

## 第2章

# 随机过程

《随机信号原理》

## 本章主要内容：

- ❖ 随机过程的基本概念
- ❖ 随机过程的数字特征



随机变量 —————> 与时间无关

随机过程 —————> 与时间相关

## 2.1 随机过程的基本概念及统计特性

### 一 定义

对接收机的噪声电压作观察

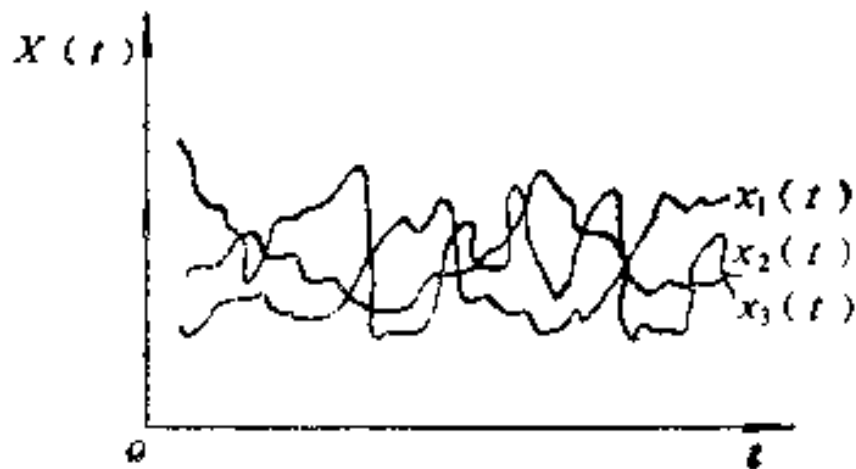


图 2.1 噪声电压的起伏波形

1 样本函数： $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)$ ，都是时间的函数，称为样本函数。

2 随机性：一次试验，随机过程必取一个样本函数，但所取的样本函数带有随机性。因此，随机过程不仅是时间 $t$ 的函数，还是可能结果的函数，记为  $X(t, \zeta)$ ，简写成  $X(t)$ 。

### 3 随机过程的定义：





定义1：设随机试验E的样本空间  $S = \{\xi\}$ ，若对于每个元素  $\xi \in S$ ，总有一个确知的时间函数  $X(t, \xi)$  与它对应，这样，对于所有的  $\xi \in S$ ，就可以得到一族时间t的函数，称它为随机过程。簇中的每一个函数称为样本函数。

定义2：若对于每个特定的时间  $t_i (i = 1, 2, \dots)$ ， $X(t_i, \xi)$  都是随机变量，则称  $X(t, \xi)$  为随机过程， $X(t_i, \xi)$  称为随机过程  $X(t)$  在  $t = t_i$  时刻的状态。

## 4定义的理解：

上面两种随机过程的定义，从两个角度描述了随机过程。具体的说，作观测时，常用定义1，这样通过观测的试验样本来得到随机过程的统计特性；对随机过程作理论分析时，常用定义2，这样可以把随机过程看成为 $n$ 维随机变量， $n$ 越大，采样时间越小，所得到的统计特性越准确。

## 理解：

- 1  $t$  和  $\xi$  都是变量  一个时间函数族
- 2  $t$  是变量而  $\xi$  固定  一个确知的时间函数
- 3  $t$  固定而  $\xi$  是变量  一个随机变量
- 4  $t$  和  $\xi$  都固定  一个确定值



## 二 分类

### 1 按随机过程的时间和状态来分类

✿ 连续型随机过程：对随机过程任一时刻  $t_1$  的取值  $(t_1)$  都是连续型随机变量。

✿ 离散型随机过程：对随机过程任一时刻  $t_1$  的取值  $(t_1)$  都是离散型随机变量。

✿ 连续随机序列：随机过程的时间 $t$ 只能取某些时刻，如  $\Delta t$ ， $2 \Delta t$ ，.....， $n \Delta t$ ，且这时得到的随机变量  $X(n\Delta t)$  是连续型随机变量，即时间是离散的。相当于对连续型随机过程的采样。

✿ 离散随机序列：随机过程的时间 $t$ 只能取某些时刻，如  $\Delta t$ ， $2 \Delta t$ ，.....， $n \Delta t$ ，且这时得到的随机变量  $X(n\Delta t)$  是离散型随机变量，即时间和状态是离散的。相当于采样后再量化。

