算法设计与分析-work1

余旺

March 2024

1 问题 1

我们将使用数学归纳法来证明命题。

1) 确定谓词 P(n)，在这里我们简单的将命题本身作为谓词，即 P(n): 对于任意一个边长为 2^n 的院落，选择任何一个单位面积内放置雕塑之后，剩余的部分一定可以使用边长为 2 的 L 型砖铺满。

2）证明基本情况 P(0)，这时院落的边长为 1，直接将雕塑放在院落中，没有剩余的空间，命题得证。

3) 证明 $(\forall n \in N)(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ 为真。假设对于一个边长为 2^n 的院落存在一种合理的铺设方案，那么对于任意一个边长为 2^{n+1} 的院落，我们考虑从中间将该院落划分为四个等面积为 2^n 的部分。编号 1-4 是长度为 2^n 的子块，我们取其中任意一个子块，可以将雕塑放在一个任意一个单位面积内，然后能够使用边长为 2 的 L 型瓷砖铺满剩余的部分。然后对于剩余三个子块，我们可以假设先将雕塑放在每个子块的角落上，然后能够使用边长为 2 的 L 型瓷砖铺满剩余的部分，而对假设放雕塑的地方实际上也需要用 L 型瓷砖铺满，我们可以将子块旋转，使三个子块放雕塑的角落地方拼接成一个 L 型瓷砖，于是我们可以将 L 型瓷砖铺在假设放置雕塑的三个单位面积，于是剩余的三个子块可以用 L 型瓷砖进行铺满。接下来问题就转换为了要证明: 对于任意一个边长为 2^m 的院落，可以将雕塑摆放在角落里，然后剩余的部分可以使用边长为 2 的 L 型砖铺满。

对于这个子命题，我们可以再用一个数学归纳法来证明。同样地，第一步，确定谓词 P(m)，我们依然使用命题本身作为谓词，即:

P(m): 对于任意一个边长为 2^m 的院落，可以将雕塑摆放在角落里，然后剩余的部分可以使用边长为 2 的 L 型瓷砖铺满。

第二步，证明基本情况，即 P(0)。此时院落的边长为 1，将雕塑摆放在这里就可以了，命题得证。

接下来是第三步，证明 $(\forall m \in N)(P(m) \Rightarrow P(m+1))$。假设对于任意边长为长为 2^m 的院落，可以将雕塑摆放在角落里，然后剩余的部分可以使用边长为 2 的 L 型瓷砖铺满，那么对于任意一个边长为 2^{m+1} 的院落，我们依然将它分成 4 个边长为 2^m 的子院落。由假设我们知道，1、2、3、4 号院落可以将雕塑放在角落里然后剩余的部分用 L 型瓷砖铺满，那么我们把 1、3、4 号院落的空缺部分放在一起，在 2 号院落的空缺部分摆放雕塑，这样一来空缺的部分正好可以使用 L 型瓷砖铺设上, 所以对于 $(\forall m \in N)(P(m) \Rightarrow P(m+1))$ 命题得证。

综上所述，我们也成功的证明了一开始的命题，即: 对于任意一个边长为 2^n 的院落，选择任意一个单位放置雕塑后，剩余的部分一定可以使用边长为 2 的 L 型瓷砖铺满。

2 问题 2

为了证明上述论断，我们需要先刻画我们的移动方式。在华容道游戏中，我们存在两种移动方式。第一种移动方式我们称为“水平移动”，即将处在 (x,y) 位置上的方块移动至 (x,y+ 1) 或 (x,y- 1)。第二种移动方式我们称为“竖直移动”，即将处在 (x,y) 位置上的方块移动至 (x+1,y) 或 (x-1,y)。

定义好了上面的两种移动方式后，我们接下来证明下面的两个引理。

引理 1: 水平移动不改变棋盘上的字符相对顺序。

引理 2: 竖直移动只改变前或后两个字符的相对顺序。

我们先证明引理 1。由于水平移动是将处在 (x,y) 位置上的方块移动至 (x,y+1) 或 (x,y-1)，这两种方式都不改变所在行的字母的相对顺序，同时，水平移动不影响所在列上的相对顺序，所以水平移动不会改变字母的相对顺序。

接着证明引理 2。对于竖直向下的移动，即将位于 (x,y) 上的字母移动至 (x+1,y) 由于 (x+1,y) 是位于 (x,y) 之后的第四个格子，而竖直移动是将该待移动字母与该空格交换，所以竖直向下移动是将该字母移动到它之后的三个字母之后。类似的，对于竖直向上移动，即将位于 (x,y) 上的字母移动至 (x- 1,y)，由于 (x-1,y) 是位于 (x,y) 之前的第四个格子，而竖直移动是将该待移动字母与该空格交换，所以竖直向上移动是将该字母移动到它之

前的三个字母之前。

在上述两个引理的基础上，我们可以证明下面这个引理:

