

学号	姓名	论文规范性 (10)	问题分析与调研 (30)	方案创新性 (20)	实验结果分析与讨论 (40)	结课论文总成绩 (100)
21301118	鲍泽	6	20	14	26	66

引用格式有问题；没有进行实验



计算机图形学论文

拓扑优化

学 院： 软件学院

专 业： 软件工程

学生姓名： 鲍 泽

学 号： 21301118

指导教师： 吴雨婷

北京交通大学

2024 年 6 月

目 录

中文摘要	错误！未定义书签。
ABSTRACT	错误！未定义书签。
目 录	11
1 引言	1
2 拓扑优化技术发展及现状	错误！未定义书签。
3 AS/AM 技术	错误！未定义书签。
3.1 拓扑优化技术	错误！未定义书签。
3.2 AS/AM 技术	错误！未定义书签。
3.3 梯度计算	错误！未定义书签。
3.4 领域处理	错误！未定义书签。
3.5 归 0/1 处理	错误！未定义书签。
4 实际开发中拓扑优化的延展	错误！未定义书签。
4.1 实际场景中对模型的优化	错误！未定义书签。
4.2 对于受力承重部分的优化	错误！未定义书签。
4.3 微结构的开发	错误！未定义书签。
4.4 3D 打印中悬空问题的处理	错误！未定义书签。
4.5 3D 打印中时间问题的拓扑优化	错误！未定义书签。
参考文献	9
致 谢	11
附 录	11

1 引言

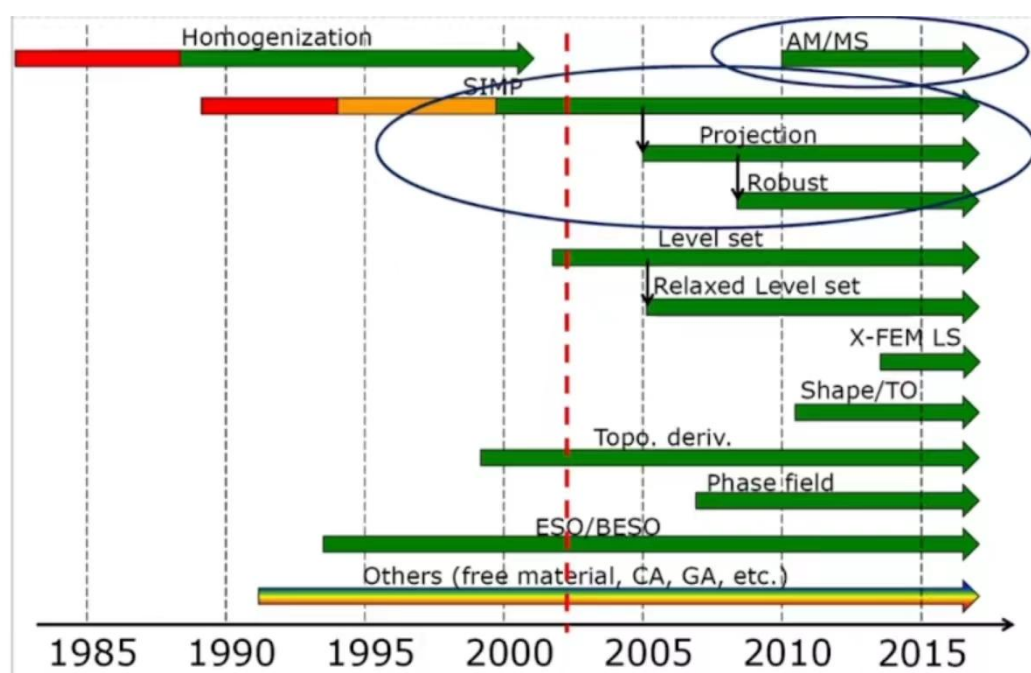
拓扑优化（Topology Optimization）技术作为一种先进的设计方法，近年来在工程和制造领域得到了广泛的关注和应用。它利用数学算法和计算机仿真，通过优化材料的分布，使结构在满足一定约束条件下，达到某种性能指标的最优状态。这一技术不仅能够显著提高材料利用效率，降低生产成本，还能实现传统设计方法难以实现的复杂结构，从而在航空航天、汽车制造、生物医学工程等领域展现出巨大的潜力。