## 2 按样本函数的形式来分类

■ 不确定的随机过程：随机过程的任意样本函数的值不能被预测。例如接收机噪声电压波形。

■ 确定的随机过程：随机过程的任意样本函数的值能被预测。例如，样本函数为正弦信号。

## 3 按概率分布的特性来分类

## 三 随机过程的概率分布

### 1 一维概率分布

随机过程 $X(t)$ 在任意 $t_1 \in T$ 的取值 $X(t_1)$ 是一维随机变量。概率 $P\{X(t) \leq x_1\}$ 是取值 $x_1$ ，时刻 $t_1$ 的函数，记为 $F_X(x_1; t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\}$ ，称作随机过程 $X(t)$ 的一维分布函数。

若 $F_X(x, t)$ 的偏导数存在，则有

$$f_X(x_1, t_1) = \frac{\partial F_X(x_1, t_1)}{\partial x_1}$$

## 2 二维概率分布

为了描述S.P在任意两个时刻 $t_1$ 和 $t_2$ 的状态间的内在联系,可以引入二维随机变量 $[X(t_1), X(t_2)]$ 的分布函数 $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$ , 它是二随机事件 $\{X(t_1) \leq x_1\}$ 和 $\{X(t_2) \leq x_2\}$ 同时出现的概率, 即

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$$

称为随机过程 $X(t)$ 的二维分布函数。

若 $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 对 $x_1, x_2$ 的二阶混合偏导存在, 则

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

为随机过程 $X(t)$ 的二维概率密度

### 3 n维概率分布

随机过程  $X(t)$  在任意  $n$  个时刻  $t_1, t_2, \dots, t_n$  的取值  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$  构成  $n$  维随机变量  $[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)]$  即为  $n$  维空间的随机矢量  $\mathbf{X}$ 。类似的，可以定义随机过程  $X(t)$  的  $n$  维分布函数和  $n$  维概率密度函数为

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$$

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}$$

## 性质：

**1**  $F_X(x_1, x_2, \dots, -\infty, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n) = 0$

**2**  $F_X(\infty, \infty, \dots, \infty; t_1, t_2, \dots, t_n) = 1$

**3**  $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \geq 0$

**4**  $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = 1$   
n重

**5**  $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_{m+1} dx_{m+2} \cdots dx_n = f_X(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1, t_2, \dots, t_m)$   
n-m重

**6** 若  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$  统计独立，则有

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_X(x_1; t_1) f_X(x_2; t_2) \cdots f_X(x_n; t_n)$$

## 四 随机过程的数字特征

**随机变量的数字特征通常是确定值；随机过程的数字特征通常是确定性函数。**

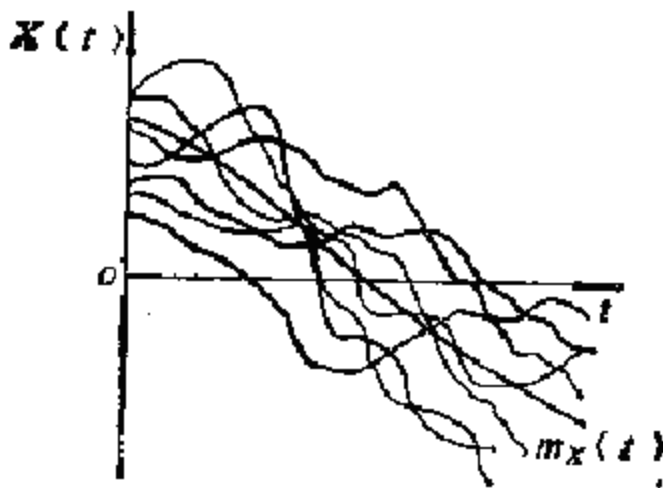
**对随机过程的数字特征的计算方法，是先把时间 $t$ 固定，然后用随机变量的分析方法来计算。**



