第六次书面作业

必须使用 22 开单线本，封面写明学号和姓名，否则此次作业不得分

22 开：约为 207mm×157mm

11 月 22 日上课铃响之前交至讲台处。本次作业满分 43 分（最终计算总成绩时将折算）。

注意：不得随意省略过程。

6.1 若代数结构$(A, □)$是可结合的，并且对于任意 $x, y\in A$，若 $x□y=y□x$ 则必然有 $x=y$。证明□满足幂等律。

6.2 证明：若代数结构$(A, ○)$存在单位元 e 和零元θ，且 A 至少有两个元素，则 $e\neq\theta$。

6.3 在 $\mathbb{R}$ 上定义$*$运算为 $a*b=a+b-1$。证明$(\mathbb{R}, *)$是一个可换群。

6.4 证明：群$(G, \cdot)$是可换群的充要条件是对于任意 $a, b\in G$ 有$(a\cdot b)^2=a^2\cdot b^2$。

6.5 设 H 是群 G 的子群，$x\in G$。令 $xHx^{-1}=\{xhx^{-1}|h\in H\}$。证明：$xHx^{-1}$ 也是 G 的子群。

6.6 设$(G, \cdot)$是群，对于任意的$a\in G$，令 $H_a=\{y|ya=ay, y\in G\}$，称 H_a 为 a 在 G 中的**中心化子（centerlizer）**。证明$(H_a, \cdot)$是群$(G, \cdot)$的子群。

6.7 设$(G, \cdot)$是群，$a\in G$，定义 G 上的函数 f 为 $f(g)=aga^{-1}$。证明 f 是 G 的自同构。

6.8 画出所有不同构的(5, 4)-简单图。

6.9 完成表 6.1 所示的运算表，使之成为一个群。

表6.1 题 6.9 用表

$*$	a	b	c	d
a				
b				c
c			b	
d				

6.10 假设$|S|=n$，则在 S 上可以定义多少个不同的一元运算？可以定义多少个不同的二元运算？可以定义多少个满足交换律的不同二元运算？可以定义多少个满足幂等律的不同二元运算？可以定义多少

个既不满足交换律也不满足幂等律的不同二元运算？

6.11 在 $\mathbb{R}$ 上定义 ∇ 运算为 $a\nabla b=(ab)/2$，Δ 运算为 $a\Delta b=(a+b)/3$。

（a）∇ 运算和 Δ 运算是否满足封闭性？

（b）∇ 运算和 Δ 运算是否满足交换律？

（c）∇ 运算和 Δ 运算是否满足结合律？

（d）∇ 运算和 Δ 运算是否满足幂等律？

（e）∇ 运算和 Δ 运算是否满足吸收律？

（f）∇ 运算对于 Δ 运算是否满足分配律？Δ 运算对于 ∇ 运算是否满足分配律？

（g）∇ 运算和 Δ 运算是否存在单位元？

（h）∇ 运算和 Δ 运算是否存在零元？

（i）对于 $x\in\mathbb{R}$，是否存在 x 关于 ∇ 运算和 Δ 运算的逆元？

6.12 判断下列子集是否构成(n 阶可逆实方阵全体, $\times$)的子群。（直接给出结果即可，注意不要漏题）

（a）n 阶上三角可逆实方阵全体。

（b）行列式大于 0 的 n 阶实方阵全体。

（c）行列式小于 0 的 n 阶实方阵全体。

（d）n 阶对角可逆实方阵全体。

6.13 对以下给出的群 G_1、G_2 以及函数 $f: G_1\to G_2$，说明 f 是否是从 G_1 到 G_2 的同态，是否是从 G_1 到 G_2 的同构。

（a）$G_1=(\mathbb{Z}, +)$，$G_2=(\mathbb{R}^*, \times)$，$f(x)=\begin{cases}1 & x\text{是偶数}\\ -1 & x\text{是奇数}\end{cases}$。

（b）$G_1=(\mathbb{R}, +)$，$G_2=(A, \times)$，其中 $A=\{z|z\in\mathbb{C}, |z|=1\}$，$f(x)=\cos x+\mathrm{i}\sin x$。

（c）$G_1=G_2=(\mathbf{M}_n(\mathbb{R}), +)$，$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^T$，其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$。

6.14 （直接给出结果即可）已知无向图 G 如图 6.1 所示。

（a）求其顶点数和边数。

（b）写出其各顶点的度数，并验证无向图的握手定理及其推论。

（c）指出图 G 中的重边、自环、孤立顶点、悬挂顶点和悬挂边。

（d）要使图 G 成为简单图，至少需要删去几条边？

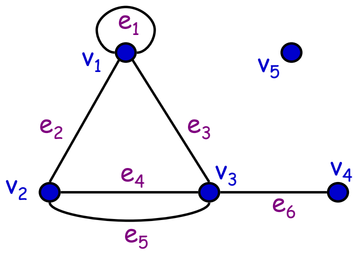

图6.1　　题 6.14 用图

6.15　（直接给出结果即可）已知有向图 G 如图 6.2 所示。

（a）求其顶点数和边数。

（b）写出其各顶点的出度、入度和度数，并验证有向图的握手定理。

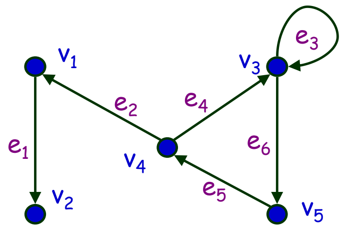

图6.2　　题 6.15 用图

6.16　具有 13 条边的无向图 G 中有 3 个 2 度顶点、2 个 3 度顶点、1 个 4 度顶点和若干 5 度顶点，求 G 的阶数。

6.17　已知无向图 G 中顶点数 n 与边数 m 相等，2 度与 3 度顶点各 2 个，其余顶点均为悬挂顶点，求 G 的边数。

6.18　n 阶 k 度正则图中有多少条边？

6.19　已知有向图如图 6.3 所示。

（a）写出该图的邻接矩阵。

（b）利用邻接矩阵计算各个顶点的出度和入度。

（c）计算 v_1 到 v_4 的长度为 3 的不同道路数。

（d）计算 v_1 到 v_4 的长度不超过 3 的不同道路数。

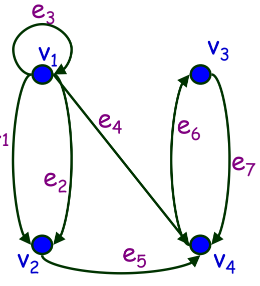

图6.3　　题 6.19 用图

6.20　已知无向图如图 6.4 所示。

（a） 写出该图的邻接矩阵。

（b） 利用邻接矩阵计算各个顶点的度数。

（c） 计算 v_1 到 v_3 的长度为 4 的不同道路数。

（d） 计算 v_4 到 v_4 长度不超过 3 的不同回路数。

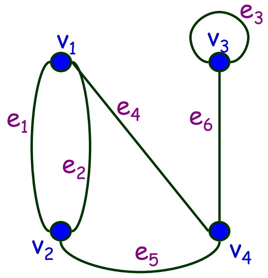

图6.4　　题 6.20 用图