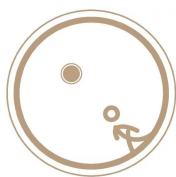


"商汤杯"不咕不孤决赛试题

主办方



北京大学学生算法协会



—·周行·—

北京邮电大学周行算法爱好者协会

赞助商



商汤科技

Problem A. 超级素数

- 2 s, 256 MB

小 P 是一个喜欢数学的男孩子。

一天，小 P 对于素数产生了浓厚的兴趣，于是他开始思考这样一个问题：

对于一个任意一位数字不为 0 的素数，如果它的任意一个后缀都是素数，则称其为**超级素数**。

例如，153 是一个超级素数，因为 3、53、153 都是素数；而 119 不是一个超级素数，因为 9 是一个合数。

给出正整数 n ，那么能否求出**不超过** n 的最大超级素数呢？

虽然小 P 喜欢数学，但数学似乎并不喜欢他，所以他并不会这个问题。请你帮助小 P 解决他的问题。若无解，输出 -1 。

输入格式

第一行一个整数 T ，代表数据组数。

接下来 T 行，每行一个整数 n ，含义如题面所示。

输出格式

对于每组数据，输出一行一个整数，代表答案。

样例

样例输入 #1:

```
3
10
154
14000
```

样例输出 #1:

```
7
153
13967
```

数据范围与约定

$$1 \leq n \leq 10^{12}$$

Problem B. 树论

- 4s, 512MB

小 C 不会博弈论，想让小 Y 教他。

小 Y 告诉小 C，有这样一个经典博弈问题：

现在有一棵 n 个点的树，其中 1 号点是这棵树的树根，树上的每个点上有若干棋子。会有两个人会在这棵树上玩游戏。他们会轮流进行如下操作：

当前进行操作的人可以选择树上有棋子的一个非叶节点 x ，然后将 x 上的一个棋子放到 x 的子树内任意一个不是 x 自己的节点上。

轮到某人时，若该玩家不能进行操作则判负。求先手是否有必胜策略。

这是一个经典 SG 函数练习题，所以小 Y 肯定不会问小 C 这么简单的问题。

正好小 J 在学数据结构，于是小 J 决定配合小 Y 使坏，要求小 C 支持两类对游戏中的树进行的操作：

1. 先给树上一条链的每个点加上一个棋子，然后更换树根，最后询问整棵树进行游戏的 SG 值。
2. 先在当前树根基础上，给树上一个子树中的每个点加上一个棋子，然后更换树根，最后询问整棵树进行游戏的 SG 值。

小 Y 钦定初始状态下，树上每个点上都恰好有一颗棋子，且树根为 1 号结点。

然而，这么一道题把小 C、小 Y 和小 J 都难住了，你能帮帮他们吗？

输入格式

第一行两个整数 n, q 分别表示树的点数和操作数。

接下来 $n - 1$ 行，每行两个正整数 u, v 描述树上的一条边所连接的两个点 u, v 。

接下来 q 行，每行描述了一个操作。格式形如以下两种中的一种：

1 $u\ v\ x$ ：先让树上 u 到 v 的链上的每个点上都加上一个棋子之后，再将当前的根调整为 x ，最后询问整棵树的 SG 值是多少。

2 $u\ x$ ：先让树上 u 号点的子树内所有点都加上一个棋子之后，再将当前的根调整为 x ，最后询问整棵树的 SG 值是多少。

请务必注意操作顺序。

输出格式

q 行，每行一个非负整数表示每次操作最后询问时整棵树进行游戏的 SG 值。

输入输出样例

样例输入 #1:

```
5 5
1 2
1 3
3 4
3 5
1 4 5 1
1 1 3 1
2 1 3
2 3 4
1 3 4 4
```

样例输出 #1:

```
2
1
1
2
3
```

样例输入 #2:

```
10 10
3 8
5 6
6 7
9 4
4 7
7 2
2 1
1 8
8 10
2 4 1
1 6 1 5
1 8 4 9
2 3 5
2 2 1
1 4 7 3
2 3 1
1 9 9 7
2 8 9
1 3 1 1
```

样例输出 #2:

```
5
7
0
2
2
3
5
5
0
1
```

数据范围及约定

$1 \leq n \leq 2 \times 10^5$, $0 \leq q \leq 2 \times 10^5$ 。

说明、提示与补充

关于 SG 值：在公平博弈中，SG 值是判断先手是否有必胜策略的利器。SG 值是描述博弈中的局面的一个值，当一个局面的 SG 值为 0 时，先手必败；反之先手必胜。对于一个局面，计算其 SG 值的一般方法是，计算出所有其能一步到达的局面的 SG 值集合的 mex。对于一个非负整数集合，其 mex 定义为最小的未在集合中出现过的自然数。