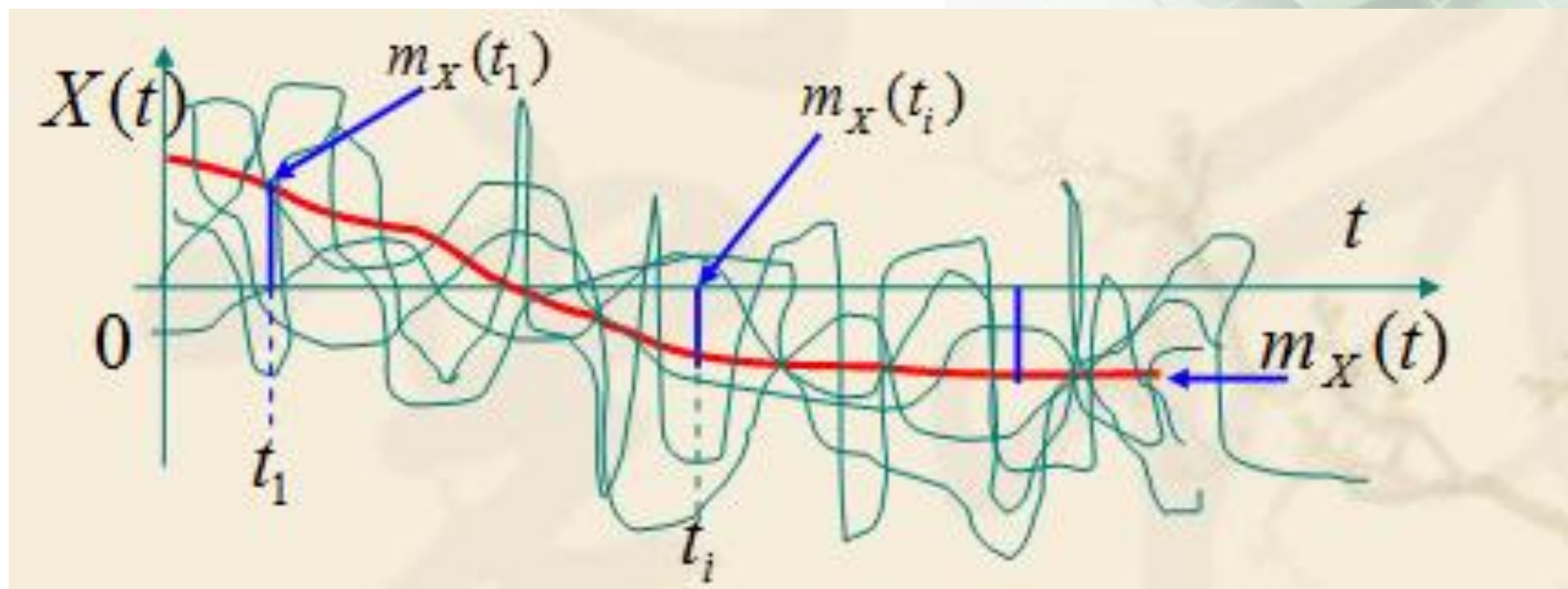
# 1 数学期望

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x;t)dx$$

显然， $m_X(t)$ 是某一个平均函数，随机过程的诸样本在它的附近起伏变化，如图所示：



物理意义：如果随机过程表示接收机的输出电压，那么它的数学期望就是输出电压的瞬时统计平均值。



## 2 均方值和方差

随机过程  $X(t)$  在任一时刻  $t$  的取值是一个随机变量  $X(t)$ 。我们把  $X(t)$  二阶原点矩称为随机过程的均方值，把二阶中心矩记作随机过程的方差。即：

