Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Insitut

Finite Differenzen für die Konvektions-Diffusions-Gleichung in 1d

Projekt im Numerischen Praktikum

eingereicht von
Moritz Beyer
Peter Voran

Leipzig, den 16. April 2023

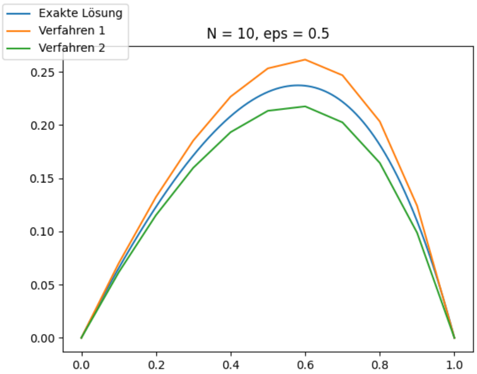
Inhaltsverzeichnis

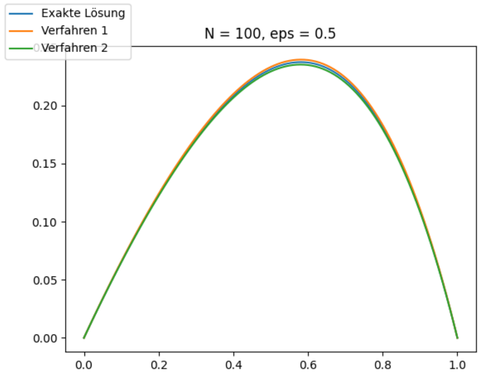
1 Einleitung

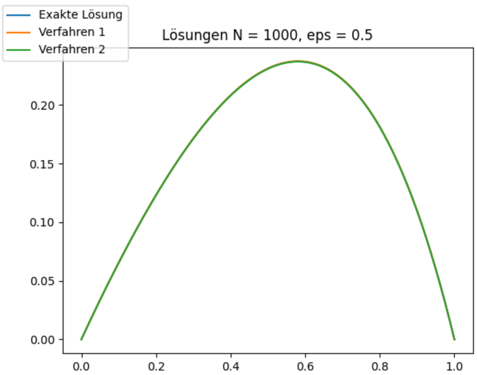
Wir untersuchen Lösungen für die Konvektions-Diffusions-Gleichung in 1d. Zur Lösung des Randwertproblems nutzen wir zwei verschiedene Finite-Differenzen-Verfahren, um damit die tatsächliche Lösung zu approximieren. Außerdem betrachten wir den bei dieser Approximation auftretenden Fehler. Wir stellen in Kapitel 2 die Ergebnisse unserer numerischen Experimente vor und interpretieren diese dann in Kapitel 3.

