

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Facultad de Ciencias - Departamento de Física
Electrodinámica 1 - 2016658
Semestre 2024-2, Profesor Héctor Fabio Castro
Tarea No. 2
Grupo 9

Laura Daniela Moreno Reyes [⊕], Felipe Ospina Suarez [‡], Laura Alejandra Sosa Ballen^{*},
Andres Escobar [‡], Juan Francisco Gutiérrez [‡]

20/11/24

Punto 1.

Calcule el campo eléctrico producido por una barra de longitud L cargada uniformemente, en la dirección x y y , verificando las ecuaciones presentadas en las transparencias 23 y 24 de clase, calcule también los valores límite de estos campos para distancias de observación muy grandes ($x, y \gg L$), comente este resultado.

Solución.

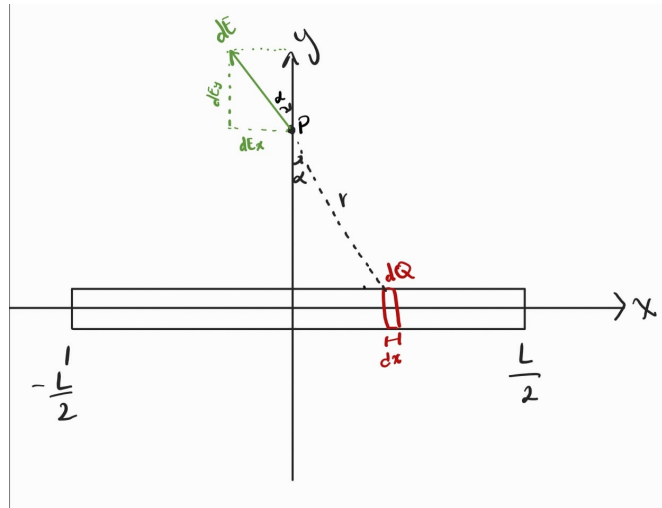


Fig. 1. Campo eléctrico producido por una barra de longitud L

Se divide la línea de carga en segmentos infinitesimales, cada uno de los cuales actúa como carga puntual; sea dx la longitud de cualquier segmento localizado en la dirección x . Si la carga se

[‡]: feospinas@unal.edu.co , ^{*}: lsosab@unal.edu.co , [⊕]: lmorenore@unal.edu.co, jgutierrezco@unal.edu.co 1

distribuye de manera uniforme, la densidad lineal de carga en cualquier punto de la línea es igual a $\lambda = Q/L$

$$dQ = \lambda dx = \frac{Qdx}{L}$$

La distancia r de este segmento y P es $(x^2 + y^2)^{1/2}$ por lo que la magnitud del campo $d\vec{E}$ es

$$d\vec{E} = k \frac{dQ}{r^2} = kQ \frac{dx}{L(x^2 + y^2)}$$

representando este campo en términos de sus componentes

$$d\vec{E}_x = -d\vec{E} \sin(\alpha)$$

$$d\vec{E}_y = d\vec{E} \cos(\alpha)$$

También podemos observar que

$$\sin(\alpha) = \frac{x}{r} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{y}{r} = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

Tal que para la componente y

$$d\vec{E}_y = kQ \frac{dx}{L} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$d\vec{E}_x = -kQ \frac{dx}{L} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Se integran las expresiones

$$\vec{E}_y = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{kQ}{L} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx$$

$$\vec{E}_y = \frac{kQy}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx$$

$$\vec{E}_y = \frac{kQy}{L} * \frac{x}{(y^2 x^2 + y^2)^{1/2}} \Bigg|_{-L/2}^{L/2}$$

$$\vec{E}_y = kQ \frac{1}{y(L/2)^2 + y^2)^{1/2}}$$

similar para la componente x

$$d\vec{E}_y = kQ \frac{dx}{L} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$d\vec{E}_x = -kQ \frac{dx}{L} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Se integran las expresiones

$$\vec{E}_y = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{kQ}{L} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx$$

$$\vec{E}_y = \frac{kQ}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx$$

$$\vec{E}_y = \frac{kQ}{L} * \frac{-1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$\vec{E}_y = 0$$

como vimos arriba tomando la partícula puntual en el eje y nos da únicamente el campo en la componente y por lo que para la componente x tomaremos una partícula puntual en el eje x