$$\Psi_X^2(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x; t) dx$$

$$\sigma_X^2(t) = D[X(t)] = E[\overset{\circ}{X}^2(t)] = E[(X(t) - m_X(t))^2]$$

且

$$\sigma_X^2(t) = E[X^2(t)] - m_X(t)^2$$

**物理意义：**如果  $X(t)$  表示噪声电压，则均方值  $E[X^2(t)]$  和方差  $D[X(t)]$  分别表示消耗在单位电阻上的瞬时功率统计平均值和瞬时交流功率统计平均值。

**标准差或均方差：**  $\sqrt{D[X(t)]} = \sigma_X(t)$

### 3 自相关函数

先比较具有相同数学期望和方差的两个随机过程。

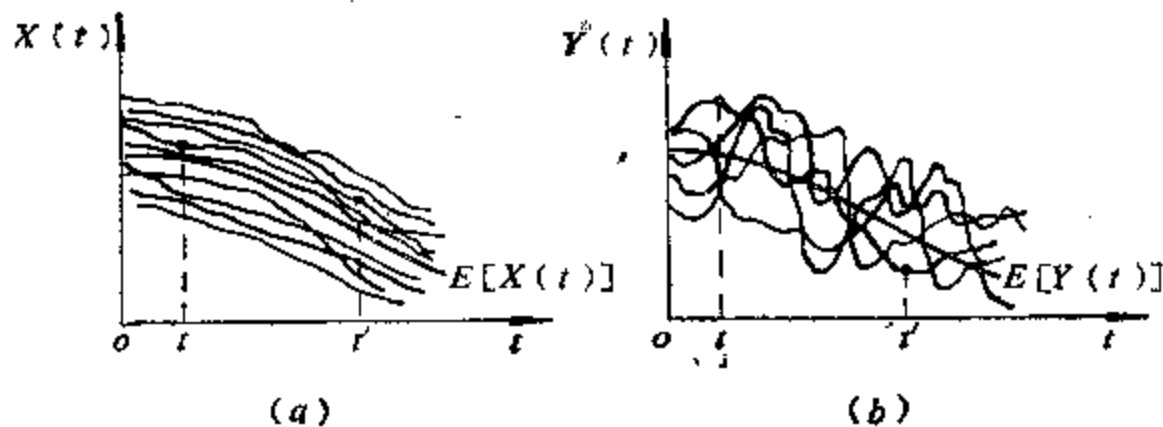
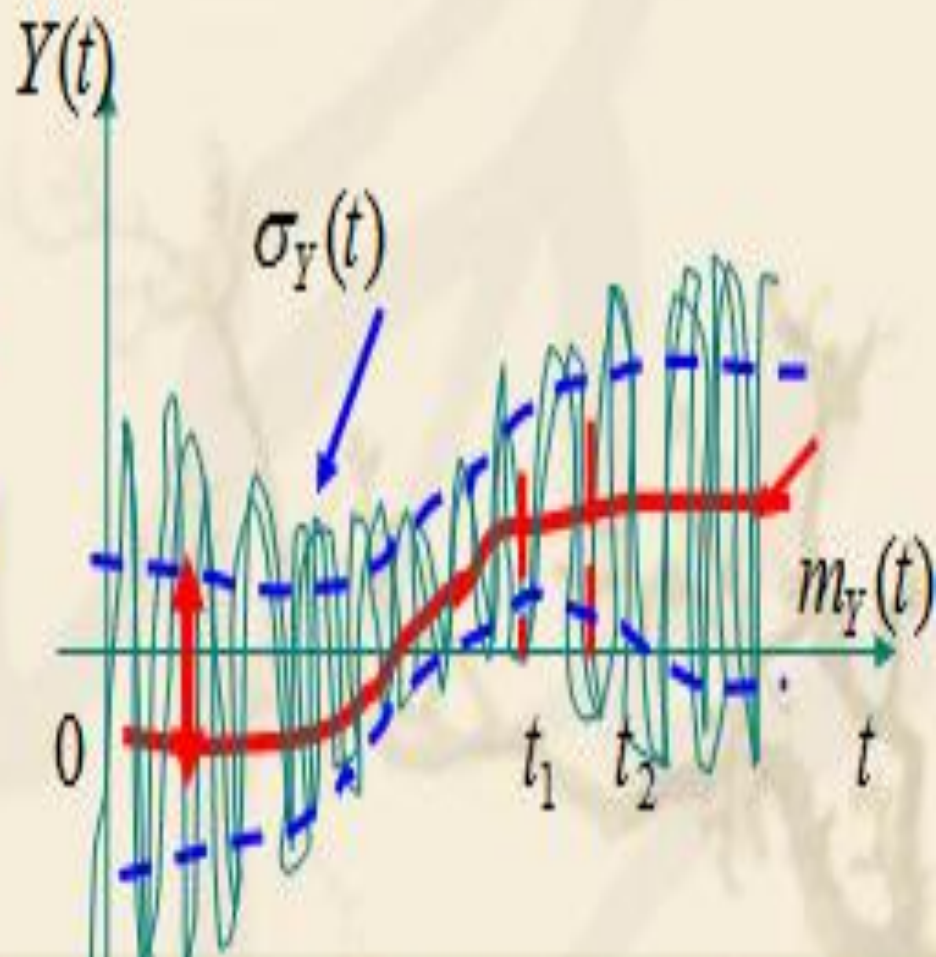
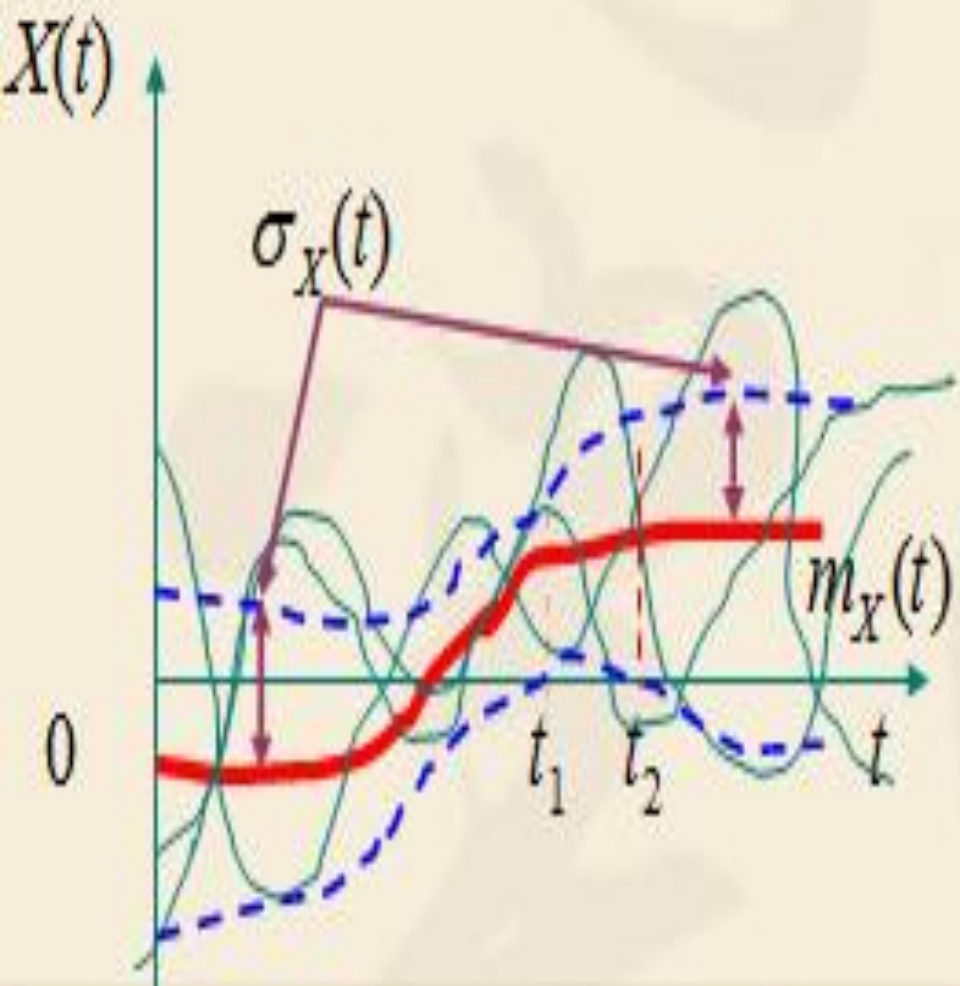


