ESAME DI STATO LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE PNI
SESSIONE ORDINARIA 2010

Problema 1

a) La funzione g(x) è una funzione continua nell'intervallo [-2 ; 5] con la seguente espressione analitica:

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & per -2\le x\le 2\\ -\sqrt{6x-x^2-8} & per 2<x<4\\ \sqrt{9x-x^2-20} & per 4\le x\le 5\end{cases}$$

La funzione g(x) non è una funzione derivabile nei punti x=-2; x=2; x=4; x=5perchè sono punti a tangente verticale in quanto il raggio è perpendicolare alla retta tangente in quei punti; pertanto in tali punti non esiste la derivata prima.

b) La funzione f(x) è derivabile in tale intervallo e presenta punti di massimo o minimo relativo solo dove la derivata prima si annulla, ovvero g(x)=0. Poichè g(x) esiste per -2≤x≤5, f(x) è derivabile in tale intervallo, quindi necessariamente, eventuali punti di massimo e minimo relativo saranno i punti in cui si annulla g(x), cioè x=2 e x=4.
Per -2<x<2 e 4<x<5 g(x) è positiva perciò f(x) è crescente.
Per 2<x<4 g(x) è negativa perciò f(x) è decrescente.
Quindi x=2 è un punto di massimo relativo, mentre x=4 è un punto di minimo relativo.

c) Se $f(x)=\int_{-2}^{x} g(t)dt$ allora per determinare $f(4)$ e $f(1)$ si usano le proprietà dell'integrale definito e il suo significato geometrico. $f(4)=\int_{-2}^{4} g(t)dt=\int_{-2}^{2} g(t)dt+\int_{2}^{4} g(t)dt=\frac{1}{2}\pi(2^2)-\frac{1}{2}\pi(1^2)=\frac{3}{2}\pi$
perchè i primi due integrali corrispondono alle aree dei due semicerchi di raggio rispettivamente 2 e 1

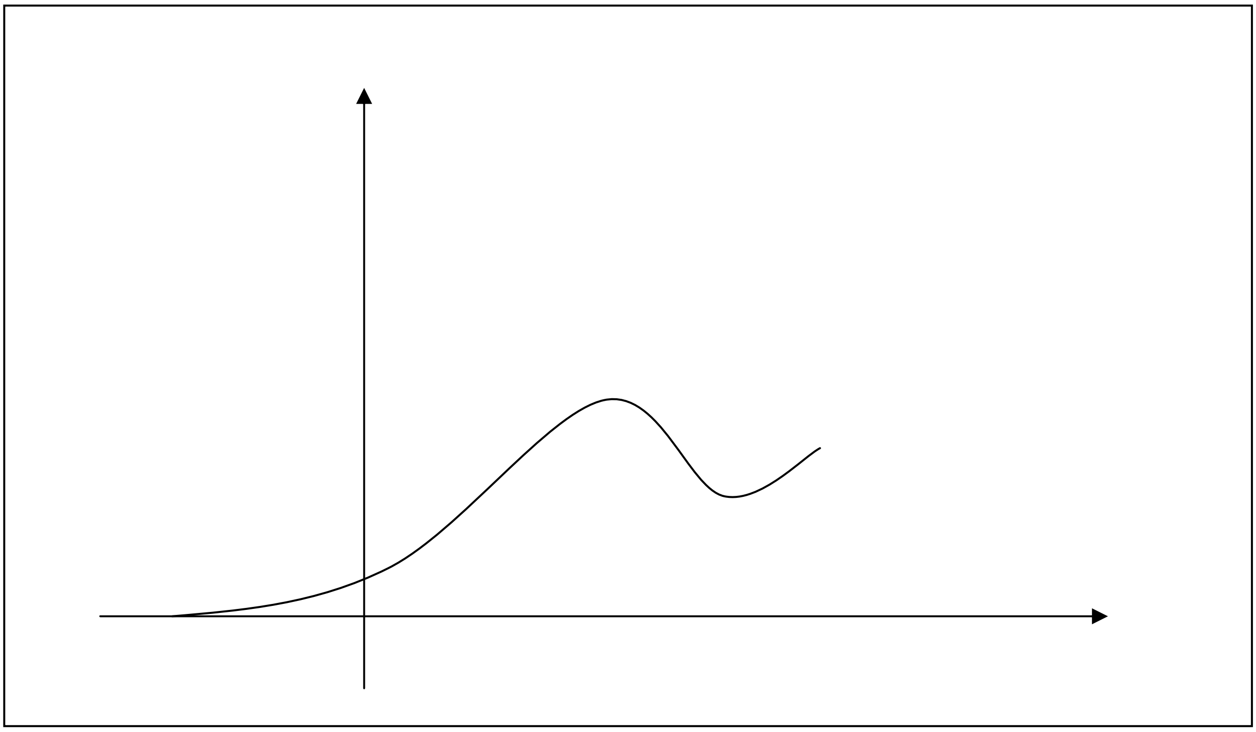
$$f(1)=\int_{-2}^{1}\sqrt{4-t^2}dt=4\int_{-1}^{1/2}\sqrt{1-z^2}dz=(\text{int}\,egrale\cdot per\cdot parti)=4\left[\frac{z\sqrt{1-z^2}+\arcsin z}{2}\right]_{-1}^{1/2}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4\pi}{3}$$

