

学号	姓名	论文规范性 (10)	问题分析与调研 (30)	方案创新性 (20)	实验结果分析与讨论 (40)	结课论文总成绩 (100)
21301040	胡涵哲	6	23	16	33	78

格式问题较多

北京交通大学

计算机图形学结课论文

基于球谐函数的光照投影与可视化研究

Research on illumination projection and visualization based on
spherical harmonics

学 院: 软件学院

专 业: 软件工程

学生姓名: 胡涵哲

学 号: 21301040

北京交通大学

2024 年 6 月

中文摘要

在计算机图形学中，球谐函数用于表示和渲染三维场景中的光照。通过球谐函数，可以捕捉和存储环境光照的分布，从而在渲染时提供更加真实和高效的光照效果。本文旨在探讨如何使用球谐函数对光照进行投影，并可视化了处理后效果。通过设计实验，分别可视化了未经球谐投影和经过球谐投影的光照投影，并对结果进行了较为详细的分析。实验结果表明，球谐投影能够有效地逼近复杂光照环境，为实时渲染提供了可行的解决方案。

1. 引言

在计算机图形学中，光照模型起着至关重要的作用。光照模型是描述物体如何与光源相互作用的数学模型，它用于计算物体表面的光照效果，使得计算机生成的图像更加逼真和真实。而本文研究的球谐函数（Spherical Harmonics）作为一种数学工具，能够有效地对球面上的函数进行逼近，在光照的计算中具有重要应用。

2. 相关工作介绍

球谐函数的概念最早可以追溯到 18 世纪，当时数学家们研究的是勒让德多项式（Legendre Polynomials），这是球谐函数的基础。在 19 世纪，球谐函数的理论得到了进一步的发展，数学家们开始更深入地研究它们的性质和分类。1822 年，英国数学家乔治·格林（George Green）引入了球谐函数的现代概念，并研究了它们在电磁学中的应用。在 20 世纪后半叶，随着计算机科学的发展，球谐函数在计算机图形学中的应用开始兴起。球谐函数被用于模拟和渲染复杂的光照效果，尤其是在游戏和电影制作中。1992 年，美国数学家史蒂夫·拉纳（Steve Langer）和加拿大数学家洛恩·汉密尔顿（Lorensen）发表了关于球谐函数在图形学中应用的先驱性工作，这标志着球谐函数在计算机图形学中的广泛应用开始。

3. 方法描述

3.1 球谐函数基础

在数学中，一个基函数是一个函数空间（Function Space）中的一个基底，就像欧拉空间中的一个坐标轴一样。在函数空间中，每个连续的函数都可以表示为基函数的线性组合。

球谐函数是一个定义在球面坐标系下的一组基函数，和傅里叶变换类似，球谐函数可以近似任意定义在球面上的函数。

球谐函数在球面坐标系下表示为^[1]：

$$y_l^m(\theta, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{2}K_l^m \cos(m\varphi)P_l^m(\cos\theta), m > 0 \\ \sqrt{2}K_l^m \sin(-m\varphi)P_l^{-m}(\cos\theta), m < 0 \\ K_l^0 P_l^0(\cos\theta), m = 0 \end{cases}$$

公式 3-1

式中的 $P_l^m(m, l)$ 是 l 阶 m 次的连带勒让德多项式，可通过下式计算得到：

$$\begin{aligned} P_l^m &= x(2l-1)P_{l-1}^m - (l+m-1)P_{l-2}^m \\ P_m^m &= (-1)^m(2m-1)!!(1-x^2)^{m/2} \\ P_{m+1}^m &= x(2m+1)P_m^m \end{aligned}$$

公式 3-2

代码实现如下：

```
double K(int l, int m)
{
    // 计算SH函数的归一化常数
    double temp = ((2.0 * l + 1.0) * Factorial(l - m)) / (4.0 * MYPI * Factorial(l + m));
    return sqrt(temp);
}

double SH(int l, int m, double theta, double phi)
{
    // 返回球谐函数基函数的值
    // l 是频带，范围为 [0..N]
    // m 在范围 [-l..l] 内
    // theta 的范围是 [0..Pi]
    // phi 的范围是 [0..2*Pi]
    const double sqrt2 = sqrt(2.0);
    if (m == 0) return K(l, 0) * P(l, m, cos(theta));
    else if (m > 0) return sqrt2 * K(l, m) * cos(m * phi) * P(l, m, cos(theta));
    else return sqrt2 * K(l, -m) * sin(-m * phi) * P(l, -m, cos(theta));
}
```

