Valorisation et couverture de produits dérivés

Spécialité : Finance et Ingénierie Décisionnelle

Valorisation des options européennes / américaines : Modèle Binomial- Trinomial, Modèle de Black, Scholes et Simulation de Monte Carlo

Réalisé par :
TAOUDI EL IDRISSI Hanane

4 avril 2025

Table des matières

Introduction Générale

Dans un environnement financier de plus en plus volatil et incertain, les marchés sont régulièrement confrontés à des crises économiques, des fluctuations des taux d'intérêt, des changements de politiques économiques et des événements imprévisibles. Ces perturbations soulignent l'importance croissante des produits dérivés, en particulier les options, pour la gestion des risques et la couverture des positions financières. Une option est un instrument dérivé qui offre à son détenteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent à un prix convenu, à une date future déterminée ou avant cette échéance.

Afin de fixer un prix juste pour ces options, les analystes et les investisseurs se tournent vers des modèles mathématiques de valorisation. Ces modèles permettent de calculer la valeur d'une option en prenant en compte plusieurs paramètres tels que le prix de l'actif sous-jacent, la volatilité du marché, la durée jusqu'à l'échéance, et le taux d'intérêt sans risque. Parmi ces modèles, le **modèle binomial** et le **modèle de Black-Scholes** sont les plus largement utilisés.

Le **modèle binomial**, développé par Cox, Ross et Rubinstein (CRR), est l'un des premiers modèles de valorisation d'options. Il repose sur une approche discrète du temps, où l'évolution des prix des actifs sous-jacents suit un processus binomial à chaque période : le prix peut soit monter soit descendre. Ce modèle est intuitif et constitue un cadre simple pour comprendre les principes fondamentaux de la valorisation d'options. L'un de ses principaux avantages réside dans sa flexibilité à traiter des options américaines, qui peuvent être exercées à tout moment avant l'échéance.

Cependant, pour mieux représenter la réalité des marchés financiers, ce modèle peut être étendu au **modèle trinomial**. Ce dernier inclut une troisième possibilité dans l'évolution des prix d'un actif : en plus de la hausse et de la baisse, il permet d'envisager une stabilité intermédiaire. Cette approche offre une meilleure précision pour certaines conditions de marché, bien que la complexité de calcul soit accrue par rapport au modèle binomial.

Le **modèle de Black-Scholes**, quant à lui, est un modèle continu qui repose sur la théorie des processus stochastiques et des mouvements browniens. Proposé par Fischer Black et Myron Scholes en 1973, ce modèle a révolutionné la finance moderne en fournissant une formule fermée pour calculer le prix des options européennes, qui ne peuvent être exercées qu'à l'échéance. En temps continu, il modélise l'évolution du prix d'un actif comme un processus de diffusion, prenant en compte des paramètres tels que la volatilité du marché et le taux d'intérêt sans risque. Le modèle de Black-Scholes présente l'avantage d'être analytique, permettant un calcul direct du prix des options. Il a aussi introduit des concepts clés comme les *grecques* (Delta, Gamma, Véga, Theta, Rho), qui mesurent la sensibilité du prix d'une option aux variations des paramètres de marché.

Enfin, la **simulation de Monte-Carlo** offre une approche numérique pour la valorisation des options. En générant un grand nombre de trajectoires possibles pour le prix de l'actif sous-jacent, elle permet de calculer une estimation du prix de l'option par moyenne des scénarios simulés. Cette méthode est particulièrement utile pour les options dont la structure de paiement est complexe ou pour lesquelles une solution analytique est difficile à obtenir.

L'objectif principal de ce rapport est d'étudier en détail ces quatre modèles de valorisation des options – **modèle binomial**, **modèle trinomial**, **modèle de Black-Scholes** et **méthode de Monte-Carlo** – et de les comparer en termes de précision, d'efficacité et de complexité. Nous démontrerons leur convergence, notamment celle du modèle binomial vers le modèle de Black-Scholes, et évaluerons leur performance selon différents paramètres de marché tels que la volatilité, la maturité, le taux sans risque et le prix d'exercice.

Ce travail vise à fournir une compréhension approfondie des techniques de valorisation des options tout en offrant un outil pratique pour les investisseurs et les chercheurs en finance. Il permettra non seulement d'évaluer la pertinence des différents modèles en fonction des conditions de marché, mais aussi d'explorer les limites et les avantages de chacun.

Chapitre 1

Partie Théorique

1.1 Espace et Hypothèses de Travail

Dans le cadre de la valorisation des options, il est essentiel de définir un espace probabiliste approprié. Les prix des actifs financiers évoluent dans un environnement incertain, ce qui nécessite une modélisation rigoureuse pour évaluer correctement leur comportement futur.

Nous considérons un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, où :

— Ω représente l'ensemble des états possibles de la nature, correspondant aux différentes trajectoires de prix des actifs sous-jacents.

— $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre associée à cet espace, qui contient toutes les informations disponibles à chaque instant t.

— P est la mesure de probabilité qui caractérise le comportement des actifs financiers dans cet espace.

Nous adoptons également une filtration $\mathcal{F}_t$, qui décrit l'évolution de l'information au cours du temps. À chaque instant t, $\mathcal{F}_t$ contient toutes les informations disponibles jusqu'à ce moment. Cette structure permet d'évaluer les actifs à travers des chemins de prix potentiels tout en intégrant la notion de temps.

Pour garantir la cohérence de notre modèle, nous faisons l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). Cette hypothèse stipule qu'il ne doit pas exister de stratégie permettant de réaliser un profit sans risque, ce qui est fondamental pour assurer l'équilibre du marché. L'absence d'opportunité d'arbitrage conduit à l'existence d'une probabilité risque neutre unique Q, rendant martingale tout flux de trésorerie actualisé.

Nous considérons également un marché composé de deux types d'actifs :

— Un actif risqué S, dont le prix évolue selon un modèle stochastique.

— Un actif sans risque, offrant un rendement constant r, connu à l'avance.

Nous supposons que le taux sans risque est constant sur la période d'évaluation. Ainsi, les flux futurs peuvent être actualisés en utilisant le facteur d'actualisation approprié, soit e^{rt} pour un temps continu.

