

北京交通大学考试试题(A卷)

课程名称: 算法设计与分析 学年学期: 2022—2023 学年第 2 学期

课程编号: M210004B 开课学院: 软件学院 出题教师: 刘铎, 李令昆, 吴睿智

学生姓名: _____ 学号: _____ 任课教师: _____

学生学院: _____ 班级: _____

注意事项:

- ① 填涂清楚学号。
- ② 必须回答在答题卡指定位置内, 不在指定位置内的答题内容无效。
- ③ 如无特殊说明, 论证和解答过程必须详尽、写清依据, 不得随意省略。

第一部分、单项选择题。请选择最适合的答案, 并填涂到答题卡上。

(共 20 分)

(1) 下列表述中, () 是不正确的。

- A. $n^2/2 + 2^n$ 的渐近表达式的上界函数之一是 $O(2^n)$
- B. $n^2/2 + 2^n$ 的渐近表达式的下界函数之一是 $\Omega(2^n)$
- C. $\log n^3$ 的渐近表达式的上界函数之一是 $O(\log n)$
- D. $\log n^3$ 的渐近表达式的下界函数之一是 $\Omega(n^3)$

(2) 当输入规模为 n 的时候, 算法增长率最大的是 ()。

- A. 5^n
- B. $20 \log_2 n$
- C. $2n^2$

(3) $T(n)$ 表示当输入规模为 n 时的算法效率, 以下算法效率最优的是 ()

- A. $T(n)=T(n-1)+1, T(1)=1$
- B. $T(n)=2n^2$
- C. $T(n)=T(n/2)+1, T(1)=1$

(4) 以下关于 NP 问题的说法中, () 目前确定是正确的。

- A. NP 问题都是不可能解决的问题
- B. P 类问题包含在 NP 问题中
- C. NP 完全问题是 P 类问题的子集
- D. NP 类问题包含在 P 类问题中

(5) 在寻找 n 个元素中第 k 小元素的问题中，若使用快速排序思想，运用分治算法对 n 个元素进行划分，以下解释中最合理的是（ ）。

- A. 应随机选取一个作为划分基准。
- B. 应取第一个元素作为划分基准。
- C. 应取中位数作为划分基准。
- D. 以上方法皆可行，但不同方法，算法的执行时间也可能有所不同。

(6) 假定 X, Y, Z 都是判定性问题且 $X \leq_p Y$, $Y \leq_p Z$, 则以下说法中（ ）是不正确的。（ $X \leq_p Y$ 意为 X 可多项式时间归约到 Y ）

- A. 若 Y 可以在多项式时间内求解，则 X 也可以在多项式时间内求解
- B. 若 X 可以在多项式时间内求解，则 Y 也可以在多项式时间内求解
- C. 若 X 不能在多项式时间内求解，则 Y 也不能在多项式时间内求解
- D. $X \leq_p Z$

(7) 对于下列 NP 完全性的表述中，（ ）目前确定是正确的。

A. 若存在一个 NP 类的问题可以被一个多项式时间复杂度的算法解决，则 $P=NP$ 。

B. 所有 NP-hard (NP 困难) 问题都是 NP-Complete (NP 完全) 问题。

C. 若一个判定问题 Q 可以多项式时间归约到某个 NP-Complete (NP 完全) 问题，则 Q 是一个 NP-Complete (NP 完全) 问题。

D. 若一个判定问题 Q 是 NP-Complete (NP 完全) 问题，则 Q 可以被多项式时间归约到其它任何一个 NP-Complete (NP 完全) 问题。

(8) 假设 X 是判定性问题，则当（ ）时， X 不一定存在多项式时间验证器/证书（即对 X 的一个实例和该实例的一个“解”，可以验证该解的正确性的一个算法）。

- | | |
|------------------|------------------|
| A. X 是 P 类问题 | B. X 是 NP 类问题 |
| C. X 是 NP 困难问题 | D. X 是 NP 完全问题 |

(9) 要求算法必须可以终止指的是算法的 ()。

- A. 有效性 B. 有限性 C. 健壮性 D. 正确性

(10) 对于一个算法而言, () 是第一位的。

- A. 有效性 B. 最优性 C. 健壮性 D. 正确性

第二部分、计算题。(共 30 分)

11. (共 12 分) 由非负整数构成的数字三角形排列形式如图 1 所示。每一行的数只有两条边可以分别通向下一行的两个数。目的是计算出从顶层到底层某一个数的一条道路, 并且使得该道路上的数之和达到最小。

针对以上问题, 写出它的线性规划模型。

要求: 详细写出变量定义、优化目标、变量类型限制和不等式组。

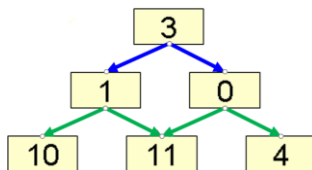


图 1 题 11 用图

12. (共 10 分) 给定一个无序序列 $A=[65, 158, 170, 155, 239, 300, 207, 389]$ 。 A 的子序列 X 中, 如果有 $i < j$, 则 $X[i] < X[j]$, 此时称 X 是 A 的单调递增子序列。

使用动态规划算法(而不是递归方法)找出序列 A 的最长单调递增子序列。

(1) 请给出目标函数和标记函数的定义/表示、递推关系和初值。

(2) 请给出详细的计算过程, 包括目标函数数组(备忘录)和标记函数数组的具体值。

(3) 请详细说明具体的最长单调递增子序列。

13. (共 8 分) 小明和小红要进行两个 n 阶方阵的乘法, 此处认为 n 的值充分大, 即可以不断除以 3 和/或除以 5。

小明先设计了一个分治算法 **A**: 可以使用 k 次矩阵元素的乘法完成两个 5×5 的矩阵相乘。小明进而又设计了一个分治算法 **A_{plus}**: 将 $n \times n$ 矩阵顺序划分成 $(n/5) \times (n/5)$ 块, 每块为 5×5 的小矩阵。之后再不断调用算法 **A** 和算法 **A_{plus}**。