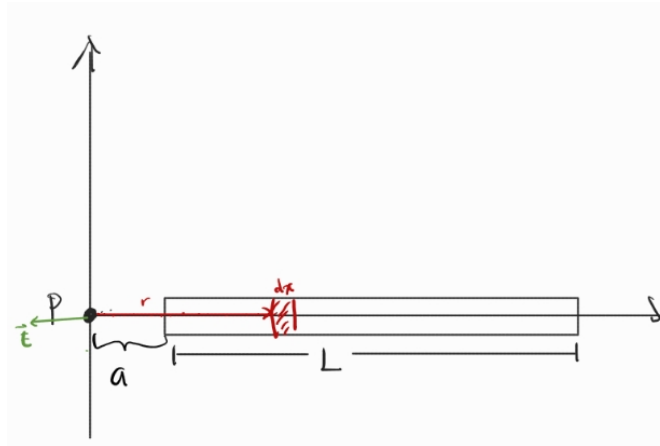


Fig. 2. Campo eléctrico producido por una barra de longitud L

para este caso λ y dQ no cambian pero ahora $r = x$

$$d\vec{E} = -\frac{kQdx}{Lx^2}$$

integramos entre a y $L + a$

$$\vec{E} = -\int_a^{L+a} \frac{kQ}{x^2} dx$$

$$\vec{E} = -\frac{kQ}{L} \left(\frac{1}{L-a} - \frac{1}{a} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{kQ}{a(L+a)}$$

tomando el caso en que las distancias sean muy grandes tal que $L \gg x$, (seguimos usando la figura 1 como referencia) y como la barra es simétrica

$$\vec{E} = 2 \int_0^\infty \frac{dQ}{r^2}$$

$$\vec{E} = 2 \int_0^\infty \frac{\lambda dx}{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

Dado que las componentes se cancelan en x solo tenemos la contribución del campo en y

$$\vec{E} = 2k\lambda \int_0^\infty \frac{y dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Esta integral se resuelve usando sustitución trigonométrica lo cual nos da como resultado $\frac{1}{y}$ por tanto

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{y}$$

Punto 2.

Calcule el campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico simple en la dirección x , para las tres regiones: $x \geq a$, $x \leq -a$, $-a < x < a$, verificando y completando la ecuación presentada en la transparencia 25 de clase. Utilice la misma notación para las variables usada en la transparencia.

Solución.

A continuación se calculará el campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico simple para cada una de las regiones:

Región $x \geq a$:

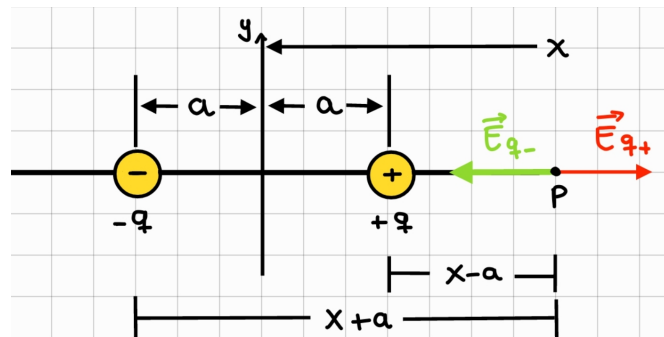


Fig. 3. Campo eléctrico producido por un dipolo en dirección x para $x \geq a$.

En la figura se muestran las distancias entre el punto de prueba P , ubicado en la región $x \geq a$, y las cargas q_+ y q_- , así como las direcciones de los campos eléctricos que estas generan sobre P . Para calcular el campo eléctrico total en P , utilizamos el principio de superposición, que establece que el campo eléctrico resultante es la suma vectorial de los campos individuales producidos por

q_+ y q_- :