Cet espace probabiliste et ces hypothèses constituent les fondations nécessaires pour l'étude des modèles de valorisation que nous examinerons dans les sections suivantes. En adoptant une approche systématique, nous passerons d'un modèle à une période à des modèles plus complexes, tels que le modèle binomial à plusieurs périodes et le modèle de Black-Scholes.

1.2 Modèle Binomial

1.2.1 Modèle Binomial à une période

Le modèle binomial à une période constitue une méthode fondamentale pour la valorisation des options. Il repose sur une structure simple où le prix de l'actif sous-jacent évolue à travers deux possibilités à l'issue d'une période : il peut soit augmenter, soit diminuer. Ce modèle permet d'illustrer de manière intuitive les mécanismes de pricing des options dans un cadre discret.

1.2.2 Structure du modèle

À l'instant initial $t = 0$, considérons un actif risqué dont le prix est noté S_0. À la fin de la période $t = 1$, le prix de l'actif peut évoluer selon deux états possibles :

— Si le prix augmente, il prend la valeur $S_u = uS_0$, où $u > 1$ représente le facteur de hausse.

— Si le prix diminue, il devient $S_d = dS_0$, où $d < 1$ est le facteur de baisse.

La représentation de cette dynamique peut être illustrée par un arbre à deux branches, tel que :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{S_u} = \mathrm{uS_0} \\ \mathrm{S_0} \arrow[ur, "\mathrm{p}"] \arrow[dr, "\mathrm{1 - p}"'] & \\ & \mathrm{S_d} = \mathrm{dS_0} \end{tikzcd}$$

1.2.3 Probabilités associées

Pour chaque mouvement, nous définissons les probabilités associées :
— p : la probabilité que le prix augmente à l'issue de la période, avec $0 < p < 1$.
— $1 - p$: la probabilité que le prix diminue.

Ces probabilités doivent être choisies de manière à garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage. La condition pour assurer l'AOA est la suivante : d < (1 + r) / u < 1, où r est le taux d'intérêt sans risque. Cette condition garantit que le prix actualisé des flux futurs ne crée pas d'arbitrage.

1.2.4 Stratégie de portefeuille simple

Dans le cadre de ce modèle, nous pouvons établir une stratégie de portefeuille simple qui permet de dupliquer la valeur d'un produit dérivé. Considérons un portefeuille composé d'une quantité Δ d'actifs risqués et d'un montant x en actif sans risque.

À l'instant $t = 1$, les valeurs du portefeuille dans les deux états possibles sont données par :
— En cas de hausse : $V_u = \Delta S_u + (x - \Delta S_0)(1 + r)$
— En cas de baisse : $V_d = \Delta S_d + (x - \Delta S_0)(1 + r)$

Pour établir la duplication, nous devons égaliser les valeurs du portefeuille avec les payoffs du produit dérivé à maturité :

$$\begin{cases} V_u = C_u \\ V_d = C_d \end{cases}$$

où C_u et C_d représentent respectivement les valeurs de l'option dans les états de hausse et de baisse.

Cela nous permet de définir les quantités Δ et x :

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$$

$$x = \frac{1}{1 + r} \left(pC_u + (1 - p)C_d\right)$$

1.2.5 Pricing d'un Produit Dérivé

Pour valoriser un produit dérivé à maturité T, nous devons prendre en compte les résultats possibles à $t = 1$. Supposons que C soit le prix d'un call option, le prix à $t = 0$ peut être déterminé par l'espérance des résultats actualisés, formulée comme suit :

$$C_0 = \frac{1}{R} E^Q[C_T]$$

où E^Q représente l'espérance sous la mesure de probabilité risque neutre Q. En d'autres termes :

$$C_0 = \frac{1}{R} \left(p \cdot C_u + (1 - p) \cdot C_d\right)$$

où C_u et C_d sont les valeurs de l'option à $t = 1$ dans les cas de montée et de baisse du prix, respectivement.

Pour garantir que le prix à $t = 0$ reflète correctement les probabilités du modèle, la probabilité p est déterminée par la relation :

$$p = \frac{R - d}{u - d}$$

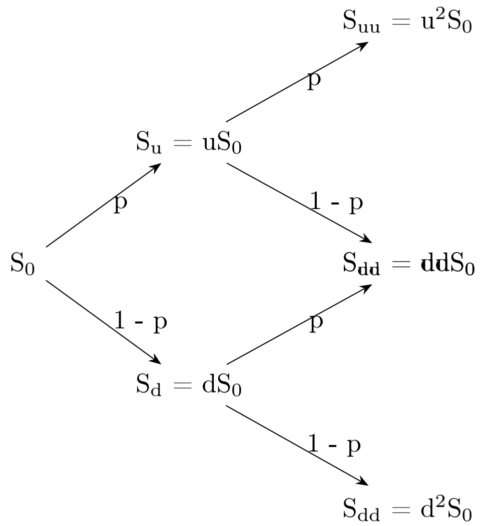
Il est essentiel que p soit compris entre 0 et 1, ce qui assure la validité des probabilités.

1.3 Modèle Binomial à Plusieurs Périodes

Dans cette section, nous allons examiner le modèle binomial à plusieurs périodes, qui constitue une extension du modèle à une seule période. Dans ce cadre, nous allons travailler avec N périodes, où chaque période est désignée par un index n appartenant à l'ensemble $\{0, 1, \ldots, N\}$. L'objectif principal est de déterminer le prix d'un produit dérivé à chaque période et d'identifier la stratégie de portefeuille correspondante.

1.3.1 Construction de l'Arbre Binomial

L'arbre binomial se compose de plusieurs branches et nœuds représentant les différentes évolutions possibles du prix de l'actif risqué au cours des périodes. Voici un exemple :



À chaque instant n, le prix de l'actif est noté S_{ti}, où t_i est le moment de l'évaluation. La distribution des rendements est notée $Y_i = \frac{S_{ti}}{S_{t_{i-1}}}$ pour $i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Les variables Y_i sont indépendantes et suivent la même loi, ce qui nous permet de simplifier les calculs.

