Содержание

Раздел I: Теоремы

1 Законы де Моргана

Теорема: Тождества де Моргана

Для произвольного семейства множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и множества Y верны тождества:

- Дополнение объединения есть пересечение дополнений:

$$Y \setminus \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} (Y \setminus X_\alpha)$$

- Дополнение пересечения есть объединение дополнений:

$$Y \setminus \bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} (Y \setminus X_\alpha)$$

2 Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности

Теорема: О единственности предела

Если числовая последовательность $\{x_n\}$ сходится, то её предел единственен.

Теорема: Об ограниченности

Всякая сходящаяся числовая последовательность является ограниченной.
То есть, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, то $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \le M$.

3 Предельный переход в неравенствах для последовательностей

Теорема: О предельном переходе в неравенствах

Пусть даны две сходящиеся последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, причем $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Если существует номер N такой, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $a_n \le b_n$, то $A \le B$.

4 Неравенство Коши-Буняковского для наборов вещественных чисел

Теорема: Неравенство Коши-Буняковского

Для любых конечных наборов вещественных чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ справедливо:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда наборы пропорциональны (линейно зависимы).

5 Аксиома Архимеда. Плотность множества рациональных чисел в $\mathbb{R}$

Утверждение: Фундаментальные свойства $\mathbb{R}$

Аксиома Архимеда: Для любого действительного числа $x \in \mathbb{R}$ существует натуральное число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n > x$. (Эквивалентная формулировка: для любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{n} < \varepsilon$).

Плотность $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$: Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всюду плотно на числовой прямой $\mathbb{R}$. Это означает, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$ таких, что $a < b$, существует $q \in \mathbb{Q}$ такое, что $a < q < b$.

6 Теорема о двух городовых

Теорема: О двух городовых (о сжатой переменной)

Пусть для последовательностей $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ начиная с некоторого номера N выполняется $b_n \le a_n \le c_n$. Если $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, то последовательность $\{a_n\}$ также сходится и $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

7 Бесконечно малая последовательность

Определение: Бесконечно малая

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Утверждение: Связь с пределом

Последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a тогда и только тогда, когда $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

Утверждение: Свойства

- Сумма конечного числа бесконечно малых — бесконечно малая.
- Произведение бесконечно малой на ограниченную последовательность — бесконечно малая.

8 Арифметические свойства пределов отображений. Формулировка для $\overline{\mathbb{R}}$

Теорема: Арифметические свойства пределов

Пусть существуют конечные пределы $\lim_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Тогда:

- $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
- $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ (при условии $B \neq 0$)

Определение: Операции в $\overline{\mathbb{R}}$

Арифметические операции частично определены для элементов $\pm\infty$ (например, $A + (+\infty) = +\infty$ при $A > -\infty$; $A \cdot (+\infty) = +\infty$ при $A > 0$; $\frac{A}{\infty} = 0$ для $A \in \mathbb{R}$).
Неопределенности: $\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 1^{\infty},\ \infty^0,\ 0^0$.

9 Неравенство Бернулли

Теорема: Неравенство Бернулли

Для любого $x \geq -1$ и любого натурального $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Равенство достигается при $n = 1$ или $x = 0$.

10 Непрерывность скалярного произведения, лемма о покоординатной сходимости

Лемма: О покоординатной сходимости

Последовательность векторов $x^{(k)} \in \mathbb{R}^m$ сходится к вектору $a \in \mathbb{R}^m$ тогда и только тогда, когда она сходится покоординатно: $x_i^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} a_i$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Утверждение: Непрерывность скалярного произведения

Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$ в $\mathbb{R}^m$, то их скалярное произведение сходится: $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.

11 Неравенство Коши-Буняковского для скалярного произведения

Теорема: Коши-Буняковский (векторная форма)

В евклидовом пространстве (или любом линейном пространстве со скалярным произведением) для любых векторов x, y верно:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

где $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ — норма, порожденная этим скалярным произведением.

12 Теорема о свойствах открытых множеств

Теорема: Свойства открытых множеств

- Объединение любого (в т.ч. бесконечного) семейства открытых множеств является открытым множеством.
- Пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством.
- Пустое множество $\emptyset$ и всё пространство X являются открытыми.

13 Теорема о связи открытых и замкнутых множеств, свойства замкнутых множеств

Теорема: Связь открытых и замкнутых

Множество F замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $X \setminus F$ открыто.

Утверждение: Свойства замкнутых множеств

- Пересечение любого (в т.ч. бесконечного) семейства замкнутых множеств замкнуто.
- Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.
- $\emptyset$ и X замкнуты.