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_T &= \vec{E}_{q_+} + \vec{E}_{q_-} \\
 &= \frac{k|q_+|}{(x-a)^2} \hat{i} + \frac{k|q_-|}{(x+a)^2} (-\hat{i}) \\
 &= \left[\frac{kq}{(x-a)^2} - \frac{kq}{(x+a)^2} \right] \hat{i} \\
 &= kq \left[\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} \right] \hat{i} \\
 &= kq \left[\frac{x^2 + 2ax + a^2 - x^2 + 2ax - a^2}{[(x-a)(x+a)]^2} \right] \hat{i} \\
 &= \frac{4kqax}{(x^2 - a^2)^2} \hat{i}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la componente del campo eléctrico en la dirección x para la región $x \geq a$ está dada por:

$$E_x = \frac{4kqax}{(x^2 - a^2)^2}$$

Si además consideramos el caso en el que $x \gg a$, podemos aproximar $x^2 - a^2 \approx x^2$, lo que simplifica la expresión a:

$$E_x = \frac{4kqa}{x^3}$$

Región $x \leq -a$:

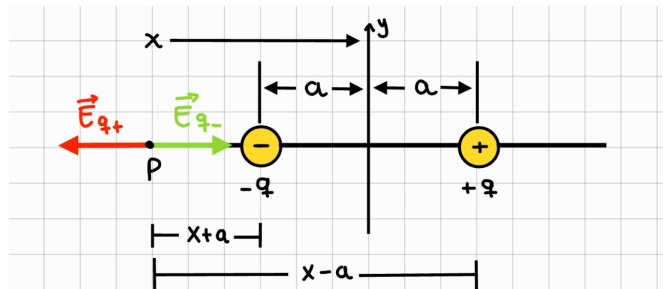


Fig. 4. Campo eléctrico producido por un dipolo en dirección x para $x \leq -a$.

En la figura se muestran las distancias entre el punto de prueba P , ubicado en la región $x \leq -a$, y las cargas q_+ y q_- , así como las direcciones de los campos eléctricos que estas generan sobre P .

Aplicando un procedimiento similar al utilizado para la región $x \geq a$, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_T &= \vec{E}_{q_+} + \vec{E}_{q_-} \\
 &= \frac{k|q_+|}{(x-a)^2}(-\hat{i}) + \frac{k|q_-|}{(x+a)^2}\hat{i} \\
 &= \left[\frac{kq}{(x+a)^2} - \frac{kq}{(x-a)^2} \right] \hat{i} \\
 &= kq \left[\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{1}{(x-a)^2} \right] \hat{i} \\
 &= kq \left[\frac{x^2 - 2ax + a^2 - x^2 - 2ax - a^2}{[(x+a)(x-a)]^2} \right] \hat{i} \\
 &= -\frac{4kqax}{(x^2 - a^2)^2} \hat{i}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la componente del campo eléctrico en la dirección x para la región $x \leq -a$ está dada por:

$$E_x = -\frac{4kqax}{(x^2 - a^2)^2}$$

Región $-a < x < a$:

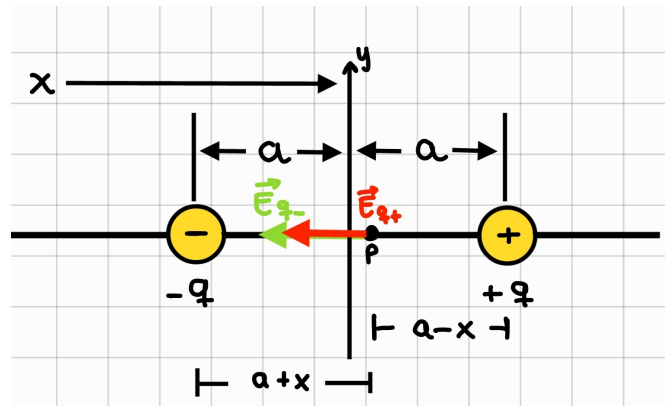


Fig. 5. Campo eléctrico producido por un dipolo en dirección x para $-a < x < a$.

