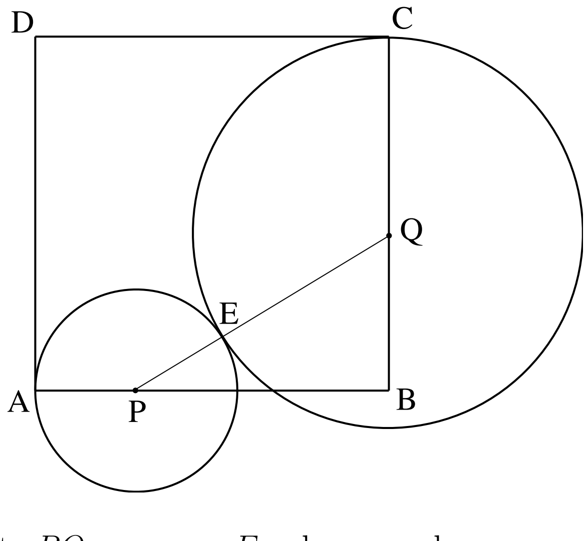
Soluzione del primo problema della maturità scientifica A.S. 2009/2010

Nicola Gigli * Sun-Ra Mosconi †

23 giugno 2010

Problema 1

Punto 1 Chiamiamo y il raggio di λ e E il punto di contatto tra γ e λ.



Allora il segmento PQ passa per E e dunque vale

$$\overline{PQ} = x + y.$$

Poiché $\overline{PB} = 1 - x$ e $\overline{BQ} = 1 - y$, dal teorema di Pitagora abbiamo

$$(1 - x)^2 + (1 - y)^2 = (x + y)^2,$$

*Università di Bonn
†Università di Catania

espandendo i quadrati e svolgendo i calcoli otteniamo

$$\begin{aligned}
1-2x+x^2+1-2y+y^2 &= x^2+2xy+y^2,\\
2-2x-2y &= 2xy,\\
1-x &= y(1+x),\\
y &= \frac{1-x}{1+x}.
\end{aligned}$$

Punto 2 Cominciamo osservando che il dominio della funzione è tutto l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali escluso il punto $x=-1$, dove il denominatore si annulla. Negli intervalli $(-\infty,-1)$ e $(-1,+\infty)$ la funzione è continua. L'unico zero della funzione si ha per $x=1$.
Calcoliamo il limiti della funzione per x che tende a $\pm\infty$ e ±-1:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{1+x} &= -1,\\
\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{1+x} &= -1,\\
\lim_{x\to-1^+}\frac{1-x}{1+x} &= +\infty,\\
\lim_{x\to-1^-}\frac{1-x}{1+x} &= -\infty.
\end{aligned}$$

Dunque f ha un asintoto orizzontale (la retta $y=-1$) e un asintoto verticale (la retta $x=-1$). La derivata di f è data da

$$f'(x)=\frac{-1(1+x)-1(1-x)}{(1+x)^2}=-\frac{2}{(1+x)^2},$$

ed è quindi sempre negativa per $x\neq-1$. In particolare, la funzione non ammette massimi o minimi locali. Inoltre nell'intervallo $(-\infty,-1)$ essa è strettamente decrescente, così come nell'intervallo $(-1,+\infty)$. Per concludere che f è invertibile basta osservare che $x\in(-\infty,-1)$ implica $f(x)<-1$ e $x\in(1,+\infty)$ implica $f(x)>-1$. Per calcolare l'inversa di f poniamo $y=f(x)$ e risolviamo (in x) l'equazione

$$\frac{1-x}{1+x}=y,$$

ottenendo

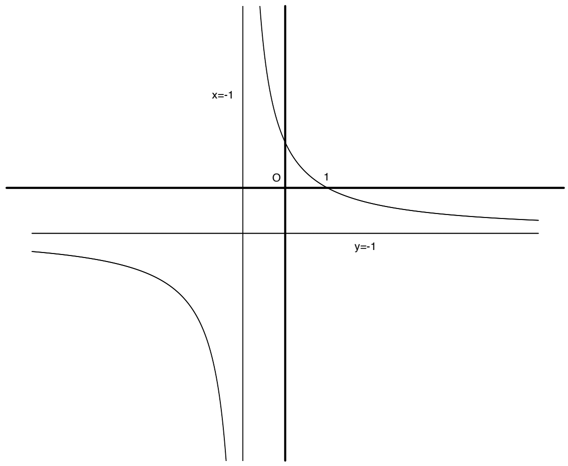
$$\frac{1-y}{1+y}=x.$$

Questo vuol dire che l'inversa di f è f stessa. Il grafico dell'inversa, in particolare, sarà uguale al grafico di f (o, che è lo stesso, il grafico di f è simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante).

