Focus Gold

今週の積分

啓林館

目次

1 三角関数は 2 乗に強い 1

2 $\sqrt{\ }$ → 基本的には外す 2

3 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 型： $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ と置換 → t だけの式 3

4 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + \mathbb{C}$ 4

5 $f(\cos x) \cdot \sin x \to \cos x = t$ と置換 5

6 $\sqrt{1+x^2}$を含む形 → $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ と置換 6

7 $\sqrt{\ }$ → 基本的には外す 7

8 $e^x, \sin x(\cos x), x^\alpha, \log x$ の積 → 部分積分 8

9 $\log x$ → 部分積分 9

10 (分子の次数)≧(分母の次数)→ 整式の剰余で字数下げ 10

11 $\log x$ → 部分積分× → $t = \log x$ と置換 → 指数関数型へ 11

例題 1 今週の積分 ＊＊

$$\int \tan^3 x\, dx$$

考え方▶ 三角関数の 3 乗の積分は困難であるため，式変形により次数を下げる．

解 以下に計算手順を示す．

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x\, dx &= \int \tan x \cdot \tan x^2 x\, dx \\
&= \int \tan x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\
&= \int \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx \\
&= \int \tan x \cdot (\tan x)'\, dx + \int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\, dx \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2} \tan^2 x + \log|\cos x| + C \quad (C：\text{積分定数})}
\end{aligned}$$

Focus

三角関数は 2 乗に強い

例題 2 今週の積分 **

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos x}\, dx$$

考え方 ▶ $\sqrt{\ }$ があると直接積分できないため，まず $\sqrt{\ }$ を外すことを考える．

解 以下に計算手順を示す．

$$\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}} = \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \begin{cases} \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} & (0 \leqq x \leqq \pi) \\ -\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} & (\pi \leqq x \leqq 2\pi) \end{cases}$$

よって、

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos x}\, dx &= \int_0^{\pi} \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left(-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\right) dx \\
&= \sqrt{2}\left\{\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \cos\frac{x}{2}\, dx\right\} \\
&= \sqrt{2}\left\{\left[2\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\pi} - \left[2\sin\frac{x}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}\right\} \\
&= \sqrt{2}\{(2-0)-(0-2)\} \\
&= \mathbf{4\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

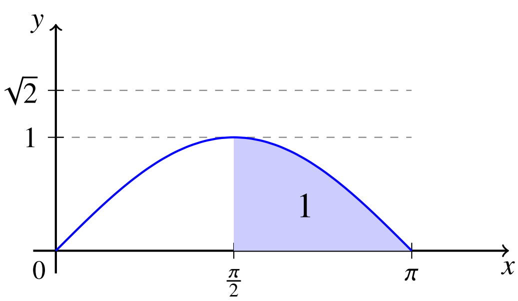

図 2-1 $y = \sin x \ (0 \leq x \leq \pi)$

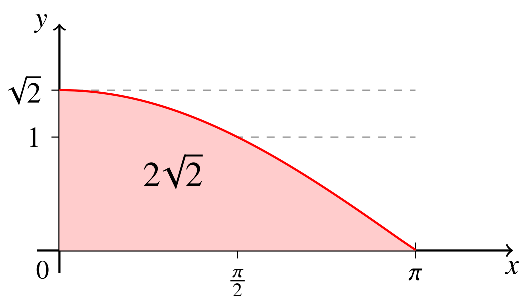

図 2-2 $y = \sqrt{1+\cos x} \ (0 \leq x \leq 2\pi)$

Focus

$\sqrt{\ }$ → 基本的には外す

例題 3 今週の積分 ＊＊＊＊

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$$

考え方 ▶ この問題も $\sqrt{\ }$ が厄介．→ 被積分関数全体を t と置換する．

解 以下に計算手順を示す．

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline t & 1 & \to & 0 \end{array} \qquad dx = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int_1^0 t\left\{-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\,dt\right\} = 4\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$t = \tan\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{4} \end{array} \qquad dt = \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta\cos^4\theta\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2\theta)\ d\theta = 2\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}-1}$$

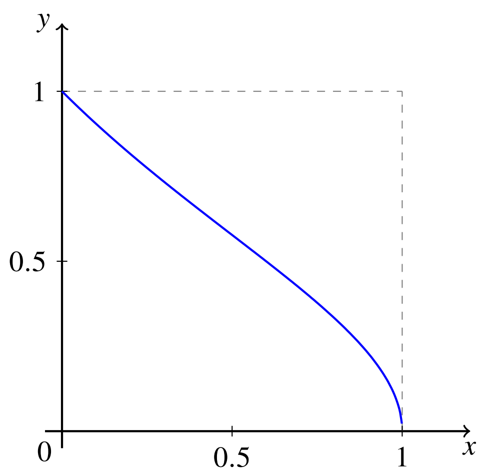

図 3-1 $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ のグラフ $(0 \leq x \leq 1)$

