

刚体空间变换

作者：追风少年

邮箱：ouyangacas@gmail.com

时间：2016/12/29

本文为作者原创文章，未经作者允许不得转载，谢谢合作！

前言

在定位导航领域，最基本知识当属空间几何、刚体变换等，尤其是对于机器人领域，开发人员涉及到大量的空间转换和刚体运动方面细节。稍有不慎，就有可能发生错误和混淆，有时一个小的错误，就会导致算法无法正常运行，令人十分苦恼。本文梳理了一些基础的刚体变换知识，更侧重于从应用角度来分析刚体空间变换。

一 笛卡尔坐标以及右手法则

Note: 英国法律规定马路行车靠左行驶，我国法律规定行军靠右行驶。

空间 XYZ 三维坐标中，当在某个平面内确定 XY 轴的正方向时，Z 轴的选择有两种可能性：垂直平面的两个方向。为了**规范坐标系建立的一致性**，选择右手定则进行确定，我们称为笛卡尔坐标。

右手定则：伸出右手，将拇指指向 X 轴的正方向，食指指向 Y 轴正方向，则中指所指示的方向即为 Z 轴的正方向。

规定旋转方向：在右手坐标系中，物体旋转的正方向是右手螺旋法则，即从该轴正半轴向原点看，逆时针方向为其正方向。

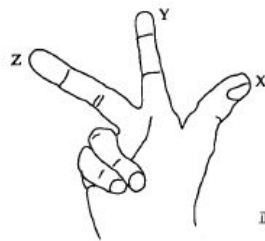


图 a) 右手规则

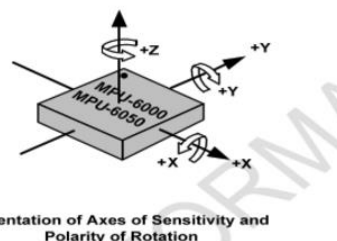


图 b) 规定旋转方向

二 坐标系

室内定位过程中，需要建立不同坐标系的观测，如载体坐标系(Body Coordinate)观测的加速度、角速度等转换到世界坐标系(Earth Coordinate)进行运算。这里选最常用的两种坐标系解释。

载体坐标轴(B):

一般地，在航天飞行领域和计算机图形学中，选取载体前进方向为 x 轴正方向，右侧翼方向为 y 轴正方向，向下为 z 轴正方向。

世界坐标系(E):

世界坐标系可以选择 ENU 坐标系(Eeath、North、Up)、END 或者其变体。

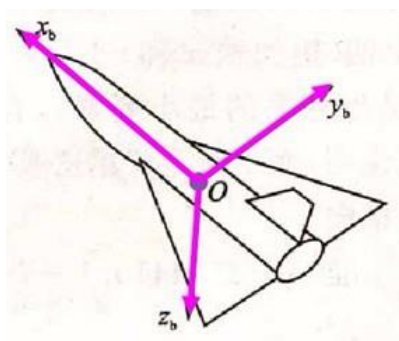


图 a) 载体坐标系(B)

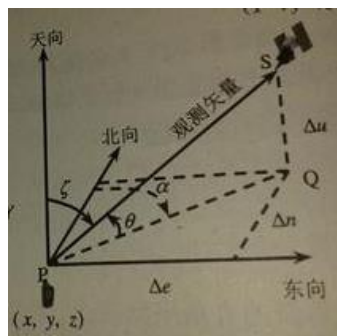


图 b) 世界坐标系(E)

Tips: 在实际项目开发中，我们往往会使用一些开源库进行开发，需要强调的是，在使用其提供的 API 之前，必须要搞清楚开源库函数坐标系的选取和基准是否与目前系统参照有所冲突，有时方向不一致十分影响程序的运行，尤其是科研研发当中!!

