第3 章

平稳随机过程

杭州电子科技大学

一 平稳随机过程

1 严平稳随机过程

(1) 定义

如果对于任意的n和ε，随机过程 X(t)的N 维概率密度满足：

$$
\begin{aligned}
& f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) \\
& = f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1+\varepsilon, t_2+\varepsilon, \cdots, t_n+\varepsilon)
\end{aligned}
$$

则称X(t) 为严平稳（或狭义）随机过程 。

(2) 一、二维概率密度及数学特征

- 严平稳随机过程的一维概率密度与时间无关

$$\forall \varepsilon \quad f_X(x_1;t_1) = f_X(x_1;t_1+\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon=-t_1} f_X(x_1;0) = f_X(x_1)$$

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1)dx_1 = m_X$$

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 f_X(x_1)dx_1 = \Psi_X^2$$

$$D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_X)^2 f_X(x_1)dx_1 = \sigma_X^2$$

- **严平稳随机过程的二维概率密度只与 t_1, t_2 的时间间隔有关，而与时间起点无关**

$$\forall \in \; f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 + \in, t_2 + \in)$$

$$\xrightarrow{\text{Á ȇ}\in=-t_1} f_X(x_1 x_2; 0, t_2 - t_1) = f_X(x_1, x_2; \tau)$$

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1, x_2 f_X(x_1, x_2; \tau) dt_1 dx_2 = R_x(\tau)$$

$$C_X(t_1, t_2) = C_x(\tau) = R_x(\tau) - m_X^2$$

$$= R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1) m_X(t_1) = R_x(\tau) - m_X^2$$

(3)严平稳的判断

按照严平稳的定义，判断一个随机过程是否为严平稳，需要知道其n维概率密度，可是求n维概率密度是比较困难的。不过，如果有一个反例，就可以判断某随机过程不是严平稳的，具体方法有两个：

(1) 若X(t)为严平稳，k为任意正整数，则 $E[X^k(t)]$与时间t无关。

(2) 若X(t)为严平稳，则对于任一时刻t_0， $X(t_0)$具有相同的统计特性。

2 宽平稳随机过程

若随机过程 X(t)满足

$$m_X(t) = m_X$$

$$R_X(t_1, t_2) = E(X_{t_1}, X_{t_2}) = R_X(\tau)$$

$$\psi_x^2(t) = E[X^2(t)] < \infty$$

则称X(t)为宽平稳或广义平稳随机过程。

严平稳与宽平稳的关系：严平稳过程的均方值有界，则此过程为宽平稳的，反之不成立。对于正态过程，严平稳与宽平稳等价。

二 平稳随机过程的性质

性质1 $R_X(0)=E[X^2(t)]=\psi_X^2\geq 0$ **平均功率**

性质2 $R_X(\tau)=R_X(-\tau)$ $C_X(\tau)=C_X(-\tau)$ **偶对称性**

性质3 $R_X(0)\geq |R_X(\tau)|$ $C_X(0)=\sigma_X^2\geq |C_X(\tau)|$ **极值性**

证：任何正函数的数字期望恒为非负值，即

$$E[(X(t)\pm X(t+\tau))^2]\geq 0$$

$$E[X^2(t)\pm 2X(t)X(t+\tau)+X^2(t+\tau)]\geq 0$$

对于平稳过程X(t)，有

$$E[X^2(t)]=E[X^2(t+\tau)]=R_X(0)$$

代入前式，可得 $2R_X(0)\pm 2R_X(\tau)\geq 0$

于是 $R_X(0)\geq |R_X(\tau)|$ **同理** $C_X(0)=\sigma_X^2\geq |C_X(\tau)|$

性质4 对周期性平稳过程X(t)=X(t+T)，T为周期，有 $R(\tau)=R(\tau+T)$。

证：由自相关函数的定义和周期性条件，容易得到

$$R_X(\tau+T)=E[X(t)X(t+\tau+T)]=E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(\tau)$$

性质5 若平稳过程含有一个周期分量，则 $R_X(\tau)$ 含有同一个周期分量。

性质6 若平稳随机过程X(t)不含有任何周期分量，则 $\lim\limits_{|\tau|\to\infty} R_X(\tau)=R_X(\infty)=m_X^2 \quad \lim\limits_{|\tau|\to\infty} C_X(\tau)=C_X(\infty)=0$

证：对于此类非周期的平稳过程，当增大$|\tau|$时，随机变量X(t)与X(t+τ)之间的相关性会减弱；在 $|\tau|\to\infty$ 的极限情况下，两者相互独立，故有

$$\lim_{|\tau|\to\infty} R_X(\tau)=\lim_{|\tau|\to\infty} E[X(t)X(t+\tau)]$$

$$=\lim_{|\tau|\to\infty} E[X(t)]E[X(t+\tau)]=m_X^2$$

亦即

$$\lim_{|\tau|\to\infty} R_X(\tau)=R_X(\infty)=m_X^2$$

同理，可求得 $\lim\limits_{|\tau|\to\infty} C_X(\tau)=C_X(\infty)=0$

性质7 若平稳过程含有平均分量(均值) m_X^2 ，则相关函数也含有平均分量，且等于 m_X^2 ，即

$$R_X(\tau)=C_X(\tau)+m_X^2$$

若X(t)是非周期的，则 $\sigma_X^2=R_X(0)-R_X(\infty)$ 。

证：由协方差函数的定义，可得

$$C_X(\tau)=E[(X(t)-m_X)(X(t+\tau)-m_X)]=R_X(\tau)-m_X^2$$

由此 $R_X(\tau)=C_X(\tau)+m_X^2$

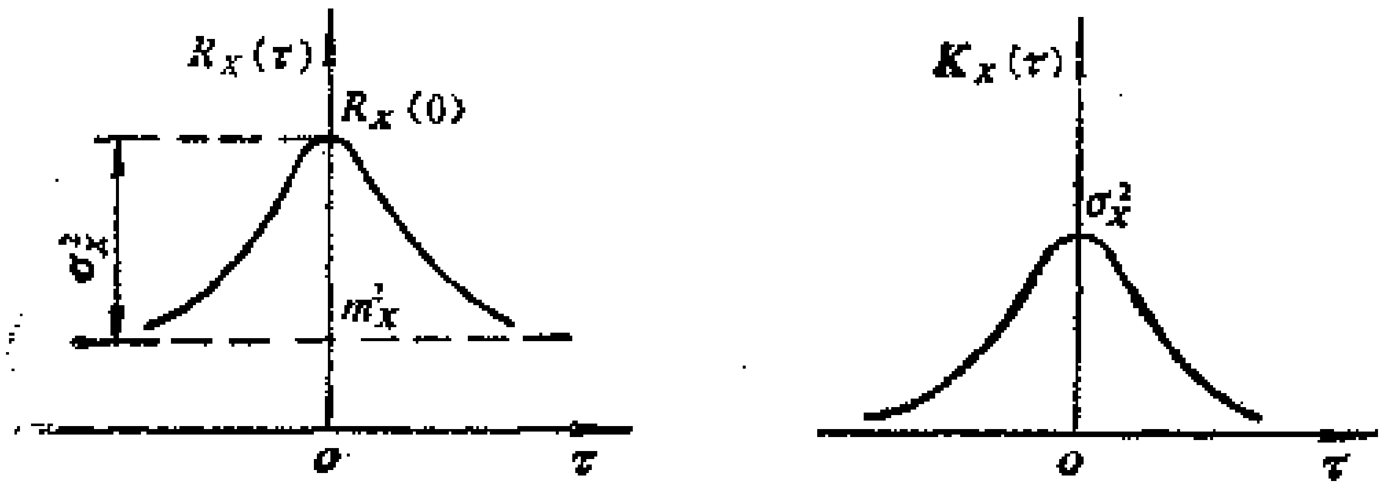
若X(t)是非周期，则有 $R_X(\infty)=m_X^2$

且在t=0时,可得

$$\sigma_X^2=C_X(0)=R_X(0)-R_X(\infty)$$

性质8 平稳随机过程必须满足 $\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \geq 0$ 对所有 τ 均成立。