图 2.5 具有相同数学期望和方差的两个不同的随机过程



自相关函数用来描述随机过程任意两个时刻的状态之间的内在联系，通常用  $R_X(t_1, t_2)$  描述。

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

## 4 自协方差函数（中心化协方差函数）

若用随机过程的两个不同时刻之间的二阶混合中心矩来定义相关函数，我们称之为自协方差。用  $C_X(t_1, t_2)$  表示，它反映了任意两个时刻的起伏值之间相关程度。

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= E[\overset{\circ}{X}(t_1) \overset{\circ}{X}(t_2)] \\ &= E[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_1) - m_X(t_1))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_1) - m_X(t_1)] dx_1 dx_2 \end{aligned}$$



## ■ 比较自协方差和自相关函数的关系

$$\begin{aligned}C_X(t_1, t_2) &= E[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))] \\&= E[X(t_1)X(t_2)] - m_X(t_1)E[X(t_2)] - m_X(t_2)E[X(t_1)] + m_X(t_1)m_X(t_2) \\&= R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)\end{aligned}$$

当  $X(t)$  零均值

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2)$$

## ■比较自协方差和方差的关系

令  $t_1 = t_2 = t$  则

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= C_X(t, t) = E[(X(t) - m_X(t))^2] \\ &= D[X(t)] = \sigma_X^2(t) \end{aligned}$$

- 若对于任意的 $t_1, t_2$ ，均有

$$C_X(t_1, t_2) = 0$$



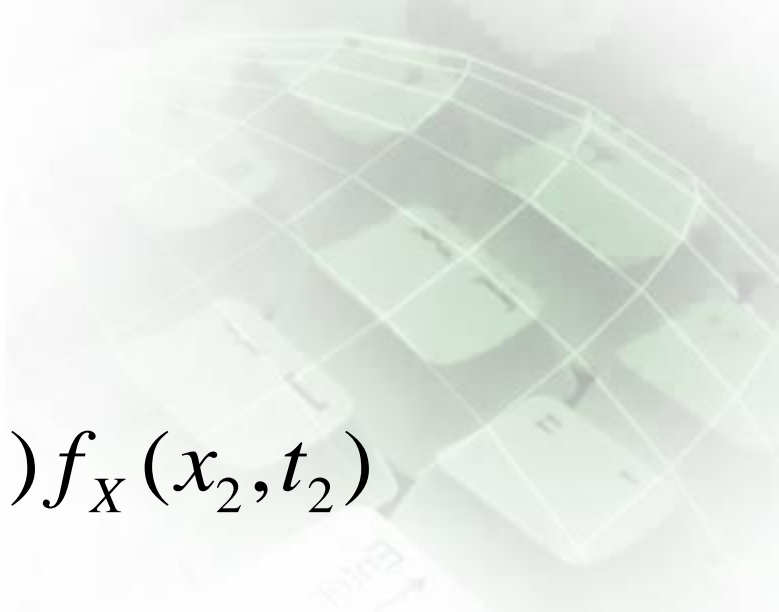
随机过程的任意两个时刻状态之间不相关

- 若对于任意的 $t_1, t_2$ ，均有

$$R_X(t_1, t_2) = 0$$



随机过程的任意两个时刻状态之间正交


$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, t_1) f_X(x_2, t_2)$$



随机过程X(t)在t1,t2两个时刻状态之间相互独立

## 5. 互相关函数

描述两个随机过程之间的关联程度

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)Y(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y; t_1, t_2) dx dy \end{aligned}$$

