

算法设计与分析-work6

yu wang

2024 年 5 月 23 日

1 问题一

算法:

A 为一个结构体数组, 每个结构体有每个人的到达时间, 接水时间, 接水剩余时间以及接水完成的时刻

BEST-ACTIVITY-CHOICE-GREEDY(A)

```
1: sort(A by A[i].arrivaltime)
2: Let f be a new priority_queue based on remainingtime
3: currenttime=0,index=0,n=A.size()
4: while index<n or !f.empty() do
5:   if f.empty() then
6:     currenttime=max(currenttime,A[index].arrivaltime)
7:   while index<n and A[index].arrivaltime<=currenttime do
8:     f.push(A[index])
9:     index++
10:  if !f.empty()
11:    current=f.top()
12:    f.pop()
13:    nexttime=(index<n)?A[index].arrivaltime :INT_MAX
14:    worktime=min(current.remainingtime,nexttime-currenttime)
15:    current.remainingtime-=worktime
16:    if current.remainingtime==0 then
17:      current->finishtime=currenttime
18:      totalfinish+=currenttime
```

```

19:   else
20:       f.push(current)
21: result =totalfinish/n
22: return result

```

证明正确性：

首先我们要证明该问题满足最优子解雇的性质，我们假设有一个最优的接水的方案，它能够求得接水的总平均完成时刻最小，我们选取将要接水的人，我们有三种可能

首先考虑，更换新的接水人的操作，说明当前情况新接水的人的接水剩余时间更短，我们选取接水剩余时间更短的人进行接水，平均完成时刻一定会是更短的，而对之前的排队接水顺序平均完成时刻一定是最短的，否则我们就有一种新的排队接水方案，使这个接水的总方案平均完成时刻更短，于是得到了这个接水方案是最优的矛盾。

其次我们考虑，等待接水者开始接水操作，这代表当前的接水者正在接水，且接水剩余时间更短，于是我们让接水人继续接水，而之前的排队接水顺序平均完成时刻一定是最短的，否则我们就有一种新的排队接水方案，使这个接水的总方案平均完成时刻更短，于是得到了这个接水方案是最优的矛盾。

接着我们考虑，当前接水者停止接水操作，这代表之前接水者已经完成了接水操作，当前接水者可以开始接水，而之前的排队接水顺序平均完成时刻一定是最短的，否则我们就有一种新的排队接水方案，使这个接水的总方案平均完成时刻更短，于是得到了这个接水方案是最优的矛盾。因此总而言之，该问题满足最优子结构的性质。

下面我们我们来证明算法的正确性：

首先，确定谓词 $P(n)$ ：

$P(n)$ ：该算法能够求解出前 n 个人接水的最优接水方案，使得总的平均完成时刻最小。

第二步是证明基本情况 $P(0)$ 和 $P(1)$ ：当没有人接水时，总的平均完成时刻为零。这是显然成立的，当只有一个人接水时，他从到达开始接水，到接水完成，中途不会更换新的接水人。此时完成时刻为到达时间加上接水时间，最小化平均完成时刻是他完成接水的时刻。因此，成立。

第三步是证明一般情况 $\forall n \in N(P(0) \wedge P(1) \wedge \dots \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1))$ ，假设对于任意前 k ($0 \leq k \leq n$) 个人，算法都能求解出使得总的平均完成时

刻最小的接水方案。那么当第 $n+1$ 个人到达有三种情况。如果当前 $n+1$ 的剩余时间少于当前正在接水的人的剩余时间，那么我们会选取第 $n+1$ 人优先接水，重新计算得到平均完成时刻最短。如果此时前 n 个已经完成接水操作，第 $n+1$ 个接水者将会立马执行接水，平均最短时刻为当前完成时刻和前 n 个最短平均时刻计算得来，如果当前正在有人接水且接水剩余时间更短，那么 $n+1$ 个接水者会等待当前接水者接完后开始接水，此时的总平均最短时刻为当前完成时刻和前 n 个最短平均时刻计算得来，综上所述我们可以证明该算法能够求解出最优的接水方案，使得总的平均完成时刻最小。

时间复杂度:

- 第 1 行的排序操作时间复杂度为 $\Theta(n \log n)$ 。
- 外循环最多执行 $2n$ 次，包括了出入队列。
- 内循环进入队列以及队列的入队出队操作，时间复杂度为 $(\log n)$ ，所以总的时间复杂度为 $\Theta(n \log n)$

综上，总的时间复杂度是 $\Theta(n \log n)$ 。