

第 1 章 矢量场

电磁理论中所涉及的一些主要物理量,如电场强度、磁感应强度等都是矢量。每一矢量有其确定的物理意义。电场和磁场分布在空间中形成矢量场。定量地分析矢量场在空间的分布和变化等性质需要借助一些数学工具,如矢量分析和场论等数学知识。为了后面各章学习方便,本章先介绍分析矢量场所需的有关数学基础知识。

1.1 矢量及其矢量场

1. 标量与矢量

只有大小、没有方向的量叫做标量,如温度、电位、能量、长度、时间等。

不但有大小,而且有方向的量称为矢量,又称向量,如力、速度、加速度等,电磁场中的许多物理量,如电场强度、电流密度、磁场强度等都是矢量。

2. 矢量的表示方法

在本书中,为了与其他量的符号相区别,矢量的数学符号用黑斜体字母表示,如 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{E} 。矢量的大小也叫做矢量的模。矢量 \mathbf{A} 的模记作 A 或 $|\mathbf{A}|$ 。矢量的方向可用单位矢量表示,单位矢量是模为一个单位的矢量,它仅表示矢量的方向。矢量 \mathbf{A} 的单位矢量记作 $\hat{\mathbf{a}}$,即一矢量的单位矢量用对应的小写字母上戴一角表示。任一矢量可以用它的模和单位矢量表示,如矢量 \mathbf{A} 可表示为

$$\mathbf{A} = A\hat{\mathbf{a}} \quad (1.1-1)$$

在几何上,矢量可用一有向线段表示,如图 1.1-1 所示。线段的长度代表矢量的大小,线段的方向表示矢量的方向。

为进一步描述矢量在空间的取向,可建立一正交坐标系,使矢量的始端在坐标原点,这样矢量就可以用它在坐标轴上的投影,即坐标分量来表示。

在直角坐标系中,有 3 个互相垂直的坐标轴,分别记为 x 、 y 、 z 轴,用 $\hat{\mathbf{x}}$ 、 $\hat{\mathbf{y}}$ 、 $\hat{\mathbf{z}}$ 分别表示对应 3 个坐标轴方向的单位矢量,如图 1.1-2。正交坐标系有右手坐标系和左手坐标系。对于右手坐标系,用右手 4 指从 x 轴旋转

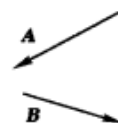


图 1.1-1 矢量的几何表示

到 y 轴方向,则拇指指向 z 轴方向,如图 1.1-2(a)所示,而如图 1.1-2(b)所示的坐标系符合左手旋转情况。在电磁理论中,习惯采用右手坐标系,因此在本书中均采用右手坐标系。

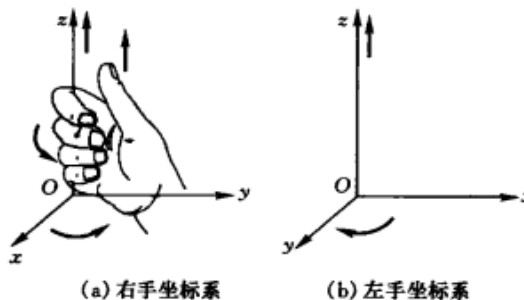


图 1.1-2 正交坐标系

将矢量 \mathbf{A} 放在直角坐标系中,使矢量 \mathbf{A} 的起始端在坐标原点,设矢量 \mathbf{A} 与 3 个正交坐标轴 x 、 y 、 z 轴的夹角(矢量的方向角)分别为 α 、 β 、 γ ,矢量 \mathbf{A} 在 x 、 y 、 z 3 个坐标轴上的投影分别为 A_x 、 A_y 、 A_z ,如图 1.1-3 所示,则在直角坐标系中,矢量 \mathbf{A} 可表示为

$$\mathbf{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad (1.1-2)$$

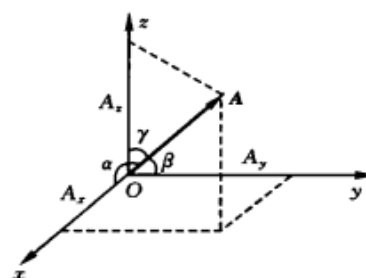
A_x 、 A_y 、 A_z 称为矢量 \mathbf{A} 的直角坐标分量。显然

$$\begin{aligned} A_x &= A \cos \alpha \\ A_y &= A \cos \beta \\ A_z &= A \cos \gamma \end{aligned} \quad (1.1-3)$$

将(1.1-3)式代入(1.1-2)式并与(1.1-1)式比较,得

$$\hat{a} = \hat{x} \cos \alpha + \hat{y} \cos \beta + \hat{z} \cos \gamma \quad (1.1-4)$$

上式说明单位矢量可用矢量的方向角余弦表示。

图 1.1-3 矢量 \mathbf{A} 分解为直角坐标分量

3. 矢量的代数运算

(1) 矢量的加减法

两矢量之和(或差)的直角坐标分量等于两矢量对应坐标分量的和(或差),即

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_x \pm B_x) \hat{x} + (A_y \pm B_y) \hat{y} + (A_z \pm B_z) \hat{z} \quad (1.1-5)$$

在几何上,两矢量的和矢量与差矢量分别与以两矢量为邻边的平行四边形的两条对角线重合,如图 1.1-4 所示。矢量相加满足交换律与结合律,即

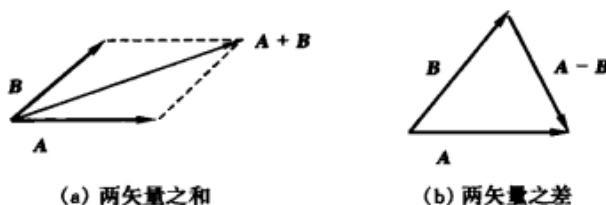


图 1.1-4 两矢量的和与差

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (\text{交换律}) \quad (1.1-6)$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (\text{结合律}) \quad (1.1-7)$$

(2) 标量乘以矢量

标量乘矢量其积为矢量。标量 η 乘矢量 \mathbf{A} 满足以下关系

$$\eta \mathbf{A} = \eta A_x \hat{x} + \eta A_y \hat{y} + \eta A_z \hat{z} \quad (1.1-8)$$

$$\eta \mathbf{A} = \begin{cases} |\eta \mathbf{A}| \hat{a}, & \eta \geq 0 \\ |\eta \mathbf{A}| (-\hat{a}), & \eta < 0 \end{cases} \quad (1.1-9)$$