14 Теорема Кантора о стягивающихся отрезках

Теорема: Принцип вложенных отрезков

Пусть даны вложенные замкнутые отрезки $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots$, и их длины стремятся к нулю: $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Тогда существует единственная точка $c \in \mathbb{R}$, принадлежащая всем отрезкам сразу: $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{c\}$.

15 Десятичная запись числа

Теорема: О десятичном представлении

Любое действительное число x имеет представление в виде бесконечной десятичной дроби. Это представление единственно, если исключить дроби с периодом 9 (договорившись, например, заменять $0.a_1a_2\dots a_k999\dots$ на $0.a_1a_2\dots(a_k+1)000\dots$).

16 Теорема о существовании супремума

Теорема: Существование точной верхней грани

Всякое непустое множество действительных чисел, ограниченное сверху, имеет в $\mathbb{R}$ точную верхнюю грань (супремум).

17 Лемма о свойствах супремума

Лемма: Критерий супремума

Число M является супремумом множества A ($M = \sup A$) тогда и только тогда, когда:

1. $\forall a \in A : a \leq M$ (M — одна из верхних граней).
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists a_\varepsilon \in A : a_\varepsilon > M - \varepsilon$ (любое число меньше M уже не является верхней гранью).

18 Теорема о пределе монотонной последовательности

Теорема: Теорема Вейерштрасса

Всякая монотонная и ограниченная последовательность имеет конечный предел.

- Если $\{x_n\}$ не убывает и ограничена сверху, то $\lim x_n = \sup\{x_n\}$.
- Если $\{x_n\}$ не возрастает и ограничена снизу, то $\lim x_n = \inf\{x_n\}$.

19 Определение числа e, соответствующий замечательный предел

Определение: Число e

Число e определяется как предел монотонно возрастающей и ограниченной сверху последовательности:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828\dots$$

Утверждение: Второй замечательный предел

Для функций справедлив предел: $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

20 Лемма о сходимости к нулю «быстро убывающей» последовательности

Лемма: О скорости сходимости

Если для последовательности $\{a_n\}$ существуют $q \in (0, 1)$ и номер N такие, что для всех $n > N$ выполняется $|a_{n+1}| \leq q|a_n|$, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (последовательность стремится к нулю со скоростью геометрической прогрессии).

21 Теорема об открытых и замкнутых множествах в подпространстве

Теорема: Индуцированная топология

Пусть $Y \subset X$ — подпространство топологического (или метрического) пространства X.

- Множество $A \subset Y$ открыто в $Y \iff A = Y \cap G$, где G — некоторое открытое множество в X.
- Множество $F \subset Y$ замкнуто в $Y \iff F = Y \cap \Phi$, где Φ — некоторое замкнутое множество в X.

22 Теорема о компактности в пространстве и в подпространстве

Теорема: Инвариантность компактности

Множество $K \subset Y \subset X$ компактно в подпространстве Y тогда и только тогда, когда оно компактно во всём пространстве X. (Компактность — внутреннее свойство множества, не зависящее от объемлющего пространства).

23 Эквивалентность определений предела: топологического и на яз. окрестностей

Теорема: Эквивалентность определений

Определения предела $\lim_{x\to a} f(x) = L$ эквивалентны:

1. **Метрическое («эпсилон-дельта»):** $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : 0 < \rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), L) < \varepsilon$.
2. **Топологическое:** Для любой окрестности $V(L)$ точки L существует проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ точки a, такая что образ этой окрестности лежит в $V(L)$: $f(\dot{U}(a)) \subset V(L)$.

24 Эквивалентность определений предела Гейне и Коши

Теорема: Гейне $\iff$ Коши

Для функции f следующие определения предела в точке a эквивалентны:

- **По Коши ($\varepsilon - \delta$):** (см. пункт 23.1 выше).
- **По Гейне (на языке последовательностей):** для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$, сходящейся к a ($x_n \neq a$), соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к L.

25 Простейшие свойства компактных множеств

Теорема: Свойства компактов

- Компактное подмножество любого метрического пространства замкнуто и ограничено.
- Любое замкнутое подмножество компактного множества само является компактом.
- Непрерывный образ компактного множества есть компакт (Теорема Вейерштрасса о достижении экстремумов).

26 Лемма о вложенных параллелепипедах

Лемма: О вложенных параллелепипедах

Любая последовательность вложенных замкнутых параллелепипедов $P_1 \supseteq P_2 \supseteq \dots$ в пространстве $\mathbb{R}^m$, диаметры (максимальные размеры сторон) которых стремятся к нулю, имеет в пересечении ровно одну точку: $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = \{x_0\}$.