Concludiamo lo studio di f con l'analisi della derivata seconda. Abbiamo:

$$f''(x) = \frac{4}{(1+x)^3},$$

quindi il suo segno coincide col segno di $(1+x)^3$. Ergo abbiamo $f''(x) > 0$ se $x > -1$ e $f''(x) < 0$ se $x < -1$. Dunque nell'intervallo $(-1, +\infty)$ la f è convessa, mentre nell'intervallo $(-\infty, -1)$ la f è concava.
In definitiva, il grafico di f è il seguente:



Punto 3 Sappiamo dal punto precedente che nell'intervallo $(-1, 1)$ la funzione f è positiva. Dunque in tale intervallo $f = g$ e quindi g è derivabile in 0. La sua derivata è $g'(0) = f'(0) = -2$. Dunque l'equazione della tangente a g in $(0, 1)$ è data da

$$y = -2x + 1.$$

Studiamo ora il problema della tangenza a g in $(1, 0)$. Calcoliamo i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale di g in 1. Ricordando che $g(1) = f(1) = 0$ e che per $x > 1$ vale $f(x) < 0$ e dunque $g(x) = -f(x)$ abbiamo

$$\begin{array}{llllll} \text{limite sinistro:} & \displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} & = \displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)}{h} & = & f'(1) = & -\dfrac{1}{2}, \\ \text{limite destro:} & \displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} & = \displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{-f(1+h)}{h} & = & -f'(1) = & \dfrac{1}{2}. \end{array}$$

Dunque la funzione g non è derivabile in 1 e quindi non esiste alcuna retta tangente al suo grafico in $(1, 0)$. Tuttavia possiamo osservare che 1 è un punto angoloso di g (nel senso che i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale esistono ma sono diversi), dunque possiamo parlare di tangente a sinistra e tangente a destra al grafico di g: esse hanno rispettivamente equazione

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}(x-1), \\ y &= \ \ \frac{1}{2}(x-1). \end{aligned}$$

Punto 4 Il segmento OR è verticale e il segmento OS orizzontale. Dunque l'area cercata è uguale a

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{2}{x+1} - 1\,dx = 2\big(\log 2 - \log 1\big) - 1 = 2\log 2 - 1$$

Soluzione del secondo problema della maturità scientifica A.S. 2009/2010

Nicola Gigli * Sun-Ra Mosconi †

23 giugno 2010

Problema 2

Punto 1 Osserviamo innanzitutto che G_b sta sempre nel semispazio delle ordinate positive e tutti i grafici passano per $(0,1)$. A b fissato possiamo studiare la funzione $f(x) = b^x$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1; \\ 0 & \text{se } 0 < b < 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < b < 1; \\ 0 & \text{se } b > 1. \end{cases}$$

Calcoliamo le derivate:

$$f'(x) = \log(b) \cdot b^x,$$
$$f''(x) = \big(\log(b)\big)^2 b^x,$$

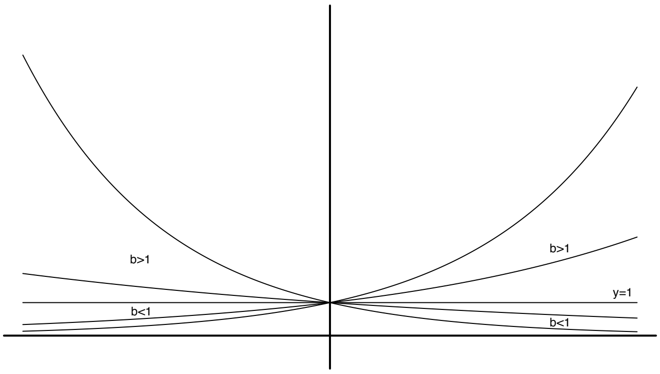
deducendone che f è crescente per $b > 1$, decrescente per $0 < b < 1$ e sempre convessa. Poiché

$$\left(\frac{1}{b}\right)^x = b^{-x}$$

abbiamo che $(x, y) \in G_{1/b}$ se e solo se $(-x, y) \in G_b$, ossia il grafico $G_{1/b}$ è la riflessione attorno all'asse y del grafico G_b.