(3) 矢量的标积

两矢量相乘其积有两种情况,一种其积为标量,称为标积;另一种其积仍为矢量,称为矢积。

两矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的标积记为 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$,因此,标积也称作点积或点乘。两矢量的标积等于两矢量的模之积再乘以两矢量夹角的余弦,即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \quad (1.1-10)$$

式中 θ 为两矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的夹角。如果作用在某一物体上的力为 \mathbf{A} ,使该物体发生位移,位移矢量为 \mathbf{B} ,则 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 表示力 \mathbf{A} 使物体位移 \mathbf{B} 所做的功。

由(1.1-10)式可以看出,两矢量的标积满足交换律,即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1.1-11)$$

容易证明两矢量之和与第三个矢量的标积等于两矢量分别与第三个矢量的标积之和,即

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \quad (1.1-12)$$

显而易见,标积不但与两矢量的大小有关,还与它们之间的夹角有关。当两矢量垂直时, $\theta = 90^\circ$, 其标积为 0; 当两矢量平行时, $\theta = 0^\circ$, 标积的绝对值最大,等于两矢量的模之积。直角坐标系中,3 个直角坐标单位矢量 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 的标积为

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot \hat{y} &= \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0 \\ \hat{x} \cdot \hat{x} &= \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \end{aligned} \quad (1.1-13)$$

在直角坐标系中,两矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的标积可用直角坐标分量表示为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.1-14)$$

当 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 时,由(1.1-14)式,矢量的模与直角坐标分量的关系为

$$A = \sqrt{|\mathbf{A}|^2} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.1-15)$$

一矢量 \mathbf{A} 与单位矢量的标积等于该矢量在单位矢量方向上的分量,即

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot \mathbf{A} &= |\hat{x}| |\mathbf{A}| \cos \alpha = A_x \\ \hat{y} \cdot \mathbf{A} &= |\hat{y}| |\mathbf{A}| \cos \beta = A_y \\ \hat{z} \cdot \mathbf{A} &= |\hat{z}| |\mathbf{A}| \cos \gamma = A_z \end{aligned} \quad (1.1-16)$$

一般地,一矢量 \mathbf{A} 和与其夹角为 θ 的单位矢量 \hat{n} 的标积为

$$\hat{n} \cdot \mathbf{A} = |\hat{n}| |\mathbf{A}| \cos\theta = A_n \quad (1.1-17)$$

例 1.1-1 求矢量 $\mathbf{A}=4\hat{x}+6\hat{y}-2\hat{z}$, $\mathbf{B}=-2\hat{x}+4\hat{y}+8\hat{z}$ 之间的夹角。

解 根据(1.1-10)及(1.1-14)式有

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB} = 0$$

$$\theta = 90^\circ$$

(4) 矢量的矢积

两矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的矢积记为 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, 因此, 矢积也称作叉积或叉乘。矢积是矢量, 其大小等于两矢量的模之积再乘以两矢量夹角的正弦, 其方向为两矢量所在面的法向, 即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{n} |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin\theta \quad (1.1-18)$$

矢积的方向 \hat{n} 符合右手定则, 即右手四指从 \mathbf{A} 旋转到 \mathbf{B} , 拇指的方向为矢积的方向, 如图 1.1-5 所示。可以看出, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的大小是以两矢量为邻边的平行四边形的面积。由此可以认为, 矢积的几何意义为以两矢量为邻边的平行四边形围成的有向面。如果 \mathbf{B} 表示作用在一物体上的力, 而 \mathbf{A} 表示力臂矢量时, 则矢积 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 表示作用给物体的力矩。

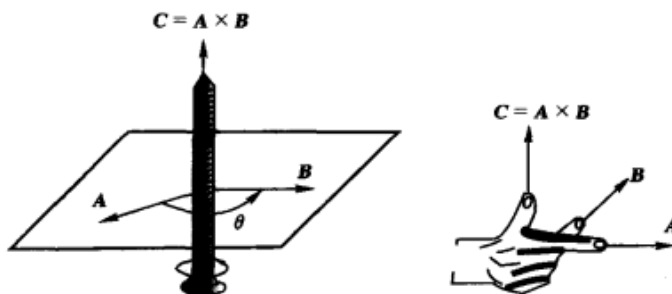


图 1.1-5 矢积的方向

由(1.1-18)式, 矢积不但与两矢量的大小有关, 也与它们之间的夹角有关。两矢量平行时, $\theta=0^\circ$, 矢积为 0; 两矢量垂直时, $\theta=90^\circ$, 矢积的模最大。3 个直角坐标单位矢量 \hat{x} 、 \hat{y} 、 \hat{z} 的矢积分别为

$$\begin{aligned} \hat{x} \times \hat{y} &= \hat{z} \\ \hat{y} \times \hat{z} &= \hat{x} \\ \hat{z} \times \hat{x} &= \hat{y} \end{aligned} \quad (1.1-19)$$

$$\text{及} \quad \hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0 \quad (1.1-20)$$

在直角坐标系中, 两矢量的矢积可用两矢量的直角坐标分量表示为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z} \quad (1.1-21)$$

通常,上式写成行列式形式,即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.1-22)$$

由上式可以看出

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1.1-23)$$

即矢积不满足交换律。

例 1.1-2 证明平面三角形的正弦定律。

证 对于如图 1.1-6 所示的由 3 个矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 组成的对应内角分别为 α 、 β 、 γ 的三角形,可以看出 3 个矢量有以下关系

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} - \mathbf{A} \quad \text{或} \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

前式等式两边与 \mathbf{B} 矢积,后式等式两边与 \mathbf{C} 矢积,考虑到矢量与自己的矢积为 0,得

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad \text{和} \quad \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$$

由(1.1-18)式得, $BC \sin \alpha = AB \sin(\pi - \gamma)$ 和 $CA \sin \beta = BC \sin \alpha$

由此得

$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta} = \frac{C}{\sin \gamma}$$

(5) 矢量的混合运算

矢量的混合运算次序与标量的混合运算次序相同。下面给出一些常用的矢量混合运算恒等式

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \quad (1.1-24a)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} \quad (1.1-24b)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1.1-24c)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (1.1-24d)$$

4. 标量场与矢量场

在火炉、暖气片等热源周围空间区域存在温度的某种分布,且在该空间区域的每一点上,温度都是确定的,我们说该空间区域存在温度场;在江河等水流区域中,各处水的流速是可确知的,该水流区域中存在水流速的某种分布,我们就说那里存在流速场;在地球周围各点,存在对各种物体的引力,我们说地球周围存在引力场,或者说地面上有重力场;在电荷周围各点,存在对电荷的作用力,我们就说电荷周围有电场……。显然,“场”是指某种物理量在空间的分布。具有标量特征的物理