27 Компактность замкнутого параллелепипеда в $\mathbb{R}^m$

Теорема: Компактность параллелепипеда

Любой замкнутый ограниченный прямоугольный параллелепипед $P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m]$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ является компактным множеством.

28 Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^m$

Теорема: Теорема Гейне-Бореля

Подмножество $K \subset \mathbb{R}^m$ является компактным тогда и только тогда, когда оно одновременно замкнуто и ограничено.

29 Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса

Теорема: Больцано-Вейерштрасс

Из любой ограниченной последовательности точек в пространстве $\mathbb{R}^m$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

30 Фундаментальные последовательности и их свойства

Определение: Фундаментальная последовательность

Последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве называется *фундаментальной* (или последовательностью Коши), если её элементы неограниченно сближаются друг с другом:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N \implies \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Утверждение: Свойства

- Всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной.
- Всякая фундаментальная последовательность является ограниченной.

31 Критерий Больцано-Коши для последовательностей и отображений

Теорема: Критерий Коши

- **Для последовательностей:** Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.
- **Для функций:** Конечный предел $\lim_{x \to a} f(x)$ существует $\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, что для любых x', x'' из проколотой δ-окрестности точки a выполняется $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Раздел II: Определения и формулировки

32 Упорядоченная пара

Определение: Упорядоченная пара

Упорядоченная пара (a, b) — это объект, состоящий из двух элементов a и b, в котором важен порядок их следования. Две упорядоченные пары (a, b) и (c, d) считаются равными тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

33 Декартово произведение

Определение: Декартово произведение

Декартовым произведением двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех возможных упорядоченных пар, где первый элемент принадлежит A, а второй — B:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

34 Последовательность, семейство

Определение: Семейство и последовательность

Семейство элементов множества X, индексированное множеством I, — это отображение $f : I \to X$. Обозначается $\{x_i\}_{i \in I}$, где $x_i = f(i)$. **Последовательность** — это частный случай семейства, где множеством индексов являются натуральные числа $\mathbb{N}$. Это отображение $f : \mathbb{N} \to X$, записывается как $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или просто (x_n).

35 Предел последовательности (эпсилон-дельта определение)

Определение: Предел последовательности

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

36 Окрестность точки, проколотая окрестность

Определение: Окрестности в $\mathbb{R}$

Окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется любой интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (или любое множество, содержащее такой интервал). **Проколотая окрестность** точки a — это окрестность, из которой удалена сама точка a: $\dot{U}(a) = U(a) \setminus \{a\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$.

37 Предел последовательности (определение на языке окрестностей)

Определение: Предел (топологический)

Последовательность $\{x_n\}$ стремится к пределу a, если для любой окрестности $U(a)$ точки a существует номер N, начиная с которого все члены последовательности лежат в этой окрестности (т.е. $x_n \in U(a)$ для всех $n > N$).

38 Метрика, метрическое пространство, подпространство

Определение: Метрика и пространство

Метрика на множестве X — это функция расстояния $\rho : X \times X \to [0, +\infty)$, удовлетворяющая трём аксиомам: 1) Тождество: $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$; 2) Симметрия: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$; 3) Неравенство треугольника: $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$. Пара (X, ρ) называется **метрическим пространством**. **Подпространство** — это подмножество $Y \subset X$, рассматриваемое как метрическое пространство с той же метрикой ρ, ограниченной на элементы Y.

39 Шар, замкнутый шар, окрестность точки в метрическом пространстве

Определение: Шары и окрестности

В метрическом пространстве (X, ρ):

- **Открытый шар** радиуса $r > 0$ с центром в a: $B_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) < r\}$.
- **Замкнутый шар**: $\bar{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) \leq r\}$.
- **Окрестность точки** a — любое подмножество X, которое содержит некоторый открытый шар с центром в a.

40 Ограниченное множество, ограниченная последовательность

Определение: Ограниченность

Множество M в метрическом пространстве называется **ограниченным**, если оно целиком содержится в некотором шаре конечного радиуса. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если множество её значений является ограниченным.

41 Аксиомы вещественных чисел

Определение: Система аксиом $\mathbb{R}$

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ определяется аксиоматически как полное упорядоченное поле. Аксиомы делятся на три группы: I. Аксиомы поля (алгебраические свойства операций сложения и умножения). II. Аксиомы порядка (свойства отношения $\leq$). III. Аксиома непрерывности (полноты), утверждающая отсутствие «дыр» в числовой прямой (например, в форме существования супремума).

