

# 北京交通大学考试试题 (B 卷)

课程名称: 算法设计与分析 学年学期: 2022—2023 学年第 2 学期

课程编号: M210004B 开课学院: 软件学院 出题教师: 刘铎, 李令昆

学生姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_ 任课教师: \_\_\_\_\_

学生学院: \_\_\_\_\_ 班级: \_\_\_\_\_

## 注意事项:

- ① 填写清楚学号和姓名。
- ② 必须回答在指定位置内, 不在指定位置内的答题内容无效。
- ③ 如无特殊说明, 论证和解答过程必须详尽、写清依据, 不得随意省略。

## 第一部分、单项选择题。请选择最适合的答案, 并填写在指定位置。 (共 16 分)

- (1) 若  $f(n) = n2^n$ ,  $g(n) = n!$ , 则有 ( )。  
A.  $f = O(g)$                       B.  $f = \Omega(g)$                       C.  $f = \Theta(g)$
- (2) 要求算法每一步都必须严格明确、不能含混指的是算法的 ( )。  
A. 有效性                      B. 有限性                      C. 明确性                      D. 正确性
- (3) 以下时间复杂度里, ( ) 在计算复杂性理论中被称为是“慢”的?  
A.  $n^{100}$                       B.  $n \lg n$                       C.  $2^n$                       D.  $O(1)$
- (4) 以下关于 NP 问题的说法中, ( ) 目前确定是正确的。  
A. NP 问题都是不可能解决的问题  
B. P 类问题包含在 NP 问题中  
C. NP 完全问题是 P 类问题的子集  
D. NP 类问题包含在 P 类问题中
- (5) 下列表述中, ( ) 支持  $f(n) = \Omega(g(n))$ 。  
A.  $f(n) \leq 4g(n)$  for all  $n > 1$                       B.  $f(n) \geq 4g(n)$  for all  $n > 136$   
C.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

(6) 假设  $X$  是判定性问题，则当 ( ) 时， $X$  不一定存在多项式时间验证器/证书（即对  $X$  的一个实例和该实例的一个“解”，可以验证该解的正确性的一个算法）。

A.  $X$  是 P 类问题

B.  $X$  是 NP 类问题

C.  $X$  是 NP 困难问题

D.  $X$  是 NP 完全问题

(7) 对于下列 NP 完全性的表述中，( ) 目前确定是正确的。

A. 若存在一个 NP 类的问题可以被一个多项式时间复杂度的算法解决，则  $P=NP$ 。

B. 所有 NP-hard (NP 困难) 问题都是 NP-Complete (NP 完全) 问题。

C. 若一个判定问题  $Q$  可以多项式时间归约到某个 NP-Complete (NP 完全) 问题，则  $Q$  是一个 NP-Complete (NP 完全) 问题。

D. 若一个判定问题  $Q$  是 NP-Complete (NP 完全) 问题，则  $Q$  可以被多项式时间归约到其它任何一个 NP-Complete (NP 完全) 问题。

(8) 假定  $X, Y, Z$  都是判定性问题且  $X \leq_p Y$ ,  $Y \leq_p Z$ ，则以下说法中 ( ) 是不正确的。（ $X \leq_p Y$  意为  $X$  可多项式时间归约到  $Y$ ）

A. 若  $Y$  可以在多项式时间内求解，则  $X$  也可以在多项式时间内求解

B. 若  $X$  可以在多项式时间内求解，则  $Y$  也可以在多项式时间内求解

C. 若  $X$  不能在多项式时间内求解，则  $Y$  也不能在多项式时间内求解

D.  $X \leq_p Z$

**回答：**

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.

## 第二部分、计算题。（共 34 分）

9. （共 12 分）小明有 100 万元要投资，共有三个投资项目：A 项目（预期收益：10%），B 项目（预期收益：7%）和 C 项目（预期收益：3%）。投资要求是：在 A 项目上的投资不超过在 B 项目上投资金额的  $\frac{1}{4}$ ，且在 C 项目上的投资额不能少于在 A 项目和 B 项目上总投资额的 35%。小明的目标是：使投资的预期收益达到最大。

针对以上问题，写出它的线性规划模型。

要求：详细写出变量定义、优化目标、变量类型限制和不等式组。

回答（题 9）：

10. (共 10 分)通过函数转换与主定理求解以下递推关系( $c$  是某正的常数)。

$$T(n) = \begin{cases} 2T(\sqrt{n}) + \ln n & n > c \\ O(1) & n \leq c \end{cases}$$

回答 (题 10):

