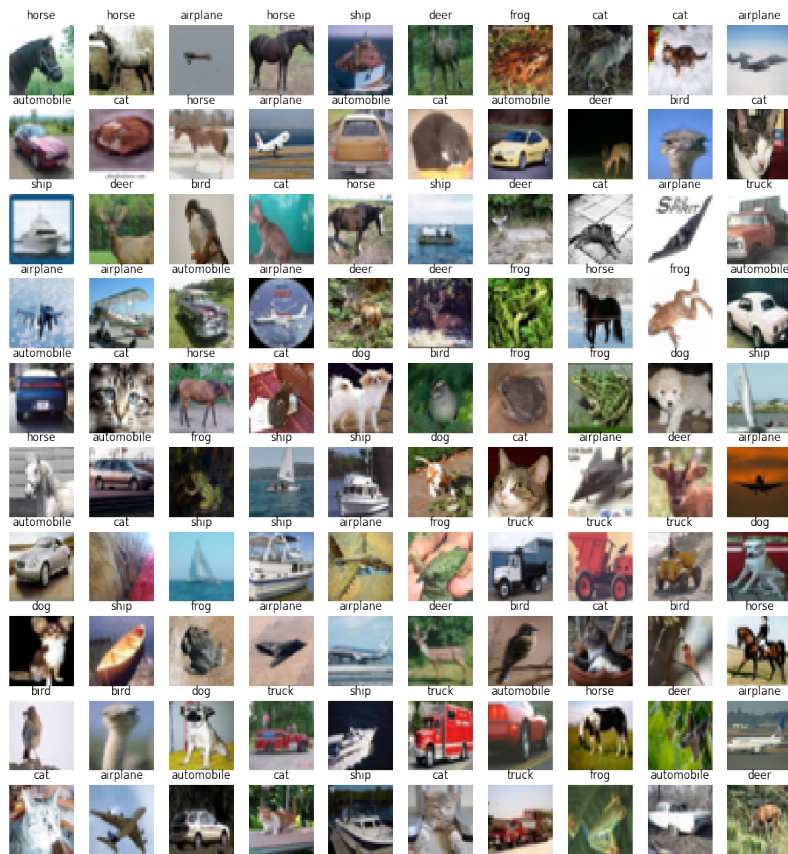
Result(MNIST):6

- ▶ 訓練データと試験データの損失値の試行回数による推移を示す
- ▶ 試行回数50程度で、損失値が収束していることがわかる。
- ▶ 実験よりMNISTのACCは65%となった。
 - ▶ 深層学習が一般的に90%を出すため精度が高いとは言えない
 - ▶ 50%を超えているという点では分類器として機能していることがわかる