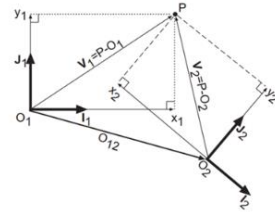
三 空间变换

3.1 什么是空间变换

简言之，空间变换是把**载体坐标系(动)**下观测的变量(向量)换算成**世界坐标系(定)**下的对应值，获得有用的数据，即将载体 Body 坐标系 B 转换到世界坐标系 E 。

设空间 ${}^A R$ 下的一组单位正交基为 $\{i_1, j_1, k_1\}$, ${}^B R$ 下的一组单位正交基为 $\{i_2, j_2, k_2\}$, 则 $\{B\}$ 坐标系下的基坐标在坐标系 $\{A\}$ 下的表示为

$$\begin{cases} {}^A x_B = r_{11}i_2 + r_{21}j_2 + r_{31}k_2 = i_1 \\ {}^A y_B = r_{12}i_2 + r_{22}j_2 + r_{32}k_2 = j_1 \\ {}^A z_B = r_{13}i_2 + r_{23}j_2 + r_{33}k_2 = k_1 \end{cases}$$



由空间变换的定位可知, 使用不同基坐标观测一个矢量, 会在不同的度量空间下得到不同的表示, 而空间变换的意义就在于能够建立两个空间的连接, 即旋转矩阵 R 。

$${}^A R_B = [{}^A x_B, {}^A y_B, {}^A z_B] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & o & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

显然, 由向量空间旋转知, ${}^A R_B = \text{Rotation}_{A \rightarrow B}$ 表示为作用于基坐标 $\{A\}$ 到基坐标 $\{B\}$ 的旋转;
 ${}^A R_B$ 作用于 $\{B\}$ 下的坐标则得到由 $\{A\}$ 基坐标构成的空间, 称为坐标变换。

上式助记符, ${}^A R_B$ 的含义为 $\{B\}$ 坐标系下的单位正交基在坐标系 $\{A\}$ 下的表示。则如果需要将 $\{B\}$ 坐标系上的矢量表示为坐标系 $\{A\}$, 则 ${}^B x$ 乘以这组正交基 $[{}^A x_B, {}^A y_B, {}^A z_B]$ 即可:

$${}^A x = {}^A R_B {}^B x$$

其中, ${}^A R_B$ 表示刚体 B 相对于坐标系 A 的姿态的旋转矩阵。

Tips: 空间由一组正交基表示, 则空间变换的核心当然就是这组正交基之间的关系, 步骤为

使用 $\{A\}$ 表示 ${}^A x$ \rightarrow 寻找 $\{B\}$ 到 $\{A\}$ 之间变换 \rightarrow 使用 $\{B\}$ 表示 ${}^A x$

3.2 向量旋转与坐标系姿态

向量旋转是指在同一坐标系下, 经过旋转后原向量与当前向量之间的变换关系, 注重空间位置关系。

坐标系姿态则是指同一观测量在不同坐标系(基元)下表示之间的变换关系, 一般地需要将其中一个基坐标旋转至另一个基坐标对齐。

从两者的定义来说, 向量旋转描述的是旋转矩阵作用于空间向量而坐标系姿态则是旋转矩阵作用于一组基坐标。不难发现, 在数学表达形式上, 旋转矩阵表达形式一致, 其含义却大不

相同，不可混淆。

3.3 基本旋转

将绕 X, Y, Z 轴的旋转变换称为基本变换。

$$R(X, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R(Y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R(Z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

任何的旋转都可以由如上的基本变换组合而成。但旋转合成过程中需要区分两种情况：旋转轴固定和旋转轴不固定。

若旋转经过的姿态为 $\{A\}, \{B\}, \{C\}$ ，旋转合成应该分情况讨论：

载体每次的旋转过程都是绕着同一基坐标系(基坐标变换，如地球坐标系为参照)进行，则旋转合成可以表示为

$$T = T_3 T_2 T_1$$

载体每次的过程都是绕着当前坐标系(联体坐标变换，如中间姿态的坐标系为参照)进行，则旋转合成可以表示为

$$T = T_1 T_2 T_3$$

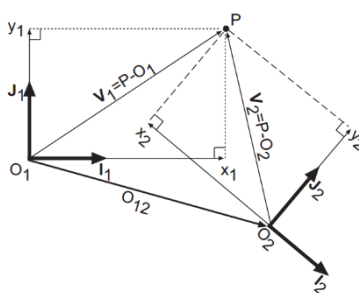
以上规律，通常被称之为**右乘联体左乘基**，该口诀会在之后的欧拉角以及各种旋转表达式中表现出来，可以看出合成运动与旋转次序有着必然联系。

