# 1.2 随机变量的数字特征

## 1.2.1 数学期望

对于连续随机变量X，它的概率密度为$f_X(x)$，则其数学期望定义为

$$m_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$$

对于离散随机变量X，假定它有n个可能取值，各个取值的概率为 $p_i = P\{X = x_i\}$，则数学期望定义为

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P\{X = x_i\} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

均值具有如下性质：

性质1：

$$E[cX]=cE[X]$$

其中c为常数

性质2：若c为常数，则有

$$E[c]=c$$

性质3：若X、Y是任意二个随机变量，则有

$$E[X+Y]=E[X]+E[Y]$$

$$E[X_1+X_2+\cdots+X_n]$$
$$=E[X_1]+E[X_2]+\cdots E[X_n]$$

**性质4：若X、Y是二个相互独立的随机变量，则有**

$$E[XY]=E[X]E[Y]$$

例1：设连续随机变量X在[a,b]区间上服从均匀分布，求X的数学期望。

例2：设离散随机变量X服从二项分布，即

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$p+q=1,\quad k=0,1,\cdots,n$$

求其数学期望。

## 1.2.2 方差

连续随机变量X的方差定义为

$$\sigma_X^2 = D[X] = E\{(X - E[X])^2\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx$$

离散随机变量X的方差定义为：

$$\sigma_X^2 = D[X] = E\{(X - E[X])^2\}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E[X])^2 \bullet p_i$$

## 方差的性质：

性质1：若c为常数，则

$$D[c]=0$$

性质2：若X是随机变量，c是常数，则有

$$D[cX]=c^2D[X]$$

性质3：若X、Y是两个相互独立的随机变量，则有

$$D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$$

$$D[X_1 + X_2 + \cdots + X_n]$$

$$= D[X_1] + D[X_2] + \cdots + D[X_n]$$

**例3：设X服从[a,b]上的均匀分布，求其方差。**

## 1.2.3 矩

**n**阶原点矩定义为

$$m_n = E[X^n] \quad n = 1,2,\cdots$$

对于离散和连续随机变量，则分别有

$$m_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\ n} p_i$$

$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) dx$$

**n阶中心矩定义为：**

$$\mu_n = E\{(X - E[X])^n\} \quad n = 1, 2, \cdots$$

对于离散和连续随机变量，则分别有

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - E[X])^n p_i$$

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - E[X])^n f_X(x)dx$$

二维随机变量X和Y的n+k阶联合原点矩定义为：

$$m_{nk} = E[X^n Y^k]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^n y^k f_{XY}(x, y) dxdy$$

二维随机变量X和Y的n+k阶联合中心矩为：

$$\mu_{nk} = E\{(X - E[X])^n (Y - E[Y])^k\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^n (y - E[Y])^k f_{XY}(x, y)dxdy$$

当**n=1，k=1**时，二阶联合原点矩为

$$m_{11} = E[XY] = R_{XY}$$

它又称为**X**和**Y**的相关矩。

当**n=1**，**k=1**时，二阶联合中心矩为

$$\sigma_{XY} = E(X - E[X])(Y - E[Y]) = C_{XY}$$

它又称为**X**和**Y**的协方差。

由协方差定义得相关系数定义为：

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{D[X]D[Y]}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$-1 \le \rho_{XY} \le 1$$

当 $\rho_{XY}=0$ 时，则称X与Y不相关；

若 $\rho_{XY}\neq 0$ ，则称X与Y相关。

**例4：X与Y为相互独立的随机变量，求二者的相关系数。**

**例5：随机变量Y=aX+b，其中X为随机变量，a、b为常数，且a>0，求X与Y的相关系数。**

## 1.2.4 统计独立与不相关

统计独立：对于随机变量而言，**X**和**Y**相互统计独立的充要条件为

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

相关是指两个坐标之间的线性相关程度。

下面对这两个概念进行讨论：

**1.** 随机变量**X**和**Y**相互统计独立的充要条件为

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

2. 随机变量X与Y不相关的充要条件是

$$\sigma_{XY} = 0$$

或

$$\rho_{XY} = 0$$

3. 若两个随机变量统计独立，它们必然不相关。

**4.** 两个随机变量不相关，则它们不一定互相独立。

仅当这两个随机变量均为正态（高斯）分布时，不相关<=>相互独立。

5. 若随机变量X、Y的相关矩为零，即

$$E(XY)=0$$

则称X、Y互相正交。

# 当 X、Y 相互正交

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = -E(X)E(Y)$$

① 若X、Y 均非零均值，则X、Y 相关

② 若X、Y 其中一个为零均值，则X、Y 不相关，

正交<=>不相关

③ 若X、Y 均为零均值的正态分布，

则正交<=>独立<=>不相关