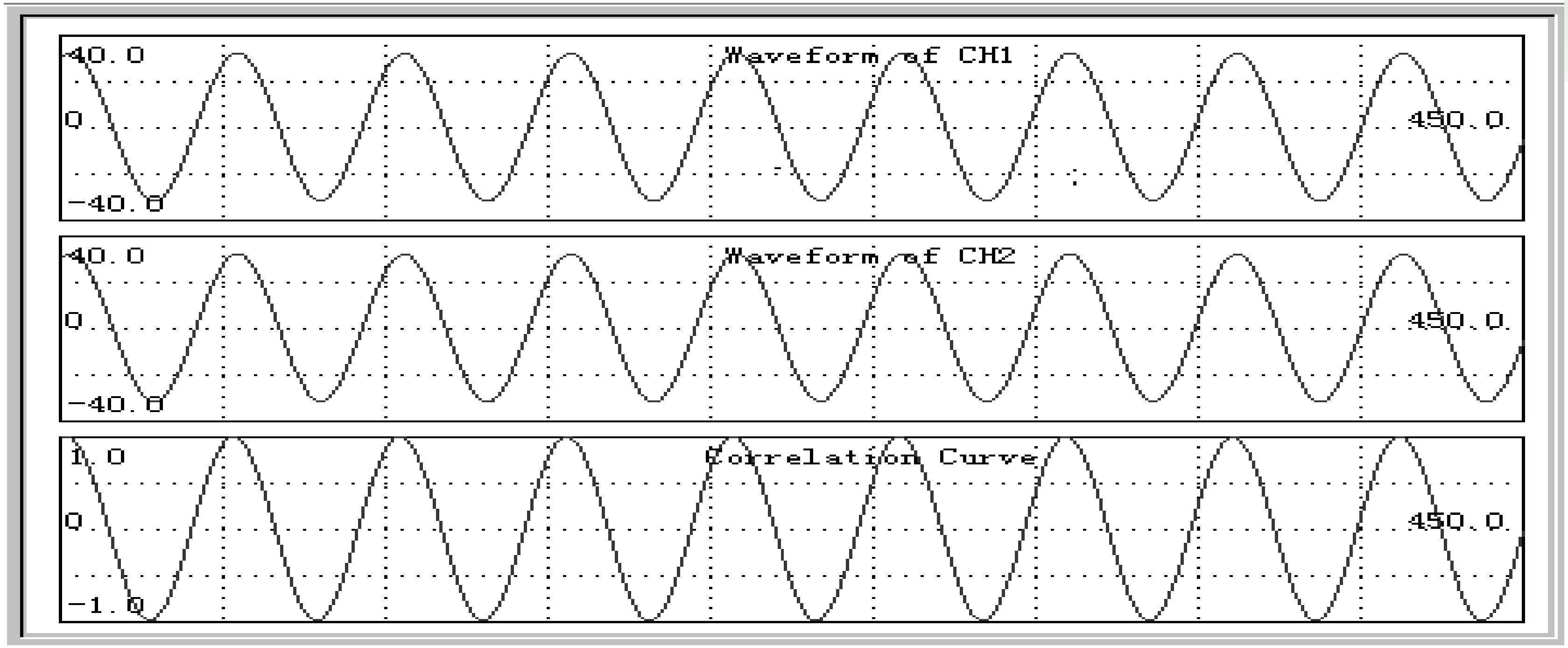
注：自相关函数的付氏变换非负，这要求相关函数连续（平顶，垂直边均是非连续）。



相关函数（协方差）的典型曲线

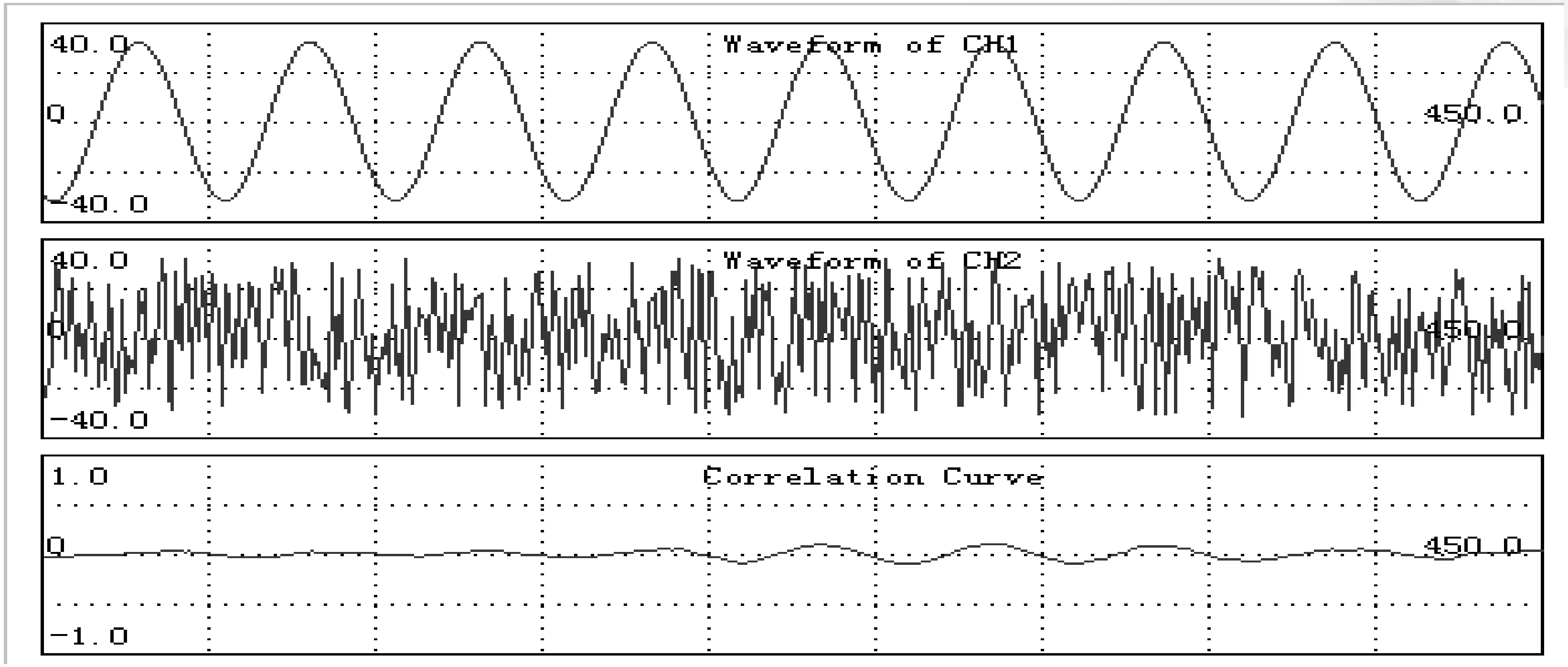
- 随机信号的自相关函数表示波形自身不同时刻的相似程度。**与波形分析、频谱分析相比，它具有能够在强噪声干扰情况下准确地识别信号周期的特点**。
- 几种典型信号的自相关（互相关）函数：

