算法设计与分析-work3

yu wang

April 2024

1 问题一

其中 A,B 为由小到大排好序的整型数组，s 为想要求解的数

```
FINDNUMBER(A,B,s)
i=1,j=n
while i≤ m and j ≥ 1 do
    if A[i]+B[j]==s then
        return True
    else if A[i]+B[j]>s then
        j=j-1
    else if A[i]+B[j]<s then
        i=i+1
return False
```

首先，我们考虑算法的时间复杂度，i 最多遍历完 A 数组，j 最多遍历完 B 数组，以此算法的时间复杂度为 O(m+n), 满足题目要求。

接下来，我们考虑算法的正确性。算法维持的循环不变式是：s 如果可以被找到，只可能在 A 数组最小数和 B 数组最小数之和，和 A 数组最大数和 B 数组最大数之和的范围之内。初始条件下，A[i],B[j] 分别标定了数组的最小数，和 B 数组的最大数，每次移动都是 A 中数组挑选较大的数，B 中数组挑选较小的数。此时若 s==A[i]+B[j]，那么我们找了需要的 s。否则如果 A[i]+B[j]<s，则代表现在两数之和较小，我们需要在 A 数组中寻找更大的数，也就是说 i 需要往右移动一位，即 i=i+1。反过来，如果 A[i]+B[j]>s, 同样代表现在两数之和较大，超过了所需要找的 s，那么我们需要在 B 数组中寻找更小的数，以此来找到目标 s, 也就是说 j 需要往左移动一位。算法

的每一步都会将搜索的范围逐个变小，直到这个范围内没有元素，则代表我们无法找到 s，这时候算法应该返回 False。

2 问题二

```
FIB-POW(n)
if n=1 then
    return 2
else if n=2 then
    return 5
else if n=3 then
    return 3
x[1][1]=3,x[1][2]=0,x[1][3]=4,x[1][4]=2
x[2][1]=1,x[2][2]=0,x[2][3]=0,x[2][4]=0
x[3][1]=0,x[3][2]=1,x[3][3]=0,x[3][4]=0
x[4][1]=0,x[4][2]=0,x[4][3]=1,x[4][4]=0
p=MATRIX-POW(x,n-4)
return p[1][1]

MATRIX-POW(x,n)
I[1][1]=7， I[2][1]=3
I[3][1]=5, I[4][1]=2
if n==0 then
    return I
p=MATRIX-POW(x,n/2)
p=MATRIX-MULTIPLY(p,p)
if n%2==1 then
    return MATRIX-MULTIPLY(p,x)
else
    return p

MATRIX-MULTIPLY(x,y)
for i=1 to 4 do
```

```
2:   for j=1 to 1 do
3:       for k=1 to 4 do
4:           z[i][j]=z[i][j]+x[i][k]Xy[k][j]
5:return z
```

我们将该递推式的第 n 项求解写成矩阵的幂的形式! 对于矩阵的相乘形式, 我们可以使用快速幂算法来求解这里的矩阵的幂, 时间复杂度为 $\Theta(lgn)$ ，算法的时间复杂度满足要求。检验正确性，该算法本质上使用递推的方式进行求解，f（5）可由 f(4),f(2),f(1) 递推而得，f(6) 可由 f(5),f(3),f(2) 递推而得......f(n) 可由 f(n-1),f(n-3),f(n-4) 递推可得, 首先将递推改写成如下的形式:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} f(n-1) \\ f(n-2) \\ f(n-3) \\ f(n-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(n) \\ f(n-1) \\ f(n-2) \\ f(n-3) \end{pmatrix}$$

我们最终可得到

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-4} * \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(n) \\ f(n-1) \\ f(n-2) \\ f(n-3) \end{pmatrix}$$