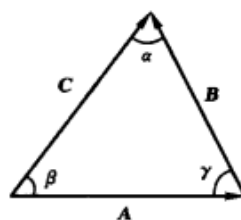


图 1.1-6 边长为 A 、 B 、 C , 对应内角为 α 、 β 、 γ 的三角形

量在空间的分布是标量场,具有矢量特征的物理量在空间的分布是矢量场。例如,温度场是标量场,电场、流速场与重力场都是矢量场。

场是物理量的空间分布,这种物理量还可能随时间变化,因此在数学上,场用表示其特征物理量的空间和时间坐标变量的多元函数来描述,即标量场用空间和时间的标量函数表示,矢量场用空间和时间的矢量函数表示。例如,温度场可表示为 $T(x, y, z, t)$, 电位可表示为 $\Phi(x, y, z, t)$, 流速场可表示为 $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, 电场表示为 $\mathbf{E}(x, y, z, t)$, 磁场表示为 $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ 。在电磁场中,随时间变化的场称为时变场;与时间无关,不随时间变化的场称为静态场。也就是说,静态场只是空间坐标的函数。例如,静电场可表示为 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 。

为了形象、直观地描述标量场在空间的分布情形或沿空间坐标的变化,可画出其一系列等间隔的等值面。不同等值面的形状及其间隔能较直观地表现标量场的空间分布情况。为了形象、直观地描述矢量场在空间的分布情形或沿空间坐标的变化,常画出其场线(力线)。场线是一簇空间有向曲线,矢量场强处场线稠密,矢量场弱处场线稀疏,场线上某点的切线方向代表该处矢量场方向。在电磁场中,常用等位面形象地表示电位的分布,分别用电力线和磁力线形象地表示电场和磁场的分布。

场是物理量的分布,服从因果律,这里的“因”,称为场源。场都是由源产生的。例如,温度场是由热源产生的,静电场是由电荷产生的。场在空间的分布形式不仅取决于产生它的源,还受周围物质环境的影响。例如,炉膛中的温度分布,不仅取决于火力大小及分布,而且还与炉膛的结构以及材料特性有关。带电体周围的电场分布不仅与带电体的电荷分布与电量有关,也与周围的物质特性有关。场与源和物质的关系可用一组微分方程描述,描述电磁场与其源的关系的方程就是称为麦克斯韦尔方程组的一组矢量微分方程组。

思考题

1. 什么是零矢量? 两矢量满足什么条件才相等?
2. 两矢量点乘可以是负数吗? 如果两矢量点乘是负数表示什么意义?
3. 一个矢量在另一个矢量上的投影是唯一的吗?
4. 什么是标量场? 什么是矢量场?
5. 矢量场与矢量之间有什么关系?

1.2 三种常用坐标系中的矢量场

矢量场是矢量的空间分布,是空间坐标变量的矢量函数,即在矢量场存在的区域中每一点都有一个对应的矢量。为了定量地分析矢量场,需要建立参考坐标系,以表示空间的位置及矢量的方向。正交曲面坐标系有多种类型,本书采用最常用的3种,即直角坐标系、圆柱坐标系和圆球坐标系。

1. 直角坐标系

直角坐标系是最常用的正交坐标系。在直角坐标系中,矢量场中的空间位置用其3个直角坐标表示,一般记作 (x, y, z) 。

在直角坐标系中,3个相互垂直的坐标轴,即 x 轴、 y 轴和 z 轴的方向是给定的,在本书中表示直角坐标3个坐标轴方向的单位矢量分别用 \hat{x} 、 \hat{y} 、 \hat{z} 表示。矢量场在每一空间位置点的对应矢量可以用其直角坐标分量表示。例如,某矢量场在任一空间位置 (x, y, z) 点的矢量 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 可用其直角坐标分量表示为

$$\mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\hat{x} + A_y(x, y, z)\hat{y} + A_z(x, y, z)\hat{z} \quad (1.2-1)$$

式中 $A_x(x, y, z)$ 、 $A_y(x, y, z)$ 、 $A_z(x, y, z)$ 表示将坐标系原点平移到空间位置点 (x, y, z) 形成本地坐标系后,矢量场在该点所对应的矢量 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 分别在本地3个坐标轴上的投影,称为坐标分量,如图1.2-1所示。以任一空间位置 (x, y, z) 点的矢量 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 为代表的分布在空间的这种矢量的全体就称为矢量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 。

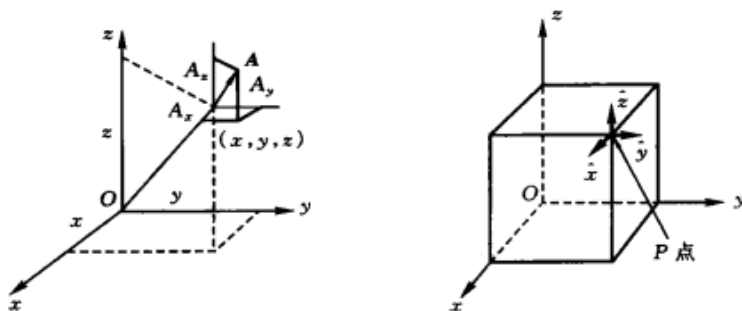


图 1.2-1 直角坐标系中的矢量场

从参考坐标原点指向空间位置点 (x, y, z) 的矢量,称为位置矢量 \mathbf{r} ,即

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (1.2-2)$$

可以看出,位置矢量 \mathbf{r} 包含了该矢量所指空间位置点的坐标,因此也可以代表空间位置点。在电磁场中,空间位置点的坐标常写成位置矢量的形式,即(1.2-1)式常

简写作

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(\mathbf{r})\hat{x} + A_y(\mathbf{r})\hat{y} + A_z(\mathbf{r})\hat{z} \quad (1.2-3)$$

这里需要说明, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 中的 \mathbf{r} 只是表示 \mathbf{A} 是 \mathbf{r} 所指的空间点坐标的函数, 并不意味着 \mathbf{A} 的变量是矢量。在本书中, 为书写方便, 在不会引起混淆的情况下, 有时将矢量场在空间位置 (x, y, z) 点的矢量 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 或 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 进一步简写作 \mathbf{A} , 将 (1.2-1) 式简写为

$$\mathbf{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

在空间每一点上的矢量都相同的矢量场称为常矢量场, 简称常矢量。直角坐标系中的 3 个单位矢量均为常矢量。在直角坐标系中, 常矢量的 3 个直角坐标分量都是常量。例如, $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 3\hat{x}$ 是常矢量场, 在空间每一点上, 不但其矢量场的大小都相同, 而且矢量场的方向也相同。 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (x^2 + y^2)\hat{y}$ 就不是常矢量场, 因为在空间每一点上, 尽管矢量场的方向都是相同的, 但矢量场的大小不相同。