42 Аксиома Кантора, аксиома Архимеда

Определение: Кантор и Архимед

Аксиома Кантора (принцип вложенных отрезков): Любая последовательность вложенных замкнутых отрезков $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots$ имеет непустое пересечение. **Аксиома Архимеда:** Для любого действительного числа x найдется натуральное число n, большее x ($n > x$).

43 Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем

Определение: Расширенная числовая прямая

Пополненное множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Порядок: для любого $x \in \mathbb{R}$ полагают $-\infty < x < +\infty$. Операции вводятся частично: например, $x + (+\infty) = +\infty$ (при $x \neq -\infty$), $x \cdot (-\infty) = -\infty$ (при $x > 0$). Выражения вида $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ остаются неопределенными.

44 Линейное пространство

Определение: Линейное пространство

Линейное (векторное) пространство над полем $\mathbb{R}$ — это множество V элементов (векторов), для которых определены операции сложения $x + y \in V$ и умножения на число $\lambda x \in V$, удовлетворяющие 8 аксиомам (коммутативность и ассоциативность сложения, существование нулевого и противоположного векторов, ассоциативность умножения на скаляр, унитарность $1 \cdot x = x$, и два закона дистрибутивности).

45 Норма, нормированное пространство, примеры

Определение: Норма

Норма на линейном пространстве V — это числовая функция $\|\cdot\| : V \to [0, +\infty)$, обладающая свойствами: 1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (невырожденность); 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (однородность); 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника). Пространство с заданной нормой называется нормированным. Примеры в $\mathbb{R}^n$: евклидова $\|x\|_2 =$

$\sqrt{\sum x_i^2}$, манхэттенская $\|x\|_1 = \sum |x_i|$, чебышёвская $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$.

46 Ограниченное множество в $\mathbb{R}$, верхняя, нижняя границы, максимум

Определение: Грани множества

Множество $A \subset \mathbb{R}$ **ограничено сверху**, если существует число M (верхняя грань) такое, что $\forall x \in A, x \leq M$. **Ограничено снизу**, если существует число m (нижняя грань) такое, что $\forall x \in A, x \geq m$. **Максимум** множества ($\max A$) — это его верхняя грань, которая принадлежит самому множеству.

47 Скалярное произведение

Определение: Скалярное произведение

Скалярным произведением в вещественном линейном пространстве V называется функция $\langle x, y \rangle \to \mathbb{R}$, которая: 1) Симметрична: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$; 2) Линейна по каждому аргументу: $\langle \lambda x_1 + x_2, y \rangle = \lambda \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$; 3) Положительно определена: $\langle x, x \rangle \geq 0$, причем $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

48 Параллелепипед в $\mathbb{R}^m$

Определение: Параллелепипед

Замкнутым **прямоугольным параллелепипедом** в пространстве $\mathbb{R}^m$ называется множество, являющееся декартовым произведением m отрезков:

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_m, b_m] = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid a_i \leq x_i \leq b_i \ \forall i\}$$

49 Образ и прообраз множества при отображении

Определение: Образ и прообраз

Пусть задано отображение $f : X \to Y$. **Образом** множества $A \subset X$ называется множество $f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$. **Прообразом** множества $B \subset Y$ называется множество $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

50 Инъекция, сюръекция, биекция

Определение: Типы отображений

Отображение $f : X \to Y$ называется:

- **Инъекцией** (вложением), если оно переводит разные элементы в разные ($x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$).

- **Сюръекцией** (отображением «на»), если каждый элемент Y является образом хотя бы одного элемента X ($f(X) = Y$).
- **Биекцией** (взаимно однозначным соответствием), если оно одновременно инъективно и сюръективно.

51 Векторнозначная функция, ее координатные функции

Определение: Вектор-функция

Векторнозначная функция — это отображение $f : X \to \mathbb{R}^m$, сопоставляющее элементу $x \in X$ вектор $f(x) = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Функции $f_i : X \to \mathbb{R}$, определенные как $f_i(x) = y_i$ (где y_i — i-я компонента вектора $f(x)$), называются **координатными функциями** отображения f.

52 График отображения

Определение: График

Графиком отображения $f : X \to Y$ называется подмножество декартова произведения $X \times Y$, состоящее из всех пар вида $(x, f(x))$:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

53 Композиция, сужение и продолжение отображений

Определение: Операции над отображениями

Композиция отображений $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — это отображение $g \circ f : X \to Z$, действующее по правилу $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. **Сужение** отображения $f : X \to Y$ на подмножество $A \subset X$ — это отображение $f|_A : A \to Y$, совпадающее с f на элементах A. **Продолжение** отображения f с множества A на большее множество $X \supset A$ — это любое отображение $F : X \to Y$, такое что $F|_A = f$.