四 空间姿态

空间姿态的表示方式有方向余弦(Direction Cosine)、欧拉角(Euler Angle)、四元数法(Quaternion)等,其中方向余弦(Direction Cosine)、欧拉角(Euler Angle)表示方法直观便于进行空间理解和图形展示但运算性质不佳,而四元数法在数学性质上有着很好的表达能力,所以在实际应用中常常需要相互转换,获取全面的姿态表示,其优劣将在下面进行讨论。

4.1 方向余弦法 (Direction Cosine)

已知在坐标系 1 的向量 v_1 表示为



可以表达为:

$$v_1 = x_1 I_1 + y_1 J_1 + z_1 K_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^1 = [v]^1 = \begin{bmatrix} I_1^x v \\ J_1^y v \\ K_1^z v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^T \\ J_1^T \\ K_1^T \end{bmatrix} v$$

$$\Rightarrow v_1 = O_{12} + v_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix}^1 + [v_2]^1$$

最后有空间变换公式:

$$\begin{aligned} [v_2]^1 &= \begin{bmatrix} I_1^T \\ J_1^T \\ K_1^T \end{bmatrix} (I_2 x_2 + J_2 y_2 + K_2 z_2) \\ &= \begin{bmatrix} I_1 \cdot I_2 \\ J_1 \cdot I_2 \\ K_1 \cdot I_2 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} I_1 \cdot J_2 \\ J_1 \cdot J_2 \\ K_1 \cdot J_2 \end{bmatrix} y_2 + \begin{bmatrix} I_1 \cdot K_2 \\ J_1 \cdot K_2 \\ K_1 \cdot K_2 \end{bmatrix} z_2 \\ \mathbf{R}_2^1 &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) & \cos(\beta_1) & \cos(\gamma_1) \\ \cos(\alpha_2) & \cos(\beta_2) & \cos(\gamma_2) \\ \cos(\alpha_3) & \cos(\beta_3) & \cos(\gamma_3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.2 欧拉角 (Euler Angle)

欧拉角表示方法由著名数学家欧拉首次提出，主要用于飞行器、制导与导航、小型飞行器等设备调节姿态，以便到达指定姿态和位置，这种方式的空间变换便于人的理解和操作。欧拉角表示方法认为，任意姿态变换可以分解为分别绕 X、Y、Z 轴的旋转变换合成来表示。

旋转次序：依次绕着三个坐标轴的旋转可以描述任意一个旋转。事实上这样会有 27 种可能的旋转次序，但是仅仅有 12 种满足连续 2 次旋转不为同一旋转轴，如下所示：

$$(i, j, k) \in \{ (1, 2, 1), (1, 2, 3), (1, 3, 1), (1, 3, 2), \\ (2, 1, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (2, 3, 2), \\ (3, 1, 2), (3, 1, 3), (3, 2, 1), (3, 2, 3) \}.$$

图中黑色加粗旋转序列是实际应用中最常见的选择。

序列{3, 1, 3}(ZXZ)，被称为 Leonhard Euler，是以 18 世纪瑞士数学家和物理学家 Leonhard 命名，主要应用于陀螺运动中刚体自旋的姿态表示。

序列{1, 2, 3}(XYZ)，被称为 Cardan Euler，是以文艺复兴时期意大利数学家 Gerolamo Cardano 命名，又叫 Tait-Bryan Angles，以 19 世纪苏格兰数学物理学家 Peter Guthrie Tait 命名，主要应用于航空工程和计算机图形学领域。

本文主要介绍旋转次序为 XYZ 的欧拉角表示，按如下旋转顺序 XYZ：

在 YZ 平面内，绕 x 轴旋转 ϕ 角度，称为翻滚角 *rolling*；

在 XZ 平面内，绕 y 轴旋转 θ 角度，称为俯仰角 *pitch*；

在 XY 平面内，绕 z 轴旋转 ψ 角度，称为航向角 *heading*；

为了方便理解，特附上欧拉旋转视频演示地址：http://v.youku.com/v_show/id_XNzkyOTIyMTI=.html

欧拉角的表示方法：

考虑从载体坐标系旋转到世界坐标系时，旋转矩阵可以由基本矩阵构成，按照 ZYX 旋转顺序，我们很容易获得其旋转矩阵为

$${}^S R_E = R(X, \phi) * R(Y, \theta) * R(Z, \psi)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^S \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^E v = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\theta s\phi \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix} {}^S v = {}^E_S R {}^S v$$

欧拉角速度与角速度 ω :