Nous avons alors la représentation suivante pour l'ensemble des états possibles :

- **État des Événements** : $\Omega = \{(w_1, w_2, \ldots, w_n)\}$ où w_i peut être soit w_u (hausse) soit w_d (baisse).
- **Filtration** : $F = \{F_0, F_1, \ldots, F_N\}$ où $F_n = \sigma(S_1, S_2, \ldots, S_n)$.
- **Probabilités** : La probabilité d'une hausse $P(w_i = w_u) = p$ et d'une baisse $P(w_i = w_d) = 1 - p$.

1.3.2 Stratégie de Portefeuille Simple

Dans le cadre d'un marché complet, chaque produit dérivé C peut être reproduit par une stratégie de portefeuille simple, notée (x, Δ). À chaque période n, la quantité d'actif risqué est ajustée pour maximiser le retour tout en minimisant le risque. Le capital initial x à $t = 0$ se définit par l'espérance actualisée du produit dérivé à l'échéance :

$$x = \frac{1}{(1+r)^N} E_Q[C_T]$$

Où C_T représente le paiement du produit dérivé à la maturité T.

1.3.3 Pricing d'un Produit Dérivé

En assumant l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), il existe une probabilité de risque neutre Q qui rend les flux actualisés martingales. En ce sens, le prix d'un produit dérivé C à l'instant n est donné par :

$$C_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} E_Q[C_T | F_n]$$

Particulièrement, à l'instant initial, le prix du produit dérivé peut être exprimé comme suit :

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^N} E_Q[C_T]$$

1.3.4 Exprimer le Prix d'un Produit Dérivé

Dans le modèle binomial, le prix à maturité C_T dépend de tous les prix d'actifs sous-jacents à travers les différentes périodes. Par conséquent, nous pouvons exprimer le prix à l'instant n par :

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{i=0}^{N} f(u^{N-i} d^i S_0) C_N(i) q^u (1-q)^{N-i}$$

Cette expression nous permet de calculer le prix d'un produit dérivé à n'importe quel instant, à condition de connaître la fonction $f(x)$ qui détermine le produit dérivé en question.

1.3.5 Cas Particulier du Modèle Cox-Ross-Rubinstein (CRR)

Le modèle binomial le plus couramment utilisé est le modèle de Cox-Ross-Rubinstein (CRR), qui constitue une variante essentielle du modèle binomial. Dans ce modèle, les paramètres u, d et R sont définis de manière précise pour établir une relation entre les mouvements de l'actif risqué au cours de chaque période. Plus précisément, nous avons :

— $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, représentant le facteur de hausse,
— $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$, représentant le facteur de baisse,
— $R = e^{r\Delta t}$, qui est le taux d'actualisation.

Ici, σ désigne la volatilité de l'actif, tandis que Δt correspond à la durée de chaque période considérée. Une caractéristique importante de ce modèle est que le produit $u \cdot d$ est égal à 1. Cela implique que les effets combinés de la hausse et de la baisse à chaque période ne modifient pas le prix de l'actif à long terme, ce qui est crucial pour une évaluation précise des options.

En termes de valorisation des options, le modèle CRR est particulièrement efficace pour les options européennes. Le prix d'une option peut être calculé en remontant l'arbre binomial à partir des valeurs terminales à l'échéance. Chaque nœud de cet arbre représente le prix de l'actif à une période donnée, et les probabilités associées aux mouvements haussiers et baissiers sont déterminées à partir des probabilités de risque neutre qui sous-tendent le modèle. Grâce à ces caractéristiques, le modèle CRR offre une méthode robuste pour évaluer les options dans un cadre discret, tout en garantissant une certaine flexibilité dans l'analyse des produits dérivés.

1.4 Modèle Binomial et Modèle de Black & Scholes : Pricing des options européennes

Dans cette section, nous allons la convergence du modèle binomial à plusieurs périodes vers le modèle de Black Scholes. Commençons avant tout par définir le modèle de Black Scholes.

1.4.1 Le Modèle de Black & Scholes

Le modèle de Black & Scholes est un modèle bien connu pour évaluer les options européennes. Ce modèle repose sur plusieurs hypothèses simplificatrices :

— Le prix du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique.
— La volatilité du sous-jacent est constante et connue.
— Il n'y a pas de dividendes versés pendant la durée de vie de l'option.
— Le taux d'intérêt sans risque est constant.
— L'option est de type européenne, ce qui signifie qu'elle ne peut être exercée qu'à la date de maturité.
— Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, garantissant un marché efficient.

La formule de Black & Scholes pour le prix d'un call européen est donnée par :

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \tag{1.1}$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{1.2}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{1.3}$$

où $N(\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi normale cumulative, S_t est le prix du sous-jacent à l'instant t, K est le prix d'exercice de l'option, T est la maturité, r est le taux d'intérêt sans risque et σ est la volatilité.

Preuve :
Le prix Black-Scholes du call européen de maturité T, de tawx d'intérét λ et de volatilité σ, s'écrit :

$$C = \exp(-\lambda T) E^* \left[\left(S_0 \exp\left(\left[\lambda - \frac{\sigma^2}{2} \right] T + \sigma \sqrt{T} Z \right) - K \right)_+ \right]$$

Nous remarquons que la condition s'écrit

$$\begin{aligned} S_0 \exp\left(\left(\lambda - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} Z \right) &\geq K \\ Z &\geq \frac{\ln(K/S_0) - \left(\lambda - \sigma^2/2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

Nous posons

$$\begin{aligned} d_2(S_0) &= -\frac{\ln(K/S_0) - \left(\lambda - \sigma^2/2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{\ln(S_0/K) + \left(\lambda - \sigma^2/2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

Nous poavons écrive

$$\begin{aligned} C &= E\left[\left(S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma\sqrt{T} Z \right) - K \exp(-\lambda T) \right) 1_{\left\{ z\, 2 d_2(S_0) \right\}} \right] \\ &= \int_{-d_0(S_0)}^{+\infty} \left(S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma\sqrt{T} y \right) - K\exp(-\lambda T) \right) g(y) dy \end{aligned}$$

où g désigne la densité gaussienne centrée réduite. Par changement de variables, nous obtenons

$$\begin{aligned} C = &\int_{-\infty}^{d_2(S_e)} \left(S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2 T}{2} - \sigma\sqrt{T} y \right) - K\exp(-\lambda T) \right) g(y) dy \\ =& S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2 T}{2} \right) \int_{-\infty}^{\alpha_2(S_0)} \exp\left(-\sigma\sqrt{T}_y \right) g(y) dy \\ &- K\exp(-\lambda T) \mathcal{N}\left(d_2(S_0)\right) \end{aligned}$$

où $\mathcal{N}$ désigne la fonction de répartition de la gaussienne centrée réduite. E, posant $z = y + \sigma\sqrt{T}$, il reste à voir que