2. 圆柱坐标系

在圆柱坐标系中, 表示空间位置点的 3 个坐标变量记为 (ρ, φ, z) , 其中 ρ 表示该点到 z 轴的垂直距离; φ 表示过该点和 z 轴的平面与 xOz 平面的夹角; z 仍然表示该点在 z 轴上的投影值, 如图 1.2-2 所示。容易证明, 同一空间位置点的圆柱坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (1.2-4)$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \quad (1.2-5)$$

在圆柱坐标系中, 矢量场的本地坐标轴的取向与过该点的圆柱面的法向和切向一致。对空间任一位置点 (ρ, φ, z) , 本地的 3 个相互垂直的坐标轴单位矢量记为 $\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$, 取向为以 z 轴为轴线过该点的圆柱面在该点的法线方向和切线方向, 如图 1.2-3 所示, 其中: $\hat{\rho}$ 为圆柱面在 (ρ, φ, z) 点的法线方向; $\hat{\varphi}$ 为在 (ρ, φ, z) 点

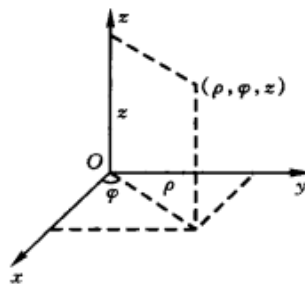


图 1.2-2 圆柱坐标

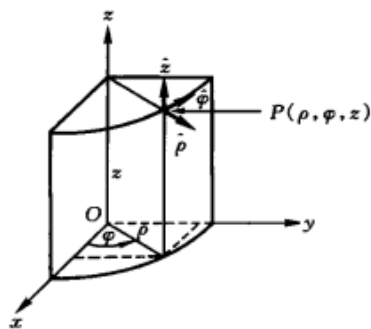


图 1.2-3 圆柱坐标系中的单位矢量

平行于 xOy 面且指向 φ 增加一侧的圆柱面切线方向; \hat{z} 为圆柱面在 (ρ, φ, z) 点平行于 z 轴的切线方向。

可见, 圆柱坐标系中的坐标轴单位矢量 $\hat{\rho}, \hat{\varphi}$ 的方向随空间位置而变, 不是常矢量。矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 在任一空间位置点 (ρ, φ, z) 的矢量 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 可用其圆柱坐标分量表示为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_\rho(\mathbf{r})\hat{\rho} + A_\varphi(\mathbf{r})\hat{\varphi} + A_z(\mathbf{r})\hat{z} \quad (1.2-6)$$

式中 $A_\rho(\mathbf{r}), A_\varphi(\mathbf{r}), A_z(\mathbf{r})$ 称为圆柱坐标分量, 是矢量 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 在该点的 3 个垂直坐标轴 $\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$ 上的投影。容易证明, 在空间同一点, 圆柱坐标系中的单位矢量与直角坐标系中的单位矢量的关系为

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi & \hat{x} &= \hat{\rho}\cos\varphi - \hat{\varphi}\sin\varphi \\ \hat{\varphi} &= -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi & \hat{y} &= \hat{\rho}\sin\varphi + \hat{\varphi}\cos\varphi \end{aligned} \quad (1.2-7)$$

将上式代入(1.2-6)和(1.2-3)式, 可以得到矢量场在同一空间位置点上圆柱坐标系中的坐标分量与直角坐标系中的坐标分量的关系, 用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (1.2-8)$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} \quad (1.2-9)$$

例 1.2-1 将 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = x\hat{x} + y\hat{y}$ 和 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = x\hat{y} - y\hat{x}$ 用圆柱坐标分量表示。

解 为了将 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = x\hat{x} + y\hat{y}$ 和 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = x\hat{y} - y\hat{x}$ 用圆柱坐标分量表示, 将(1.2-4)及(1.2-7)式代入, 得

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = x\hat{x} + y\hat{y} = \rho\cos\varphi(\hat{\rho}\cos\varphi - \hat{\varphi}\sin\varphi) + \rho\sin\varphi(\hat{\rho}\sin\varphi + \hat{\varphi}\cos\varphi) = \rho\hat{\rho}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = x\hat{y} - y\hat{x} = \rho\cos\varphi(\hat{\rho}\sin\varphi + \hat{\varphi}\cos\varphi) - \rho\sin\varphi(\hat{\rho}\cos\varphi - \hat{\varphi}\sin\varphi) = \rho\hat{\varphi}$$

从此例可以看出, 对于这里 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 这样的矢量场, 用圆柱坐标系表示比用直角坐标系表示不但形式更简洁, 而且更容易理解和想象其空间分布的情况。再看一个真空中无限长载流导线产生磁场的例子: 从物理学我们知道, 真空中无限长载流导线产生磁场的磁力线是一个个围绕载流导线的同心圆, 方向符合右手定则, 磁场的大小与到载流导线的距离成反比, 与电流强度 I 成正比。对于这个磁场, 在圆柱坐标系, 取无限长载流导线为 z 轴, 其磁感应强度 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 的表达式很简单, 为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{\rho} \hat{\varphi}$$

如果在直角坐标系, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 的表达式(请读者自己推导)就比较复杂, 方向和大小

分布和变化情况也不直观。

3. 圆球坐标系

在圆球坐标系(见图 1.2-4)中,表示空间位置点的 3 个坐标变量记为 (r, θ, φ) ,其中 r 表示该点到坐标原点的距离,也就是位置矢量的长度; θ 表示该点的位置矢量与 z 轴的夹角,称为极角或纬度角; φ 表示过该点和 z 轴的平面与 xOz 平面的夹角,称为方位角或经度角。容易证明,同一空间位置点的圆球坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1.2-10)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \quad (1.2-11)$$

在圆球坐标系中,矢量场的本地坐标轴的取向与圆球面的法向和切向一致。在空间任一位置点 (r, θ, φ) ,本地的 3 个相互垂直的坐标轴单位矢量记为 $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$,取向为过该点以坐标原点为球心的圆球面在该点的法线方向和切线方向,如图 1.2-5 所示,其中 \hat{r} 为圆球面在点 (r, θ, φ) 的法线方向; $\hat{\theta}$ 为在包含点 (r, θ, φ) 的子午面内且指向 θ 增加一侧的圆球面切线方向; $\hat{\varphi}$ 为在点 (r, θ, φ) 平行于 xOy 面且指向 φ 增加一侧的圆球面切线方向。可见,圆球坐标系中的坐标单位矢量的方向也随空间位置而变,不是常矢量。