*Università di Bonn

†Università di Catania



Derivando rispetto a b si ha

$$\frac{d}{db}b^x = xb^{x-1}$$

e quindi per $x > 0$ i grafici G_b sono decrescenti ad x fissato, mentre per $x < 0$ sono crescenti. Inoltre, per ogni $x \neq 0$

$$\lim_{b \to 1} b^x = 1,$$

$$\lim_{b \to +\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 0; \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{b \to 0^+} b^x = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0; \\ +\infty & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi in definitiva:

- per b che tende a 1^+ i grafici G_b decrescono verso la retta $y = 1$ nel semiasse delle ascisse positive, mentre crescono verso la stessa retta nel semiasse delle ascisse negative.

- per b che tende a 1^- i grafici G_b crescono verso la retta $y = 1$ nel semiasse delle ascisse positive, mentre decrescono verso la stessa retta nel semiasse delle ascisse negative,

- per b che tende a 0^+ i grafici G_b decrescono a zero nel semiasse delle ascisse positive, e crescono a $+\infty$ nel semiasse delle ascisse negative,

- per b che tende a $+\infty$ i grafici G_b crescono a $+\infty$ nel semiasse delle ascisse positive, e decrescono a 0 nel semiasse delle ascisse negative,

Punto 2 Un generico punto P di G_b si può scrivere come (x_0, b^{x_0}) per un qualche numero reale x_0.
La retta parallela all'asse y e passante per (x_0, b^{x_0}) interseca l'asse delle ascisse, chiaramente, in x_0. Dunque $A = (x_0, 0)$
Per identificare B, ricordiamo che la derivata di $f(x) = b^x$ è data da $f'(x) = \log(b)b^x$. L'equazione della retta tangente a G_b in (x_0, b^{x_0}) è quindi data da

$$y = \log(b)b^{x_0}(x - x_0) + b^{x_0}.$$

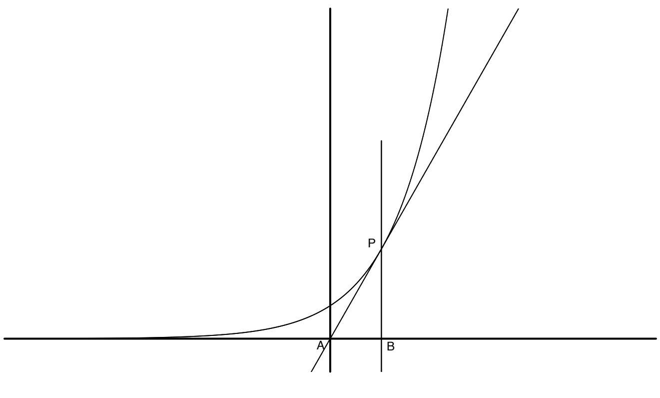
Per calcolare il punto di intersezione di questa retta con l'asse delle ascisse poniamo $y = 0$ nell'equazione e risolviamo in x:

$$\begin{aligned}
0 &= \log(b)b^{x_0}(x - x_0) + b^{x_0}, \\
0 &= b^{x_0}\big(\log(b)(x - x_0) + 1\big), \\
0 &= \log(b)(x - x_0) + 1, \\
x &= -\frac{1}{\log(b)} + x_0,
\end{aligned}$$

avendo usato il fatto che $b^{x_0} \neq 0$. Dunque $B = (-\frac{1}{\log(b)} + x_0, 0)$.
Ne deduciamo che

$$\overline{AB} = \left| x_0 - \left(-\frac{1}{\log(b)} + x_0 \right) \right| = \left| \frac{1}{\log(b)} \right|,$$

e quindi la distanza tra A e B non dipende da P, come richiesto.



