1강. 행렬과 행렬식

— Index —
1. 행렬
(1) 용어정리
(2) 행렬의 연산
2. 연립일차방정식
(1) 행렬의 표현
(2) 가우스 조던 소거법
(3) 역행렬 이용
3. 행렬식
(1) 행렬식이란?
(2) 역행렬
(3) 크래머 공식

1. 행렬

(1) 용어정리

성분 := 행렬 안에 배열된 구성원
(=항=원소)

행 := 행렬의 가로줄

열 := 행렬의 세로줄

$m \times n$ **행렬** := m개의 행과 n개의 열로 이루어진 행렬

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1행 \\ \leftarrow 2행 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \\ 열 \end{array}$$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$로 표현가능

$(a_{ij})_{m\times n}$ = a_{ij}의 성분으로 찬 m행n열의 행렬

— Index —
1. 행렬
(1) 용어정리
(2) 행렬의 연산
2. 연립일차방정식
(1) 행렬의 표현
(2) 가우스 조던 소거법
(3) 역행렬 이용
3. 행렬식
(1) 행렬식이란?
(2) 역행렬
(3) 크래머 공식

주대각선 := 행렬의 왼쪽 위에서 오른쪽 아래를 가르는 선

주대각선

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

* 대각행렬 : 영행렬에 대각선만 값이 채워진것

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

대각성분 := 주대각선에 걸치는, 행과 열의 지표수가 같은 성분 → $(i.j)$성분

영행렬 := 모든 성분이 0인 행렬 표기도 O

전치행렬 := (a_{ij}) 에 대하여 (a_{ji})

a_{23} 전치 a_{32}

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

대칭행렬 := $A = A^T$ 인 A

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 전치해도 같은것

정사각행렬 := 행, 열의 개수가 같은 행렬

단위행렬 := 모든 대각성분이 1이고, 그 외의 성분은 0인 정사각행렬

I_n으로 표기

I_2이면 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

I_3이면 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

— Index —
1. 행렬
(1) 용어정리
(2) 행렬의 연산
2. 연립일차방정식
(1) 행렬의 표현
(2) 가우스 조던 소거법
(3) 역행렬 이용
3. 행렬식
(1) 행렬식이란?
(2) 역행렬
(3) 크래머 공식

(2) 행렬의 연산

$m \times n$ 행렬 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ 에 대해

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 일때

① 덧셈과 뺄셈

$A \pm B=(a_{ij} \pm b_{ij})$

$A+B=\begin{pmatrix}2&2\\3&5\end{pmatrix}$ $A-B=\begin{pmatrix}0&-2\\-3&-3\end{pmatrix}$

② 상수배 (스칼라배)

상수 c 에 대해 $cA=(ca_{ij})$ $2A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

— Index —
1. 행렬
(1) 용어정리
(2) 행렬의 연산
2. 연립일차방정식
(1) 행렬의 표현
(2) 가우스 조던 소거법
(3) 역행렬 이용
3. 행렬식
(1) 행렬식이란?
(2) 역행렬
(3) 크래머 공식

A의 열과 B의 행크기가 같아야 곱셈이가능

$a_{ij} \times b_{jk} = c_{ik}$ 행렬이 된다.

$m \times n$ 행렬 $A=(a_{ij})$ 와 $n \times r$ 행렬 $B=(b_{jk})$ 에 대해

③ 곱셈

$AB=(c_{ik})$: $m \times r$ 행렬

단, $c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$

※ 행렬의 곱셈은 교환법칙이 성립되지 않는다.