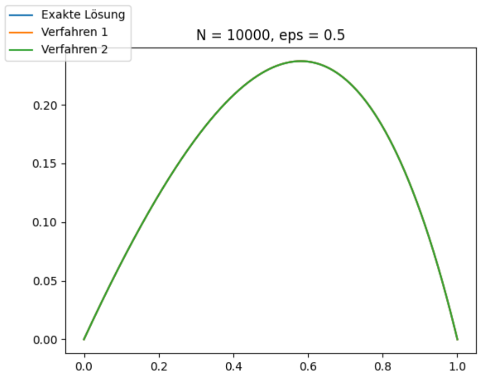
2 Ergebnisse der Experimente

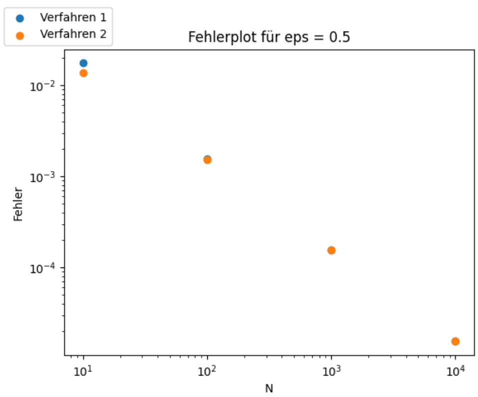
2.1 $\varepsilon = 0.5$





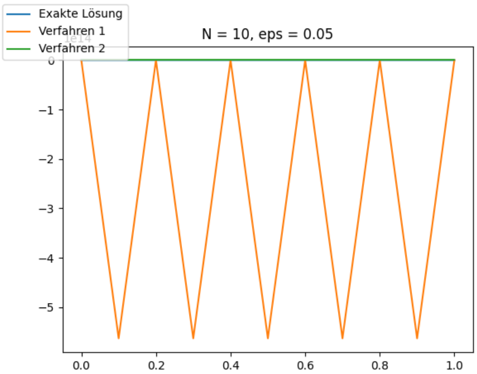


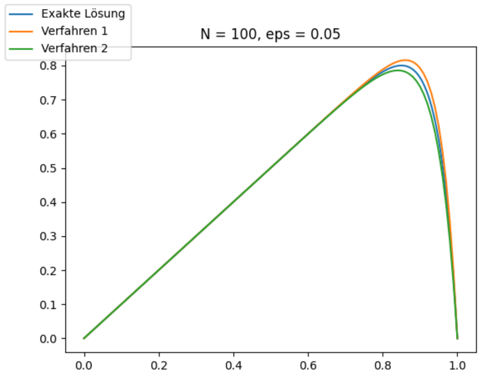


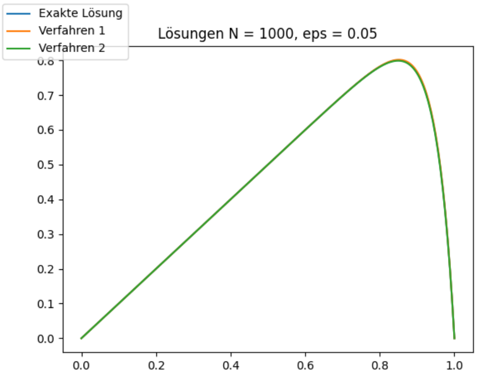


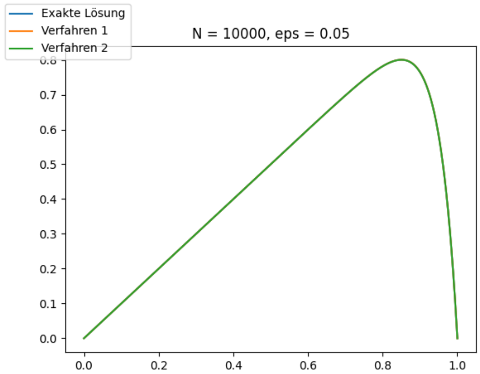
Man erkennt hier, dass beide Verfahren gute Approximationen zur exakten Lösung liefern, wobei der Fehler mit steigendem N immer kleiner wird.