En la figura se muestran las distancias entre el punto de prueba P , ubicado en la región $-a < x < a$, y las cargas q_+ y q_- , así como las direcciones de los campos eléctricos que estas generan sobre P . Aplicando un procedimiento similar al utilizado para las regiones anteriores, resulta:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_T &= \vec{E}_{q_+} + \vec{E}_{q_-} \\
&= \frac{k|q_+|}{(a-x)^2}(-\hat{i}) + \frac{k|q_-|}{(a+x)^2}(-\hat{i}) \\
&= -\left[\frac{kq}{(a+x)^2} + \frac{kq}{(a-x)^2} \right] \hat{i} \\
&= -kq \left[\frac{1}{(a-x)^2} + \frac{1}{(a+x)^2} \right] \hat{i} \\
&= -kq \left[\frac{a^2 + 2ax + x^2 + a^2 - 2ax + x^2}{[(a+x)(a-x)]^2} \right] \hat{i} \\
&= -\frac{2kq(x^2 + a^2)}{(x^2 - a^2)^2} \hat{i}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la componente del campo eléctrico en la dirección x para la región $-a < x < a$ está dada por:

$$E_x = -\frac{2k(x^2 + a^2)}{(x^2 - a^2)^2}$$

Suponiendo $q_+ = 1C$, $q_- = -1C$, $a = 1m$, graficamos las ecuaciones obtenidas para cada región, así:

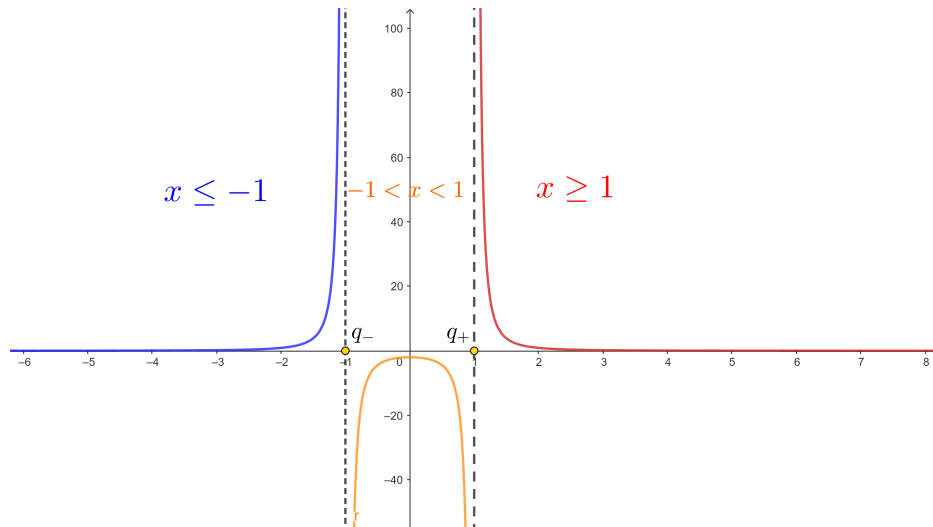


Fig. 6. Distribución del Campo Eléctrico de un Dipolo en las Regiones $x \geq a$, $x \leq -a$, $-a < x < a$.

De esta manera, se verifica y complementa la ecuación presentada en la transparencia 25 de la clase.

Punto 3.

Calcule el campo eléctrico producido por un anillo cargado en la dirección perpendicular al plano del anillo (x), verificando la ecuación presentada en la transparencia 27 de clase. Utilice la misma notación para las variables usada en la transparencia. Calcule también el valor límite del campo

para distancias de observación muy grandes ($x \gg a$), comente este resultado

Solución.

Tomando como referencia la siguiente figura, con la salvedad de que se notara el radio del anillo con 'a' en vez de 'u'.