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{d_2(S_0)} \exp(-\sigma\sqrt{T} y) g(y) dy \\ &= \exp\left(\frac{\sigma^2 T}{2} \right) \int_{-\infty}^{\omega_((s_0)} g(z) dz = \exp\left(\frac{\sigma^2 T}{2} \right) \mathcal{N}\left(d_1(S_0)\right) \end{aligned}$$

où $d_1(S_0) = d_2(S_0) + \sigma\sqrt{T}$. De sorte que

$$C = S_0 \mathcal{N}\left(d_1(S_0)\right) - K\exp(-\lambda T)\mathcal{N}\left(d_2(S_0)\right)$$

Pour trouver le prix du put il suffit d'appliquer la relation de parité Call-Put (cf. annexe A) et remarquer que N (x) + N (x) = 1

$$P = K\exp(-\lambda T)\mathcal{N}\left(-d_2(S_0)\right) - S_0\mathcal{N}\left(-d_1(S_0)\right)$$

1.5 Convergence du modèle binomial vers le modèle de Black & Scholes

Dans cette section, nous examinons comment le modèle binomial converge vers le modèle de Black & Scholes à mesure que le nombre de périodes augmente.

1.5.1 Le modèle de Black & Scholes

Le modèle de Black & Scholes, utilisé pour pricer les options européennes, repose sur les hypothèses suivantes :

1. Le prix de l'actif sous-jacent S suit un mouvement brownien géométrique :

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right]$$

où la dynamique de S_t est donnée par :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$$

2. La volatilité σ est constante.
3. Il n'y a pas de dividende sur l'actif sous-jacent.
4. Le taux d'intérêt r est constant.
5. L'option est européenne, c'est-à-dire qu'elle ne peut être exercée qu'à l'échéance.
6. Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.

Le prix de l'option de strike K et de maturité T peut être calculé en utilisant la probabilité risque neutre Q, sous laquelle le processus brownien s'écrit :

$$W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

Ainsi, le prix de l'actif sous-jacent sous Q à la date T est donné par :

$$S_T = S_t \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) + \sigma(W_T - W_t)\right]$$

Le prix d'un call est alors :

$$C_t = E_Q\left[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t\right]$$

Ce qui donne, après simplification :

$$C_t = S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

Le prix du put est obtenu par la relation de parité Call-Put :

$$P_t = e^{-r(T-t)} K N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

1.6 Convergence du modèle binomial vers le modèle de Black & Scholes

1.6.1 Limite du modèle binomial

Afin d'étudier la convergence du modèle binomial à plusieurs périodes vers le modèle de Black & Scholes, considérons les paramètres suivants :

$$t_N = T, \quad u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}, \quad R = e^{r\delta t}, \quad \delta t = \frac{T}{N}.$$

Dans ce contexte, le prix de l'actif à l'échéance T peut être exprimé comme :

$$S_T = S_0 \prod_{k=1}^{N} Y_k,$$

où

$$Y_k = e^{Z_k \sigma\sqrt{\delta t}},$$

avec Z_k prenant les valeurs -1 et 1, et $Z_k = 1$ avec probabilité q et $Z_k = -1$ avec probabilité $1 - q$.

Ainsi, le prix à l'échéance devient :

$$S_T = S_0 e^{\sigma\sqrt{T} Z_N},$$

où

$$Z_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} Z_k.$$

Les Z_k suivent une distribution de Bernoulli, donc Z_N suit une loi binomiale. Lorsque N tend vers l'infini, cette loi binomiale $B(N, q)$ peut être approximée par une loi normale $\mathcal{N}\left(\sqrt{N}(2q-1), 4q(1-q)\right)$. Pour déterminer q, utilisons un développement limité de la fonction exponentielle autour de 0, car lorsque N tend vers l'infini, δt tend vers 0 (en utilisant $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$) :

$$q = \frac{R-d}{u-d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\delta t}}{2\sigma}(r - \frac{\sigma^2}{2}) + o(\delta t).$$

Nous pouvons maintenant calculer la moyenne μ_N et la variance σ_N^2 de la loi normale pour Z_N :

$$\mu_N = \sqrt{T} \cdot \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} + o(\delta t),$$

et

$$\sigma_N^2 = 1 - \delta t \cdot \frac{\sigma^2 (r - \frac{\sigma^2}{2})^2}{2} + o(\delta t).$$

Maintenant que nous avons la distribution de Z_N, nous montrons que Z_N converge en loi vers une variable aléatoire Z définie par :

$$Z = Y + \sqrt{T} \cdot \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma},$$

où Y suit une loi normale centrée réduite. Il suffit de montrer que le moment générateur de Z_N converge vers celui de Z.

Le moment générateur de Z_N est donné par :

$$M_{Z_N}(s) = E_Q\left[e^{sZ_N}\right] = e^{\mu_N s + \frac{\sigma_N^2}{2} s^2}.$$

Lorsque $N \to +\infty$, nous obtenons :

$$\lim_{N\to\infty} M_{Z_N}(s) = e^{\sqrt{T}\cdot\sigma s\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{2}s^2}.$$

Ainsi, nous avons :

$$\lim_{N\to\infty} M_{Z_N}(s) = M_Z(s),$$

et nous pouvons conclure que Z_N converge en loi vers Z.