引理 3: 游戏的一次合法移动，不会改变字符串中逆序对数和空白格所在行这两数字的之和的奇偶性。

由引理 1，水平移动不改变字母的相对顺序，也就对逆序对数没有影响，水平移动也不会改变空白格所在的行数，所以不会改变字符串中逆序对数和空白格所在行这两数字的之和的奇偶性。我们要考虑竖直移动的情况，由引理 2，我们知道竖直移动一次只影响之前或之后的三个字母。那么我们先考察往后移三位的情况，如果说该字母往后移动三位，该字母与后三个字母的逆序对数是 0 的情况下，移动后逆序对数增加了 3，逆序对数改变数量为奇数，紧接着如果移动前该字母与后三个字母形成的的逆序对数是 1 的情况下，移动后逆序对数增加一，逆序对数改变数量为奇数，如果移动前该字母与后三个字母形成的的逆序对数是 2 的情况下，移动后逆序对数减少 1，逆序对数改变数量为奇数；如果移动前该字母与后三个字母形成的的逆序对数是 3 的情况下，移动后逆序对数减少三，逆序对数改变数量为奇数。无论那种情况，逆序对数改变数量为奇数。类似的，对于将字母移动前三位的情况，逆序对数改变数量为奇数，此处省略其证明。而对于竖直移动，空白格所在行的数字会加一或者减一，所在行的数字为奇数变化，所以综合竖直移动，字符串中逆序对数变化和空白格所在行变化之和为偶数，这不会改变字符串中逆序对数和空白格所在行这两数字的之和的奇偶性。所以引得得证

下面我们需要证明引理 4: 华容道游戏以图左半部分的局面开始，移动任意 n 步后，字符串中逆序对数和空白格所在行这两数字的之和的奇偶性都不会变。

1）确定谓词 P(n)，此处我们简单的将引理本身作为谓词，即: 华容道游戏以图左半部分的局面开始，移动任意 n 步后, 字符串中逆序对数和空白格所在行这两数字的之和的奇偶性都不会变。

2) 证明基本情况，即 P(0)，也就是说当华容道以图左半部分的局面开始的时候，字符串中逆序对数和空白格所在行这两数字的之和的奇偶性都不会变。这种局面下, 移动 0 步，自然不变。

3) 证明一般情况，即 $(\forall n \in N)(P(n) \Rightarrow P(n+1))$。对于任意的 n+1 次移动，我们将最后一次移动回退，即回到只移动 n 次的状态，此时由归纳假设，字符串中逆序对数和空白格所在行这两数字的之和的奇偶性都不会变，

那么由引理 3，再恢复最后一次合法的移动，字符串中逆序对数和空白格所在行这两数字的之和的奇偶性都不会变，命题得证。最后我们可以证明下面的定理了:

定理: 华容道游戏以图左半部分的局面开始，不存在一种可行的步骤方案，使得玩家能够得到右半部分的局面。

由于开始局面，同时移动任意 n 步，字符串中逆序对数和空白格所在行这两数字的之和的奇偶性都不会变，而目标局面的字符串中逆序对数和空白格所在行这两数字的之和的奇偶性改变，由原来的奇数变为偶数，因此不存在一种可行的步骤方案使得玩家能够得到右半部分的局面，即获胜局面。

3 问题 3

1) 确定谓词 P(n) 即 $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$ 成立

2), 证明基本情况，P(0), 即 n=0 时，对于要证明的式子，左边为 F_0 为 0，右边为 F_2-1，结果为 1-1=0，所以式子成立。

3) 证明一般情况，即 $(\forall n \in N)(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ 为真。假设对于式子 $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$ 成立，那么对于 P(n+1) 的情况时。我们设 S=$\sum_{i=0}^{n} F_i$, 所以 S=$F_{n+2} - 1$。式子左边为 S+F_{n+1}，式子右边为 F_{n+3}-1，由 S=$F_{n+2} - 1$，可得式子左边为 $F_{n+1} + F_{n+2} - 1$，又因为 F_i 是斐波那契数列，所以 $F_{n+1} + F_{n+2} = F_{n+3}$，所以 $F_{n+1} + F_{n+2} - 1 = F_{n+3} - 1$，左式等于右式，命题得证

4 问题 4

1) 确定谓词 P(m) 即对于任意一个含有 n 个顶点和 m 条边的无向图，至少存在 n - m 个连通子图

2）证明基本情况 P(0), 即当 m=0 时，即图中没有边时，此时图中的 n 个点每个点都是一个连通子图，所以存在 n 个连通子图，即 n-m 个连通子图。

3) 证明一般情况，即 $(\forall m \in N)(P(m) \Rightarrow P(m+1))$ 为真。假设对于任意 n 个顶点和 m 条边的无向图，至少存在 n - m 个连通子图。则对于任意含有 n 个顶点，和 m+1 条边的无向图，我们可以将此无向图视为在 n 个顶点，和 m 条边的无向图的基础上再加上一条边，我们设该边为 a, 若 a 是一

条割边，则加上该割边后，原来 a 连接的两个连通子图变成了一个连通子图，即连通子图的数量减少一。又因为对于任意 n 个顶点和 m 条边的无向图，至少存在 n - m 个连通子图。则加上该割边后，至少存在 n-(m+1) 个连通子图，则命题得证。若 a 不是一条割边，则 a 两侧的顶点之前已经存在一条路径，则可知连接边 a 的两侧属于同一个连通子图，则无向图的连通子图的数量没有改变，至少为 n-m 个，一定满足至少存在 n-(m+1) 个连通子图，命题得证。综上所述，对于任意一个含有 n 个顶点和 m +1 条边的无向图，至少存在 n - (m+1) 个连通子图, 所以命题得证。