Focus Gold

今週の積分

啓林館

目次

例題 1 今週の積分 **

$$\int \tan^3 x dx$$

考え方 ▶ 三角関数の 3 乗の積分は困難であるため，式変形により次数を下げる．

解 以下に計算手順を示す．

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x dx &= \int \tan x \cdot \tan x^2 x dx \\
&= \int \tan x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\
&= \int \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\
&= \int \tan x \cdot (\tan x)' \, dx + \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx \\
&= \mathbf{\frac{1}{2} \tan^2 x + \log |\cos x|} + \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Focus

三角関数は 2 乗に強い

例題 2 今週の積分 ＊＊

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos x}\,dx$$

考え方 ▶ $\sqrt{\ }$ があると直接積分できないため，まず $\sqrt{\ }$ を外すことを考える.

解 以下に計算手順を示す.

$$\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}} = \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \begin{cases} \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} & (0 \leqq x \leqq \pi) \\ -\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} & (\pi \leqq x \leqq 2\pi) \end{cases}$$

よって、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos x}\,dx &= \int_0^{\pi} \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left(-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx \\ &= \sqrt{2}\left\{\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}dx - \int_{\pi}^{2\pi} \cos\frac{x}{2}dx\right\} \\ &= \sqrt{2}\left\{\left[2\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\pi} - \left[2\sin\frac{x}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}\right\} \\ &= \sqrt{2}\{(2-0)-(0-2)\} \\ &= \mathbf{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

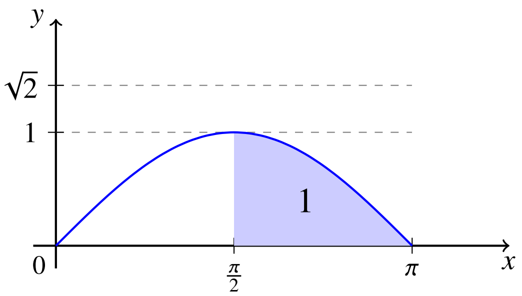

図 2-1　$y = \sin x\ (0 \le x \le \pi)$

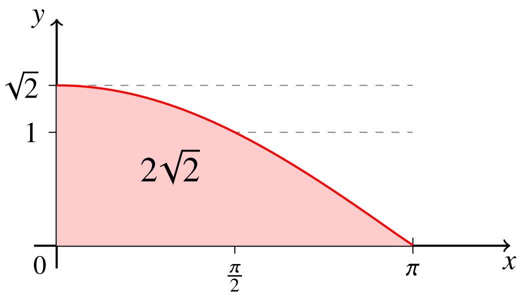

図 2-2　$y = \sqrt{1+\cos x}\ (0 \le x \le 2\pi)$

Focus

$\sqrt{\ }$ → 基本的には外す

例題 3　今週の積分　＊＊＊＊

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$$

考え方 ▶　この問題も $\sqrt{\ }$ が厄介．→ 被積分関数全体を t と置換する．

解　以下に計算手順を示す．

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline t & 1 & \to & 0 \end{array} \qquad dx = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int_1^0 t\left\{-\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt\right\} = 4\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$$

$$t = \tan\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{4} \end{array} \qquad dt = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta\cos^4\theta \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2\theta)\,d\theta = 2\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - 1}$$

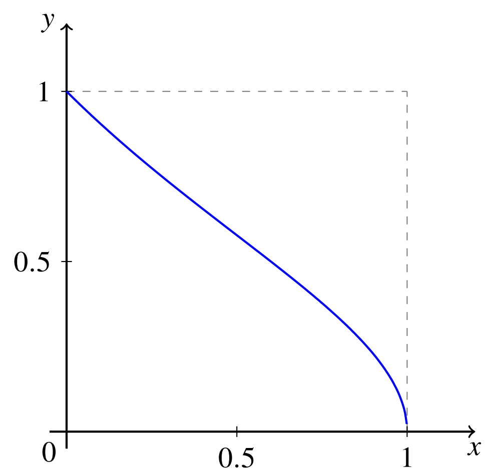

図 3-1　$y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ のグラフ $(0 \leq x \leq 1)$

Focus

$\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ 型：　$t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ と置換 → t だけの式