容易证明,在空间同一点,圆球坐标系中的单位矢量与直角坐标系中的单位矢量的关系为

$$\begin{cases} \hat{r} = \hat{x} \sin \theta \cos \varphi + \hat{y} \sin \theta \sin \varphi + \hat{z} \cos \theta \\ \hat{\theta} = \hat{x} \cos \theta \cos \varphi + \hat{y} \cos \theta \sin \varphi - \hat{z} \sin \theta \\ \hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi \end{cases} \quad (1.2-12)$$

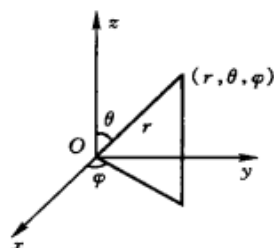


图 1.2-4 圆球坐标

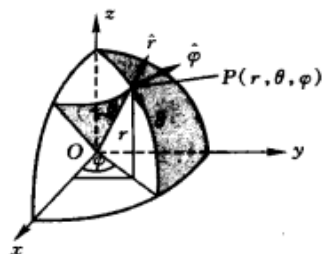


图 1.2-5 圆球坐标系中的单位矢量

$$\begin{cases} \hat{x} = \hat{r}\sin\theta\cos\varphi + \hat{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \hat{\varphi}\sin\varphi \\ \hat{y} = \hat{r}\sin\theta\sin\varphi + \hat{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \hat{\varphi}\cos\varphi \\ \hat{z} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta \end{cases} \quad (1.2-13)$$

矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 在任一空间位置点 (r, θ, φ) 的矢量 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (即 $\mathbf{A}(r, \theta, \varphi)$) 可用其圆球坐标分量表示为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_r(\mathbf{r})\hat{r} + A_\theta(\mathbf{r})\hat{\theta} + A_\varphi(\mathbf{r})\hat{\varphi} \quad (1.2-14)$$

式中 $A_r(\mathbf{r})$ 、 $A_\theta(\mathbf{r})$ 、 $A_\varphi(\mathbf{r})$ 称为圆球坐标分量, 是矢量 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 在该点的三个垂直坐标轴 \hat{r} 、 $\hat{\theta}$ 、 $\hat{\varphi}$ 上的投影。可以根据(1.2-12)及(1.2-13)式证明, 在同一空间位置点上, 矢量场在圆球坐标系中的坐标分量与直角坐标系中的坐标分量的关系可用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (1.2-15)$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} \quad (1.2-16)$$

例 1.2-2 将矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \hat{x}$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \hat{y}$, $\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \hat{z}$ 分别用圆球坐标分量表示。

解 将 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \hat{x}$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \hat{y}$, $\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \hat{z}$ 分别代入(1.2-15)式得

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \hat{x} = \hat{r}\sin\theta\cos\varphi + \hat{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \hat{\varphi}\sin\varphi$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \hat{y} = \hat{r}\sin\theta\sin\varphi + \hat{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \hat{\varphi}\cos\varphi$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \hat{z} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta$$

例 1.2-3 将矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\hat{x} + \frac{y}{x^2+y^2+z^2}\hat{y} + \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\hat{z}$ 用圆球坐标分量表示。

$$\begin{aligned} \text{解 } \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\hat{x} + \frac{y}{x^2+y^2+z^2}\hat{y} + \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\hat{z} \\ &= \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\mathbf{r}}{r^2} = \frac{\hat{r}}{r} \end{aligned}$$

上面利用了(1.2-11)式中的 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 和位置矢量 $\mathbf{r} = r\hat{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ 。

从例 1.2-3 可以看出, 对像本例的这种矢量场, 用圆球坐标系表示比用直角坐标系表示形式简洁, 并容易理解和想象其空间分布的情况。从圆球坐标轴的特点可以看出, 当矢量场的方向为某球面的法向或切向时, 用圆球坐标系表示其场分布将比较简洁明了。

4. 三种坐标系中的微分元

在电磁场中,有时需要对矢量场进行线积分、面积分和体积分,如 $\int \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{L}$, $\iint \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$, $\iiint \mathbf{F}(\mathbf{r}) dV$ 。这里 $d\mathbf{L}$ 、 $d\mathbf{S}$ 和 dV 分别为(有向微)线元、(有向微)面元和体积元。下面分析这几个微元在三种坐标系中的表达式。

(1) 直角坐标系

在直角坐标系中,在 x 轴、 y 轴和 z 轴方向的长度微元分别为 dx 、 dy 、 dz ,那么 $d\mathbf{L}$ 、 $d\mathbf{S}$ 、 dV 分别为

$$d\mathbf{L} = dL\hat{\mathbf{L}} = dL_x\hat{\mathbf{x}} + dL_y\hat{\mathbf{y}} + dL_z\hat{\mathbf{z}} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$$

$$d\mathbf{S} = dS\hat{\mathbf{n}} = dS_x\hat{\mathbf{x}} + dS_y\hat{\mathbf{y}} + dS_z\hat{\mathbf{z}} = dydz\hat{\mathbf{x}} + dx dz\hat{\mathbf{y}} + dx dy\hat{\mathbf{z}}$$

$$dV = dx dy dz$$

(2) 圆柱坐标系

在圆柱坐标系中,如图 1.2-6 所示,在 ρ 轴、 φ 轴和 z 轴方向的长度微元分别为 $d\rho$ 、 $\rho d\varphi$ 、 dz ,那么, $d\mathbf{L}$ 、 $d\mathbf{S}$ 和 dV 分别为

$$d\mathbf{L} = dL\hat{\mathbf{L}} = dL_\rho\hat{\rho} + dL_\varphi\hat{\varphi} + dL_z\hat{\mathbf{z}} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{\mathbf{z}}$$

$$d\mathbf{S} = dS\hat{\mathbf{n}} = dS_\rho\hat{\rho} + dS_\varphi\hat{\varphi} + dS_z\hat{\mathbf{z}} = \rho d\varphi dz\hat{\rho} + d\rho dz\hat{\varphi} + \rho d\rho d\varphi\hat{\mathbf{z}}$$

