北 京 交 通 大 学 考 试 试 题（A 卷）

课程名称：算法设计与分析　　学年学期：2021—2022 学年第 1 学期

课程编号：M210004B 开课学院：软件学院 出题教师：刘铎，童浩楠，吴睿智

学生姓名：__________　　学号：__________　　任课教师：__________

学生学院：__________　　班级：__________

注意事项：

① 填涂清楚**学号**。

② **必须**回答在**答题卡**指定位置内，**不在**指定位置内的答题内容**无效**。

③ 如无特殊说明，论证和解答过程必须详尽、写清依据，**不得随意省略**。

第一部分、单项选择题。请选择最适合的答案，并填涂到答题卡上。（共 16 分）

(1) 下列陈述中（　　）表明$f(n)=\Omega(g(n))$。

A. 对所有$n>1$，均有$f(n)\le 4g(n)$　　B. $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$

C. 对所有$n>123$，均有$f(n)\ge 4g(n)$　　D. 以上皆不是

(2) $f(n)=2\log_3 n$　　$g(n)=\log_2(n^4)$

A. $f=O(g)$　　B. $f=\Omega(g)$　　C. $f=\Theta(g)$

(3) $f(n)=n^2+100n$　　$g(n)=(1.01)^n$

A. $f=O(g)$　　B. $f=\Omega(g)$　　C. $f=\Theta(g)$

(4) $f(n)=n^3-n$　　$g(n)=300n^2$

A. $f=O(g)$　　B. $f=\Omega(g)$　　C. $f=\Theta(g)$

(5) $f(n)=n^{100}$　　$g(n)=n!$

A. $f=O(g)$　　B. $f=\Omega(g)$　　C. $f=\Theta(g)$

(6) $f(n)=2^n+n^{10}$　　$g(n)=3^n$

A. $f=O(g)$　　B. $f=\Omega(g)$　　C. $f=\Theta(g)$

(7) 以下算法中，（　　）不是基于分治策略的。

A. 归并排序　　B. 快速排序　　C. Prim 算法　　D. 二分查找

(8) 在 0-1 背包问题中，有若干物品，每件物品有各自的重量和价值，而且背包有一个容量限制。希望在不超过背包容量限制的前提下，使得选取的物品的总价值达到最大。如果使用贪婪策略设计解决 0-1 背包问题的算法，以下论述中（　　）是正确的。

A. 优先选择重量小的物品装入背包（如果可以装下的话），可以确保得到最优解。

B. 优先选择价值高的物品装入背包（如果可以装下的话），可以确保得到最优解。

C. 优先选择比值[价值/重量]大的物品装入背包（如果可以装下的话），可以确保得到最优解。

D. A、B 和 C 的三种策略都不能确保得到最优解。

第二部分、计算题。（共 34 分）

9. （共 12 分）设原问题的规模为 n，假定你需要在以下 3 种算法中做出抉择：

- 算法 A 将原问题划分成规模减半的 5 个子问题，递归地求解这些子问题，然后在线性时间内将子问题的解合并，得到原问题的解。
- 算法 B 这样求解规模为 n 的原问题：先递归地求解 2 个规模为 $n-1$ 的子问题，然后在常量时间内将子问题的解合并。
- 算法 C 将规模为 n 的原问题划分成规模为 $n/3$ 的 9 个子问题，递归地求解这些子问题，然后在 $O(n^2)$时间内将子问题的解合并。

（1）给出以上 3 个算法的运行时间的递归关系，并计算出各个算法的实际时间复杂度，以大-O 标记表示。

（2）按照阶从低到高的顺序，对以上 3 个算法的时间复杂度进行排序。并请回答：为了更快地解决问题，你会选择哪个算法？

10.（共 12 分）假设矩阵 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4, \boldsymbol{A}_5, \boldsymbol{A}_6$ 的阶如下：

$\boldsymbol{A}_1$ 是 2×3 阶矩阵，$\boldsymbol{A}_2$ 是 3×7 阶矩阵，$\boldsymbol{A}_3$ 是 7×9 阶矩阵，

$\boldsymbol{A}_4$ 是 9×5 阶矩阵，$\boldsymbol{A}_5$ 是 5×2 阶矩阵，$\boldsymbol{A}_6$ 是 2×4 阶矩阵