例 題	4	今週の積分	*

$$\int_1^2 \frac{1}{2^x} dx$$

考え方 ▶ $(a^x)' = a^x \log a$ をもとに考える.（積分はこの逆操作である.）

解 以下に計算手順を示す.

$$(2^{-x})' = -2^{-x} \log 2$$

より、

$$\left(-\frac{2^{-x}}{\log 2}\right)' = 2^{-x}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int_1^2 \frac{1}{2^x} dx &= \int_1^2 2^{-x} dx \\
&= \left[-\frac{2^{-x}}{\log 2}\right]_1^2 \\
&= -\frac{1}{\log 2}\left(2^{-2} - 2^{-1}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{4 \log 2}}
\end{aligned}$$

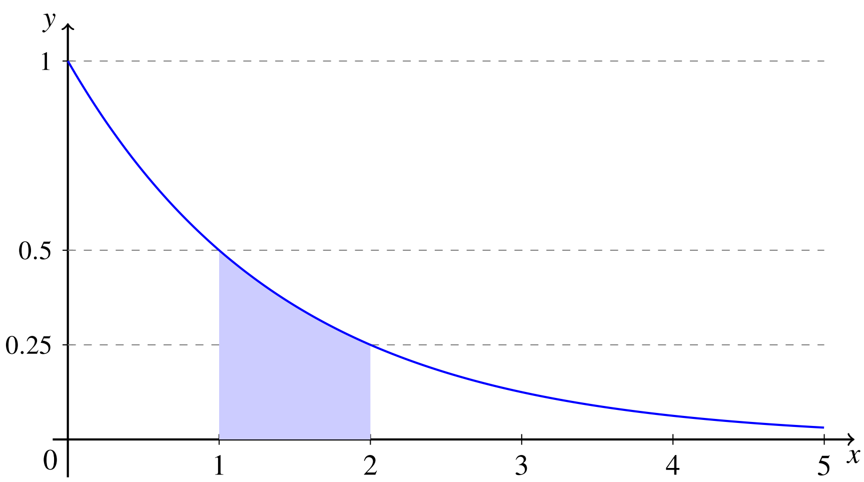

図 4-1　$y = \frac{1}{2^x}$ のグラフと $1 \leq x \leq 2$ の領域

Focus

$$\boldsymbol{\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + \mathbb{C} \qquad (a > 0, a \neq 1)}$$

例題 5 今週の積分 ＊＊＊

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

考え方 ▶ $t = \sin x$ で置換を考えると，被積分関数に $\cos x$ がないため，置換できない．

→ $\cos x$ が登場するように被積分関数を変形後，置換積分する．

解

以下に計算手順を示す．

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx\end{aligned}$$

$$t = \cos x \qquad dt = -\sin x dx$$

$$\begin{aligned}&= \int \frac{1}{t^2 - 1} dt \\ &= \int \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \mathbb{C} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + \mathbb{C}}\end{aligned}$$

Focus

$f(\cos x) \cdot \sin x \to \cos x = t$ と置換

例題 6 今週の積分 ＊＊＊＊

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

考え方 ▶ $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ で置換積分する.

解 以下に計算手順を示す.

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \qquad t = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad dx = \frac{e^t + e^{-t}}{2}dt$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(e^t-e^{-t})^2}{4}}}\frac{e^t+e^{-t}}{2}dt \\
&= \int \frac{1}{\frac{e^t+e^{-t}}{2}}\frac{e^t+e^{-t}}{2}dt \\
&= \int dt \\
&= t + \mathbb{C} \\
&= \mathbf{log}\left(\boldsymbol{x} + \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{1}}\right) + \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Focus

$\sqrt{1+x^2}$ を含む形 $\to x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ と置換

例 題 **7** 今週の積分 ＊＊

$$\int x\sqrt{3x-5}\,dx$$

考え方 ▶ $\sqrt{\ }$ の中が 1 次式である場合，$\sqrt{\ }$ を丸ごと置換するとうまくいく場合が多い．

解

$t=\sqrt{3x-5}$ とおき、置換積分する．

$$t=\sqrt{3x-5} \qquad x=\frac{t^2+5}{3} \qquad dx=\frac{2t}{3}dt$$

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{3x-5}\,dx &= \int \frac{t^2+5}{3}\cdot t\cdot\frac{2t}{3}dt \\
&= \frac{2}{9}\int\left(t^4+5t^2\right)dt \\
&= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{5}t^5+\frac{5}{3}t^3\right)+\mathbb{C} \\
&= \frac{2}{45}t^3\left(t^2+\frac{25}{3}\right)+\mathbb{C} \\
&= \boldsymbol{\frac{2}{45}(3x-5)\sqrt{3x-5}\left(3x\frac{10}{3}\right)}+\mathbb{C}
\end{aligned}$$