## 6. 互协方差函数（中心化互相关函数）

$$\begin{aligned}C_{XY}(t_1, t_2) &= E[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)] \\&= E[(X(t_1) - m_X(t_1))(Y(t_2) - m_Y(t_2))] \\&= R_{XY}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2)\end{aligned}$$

若对于任意时刻 $t_1$ 、 $t_2$ ，有  $R_{XY}(t_1, t_2) = 0$

则称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 正交

此时

$$C_{XY}(t_1, t_2) = -m_X(t_1)m_Y(t_2)$$



若对于任意时刻 $t_1$ 、 $t_2$ ，有  $C_{XY}(t_1, t_2) = 0$

则称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 互不相关

此时

$$R_{XY}(t_1, t_2) = m_X(t_1)m_Y(t_2)$$

**X(t) 和 Y(t) 相互独立，满足**

$$\begin{aligned} & f_{XY}(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n; t_1, t_2, \dots, t_n, t'_1, t'_2, \dots, t'_n) \\ &= f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) f_X(y_1, y_2, \dots, y_n; t'_1, t'_2, \dots, t'_n) \end{aligned}$$



$$R_{XY}(t_1, t_2) = m_X(t_1) m_Y(t_2)$$

**因此，相互独立=>不相关，反之不成立**

**例1：求随机相位正弦波  $x(t) = \sin(\omega_0 t + \theta)$  的数字期望，方差及自相关函数。式中， $\omega_0$  为常数， $\theta$  是区间  $[0, 2\pi]$  上均匀分布的随机变量。**

**解：由题可知：**

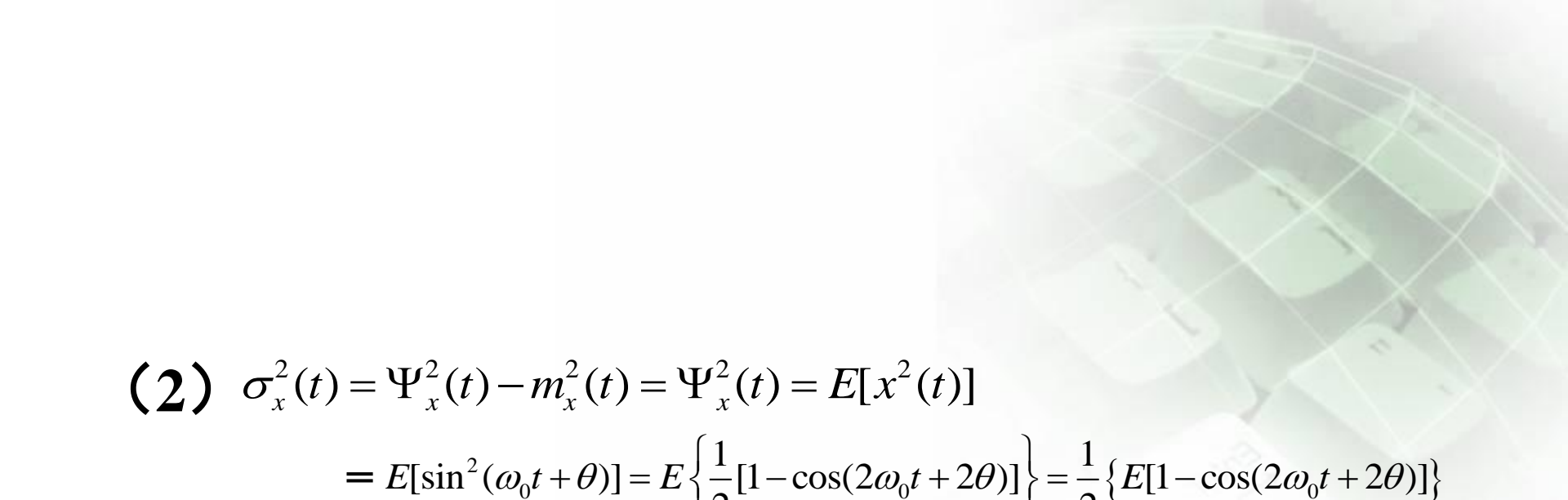
$$\begin{aligned} (1) \quad m_x(t) &= E[x(t)] = E[\sin(\omega_0 t + \theta)] = E[\sin \omega_0 t \cos \theta + \cos \omega_0 t \sin \theta] \\ &= E[\sin \omega_0 t \cos \theta] + E[\cos \omega_0 t \sin \theta] = \sin \omega_0 t \cdot E[\cos \theta] + \cos \omega_0 t \cdot E[\sin \theta] \end{aligned}$$

$$E[\cos \theta] = \int_0^{2\pi} \cos \theta f_\theta(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