- 正弦波函数的自相关：

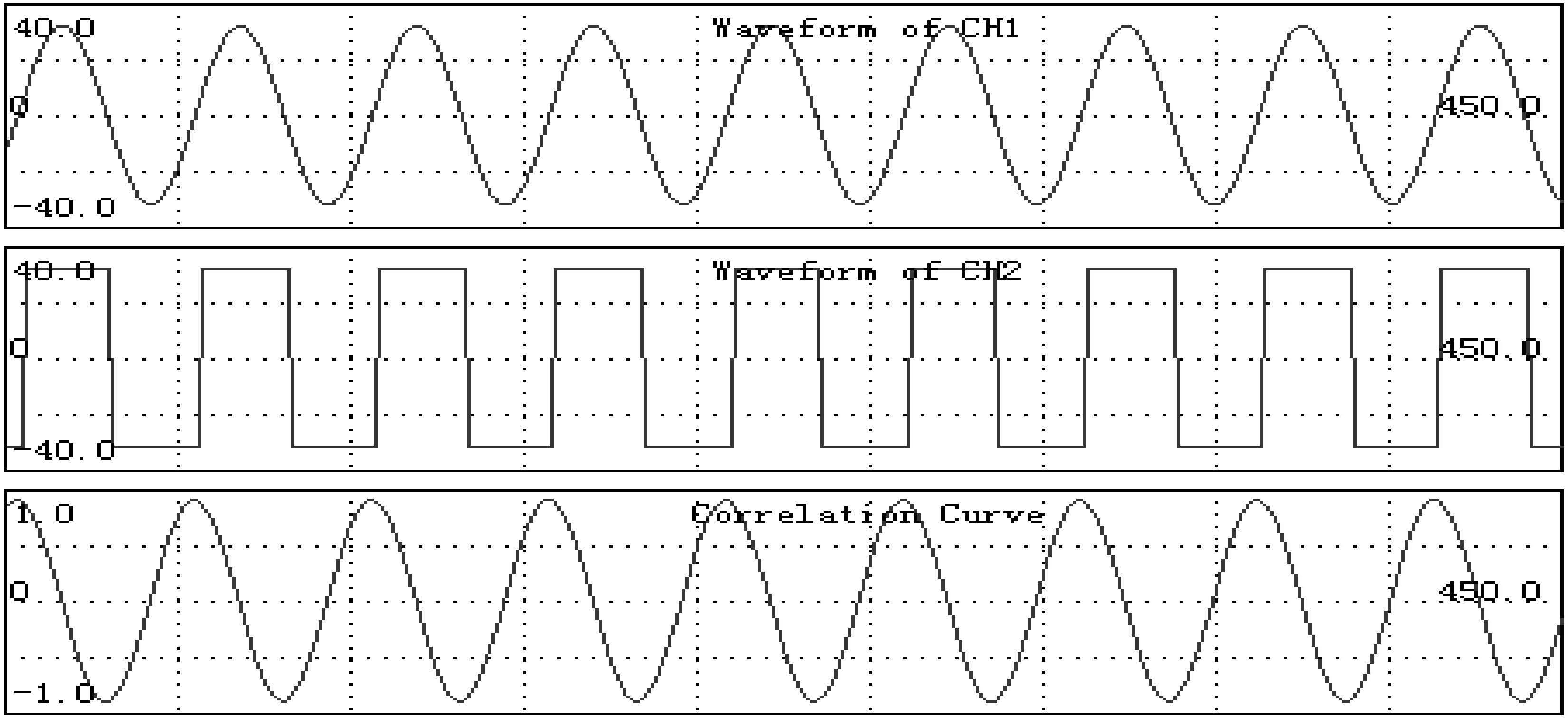


40.0
Waveform of CH1
0
450.0
-40.0
40.0
Waveform of CH2
0
450.0
-40.0
1.0
Correlation Curve
0
450.0
-1.0

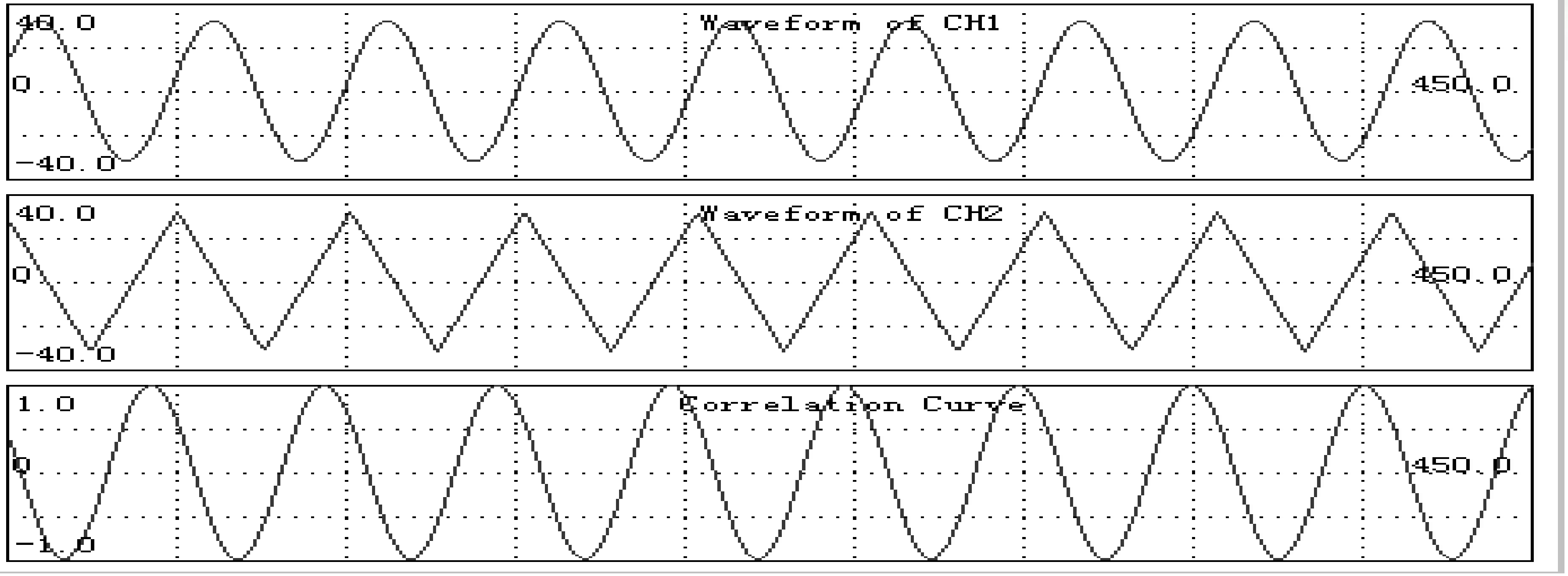
- 正弦波与噪声的互相关函数：



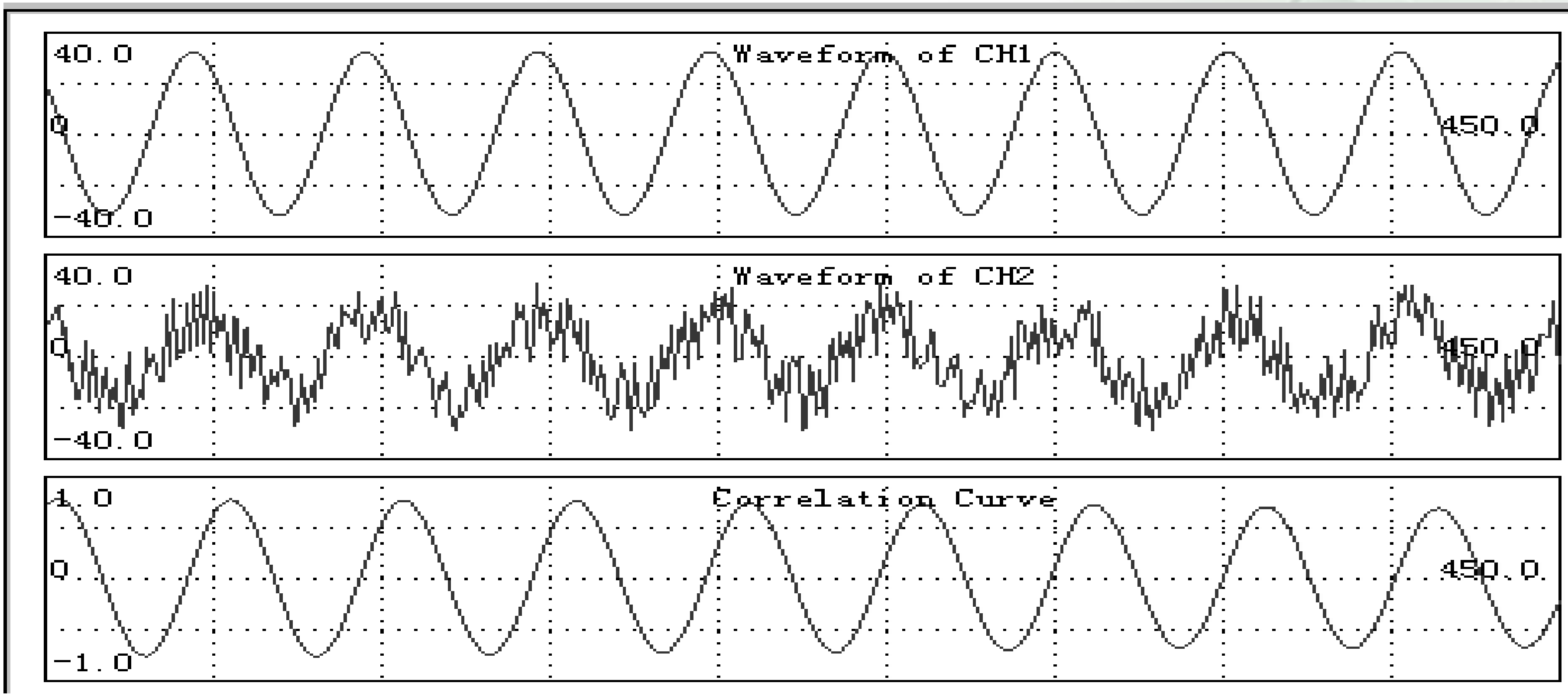
- 正弦波与方波的互相关函数：



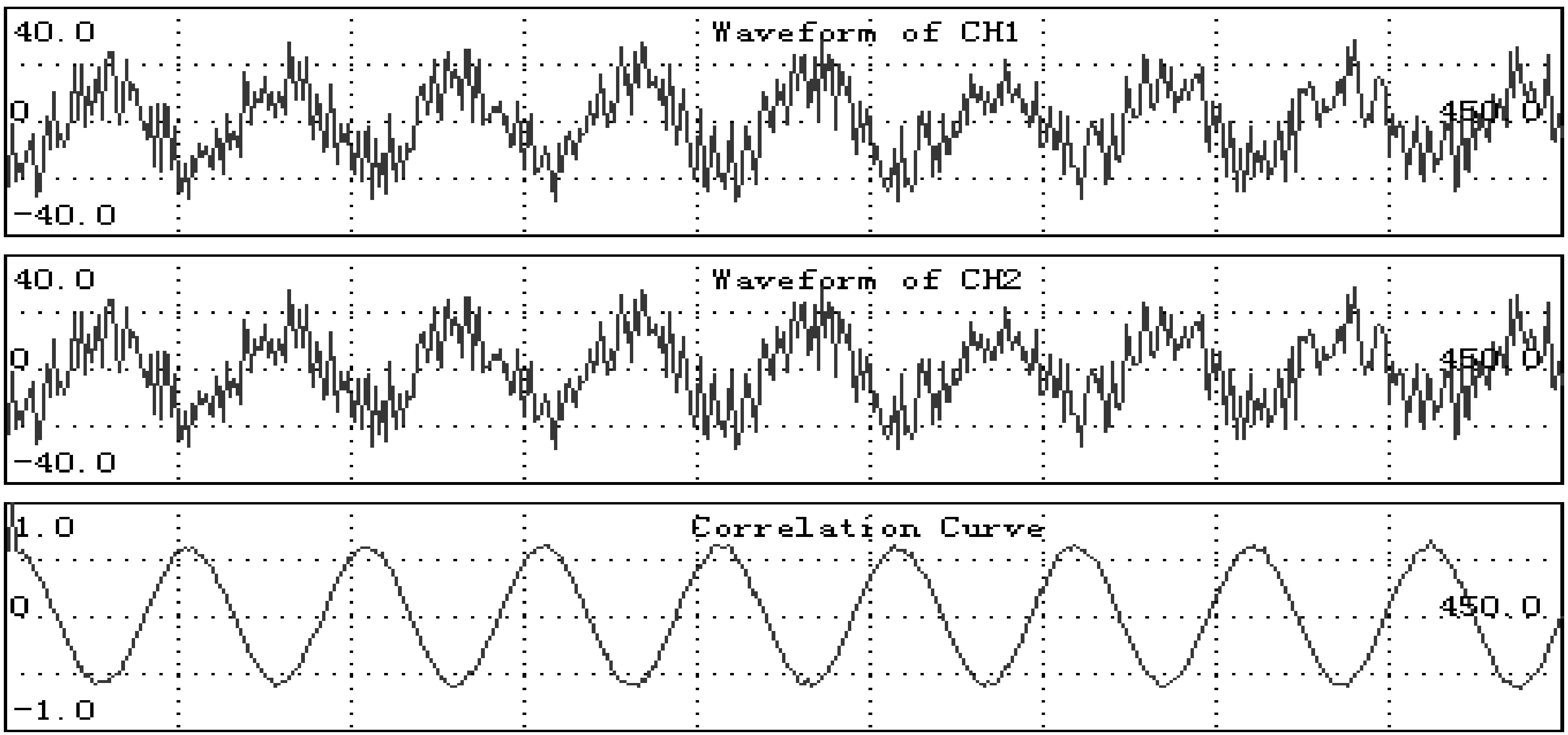
- 正弦波与三角波的互相关函数：



- 正弦波与自身加噪声的互相关函数：



- 正弦波加噪声的自相关函数



平稳过程的相关系数和相关时间

- **相关系数**

$$\rho_X(\tau)=\frac{C_X(\tau)}{C_X(0)}=\frac{R_X(\tau)-m_X^2}{\sigma_X^2}$$

此值在[－1，1]之间。$\rho_X(\tau)=0$表示不相关，$\rho_X(\tau)=1$表示完全相关。$\rho_X(\tau)>0$表示正相关，表明两个不同时刻起伏值（随机变量与均值之差）之间符号相同可能性大。

➢相关时间

当相关系数中的时间间隔大于某个值，可以认为两个不同时刻起伏值不相关了，这个时间就称为相关时间。