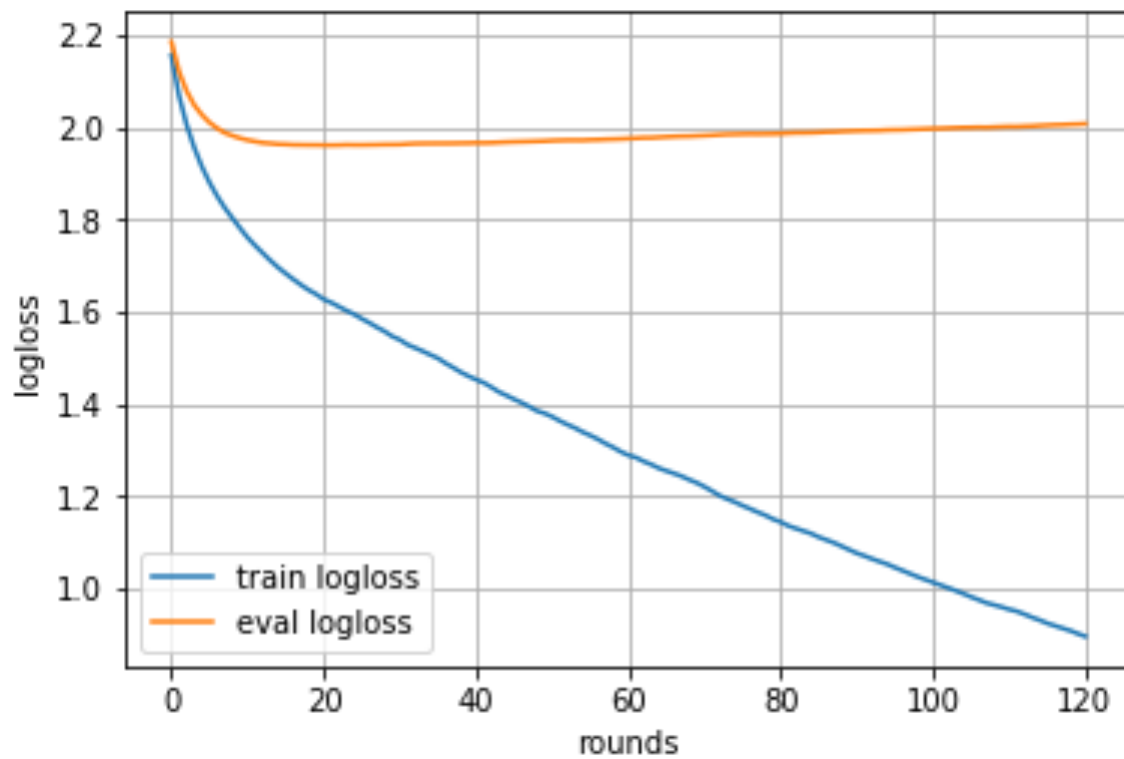
Result(Cifar10):1

- ▶ Cifar10
 - ▶ 二値画像取得後、閾値を段階的に調整してパーシステントダイアグラムを抽出した。

Result(Cifar10):2



Result(Cifar10):3



Cifar10のLoglossグラフ

Result(Cifar10):4

- ▶ 試行回数が0から20の間で損失値の最小値をとっている。
- ▶ MNISTと比較するとより早い段階で収束している
- ▶ ただし、損失値の最小値は高止まりしている
- ▶ 実験よりCifar10のACCは28%となった
 - ▶ これは50%未満の精度のため、分類器として機能していないことがわかる

Conclusion:1

- ▶ MNIST
 - ▶ 分類精度が65%
 - ▶ 深層学習には劣るが、50%を超えているという点で妥当な結果
 - ▶ 深層学習のエラーレートは0.2%台となっている

Conclusion:2

- ▶ Cifar10
 - ▶ 分類精度が28%
 - ▶ 50%未満という、画像分類が出来ていないと評価できる
 - ▶ 深層学習のエラーレートは1%台となっている
 - ▶ パーシステントホモロジーで特徴量を抽出することが難しかった可能性がある
 - ▶ カラーデータをグレイスケールにしたための、色データ損失
 - ▶ 複雑
 - ▶ 32x32と低い解像度

Conclusion:3

- ▶ 大きな画像データへの適応
 - ▶ Cifar10のACCが低い原因として、画像が低解像度である点
 - ▶ 今回の実装では、PDの抽出に時間計算量と空間計算量が大きくなる。
 - ▶ 高解像度へ最適化した実装が必要
- ▶ 他の次元での適応
 - ▶ 方体復体の連結成分だけでなく、穴にも注目

Conclusion:4

- ▶ 画像を三次元空間点列と見なし、物理や化学分野と同じように単体複体でモデル化する
 - ▶ 自然画像をX,Y座標と輝度値に注目して三次元データと見なす
 - ▶ それによって、物理や化学分野と同じように三次元空間点列データと単体複体でモデル化出来る
 - ▶ 物理や化学分野で成功している手法が応用可能かもしれない

References:1

- ▶ [1] 晃. 浅野, 千. 浅野 (村木), 義. 木森, 実. 棟安, 肇. 延原, 光. 藤尾, 非線形画像・信号処理: モルフォロジの基礎と応用, 丸善株式会社, 平成22年.
- ▶ [2] 玉木大, 広がりゆくトポロジーの世界一言語としてのホモトピー論ー, 現代数学社, 2012年.
- ▶ [3] 裕. 平岡, 昌. 三村, 康. 竹内, 善. 森田, タンパク質構造とトポロジーパーシステントホモロジー群入門ー, 共立出版株式会社, 2013年.
- ▶ [4] 原田達也, 画像認識, 講談社, 2017年.
- ▶ [5] 田村一郎, トポロジー, 岩波書店, 1972年.
- ▶ [6] 柘田幹也, 代数的トポロジー, 朝倉書店, 2002年.