Per calcolare f(1) si potrebbe anche sommare l'area del settore circolare di angolo al centro $\frac{2\pi}{3}$ con l'area del triangolo rettangolo di base =1 e altezza $=\sqrt{3}$; pertanto $f(1)=\frac{2\pi}{3}\bullet 2+\frac{1}{2}\bullet\sqrt{3}=\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; valore identico a quello calcolato sopra.

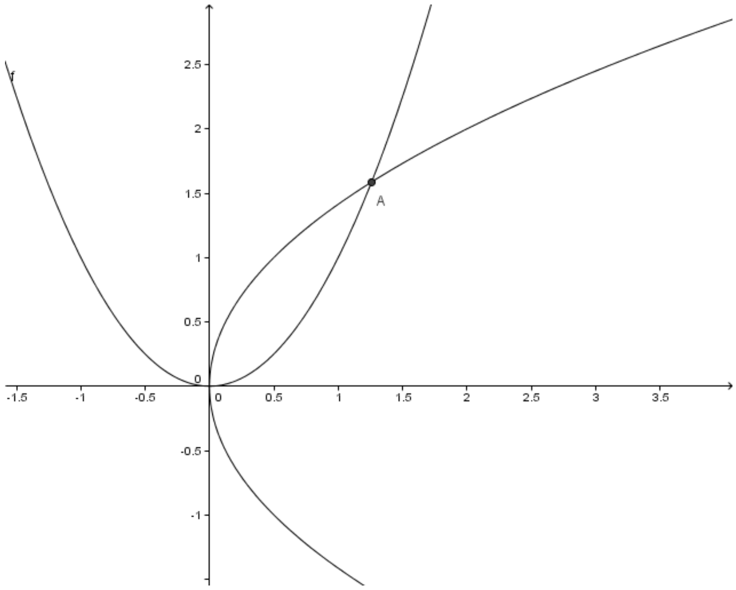
d) Essendo $f(x)=\int_{-2}^{x} g(t)dt$ una funzione integrale di una funzione g(x) continua per $x \leq 5$ allora

f'(x)=g(x) e f''(x)=g'(x) quindi i punti per i quali la f(x) ha derivata seconda nulla sono quelli ove g'(x)=0; quindi x=0; x=3; x=9/2.
Il significato geometrico di integrale definito è la somma delle aree comprese tra la curva e l'asse delle x prese con segno positivo se g(x) è maggiore di 0 e con il segno negativo se g(x) è minore di 0.
f(x) è la funzione integrale di g(x) ed è non negativa perché f(-2)= 0 e le aree nel semipiano positivo superano sempre quelle nel semipiano negativo.

