

2022 年全国高中数学联合竞赛一试 B 卷

制卷单位: 江苏省数学学会

2022 年 9 月 11 日

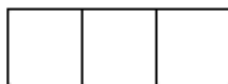
考生须知

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上。
2. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与您本人是否相符。

一、填空题, 本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 满分 64 分.

1. 不等式 $\frac{20}{x-9} > \frac{22}{x-11}$ 的解集为 _____.
2. 在平面直角坐标系中, 以抛物线 $\Gamma: y^2 = 6x$ 为焦点为圆心作一个圆 Ω , 与 Γ 的准线相切, 则圆 Ω 的面积为 _____.
3. 函数 $f(x) = \lg 2 \cdot \lg 5 - \lg 2x \cdot \lg 5x$ 的最大值为 _____.
4. 一枚不均匀的硬币, 若随机抛掷它两次均得到正面的概率为 $\frac{1}{2}$, 则随机抛掷它两次得到正面、反面各一次的概率为 _____.
5. 已知复数 z 满足 $|z| = 1$, 且 $Re \frac{z+1}{z} = \frac{1}{3}$, 则 $Re \frac{z}{z}$ 的值为 _____.
6. 若正四棱锥 $P-ABCD$ 的各条棱长均相等, M 为棱 AB 的中点, 则异面直线 BP 与 CM 所成的角的余弦值为 _____.
7. 若 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 满足 $\cos A = \sin B = 2 \tan \frac{C}{2}$, 则 $\sin A + \cos A + 2 \tan A$ 的值为 _____.
8. 一个单位方格的四条边中, 若存在三条边染了三种不同的颜色, 则称该单位方格是“多彩”的. 如图, 一个 1×3 方格表的表格线共含 10 条单位长线段, 现要对这 10 条线段染色, 每条线段染为红、黄、蓝三色之一, 使得三个单位方格都是“多彩”的. 这样的染色方式数为 _____ (答案用数值表示).



三、简答题, 本大题共 3 小题, 满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本题满分 16 分) 在平面直角坐标系中, F_1, F_2 是双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的两个焦点, Γ 上一点 P 满足 $\vec{PF_1} \cdot \vec{PF_2} = 1$. 求点 P 到 Γ 的两条渐近线距离之和.
10. (本题满分 20 分) 设正数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 满足: a_1, a_2, a_3 成公差为 b_1 的等差数列, b_1, b_2, b_3 成公比 a_1 的等差数列, 且 $a_3 = b_3$. 求 a_3 的最小值, 并确定当 a_3 取到最小值时 a_1, a_2 的值.
11. (本题满分 20 分) 若 a, b 为实数, $a < b$, 函数 $y = \sin x$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值与最小值之差为 $1, b - a$ 的取值范围.