

# 2022 年全国高中数学联合竞赛一试 A 卷

制卷单位: 江苏省数学学会

2022 年 9 月 11 日

## 考生须知

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上。
2. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与您本人是否相符。

## 一、填空题, 本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 满分 64 分.

1. 集合  $A = \{A | n^3 < 2022 < 3^n, n \in \mathbb{Z}\}$  的所有元素之和为\_\_\_\_\_.
2. 设函数  $f(x) = \frac{x^2+x+16}{x} (2 \leq x \leq a)$ , 其中实数  $a > 2$ , 若  $f(x)$  的值域为  $[9, 11]$ , 则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.
3. 一枚不均匀的硬币, 若随机抛掷它两次均得到正面的概率是均得到反面的概率的 9 倍, 则随机抛掷它两次得到正面, 反面各一次的概率为\_\_\_\_\_.
4. 若复数  $z$  满足  $\frac{z-3i}{z+i}$  为负实数 ( $i$  为虚数单位),  $\frac{z-3}{z+1}$  为纯虚数, 则  $z$  的值为\_\_\_\_\_.
5. 若四棱锥  $P-ABCD$  的棱  $AB, BC$  的长均为  $\sqrt{2}$ , 其他各棱长均为 1, 则该四棱锥的体积为\_\_\_\_\_.
6. 已知函数  $y = f(x)$  的图像既关于点  $(1, 1)$  中心对称, 又关于直线  $x + y = 0$  轴对称, 若  $x \in (0, 1)$  时,  $f(x) = \log_2 x + 1$ , 则  $f(\log_2 10)$  的值为\_\_\_\_\_.
7. 在平面直角坐标系中, 椭圆  $\Omega: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ,  $P$  为  $\Omega$  上的动点,  $A, B$  为两个定点, 其中  $B$  的坐标为  $(0, 3)$ , 若  $\triangle ABC$  的面积最小值为 1, 最大值为 5, 则线段  $AB$  的长为\_\_\_\_\_.
8. 一个单位方格的四条边中, 若有两条边染了颜色  $i$ , 另两条边分别染了异于  $i$  色的另两种不同颜色, 则称该单位方格是“ $i$  色主导”的. 如图, 一个  $1 \times 3$  方格表的表格线共含 10 条单位长线段, 现要对这 10 条线段染色, 每条线段染为红、黄、蓝三色之一, 使得红色主导、黄色主导、蓝色主导的单位方格各有一个. 这样的染色方式数为\_\_\_\_\_ (答案用数值表示).



三、简答题, 本大题共 3 小题, 满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本题满分 16 分) 若  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  满足  $\sin A = \cos B = \tan C$ , 求  $\cos^3 A + \cos^2 A - \cos A$  的值.
10. (本题满分 20 分) 给定正整数  $(m, m \geq 3)$ , 设正项等差数列  $\{a_n\}$  与正项等比数列  $\{b_n\}$  满足:  $\{a_n\}$  的首项等于  $\{b_n\}$  的公比,  $\{b_n\}$  的首项等于  $\{a_n\}$  的公差, 且  $a_m = b_m$ , 求  $a + m$  的最小值, 并确定当  $a_m$  取到最小值时  $a_1$  与  $b_1$  的公差.
11. (本题满分 20 分) 在平面直角坐标系中, 双曲线  $\Gamma: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$  对平面内不在  $\Gamma$  上的任意一点  $P$ , 记  $\Omega_P$  为过点  $P$  且与  $\Gamma$  有两个交点的直线的全体. 对任意直线  $l \in \Omega_P$  记  $MN$  为  $l$  与  $\Gamma$  的两个交点, 定义  $f_P(l) = |PN| \cdot |PM|$ , 若存在一条直线  $l_0 \in \Omega_P$  满足:  $l_0$  与  $\Gamma$  的两个交点位于  $y$  轴异侧, 且对任意直线  $l \in \Omega_P, l \neq l_0$ , 均有  $f_P(l) > f_P(l_0)$ , 则称  $P$  点为”好点”, 求所有好点所构成的区域的面积.