Posons la fonction payoff suivante :

$$f(z) = (S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z} - K)^+.$$

Nous avons alors :

$$\lim_{N\to\infty} e^{-rT} E\left[(S_T - K)^+\right] = \lim_{N\to\infty} e^{-rT} E[f(Z_N)] = e^{-rT} E[f(Z)].$$

1.6.2 Convergence vers le modèle de Black & Scholes

À partir de ce résultat, nous pouvons maintenant calculer le prix de l'option call :

$$e^{-rT} E[f(Z)] = e^{-rT} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)} - K \right)^+ e^{-\frac{(z - \sqrt{T}\cdot\sigma(r - \frac{\sigma^2}{2}))^2}{2}} dz \right).$$

Il est clair que $S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)} > K$ si et seulement si $z > -d_2$. Par conséquent :

$$e^{-rT} E[f(Z)] = S_0 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d_1}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \right) - e^{-rT} K \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d_2}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \right),$$

où nous avons effectué un changement de variable $s = -z + \sigma\sqrt{T}$ dans le second terme.

Ainsi, nous obtenons la formule classique :

$$e^{-rT} E[f(Z)] = S_0 N(d_1) - e^{-rT} K N(d_2),$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Nous pouvons utiliser la même approche pour calculer le prix d'un call à tout instant $t \geq 0$. Pour obtenir le prix du put, nous appliquons simplement la relation de parité Call-Put.

1.6.3 Sensibilités

Les sensibilités du prix d'une option par rapport à différents paramètres sont appelées les « Grecques » :
— Le **Delta** représente la sensibilité du prix par rapport à la valeur actuelle du sous-jacent ;
— Le **Theta** est la sensibilité du prix par rapport au temps écoulé ;
— Le **Vega** mesure la sensibilité du prix par rapport à la volatilité ;
— Le **Rho** est la sensibilité du prix par rapport au taux d'intérêt ;
— Le **Gamma** est la sensibilité du Delta par rapport à la valeur actuelle du sous-jacent.
L'équation différentielle partielle (EDP) vérifiée par le prix d'une option vanille se présente comme suit :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \Gamma + rx\Delta - rP + \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

Dans le cas d'un **Call**, les valeurs en $t = 0$ des Grecques sont les suivantes :

$$\Delta = N(d_1) > 0, \quad \Gamma = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}} N'(d_1) > 0, \quad \rho = TKe^{-rT}N(d_2) > 0$$

$$\theta = -\frac{x\sigma}{2\sqrt{T}} N'(d_1) - rKe^{-rT}N(d_2), \quad Vega = x\sqrt{T}N'(d_1) > 0$$

Dans le cas d'un **Put**, les valeurs en $t = 0$ des Grecques sont :

$$\Delta = -N(-d_1) < 0, \quad \Gamma = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}} N'(d_1) > 0, \quad \rho = -TKe^{-rT}N(d_2) < 0$$

$$\theta = -\frac{x\sigma}{2\sqrt{T}} N'(d_1) + rKe^{-rT}N(d_2), \quad Vega = x\sqrt{T}N'(d_1) > 0$$

Le **Delta** se comprend comme la quantité d'actif nécessaire pour répliquer l'option. On parle alors de couverture **Delta-neutre**. Pour ajuster la couverture en temps discret, il est nécessaire de réajuster le Delta à chaque instant discret. Lorsque la couverture se fait de manière continue, c'est le **Gamma** qui indique la fréquence des ajustements de la position du sous-jacent. Si le Gamma est faible, le Delta varie peu et la couverture nécessite moins d'ajustements. En revanche, si le Gamma est élevé, des ajustements plus fréquents sont nécessaires. Le Gamma est donc une mesure importante pour le calibrage du portefeuille.

Le **Vega** montre la sensibilité aux variations de la volatilité du sous-jacent et est crucial à calculer. Lorsque le Vega est élevé, le risque d'erreur de calibrage est plus grand.

Enfin, le **Theta** mesure la diminution de la valeur de l'option au fur et à mesure que le temps avance.

1.7 Modèle trinomial

Le modèle trinomial étend le modèle binomial en introduisant une troisième possibilité d'évolution du prix de l'actif risqué. À chaque instant, l'actif peut monter, descendre ou rester stable. Nous commençons par étudier le modèle trinomial sur une période, puis nous généralisons sur plusieurs périodes.

1.8 Modèle Trinomial

Le modèle trinomial est une approche dans laquelle un actif peut évoluer selon trois trajectoires possibles à chaque période. Nous allons d'abord aborder le modèle trinomial à une période, puis le généraliser sur plusieurs périodes.

1.8.1 Modèle Trinomial à une Période

Dans le cadre du modèle trinomial à une période, nous analysons deux instants : $n = 0$ et $n = 1$. À l'instant $n = 1$, nous supposons que le prix de l'actif risqué peut prendre l'une des valeurs suivantes avec des probabilités respectives : p_u, p_d ou p_m, satisfaisant à la relation $p_u + p_d + p_m = 1$, avec les conditions $d < m < u$. Ainsi, en fonction d'un ensemble de paramètres, nous visons à établir le prix d'un produit dérivé à l'instant $n = 0$, ainsi que le capital initial et la quantité d'actifs risqués permettant d'atteindre un rendement donné à l'instant $n = 1$.

$$S_0 \to \begin{cases} uS_0 & \text{avec probabilité } p_u, \\ mS_0 & \text{avec probabilité } p_m, \\ dS_0 & \text{avec probabilité } p_d. \end{cases}$$

Nous pouvons définir l'ensemble des états de la nature comme suit :

$$\Omega = \{w_u, w_d, w_m\}, \quad F = \{F_0, F_1\} \quad \text{avec} \quad F_1 = \sigma(S_1),$$

et

$$P(w_u) = p_u, \quad P(w_d) = p_d, \quad P(w_m) = p_m, \quad d < m < u.$$

1.8.1.1 Absence d'Opportunité d'Arbitrage

Pour le modèle binomial, l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) est garantie si $d < R < u$. Dans le modèle trinomial, l'introduction du paramètre m nécessite d'examiner sa relation avec R.

En supposant que $m > R$, considérons un capital initial de $x = 0$. Le capital à l'instant $n = 1$, lorsque $S_1 = mS_0$, se traduit par :

$$X_0, \Delta = \Delta S_0(m - R) > 0.$$

Cela entraînerait une opportunité d'arbitrage. Par conséquent, nous concluons que $m \leq R$.