图 3-1 球谐函数基函数值计算

3.2 球谐光照投影

把空间分布函数投影为 SH 系数就是函数与球谐基函数在球面的积分。空间的函数它的投影过程就能够表示为^[2]：

$$c_l^m = \int_S f(s) y_l^m(s) ds$$

公式 3-3

根据这些投影到球谐基函数上的系数，重构逼近原函数则只需要把上面的过程反过来：

$$\tilde{f}(s) = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l c_l^m y_l^m(s) = \sum_{i=0}^{n^2} c_i y_i(s)$$

公式 3-4

在进行球面积分的时候，即对每个量化的球面小块，球面微分可以写出单个系数：

$$c_i = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{light}(\theta, \varphi) y_i(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$$

公式 3-5

3.3 球谐函数基本性质

性质 1：SH 函数是标准正交的(orthonormal)。

性质 2：SH 函数具有旋转不变性(rotationally invariant)，即如果函数 g 是函数 f 的旋转后的版本，那么在做了 SH 投影之后：

$$\tilde{g}(s) = f(R(s))$$

公式 3-6

性质 3: SH 函数具有旋转不变性 (Rotating Spherical Harmonics)。

4. 实验设置

4.1 实验环境

开发环境: Visual Studio 2019

图形库: OpenGL 4.5, GLFW 3.3

处理器: 11th Gen Intel(R) Core(TM) i5-11300H @ 3.10GHz

4.2 实验步骤

4.2.1 球谐样本生成:

使用随机分布的方法生成球谐样本。为了在球面上均匀分布样本点, 我们使用抖动分层 (jittered stratification) 的方法。该方法通过在每个网格单元内随机选择一个点来实现样本点的均匀分布。再将球面坐标转换为三维单位向量, 表示样本点在三维空间中的位置。对于每个样本点, 计算并存储所有频带的球谐函数基函数值。这些值将在光照函数投影过程中使用。

4.2.2 光照投影计算:

首先定义并初始化一个结果数组 `result`, 用于存储计算出的每个球谐基函数的系数。结果数组的大小为频带数的平方。

实现函数 `SH_project_polar_function` 完成光照函数的投影, 具体步骤如下:

首先计算每个样本点的光照强度, 对于每个样本点, 根据其球面坐标 θ 和 φ , 计算光照函数的值 $L(\theta, \varphi)$ 。

再累加光照函数值与球谐基函数值的乘积, 将光照函数值与对应的球谐基函数值相乘, 并累加到相应的球谐系数中。

最后将累加结果除以权重和样本数量, 以得到最终的球谐系数。通过球谐系数高效地近似和重建原始光照。

4.2.3 光照强度可视化:

调用函数 `SH_setup_spherical_samples` 生成球谐函数样本，然后调用 `SH_project_polar_function` 计算光照投影的球谐系数。