Focus

$\sqrt{\ }$ → 基本的には外す

例 題　8　今週の積分　**

$$\int_1^e \sqrt{x}\log x\,dx$$

考え方 ▶ 異なる種類の関数の積で表される式を積分する場合，まず部分積分を試す.

解　以下に計算手順を示す.

$$\begin{aligned}\int_1^e \sqrt{x}\log x\,dx &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-1}dx \\ &= \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int_1^e x^{\frac{1}{2}}dx \\ &= \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^e \\ &= \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9}\left(e^{\frac{3}{2}} - 1\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{9}e\sqrt{e} + \frac{4}{9}}\end{aligned}$$

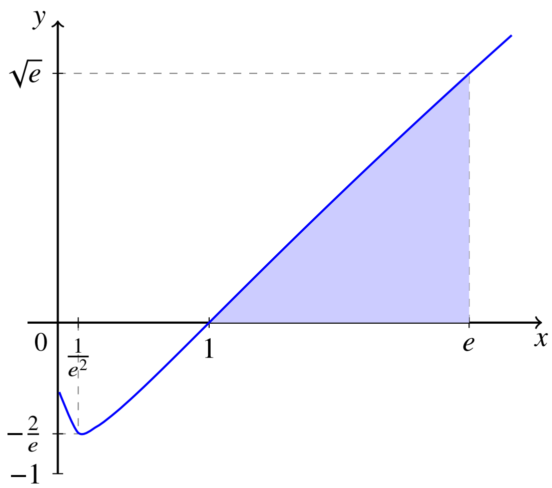

図 8-1　$y = \sqrt{x}\log x$ のグラフと $1 \leq x \leq e$ の領域

Focus

$e^x, \sin x(\cos x), x^\alpha, \log x$ **の積 → 部分積分**

例題 9 今週の積分 ＊＊

$$\int (\log x)^2 dx$$

考え方 ▶ $\int 1 \cdot (\log x)^2 dx$ と考え，部分積分する.

解 以下に計算手順を示す.

$$\begin{aligned}
\int (\log x)^2 dx &= \int 1 \cdot (\log x)^2 dx \\
&= x(\log x)^2 - \int x \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= x(\log x)^2 - 2\int 1 \cdot \log x dx \\
&= x(\log x)^2 - 2\left(x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx\right) \\
&= x(\log x)^2 - 2(x\log x - x) + C
\end{aligned}$$

Focus

$\log x \rightarrow$ **部分積分**

例 題 10 今週の積分 ＊＊＊

$$\int_0^2 \frac{3x^3+12x+1}{x^2+4}dx$$

考え方 ▶ 分数関数では，分子の次数を分母の次数より小さくするのが鉄則.

解 以下に計算手順を示す.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{3x^3+12x+1}{x^2+4}dx &= \int_0^2 \frac{3x(x^2+4)+1}{x^2+4}dx \\ &= 3\int_0^2 x\,dx + \int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx\end{aligned}$$

$$x = 2\tan\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 2 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{4}\end{array} \qquad dx = \frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$\begin{aligned}&= 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta \\ &= 6 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= 6 + \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

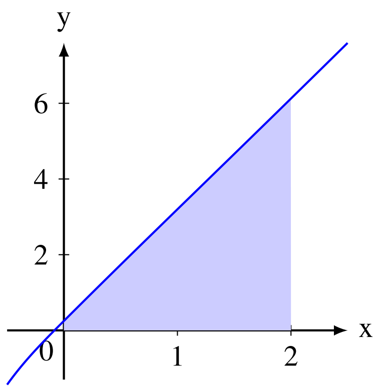

図 10-1 $y = \frac{3x^3+12x+1}{x^2+4}$ のグラフと $0 \le x \le 2$ の領域

Focus

(分子の次数)≧(分母の次数)→ 整式の剰余で字数下げ