

2022 年全国高中数学联合竞赛一试 A 卷

制卷单位: 江苏省数学学会

2022 年 9 月 11 日

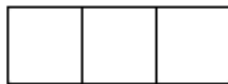
考生须知

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上。
2. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与您本人是否相符。

一、填空题, 本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 满分 64 分.

1. 集合 $A = \{A | n^3 < 2022 < 3^n, n \in \mathbb{Z}\}$ 的所有元素之和为_____.
2. 设函数 $f(x) = \frac{x^2+x+16}{x} (2 \leq x \leq a)$, 其中实数 $a > 2$, 若 $f(x)$ 的值域为 $[9, 11]$, 则 a 的取值范围为_____.
3. 一枚不均匀的硬币, 若随机抛掷它两次均得到正面的概率是均得到反面的概率的 9 倍, 则随机抛掷它两次得到正面, 反面各一次的概率为_____.
4. 若复数 z 满足 $\frac{z-3i}{z+i}$ 为负实数 (i 为虚数单位), $\frac{z-3}{z+1}$ 为纯虚数, 则 z 的值为_____.
5. 若四棱锥 $P-ABCD$ 的棱 AB, BC 的长均为 $\sqrt{2}$, 其他各棱长均为 1, 则该四棱锥的体积为_____.
6. 已知函数 $y = f(x)$ 的图像既关于点 $(1, 1)$ 中心对称, 又关于直线 $x + y = 0$ 轴对称, 若 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) = \log_2 x + 1$, 则 $f(\log_2 10)$ 的值为_____.
7. 在平面直角坐标系中, 椭圆 $\Omega: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, P 为 Ω 上的动点, A, B 为两个定点, 其中 B 的坐标为 $(0, 3)$, 若 $\triangle ABC$ 的面积最小值为 1, 最大值为 5, 则线段 AB 的长为_____.
8. 一个单位方格的四条边中, 若有两条边染了颜色 i , 另两条边分别染了异于 i 色的另两种不同颜色, 则称该单位方格是“ i 色主导”的. 如图, 一个 1×3 方格表的表格线共含 10 条单位长线段, 现要对这 10 条线段染色, 每条线段染为红、黄、蓝三色之一, 使得红色主导、黄色主导、蓝色主导的单位方格各有一个. 这样的染色方式数为_____ (答案用数值表示).



三、简答题, 本大题共 3 小题, 满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本题满分 16 分) 若 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 满足 $\sin A = \cos B = \tan C$, 求 $\cos^3 A + \cos^2 A - \cos A$ 的值.
10. (本题满分 20 分) 给定正整数 $(m, m \geq 3)$, 设正项等差数列 $\{a_n\}$ 与正项等比数列 $\{b_n\}$ 满足: $\{a_n\}$ 的首项等于 $\{b_n\}$ 的公比, $\{b_n\}$ 的首项等于 $\{a_n\}$ 的公差, 且 $a_m = b_m$, 求 $a + m$ 的最小值, 并确定当 a_m 取到最小值时 a_1 与 b_1 的公差.
11. (本题满分 20 分) 在平面直角坐标系中, 双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 对平面内不在 Γ 上的任意一点 P , 记 Ω_P 为过点 P 且与 Γ 有两个交点的直线的全体. 对任意直线 $l \in \Omega_P$ 记 MN 为 l 与 Γ 的两个交点, 定义 $f_P(l) = |PN| \cdot |PM|$, 若存在一条直线 $l_0 \in \Omega_P$ 满足: l_0 与 Γ 的两个交点位于 y 轴异侧, 且对任意直线 $l \in \Omega_P, l \neq l_0$, 均有 $f_P(l) > f_P(l_0)$, 则称 P 点为”好点”, 求所有好点所构成的区域的面积.