L'andamento qualitativo di f(x) prevede uno zero a tangente orizzontale per x=-2, un primo flesso per x=0, un massimo per x=2; un secondo flesso per x=3 , un minimo per x=4, un terzo flesso per x=9/2 e un altro punto a tangente orizzontale per x=5.



PROBLEMA 2



PUNTO a)

Prima parabola $y^2=x$ $F_1(0,1/8)$ direttrice $x=-1/8$

Seconda parabola $x^2=y$ $F_2(0,1/4)$ direttrice $y=-1/4$

Punto di intersezione oltre l'origine A $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$.

PUNTO b)

Il numero $\sqrt[3]{2}$ è storicamente associato al problema di trovare il lato di un cubo di volume doppio rispetto a quello di volume unitario "problema della duplicazione del cubo".

Il valore di $\sqrt[3]{2}$ approssimato a meno di 10^{-2} è 1,25 e lo si può trovare calcolando lo zero approssimato dell'equazione $x^3-2=0$ nell'intervallo [1,2] con uno qualsiasi dei metodi iterativi studiati.

PUNTO c)

Una retta parallela all'asse x che interseca la parte di piano D delimitata dagli archi di parabola di estremi O e A avrà equazione y=k con $0 \le k \le \sqrt[3]{2}$.

I punti di intersezione con le parabole sono rispettivamente $R\left(\dfrac{k^2}{2},k\right)$ ed $S\left(\sqrt{k},k\right)$ la lunghezza del segmento RS= $\sqrt{k}-\dfrac{k^2}{2}$ che assume il valore massimo $\dfrac{3\sqrt[3]{4}}{8}$ per $k=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

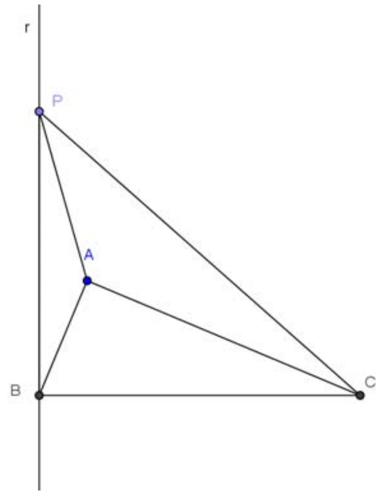
PUNTO d)

Se si taglia il solido W, ottenuto dalla rotazione di D attorno all'asse x, con piani ortogonali all'asse x si ottengono delle corone circolari che hanno come raggi le ordinate dei punti sulle due parabole.

Il volume del solido W è dato da $\pi\int_0^{\sqrt[3]{2}} 2x\,dx-\pi\int_0^{\sqrt[3]{2}} x^4\,dx=\pi\dfrac{3\sqrt[3]{4}}{5}$.

QUESITO 1
Dimostro per induzione. Considero n=1: $p_1(x)=a_1 x + a_0$ e la sua derivata è
$p^{(1)}_1(x)=1!a_1$
Considero vera la relazione per n-1 e dimostro che vale per n :
preso il polinomio $p_n(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$ la sua derivata prima è
$p^{(1)}_n = n\, a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + a_1$
questo polinomio è di grado n-1 e la sua derivata (n-1)-esima, per l'ipotesi induttiva, è uguale (n-1)! per il suo primo coefficiente. Essa corrisponde alla derivata n-esima del polinomio p_n.
Quindi $p^{(n)}_n = (n-1)!\, n\, a_n = n!\, a_n$

QUESITO 2



I triangoli PBC e PBA sono rettangoli perchè PB appartiene a r che è perpendicolare al piano del triangolo e perciò a tutte le rette del piano passanti per B.
Il triangolo PAC è retto in A perché PB è perpendicolare a BA , come detto prima, inoltre BA è perpendicolare ad AC per ipotesi, di conseguenza per il teorema delle tre perpendicolari AC è perpendicolare al piano individuato da AB e PB e perciò è perpendicolare a PA.

QUESITO 3
La derivata prima di $y= e^x$ è $y'= e^x$ e poiché la retta tangente è y=ax uguagliando $e^x=a$ si trova il punto (1,e) in cui la retta è tangente alla curva.
L'angolo cercato di 69° 48'è quello in cui $\tan \alpha = e$.