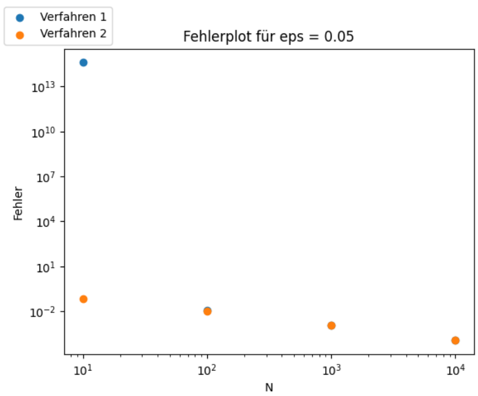
2.2 $\varepsilon = 0.05$





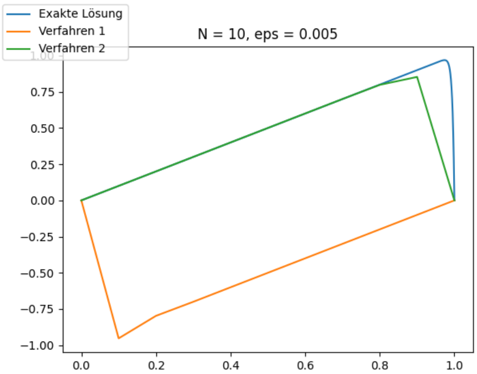


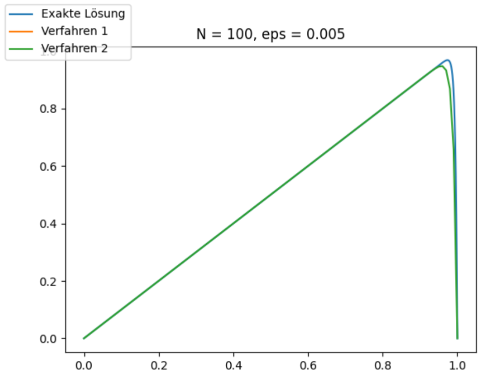


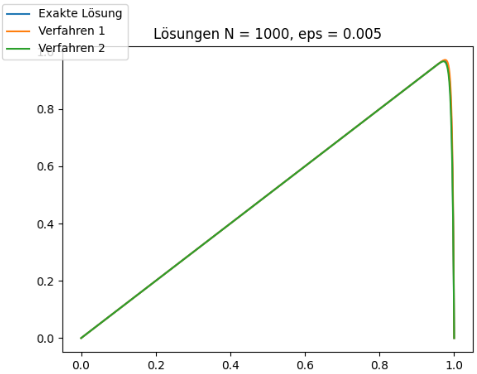


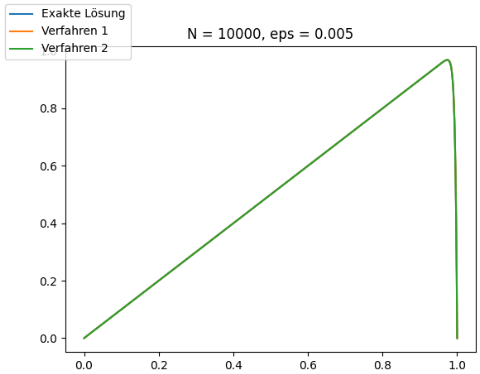
Verfahren 2 gibt hier eine sehr gute Approximation der exakten Lösung. Verfahren 1 hingegen hat einen sehr großen Fehler für $N = 10$ und approximiert erst mit größerem N die exakte Lösung. Auf diesen großen Fehler gehen wir in der Interpretation der Ergebnisse ein.