表 1 和表 2 分别表示使用动态规划算法求解矩阵链乘积 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{A}_5\boldsymbol{A}_6$ 所需的最少标量乘法（即矩阵元素之间的乘法）次数的目标函数数组（备忘录）和标记函数数组，其中，$m[i, j]$表示计算求 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_{i+1}\cdots\boldsymbol{A}_j$ 所需的最少数量乘法次数，$s[i, j]$表示相应的最优解信息。

（1）请填充表 1 和表 2 中空缺的数据（考生须自行在答题卡上绘制表格）。

（2）根据数组 s 确定求 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{A}_5\boldsymbol{A}_6$ 的最优顺序（通过加括号表示，直接给出结果即可）。

表 1 目标函数 $m[i, j]$

$m[i, j]$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
$i = 1$						
$i = 2$						
$i = 3$						
$i = 4$						
$i = 5$						
$i = 6$						

表 2 标记函数 $s[i, j]$

$s[i, j]$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
$i = 1$	/	1				
$i = 2$		/	2			
$i = 3$			/	3		
$i = 4$				/	4	
$i = 5$					/	5
$i = 6$						/

11.（共 10 分）有 4 种不同的硬币，面值分别是 $v_1=1, v_2=4, v_3=6, v_4=8$。现在需要用这些硬币付款购买总价为 19 的一本书。如果每种硬币使用的个数不限，问如何选择付款的方法使得付出硬币的总个数达到最少？

使用**动态规划**算法（而**不是递归**方法）求解该问题。

（1）请给出目标函数和标记函数的定义/表示、递推关系和初值。

（2）请给出详细的计算过程，包括目标函数数组（备忘录）和标记函数数组的具体值。

（3）请详细说明付款的**具体**最优方案（**不仅仅**是硬币的总个数）。

第三部分、综合分析题。（共 50 分）

12.（共 12 分）假设有若干种硬币，其面值分别为 $1, p, p^2, \cdots, p^n$，其中 n 为正整数，p 为大于 1 的正整数。

（1）设计一个贪心算法，使得对任何钱数 y，该算法得到的总面值和为 y 的硬币数可达到最小。

（2）证明你在（1）中设计的算法的正确性。

（3）现在有若干种硬币，其面值分别为 $1, p, p^2, \cdots, p^n, q, q^2, \cdots, q^m$，其中 m 和 n 为正整数，p 和 q 为大于 1 的整数且 $p \neq q$。那么你在（1）中设计的贪心算法的基本策略在此时是否还可以确保得到最优解（硬币数达到最小）？请**详细**说明你的理由。如果成立的话请证明之；如果不成立的话请举出具体反例。

13.（共 12 分）给定一个有序数组 A[1..n]，其中元素各不相同，要求确认是否存在一个数组索引 i，使得 **A[i] = i**。（假设若 $i<j$ 则 A[i]<A[j]）

（1）给出一个针对以上任务的**分治**算法（必须使用**伪代码**描述，不得使用具体程序语言的实际编码），要求该算法的运行时间为 $O(\log n)$。

（2）写出你所设计的算法的时间复杂度的递推关系式和初值，并验证其时间复杂度为 $O(\log n)$。

14. （共 13 分）希望在图 1 所示有向图中寻找从左上角到右下角的道路（须沿边的方法行进），使道路经过的点的数值之和**达到最小值**。

请为之设计一个**动态规划**算法。

（1）请给出目标函数和标记函数的定义/表示、递推关系和初值。

（2）请给出详细的计算过程，包括目标函数数组（备忘录）和标记函数数组的具体值。

（3）请**详细**给出最终结果，包括道路选择和最小数值和。

15. （共 13 分）希望在图 1 所示有向图中寻找从左上角到右下角的道路（须沿边的方法行进），使道路经过的点的数值之和**达到最小值**。

请为之设计一个**分支限界**算法。

（1）请**详细**写出**具体**的估界函数和剪枝依据。

（2）请**详细**画出剪枝后的（部分）搜索树。

（3）请**详细**给出最终结果，包括道路选择和最小数值和。

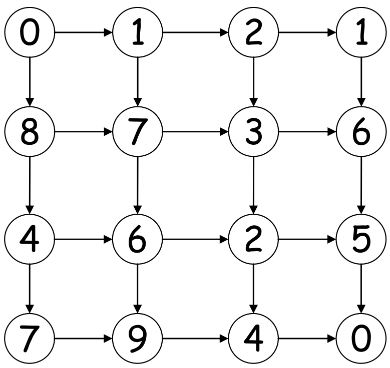

图 1 题目 14、15 用图

以下部分可作为草稿纸使用