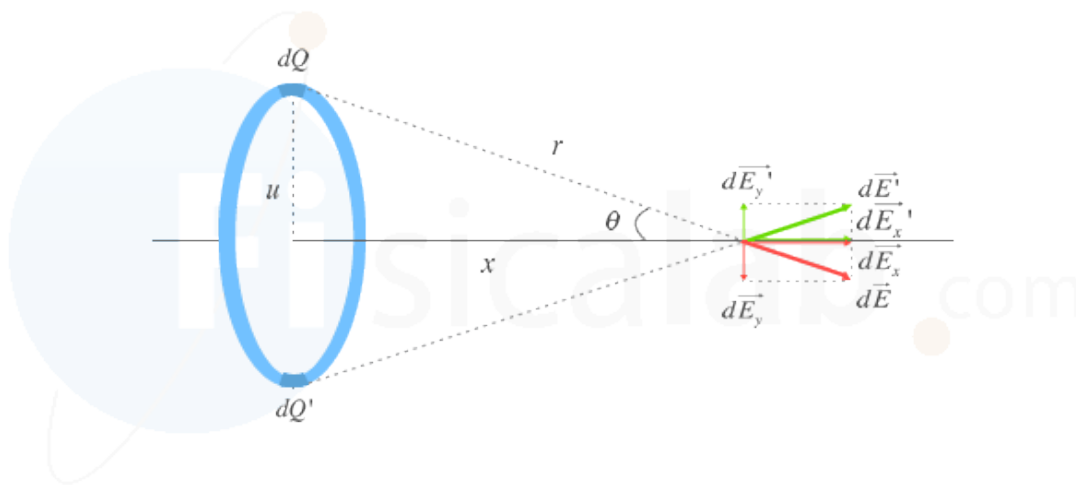


Fig. 7. Esquema inicial del campo eléctrico producido por un anillo cargado.

En primer lugar, se puede observar que el esquema presenta una simetría con respecto al eje horizontal. Las contribuciones de campo eléctrico a lo largo del eje vertical dE_y se cancelan cuando dos dE se encuentran con igual ángulo de inclinación respecto al eje horizontal (θ y $-\theta$). Por lo tanto, el campo eléctrico resultante yace en el eje X.

$$E_x \hat{x} = \vec{E} \cos(\theta) = \int \frac{k dQ \hat{r}}{r^2} \cos(\theta)$$

Por la geometría del esquema, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + a^2 \\ \cos(\theta) &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ dQ &= \lambda dL = \lambda a d\theta \end{aligned}$$

Reemplazando las relaciones en la integral:

$$E_x = \int k \lambda a d\theta \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Para cubrir todo el anillo, se establecen los límites de integración de 0 a 2π , con lo cual se obtiene el siguiente resultado:

$$E_x = 2\pi \lambda k a \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que la longitud del anillo L viene dada por $2\pi a$ y que $Q = \lambda L$:

$$E_x = \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (1)$$

En el límite $x \gg a$, la contribución de a es despreciable y quedaría únicamente el término $(x^2)^{3/2}$ en el denominador, así que:

$$E_x \approx \frac{kQ}{x^2}$$

Resultado esperado ya que con un valor de x tendiendo al infinito, el anillo se comporta como un punto, por lo que se debe obtener el campo eléctrico generado por una carga puntual.