Problem C. 树上游戏

- 1 s, 256 MB

给定一棵 n 个节点的树，点从 1 到 n 编号，点有点权，边有边权，Alice 和 Bob 两人在做游戏。

棋子以某一个点 s 为起点，玩家移动该棋子，有以下两条规则：

1. 移动时不能经过已经走过的边
2. 能移动则必须移动，不能在可移动时停留在原地

由 Alice 开始，轮流移动棋子，最终的得分为经过的点权之和减去经过的边权之和。

Alice 想要最大化得分，Bob 想要最小化得分，假设两人都采取最优策略，那么最终得分是多少呢？

请你对于每个点为起点都输出一个答案。

输入格式

第一行，一个正整数 n 。

第二行， n 个整数 v_i ，第 i 个数代表第 i 个点的权值。

接下来 $n - 1$ 行，每行三个整数 x, y, w_i ， x, y 代表这条边的两个端点， w_i 代表这条边的权值。

输出格式

输出 n 行，每行一个整数 ans_i 代表第 i 个点出发时的答案。

样例

样例输入 #1:

```
5
2 2 -3 -2 -1
1 2 0
1 3 3
3 4 -2
3 5 -5
```

样例输出 #1:

```
4
2
1
-2
1
```

数据范围与约定

$$1 \leq n \leq 10^5, |v_i|, |w_i| \leq 10^9$$

Problem D. 子集

- 1 s, 256 MB

小 P 是一个热爱数学的男孩子。

一天，小 P 对于集合产生了浓厚的兴趣，于是他开始思考这样一个问题：

给定 L, R ，令 $S_{[L,R]}(x)$ 表示区间 $[L, R]$ 内 x 的倍数组成的集合，形式化的，我们有：

$$S_{[L,R]}(x) = \{d | L \leq d \leq R, x | d\}$$

定义一个集合的权值为这个集合中所有元素之和。那么，能否求出最小的 x ，使得 $S_{[L,R]}(x)$ 的所有非空子集的权值和为 K 呢？

虽然小 P 喜欢数学，但数学似乎并不喜欢他，所以他并不会这个问题。请你帮助小 P 解决他的问题。若无解，请输出 `No Solution`。

输入格式

第一行一个整数 T ，表示数据组数。

接下来 T 行，每行三个正整数 L, R, K ，含义如题面所示。

输出格式

对于每组数据，输出一行一个整数，表示答案。

样例

样例输入 #1:

```
4
25 37 25
10 38 28
53 112 82
343 1839 1373
```

样例输出 #1:

```
25
28
41
1373
```

数据范围与约定

$L, R \leq 10^{12}$, $T \leq 100$, $K \leq 10^{14}$

Problem E. 计算几何再入门

- 1 s, 128 MB

小 Z 获得了二维平面上 n 个互不重叠的点组成的凸多边形。

听说你已经学会了计算几何，小 Z 想问你如何划分这些点以使得两堆点组成的凸多边形面积和最大？
(每堆点至少应含一个点)

输入格式

第一行，一个正偶数 n ，表示点数。

接下来 n 行，第 i 行有两个整数 x, y ，表示第 i 个点的坐标为 (x, y) 。

输出格式

输出包括一个整数，为两个凸多边形的面积之和的最大值的两倍，可以证明，这一定是一个整数。

样例

样例输入 #1:

```
6
0 0
1 0
2 1
2 2
1 2
0 1
```

样例输出 #1:

```
6
```

样例解释 #1:

$A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$

数据范围与约定

$6 \leq n \leq 200$, $-10^5 \leq x_i, y_i \leq 10^5$ 。

本题中的凸多边形可能为一条线段。

Problem F. 长度

- 1 s, 128 MB

有个长度为 n 的数列，一台机器正在往上面填 0 或者 1。

请维护以下两种操作：

1. 从第 x 个位置开始一直填 0
2. 从第 x 个位置开始一直填 1

求最长连续 1 和最长连续 0 的长度。

新操作可能会覆盖旧操作。

输入格式

第一行一个整数 m ，表示机器记录的信息的数量。

第二行一个整数 n 。

接下来 m 行，每行第一个数字表示位置，第二个数表示从该位置开始变成的数字。

输出格式

一行两个整数，分别表示最长连续 1 和最长连续 0 的长度。

样例

样例输入 #1:

```
5
100
13 1
22 1
60 0
70 1
90 0
```

样例输出 #1:

```
47 11
```

数据范围与约定

$$1 \leq m \leq 10^5, 1 \leq n \leq 10^9$$

Problem G. 等比数列求和

- 5 s, 512 MB

输入三个整数 n, x, P , 你的任务是计算:

$$\sum_{i=0}^n (x^i \bmod P)$$

其中 P 是一个质数。

输入格式

一行三个整数 n, x, P 。

输出格式

输出一行一个整数, 表示答案。

样例

样例输入 #1:

```
3 3 998244353
```

样例输出 #1:

```
40
```

样例输入 #2:

```
10000000 3 998244353
```

样例输出 #2:

```
4994912999662950
```

数据范围与约定

$$n \leq 2 \times 10^9, 2 \leq x < P \leq 4 \times 10^9$$

输入保证 P 是质数, x 是 P 的一个原根, 即对于任意 $1 \leq i < j \leq P - 1$, 都有 $x^i \bmod P \neq x^j \bmod P$ 。