11. (共 12 分) 求下述长为 12 的序列的最长单调严格降子序列: 10, 9, 15, 4, 8, 7, 17, 6, 5, 14, 8, 12。

使用动态规划算法 (而不是递归方法) 求解该问题。

(1) 请给出目标函数和标记函数的定义/表示、递推关系和初值。

(2) 请给出详细的计算过程, 包括目标函数数组 (备忘录) 和标记函数数组的具体值。

(3) 请详细说明具体的最长单调严格降子序列。

**回答 (题 11):**

回答（题 11 继续）：

### 第三部分、综合分析题。(共 50 分)

12. (共 12 分) 堆 (heap) 是一种特殊的数据结构, 其基于二叉根树结构。

除最后一层外, 堆的各层都是满的, 而最后如果最后一层不是满的, 那么最后一层的叶子顶点都尽可能地靠左, 右边的叶子有可能缺失 (参看图 1(a))。

例如图 1(b)是有 10 个顶点的堆, 而图 1(c)是有 13 个顶点的堆。

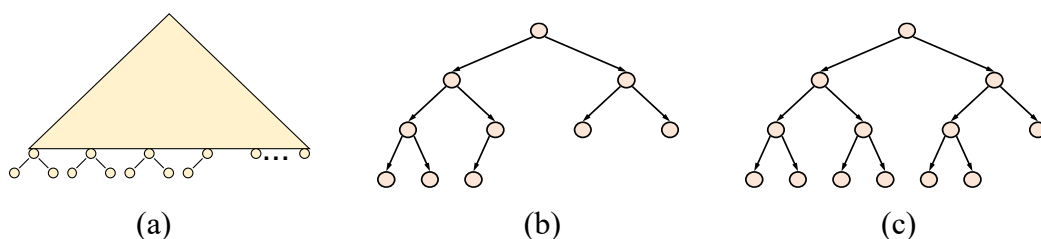


图 1 题 12 用图

假设堆内部顶点的结构声明如下:

```
struct Node {  
    struct Node* lch;  
    struct Node* rch;  
};
```

现在给你一个指向这个堆(顶点个数不超过  $n$ )的根顶点的非空指针 `struct Node* root`, 请你设计一个时间复杂度为  $O(\lg n \lg n)$  的算法 `COUNT(root)` 数出这个堆的顶点个数。

(1) 给出一个针对以上任务的分治算法 (必须使用伪代码描述, 不得使用具体程序语言的实际编码), 要求该算法的运行时间为  $O(\lg n \lg n)$ 。

(2) 论证你在 (1) 中所设计的算法的时间复杂度的确为  $O(\lg n \lg n)$ 。

回答（题 12）：



13. (共 12 分) 你有  $n$  个任务需要完成, 每个任务有两个参数, 分别为完成该任务需要消耗的能量和开启该任务所需要的能量阈值, 记为  $(a_i, b_i)$ 。假设对于第  $i$  个任务,  $a_i = 6, b_i = 9$ , 则说明若你当前持有的能量为 8, 那么你不可以开启这个任务, 若你当前持有的能量为 10, 那么你可以开启该任务, 完成该任务以后你剩余的能量为 4。现在给你每个任务所需要消耗的能量  $a_i (1 \leq i \leq n)$  和开启能量  $b_i (1 \leq i \leq n)$ , 请你计算出要完成全部这  $n$  个任务所需要的最少初始能量。

例如, 初始能量是 20, 目前有两个任务是  $(a_1=5, b_1=14)$  和  $(a_2=7, b_2=11)$ , 如果先启动任务 1 则还可以完成任务 2, 而先启动任务 2 则不能启动任务 1。

(1) 请描述所用到的贪心选择性质。

(2) 请写出你的算法伪代码, 不得使用具体程序设计语言的实际编码, 不可以调用任何库函数, 但可以直接使用排序函数并按照你所定义的排序方式进行排序。

(3) 请证明你所用到的贪心选择性质的正确性。

回答 (题 13):

回答（题 13 继续）：

14. （共 13 分）在计算机科学中，**编辑距离（edit distance）**是一种通过计算将一个字符串转换为另一个字符串所需的最小操作次数来度量两个字符串相似程度的方法。

有许多对齐两个字符串的方法，其中可能会出现**错误匹配（mismatch）**或**缺漏（gap）**。例如图 2 给出了 ABC 和 DAC 的两个不同的对齐方法，方法 1 有两个缺漏，而方法 2 有 A/D 和 B/A 的两个错误匹配。

	A	B	C
D	A		C

对齐方法 1

A	B	C
D	A	C

对齐方法 2

图 2 题 14 用图 1

错误匹配的代价	A	B	C	D
A	0	3	1	4
B	3	0	2	3
C	1	2	0	2
D	4	3	2	0

图 3 题 14 用图 2

将缺漏的代价定义为 5，而错误匹配的代价例如图 3 所定义（假定字符串中只会出现 A、B、C、D 四种字符）。

因此，ABC 和 DAC 的对齐方法 1 的总代价为  $5 \times 2 = 10$ ；而对齐方法 2 的总代价为  $4 + 3 = 7$ 。

将两个字符串的**编辑距离**定义为所有对齐方法的最小总代价。

（1）请为之设计一个**动态规划**算法，计算两个字符串  $X$ （长为  $m$ ）和  $Y$ （长为  $n$ ）的编辑距离。

**要求：**给出目标函数的定义表示和算法伪代码（需要给出最终的返回值）。

（2）使用第（1）部分中描述的算法计算“CBAD”和“ACDB”的编辑距离。

**要求：**给出求解的**详细**计算过程（用清楚明确的表格表示即可），并给出编辑距离结果（仅有该结果者此部分不得分）。

回答 (题 14):

15. (共 13 分) 计算图 4 中从  $a$  到  $f$  的最短道路。

请为之设计一个分支限界算法。

(1) 请详细写出具体的估界函数和剪枝依据。

(2) 请针对此输入实例详细画出剪枝后的(部分)搜索树。注意：必须对界进行估计；必须在图中标明剪枝依据。(当有多个顶点可供选择时, 请按照字母顺序依次考虑。)

(3) 请针对此输入实例给出从  $a$  到  $f$  的最短道路(仅有该结果者此题目不得分)。

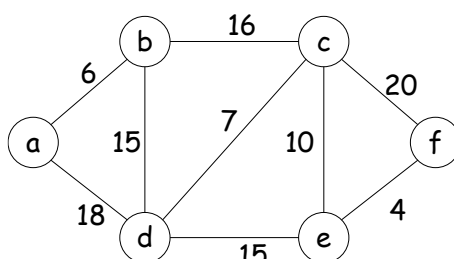


图 4 题 15 用图

回答(题 15):

回答（题 15 继续）：

草稿纸（在此答题无效）

草稿纸（在此答题无效）