Focus

$\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ 型： $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ と置換 → t だけの式

例 題　4　今週の積分　＊

$$\int_1^2 \frac{1}{2^x}\,dx$$

考え方 ▶ $(a^x)' = a^x \log a$ をもとに考える．（積分はこの逆操作である．）

解　以下に計算手順を示す．

$$(2^{-x})' = -2^{-x}\log 2$$

より、

$$\left(-\frac{2^{-x}}{\log 2}\right)' = 2^{-x}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int_1^2 \frac{1}{2^x}\,dx &= \int_1^2 2^{-x}\,dx \\
&= \left[-\frac{2^{-x}}{\log 2}\right]_1^2 \\
&= -\frac{1}{\log 2}\left(2^{-2} - 2^{-1}\right) \\
&= \mathbf{\frac{1}{4\log 2}}
\end{aligned}$$

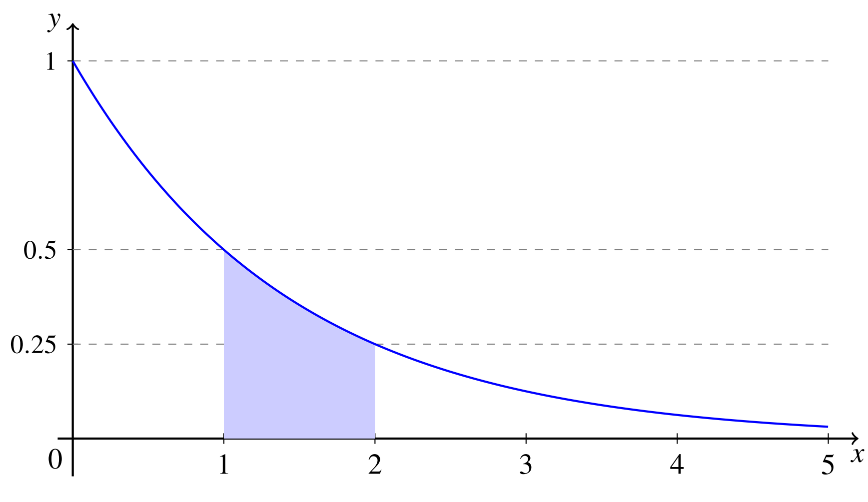

図 4-1　$y = \frac{1}{2^x}$ のグラフと $1 \leq x \leq 2$ の領域

Focus

$$\boldsymbol{\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0,\quad a \neq 1,\quad C : \text{積分定数})}$$

例題 5 今週の積分 ＊＊＊

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx$$

考え方 ▶ $t = \sin x$ で置換を考えると，被積分関数に $\cos x$ がないため，置換できない．

→ $\cos x$ が登場するように被積分関数を変形後，置換積分する．

解

以下に計算手順を示す．

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\, dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\, dx \\ &= \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\, dx\end{aligned}$$

$$t = \cos x \qquad dt = -\sin x\, dx$$

$$\begin{aligned}&= \int \frac{1}{t^2-1}\, dt \\ &= \int \frac{1}{(t-1)(t+1)}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C} \quad \textbf{(}C\textbf{：積分定数）}\end{aligned}$$

Focus

$$f(\cos x)\cdot\sin x \longrightarrow \cos x = t \text{ と置換}$$

例題 6 今週の積分 ＊＊＊＊

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

考え方 ▶ $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ で置換積分する．

解 以下に計算手順を示す．

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \qquad t = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad dx = \frac{e^t + e^{-t}}{2}\,dt$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(e^t-e^{-t})^2}{4}}}\,\frac{e^t+e^{-t}}{2}\,dt \\
&= \int \frac{1}{\frac{e^t+e^{-t}}{2}}\,\frac{e^t+e^{-t}}{2}\,dt \\
&= \int dt \\
&= t + C \\
&= \boldsymbol{\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C} \quad (\boldsymbol{C}\textbf{：積分定数})
\end{aligned}$$

Focus

$\sqrt{1+x^2}$ を含む形 $\to x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ と置換

例 題	7	今週の積分	＊＊

$$\int x\sqrt{3x-5}\,dx$$

考え方 ▶ $\sqrt{\ }$ の中が 1 次式である場合，$\sqrt{\ }$ を丸ごと置換するとうまくいく場合が多い.

