

第五次书面作业

封面写明学号和姓名，否则此次作业不得分

不得使用硬皮本和厚度超过 0.5 厘米的作业本!!! 否则此次作业不得分

建议使用 22 开单线本。22 开：约为 207mm×157mm

11 月 14 日上课铃响之前交至讲台处。本次作业满分 32 分（最终计算总成绩时将折算）。

注意：

- 不得随意省略过程。
- 须写明使用沃舍尔算法的过程，否则该题目此部分不得分。

5.1 （3 分）假设 R 和 S 是集合 A 上的关系。

(a) 证明： $r(R \cap S) = r(R) \cap r(S)$ 。

(b) 证明： $s(R \cap S) \subseteq s(R) \cap s(S)$ 。举例说明 $s(R \cap S) \neq s(R) \cap s(S)$ 。

5.2 （4 分）设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ，在 $A \times A$ 上定义二元关系 R 为 $(a, b)R(c, d)$ 当且仅当 $|a - b| = |c - d|$ 。证明 R 是一个等价关系并求 $(A \times A)/R$ 。

5.3 （1 分）设 R_1, R_2 是集合 A 上的两个等价关系，那么 $R_2 \circ R_1$ 是否也是 A 上的等价关系？

5.4 （1 分）设 R 为 A 上的等价关系，那么 R^2 是否也是 A 上的等价关系。

5.5 （3 分）假设 $f: A \rightarrow B$, $C, D \subseteq A$ 。

(a) 证明： $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$ 。

(b) 举反例说明 $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ 不是永真的。

(c) 详细说明对于什么函数上述等式为真。

5.6 （4 分）设函数 $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 定义为 $f(x, y) = (x + y, x - y)$ ，

(a) 证明： f 是双射。

(b) 求 f 的逆函数。

(c) 求 $f \circ f$ 。

5.7 (4分) 设 $A=\{a, b, c, d\}$ 上的关系 $R=\{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (d, b)\}$, 求 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 。(求传递闭包时须使用沃舍尔算法)

5.8 (1.5分) 判断以下 $A=\{a, b, c\}$ 上的关系中哪些构成函数, 哪些构成 A 上的函数。(直接给出结果即可, 注意不要漏题)

(a) $R=\{(a, b), (a, c), (b, b), (b, a)\}$ 。

(b) $R=\{(a, b), (b, b)\}$ 。

(c) $R=\{(a, b), (b, b), (c, c)\}$ 。

5.9 (1.5分) 判断以下关系 f 中哪些是 A 到 B 的函数。(直接给出结果即可, 注意不要漏题)

(a) $A=B=\mathbb{R}$, xfy 当且仅当 $x^2=y^2$ 。

(b) $A=B=\mathbb{R}$, xfy 当且仅当 $x^3=y^3$ 。

(c) $A=B=\mathbb{C}$, $(a+bi)f(c+di)$ 当且仅当 $a=c$ 。

5.10 (1分) 设 $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$, 定义为

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{若 } x \text{ 为偶数} \\ x+1 & \text{若 } x \text{ 为奇数} \end{cases}$$

令 $A=\{2, 3\}$, $B=\{1, 4\}$, 计算 $f(A)$ 和 $f(B)$ 。

5.11 (1分) 将集合 A 到集合 B 的所有函数的集合记为 B^A , 称为指数集, 即 $B^A=\{f: A \rightarrow B\}$ 。设 A 、 B 都是有限集合, $|A|=m$, $|B|=n$, 请计算 $|B^A|$ 。

5.12 (1分) 设 A 、 B 都是有限集合, $|A|=m$, $|B|=n$, 请计算集合 A 到集合 B 的所有单射函数的个数。

5.13 (1分) 设 A 、 B 都是有限集合, $|A|=|B|=n$, 请计算集合 A 到集合 B 的所有双射函数的个数。

5.14 (2.5分) 计算 $\lceil 2.7 \rceil$ 、 $\lceil -2.7 \rceil$ 、 $\lceil 14 \rceil$ 、 $\lceil -14 \rceil$ 、 $\lceil \pi \rceil$ 。

5.15 (2.5分) 计算 $\lfloor 2.7 \rfloor$ 、 $\lfloor -2.7 \rfloor$ 、 $\lfloor 14 \rfloor$ 、 $\lfloor -14 \rfloor$ 、 $\lfloor \pi \rfloor$ 。