

## Chapter 8

# 回溯与分支限界

我们在本章中将介绍回溯和分支限界，回溯法是一种在解空间上进行搜索的策略，它遍历解空间内的每一个解，然后选取符合要求的解。但是缺点是回溯法的时间复杂度比较高，因此我们会进一步讨论如何在回溯法搜索解空间的过程中做精简，从而对回溯法进行分支限界。

### 8.1 回溯法

我们将通过八皇后问题来介绍回溯法。八皇后问题是指在一个  $8 \times 8$  的棋盘上放置 8 个皇后，使得任意两个皇后之间不能攻击，即在同一行，同一列，和与对角线平行的斜线上不能有两个及以上的皇后。

首先，每一行只能放一个棋子，所以我们可以枚举每一行放的棋子的位置，然后等放满 8 行后，看当前的局面是否符合要求。（此时画一个解空间的搜索树，演示解空间的搜索）

这种算法的时间复杂度是  $\Theta(n^n)$ 。

### 8.2 分支限界法

在回溯法的解空间搜索树上做剪枝，就得到了分支限界法。对于八皇后问题，如果在放置过程中发现了已有的棋子已经出现了同一列上有两个棋子了，或者是斜线上有两个棋子了，那么我们就没必要继续搜索下去了。

接下来我们介绍教材 125 页的背包问题。假设我们有四种物品，它们的重量，价值，和可选择数量如表 8.1 所示。我们现在给定一个容量为 10 的背包，问怎样选择物品能够获得最大的价值？

我们可以将这个问题规约到 0-1 背包问题，即将数量按二进制拆分后，进行 0-1 背包（介绍一下如何做）。但这里我们主要要介绍使用分支限界的办法来解决该问题。首先我们构造解空间的搜索树，解空间可以划分为第一个物品选择 0 个或者 1 个这两个

Table 8.1: 物品的重量、价值和可以选择的最多数量

物品 $x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
重量 $w_i$	2	3	4	7
价值 $v_i$	1	3	5	9
数量 $n_i$	1	2	3	5

子空间，然后每个子空间又可以划分为第二个物品选择 0 个、1 个、2 个这三个子空间，然后再递归的划分下去。

但是我们可以对每个子空间的最大价值的上界做一个估计：如果我们允许将物品切割成单位重量，也就是说每个物品的重量都是 1，然后等比例的缩小每个物品的价值为  $v_i/w_i$ ，此时，如果我们将物品按照单位价值由大到小排好序了以后（即表格顺序的逆序），使得  $v_1/w_1 > v_2/w_2 > v_3/w_3 > v_4/w_4$ ，那么对于一个空背包而言，这个背包无论怎么装，价值都不可能超过  $v_1/w_1 \times 10$ 。同理，如果我们这时候枚举了第一个物品放了 1 个以后，剩余的背包的重量是 5，那么接下来我们从剩下三个物品当中，无论怎么放置物品，价值都不可能超过  $V = v_1 \times 1 + v_2/w_2 \times 5$ 。如果假设我们在达到这个搜索节点之前，已经有一个可行的解大于  $V$ ，那么我们就根本不需要搜索这一支了，这样我们就减少了搜索的解空间。（演示整个过程）