2. 拓扑优化技术发展及现状

拓扑优化技术自 1985 年被首次提出，距今已有 40 余年，当时提出的方法是利用均值技术进行的拓扑优化（Homogenization），但是在沿用了十余年之后，于 21 世纪初被基本弃用，此后 SIMP，X-FEM 等技术相继发展，各有优势。

在 2010 年前后，得益于微结构设计出现 Homogenization 技术被重提，并且直到现在发展势头正猛，研究深入，并且在此基础上提出了 AS/AM 及 Level set 的方法，以及许多变种方法。通俗来讲，AS/AM 主要应用在对于材料密度进行计算，对产品进行拓扑优化设计，保证产品可以兼顾外观与实用性，应用十分广泛，属于计算机图形学前沿技术。

（图 1-1）

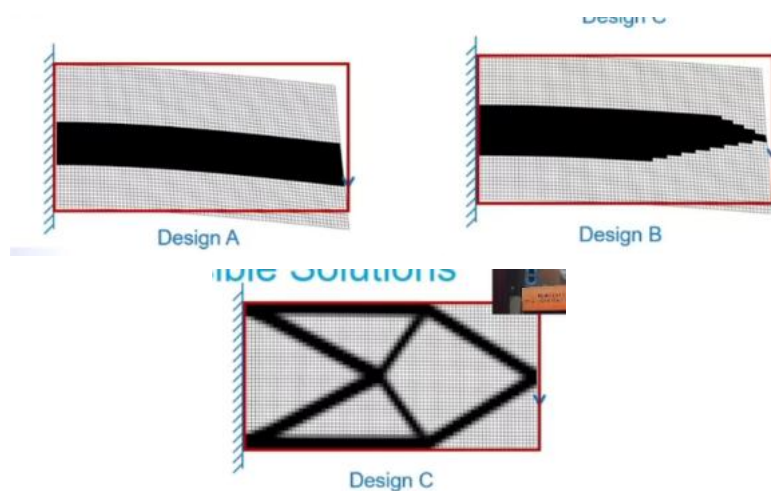


（图 1-1）

3. AS/AM 技术

1. 拓扑优化技术

拓扑优化技术意图在找到材料最不易形变的结构，即在实际应用中最稳定的结构，施以图解，在下面图形中我们随机选取几个点位，在天文数字的不同结构中找到当施以外力时产生最小形变的结构即是拓扑优化技术的主要实际目的。（图 2-1）



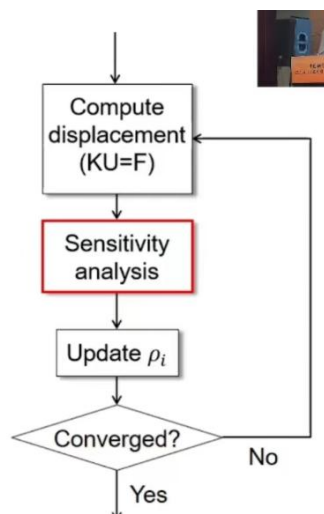
图（2-2）

对于这种实现，上述的不同拓扑优化技术都可以予以实现，而 AS/AM 基于材料密度实现则有得天独厚的优势，易于实现并且易于理解。

2. AS/AM 技术

基本函数 $c = 1/2U^T(KU)$ ， $KU=F$ 意在找到最小的 c ，即材料结构的弹性势能，此时系统的刚度是最大的，最稳定的，对于公式有三个约束，静力平衡方程（ $KU=F$ ），变量约束（只能在某个限定范围内取值，即材料用量的约束），体积约束。对基本函数进行不断迭代计算，得到梯度，不断更新，最后获得结构收敛。

（图 2-3）



(图 2-3)