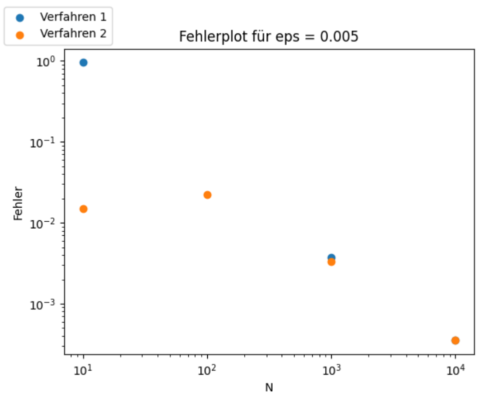
2.3 $\varepsilon = 0.005$





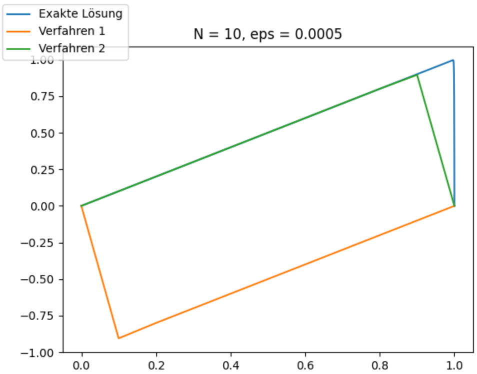


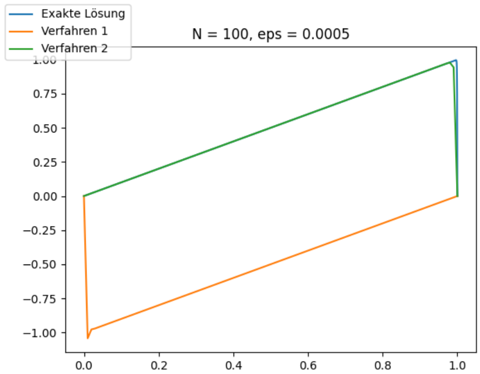


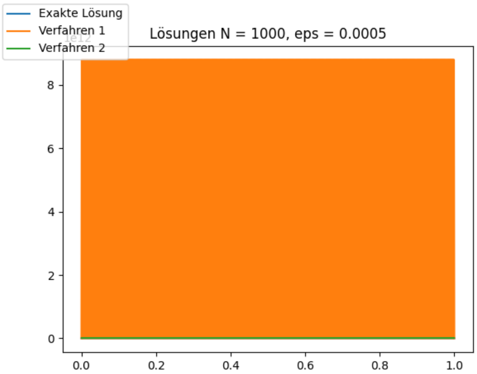


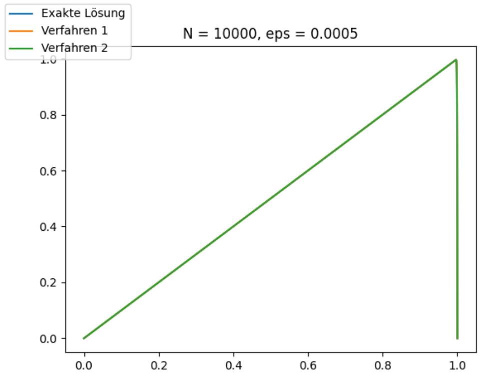
Verfahren 2 approximiert auch hier die exakte Lösung sehr gut. Verfahren 1 gibt erneut für $N = 10$ keine gute Näherung, der Fehler ist sehr groß, da die Werte, die man erhält, durchweg das falsche Vorzeichen haben. Für größere N konvergiert Verfahren 1 jedoch genauso wie Verfahren 2.

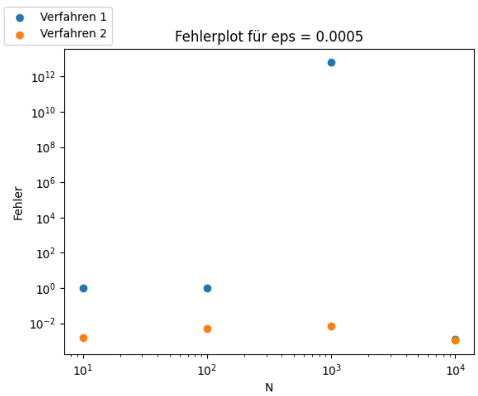
2.4 $\varepsilon = 0.0005$











Verfahren 2 weist wiederum gute Approximationseigenschaften auf. Verfahren 1 hingegen gibt für $N = 10$ und $N = 100$ wieder Lösungen mit falschem Vorzeichen, für $N = 1000$ tritt erneut ein sehr großer Fehler auf, der in der Interpretation der Ergebnisse erklärt wird. Erst für $N = 1000$ gleicht sich Verfahren 1 an Verfahren 2 und die exakte Lösung an.

3 Interpretation der Ergebnisse

3.1 Aufgabe 2

Im Vergleich von Verfahren 1 und Verfahren 2 fällt auf, dass die Kurve aus Verfahren 1 stets unterhalb und die Kurve aus Verfahren 2 stets oberhalb der exakten Lösung liegt. Weiterhin ist Verfahren 1 instabil, für kleine ε und nicht ausreichend große N ist das entstehende Gleichungssystem singulär oder die Lösung ist sogar "gespiegelt", d.h. sie sieht aus wie eine Kurve, die durch 180°-Drehung um $(0.5, 0)$ aus der exakten Lösung hervorgeht. Verfahren 2 konvergiert für jede Wahl von ε gegen die exakte Lösung.