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = R(Y, \theta) * R(Z, \psi) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R(Z, \psi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta c\psi & -c\theta s\psi & s\theta \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Tips: 静止状态下，为了初始化载体姿态，这时如何求解姿态矩阵(ZYX 旋转次序)呢？

$${}^S v = ({}^E_S R)^T {}^E v \Rightarrow \begin{bmatrix} ax \\ ay \\ az \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\theta s\phi \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix} {}^E \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax = gs\theta \\ ay = -gc\theta s\phi \\ az = -gc\phi c\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi = \text{atan2}(-ay, -az) \\ \theta = \text{atan2}(ax, \sqrt{ay^2 + az^2}) \end{cases}$$

4.3 四元数法(Quaternion)

四元数法是由 19 世纪爱尔兰数学家 William Rowan Hamilton 提出。什么是四元数？四元数是由一个实数和一个三维复数相加组成。

$$q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^T = \begin{bmatrix} q_1 \\ \mathbf{q}_{2:4} \end{bmatrix}$$

基本性质

四元数共轭:

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ -\mathbf{q}_{2:4} \end{bmatrix}$$

四元数模长:

$$\|q\| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$$

四元数逆:

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|}$$

乘法:

$$q \otimes p = q_m(q, p) = Q(q)p = \bar{Q}(p)q$$

$$Q(q) = \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & q_4 & -q_3 \\ q_3 & -q_4 & q_1 & q_2 \\ q_4 & q_3 & -q_2 & q_1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} Q(\bar{q}) &= Q(q)^T \\ \bar{Q}(\bar{q}) &= \bar{Q}(q)^T \end{aligned}$$

运算:

The inverse mappings, from a unit quaternion to the corresponding axis and angle of rotation, are $\alpha_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ and $\mathbf{n}_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{S}^2$, defined by

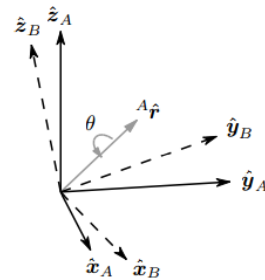
$$\alpha_q(\mathbf{q}) := 2\arccos(q_0) \quad (198)$$

$$\mathbf{n}_q(\mathbf{q}) := \frac{\mathbf{q}_{1:3}}{\|\mathbf{q}_{1:3}\|} = \frac{\mathbf{q}_{1:3}}{\sqrt{1 - q_0^2}}. \quad (199)$$

四元数姿态表示

四元数表示法中姿态变换是载体坐标系以空间向量 r 为轴旋转角度 θ 得到。如右图所示，Frame B 是由 Frame A 以向量 ${}^A r$ 为轴旋转角度 θ 而得。

四元数 ${}^B_A q = [\cos(\theta/2) \quad {}^A r \sin(\theta/2)]$ 描述了刚体的定点转动，可认为 B 系是由 A 系经过无中间过程的一次性等效旋转形成的， ${}^B_A q$ 包含了这种等效旋转的全部信息： ${}^A r$ 为旋转瞬轴和旋转方向， θ 为转过的角度。



向量旋转:

令 ${}^E_B q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]$ 表示由载体坐标系 B 向地理坐标系 E 旋转表示的四元数，使用四元数对向量进行旋转，得:

$$\begin{cases} \vec{v}^2 = {}^E_B q \otimes \vec{v}^1 \otimes {}^E_B q^{-1} = {}^E_B q \otimes \vec{v}^1 \otimes {}^E_B q^* & (1) \\ {}^E v = {}^B_E q \otimes {}^B v \otimes {}^B_E q^* & (2) \end{cases}$$

其中，式(1) 表示的几何含义为向量 \vec{v}^B 绕 q^E_B 进行旋转后与 \vec{v}^E 重合，式(2)表示不同坐标观测之间的变换并无几何意义。

四元数姿态更新

因为对角速率进行积分，可以计算载体旋转的角度。一般地，选取

$${}^S_E q = ({}^E_S q)^T = {}^S_{S_n} q \otimes {}^S_{S_{n-1}} q \otimes \dots \otimes {}^S_{S_2} q \otimes {}^S_{S_1} q \otimes {}^S_E q$$

进行姿态更新(区别与 *Euler* 角选取 $S \xrightarrow{\text{rotation}} E$ 作为姿态)，因为每次进行姿态更新时，有同一基准。