1.8.1.2 Stratégie de Portefeuille Simple

Nous allons établir une stratégie (x, Δ) qui permettra de dupliquer tout produit dérivé C, prouvant ainsi que le marché est complet.

À l'instant $n = 1$, nous avons :

$$\begin{cases} C_1^u = \Delta u S_0 + (x - \Delta S_0)R = xR + (u - R)\Delta S_0, \\ C_1^d = \Delta d S_0 + (x - \Delta S_0)R = xR + (d - R)\Delta S_0, \\ C_1^m = \Delta m S_0 + (x - \Delta S_0)R = xR + (m - R)\Delta S_0. \end{cases}$$

Ce système peut être exprimé sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} C_1^u \\ C_1^d \\ C_1^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u - R \\ 1 & d - R \\ 1 & m - R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xR \\ \Delta S_0 \end{pmatrix}.$$

Ce système présente une infinité de solutions, car il compte trois équations pour seulement deux inconnues. Cela implique l'existence de plusieurs probabilités risque neutre rendant martingales les prix actualisés, ce qui suggère que le marché est incomplet.

Pour remédier à cette incompletude, nous ajoutons un second actif risqué T_0, qui peut également évoluer dans trois directions : $u'T_0$, $m'T_0$, $d'T_0$, avec $d' < m' < u'$ et $m' \leq R$. L'introduction d'une quantité Γ investie dans ce second actif nous amène à définir une stratégie (x, Δ, Γ). Le système d'équations devient alors :

$$\begin{pmatrix} C_1^u \\ C_1^d \\ C_1^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u - R & u' - R \\ 1 & d - R & d' - R \\ 1 & m - R & m' - R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xR \\ \Delta S_0 \\ \Gamma T_0 \end{pmatrix}.$$

Ce système admet une solution unique si la matrice des coefficients est inversible, pour ce faire, nous calculons le déterminant :

$$\det = (m'd - md') + (mu' - m'u) + (ud' - u'd).$$

Pour que le système admette une unique solution, il est nécessaire que det $\neq 0$. Dans ce cas, le marché est complet, et la stratégie se définit par :

$$\begin{pmatrix} xR \\ \Delta S_0 \\ \Gamma T_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u-R & u'-R \\ 1 & d-R & d'-R \\ 1 & m-R & m'-R \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C_1^u \\ C_1^d \\ C_1^m \end{pmatrix}.$$

1.8.1.3 Pricing d'un Produit Dérivé

Nous avons établi que le marché est complet, ce qui implique l'existence d'une probabilité risque neutre unique Q permettant d'assurer la martingale des prix actualisés.

Soit C un produit dérivé, alors le prix à l'instant initial s'exprime comme :

$$C_0 = \frac{1}{1+r} E_Q[C_1],$$

ce qui se réécrit en fonction des probabilités :

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \left[p_u C_1^u + p_d C_1^d + p_m C_1^m \right].$$

La résolution de cette équation nous permettra de déterminer la probabilité Q.

1.8.2 Modèle Trinomial à Plusieurs Périodes

Nous pouvons généraliser le modèle trinomial à plusieurs périodes en utilisant des principes similaires à ceux employés dans le modèle binomial à plusieurs périodes.

1.8.2.1 Stratégie de Portefeuille Simple

Dans un espace complet, le produit dérivé C est duplicable via une stratégie de portefeuille simple (x, Δ, Γ). À la différence du modèle à une période, ici, Δ et Γ sont des vecteurs de quantités.

Le capital initial x correspond toujours au prix du produit dérivé à l'instant $t = 0$, et il peut s'exprimer ainsi :

$$x = \frac{1}{(1+r)^N} E_Q[C_T].$$

Nous devons également déterminer les vecteurs Δ et Γ en utilisant l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} X_n \\ \Delta_n S_n \\ \Gamma_n T_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u-R & u'-R \\ 1 & d-R & d'-R \\ 1 & m-R & m'-R \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C_{n+1}^u \\ C_{n+1}^d \\ C_{n+1}^m \end{pmatrix}.$$

1.8.2.2 Pricing d'un Produit Dérivé

Nous continuons à travailler sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), ce qui assure l'existence d'une probabilité risque neutre Q pour les flux actualisés sous forme de martingales. La probabilité Q est définie de manière analogue à celle utilisée pour le modèle à une période.

Ainsi, à chaque instant n, nous pouvons écrire :

$$C_t^n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} E_Q[C_T | F_t^n].$$

En particulier, à l'instant initial :

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^N} E_Q[C_T].$$

1.8.2.3 Expression Explicite du Pricing des Produits Dérivés

Dans cette configuration, nous opérons dans un marché incomplet pour faciliter les implémentations, mais avec des conditions additionnelles permettant d'identifier une probabilité risque neutre unique Q.

Posons $t_N = T$, $u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}$, $R = e^{r\Delta t}$, $m = 1$ et $\Delta t = \frac{T}{N}$. Le modèle trinomial peut alors être représenté par la structure suivante :

$$\begin{pmatrix} S_0 & uS_0 & mS_0 & dS_0 & & & \\ & u^2S_0 & umS_0 & udS_0 & m^2S_0 & mdS_0 & d^2S_0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

En assurant que le prix actualisé constitue une martingale, nous avons les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} p_u + p_d + p_m = 1, \\ p_u u + p_d d + p_m m = R. \end{cases}$$

Cette situation génère trois inconnues pour deux équations, nécessitant l'ajout d'une troisième équation. Nous introduisons la variance conditionnelle de C_t^{n+1} :

$$\mathrm{Var}_Q[C_t^{n+1}] = \sigma^2 \Delta t C_t^n.$$

Ce système d'équations devient alors :

$$\begin{cases} p_u + p_d + p_m = 1, \\ p_u u + p_d d + p_m m = R, \\ p_u u^2 + p_d d^2 + p_m m^2 = \sigma^2 \Delta t + R^2. \end{cases}$$

La résolution de ce système nous fournit la probabilité risque neutre Q comme suit :

$$p_u = \left(\frac{e^{r\Delta t/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}/2}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}/2}} \right)^2,$$

$$p_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}/2} - e^{r\Delta t/2}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}/2}} \right)^2,$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d.$$

En appliquant le trinôme de Newton et en utilisant le double conditionnement par récurrence dans l'équation (1.14), nous pouvons déterminer une expression explicite pour le pricing d'un produit dérivé sous la forme :

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{N_u+N_d+N_m=N} f(u^{N_u} d^{N_d} S_0) \binom{n}{N_u, N_d, N_m} p_u^{N_u} p_d^{N_d} p_m^{N_m}.$$

Chapitre 2

Partie pratique :Application sous Python

Ce chapitre présente l'implémentation pratique des modèles de valorisation des options dans une interface interactive développée avec Streamlit. L'objectif est de permettre aux utilisateurs d'évaluer facilement le prix des options en fonction de divers paramètres et de visualiser les résultats.