덧셈 : 교환, 결합법칙 성립

곱셈 : 교환X 결합O

$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$ 이라고 할때

$A \cdot B=\begin{pmatrix}1+0+5 & 2+0+6\\0+3+0 & 0+4+0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6&8\\3&4\end{pmatrix}$ 2x2행렬이 됨

$f(x,y)=(ax+by, cx+dy)$

$g(x,y)=(px+qy, rx+sy)$

— Index —
1. 행렬
(1) 용어정리
(2) 행렬의 연산
2. 연립일차방정식
(1) 행렬의 표현
(2) 가우스 조던 소거법
(3) 역행렬 이용
3. 행렬식
(1) 행렬식이란?
(2) 역행렬
(3) 크래머 공식

2. 연립일차방정식

$f \circ g = (apx+aqy+brx+bsy,\ cpx+cqy+drx+dsy)$

$=((ap+br)x+(aq+bs)y,\ (cp+dr)x+(cq+ds)y)$

(1) 행렬의 표현

예를 들어, $\begin{cases}x+2y=5\\2x+3y=8\end{cases}$ 를

$F=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $G=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$

① $\begin{pmatrix}1&2&5\\2&3&8\end{pmatrix}$ 표현 ⇒ 가우스 조던 소거법

첨가행렬

$\Rightarrow F \cdot G=\begin{pmatrix}ap+br & aq+bs\\cp+dr & cq+ds\end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$ 표현 ⇒ 역행렬 이용

계수행렬 상수행렬

— Index —
1. 행렬
(1) 용어정리
(2) 행렬의 연산
2. 연립일차방정식
(1) 행렬의 표현
(2) 가우스 조던 소거법
(3) 역행렬 이용
3. 행렬식
(1) 행렬식이란?
(2) 역행렬
(3) 크래머 공식

(2) 가우스 조던 소거법

다음 세 가지의 기본 행 연산을 통해 연립일차방정식의 첨가행렬을 기약 행 사다리꼴로 변환하여 해를 구한다.

1) 한 행을 상수배한다.
2) 한 행을 상수배하여 다른 행에 더한다.
3) 두 행을 맞바꾼다.

가우스 조건 소거법은
간단하게 바꾼다
고유의 결과값(해)를 변형시키지않는다

ex)

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \times 2$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad 2 \ 4 \ 10$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times -1$$

행 사다리꼴을 만드는것 => 가우스 소거법

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

→ 기약행 사다리꼴 => 가우스 조던 소거법

연립 일차방식으로 변환

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

<가우스 조던 소거법>
1이 포함된 열에서 1을 제외한 값들을 0으로 맞추는 것

<행사다리꼴>

— Index —
1. 행렬
(1) 용어정리
(2) 행렬의 연산
2. 연립일차방정식
(1) 행렬의 표현
(2) 가우스 조던 소거법
(3) 역행렬 이용
3. 행렬식
(1) 행렬식이란?
(2) 역행렬
(3) 크래머 공식

(3) 역행렬 이용

연립일차방정식 $AX=B$ 에서 A의 역행렬 A^{-1} 가 존재하면, $X=A^{-1}B$ 이다.

예를 들어,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

— Index —
1. 행렬
(1) 용어정리
(2) 행렬의 연산
2. 연립일차방정식
(1) 행렬의 표현
(2) 가우스 조던 소거법
(3) 역행렬 이용
3. 행렬식
(1) 행렬식이란?
(2) 역행렬
(3) 크래머 공식

3. 행렬식

유클리드 기저 설정에도 사용됨.

(1) 행렬식이란?

정사각행렬 A를 하나의 수로써 대응시키는 특별한 함수. $\det A = |A|$ (determinant)

이때, A 가

1) 0×0 ⇨ $\det(\ )=0$
2) 1×1 ⇨ $\det(a)=a$ → 하나의 성분만 존재
3) 2×2 ⇨ $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ ex)

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix}$ ⇒ $\det A = |A|$
$= 1\times 4 - 2\times 3 = 4-6=-2$

4) 3×3 ⇨

M_{ij} : i행 j열을 제외한 행렬식 (Minor Matrix)

+ - + 가 반복되어 계산

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$
$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

5) 4×4 ⇨

$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - a_{14}M_{14}$$

ex)
$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ 이라고 할때

이 행렬의 경우 3열로 계산하는 것이 가장 간편!

① 1행을 기준으로 계산할 경우
(다른 행과 열을 기준으로 해도 결과는 같다.

