
Focus Gold

今週の積分

目次

1	三角関数は2乗に強い	1
2	$\sqrt{\quad}$ → 基本的には外す	2
3	$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 型: $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ と置換 → t だけの式	3
4	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + \mathbb{C}$	4
5	$f(\cos x) \cdot \sin x \rightarrow \cos x = t$ と置換	5
6	$\sqrt{1+x^2}$ を含む形 → $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ と置換	6
7	$\sqrt{\quad}$ → 基本的には外す	7
8	$e^x, \sin x(\cos x), x^\alpha, \log x$ の積 → 部分積分	8
9	$\log x \rightarrow$ 部分積分	9
10	(分子の次数) \geq (分母の次数) → 整式の剰余で字数下げ	10

例題

1

今週の積分

**

$$\int \tan^3 x dx$$

考え方 ▶

三角関数の3乗の積分は困難であるため、式変形により次数を下げる。

解

以下に計算手順を示す。

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x dx &= \int \tan x \cdot \tan^2 x dx \\ &= \int \tan x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= \int \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \int \tan x \cdot (\tan x)' dx + \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx \\ &= \frac{1}{2} \tan^2 x + \log |\cos x| + \mathbb{C}\end{aligned}$$

Focus

三角関数は2乗に強い

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos x} dx$$

考え方 ▶

$\sqrt{\quad}$ があると直接積分できないため、まず $\sqrt{\quad}$ を外すことを考える。

解

以下に計算手順を示す。

$$\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{2} \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \begin{cases} \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} & (0 \leq x \leq \pi) \\ -\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} & (\pi \leq x \leq 2\pi) \end{cases}$$

よって、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos x} dx &= \int_0^{\pi} \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}) dx \\ &= \sqrt{2} \left\{ \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx - \int_{\pi}^{2\pi} \cos \frac{x}{2} dx \right\} \\ &= \sqrt{2} \left\{ \left[2 \sin \frac{x}{2} \right]_0^{\pi} - \left[2 \sin \frac{x}{2} \right]_{\pi}^{2\pi} \right\} \\ &= \sqrt{2} \{ (2 - 0) - (0 - 2) \} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

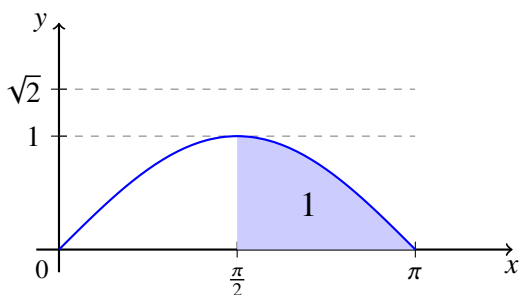


図 2-1 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$)

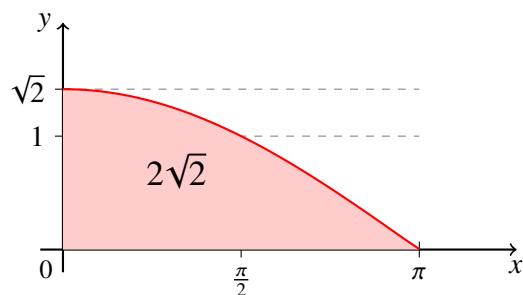


図 2-2 $y = \sqrt{1 + \cos x}$ ($0 \leq x \leq 2\pi$)

Focus

$\sqrt{\quad} \rightarrow$ 基本的には外す

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

考え方 ▶

この問題も $\sqrt{\quad}$ が厄介. \rightarrow 被積分関数全体を t と置換する.

解

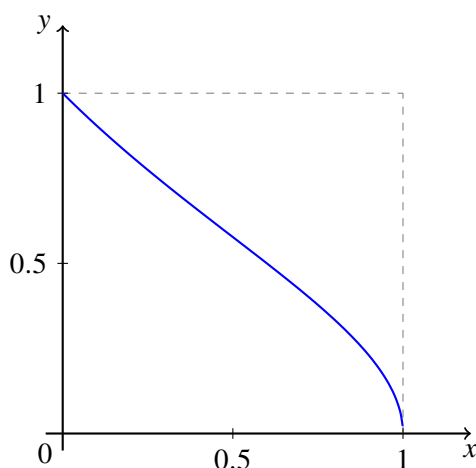
以下に計算手順を示す.