在导航的应用过程中，常使用 ${}^S_{S_1} q$ 将载体的姿态通过陀螺仪的旋转速度变换到新姿态上，俗称姿态更新。

四元数微分方程：

$$\begin{aligned} {}^S \omega &= \begin{bmatrix} 0 & \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \\ {}^S_E \dot{q} &= \frac{1}{2} {}^S_E q \otimes {}^S \omega \end{aligned}$$

四元数更新：

$$\begin{aligned} {}^S_E \dot{q}_t &= \frac{1}{2} {}^S_E q_t \otimes {}^S \omega_t \\ {}^S_E q_{t+1} &= {}^S_E q_t + {}^S_E \dot{q}_t \Delta T \end{aligned}$$

由姿态更新等式，四元数所表示的旋转矩阵为

$${}^E_B R = \begin{bmatrix} 2q_1^2 - 1 + 2q_2^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) & 2(q_2q_4 - q_1q_3) \\ 2(q_2q_3 - q_1q_4) & 2q_1^2 - 1 + 2q_3^2 & 2(q_3q_4 + q_1q_2) \\ 2(q_2q_4 + q_1q_3) & 2(q_3q_4 - q_1q_2) & 2q_1^2 - 1 + 2q_4^2 \end{bmatrix}$$

从实际应用来看，四元数即代表载体状态，又代表姿态更新行为。从获取载体的姿态来看，四元数可以表示为对应的欧拉角；从姿态更新的角度上来看，陀螺仪的旋转引起的姿态变换可表示为当前四元数与 $[0, {}^S w \Delta T]$ 、当前四元数的逆三者之间叉乘运算的结果。

四元数均值

在 UKF 卡尔曼滤波过程中，需要对四元数姿态求均值，本小节从这里出发探索四元数一些有趣的性质。使用四元数作为状态量时，由于四元数构成的空间并不是欧几米德空间，即四元数运算并不满足算子的封闭性和结合性。在对四元数进行 UT 变换时，不能使用常规的求均值方式。

四元数与噪声

在四元数状态方程中，噪声 \vec{w}_q 增加了物体姿态不确定度(Deg/Time Interval)。 \vec{w}_q 是一个三维噪声向量，它不能被简单地加到单位四元数上，需要转化为单位四元数。若随机变量 \vec{w}_q 服从均值为 0，方差为 $Q_{3 \times 3}$ 的高斯噪声，可以将 \vec{w}_q 看成是绕着 xyz 旋转的向量，则可等价于

$$\begin{cases} \alpha = \|\vec{w}_q\| \\ u = \sin(\alpha/2) \frac{\vec{w}_q}{\|\vec{w}_q\|} \end{cases}$$

α 表示旋转角度， u 表示旋转轴，单位四元数可以表示为：

$$q = [\cos(\alpha/2), \sin(\alpha/2) \frac{\vec{w}_q}{\|\vec{w}_q\|}]$$

基于迭代的四元数均值

对于四元数来说，建立一种新的度量方式描述两个四元数之间的距离，成为最为关键的部分。由四元数的传递性可知：

$$\begin{aligned} {}^A_o q &= {}^A_B q \otimes {}^B_o q \Rightarrow {}^A_B q = {}^A_o q \otimes {}^B_o q^{-1} \\ &\Rightarrow q_{21} = \Delta q = q_1 \otimes q_2^{-1} \end{aligned}$$

q_1 与 q_2 之间的距离可由 Δq 表示，则这两个四元数之间的夹角为

$$\theta = 2 \arccos(\Delta q^0)$$

使用 θ 可表示四元数之间的距离。设 N 个四元数的均值为 q_i ，则该均值与所有四元数之间的距离和为

$$\begin{aligned} e_i &= q_i \otimes q_i^{-1} \Rightarrow q_i = e_i \otimes q_i; \\ \vec{e} &= \frac{1}{N} \sum_i e_i = \frac{1}{N} \sum_i q_i \otimes q_i^{-1} \end{aligned}$$