54 Последовательность, стремящаяся к бесконечности

Определение: Бесконечный предел

Последовательность $\{x_n\}$ **стремится к** $+\infty$, если для любого $M > 0$ существует номер N, начиная с которого все элементы $x_n > M$. Стремится к ∞ (без знака), если $|x_n| \to +\infty$ (т.е. $\forall M > 0 \, \exists N : \forall n > N \implies |x_n| > M$).

55 Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность

Определение: Внутренние точки и открытость

Точка $x \in A$ называется **внутренней** точкой множества A, если она содержится в A вместе с некоторой своей окрестностью $U(x) \subset A$. Множество называется **открытым**, если все его точки являются внутренними. **Внутренность** множества ($\operatorname{int} A$) — это множество всех его внутренних точек.

56 Предельная точка множества

Определение: Предельная точка

Точка x называется **предельной точкой** множества A, если в любой окрестности точки x содержится бесконечно много точек множества A (или, эквивалентно, хотя бы одна точка из A, отличная от самой x).

57 Замкнутое множество, замыкание, граница

Определение: Замкнутость и граница

Множество F называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки. **Замыкание** множества ($\bar{A}$) — это объединение самого множества A и всех его предельных точек. **Граница** множества (∂A) — это множество точек, в любой окрестности которых есть как точки из A, так и точки не из A ($\partial A = \bar{A} \setminus \operatorname{int} A$).

58 Изолированная точка, граничная точка

Определение: Особые точки

Изолированная точка множества A — это такая точка $x \in A$, у которой есть окрестность, не содержащая других точек из A, кроме самой x. **Граничная точка** — любая точка, принадлежащая границе множества ∂A.

59 Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

Определение: Точные грани

Верхняя грань множества $A \subset \mathbb{R}$ — число M такое, что $\forall x \in A, x \leq M$. **Супремум** ($\sup A$) — наименьшая из всех верхних граней. **Инфимум** ($\inf A$) — наибольшая из всех нижних граней.

60 Техническое описание супремума

Определение: Критерий супремума

Число S является супремумом множества E ($S = \sup E$) тогда и только тогда, когда выполнены два условия: 1) S — верхняя грань E ($\forall x \in E : x \leq S$); 2) S — наименьшая верхняя грань, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_0 \in E$, который больше, чем $S - \varepsilon$ ($x_0 > S - \varepsilon$).

61 Топологическое пространство, метризуемая топология

Определение: Топология

Топологическое пространство — это пара (X, τ), где τ — семейство подмножеств X (называемых открытыми), которое содержит $\emptyset$ и X, и замкнуто относительно произвольных объединений и конечных пересечений. Топология называется **метризуемой**, если её можно породить некоторой метрикой на X (т.е. открытые множества в топологии совпадают с открытыми множествами, порожденными метрикой).

62 Компактное множество, секвенциальная компактность

Определение: Компактность

Множество K называется **компактным** (в смысле топологии), если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Множество называется **секвенциально компактным**, если любая последовательность его элементов содержит сходящуюся подпоследовательность, предел которой также принадлежит этому множеству.

63 Определения предела отображения (4 шт)

Определение: Варианты определения предела

Четыре эквивалентных определения того, что $\lim_{x\to a} f(x) = A$:

По Коши ($\varepsilon - \delta$): Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < \rho_X(x, a) < \delta$, выполняется неравенство $\rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$.

По Гейне: Для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a (при условии $x_n \neq a$), соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к A.

На языке окрестностей: Для любой окрестности $V(A)$ точки A существует проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ точки a, образ которой целиком содержится в $V(A)$: $f(\dot{U}(a)) \subset V(A)$.

Критерий Коши: Функция имеет конечный предел в точке a тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $\dot{U}(a)$, такая что для любых точек $x', x'' \in \dot{U}(a)$ выполняется $\rho_Y(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$.

64 Фундаментальная последовательность

Определение: Фундаментальность

Последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве называется *фундаментальной* (или последовательностью Коши), если её элементы неограниченно сближаются друг с другом с ростом индексов:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N \implies \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

65 Полное метрическое пространство

Определение: Полное пространство

Метрическое пространство (X, ρ) называется **полным**, если любая фундаментальная последовательность в нём имеет предел, принадлежащий этому пространству. (Пример: пространство $\mathbb{R}$ с обычной метрикой — полное, а пространство рациональных чисел $\mathbb{Q}$ — нет).