通常把相关系数的绝对值小于0.05的时间间隔 ，记做相关时间, 即$|\rho_X(\tau_0)|\le 0.05$ 时的时间间隔τ_0 为相关时间。

有时我们用矩形（高为$\rho_X(0)=1$,底为 τ_0的矩形）面积等于阴影面积($\rho_X(\tau)$积分的一半）

$$\tau_0=\int_0^{\infty}\rho_X(\tau)d\tau$$

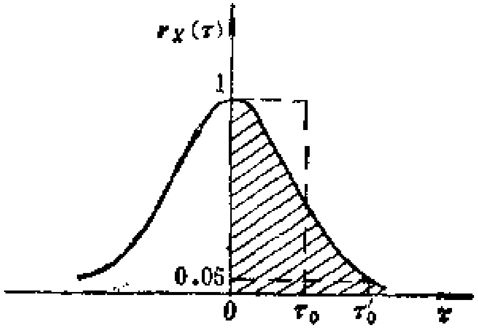


图 2.11 相关时间τ_0（或τ_0'）的定义

物理意义

相关时间τ_0越小，就意味着相关系数$r_X(\tau)$随 τ 增加而降落的越快，这表明随机过程随时间变化越剧烈。反之,τ_0越大，则表时随机过程随时间变化越慢。

例：已知平稳随机过程 X(t)的自相关函数为

$$R_X(\tau)=100e^{-10|\tau|}+100\cos 10\tau+100$$

求X(t)的均值、均方值和方差。

解： $$R_X(\tau)=(100\cos 10\tau)+(100e^{-10|\tau|}+100)=R_{X1}(\tau)+R_{X2}(\tau)$$

式中，$R_{X1}(t)=100\cos 10t$是X(t)中周期分量的自相关函数，此分量的均值$m_{x1}=0$；$R_{X2}(t)=100e^{-10|t|}+100$是X(t)的非周期分量的自相关，

