

第四次书面作业

- 封面写明学号和姓名，否则此次作业不得分
- 不得使用硬皮本和厚度超过 0.5 厘米的作业本!!! 否则此次作业不得分
- 建议使用 22 开单线本。22 开：约为 207mm×157mm
-
- 10 月 31 日上课铃响之前交至讲台处。本次作业满分 38 分（最终计算总成绩时将折算）。

- 注意：
 - 不得随意省略过程。
 - 仅可以使用推理规则和定理 2.17，不得使用定理 3.13，否则该题目不得分。
 - 进行推理时要按教材的格式书写，每一行都必须写清依据，否则该题目不得分。
 - 讨论关系可能满足的性质时，需要对该关系可能满足的所有性质都进行说明。

4.1 （3 分）利用推理规则作推理演算，构造下面推理形式的证明。

(a) 前提： $(\forall x)(\sim P(x) \Rightarrow Q(x))$, $(\forall x)\sim Q(x)$ 。

结论： $P(a)$ 。

(b) 前提： $(\forall x)(R(x) \vee Q(x))$, $(\forall x)(Q(x) \Rightarrow \sim P(x))$

结论： $(\exists x)(P(x) \Rightarrow R(x))$

(c) 前提： $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow R(x))$, $\sim(\exists x)(Q(x) \wedge \sim S(x) \wedge L(x))$, $\sim(\exists x)(Q(x) \wedge S(x) \wedge \sim P(x))$

结论： $(\forall x)(Q(x) \wedge \sim R(x) \Rightarrow \sim L(x))$

4.2 （6 分）证明下面的推理关系：

(a) 所有的狮子都是凶猛动物，有些狮子不喝咖啡，所以有些凶猛动物不喝咖啡。

(b) 学院的学生不是本科生就是研究生。学院中有的学生是高材生。乐乐不是研究生但是高材生。

所以如果乐乐是学院的学生必定是本科生。

4.3 （3 分）设 A 、 B 、 C 、 D 是任意非空集合。判断下述等式是否成立，如成立，请给出证明；如不成立，请给出反例。

(a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ 。

(b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$ 。

4.4 (1 分) 证明定理 4.5。

4.5 (1 分) 设 $R=R^4$ ，证明 R^3 满足传递性。

4.6 (2 分) 若 R 和 S 都是集合 A 上的反对称关系，判断下述结论是否成立，如成立，请给出证明；如不成立，请给出反例。

(c) $R \cap S$ 是反对称的。

(d) R^2 是反对称的。

4.7 (2 分) 设 R 和 S 为集合 A 上的对称关系，证明： $S \circ R$ 是对称的当且仅当 $R \circ S = S \circ R$ 。

4.8 (1 分) 设 R 是非空集合 A 上的一个关系，满足对称性和传递性。证明：如果对于任意 $a \in A$ ，存在 $b \in A$ 使得 $(a, b) \in R$ ，则 R 满足自反性。

4.9 (1 分) 计算 $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) \times \{\emptyset\}$ 。

4.10 (1 分) 假设 $|A|=n$ ， $|B|=m$ ，那么有多少个从 A 到 B 的不同二元关系？

4.11 (1 分) 若有限集合 A 有 n 个元素，在 A 上可以定义多少个不同的关系？

4.12 (1 分) \mathbb{Z}^+ 上关系 R 定义为 $R=\{(x, y) | 2x+y=12\}$ ，求 $\text{Dom}(R)$ 和 $\text{Ran}(R)$ 。

4.13 (1.5 分) 设 $R=\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ ，计算 $R(0)$ 、 $R(\{1, 2\})$ 、 $R|_{\{1, 2\}}$ 。

4.14 (1 分) 假设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ ，用关系矩阵和关系图表示二元关系 $R=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (4, 2)\}$ 。

4.15 (1 分) 假设集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ ，写出由下述关系矩阵形式定义的 A 上关系的集合表达式和关系图。

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.16 (1 分) 假设集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ ，写出由图 4.1 中关系图表示的 A 上关系 R 的集合表达式和关系矩阵。

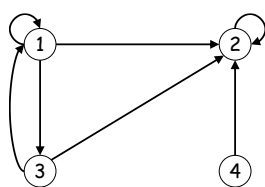


图4.1 习题 4.16 用图

4.17 (3.5 分) 假设集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $R=\{(1, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ 和 $S=\{(1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 3)\}$ 是定义在 A 上的关系, 计算 $R \cap S$ 、 $R \cup S$ 、 $S - R$ 、 \bar{R} 、 R^{-1} 、 $S \circ R$ 、 $R \circ S$ 。

4.18 (1 分) 设 $A=\{a, b, c, d\}$, $R=\{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d)\}$, 求 R^2 和 R^3 。

4.19 (3 分) 对于任意非空集合 S , 定义 $\mathcal{P}(S)$ 上的关系 R 为: $R=\{(A, B) | A, B \in \mathcal{P}(S), A \cap B = \emptyset\}$, 试确定 R 满足的性质。(注意写完整)

4.20 (3 分) 假设有限集合 A 有 n 个元素。

- 计算 A 上的自反关系的个数。
- 计算 A 上的非自反关系的个数。
- 计算 A 上的对称关系的个数。
- 计算 A 上的非对称关系的个数。
- 计算 A 上的反对称关系的个数。
- 计算 A 上既不满足对称性也不满足反对称性的关系的个数。