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

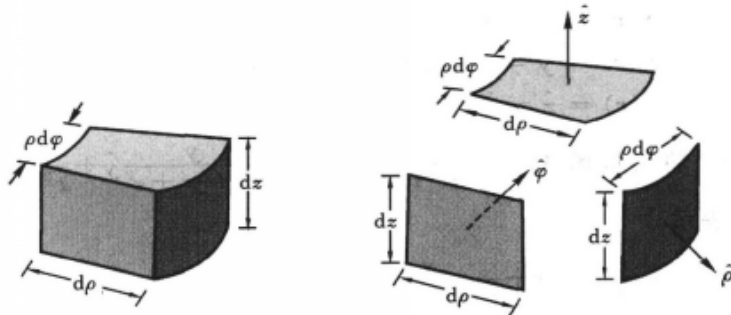


图 1.2-6 圆柱坐标系中的微分元

(3) 圆球坐标系

在圆球坐标系中,如图 1.2-7 所示,在 r 轴、 θ 轴和 φ 轴方向的长度微元分别为 dr 、 $r d\theta$ 、 $r \sin\theta d\varphi$,那么 $d\mathbf{L}$ 、 $d\mathbf{S}$ 和 dV 分别为

$$d\mathbf{L} = dL\hat{\mathbf{L}} = dL_r\hat{\mathbf{r}} + dL_\theta\hat{\theta} + dL_\varphi\hat{\varphi} = dr\hat{\mathbf{r}} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin\theta d\varphi\hat{\varphi}$$

$$d\mathbf{S} = dS\hat{\mathbf{n}} = dS_r\hat{\mathbf{r}} + dS_\theta\hat{\theta} + dS_\varphi\hat{\varphi} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi\hat{\mathbf{r}} + r \sin\theta dr d\varphi\hat{\theta} + r dr d\theta\hat{\varphi}$$

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

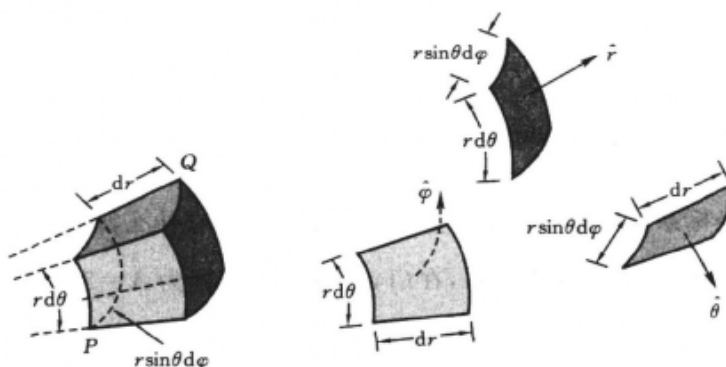


图 1.2-7 圆球坐标系中的微分元

例 1.2-4 求积分 $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$, 其中 $\mathbf{F} = xy\hat{x} - 2x\hat{y}$, 积分路径为 xOy 平面上半径为 3 的四分之一圆, 方向为从 x 轴到 y 轴, 如图 1.2-8 所示。

解 积分路径在 xOy 平面上, 可采用直角坐标系, 也可采用圆柱坐标系。

(1) 直角坐标系

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= (xy\hat{x} - 2x\hat{y}) \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y}) \\ &= xydx - 2xdy \end{aligned}$$

沿积分路径积分, 并考虑到积分路径满足方程 $x^2 + y^2 = 3^2$, 得

$$\begin{aligned} \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_3^0 xydx - \int_0^3 2xdy = \int_3^0 x \sqrt{9-x^2} dx - \int_0^3 2 \sqrt{9-y^2} dy \\ &= -9(1 + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

(2) 圆柱坐标系

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= [\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi (\hat{\rho}\cos\varphi - \hat{\varphi}\sin\varphi) - 2\rho\cos\varphi (\hat{\rho}\sin\varphi + \hat{\varphi}\cos\varphi)] \cdot 3d\varphi\hat{\varphi} \\ &= 3(-\rho^2 \cos\varphi \sin^2\varphi - 2\rho\cos^2\varphi)d\varphi \end{aligned}$$

沿积分路径积分, 并考虑到积分路径满足方程 $\rho=3$, 得

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3(-9\cos\varphi \sin^2\varphi - 6\cos^2\varphi)d\varphi = -9(1 + \frac{\pi}{2})$$

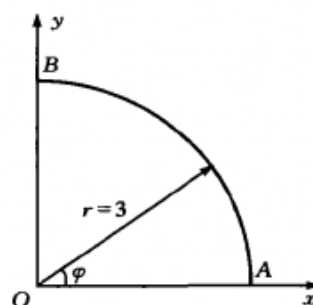


图 1.2-8 例 1.2-4 的积分路径

思考题

1. 从表示空间位置坐标和坐标轴方向两个方面说明三种常用坐标系各有什么特点?
2. 圆柱坐标系与圆球坐标系各分别适用于表示具有什么特点的矢量场?
3. 有一矢量场, 取圆球坐标系, 在 $(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 点矢量为 $\mathbf{A} = 2\hat{r} + \hat{\theta}$, 在 $(1, \frac{\pi}{2}, 0)$ 点矢量为 $\mathbf{B} = \hat{r} - \hat{\phi}$, 那么这两矢量之和为 $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (2\hat{r} + \hat{\theta}) + (\hat{r} - \hat{\phi}) = 3\hat{r} + \hat{\theta} - \hat{\phi}$; 两矢量点乘为 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (2\hat{r} + \hat{\theta}) \cdot (\hat{r} - \hat{\phi}) = 2$, 这样计算对吗? 为什么?

1.3 梯度

一元函数的导数表示函数的变化率, 多元函数的偏导数是多元函数沿对应坐标轴方向的变化率。例如, 对于温度场 $T(x, y, z, t)$, $\frac{\partial T}{\partial t}$ 表示温度场随时间的变化率; 而 $\frac{\partial T}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial T}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial T}{\partial z}$ 分别表示温度场沿 x 、 y 、 z 3 个坐标轴方向的变化率。对于指定的空间方向 \hat{l} , 其单位矢量可用方向余弦表示为

$$\hat{l} = \hat{x}\cos\alpha + \hat{y}\cos\beta + \hat{z}\cos\gamma \quad (1.3-1)$$

式中 α 、 β 、 γ 分别为该方向与 x 、 y 、 z 3 个坐标轴方向的夹角。标量场或者说多元函数 $\Phi(x, y, z)$ 沿指定方向 \hat{l} 的变化率就是标量场在该方向的方向导数

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l}$$

上式中 $\frac{\partial x}{\partial l}$ 、 $\frac{\partial y}{\partial l}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial l}$ 分别等于 \hat{l} 的 3 个方向余弦, 因此, 上式可写为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos\gamma \quad (1.3-2)$$

定义矢量场

$$\mathbf{G}(x, y, z) = \hat{x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1.3-3)$$

(1.3-2) 式可写为两个矢量的点积形式, 即

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \mathbf{G} \cdot \hat{l} = G \cos\theta \quad (1.3-4)$$