由性质6，可得

$$m_{X2}=\pm\sqrt{R_{X2}(\infty)}=\pm 10$$

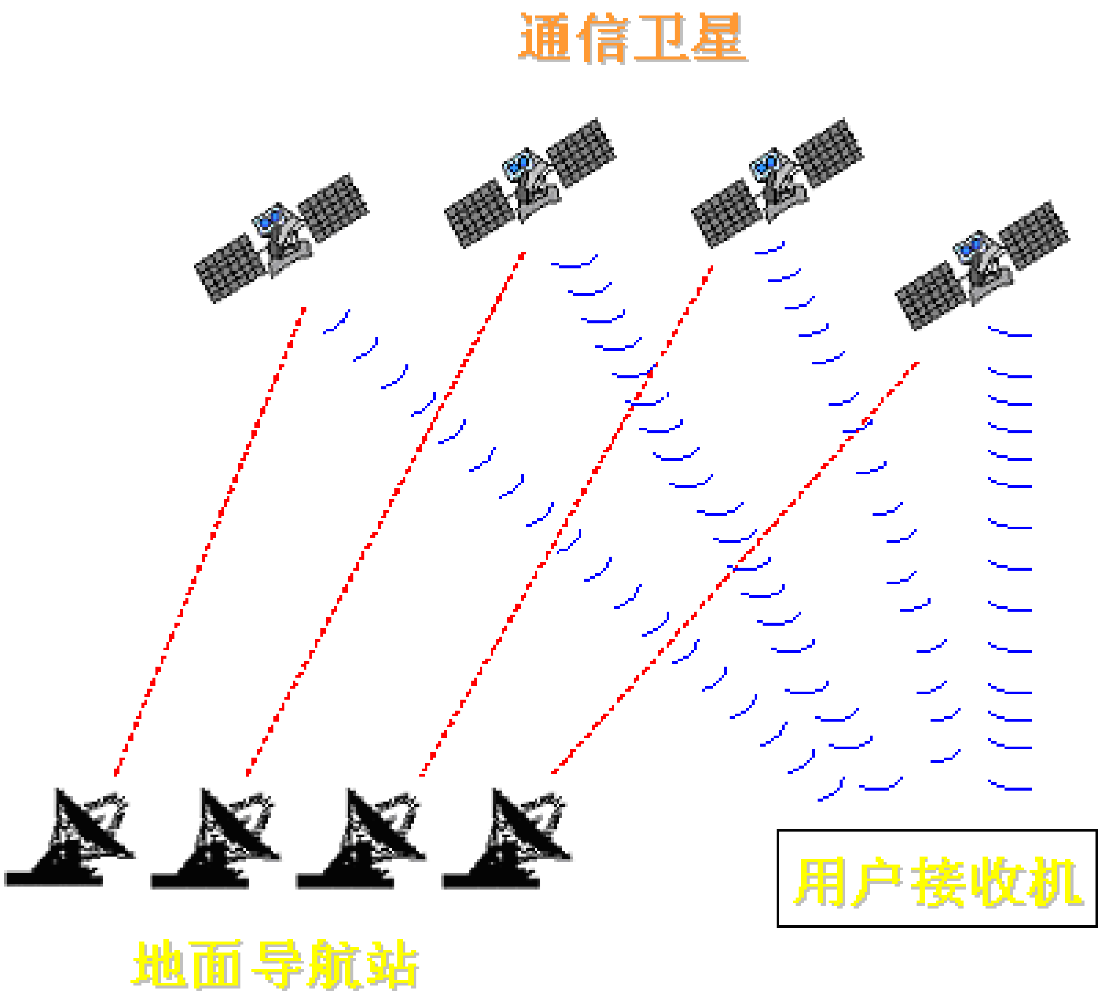
所以有

$$m_x=m_{x1}+m_{x2}=\pm 10$$

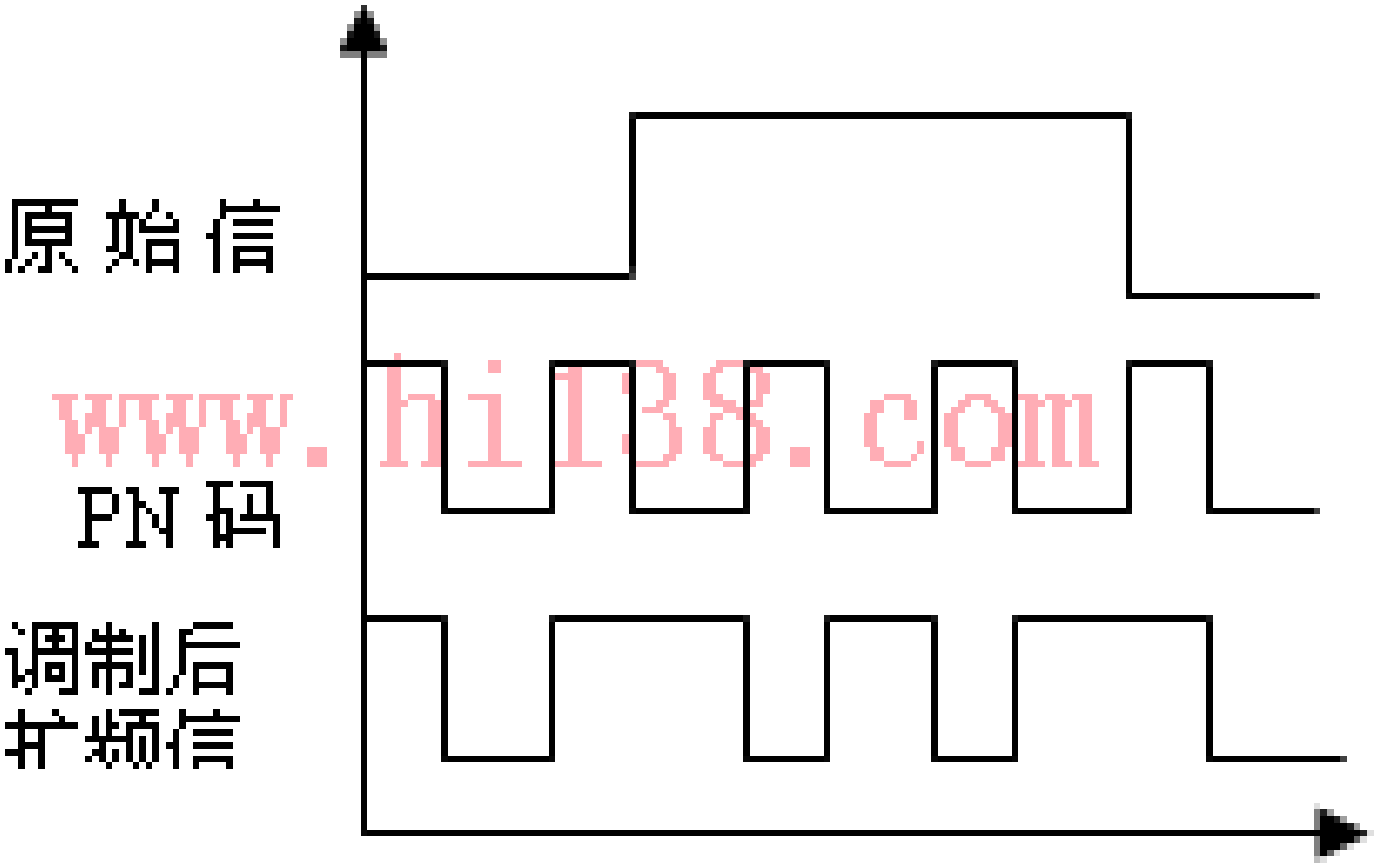
$$E[X^2](t)=R_X(o)=300$$

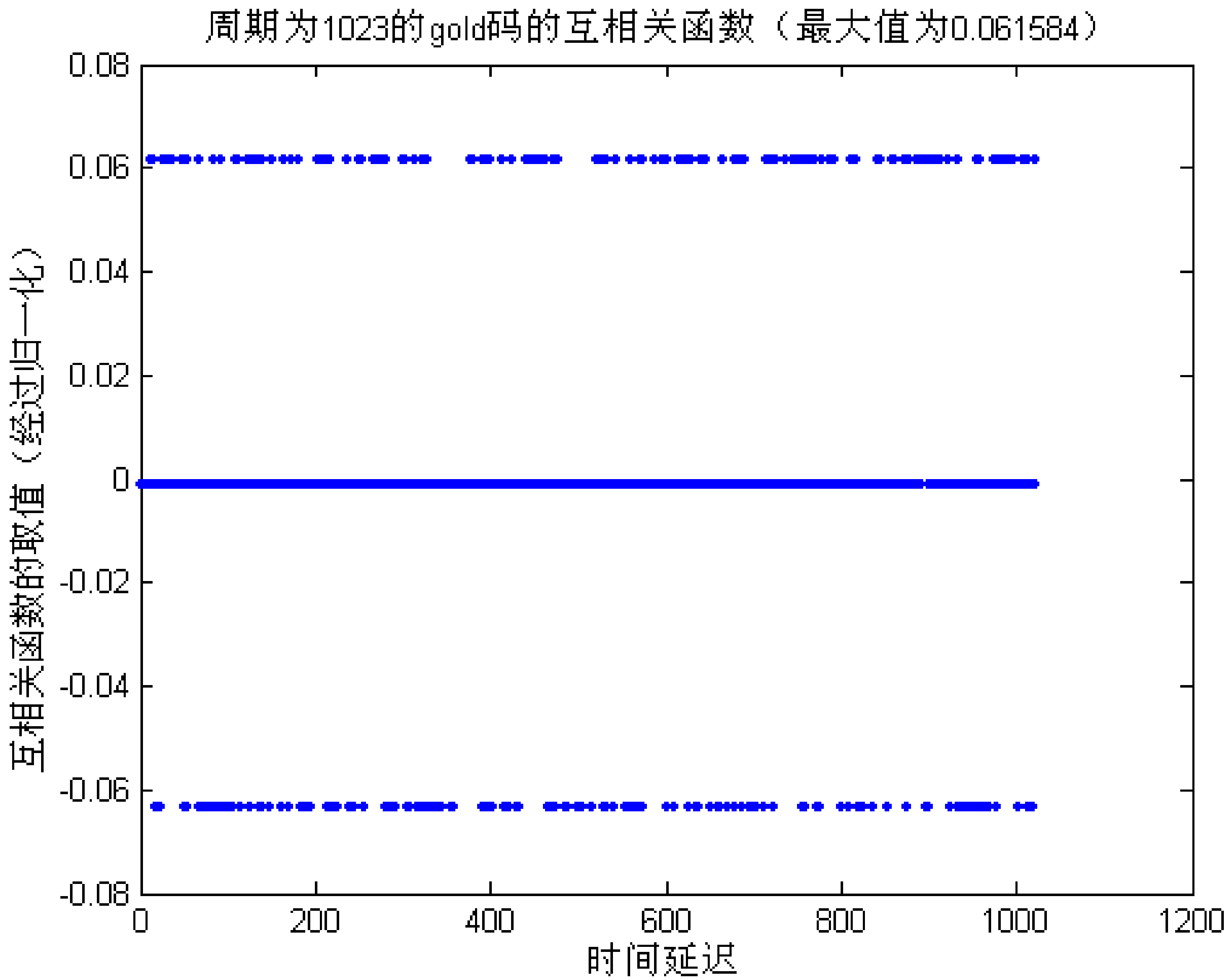
$$\sigma_X^2=R_X(0)-m_X^2=300-100=200$$

地面生成导航信息，转发至用户



系统基本工作原理


原始信
PN码
调制后
扩频信



周期为1023的gold码的互相关函数（最大值为0.061584）
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
0
200
400
600
800
1000
1200
时间延迟
互相关函数的取值（经过归一化）