References:2

- ▶ [7] 枘田幹也, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968年.
- ▶ [8] 瀬山士郎, “ホモロジーとは,” 数学セミナー, 第 巻56, 第 12, p. 8, 2017.
- ▶ [9] 田中心, “ホモロジーの基礎／定義と計算例,” 数学セミナー, 第 巻56, 第 12, p. 13, 2017.
- ▶ [10] 赤穂まなぶ, “コホモロジー,” 数学セミナー, 第 巻56, 第 12, p. 20, 2017.
- ▶ [11] 平岡裕章, “パーシステントホモロジー／データの形を捉える,” 数学セミナー, 第 巻56, 第 12, p. 34, 2017.

References:3

- ▶ [12] Henry Adams, Tegan Emerson, Michael Kirby, Rachel Neville, Chris Peterson, Patrick Shipman, Sofya Chepushtanova, Eric Hanson, Francis Motta, Lori Ziegelmeier, "Persistence Images: A Stable Vector Representation of Persistent Homology," Journal of Machine Learning Research (JMLR) vol. 18, pp. 1-35, 2018.
- ▶ [13] 草野 元紀、「パーシステントホモロジーの機械学習」、講演アブストラクト、第14回数学総合若手研究集会 (The 14th Mathematics Conference for Young Researchers)、北海道大学大学院、2月27日、2018年。
https://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~wakate/mcyr/2018/pdf/005900_kusano_genki.pdf

References:4

- ▶ [14] Genki Kusano, Kenji Fukumizu, and Yasuaki Hiraoka. "Persistence weightedgaussian kernel for topological data analysis," International Conference on Machine Learning (ICML), vol. 48, pp. 2004-2013, 2016.
- ▶ [15] [KFH17]Genki Kusano, Kenji Fukumizu, and Yasuaki Hiraoka, "Kernel method forpersistence diagrams via kernel embedding and weight factor," arXiv, arXiv:1706.03472, 2017.
<https://arxiv.org/pdf/1706.03472.pdf>
- ▶ [16] [KFH17: journal]Genki Kusano, Kenji Fukumizu, Yasuaki Hiraoka, "Kernel Method for Persistence Diagrams via Kernel Embedding and Weight Factor," Journal of Machine Learning Research (JMLR), vol. 18, pp. 1–41, 2018.

References:5

- ▶ [17] Peter Bubenik, "Statistical Topological Data Analysis using PersistenceLandscapes," Journal of Machine Learning Research (JMLR), vol. 16, pp. 77-102, 2015.
- ▶ [18] Ippei Obayashi, Yasuaki Hiraoka, "Persistence Diagrams with Linear Machine Learning Models," arXiv, arXiv:1706.10082, 2017.<https://arxiv.org/pdf/1706.10082.pdf>
- ▶ [19] [HNH+16] Yasuaki Hiraoka, Takenobu Nakamura, Akihiko Hirata, Emerson G Escolar, Kaname Matsue, and Yasumasa Nishiura, "Hierarchical structures of amorphoussolids characterized by persistent homology," Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS), vol. 113, no. 26, pp. 7035-7040, 2016.

References:6

- ▶ [20] 福水健次、「カーネル法入門－正定値カーネルによるデータ解析－」、朝倉書店, 2010年。
- ▶ [21] Takashi Ichinomiya, Ippei Obayashi, and Yasuaki Hiraoka, "Persistent homology analysis of craze formation," Physical Review E, vol. 95, no. 1, 012504, 2017.
- ▶ [22] CSU-TDA/Persistencelmages
<https://github.com/CSU-TDA/Persistencelmages>
- ▶ [23] Peter Bubenik, Paweł Dłotko, "A persistence landscapes toolbox for topological statistics," Journal of Symbolic Computation January, Elsevier, 2017.<https://doi.org/10.1016/j.jsc.2016.03.009>