式中 θ 为 \mathbf{G} 与 \hat{l} 之间的夹角。上式表明, 标量场 $\Phi(x, y, z)$ 沿指定方向 \hat{l} 的变化率就是矢量场 \mathbf{G} 在该方向的投影。可以看出, 沿 \mathbf{G} 的方向, 标量场变化最快, 变化率

最大,其最大的变化率就是 G 的模。也就是说, G 给出了对应的标量场 Φ 在空间各点上的最大变化率及其方向, G 称为对应标量场 Φ 的梯度。在直角坐标系中定义运算符号 ∇ 为

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.3-5)$$

由(1.3-3)式,标量场 Φ 的梯度可表示为

$$\nabla \Phi = \hat{x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1.3-6)$$

符号 ∇ 是一个微分运算符号, $\nabla \Phi$ 既表示标量场 Φ 的梯度,也表示对标量场 Φ 进行由(1.3-6)式右边规定的求导运算。由直角坐标与圆柱坐标及圆球坐标的关系,可以得到:

在圆柱坐标系中

$$\nabla \Phi = \hat{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \hat{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \hat{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1.3-7)$$

在圆球坐标系中

$$\nabla \Phi = \hat{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (1.3-8)$$

由梯度公式可以看出,求梯度运算的各坐标分量都是求偏导运算,因此它与微分运算有相似的规则。下面给出一些常用的梯度运算恒等式

$$\nabla C = 0 \quad (C \text{ 为常数}) \quad (1.3-9a)$$

$$\nabla (C\Phi) = C\nabla \Phi \quad (1.3-9b)$$

$$\nabla (\Phi + \Psi) = \nabla \Phi + \nabla \Psi \quad (1.3-9c)$$

$$\nabla (\Phi\Psi) = \Psi\nabla \Phi + \Phi\nabla \Psi \quad (1.3-9d)$$

$$\nabla \frac{\Phi}{\Psi} = \frac{1}{\Psi^2} (\Psi\nabla \Phi - \Phi\nabla \Psi) \quad (1.3-9e)$$

$$\nabla F(\Phi) = F'(\Phi) \nabla \Phi \quad (1.3-9f)$$

下面以推导(1.3-9d)式为例说明以上几式的证明方法。

$$\begin{aligned} \nabla (\Phi\Psi) &= \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi\Psi) + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} (\Phi\Psi) + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} (\Phi\Psi) \\ &= \hat{x} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \hat{y} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \hat{z} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \\ &= \Phi \left(\hat{x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \Psi \left(\hat{x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \\ &= \Psi \nabla \Phi + \Phi \nabla \Psi \end{aligned}$$

例 1.3-1 产生场的源所在的空间位置点称为源点,记为 (x', y', z') 或 r' ; 场所在的空间位置点称为场点,记为 (x, y, z) 或 r 。从源点指向场点的矢量记为 $R =$

$\mathbf{r}-\mathbf{r}'$, 源点到场点的距离记为 $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, 如图 1.3-1 所示。求 $\nabla \frac{1}{R}$ 及 $\nabla' \frac{1}{R}$, ∇ 表示对 (x, y, z) 运算, ∇' 表示对 (x', y', z') 运算。

$$\text{解 } R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

$$\text{由 (1.3-9f) 式有 } \nabla \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2} \nabla R$$

$$\text{而 } \nabla R = \hat{x} \frac{\partial R}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial R}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\text{其中 } \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x-x'}{R}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{y-y'}{R}, \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{z-z'}{R}$$

$$\text{因此 } \nabla \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$\text{同理得 } \nabla' \frac{1}{R} = \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

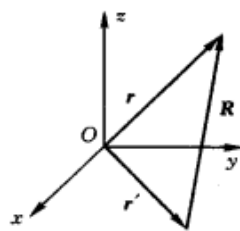


图 1.3-1 场点与源点

思考题

1. 标量场的梯度和方向导数各有什么意义? 它们之间有什么关系?
2. 标量场的梯度方向和标量场等值面有什么关系?
3. 标量场的梯度一定存在吗? 满足什么条件时标量场的梯度存在?
4. 什么是位置矢量? 写出位置矢量在三种坐标系中的坐标分量表示。

1.4 矢量场的散度

1. 通量

在水流场中, 如果已知水流速度 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, 要计算水在单位时间流过某一曲面 S 的流量, 可在曲面上取微面元 dS , 微面元足够小, 可认为水流过该面元的速度 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ 相等, 设面元的法线方向 \hat{n} 与水的流速方向夹角为 θ , 则水在单位时间流过此面元的流量为

$$d\Psi = v dS \cos\theta = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

即水在单位时间流过曲面 S 的流量就是对该面的面积分, 即

$$\Psi = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.4-1)$$

此面积分称为矢量场 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ 对曲面 S 的通量, 也就是矢量场通过(穿过)曲面 S 的量。通量的概念可适合于任何矢量场。通量是标量, 可正可负。当曲面的法线方向与矢

量场的方向一致,即矢量场沿着曲面法向($\theta < \pi/2$)时,通量为正;否则,当曲面的法线方向与矢量场方向不一致,即矢量场逆着曲面法向($\theta > \pi/2$)时,通量为负。

若曲面 S 为封闭面,矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 对封闭曲面 S 的通量写为

$$\Psi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.4-2)$$

式中 \oint 表示对封闭面积分,一般规定封闭面的法线方向向外。若 \mathbf{A} 是水的流速场,则任一点 \mathbf{A} 的矢量值就是水在该点的速度。如果流速场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 对封闭曲面 S 的通量 $\Psi > 0$,表示有水从封闭面中流出,或者流出的水比流进的水多,那么封闭面中就有水源,此封闭面的通量就能表示其中水源出水量的大小;如果 $\Psi < 0$,表示有水流进封闭面内,或者流进的水比流出的水多,那么封闭面中就有洞,或者说是负源,此封闭面的通量就能表示其中水洞或者负源吸水量的大小;如果 $\Psi = 0$,就表示没有水流过此封闭面,或流出的水等于流进的水。将此概念可以推广到任何矢量场,也就是说,矢量场对任一封闭面的通量可以表示此封闭面内产生该矢量场的源的大小。矢量场的这种可通过通量计算的源,可称作通量源,是一种标量源。例如,电荷是静电场的源,电场强度在一封闭面的通量就与该面内的电量成正比。

2. 散度

由前面对矢量场通量的分析得知,从矢量场对某封闭面的通量可以确定该封闭面内所包围的空间区域中有无矢量场源,以及该区域中源的总量。这就是说,如果我们要计算某空间区域中矢量场的源的多少,可通过计算矢量场对包围该空间区域的封闭面的通量得到。在电磁场中,为了分析某区域中场的分布,仅仅了解该区域中共有多少场源是不够的,还必须详细了解场源在该区域是如何分布的。那么,对于某空间区域的矢量场,如何分析其场源的分布情况呢?