三 遍历性或各态历经性

1 遍历性过程的定义

- **严遍历性的定义**

如果一个随机过程 X(t),它的各种时间平均（时间足够长）依概率1收敛于相应的集合平均,则称X(t)具有严格遍历性,并称它为严遍历过程。

- **宽遍历性的定义**

设X(t)是一个平稳随机过程,如果其均值和相关函数都具有遍历性,则称X(t)为宽(或广义)遍历过程,或简称遍历过程。

定义 $A(X(t)) = \overline{x(t)} = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)dt$ 为时间均值，如若它依概率1收敛于集合均值，即

$$A(X(t)) = \overline{x(t)} = E[x(t)] = m_X$$

则称X(t)均值具有遍历性。定义时间自相关函数为

$$\Re_X(t,t+\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t+\tau)dt$$

如果它依概率1收敛于集合自相关函数，即

$$\Re_X(t,t+\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = E[x(t)x(t+\tau)] = R_X(\tau)$$

则称X(t)自相关函数具有遍历性 。

2 遍历过程的实际应用

一般随机过程的时间平均是随机变量，但遍历过程的时间平均为确定量，因此可用任一样本函数的时间平均代替整个过程的统计平均，在实际工作中，时间T不可能无限长，只要足够长即可。

3 遍历过程和平稳过程的关系

遍历过程必定是平稳的，而平稳过程不一定是遍历的。

例：设 $X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Phi)$,式中a，ω_0 为常数,Φ 是整周期上均匀分布的随机变量。试问：X(t)是否平稳？是否遍历？

解：
$$m_X(t)=E[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t).f_{\varphi}(\varphi)d\varphi=\int_0^{2\pi}a\cos(\omega_0 t+\varphi).2\pi d\varphi$$
$$=0=m_X$$

$$R_X(t,t+\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$$
$$=\frac{a^2}{2}E[\cos\omega_0\tau]+\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\Phi)]$$
$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau=R_X(\tau)$$

$$E[X^2(t)]=R_X(t,t)=\frac{a^2}{2}<\infty$$

故X(t)是宽平稳随机过程。

$$A<X(t)>=\overline{X(t)}=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}a\cos(\omega_0 t+\Phi)dt$$

$$=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{a\cos\Phi\sin\omega_0 T}{\omega_0 T}=0$$

$$\Re_X(t,t+\tau)=\overline{X(t)X(t+\tau)}$$

$$=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{a^2}{2}[\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\Phi)]dt+\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\left(\int_{-T}^{T}\cos\omega_0\tau.dt\right)$$

$$=0+\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{2T}{2T}\cos\omega_0\tau\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

故X(t)也是宽遍历随机过程。

- 两个随机过程

一 两个随机过程的联合概率分布

设有两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$,它们的概率密度分别为 $f_X(x_1,x_2\dots,x_n;t_1,t_2\dots,t_n)$ $f_Y(y_1,y_2\dots,y_m;t_1,t_2\dots,t_m)$

定义这两个过程的(n+m)维联合分布函数为：

$$F_{XY}=(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m;t_1,\dots,t_n;t_1^{'},\dots,t_m^{'})$$

$$=p\{X(t_1)\le x_1,\dots X(t_n)\le x_n;Y(t_1^{'})\le y_1,\dots Y(t_m^{'})\le y_m\}$$

定义这两个过程的(n+m)维联合概率密度为：

$$f_{XY}=(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m;t_1,\ldots,t_n;t_1^{'},\ldots,t_m^{'})$$

$$=\frac{\partial^{n+m}F_{XY}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n;t_1^{'},,t_m^{'})}{\partial x_1\cdots\partial x_n\partial y_1\cdots\partial y_m}$$

注　1）若两个过程的n+m维联合概率分布给定，则它们的全部统计特性也确定了。

2）可以由高维联合分布求出它们的低维联合概率分布。

3）若两个随机过程的联合概率分布不随时间平移而变化，即与时间的起点无关，则称此二过程为联合严平稳或严平稳相依。

二 两个随机过程的互相关函数

1 定义

设两个随机过程$X(t)$和$Y(t)$，它们在任意两个时刻t_1，t_2的取值为随机变量$X(t_1)$、$Y(t_2)$,则定义它们的互相关函数为：

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf_{XY}(x,y;t_1,t_2)dxdy$$

式中，$f_{XY}(x,y;t_1,t_2)$ 是随机过程$X(t)$和$Y(t)$的二维联合概率密度。

随机过程$X(t)$和$Y(t)$的中心互相关函数定义为：

$$C_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)-m_X(t_1)][Y(t_2)-m_Y(t_2)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_X(t_1))(y-m_Y(t_2))f_{XY}(x,y;t_1,t_2)dxdy$$

式中，$m_X(t_1)$和 $m_X(t_2)$ 分别是随机变量$X(t_1)$和$Y(t_2)$的数学期望。此式也可以写成

$$C_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_Y(t_2)$$

2 统计独立、不相关、正交的概念

1）统计独立

若 $F_{XY}(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m;t_1,\ldots,t_n;t_1^{'},\ldots,t_m^{'})$

$$=F_X(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)F_Y(y_1,\ldots,y_m;t_1^{'},\ldots,t_m^{'})$$

或 $f_{XY}(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m;t_1,\ldots,t_n;t_1^{'},\ldots,t_m^{'})$

$$=f_X(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)f_Y(y_1,\ldots,y_m;t_1^{'},\ldots,t_m^{'})$$

则称随机过程 $X(t)$和$Y(t)$相互独立。

2）不相关

若两个随机过程$X(t)$和$Y(t)$对任意两个时刻t_1, t_2都具有$C_{XY}(t_1,t_2)=0$或$R_{XY}(t_1,t_2)=m_X(t_1)m_X(t_2)$，则称$X(t)$和$Y(t)$不相关。

3）正交

若两个随机过程$X(t)$和$Y(t)$对任意两个时刻t_1, t_2都具有$R_{XY}(t_1,t_2)=0$或$C_{XY}(t_1,t_2)=-m_X(t_1)m_X(t_2)$，则称$X(t)$和$Y(t)$互为正交过程。

推论

(1) 如果两个随机过程相互独立，且他们的二阶矩都存在，则必互不相关。

(2) 正态过程的不相关与相互独立等价。

三 联合宽平稳和联合宽遍历

1 定义

（1）联合宽平稳定义

两个随机过程$X(t)$和 $Y(t)$，如果：

- $X(t)$和$Y(t)$分别宽平稳
- 互相关函数仅为时间差τ 的函数，与时间t 无关

即

$$R_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(\tau) \qquad \tau=t_2-t_1$$

则称$X(t)$和$Y(t)$ 为联合宽平稳或宽平稳相依。

（2） 联合宽遍历定义

两个随机过程$X(t)$和$Y(t)$，如果：

- $X(t)$和$Y(t)$联合宽平稳
- 定义它们的时间互相关函数为：

$$\Re_{XY}(t) = \overline{X(t)Y(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)Y(t+\tau)dt$$

若$\Re_{XY}(\tau)$依概率1收敛于互相关函数$R_{XY}(\tau)$

即 $\Re_{XY}(t) = \overline{X(t)Y(t+\tau)} = E[X(t)Y(t+\tau)] = R_{XY}(\tau)$

则称$X(t)$和$Y(t)$具有联合宽遍历性。

（3）互协方差与互相关系数

当两个随机过程联合平稳时，它们的互协方差

$$C_{XY}(t_1,t_2)=C_{XY}(t_2-t_1)=C_{XY}(\tau)$$

互相关系数

$$\rho_{XY}(t)=\frac{C_{XY}(t)}{\sqrt{C_X(o)C_Y(o)}}=\frac{R_{XY}(t)-m_X m_Y}{\sigma_X\sigma_y}$$