3. 梯度计算

主要利用 Adjoint Analyse 计算 (图 2-4)

$$\begin{aligned}
 L(\boldsymbol{\rho}) &= \frac{1}{2} U^T K U + \boldsymbol{\lambda}^T (K U - F) \\
 \frac{\partial L}{\partial \rho_e} &= U^T K \frac{\partial U}{\partial \rho_e} + \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial K}{\partial \rho_e} U + K \frac{\partial U}{\partial \rho_e} \right) \\
 &= (U^T K + \boldsymbol{\lambda}^T K) \frac{\partial U}{\partial \rho_e} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial K}{\partial \rho_e} U \\
 \text{Let } U^T K + \boldsymbol{\lambda}^T K &= 0 \\
 \text{We get } \boldsymbol{\lambda} &= -U \\
 \text{Then, } \frac{\partial L}{\partial \rho_e} &= -U^T \frac{\partial K}{\partial \rho_e} U
 \end{aligned}$$

(图 20-4)

利用梯度对模型进行迭代计算，最后可以得到初步的结果。此时得到的结果可能会是以点相连的无法实现在现实中的，为了解决此问题，引入了邻域处理算法。

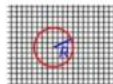
4. 邻域处理

邻域处理算法可以对二位及三维的结构进行处理去除掉无邻域的情况，让结构更符合实际情况 (图 2-5)

Neighborhood:

$$N_e = \{i \mid ||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_e|| \leq R\},$$

where R is the filter radius.



Sensitivity filtering $\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = \frac{\sum_{i \in N_e} H(\mathbf{x}_i) \rho_i \frac{\partial c}{\partial \rho_i}}{\rho_e \sum_{i \in N_e} H(\mathbf{x}_i)}$

Sigmund (1994/1996) + Sigmund&Maute (2012)

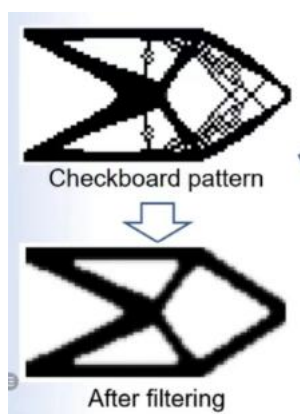
Density filtering $E_e(\rho) = \tilde{\rho}_e^p E_0, \quad \tilde{\rho}_e = \frac{\sum_{i \in N_e} H(\mathbf{x}_i) A_i \rho_i}{\sum_{i \in N_e} H(\mathbf{x}_i) A_i}$

(图 2-5)

对于二维结构，采用圆滤波（Sensitivity filtering）对结果进行过滤，去除有些点位邻域全为 0 的情况（实际结构中的断点），保留可实操的情况进行后续操作。

对于三维结构，采用球滤波（Density filtering）对结果过滤，原理同上，不过多赘述。

对于邻域的选取一般是圆形和球形，其大小也会影响滤波效果，选取合适的滤波要兼顾可实现性及实用性。效果图如下（2-6）



(图 2-6)

此时结构还是存在问题，有些点位是虚化的，因为结构在取值时（即某个点是否有材料）并不是严格按照整数取值，这样求解难度过大，并且得到结果少，会排除掉很多优秀的结构，因此取值约束定为 $[0, 1]$ 的取值域内进行取值，这样易于计算，会获得更

多结果。对于这些结果进行归 0 或者归 1 处理。

5. 归 0/1 处理

利用投影函数对处于非 0/1 的值进行处理，让最后得到的结构是严格遵守整数规则的最广泛利用的投影函数（图 2-6）

$$\rho_e = \frac{\tanh(\beta\mu) + \tanh(\beta(\phi_e - \mu))}{\tanh(\beta\mu) + \tanh(\beta(1 - \mu))}$$