Tale distanza è uguale a 1 se e solo se $\left|\frac{1}{\log(b)}\right| = 1$, ovvero se e solo se una delle seguenti due equazioni è soddisfatta:

$$\begin{aligned}
\log(b) &= 1, \\
\log(b) &= -1.
\end{aligned}$$

La prima di esse ha soluzione $b = e$, la seconda $b = \frac{1}{e}$. Questi sono gli unici valori di b per cui $\overline{AB} = 1$.

Punto 3 Per prima cosa determiniamo la retta r. Sia x_0 un generico numero reale. Allora poiché la derivata di e^x in x_0 è e^{x_0}, l'equazione della retta tangente a G_e in (x_0, e^{x_0}) è data da

$$y = e^{x_0}(x - x_0) + e^{x_0}.$$

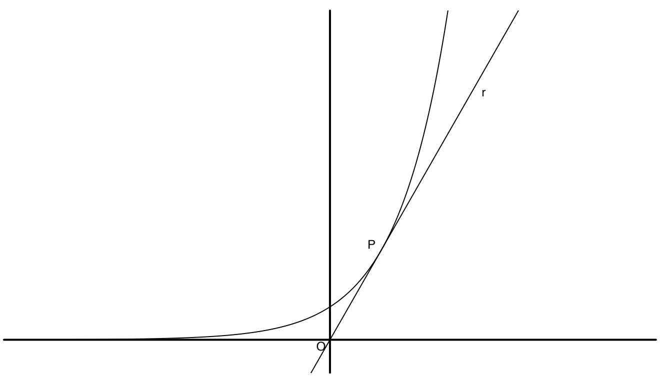
Dobbiamo trovare x_0 in maniera che tale retta passi per l'origine. Ponendo dunque $x = y = 0$ nell'equazione sopra otteniamo

$$0 = -x_0 e^{x_0} + e^{x_0},$$

poiché $e^{x_0} \neq 0$ possiamo semplificare ed ottenere $0 = -x_0 + 1$ ovvero $x_0 = 1$. Dunque esiste una sola retta passante per l'origine e tangente a G_e: la retta di equazione

$$y = e(x - 1) + e.$$

L'angolo che tale retta forma col semiasse positivo delle ascisse è dato - in generale - dall'arcotangente del coefficiente angolare; dunque in questo caso esso vale $\arctan(e)$.



Punto 4 La retta $y = e$ interseca G_e nel punto $(1, e)$. L'area cercata può quindi essere calcolata come differenza delle aree:

- del rettangolo di vertici $(0, 0), (1, 0), (1, e), (0, e)$,
- dell'area sotto G_e compresa tra l'asse delle ascisse e le rette $x = 0$ e $x = 1$.

L'area del rettangolo è pari ad e. Quella della regione sotto il grafico si calcola come:

$$\int_0^1 e^x dx = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Dunque il valore cercato è:

$$e - (e - 1) = 1.$$

Soluzioni dei quesiti della maturità scientifica A.S. 2009/2010

Nicola Gigli [*] Sun-Ra Mosconi [†]

23 giugno 2010

Quesito 1
Un generico polinomio di grado n si può scrivere nella forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

dove $a_0, \ldots, a_n$ sono numeri reali. Poiché la derivata di una somma è la somma delle derivate, possiamo calcolare la derivata di ciascun monomio separatamente:

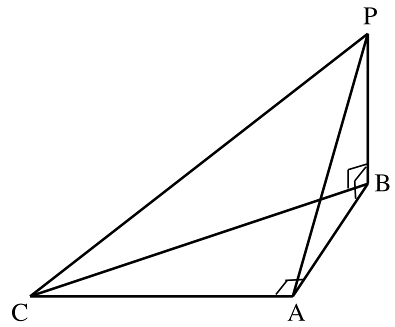
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} a_k x^k &= k a_k x^{k-1}, \\
\frac{d^2}{dx^2} a_k x^k &= k(k-1) a_k x^{k-2}, \\
&\cdots \\
\frac{d^k}{dx^k} a_k x^k &= k(k-1)\ldots 2 \cdot 1 a_k
\end{aligned}$$