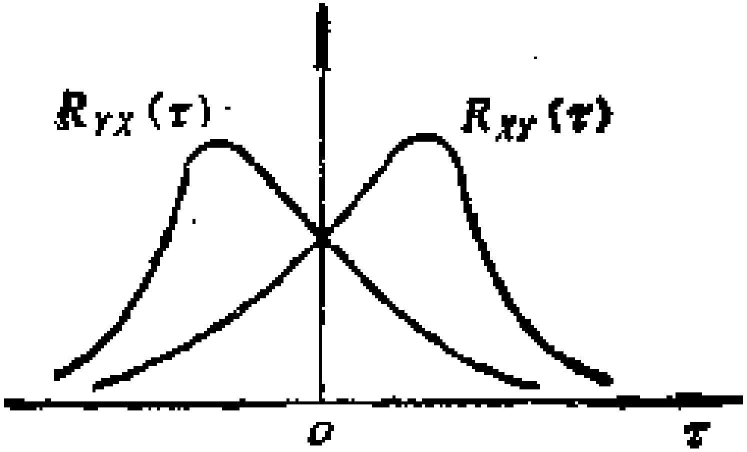
又称作归一化互样关函数或标准互协方差函数。

注：$|\rho_{XY}(\tau)|\le 0$。当 $|\rho_{XY}(\tau)|=0$ 时，随机变量 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 互不相关。

2 联合宽平稳的性质

(1) $R_{XY}(\tau)=R_{YX}(-\tau) \qquad C_{XY}(\tau)=C_{YX}(-\tau)$

证明：按定义即可证明，说明互相关函数既不是偶函数，也不是奇函数。



互相关函数的影像关系

(2) $|R_{XY}(\tau)|^2 \le R_X(0)R_Y(0)$ $|C_{XY}(\tau)|^2 \le C_X(0)C_Y(0) = \sigma_X^2\sigma_Y^2$

证明： 由于 $E[(Y(t+\tau)+\lambda X(t))^2] \ge 0$,λ 为任意实数

展开得：$R_X(0)\lambda^2 + 2R_{XY}(\tau)\lambda + R_Y(0) \ge 0$

这是关于λ的二阶方程。注意, $R_X(0) \ge 0$

要使上式恒成立，即方程无解或只有同根，

则方程的系数应该满足$B^2 - 4AC \le 0$,则有

$$(2R_{XY}(\tau))^2 - 4R_X(0)R_Y(0) \le 0$$

所以， $|R_{XY}(\tau)|^2 \le R_X(0)R_Y(0)$

同理， $|C_{XY}(\tau)|^2 \le C_X(0)C_Y(0) = \sigma_X^2\sigma_Y^2$

(3) $$|R_{XY}(\tau)| \le \frac{1}{2}[R_X(0)+R_Y(0)]$$

$$|C_{XY}(\tau)| \le \frac{1}{2}[C_X(0)+C_Y(0)] = \frac{1}{2}\left(\sigma_X^2+\sigma_Y^2\right)$$

证明： 由性质(2)，得

$$|R_{XY}(\tau)|^2 \le R_X(0)R_Y(0)$$

注意到 $R_X(0)\ge 0 \quad R_Y(0)\ge 0$

因此，

$$|R_{XY}(\tau)| \le \sqrt{R_X(0)R_Y(0)} \le \frac{1}{2}[R_X(0)+R_Y(0)]$$

（任何正数的几何平均小于算术平均）

例 设两个平稳随机过程 $X(t)=\cos(t+\Phi)$ $Y(t)=\sin(t+\Phi)$

试问：X(t)和Y(t)是否平稳相依？是否正交、不相关、统计独立？

解：平稳随机过程 X(t)和Y(t)的互相关函数为：

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]=E[\cos(t+\Phi)\sin(t+\tau+\Phi)]$$

$$=\frac{1}{2}E[\sin(2t+\tau+2\Phi)+\sin\tau]=\frac{1}{2}\sin\tau+\frac{1}{2}E[\sin(2t+\tau+2\Phi)]$$

$$=\frac{1}{2}\sin\tau=R_{XY}(\tau)$$

故这两个随机过程是平稳相依的。

$$m_X(t)=E[X(t)]=E[\cos(t+\Phi)]=0$$

$$m_Y(t+t)=E[Y(t+t)]=E[\sin(t+t+\Phi)]=0$$

$$C_{XY}(t,t+\tau)=R_{XY}(t,t+\tau)-m_X(t)m_Y(t+\tau)=R_{XY}(t,t+\tau)=R_{XY}(\tau)=\frac{1}{2}\sin\tau$$

故$C_{XY}(t_1,t_2)$仅在 $t=\pm n\pi$ **时等于零，此时X(t)和Y(t)是相关的，因而它们不是统计独立的。**

四 复随机过程

复随机变量

1 定义

我们把复随机变量Z定义为$Z=X+jY$，式中,X和Y为实随机变量。

2 分布函数

$$F_Z(z)=P[X\le x,Y\le y]=F_{XY}(x,y)$$

即由X,Y的联合概率分布描述。

3 数字特征

(1) 数学期望

$$m_Z = E[Z] = E[X + jY] = E[X] + jE[Y] = m_X + jm_Y$$

(2) 方差

$$D_Z = D[Z] = E[|\dot{Z}|^2] = E[\dot{X}^2 + \dot{Y}^2] = E[\dot{X}^2] + E[\dot{Y}^2] = D_X + D_Y$$

其中

$$\dot{Z} = Z - m_Z = (X + jY) - (m_X + jm_Y) = (X - m_X) + j(Y - m_Y) = \dot{X} + j\dot{Y}$$

注： i)复随机过程的方差等于它的实部与虚部的方差之和

ii)复随机过程的方差为非负的实数。

(3) 相关矩

设Z_1、Z_2为两个复随机变量，则

$$R_{Z_1Z_2} = E\left[Z_1^* Z_2\right]$$

(4) 互协方差

$$C_{Z_1Z_2} = E\left[\dot{Z}_1^* \dot{Z}_2\right] = E\left[(Z_1 - m_{Z_1})^* (Z_2 - m_{Z_2})\right]$$

4 两个复随机变量的独立、不相关、正交

1）统计独立

$$f_{X_1Y_1X_2Y_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) = f_{X_1Y_1}(x_1, y_1) f_{X_2Y_2}(x_2, y_2)$$

2）不相关

$$C_{Z_1Z_2} = E\left[(Z_1 - m_{Z_1})^*(Z_2 - m_{Z_2})\right] = 0$$

3）正交

$$R_{Z_1Z_2} = E\left[Z_1^* Z_2\right] = 0$$

复随机过程

1 定义

设 $X(t)$，$Y(t)$ 为实随机过程，则定义

$$Z(t)=X(t)+jY(t)$$

为复随机过程。

2 概率密度函数

Z(t)的统计特性可由X(t)和Y(t)的2n维联合概率分布完整地描述，其概率密度为：

$$f_{Xy}=(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_n;t_1,\ldots,t_n,t_1'\ldots,t_n')$$

3 数字特征

(1) 数学期望

$$m_z(t)=E[z(t)]=E[X(t)+jY(t)]=m_X(t)+jm_Y(t)$$

(2) 方差

$$D_Z(t)=E[\left|Z(t)-m_Z(t)\right|^2]=E[Z(t)-m_Z(t)Z(t)-m_Z(t)^*]$$

$$=D_X(t)+D_Y(t)$$

(3) 自相关函数

$$R_z(t,t+\tau)=E[Z(t)^*Z(t+\tau)]$$

(4) 自协方差函数

$$C_Z(t,t+\tau)=E\left[\dot{Z}^*(t)\dot{Z}(t+\tau)\right]$$

$$=E\left[(Z(t)-m_Z(t))^*(Z(t+\tau)-m_Z(t+\tau))\right]$$

(5) 互相关函数

$$R_{Z_1Z_2}(t,t+\tau)=E[Z_1^*(t)Z_2(t+\tau)]$$

(6) 互协方差函数

$$C_{Z_1Z_2}(t,t+\tau)=E\left[\dot{Z}_1^*(t)\dot{Z}_2(t+\tau)\right]$$

$$=E\left[(Z_1(t)-m_{Z_1}(t))^*(Z_2(t+\tau)-m_{Z_2}(t+\tau))\right]$$

注： ⅰ）若$C_{Z_1Z_2}(t,t+\tau)=0$，则Z_1，Z_2不相关。

ⅱ）若$R_{Z_1Z_2}(t,t+\tau)=0$，则Z_1，Z_2正交。

4 复随机过程的宽平稳性

若复随机过程满足：$m_z(t) = m_x + jm_Y$

$Rz(t, t+\tau) = Rz(\tau)$ $\psi_Z^2 = E[|Z(t)|^2 < \infty$,则称Z(t)为宽平稳的复过程。若两个平稳的复过程X(t)和Y(t)满足 $R_{XY}(t, t+\tau) = R_{XY}(\tau)$,则称X(t)和Y(t) 联合宽平稳。