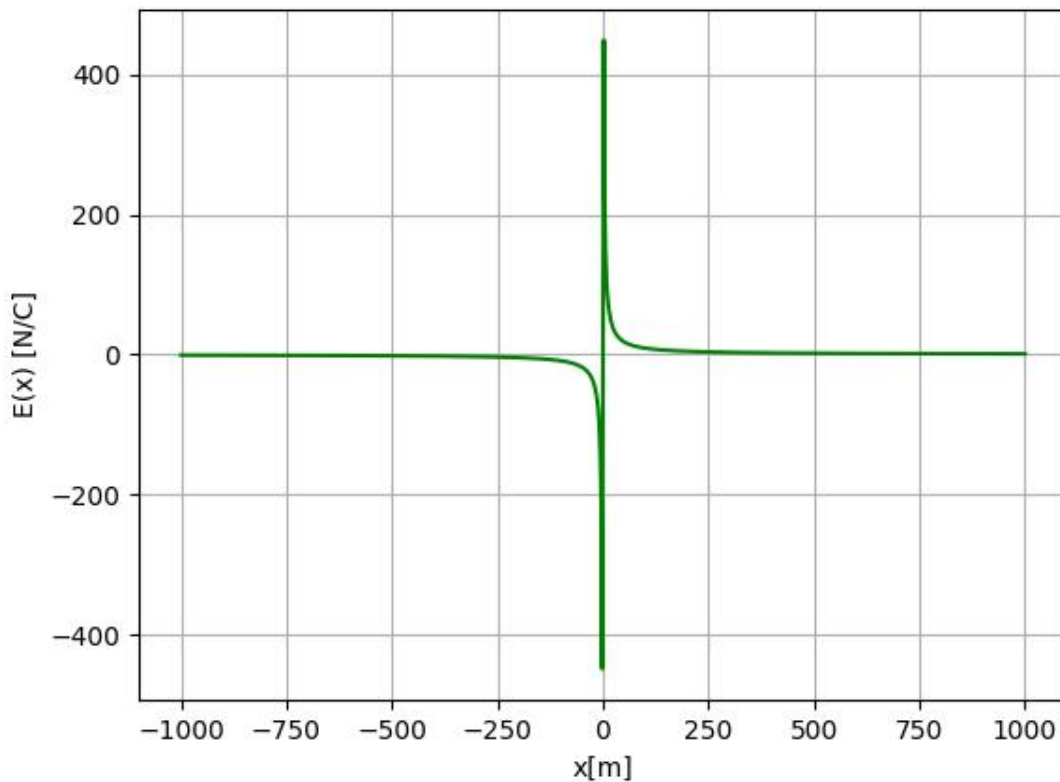


Fig. 8. Comportamiento del campo eléctrico de un anillo cargado según 1 para valores de $a = 0,1m$ y $Q = 0,01\mu C$

Punto 4.

Calcule el campo eléctrico producido por un disco cargado en la dirección perpendicular al plano del disco (x), verificando la ecuación presentada en la transparencia 28 de clase. Utilice la misma notación para las variables usada en la transparencia. Calcule también el valor límite del campo para distancias de observación muy grandes ($x \gg R$), comente este resultado.

Solución.

Partiendo del principio de superposición se puede considerar el campo de un disco cargado como la suma del de anillos concéntricos de densidad de carga σ y de radios a que varían de 0 hasta el radio del disco R .

Del punto anterior se sabe que los componentes del campo paralelos al plano de los anillos se anulan entre sí, de modo que el campo se ve representado por la integral

$$\begin{aligned}\vec{E} = E_x \hat{\mathbf{x}} &= \int_S \frac{k\sigma \vec{x}}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dA \\ &= k\sigma \vec{x} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} a \, d\varphi da\end{aligned}$$

Con φ el ángulo que recorre el disco y $a \cdot d\varphi$ su diferencial. Resolviendo la integral para φ

$$E_x = 2k\pi\sigma x \int_0^R \frac{a}{(x^2 + a^2)^{2/3}} da.$$

Haciendo la sustitución $u = a^2 + x^2$

$$\begin{aligned}E_x &= k\pi\sigma x \int_*^* \frac{du}{(u)^{2/3}} du = k\pi\sigma \vec{x} \left[-2u^{-1/2} \Big|_*^* \right] \\ &= k\pi\sigma x \left[-2 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right) \right] \\ &= 2k\pi\sigma \left(1 - \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right) \\ &= 2k\pi\sigma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right). \tag{2}\end{aligned}$$

Que coincide con el resultado presentado en la transparencia 28 de la clase.

Al evaluar directamente el caso en que $x \gg R$, el campo se iguala a cero. Sin embargo, al expandir el término de la derecha en su serie de Taylor para una función de la forma $(1 + y)^\alpha$, basta con considerar los dos primeros términos pues $y = \frac{R^2}{x^2}$ es pequeño en este caso.

$$\left(1 + \frac{R^2}{x^2} \right)^{-1/2} \approx 1 \cdot \left(\frac{R^2}{x^2} \right)^0 + \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{R^2}{x^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{R^2}{x^2} \right)^2 + \dots$$

Así se puede considerar entonces

$$\begin{aligned}
E_x &= 2k\pi\sigma \left[1 - \left(1 + \frac{R^2}{x^2} \right)^{-1/2} \right] \\
&\approx 2k\pi\sigma \left[1 - \left(1 + \left(-\frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} \right) \right) \right] \\
&= 2k\pi\sigma \left(\frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} \right) \\
&= k\pi\sigma \frac{R^2}{x^2}.
\end{aligned}$$

Como la carga total del disco está dada por $Q = \sigma\pi R^2$

$$E_x \approx k \frac{Q}{x^2}, \quad x \gg R \quad (3)$$

Es decir, cuando se aleja lo suficiente del disco, este se puede ver como una carga puntual Q . Lo anterior, además de la capacidad de la aproximación se hacen evidentes en la figura 9.