$\det A = 1\times\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0\end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2\end{vmatrix}$
$= 1\times(1\times 0 - 2\times 0) - 2\times(0\times 0 - 1\times 0) + 3\times(0\times 2 - 1\times 1)$
$= -3$

② 3열로 계산할 경우
$\det A = 3\times M - 0\times M + 0\times M$ 이므로
$= 3\times M$ 만 계산하면 됨

*사루스 법칙(전개)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\end{matrix}$$

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$
$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

간편하지만 행렬식을 이용하자

(2) 역행렬

행렬식이 0이면 역행렬이 존재하지 않는다. 즉, 행렬식이 0이 아닌 정사각행렬 A 의 역행렬 A^{-1} 은

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots \\ C_{12} & C_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

(단, $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$)

ex. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix} \qquad 4 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 4\cdot5\cdot9 - 4\cdot6\cdot8 - 4\cdot5\cdot9 + 5\cdot6\cdot7 + 6\cdot4\cdot8 - 6\cdot5\cdot7$$

$$= 0$$

Proof)

A에 역행렬을 곱하면 단위행렬이 나온다.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}}_{adj A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix}}_{\det A \cdot I}$$

$A \cdot adj A = \det A \cdot I$

(수반행렬)

$\det A \neq 0$ 이라면 $A \cdot \frac{adj A}{\det A} = I$

A의 역행렬이다

그렇다면 $A \cdot \frac{adj A}{\det A} = I$ 의 교환법칙이 성립할까?

$\boxed{A \cdot \frac{adj A}{\det A} = I \text{ 의 교환법칙 증명}}$

$AB = I$ 일때

$B A \underbrace{B B^{-1}}_{I} = \underbrace{B I}_{B} B^{-1}$

$BAI = BB^{-1}$

$BA = I$ 이므로

$AB = I$ 의 교환법칙이 성립되므로

$A \cdot \frac{adj A}{\det A} = I$ 의 교환법칙도 성립함.

역행렬구하기 연습

ex)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4-6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 크래머 공식

연립일차방정식 $AX=B$ 에서, A가 행렬식이 0이 아닌 정사각행렬일 때,

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

단, $j=1, \cdots, n$ 이고 A_j는 A의 j번째 열을 B 의 원소로 바꾼 행렬이다.

(j번째 열)

$$AX=B \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{\det A}(b_1C_{11} + b_2C_{21} + b_3C_{31})$$

이게 성립되는 이유?

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

A_1은 A의 1번째 열을 B의 1번째 열로 바꾼 행렬이므로

$$= \frac{1}{\det A}(b_1C_{11} + b_2C_{21} + b_3C_{31})$$

[연 습 문 제]

1. 다음 연립일차방정식을 가우스 조던 소거법 또는 역행렬을 이용하여 풀이하고, 해에 대해 탐구하시오.

(1) $\begin{cases} 2x+4y-3z=1 \\ x+y+2z=9 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-y+2z=5 \\ 2x-3y+z=-10 \\ 3x-3y+6z=15 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+4y-2z=6 \\ x+y+2z=9 \\ x+2y-z=4 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x+y+2z+4w+v=0 \\ z+w+2v=0 \\ 2x+2y-z+3w=0 \end{cases}$

2. 역행렬이 존재하는 두 정사각행렬 A, B 에 대하여 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 임을 보이시오.

3. 다음 행렬의 역행렬을 구하시오.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

4. 정사각행렬 A 와 A 의 역행렬 A^{-1} 에 대하여 $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$ 임을 증명하시오.

5. 크래머 공식을 이용하여 다음 연립일차방정식의 해를 구하시오.

(1) $\begin{cases} 5x+3y+2=0 \\ 4x-y+5=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+2z=6 \\ -x-2y+3z=8 \\ -3x+4y+6z=30 \end{cases}$

1. 다음 연립일차방정식을 가우스 조던 소거법 또는 역행렬을 이용하여 풀이하고, 해에 대해 탐구하시오.

(1) $\begin{cases} 2x+4y-3z=1 \\ x+y+2z=9 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-y+2z=5 \\ 2x-3y+z=-10 \\ 3x-3y+6z=15 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+4y-2z=6 \\ x+y+2z=9 \\ x+2y-z=4 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x+y+2z+4w+v=0 \\ z+w+2v=0 \\ 2x+2y-z+3w=0 \end{cases}$

1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$