Problem H. 循环

- 1s, 128 MB

本题中所有的数使用十进制表示。

给定一个正整数 p , 以及 10 个非负整数 a_0, a_1, \dots, a_9 , 保证 $\gcd(p, 10) = 1$, 即 p 不被 2 和 5 中的任何一个整除。

容易证明, 对于每个 $i \in \mathbb{Z} \cap [1, p-1]$, $\frac{i}{p}$ 为纯循环小数。

我们定义一个纯循环小数 x ($0 < x < 1$) 的价值 $f(x)$ 如下: 考虑从小数点后开始的第一个最短循环节, 价值等于该最短循环节内所有数位的 a 值的乘积。例如, $0.122431224312243\dots$ 的价值等于 $a_1 a_2^2 a_3 a_4$ 。

你需要求出 $\sum_{i=1}^{p-1} f(\frac{i}{p})$ 。由于该值可能很大, 你只需要输出其对 998244353 取模后的结果。

输入格式

输入包含两行。

第一行一个正整数表示 p 。

第二行 10 个非负整数, 依次为 a_0, a_1, \dots, a_9 。

输出格式

输出一行一个非负整数, 表示答案对 998244353 取模后的结果。

样例

样例输入 #1:

```
3
2 7 1 8 2 8 1 8 2 8
```

样例输出 #1:

```
9
```

数据范围与约定

对于所有测试数据, 保证 $3 \leq p \leq 10^6$ 且 p 不被 2 和 5 中的任何一个整除,
 $\forall 0 \leq i \leq 9, 0 \leq a_i \leq 998244352$

Problem I. 随机数组

- 4 s, 512 MB

给你一个长度为 n 的数组，每个位置的初始值均为 0，有以下两种操作：

1. 给区间 $[L, R]$ 加上一个数 v
2. 查询下标为 x 的数值

然而，事情总是没有这么美好；

这个数组由于硬件设备的故障，出了一点问题。

具体来说，问题就是下标无法正确地访问了。

仅在你修改时，你访问数组下标 i 时，实际上硬件会等概率随机访问一个在 $[L_i, R_i]$ 的下标。

这就造成每个下标的数值都是随机的了。

因此，查询时你需要正确返回下标 x 处的值的数学期望。

答案需要对 998244353 取模。

输入格式

第一行 n, m ， m 代表操作次数。

接下来 n 行，每行两个整数代表 L_i, R_i 。

接下来 m 行，每行一种操作，`1 L R v` 或者是 `2 x`。

输出格式

对于每个询问，输出一行一个整数代表你的答案，对 998244353 取模。

样例

样例输入 #1:

```
5 5
1 2
3 5
2 4
1 5
3 4
2 1
1 2 3 2
2 3
1 3 5 3
2 3
```

样例输出 #1:

```
0
332748119
632221428
```

数据范围与约定

$$1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq L_i \leq R_i \leq 10^5, 1 \leq v < 998244353$$

Problem J. 抱团取暖

- 1 s, 256 MB

现在有 n 只北极熊坐成了一个圈，为了取暖，他们决定玩一个叫抱团取暖的游戏，但为了公平，他们制定了一些规则：

游戏有若干局，第一局开始时，每只熊都会闭上眼睛并有 p 的概率选择左边相邻的熊，否则选择右边相邻的熊，即概率为 $1 - p$ ，当所有熊做完决策后，它们将睁眼并判断是否可以抱团。当且仅当两只相邻的熊选择了彼此时，他们会抱团，且不再分开，也不继续参与游戏。没有抱团的熊将会继续参加下一局。

第二局及接下来若干局中，流程与第一局相同，但请注意不同的是：当某只熊的左边或右边相邻的熊已经抱团的时候，它只会选择另一只未抱团的熊；当且仅当某只熊左边和右边熊都抱团时，它不可能抱团，因而会感到孤独。当局面中不存在可能抱团的熊时，游戏结束，并把此时局面中感到孤独的熊的个数记为该局面的孤独值。

可以证明游戏结束时，局面的期望孤独值是一个有理数，求它对 998244353 取模后的结果。

输入格式

共一行三个整数，分别表示 n, A, B ，其中题目描述中的 $p = \frac{A}{B}$

输出格式

共一行一个整数，表示答案

样例

样例输入 #1:

```
1 1 2
```

样例输出 #1:

```
1
```

样例输入 #2:

```
2 1 2
```

样例输出 #2:

```
0
```

样例输入 #3:

```
5 1 2
```

样例输出 #3:

```
1
```

样例输入 #4:

```
18 1 2
```

样例输出 #4:

```
287492937
```

样例输入 #5:

```
300 1334 8777
```

样例输出 #5:

```
547477647
```

数据范围及约定

$1 \leq n \leq 10^5, 0 < A < B < 998244353$ 。