\vec{e} 表示估计的均值四元数和真实的均值四元数之间的误差， \vec{e} 是一个指向真实均值四元数的旋转向量，故

$$q_{t+1} = \vec{e} \otimes q_t$$

q_{t+1} 会不断逼近均值向量，直到误差相差无几。

一般地，初始值选择 Sigma 中心点时，迭代一次即可完成均值获取。为其他点时，迭代 2 次可以获取均值，故基于迭代的方式效率很高。

基于代价函数的最优化四元数均值

为此，早在 60 年代 Wahba 就提出了构造函数代价求解四元数均值问题，基于这种思想文献学者们提出了各种不同的算法。其中文献[3]直接以姿态矩阵为对象来求解加权均值四元数的方法因为不涉及矩阵的奇异值分解使得算法相对简单而得到较为的广泛应用。该算法具体如下：

构造姿态矩阵代价函数如下：

$$\bar{q} = \arg \min_{\|q\|=1} \sum_{i=1}^N w_i \|A(q) - A(q_i)\|_F^2$$

其中： $A(q)$ 是由滤波四元数构成的正交姿态矩阵， F 为 Frobenius 范数， q_i 为更新四元数 sigma 点。由 Frobenius 范数定义及姿态矩阵的正交性[3]，四元数均值可转化为求如下代价函数值最大时的向量解：

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \arg \max_{\|q\|=1} q^T K q \\ K &= 4M - I_{4 \times 4}, M = \sum_{i=1}^N w_i q_i q_i^T \end{aligned}$$

从而均值四元数 q 即为矩阵 K 最大特征值对应的特征向量。

五 总结：

不同的姿态变换，实质上只是表达形式上的不一致，其本质的几何关系却并没有什么区别，四元数姿态表示方法虽然计算便利，但不便于直观调试和应用，故往往需要将四元数转换为更加形象的欧拉角，其转换公式为

$$\text{欧拉角} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{roll} \\ \text{pitch} \\ \text{heading} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{atan2}(2q_3q_4 + 2q_1q_2, q_1^2 + q_4^2 - q_2^2 - q_3^2) \\ -\text{asin}(2q_2q_4 - 2q_1q_3) \\ \text{atan2}(2q_2q_3 + 2q_1q_4, q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2) \end{bmatrix} (XYZ)$$

在将四元数转换为角度 Angle 过程中，需要使用反三角函数 atan2，其表达式为

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \text{atan}(y/x) & \text{if } x > 0 \\ \text{atan}(y/x) - \pi & \text{if } x < 0 \wedge y < 0 \\ \text{atan}(y/x) + \pi & \text{if } x < 0 \wedge y > 0 \end{cases}$$

各种坐标系之间的相互转换容易混乱，这里必须要注意的是：

欧拉角的变换主要为 b 系(载体) \rightarrow 参考系(R 系)

四元数的变换主要为参考系(R 系) \rightarrow b 系(载体)

参考文献

- [1] 秦永元. 惯性导航[M]. 科学出版社, 2014.
- [2] Farrell J. Aided navigation: GPS with high rate sensors[M]. McGraw-Hill, Inc., 2008.
- [3] 乔相伟, 周卫东, 吉宇人. 用四元数状态切换无迹卡尔曼滤波器估计的飞行器姿态[J]. 控制理论与应用, 2012, 29(1): 97-103.
- [4] Diebel J. Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors[J]. Matrix, 2006, 58(15-16): 1-35.
- [5] 欧拉角演示视频 http://v.youku.com/v_show/id_XNzkyOTIyMTI=.html

声明

1、本文为作者原创文章，未经作者允许不得转载或用于商业目的，谢谢合作。

2、如有侵犯您的知识产权和版权问题，请通知本人，本人会即时做出处理删除文章。

3、如果本文章在知识点上有错误，欢迎指出错误所在，欢迎多多交流。谢谢！

4、本百度文库的文章、图片以及转载的文章引起的任何意外、疏忽、合约毁坏、诽谤、版权或知识产权侵犯及其所造成的损失（包括因下载而感染电脑病毒），本人概不负责，亦不承担任何法律责任。

5、因本百度文库的文章、图片以及转载的文章所产生的任何法律（包括宪法，民法，刑法，书法，公检法，基本法，劳动法，婚姻法，输入法，没办法，国际法，今日说法，吸星大法，与台湾关系法及文中涉及或可能涉及、以及未涉及之法，各地治安管理条例）纠纷或责任本人概不负责。

6、一切网民在进入本百度文库的各个页面时，默认表示遵守本条款并完全同意。

7、此声明最终解释权归本人所有。