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 1 \\ \hline t & 1 \rightarrow 0 \end{array} \quad dx = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int_1^0 t \left\{ -\frac{4t}{(1+t^2)^2} dt \right\} = 4 \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$$

$$t = \tan \theta \quad \begin{array}{c|c} t & 0 \rightarrow 1 \\ \hline \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array} \quad dt = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$\begin{aligned} &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \theta \cos^4 \theta \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2\theta) d\theta = 2 \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

図 3-1 $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ のグラフ ($0 \leq x \leq 1$)

Focus

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \text{ 型: } t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \text{ と置換 } \rightarrow t \text{ だけの式}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{2^x} dx$$

考え方 ▶

$(a^x)' = a^x \log a$ をもとに考える。(積分はこの逆操作である.)

解

以下に計算手順を示す.

$$(2^{-x})' = -2^{-x} \log 2$$

より、

$$\left(-\frac{2^{-x}}{\log 2}\right)' = 2^{-x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^2 \frac{1}{2^x} dx &= \int_1^2 2^{-x} dx \\ &= \left[-\frac{2^{-x}}{\log 2}\right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{\log 2} (2^{-2} - 2^{-1}) \\ &= \frac{1}{4 \log 2} \end{aligned}$$

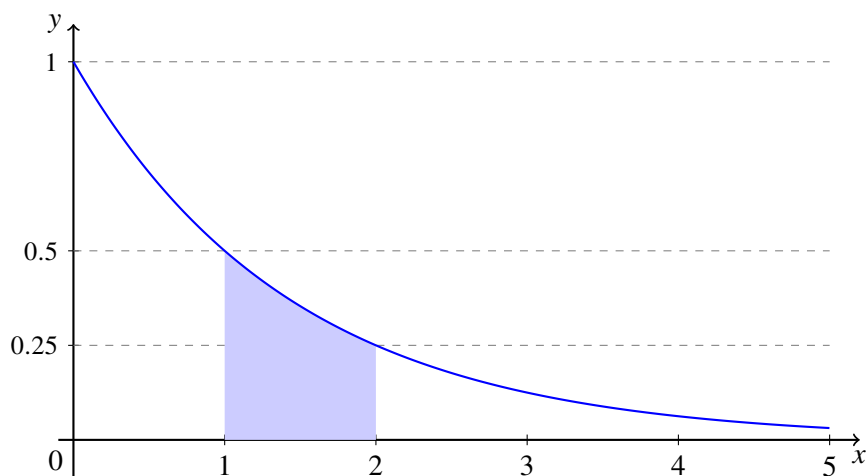


図 4-1 $y = \frac{1}{2^x}$ のグラフと $1 \leq x \leq 2$ の領域

Focus

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + \mathbb{C} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

考え方 ▶ $t = \sin x$ で置換を考えると、被積分関数に $\cos x$ がないため、置換できない。

→ $\cos x$ が登場するように被積分関数を変形後、置換積分する。

解

以下に計算手順を示す。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx \end{aligned}$$

$$t = \cos x \quad dt = -\sin x dx$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{t^2 - 1} dt \\ &= \int \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \mathbb{C} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + \mathbb{C} \end{aligned}$$

Focus

$$f(\cos x) \cdot \sin x \rightarrow \cos x = t \text{ と置換}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

考え方 ▶

 $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ で置換積分する.

解

以下に計算手順を示す.

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad t = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad dx = \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(e^t - e^{-t})^2}{4}}} \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt \\ &= \int \frac{1}{\frac{e^t + e^{-t}}{2}} \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt \\ &= \int dt \\ &= t + \mathbb{C} \\ &= \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \mathbb{C} \end{aligned}$$

Focus

$$\sqrt{1+x^2} \text{を含む形} \rightarrow x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{と置換}$$

$$\int x\sqrt{3x-5}dx$$

考え方 ▶ $\sqrt{\quad}$ の中が 1 次式である場合、 $\sqrt{\quad}$ を丸ごと置換するとうまくいく場合が多い。

解

$t = \sqrt{3x-5}$ とおき、置換積分する。

$$t = \sqrt{3x-5} \quad x = \frac{t^2+5}{3} \quad dx = \frac{2t}{3}dt$$

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{3x-5}dx &= \int \frac{t^2+5}{3} \cdot t \cdot \frac{2t}{3}dt \\ &= \frac{2}{9} \int (t^4 + 5t^2)dt \\ &= \frac{2}{9} \left(\frac{1}{5}t^5 + \frac{5}{3}t^3 \right) + \mathbb{C} \\ &= \frac{2}{45}t^3 \left(t^2 + \frac{25}{3} \right) + \mathbb{C} \\ &= \frac{2}{45} (3x-5) \sqrt{3x-5} \left(3x \frac{10}{3} \right) + \mathbb{C} \end{aligned}$$