（图 2-6）

以上即实现了拓扑优化的完整过程，在实际开发中还需要考虑很多因素，对于以上过程进行进一步细化。

4. 实际开发中拓扑优化的延展

1. 实际场景中对模型的优化

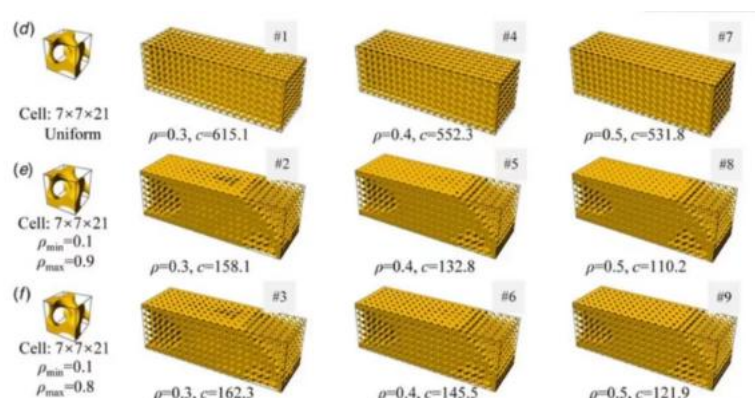
实际场景中，对于结构中的不同部位有不同的应对情况，例如有些地方要做固定，有些地方需要称重，此时的受力情况不尽相同，需要针对具体情况进行分析，并对模型的相应部分进行优化。

2. 对于受力承重部分的优化

规定特定的受力方向，以及固定受力结构的形状，产生的结果会更适合投入实际使用中，通过不同的约束限制条件也可以实现一些特性。通过调整一些参数可以实现某些特殊需求的开发，也正是拓扑优化技术的精髓所在，很大程度决定了开发的实用性好坏。

3. 微结构的开发

微结构旨在对某些小单元的内部结构进行设计，让其在尽可能轻便的情况下拥有足够的牢固性，稳定性，让原件节省资源的同时拥有更好的性能，可以利用三轴机直角曲面作为微结构的结构单元结合拓扑优化进行元件结构设计。（图 3-1）



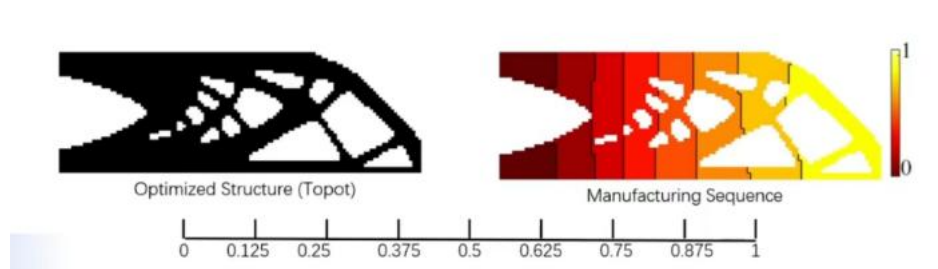
（图 3-1）

4. 3D 打印中悬空问题的处理

利用拓扑优化设计支撑结构，优化打印细节及热传导能力，有两种选择，设计易于剥离的支撑结构，或者设计支撑自己的结构。过程包括输入模型，对于模型不同部分分别进行优化，，力求用最少的打印成本做出稳定的结构。

5. 3D 打印中时间问题的拓扑优化

结构设计的不够好在打印过程中会出现形变，因此可以对打印结构进行分段，在不同时间段内的打印结构进行拓扑优化处理，保证在打印过程中不会因为结构问题而产生形变损伤。（图 3-2）



（图 3-2）

参考文献

- [1] Y. Liu, X. Ma, H. Zhang, G. Wang, and L. Liu, "A survey on topology optimization of structures," *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 10, no. 5, pp. 1-20, 2018.
- [2] M. P. Bendsøe and O. Sigmund, *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [3] B. Zhu, M. Skouras, D. Chen, and W. Matusik, "Two-scale topology optimization with microstructures," *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 36, no. 4, pp. 1-16, 2017.
- [4] N. Aage, E. Andreassen, B. S. Lazarov, and O. Sigmund, "Giga-voxel computational morphogenesis for structural design," *Nature*, vol. 550, no. 7674, pp. 84-86, 2017.
- [5] F. Wang, J. Gao, Y. Wang, and G. Dai, "A level set method for structural topology optimization based on combination of shape and topological derivatives," *Chinese Journal of Aeronautics*, vol. 26, no. 6, pp. 1420-1427, 2013.

致 谢

附 录

附录 A 程序代码【1 级标题，三号黑体字】

[内容为五号宋体。] 附录是作为论文主体的补充项目，并不是必须的。
论文的附录依序用大写正体英文字母 A、B、C……编序号，如：附录 A。

附录 B 工程图纸【1 级标题，三号黑体字】