使用 OpenGL 进行渲染分别渲染未经投影和经过投影的光照数据进行可视化展示。

5. 实验结果与分析

5.1 原始光照强度可视化

首先渲染未经球谐投影的光照数据。结果显示，光照强度分布不均，存在明显的高光和阴影区域。

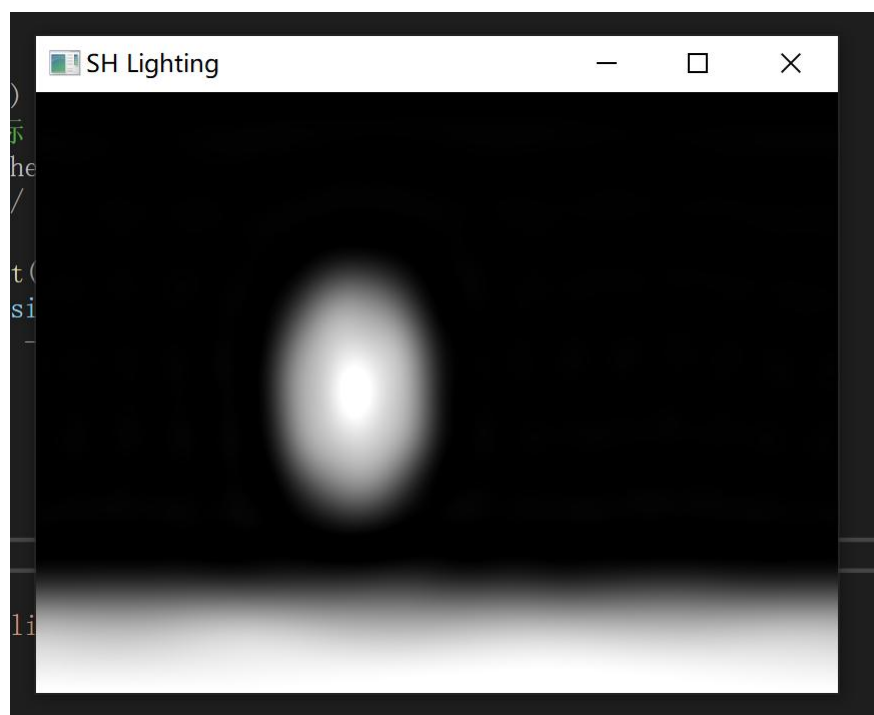


图 5-1 原始光照可视化图

5.2 球谐光照强度可视化

经过球谐投影处理后的光照数据较为平滑，能够较好地逼近复杂光照环境。尽管在细节上有所损失，但总体光照效果较好。

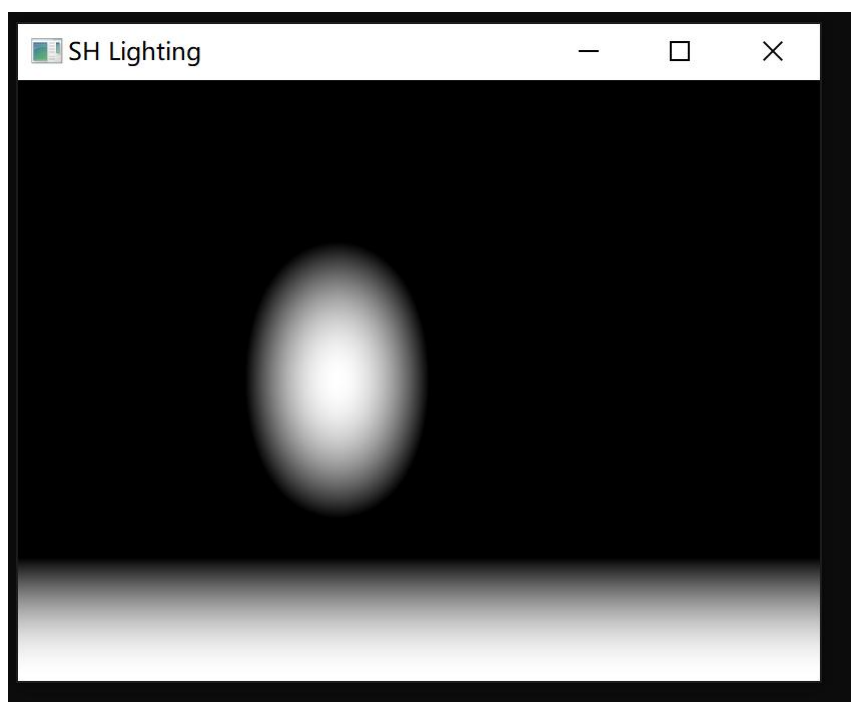


图 5-2 球谐投影处理后光照可视化图

5.3 对比分析

通过对比可以发现，当显示原始光照数据时，光照分布直接由预定义的光照函数计算得到，未经过任何球谐函数投影。光照分布具有较为显著的区域特征，亮暗交替明显。球谐光照投影后，光照分布更加平滑，部分细节被抹去，但总体趋势保持不变。

可以看到：球谐函数适用于描述全局光照特性。球谐函数能够有效地捕捉光照的整体分布，但由于频带限制，局部细节较难保留。通过增加频带数，可以提高球谐函数对局部细节的捕捉能力，但计算复杂度也会增加。

6. 结论

本文研究了球谐函数在光照投影与可视化中的应用，验证了其在全局光照计算中的有效性，是实时渲染的一个可行解决方案。且通过对比实验结果发现，球谐函数能够很好地捕捉光照的全局特性，适合于实时渲染和动态光照环境，然而不具有较高的精度和细节，确少对局部细节的捕捉能力。

在视觉效果上，原始光照数据的视觉效果细节丰富，适用于高保真光照效果的场景。而球谐光照投影后的数据视觉效果更加平滑，适用于全局光照计算，可以减少动态光照环境中的闪烁和噪声。

本次实验仍较为简单粗糙，后期我将继续学习更多球谐函数知识，精进本次实验投影算法，并将其应用在更为复杂且具有实用性的场景中。

参考文献

- [1] 魏明. 使用球谐函数实现动态环境光源下的实时绘制[D]. 南京大学, 2012.
- [2] 万永革, 石瑞青. 球谐函数的可视化研究[J]. 防灾技术高等专科学校学报, 2004(01):8-10.