e questo è valido per qualsiasi k. Se k è minore di n, la derivata n-esima di $a_k x^k$ sarà zero, essendo la derivata $n-k$-esima di una costante. L'unico addendo non nullo è quindi

$$\frac{d^n}{dx^n} a_n x^n = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 a_n$$

ed il prodotto $n(n-1)\ldots 2 \cdot 1$ è per definizione $n!$.
Quesito 2
Poiché la retta BP è ortogonale al piano del triangolo, essa è ortogonale a tutte le rette che giacciono su tale piano e passanti per B. Dunque i triangoli PAB e PBC sono rettangoli in B.

[*] Università di Bonn
[†] Università di Catania



Vogliamo dimostrare ora che il triangolo PAC è rettangolo in A. È noto che ciò è vero se e solo se vale

$$\overline{CP}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2.$$

Dal teorema di Pitagora applicato ai triangoli rettangli PAB e PBC e ABC si ottiene, nell'ordine

$$\begin{aligned}\overline{PB}^2 &= \overline{AP}^2 - \overline{AB}^2,\\ \overline{CP}^2 &= \overline{CB}^2 + \overline{PB}^2,\\ \overline{CB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2,\end{aligned}$$

e quindi

$$\overline{CP}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AP}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AP}^2.$$

Quesito 3

La pendenza della retta tangente in x è la derivata della funzione f in x. In questo caso $f'(x) = 3e^{3x}$. Risolvendo l'equazione $3e^{3x} = 2$ si ottiene $x = \frac{\log 2 - \log 3}{3}$.

Quesito 4

Cambiamo variabile ponendo $y = \frac{1}{x}$ e osserviamo che $y \to 0$ se $x \to \infty$ (indipendentemente dal segno). Si ha allora

$$\lim_{x\to\infty} 4x \sin\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0} 4\frac{\sin y}{y} = 4$$

per un noto limite notevole.

Quesito 5

Consideriamo un generico cono circolare retto di apotema $l = 80$ cm, e chiamiamo h la sua altezza e r il raggio del cerchio di base. Abbiamo quindi $h^2 + r^2 = l^2$, e il volume del cono espresso in base all'apotema e all'altezza è

$$\frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{\pi}{3}h(l^2 - h^2).$$

Studiamo la funzione

$$V(x) = \frac{\pi}{3}x(l^2 - x^2)$$

per $x > 0$. Si ha $V'(x) = \frac{\pi}{3}(l^2 - 3x^2)$ ed il segno della derivata è positivo se $0 < x < \frac{l}{\sqrt{3}}$ e negativo se $x > \frac{l}{\sqrt{3}}$. Il massimo si ha perció per $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$, e per tale valore di h si ha il volume

$$V_{max} = \frac{\pi}{3}\frac{l}{\sqrt{3}}(l^2 - \frac{l^2}{3}) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3 = \frac{1024000\pi}{9\sqrt{3}}cm^3 \approx 206 litri$$

Quesito 6

Affinché la funzione $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$ sia ben definita, è necessario e sufficiente che l'argomento della radice sia maggiore o uguale di 0 (si ricordi che il dominio del coseno è l'intera retta reale). Imponendo quindi la condizione

$$\cos(x) \geq 0$$

si ottiene che il dominio di f è l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

per un qualche k intero relativo.

Quesito 7

Perché h sia continua in 4 è necessario e sufficiente che i limiti destro e sinistro esistano, siano uguali e coincidano col valore della funzione in 4. È ovvio dalla definizione di h che il limite sinistro esiste ed è uguale a $h(4) = 0$. Calcoliamo il limite destro:

$$\lim_{x \to 4^+} h(x) = \lim_{x \to 4^+} kx^2 - 2x - 1 = 16k - 9.$$

In particolare il limite destro esiste. Possiamo quindi concludere che la funzione è continua in 4 se e solo se $16k - 9 = 0$, che è vero se e solo se $k = \frac{9}{16}$.