2.1 Présentation de l'interface

L'interface est conçue pour être conviviale et interactive. Elle est divisée en plusieurs sections clés :

2.1.1 Sidebar pour la saisie des paramètres

La barre latérale (sidebar) fournit un espace où les utilisateurs peuvent entrer les paramètres requis. Chaque paramètre est accompagné d'une brève description pour guider l'utilisateur dans la saisie :

- **S** : Prix de l'actif sous-jacent
- **K** : Prix d'exercice
- **T** : Maturité
- **r** : Taux d'intérêt sans risque
- σ : Volatilité
- **steps** : Nombre d'étapes pour les modèles binomial et trinomial
- **num_simulations** : Nombre de simulations pour Monte Carlo
- **option_type** : Type d'option (call ou put)
- **option_style** : Style d'option (européen ou américain)

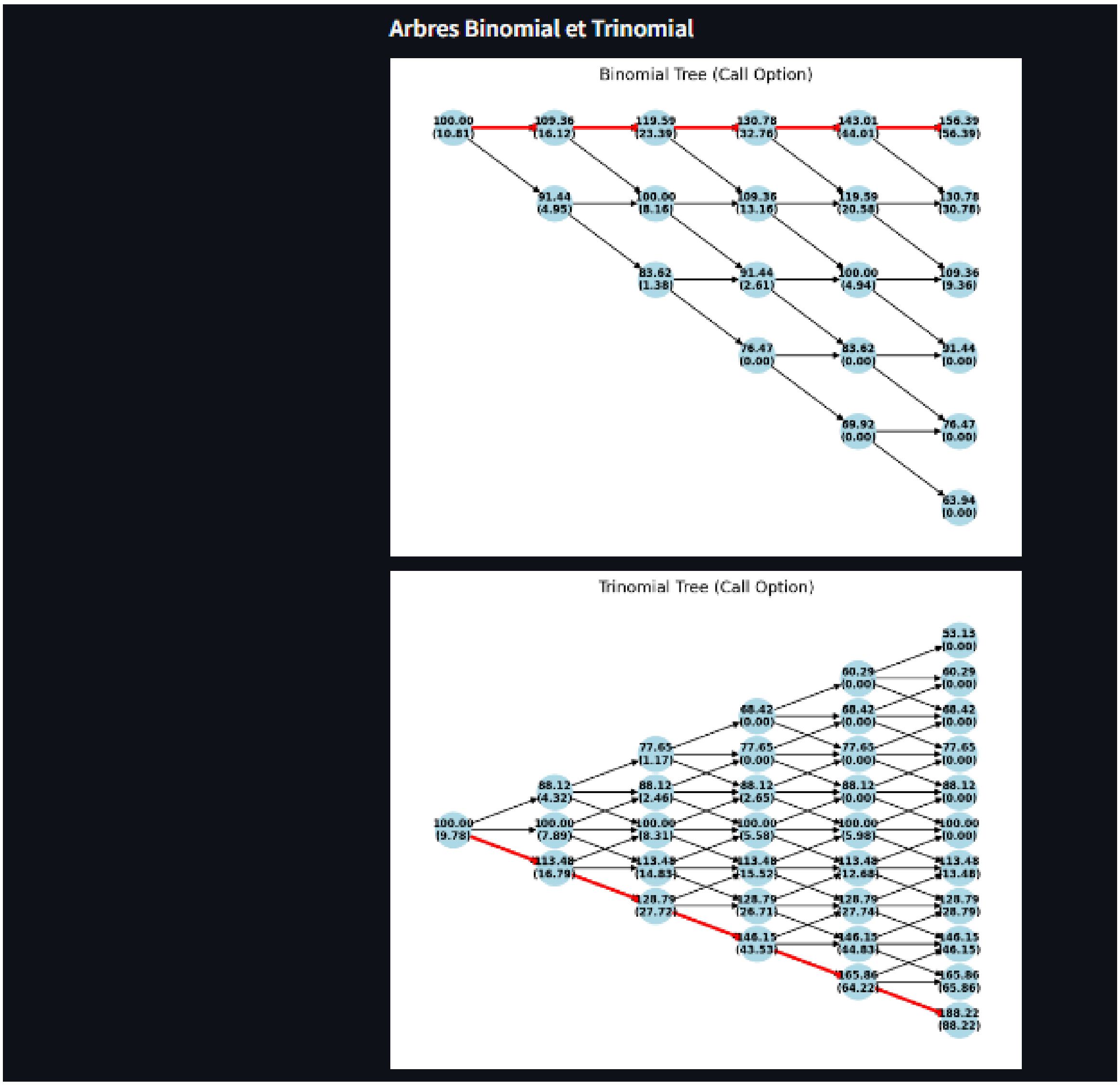
2.1.2 Affichage des résultats

Lorsque l'utilisateur clique sur le bouton "Calculer le prix des options", l'interface affiche les prix calculés pour chaque modèle et les grecs correspondants. Les résultats sont présentés de manière claire et lisible :

- **Prix selon le modèle binomial**
- **Prix selon le modèle trinomial**
- **Prix selon la méthode de Monte Carlo**
- **Prix selon le modèle de Black-Scholes**

2.1.3 Visualisations

Les arbres binomial et trinomial sont générés et affichés. Chaque nœud de l'arbre montre le prix et la valeur de l'option à ce nœud.



De plus, l'interface permet d'afficher des courbes d'évolution des prix des options en fonction de la maturité.

Finalement l'interface affiche les courbes d'évolution des prix des options en fonction de nombre de périodes ce qui va prouver **la convergence** traitée dans le chapitre précédent.