解

$t=\sqrt{3x-5}$ とおき、置換積分する.

$$t=\sqrt{3x-5}\qquad x=\frac{t^2+5}{3}\qquad dx=\frac{2t}{3}\,dt$$

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{3x-5}\,dx &= \int \frac{t^2+5}{3}\cdot t\cdot\frac{2t}{3}\,dt\\
&= \frac{2}{9}\int\left(t^4+5t^2\right)\,dt\\
&= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{5}t^5+\frac{5}{3}t^3\right)+C\\
&= \frac{2}{45}t^3\left(t^2+\frac{25}{3}\right)+C\\
&= \boldsymbol{\frac{2}{45}(3x-5)\sqrt{3x-5}\left(3x\frac{10}{3}\right)+C}\quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\textbf{：積分定数)}
\end{aligned}$$

Focus

$\sqrt{\ }$ → 基本的には外す

例 題	8	今週の積分	✻✻

$$\int_1^e \sqrt{x}\log x\,dx$$

考え方 ▶ 異なる種類の関数の積で表される式を積分する場合，まず部分積分を試す．

解 以下に計算手順を示す．

$$\begin{aligned}\int_1^e \sqrt{x}\log x\,dx &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-1}\,dx\\ &= \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int_1^e x^{\frac{1}{2}}\,dx\\ &= \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^e\\ &= \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9}\left(e^{\frac{3}{2}}-1\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{2}{9}e\sqrt{e}+\frac{4}{9}}\end{aligned}$$

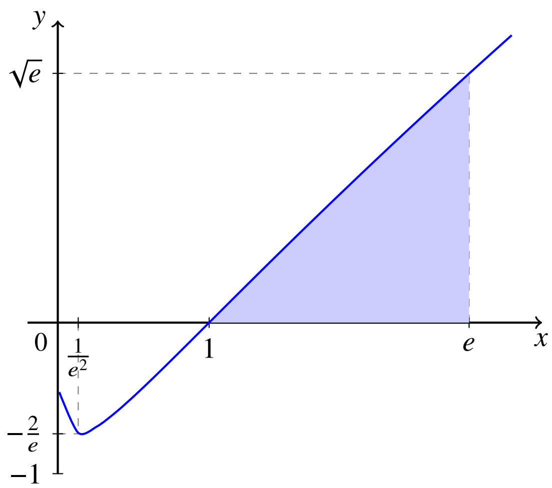

図 8-1　$y=\sqrt{x}\log x$ のグラフと $1\leq x\leq e$ の領域

Focus

$e^x, \sin x(\cos x), x^\alpha, \log x$ **の積 → 部分積分**

例題 **9** 今週の積分 ＊＊

$$\int (\log x)^2\,dx$$

考え方 ▶ $\int 1\cdot(\log x)^2\,dx$ と考え，部分積分する．

解 以下に計算手順を示す．

$$\begin{aligned}
\int (\log x)^2\,dx &= \int 1\cdot(\log x)^2\,dx \\
&= x(\log x)^2 - \int x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= x(\log x)^2 - 2\int 1\cdot\log x\,dx \\
&= x(\log x)^2 - 2\left(x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) \\
&= \boldsymbol{x(\log x)^2 - 2(x\log x - x) + C} \quad (\boldsymbol{C}\text{ : 積分定数 })
\end{aligned}$$

Focus

$\log x \to$ **部分積分**

例 題　10　今週の積分　＊＊＊

$$\int_0^2 \frac{3x^3+12x+1}{x^2+4}\,dx$$

考え方 ▶ 分数関数では，分子の次数を分母の次数より小さくするのが鉄則.

解 以下に計算手順を示す.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{3x^3+12x+1}{x^2+4}\,dx &= \int_0^2 \frac{3x(x^2+4)+1}{x^2+4}\,dx \\
&= 3\int_0^2 x\,dx + \int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx
\end{aligned}$$

$$x = 2\tan\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 2 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{4} \end{array} \qquad dx = \frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= 6 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\
&= \mathbf{6+\frac{\pi}{8}}
\end{aligned}$$

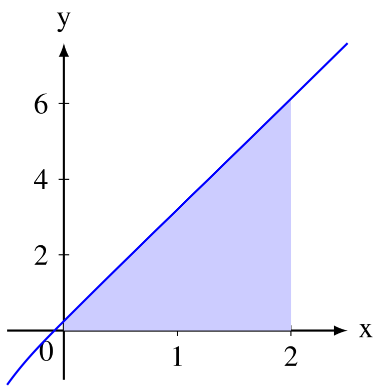

図 10-1　$y = \frac{3x^3+12x+1}{x^2+4}$ のグラフと $0 \leq x \leq 2$ の領域

Focus

(分子の次数)≧(分母の次数)→ 整式の剰余で字数下げ

例 題 **11** 今週の積分 ＊＊

$$\int \frac{1}{x(1+\log x)}\,dx$$

考え方 ▶ $\log x$ とその微分 $\frac{1}{x}$ が式の中に含まれていることに注目し，置換積分する．

解 以下に計算手順を示す．

$$t = \log x \qquad dt = \frac{1}{x}\,dx \qquad dx = e^t\,dt$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(1+\log x)}\,dx &= \int \frac{1}{1+t}\,dt \\ &= \log|1+t| + C \\ &= \boldsymbol{\log|1+\log x| + C} \quad (C : \text{積分定数})\end{aligned}$$

Focus

$\log x \to$ **部分積分×** $\to t = \log x$ **と置換** $\to$ **指数関数型へ**