Auffällig ist weiterhin, dass für (N, ε) mit N beliebig und $\varepsilon = \frac{1}{2N}$ das erste Verfahren nicht funktioniert. Dies liegt daran, dass die erzeugte Matrix dann von folgender Form ist:

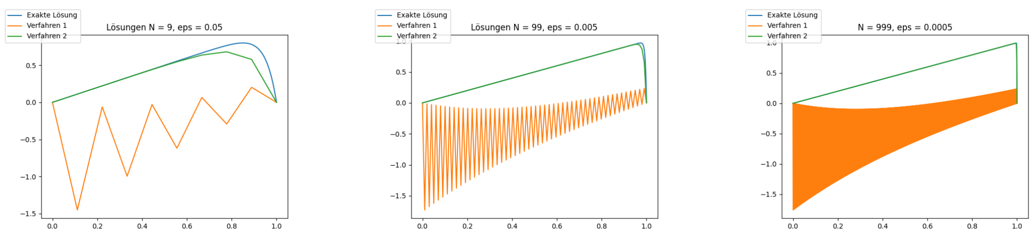
$$\frac{N}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \text{\Large 0} \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ \text{\Large 0} & & & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lemma 1. *Diese Matrix M_N ist singulär gdw. ihre Dimension ungerade ist, also wenn N gerade.*

Beweis. Nach der Entwicklungsformel können wir nach der ersten Spalte und dann nach der ersten Zeile entwickeln. Wir erhalten $det(M_N) = det(M_{N-2})$. Das $det(M_1) = 0$ und $det(M_2) = -1$ folgt die Aussage per Induktion.

□

Deshalb haben wir für die problematischen Werte auch die folgenden Experimente durchgeführt:

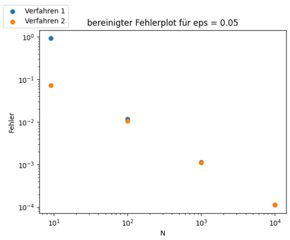


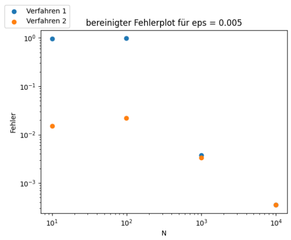
Hier konnten wir auch erkennen, wodurch das 'orange Viereck' bei $N = 1000$ und $\varepsilon = 0.0005$ entstanden ist. Bei diesem kritischen Wert oszilliert der Funktionswert ständig zwischen einem hohen und einem niedrigen Wert.

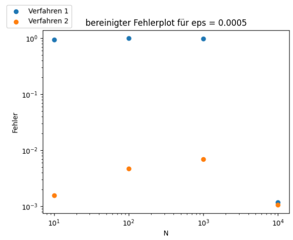
3.2 Aufgabe 3

In den log-log-plots ist die Fehlerkurve für große ε eine Gerade mit Steigung -1. Das heißt dass der Fehler linear mit zunehmenden N abnimmt und für $n \to \infty$ gegen 0 geht. Bei kleineren ε tritt diese Konvergenz erst ab $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ auf, vorher steigt der Fehler sogar beim stabileren Verfahren 2 an.

Für $N = \frac{1}{2\varepsilon}$ weist außerdem der Fehler von Verfahren 1 ausgeprägte Ausreißer auf. Deshalb haben wir auch hier noch einmal 'bereinigte' Plots erstellt, bei denen wir bei problematischen N stattdessen jeweils N-1 gewählt haben:







Selbstständigkeitserklärung

Wir erklären, dass wir die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt haben.

Leipzig, den 13. September 2023