QUESITO 4
La funzione f(x) = $\sqrt[3]{x} + x^2 - 1$ è definita su tutto l'asse reale; il $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e il $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; la sua derivata $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 3x^2$ non esiste in x=0 ma per ogni x è sempre

positiva quindi la funzione è sempre crescente in senso stretto di conseguenza la funzione può avere un solo zero.
Il valore approssimato a meno di 10^{-2} è 0,56 e si può trovare con uno qualsiasi dei metodi iterativi studiati.

QUESITO 5
Le equazioni della simmetria rispetto a x=k sono $\begin{cases} x' = 2k - x \\ y' = y \end{cases}$ e quindi $\begin{cases} x = 2k - x' \\ y = y' \end{cases}$. La funzione y=f(x) è simmetrica se y'=f(2k-x') è uguale a y=f(x).

QUESITO 6
$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$ si ricava $\begin{cases} \sin t = \dfrac{y}{2} \\ \cos t = \dfrac{x}{3} \end{cases}$ essendo $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ cioè $\dfrac{y^2}{4} + \dfrac{x^2}{9} = 1$, che è l'equazione di una ellisse.

QUESITO 7
La probabilità è 50%. Se la signora Anna ha due figli di cui una è sicuramente femmina, la probabilità che anche il secondo figlio sia femmina è ½ poiché tutte le informazioni iniziali del quesito non condizionano la probabilità richiesta.
Se, invece, si intende che la richiesta sia di calcolare la probabilità che la sig.ra Anna abbia 2 femmine il valore richiesto è 1/3 perché, sapendo che ha una femmina, avere due femmine è una possibilità su tre (F-F ; M-F; F-M).

QUESITO 8
In una progressione aritmetica la differenza tra ogni termine e il precedente è costante, quindi deve essere che $\binom{n}{n-2}$-$\binom{n}{n-1}$=$\binom{n}{n-3}$-$\binom{n}{n-2}$,cioè

$$\frac{n!}{(n-2))!2!} - \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n!}{(n-3)!3!} - \frac{n!}{(n-2)!2!}$$ .Semplificando per n! otteniamo

$$\frac{1}{(n-2))!2!} - \frac{1}{(n-1)!1!} = \frac{1}{(n-3)!3!} - \frac{1}{(n-2)!2!}$$ cioè

$$\frac{1}{(n-2)(n-3)!2} - \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)!} = \frac{1}{(n-3)!6} - \frac{1}{(n-2)n-3)!2}$$ semplificando per (n-3)!si ottiene l'espressione $\dfrac{1}{(n-2)2} - \dfrac{1}{(n-1)(n-2)} = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{(n-2)2}$ da cui si deduce n^2 -9n+14=0.
Le soluzioni dell'equazione sono 2 (non accettabile) e 7 accettabile.

QUESITO 9

Applicando il teorema dei seni al triangolo ABC si trova che sin(BAC)=$\frac{3\sqrt{2}}{4}$ che è un numero >1e quindi non esiste l'angolo. Nel secondo caso sin(BAC)=$\frac{3}{4}$ che è minore di 1. Ci sono due angoli per cui sin(BAC)=$\frac{3}{4}$ uno acuto e uno ottuso, minore di 150°.

QUESITO 10

La risposta a non è corretta infatti $\pi\int_0^4 f^2(x)\ dx = \pi\int_0^4 xdx$

La risposta b è corretta infatti l'area è $32\pi - \pi\int_0^2 f(y)^2 dy = 32\pi - \pi\int_0^2 y^4 dy$,eseguendo la sostituzione di variabile $y^2 = x$ si ottiene $32\pi - \frac{1}{2}\pi\int_0^4 x\sqrt{x}dx$ che numericamente è uguale all'integrale dato

La risposta c non è corretta infatti $\int_0^4 \frac{1}{2}\pi x dx$ è l'integrale dell'area dei semicerchi di raggio $\sqrt{x}$