**同理**

$$E[\sin \theta] = 0$$


$$\therefore m_x(t) = 0$$


$$\begin{aligned}(2) \quad \sigma_x^2(t) &= \Psi_x^2(t) - m_x^2(t) = \Psi_x^2(t) = E[x^2(t)] \\&= E[\sin^2(\omega_0 t + \theta)] = E\left\{\frac{1}{2}[1 - \cos(2\omega_0 t + 2\theta)]\right\} = \frac{1}{2}\{E[1 - \cos(2\omega_0 t + 2\theta)]\} \\&= \frac{1}{2}\{1 - E[\cos(2\omega_0 t) \cos 2\theta] + E \sin 2\omega_0 t \sin 2\theta\} \\&= \frac{1}{2}[1 - \cos 2\omega_0 t \cdot E[\cos 2\theta] + \sin 2\omega_0 t \cdot E[\sin 2\theta]]\end{aligned}$$

可知

$$E[\sin 2\theta] = E[\cos 2\theta] = 0$$

$$\therefore \sigma_x^2(t) = \frac{1}{2}$$


$$(3) R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)]$$

$$= E \sin(\omega_0 t_1 + \theta) \sin(\omega_0 t_2 + \theta)]$$

$$= E \left\{ -\frac{1}{2} [\cos(\omega_0 t_1 + \omega_0 t_2 + 2\theta) - \cos(\omega_0 t_2 - \omega_0 t_1)] \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t_2 - \omega_0 t_1) = \frac{1}{2} \cos \omega_0 (t_1 - t_2)$$

例2：随机过程 $X(t)$ ，均值为  $m_X(t)$ ，协方差函数为  $C_X(t, t)$ ， $\phi(t)$  为普通确知函数。

则随机过程  $Y(t) = X(t) + \phi(t)$   
的均值为\_\_\_\_\_；  
方差为\_\_\_\_\_。

例3：随机过程  $X(t) = V \cos(4t), -\infty < t < \infty$

其中V为随机变量,  $E[V] = 4, D[V] = 6$

求X(t)的均值、方差、相关函数、协方差函数

例2.2、设随机过程 $X(t)=U \cdot t$ ， $U$ 在 $(0, 1)$ 上均匀分布，求 $E[X(t)]$ ， $D[X(t)]$ ， $R_X(t_1, t_2)$ ， $C_X(t_1, t_2)$ 。

解：

$$\because f_U(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\therefore E[X(t)] = E[U \cdot t] = t \cdot E[U] = t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u f_U(u) du = t \cdot \int_0^1 u du = \frac{t}{2}$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[U \cdot t_1 \cdot U \cdot t_2] = t_1 \cdot t_2 \cdot E[U^2] \\ &= t_1 \cdot t_2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \cdot f_U(u) du = t_1 \cdot t_2 \cdot \int_0^1 u^2 du = \frac{t_1 \cdot t_2}{3} \end{aligned}$$

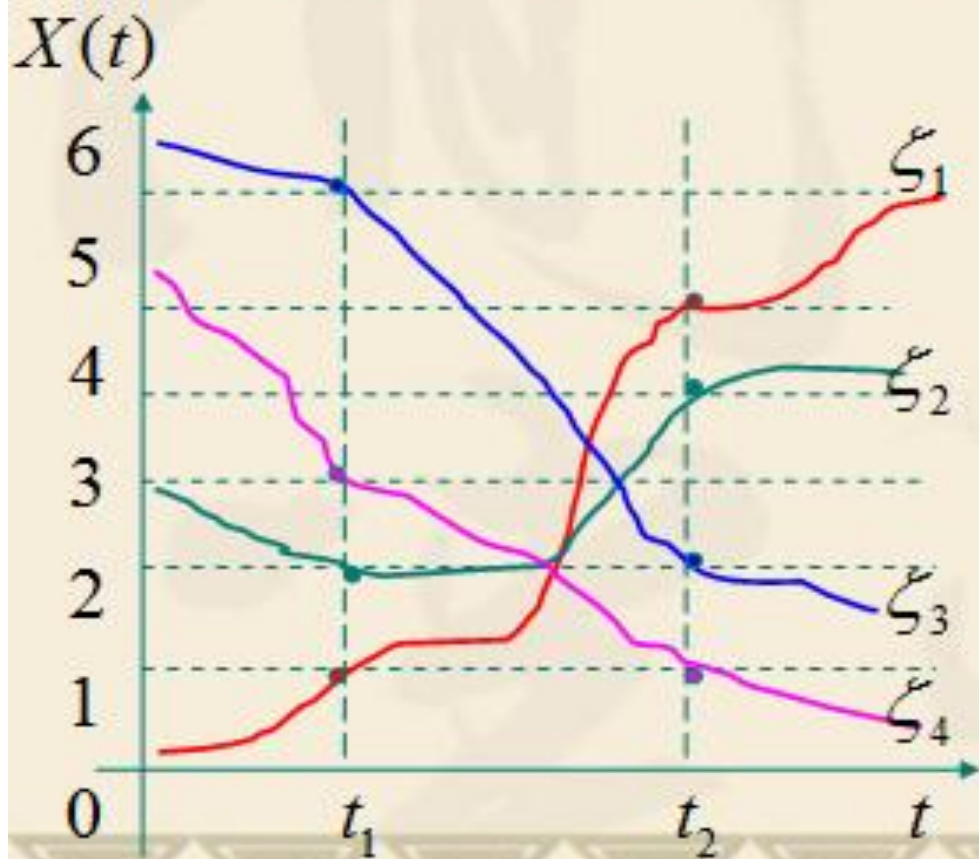
$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m(t_1) \cdot m(t_2) = \frac{t_1 \cdot t_2}{3} - \frac{t_1}{2} \cdot \frac{t_2}{2} = \frac{t_1 \cdot t_2}{12}$$