Focus

$\sqrt{\quad} \rightarrow$ 基本的には外す

例題

8

今週の積分

**

$$\int_1^e \sqrt{x} \log x dx$$

考え方 ▶ 異なる種類の関数の積で表される式を積分する場合，まず部分積分を試す。

解

以下に計算手順を示す。

$$\begin{aligned} \int_1^e \sqrt{x} \log x dx &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \log x \right]_1^e - \int_1^e \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{-1} dx \\ &= \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \int_1^e x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^e \\ &= \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9} (e^{\frac{3}{2}} - 1) \\ &= \frac{2}{9} e \sqrt{e} + \frac{4}{9} \end{aligned}$$

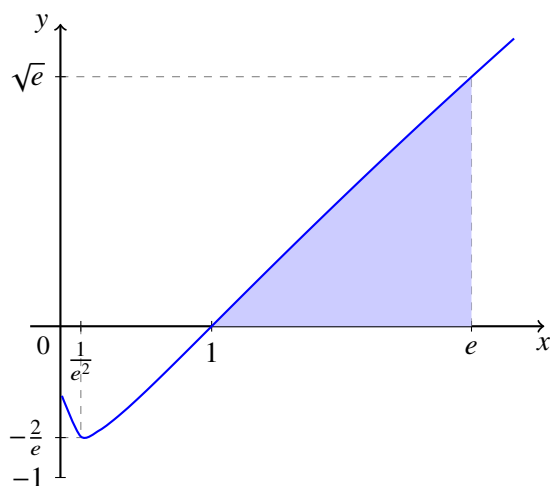


図 8-1 $y = \sqrt{x} \log x$ のグラフと $1 \leq x \leq e$ の領域

Focus

$e^x, \sin x(\cos x), x^\alpha, \log x$ の積 → 部分積分

$$\int (\log x)^2 dx$$

考え方 ▶

 $\int 1 \cdot (\log x)^2 dx$ と考え、部分積分する.

解

以下に計算手順を示す.

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2 dx &= \int 1 \cdot (\log x)^2 dx \\ &= x(\log x)^2 - \int x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x(\log x)^2 - 2 \int 1 \cdot \log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2 \left(x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\ &= x(\log x)^2 - 2(x \log x - x) + C\end{aligned}$$

Focus

 $\log x \rightarrow$ 部分積分

例題

10

今週の積分

$$\int_0^2 \frac{3x^3 + 12x + 1}{x^2 + 4} dx$$

考え方 ▶

分数関数では、分子の次数を分母の次数より小さくするのが鉄則。

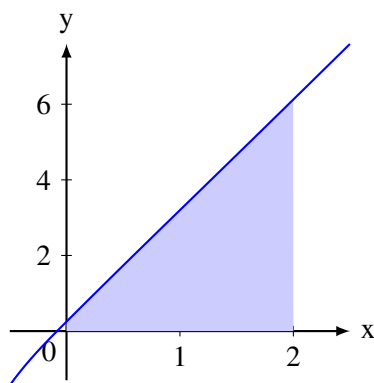
解

以下に計算手順を示す。

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{3x^3 + 12x + 1}{x^2 + 4} dx &= \int_0^2 \frac{3x(x^2 + 4) + 1}{x^2 + 4} dx \\ &= 3 \int_0^2 x dx + \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx \end{aligned}$$

$$x = 2 \tan \theta \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 2 \\ \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array} \quad dx = \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$\begin{aligned} &= 3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4(\tan^2 \theta + 1)} \cdot \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= 6 + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= 6 + \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

図 10-1 $y = \frac{3x^3 + 12x + 1}{x^2 + 4}$ のグラフと $0 \leq x \leq 2$ の領域

Focus

(分子の次数) \geq (分母の次数) \rightarrow 整式の剰余で次数下げ