小结 求复随机过程的数字特征时要注意，其均值为复数，方差等二阶矩为非负实数，因此，求其二阶矩时（包括方差，相关函数和协方差）采用一个复随机过程与其共轭相乘，再求数学期望的方法，其它性质和特性与实随机过程类似。

1.5 正态随机过程

一 正态随机过程的一般概念

1 正态随机过程的定义

如果随机过程X(t)的任意n维概率分布都是正态分布，则称它为正态随机过程或高斯随机过程，简称正态过程或高斯过程。

2 概率密度函数

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\mathbf{K}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{(\mathbf{X}-\mathbf{m}_X)^T\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{m}_X)}{2}\right]$$

式中,$\mathbf{m}_X$是n维向量，K是n维阵，其中：

$$K_{ik}=K_X(t_i,t_k)=E[(X_i-m_i)(X_k-m_k)]=r_{ik}\sigma_i\sigma_k \qquad r_{ik}=\frac{K_X(t_i,t_k)}{\sigma_i\sigma_k}$$

$$|\mathbf{K}|=\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E[(X_1-m_1)^2] & \cdots & E[(X_1-m_1)(X_n-m_n)] \\ E[(X_2-m_2)(X_2-m_2)] & \cdots & E[(X_2-m_2)(X_n-m_n)] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ E[(X_n-m_n)(X_1-m_1)] & \cdots & E[(X_n-m_n)^2] \end{vmatrix}$$

性质:正态随机过程的概率密度函数由它的一、二阶矩（均值、方差和相关系数完全决定）。

推论:若复正态随机过程Z(t)的n个采样时刻得到n个复随机变量，即

$$Z_i = Z(t_i) = X(t_i) + jY(t_i) = X_i + jY_i$$

其中，X_i、Y_i皆为实随机变量。此n个复随机变量的联合概率密度应是2n维随机变量的联合概率密度。

二 平稳正态随机过程

1 平稳正态随机过程的定义

若正态随机过程满足下列条件，则它是宽平稳（平稳）正态随机过程。

$$\left.\begin{array}{l} m_i = m_X, \sigma_i^2 = \sigma_X^2 \\ R_X(t_i, t_k) = R_X(\tau_{k-i}) \\ \tau_{k-i} = t_k - t_i, i, k = 1, 2, \cdots, n \end{array}\right\}$$

理解 由平稳随机过程的三大条件（均值为常数，相关函数只与时间差有关，均方值有界）可知， 那么 $E[X^2(t)] = R_X(0)$ 为确定值，而方差＝$R_X(0) - m_X^2$ 必为常数，显然，方差为常数，则 $E[X^2(t)] = \sigma_X^2 + m_X^2$ 也为常数，物理意义是总平均功率等于交流平均功率与直流平均功率之和。

2 平稳正态过程的n维概率密度

平稳正态过程一、二维概率密度表达式

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

$$f_X(x_1, x_2; \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_X^2\sqrt{1-r^2(\tau)}}$$

$$\times \exp\left[-\frac{(x_1-m_X)^2 - 2r(\tau)(x_1-m_X)(x_2-m_X) + (x_2-m_X)^2}{2\sigma_X^2\left[1-r^2(\tau)\right]}\right]$$

平稳正态过程n维概率密度表达式：

$$f_X(x_1,\cdots,x_n;\tau_1,\cdots,\tau_{n-1})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n R\sigma_X^n}}\exp\left[-\frac{1}{2R\sigma_X^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}R_{ik}(x_i-m_X)(x_k-m_X)\right]$$

式中，R是相关系数r_{ik}构成的行列式，具有下列形式

$$\mathbf{R}=\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

R_{ik}为行列式中元素r_{ik}的代表余子式。

3 平稳正态过程的n维特征函数

n维特征函数：

$$C_X(u_1,\cdots,u_n;\tau_1,\cdots,\tau_{n-1})=\exp\left[jm\sum_{i=1}^{n}u_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}K_X(\tau_{k-i})u_iu_k\right]$$

式中，$K_X(\tau_{k-i})=r(\tau_{k-i})\sigma_X^2$ 为随机变量X_k、X_i的协方差函数。特别：一维和二维特征函数

$$C_X(u)=\exp\{jm_X-\frac{1}{2}\sigma_X^2u\}$$

$$C_X(u_1,u_2,t)=\exp\{jm_X(u_1+u_2)-\frac{1}{2}\sigma_X^2(u_1^2+u_2^2+2r(t)u_1u_2)\}$$

三 正态随机过程的性质

性质1：正态随机过程的n维概率密度完全由它的均值集合，协方差函数集合所确定。

性质2：正态过程的严平稳与宽平稳等价。

证明：1）由正态随机过程的概率密度表达式可知，它的任意n维概率密度仅由均值,方差和相关系数唯一确定。如果正态随机过程X(t)宽平稳，则其均值和方差是常数，相关系数只与时间差有关，因此它的任意n维概率密度函数仅与时间起点无关，由严平稳定义得证。

2）由于正态过程的均方值总是有界的，因此严平稳正态过程一定是宽平稳的。

性质3：正态过程的不相关与相互独立等价。

证明：若X(t)在n个不同时刻采样得到一组随机变量$X_1, X_2,\ldots,X_n$

（1）如果X_n（n＝1,2,…）两两之间相互独立，则

$$K_X(t_i,t_k)=E[(X_i-m_i)(X_k-m_k)]=E[(X_i-m_i)]E[(X_k-m_k)]=0$$

当$i\neq k$ 时。所以，两两互不相关。

（2）如果X_n（n＝1,2,…）两两之间互不相关，则

$$K_X(t_i,t_k)=E[(X_i-m_i)(X_k-m_k)]=\begin{cases}0 & i\neq k\\ \sigma_i^2 & i=k\end{cases}$$

所以 $\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & \cdots & \sigma_n^2\end{bmatrix}$ 则 $\mathbf{K}^{-1}=\begin{bmatrix}\sigma_1^{-2} & \cdots & 0\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & \cdots & \sigma_n^{-2}\end{bmatrix}$

$$|\mathbf{K}|=\sigma_1^2\sigma_2^2\cdots\sigma_n^2$$

因此

$$f_X(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma_{X1}\sigma_{X2}\ldots\sigma_{Xn}}.\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(xi-mi)^2}{\sigma_{Xi}^2}\}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\exp\{-\frac{(xi-mi)^2}{2\sigma_i}\}=f_X(x_1;t_1)\,f_X(x_2;t_2)\ldots f_X(x_n;t_n)$$

即两两相互独立。

性质4：平稳正态过程与确定信号之和仍为正态分布。

证明：设X(t)为平稳正态过程，S(t)为确定性信号，Y(t)=X(t)+s(t)
那么，对于任意时刻t，Y(t)=X(t)+s(t)为随机变量，这时，s(t)具有确定值，由随机变量函数的概率密度求法，Y(t)的一维概率密度函数为：

$$f_Y(y;t)=f_X(y-s(t);t)\frac{dy}{dx}=f_X(y-s(t);t)$$

因为为正态分布，所以显然是正态分布。

同理，Y(t)的二维概率密度为：

$$f_Y(y_1,y_2;t_1,t_2)=f_X(y_1-s(t_1),y_2-s(t_2);t_1,t_2)$$ 正态分布。

同理，可证明合成信号的n维概率密度也是正态过程。

性质6： 若正态过程X(t) 在T上均方可微，则其导数X(t)也是正态过程。

性质7： 若正态过程 X(t) 在T上均方可积，则积分过程

$$Y(t)=\int_a^b X(\lambda)h(\lambda,t)d\lambda \qquad b,t\in T$$

$$Y(t)=\int_a^t X(\lambda)d\lambda \qquad a,t\in T$$

也是正态过程。

性质8： 正态随机过程通过线性系统后的输出仍为正态过程。

推论： 正态过程的线性变换仍为正态过程。