References:7

- ▶ [24] Gunnar Carlsson, "Topology and data," Bulletin American Mathematical Society, American Mathematical Society (AMS), vol. 46, pp. 255-308, 2009.
<https://doi.org/10.1090/S0273-0979-09-01249-X>
<https://www.ams.org/journals/bull/2009-46-02/S0273-0979-09-01249-X/S0273-0979-09-01249-X.pdf>
- ▶ [25] Barbara Di Fabio, Massimo Ferri, "Comparing Persistence Diagrams Through Complex Vectors," IAPR - Image Analysis and Processing (ICIAP), Lecture Notes in Computer Science (LNCS), Springer, Cham, vol 9279, pp. 294-305, 2015.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-23231-7_27

References:8

- ▶ [26] Pietro Donatini, Patrizio Frosini, Alberto Lovato, "Size functions for signature recognition," SPIE's International Symposium on Optical Science, Engineering, and Instrumentation: Vision Geometry VII, vol. 3454, pp. 178-183, 1998.
<https://doi.org/10.1117/12.323253>
- ▶ [27] Otter, Nina et al. "A Roadmap for the Computation of Persistent Homology." EPJ Data Science 6.1 (2017): n. pag. Crossref. Web.
- ▶ [28] Chen, Tianqi, and Carlos Guestrin. "XGBoost." Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining - KDD '16 (2016): n. pag. Crossref. Web.

References:9

- ▶ [29] Edelsbrunner, H. The union of balls and its dual shape. Discrete Comput Geom 13, 415-440 (1995) doi:10.1007/BF02574053
- ▶ [30] Buchet M., Hiraoka Y., Obayashi I. (2018) Persistent Homology and Materials Informatics. In: Tanaka I. (eds) Nanoinformatics. Springer, Singapore
- ▶ [31] Bishop, C.M.: Pattern Recognition and Machine Learning (Information Science and Statistics). Springer, Berlin (2007)
- ▶ [32] Wu, Kesheng & Otoo, Ekow & Suzuki, Kenji. (2009). Optimizing two-pass connectedcomponent labeling algorithms. Pattern Analysis & Applications. 12. 117-135. 10.1007/s10044-008-0109-y.

References:10

- ▶ [33] Chen, Tianqi, and Carlos Guestrin. “XGBoost.” Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining - KDD '16 (2016): n. pag. Crossref. Web.
- ▶ [34] 晃. 浅野, 肇. 延原, “マセマティカルモルフォロジーの基礎と新展開,” 電子情報 通信学会誌, 第 巻 92, 第 10, p. 876, 2009.
- ▶ [35] Y. LECUN, 「THE MNIST DATABASE of handwritten digits」, <http://yann.lecun.com/exdb/mnist/>.
- ▶ [36] L. Yann, C. CorinnaとJ. C. B. Christopher, 「THE MNIST DATABASE of handwritten digits」, THE MNIST DATABASE of handwritten digits. [Online]. Available at: <http://yann.lecun.com/exdb/mnist/>. [参照: 09-1月-2020].

References:11

- ▶ [37] Wikipedia contributors. "MNIST database." Wikipedia, The Free Encyclopedia. Wikipedia, The Free Encyclopedia, 7 Jan. 2020. Web. 9 Jan. 2020.
- ▶ [38] A. Krizhevsky, V. NairとG. Hinton, 「CIFAR-10 (Canadian Institute for Advanced Research)」 .
- ▶ [39] K. Alex, N. VinodとH. Geoffrey, 「The CIFAR-10 dataset」 , The CIFAR-10 dataset. [Online]. Available at: <https://www.cs.toronto.edu/~kriz/cifar.html>.
- ▶ [40] Wikipedia contributors, CIFAR-10 — Wikipedia, The Free Encyclopedia. 201984
- ▶ [41] 大林一平, パーシステントホモロジー - 数学と計算機科学の融合による「かたち」のデータ解析, 2018年 日本数学会 秋季総合分科会, 岡山大学, 岡山, Sep. 2018

Thank you for
your time and
attention.

ありがとうございました。