2.2 Conclusion

Cette application interactive représente un outil puissant pour la valorisation des options. Elle permet non seulement d'évaluer le prix des options selon plusieurs méthodes, mais également de visualiser les résultats et d'explorer la dynamique des prix. Grâce à une interface conviviale, les utilisateurs peuvent facilement naviguer à travers les différentes fonctionnalités et mieux comprendre les mécanismes de pricing des options.

L'application offre également des possibilités d'amélioration, telles que l'ajout de fonctionnalités d'exportation des résultats, de comparaisons graphiques entre les différents modèles, et de conseils pour aider les utilisateurs à interpréter les résultats.

Conclusion

En conclusion, la valorisation des options est un domaine fondamental de la finance moderne, englobant des théories et des modèles mathématiques essentiels pour comprendre le fonctionnement des marchés financiers. Nous avons étudié les principales approches de pricing, notamment les modèles binomial et trinomial, ainsi que le modèle de Black-Scholes, chacun ayant ses propres avantages et limitations.

Ces modèles nous permettent non seulement d'évaluer le prix des options, mais aussi d'analyser les risques associés aux produits dérivés. L'importance des hypothèses sous-jacentes, telles que l'absence d'arbitrage et la continuité des mouvements des prix, est cruciale pour garantir la validité des résultats obtenus.

La mise en œuvre pratique de ces théories, notamment à travers des simulations et des interfaces interactives, renforce notre compréhension et notre capacité à prendre des décisions éclairées en matière d'investissement. À l'avenir, l'évolution des marchés financiers et l'émergence de nouveaux instruments dérivés appellent à une réévaluation continue de ces modèles, tout en intégrant des techniques avancées comme la simulation de Monte-Carlo.

Annexe

Code Python pour le Pricing des Options

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm

def black_scholes(S, K, T, r, sigma, option_type='call'):
    d1 = (np.log(S/K) + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
    d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)
    if option_type == 'call':
        return S * norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r * T) * norm.cdf(d2)
    else:
        return K * np.exp(-r * T) * norm.cdf(-d2) - S * norm.cdf(-d1)

def binomial_tree(S, K, T, r, sigma, n, option_type='call'):
    dt = T/n
    u = np.exp(sigma * np.sqrt(dt))
    d = 1/u
    p = (np.exp(r * dt) - d) / (u - d)

    prices = np.zeros((n + 1, n + 1))
    for i in range(n + 1):
        for j in range(i + 1):
            prices[j, i] = S * (u ** (i - j)) * (d ** j)

    option_values = np.zeros((n + 1, n + 1))
    for j in range(n + 1):
        option_values[j, n] = max(0, prices[j, n] - K) if option_type == 'call' else\
        max(0, K - prices[j, n])

    for i in range(n - 1, -1, -1):
        for j in range(i + 1):
            option_values[j, i] = np.exp(-r * dt) * (p * option_values[j, i + 1] + \\(1 - p) *

            option_values[j + 1, i + 1])

    return option_values[0, 0]

def trinomial_tree(S, K, T, r, sigma, n, option_type='call'):
    dt = T/n
    u = np.exp(sigma * np.sqrt(2*dt))
    d = 1/u
    m = 1
    p_u = ((np.exp(r*dt) - d) / (u - d)) / 2
    p_d = ((u - np.exp(r*dt)) / (u - d)) / 2
    p_m = 1 - p_u - p_d

    prices = np.zeros((2*n + 1, n + 1))
    for i in range(2*n + 1):
        prices[i, n] = S * (u**max(i-n, 0)) * (d**max(n-i, 0))

    option_values = np.zeros((2*n + 1, n + 1))
    for i in range(2*n + 1):
        option_values[i, n] = max(0, prices[i, n] - K) if option_type == 'call'

        else max(0, K - prices[i, n])

    for j in range(n - 1, -1, -1):
        for i in range(2*j + 1):
            option_values[i, j] = np.exp(-r * dt) * (p_u * option_values[i + 2, j + 1] + p_m * o

            + p_d * option_values[i, j + 1])
```

```python
    return option_values[n, 0]


call_price_tn = trinomial_tree(S, K, T, r, sigma, n=100, option_type='call')


def monte_carlo(S, K, T, r, sigma, n_simulations, option_type='call'):
    dt = T / 365  # Daily steps
    prices = np.zeros(n_simulations)

    for i in range(n_simulations):
        path = np.zeros(365)
        path[0] = S
        for t in range(1, 365):
            Z = np.random.normal()
            path[t] = path[t-1] * np.exp((r - 0.5 * sigma**2) * dt + sigma * np.sqrt(dt) * Z)
        prices[i] = max(0, path[-1] - K) if option_type == 'call' else max(0, K - path[-1])

    return np.exp(-r * T) * np.mean(prices)

# Example usage
S = 100
K = 100
T = 1
r = 0.05
sigma = 0.2
```

Bibliographie

1. Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
2. Cox, J.C., Ross, S.A., & Rubinstein, M. (1979). *Option Pricing : A Simplified Approach. Journal of Financial Economics*, 7(3), 229-263.
3. Hull, J.C. (2017). *Options, Futures, and Other Derivatives* (10th ed.). Pearson.

Ressources en ligne

1. Investopedia. (n.d.). *Options Basics : Call and Put Options*. Retrieved from `https://www.investopedia.com/terms/o/option.asp`
2. Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer.

Bibliographie

[1] Auteur Ailleurs. Titre3. `<http://www.url2.org/>`, 2014. [Online ; accessed 16-January-2014].

[2] Auteur Autre. Titre2. `<http://www.url1.org/>`, 2014. [Online ; accessed 16-January-2014].

[3] Auteur Elle. Titre5. `<http://www.url4.org/>`, 2014. [Online ; accessed 16-January-2014].

[4] Auteur Livre1. *Titre Livre1*. Editeur1, 2014.

[5] Auteur Lui. Titre4. `<http://www.url3.org/>`, 2014. [Online ; accessed 16-January-2014].

[6] Auteur Untel. Titre1. `<http://www.url0.org/>`, 2014. [Online ; accessed 16-January-2014].