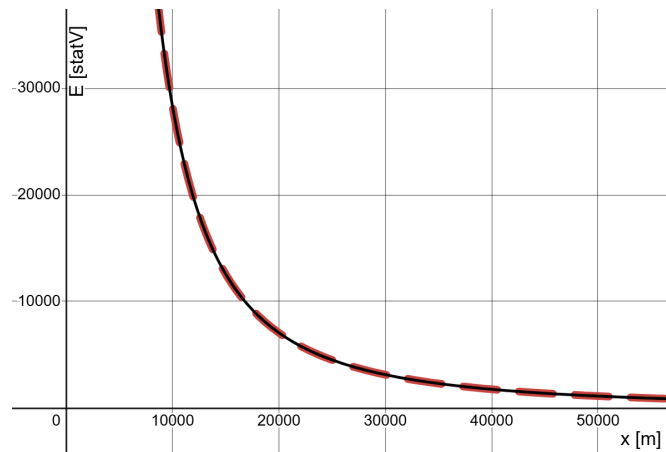


Fig. 9. La línea negra corresponde al campo descrito en la ecuación (1), la línea roja punteada representa una carga puntual con campo como en (2).

Punto 5.

Calcule el campo eléctrico producido por un plano infinito cargado en la dirección perpendicular al plano x , verificando las ecuaciones presentadas en la transparencia 29 de clase. Utilice la misma notación para las variables usada en la transparencia. Calcule también el valor límite del campo para distancias de observación x muy grandes, comente este resultado.

Solución.

Tomamos un diferencial de carga $dQ = \sigma dy dz$ y calculemos el diferencial de campo eléctrico que este produce sobre puntos en el eje x .

$$d\vec{E} = k \frac{dQ}{R^2} = k \frac{\sigma dy dz}{R^2}$$

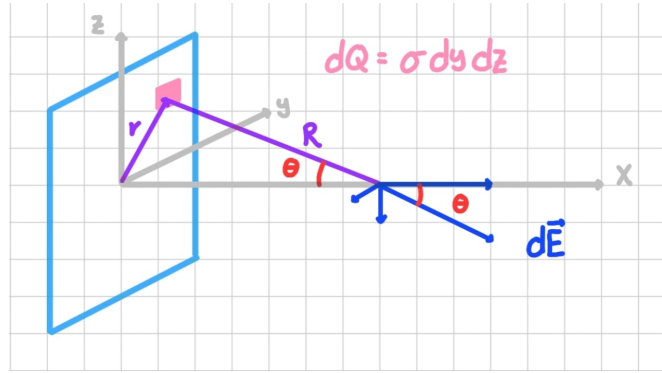


Fig. 10. Esquematiza del campo eléctrico producido por un diferencial de carga en un plano infinito de densidad de carga constante σ

De la figura 10 se tienen las relaciones geométricas

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$R = \sqrt{r^2 + x^2}$$

Adicionalmente la simetría del problema reduce el campo eléctrico sobre el punto a su componente a lo largo de \hat{x}

$$\begin{aligned} dE_x &= k \frac{\sigma dy dz}{R^2} \cos(\theta) \\ &= k \frac{\sigma dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{x}{R} \\ &= k \frac{\sigma z dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Ahora que tenemos el diferencial de campo eléctrico en términos de coordenadas, integramos a lo largo de las coordenadas y, z para obtener el campo total

$$\begin{aligned}
 E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k \frac{\sigma x dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
 &= 4k\sigma x \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
 &= 4k\sigma x \int_0^{\infty} \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{z}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]_{z=0}^a dy \\
 &= 4k\sigma x \int_0^{\infty} \frac{dy}{x^2 + y^2} \\
 &= 4k\sigma x \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right]_0^b \\
 &= 4k\sigma x \frac{\pi}{2x} \\
 &= \frac{2\sigma}{4\pi\epsilon_0} \pi \\
 &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}
 \end{aligned}$$

El mismo resultado se obtendría en la región negativa de x pero con signo contrario. Estos resultados coinciden con lo presentado en clase. Alternativamente pudimos partir del resultado del punto (4.) y tomar el límite en el infinito para el radio del disco. Se observa también que el campo es constante, y por tanto no varía a lo largo de x , por lo que el caso límite $x \rightarrow \infty$ es directo.