$$D[X(t)] = C_X(t, t) = \frac{t^2}{12}$$



例2.3 若一随机过程由下图所示的四条样本函数组成，而且每条本函数出现的概率相等，求 $R_X(t_1, t_2)$ 。

解：由题意可知，随机过程 $X(t)$ 在 $t_1, t_2$ 两个时刻为两个离散变量。所以可列出联合分布率如下：



	$X(t_1)$	$X(t_2)$	$P_{\zeta_i}$
$\zeta_1$	1	5	1/4
$\zeta_2$	2	4	1/4
$\zeta_3$	6	2	1/4
$\zeta_4$	3	1	1/4

$$\because R_X(t_1, t_2) = \sum_{k_1, k_2 \in \mathcal{E}_X} k_1 \cdot k_2 \cdot P\{X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2\}$$

一次结果中，决不会发生 $t_1$ 时刻的状态在 $\zeta_3$ 上取值，而 $t_2$ 时刻的状态在 $\zeta_4$ 上取值。 $k_1, k_2$ 不在一条样本上，此情况发生的概率为0。即 $P\{X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2\} = 0$ 。

由于一次试验结果只有一个样本出现，若此次样本 $\zeta_3$ 出 $t_1$ 时刻的状态必在 $\zeta_3$ 上取值，且 $t_2$ 时刻的状态必还在 $\zeta_3$ 上取值。 $k_1, k_2$ 必在一条样本上，此情况发生的概率为 $1/4$ 。

$P\{X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2\} = 1/4$ 。 ← 样本 $\zeta_i$ 发生的概率。

$$\begin{aligned} \therefore R_X(t_1, t_2) &= \sum_{\zeta_i \in \Omega} k_1 \cdot k_2 \cdot P_{\zeta_i} \\ &= \frac{1}{4}(1 \times 5 + 2 \times 4 + 6 \times 2 + 3 \times 1) = 7 \end{aligned}$$

## 五 随机过程的特征函数

### 1 一维特征函数

随机过程  $X(t)$  在任一特定时刻  $t$  的取值是一维随机变量，其特征函数为：

$$\Phi_X(u; t) = E(e^{juX(t)}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} f_X(x; t) dx$$

其反变换为：

$$f_X(x; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(u; t) e^{-jux} du$$

**n阶矩**  $E[X^n(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x; t) dx = (-j)^n \frac{\partial^n \Phi_X(u; t)}{\partial u^n} \Big|_{u=0}$

## 2 二维特征函数

$$\begin{aligned} C_x(u_1, u_2; t_1, t_2) &= E[\exp(ju_1x(t_1) + ju_2x(t_2))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(u_1x_1 + u_2x_2)} f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

其反变换为：

$$fx(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_x(u_1, u_2; t_1, t_2) e^{-j(u_1x_1 + u_2x_2)} du_1 du_2$$

$$Rx(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 fx(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

$$= - \left. \frac{\partial^2 C_X(u_1, u_2; t_1, t_2)}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{u_1 = u_2 = 0}$$

### 3 n维特征函数

$$\begin{aligned} & C_X(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) \\ &= E[\exp(ju_1 X(t_1) + \dots + ju_n X(t_n))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)} f_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n \\ & f_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} C_X(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) e^{-j(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)} du_1 \dots du_n \end{aligned}$$