Questito 8

Il quesito richiede di trovare gli $n > 3$ interi tali che

$$\binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} = \binom{n}{n-3} - \binom{n}{n-2}.$$

A tal fine, osserviamo che vale

$$\begin{aligned}
\binom{n}{n-1} &= \frac{n!}{1!(n-1)!} = n, \\
\binom{n}{n-2} &= \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}, \\
\binom{n}{n-2} &= \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.
\end{aligned}$$

Dunque dobbiamo risolvere l'equazione

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n(n-1)}{2}.$$

Poiché n è maggiore di 3, sarà certamente diverso da 0, dunque dividendo per n otteniamo

$$\frac{n-1}{2} - 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n-1}{2},$$

che con semplici passaggi algebrici si riduce a

$$n^2 - 9n + 14 = 0.$$

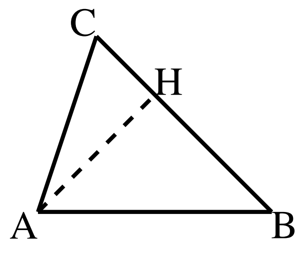
Applicando la nota formula risolutiva delle equazioni di secondo grado otteniamo che i valori possibili di n sono

$$n = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2},$$

dunque le soluzioni sono $n = 2$ e $n = 7$. Di queste, solo $n = 7$ è ammissibile, dunque 7 è l'unica soluzione del problema.

Quesito 9

prima parte. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che un triangolo ABC come nelle ipotesi esista. Chiamiamo H il piede dell'altezza tracciata da A sulla retta BC.



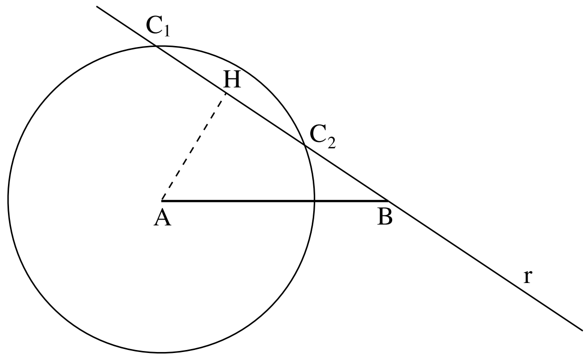
Se $H = C$ allora $AC = AH$. Altrimenti il triangolo AHC è rettangolo in H, dunque la sua ipotenusa AC è certamente più lunga del suo cateto AH. In definitiva abbiamo che in ogni caso vale

$$\overline{AC} \geq \overline{AH}. \tag{1}$$

Calcoliamo ora il valore di $\overline{AH}$. Poiché AHB è rettangolo in H e l'angolo in B è 45 gradi, sappiamo che

$$\overline{AH} = \overline{AB}\sin(45°) = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} > \frac{3}{1,5} = 2,$$

avendo usato il fatto che $\sqrt{2} < 1,5$. La disuguaglianza $\overline{AH} > 2 = \overline{AC}$ contraddice la (1), quindi abbiamo trovato l'assurdo.
seconda parte. Sia r una delle 2 rette che passano per B e formano un angolo di 30 gradi con AB. Sia H la proiezione di A su di essa.



Allora vale

$$\overline{AH} = \overline{AB}\sin(30°) = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1,5.$$

Sia ora γ la circonferenza di centro A e raggio 2. Poiché la distanza tra A e r è minore di 2, la retta r e la circonferenza γ si intersecano in due punti, diciamo C_1 e C_2. Per costruzione, i triangoli ABC_1 e ABC_2 soddisfano le richieste del problema.
Quesito 10 Sfruttiamo la formula di integrazione di Pappo per calcolare il volume di un solido di rotazione attorno all'asse y della regione R data da

$$R = \big\{a \leq y \leq b,\ g(y) \leq x \leq h(y)\big\}.$$

Vale

$$\text{Volume} = \pi \int_a^b h^2(y) - g^2(y)\, dy.$$

Nel caso in analisi abbiamo $0 \leq y \leq 2$ e $y^2 \leq x \leq 4$, quindi

$$\text{Volume} = \pi \int_0^2 16 - y^4\, dx = \pi \left(32 - \frac{1}{5}32\right) = \pi\frac{128}{5}.$$