小红先设计了一个分治算法 **B**: 可以使用 t 次矩阵元素的乘法完成两个 4×4 的矩阵相乘。小红进而又设计了一个分治算法 **B_{plus}**: 将 $n \times n$ 矩阵顺序划分成 $(n/4) \times (n/4)$ 块, 每块为 4×4 的小矩阵。之后再不断调用算法 **B** 和算法 **B_{plus}**。

此处 k 和 t 是大于 1 的常数, 并忽略矩阵加法的时间复杂度。

用函数 $T_A(n)$ 和 $T_B(n)$ 分别表示使用算法 **A_{plus}** 和 **B_{plus}** 计算两个 n 阶实数方阵 **X**, **Y** 乘积时的矩阵元素 (实数) 乘法次数。

- (1) 列出关于 $T_A(n)$ 的递推方程并估计 $T_A(n)$ 的阶。
- (2) 列出关于 $T_B(n)$ 的递推方程并估计 $T_B(n)$ 的阶。
- (3) 当 k 和 t 满足什么条件时, 算法 **A_{plus}** 的时间复杂性将优于 **B_{plus}** 的。

第三部分、综合分析题。(共 50 分)

14. (共 12 分) 已知一个长度为 n 的有序字符串序列/数组 A (下标为 $1 \sim n$), 其字符串都由小写英文字母构成, 排序方法为自然的 (从小到大) 字典序/词典序 (可参看下文示例)。

给定一个长为 m 的英文字符串 $prefix$, 求数组 A 中前缀为 $prefix$ 的字符串的个数。例如, 对于 $A = ["aaa", "ba", "bac", "bat", "batbat", "batq", "bta", "c"]$, $prefix = "bat"$, A 中前缀为 $prefix$ 的字符串有 3 个 ("bat", "batbat", "batq"), 因此要求的结果为 3。

请为之设计一个时间复杂度为 $O(m \lg n)$ 的算法 **COUNT-PREFIX(A, prefix)**。

(1) 写出算法的伪代码, 即不得使用具体程序设计语言的实际编码, 不可以调用任何库函数。

(2) 论证 (1) 中算法的复杂度满足要求, 即的确为 $O(m \lg n)$ 。

15. (共 12 分) 在某个 VR 游戏中, n 只大怪兽正在袭击某村庄, 且第 i 只怪兽在每个单位时间内都可以对村庄产生值为 D_i 的破坏 ($1 \leq i \leq n$)。假设你在游戏中扮演“勇者”, 勇者的能力固然可以击败所有怪兽, 但需要不中断地花费 T_i 时间才能击败第 i 只怪兽 (期间怪兽忙于应对勇者而无暇对村庄造成破坏), 且之后才能 (开始) 去击败下一只怪兽。

勇者希望能够确定击败怪兽的顺序, 使得村庄受到的总破坏最小。

例如, 共有两只怪兽, $T_1 = 3$, $D_1 = 5$, $T_2 = 5$, $D_2 = 3$ 。如果选择先击败怪兽 1, 再击败怪兽 2, 村庄受到的总破坏为 $0 \times D_1 + T_1 \times D_2 = 3 \times 3 = 9$; 而如果选择先击败怪兽 2, 再击败怪兽 1, 则村庄受到的总破坏为 $0 \times D_2 + T_2 \times D_1 = 5 \times 5 = 25$ 。因此, 勇者应该先击败怪兽 1, 再击败怪兽 2。

现在需要你基于贪婪策略, 设计一个确定击败怪兽最优顺序的算法。

(1) 请描述所用到的贪心选择性质。

(2) 请写出你的算法伪代码, 不得使用具体程序设计语言的实际编码, 不可以调用任何库函数, 但可以直接使用排序函数并按照你所定义的排序方式进行排序。

(3) 请证明你所用到的贪心选择性质的正确性。

16. (共 13 分) 尽可能公平的拔河游戏 某科研团队共有 n 人, 体重分别是 w_1, w_2, \dots, w_n (都是正整数)。为增进成员感情, 该团队决定组织一场友谊拔河赛。考虑到其中或有“横推八马倒, 倒曳九牛回”的大力士, 因此这场友谊拔河赛不要求双方人数相当, 而是希望两边的总体重差达到最小。

例如 4 个人的体重分别是 200、90、90、90 时, 可以将他们分为体重分别为 200 和 90、90、90 的两队, 体重差为 70。

(1) 请为之设计一个动态规划算法, 计算可能的最小体重差。

要求: 给出目标函数的定义表示和算法伪代码 (需要给出最终的返回值)。

(2) 针对输入实例^① $n=5, w_1=11, w_2=5, w_3=4, w_4=3, w_5=3$ ，根据 (1) 中设计的算法，给出求解的**详细**计算过程（用清楚明确的表格表示即可），并给出最小体重差（仅有该结果者此部分不得分）。

17. （共 13 分）问题背景与具体输入实例($n=5, w_1=11, w_2=5, w_3=4, w_4=3, w_5=3$) 同题 16。

请为之设计一个**分支限界**算法。

(1) 请**详细**写出**具体**的估界函数和剪枝依据。

(2) 请针对此输入实例**详细**画出剪枝后的（部分）搜索树。**注意：必须对界进行估计；必须在图中标明剪枝依据。**

(3) 请针对此输入实例给出最小体重差（仅有该结果者此题目不得分）。

^① 为计算方便，此处对数值规模进行了缩小。