场源在空间区域的分布,可用场源分布密度函数(简称为场源密度)来定量描述。对于某空间区域的矢量场 \mathbf{A} ,为计算其在空间某一点 \mathbf{r} 的场源密度,以该点 \mathbf{r} 为中心取一小体积 ΔV , S 为包围小体积 ΔV 的封闭面, $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 就为小体积 ΔV 中矢量场 \mathbf{A} 的通量源,定义矢量场 \mathbf{A} 的散度(记为 $\text{div}\mathbf{A}$)为

$$\text{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \quad (1.4-3)$$

可见,某一点矢量场的散度就是该点矢量场通量源的密度,因此,矢量场通量源又称为散度源。从(1.4-3)式可知,矢量场的散度是标量,也就是说,矢量场的散度源是标量。静电场的通量源就是电荷,其通量源在空间任一点的密度,即散度就是

该点的电荷密度。

在矢量场 \mathbf{A} 中,以 (x, y, z) 点为中心,取 ΔV 为边长分别为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 的六面体,如图 1.4-1 所示。从 ΔV 中流出的通量为

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^6 \iint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

式中 S_1 到 S_6 是六面体的 6 个面。 S_1 和 S_2 分别是正面和背面,法线方向分别为 \hat{x} 和 $-\hat{x}$,面积为 $\Delta y \Delta z$; S_3 和 S_4 分别是右面和左面,法线方向分别为 \hat{y} 和 $-\hat{y}$,面积为 $\Delta x \Delta z$; S_5 和 S_6

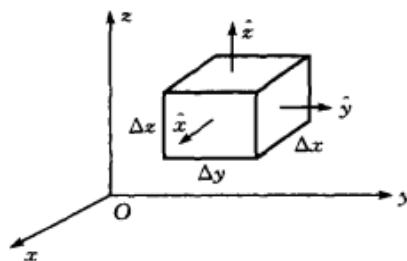


图 1.4-1 直角坐标系中的微体积分元

分别是上面和下面,法线方向分别为 \hat{z} 和 $-\hat{z}$;面积为 $\Delta x \Delta y$ 。在直角坐标系中, $\mathbf{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ 。在 S_1 面上, $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = A_x dS$ 。由于 S_1 面和 Δx 是微元,在该面上的 A_x 可看成常数,可用六面体中心点的 A_x 表示为 $A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$,因此矢量 \mathbf{A} 穿过 S_1 的通量为

$$\iint_{S_1} \mathbf{A} \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \cdot d\mathbf{S} = \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z$$

同样方法可以求出其余 5 个面的通量分别为

$$\iint_{S_2} \mathbf{A} \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \cdot d\mathbf{S} = - \left(A_x - \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z$$

$$\iint_{S_3} \mathbf{A} \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) \cdot d\mathbf{S} = \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta z$$

$$\iint_{S_4} \mathbf{A} \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right) \cdot d\mathbf{S} = - \left(A_y - \frac{\partial A_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta z$$

$$\iint_{S_5} \mathbf{A} \left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2} \right) \cdot d\mathbf{S} = \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y$$

$$\iint_{S_6} \mathbf{A} \left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2} \right) \cdot d\mathbf{S} = - \left(A_z - \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y$$

将以上结果代入(1.4-3)式右端得

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

可以看出,矢量场 \mathbf{A} 的散度等于各坐标分量对各自的坐标变量的偏导数之和。在直角坐标系,矢量场 \mathbf{A} 的散度用算符 ∇ 表示为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.4-4)$$

由直角坐标与圆柱坐标及圆球坐标的关系,可以得到,在圆柱坐标系及圆球坐标系中

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.4-5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1.4-6)$$

由以上几式可知,散度不仅表示矢量场的源密度,而且还给出了散度源与矢量场各分量的空间变化率的关系,也是一种微分运算。散度运算有与微分运算相似的运算规则,如

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (1.4-7a)$$

$$\nabla \cdot (C\mathbf{A}) = C\nabla \cdot \mathbf{A} \quad (C \text{ 为常数}) \quad (1.4-7b)$$

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{A}) = \Phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \Phi \quad (1.4-7c)$$

例 1.4-1 证明(1.4-7c)式。

证 由(1.4-4)式有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\Phi \mathbf{A}) &= \frac{\partial(\Phi A_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\Phi A_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\Phi A_z)}{\partial z} \\ &= \left(\Phi \frac{\partial A_x}{\partial x} + A_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \left(\Phi \frac{\partial A_y}{\partial y} + A_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \left(\Phi \frac{\partial A_z}{\partial z} + A_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \\ &= \Phi \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + \left(A_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + A_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + A_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \\ &= \Phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \Phi \end{aligned}$$

例 1.4-2 求标量函数梯度 $\nabla \Phi$ 的散度。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \nabla \Phi &= \hat{x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \nabla \cdot \nabla \Phi &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

记运算 $\nabla \cdot \nabla \Phi$ 为 $\nabla^2 \Phi$,称为拉普拉斯(Laplace)运算,即

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (1.4-8)$$

在圆柱坐标系及圆球坐标系中

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (1.4-9)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \quad (1.4-10)$$

例 1.4-3 求以下两种场的散度。

(a) $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$

(b) $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = g(\rho)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$

式中 $f(r)$ 和 $g(\rho)$ 均为导数存在的连续函数。

解 (a) 将 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ 代入 (1.4-6) 式得

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 f(r)) = f'(r) + \frac{2f(r)}{r}$$

当 $f(r) = r$ 时, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 3$

当 $f(r) = \frac{1}{r}$ 时, $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}$

当 $f(r) = \frac{1}{r^2}$ 时, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

(b) 将 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = g(\rho)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 代入 (1.4-5) 式得

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial g(\rho)}{\partial \varphi} = 0$$

3. 高斯定理

对于矢量场中某一体积为 V 的有限区域, 矢量场对包围该体积封闭面 S 的通量应等于该体积内的所有散度源的总量, 即

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (1.4-11)$$

此式称为高斯(Gauss)定理或散度定理。在数学上, 它表示体积分与面积分的转换关系, 反映了体积表面上的矢量场与体积内的矢量场的关系。在 (1.4-11) 式中, 封闭面 S 的法线方向指向所包围的体积外。高斯定理 (1.4-11) 式可通过将体积 V 划分为许许多多的小体积 ΔV , 利用散度的定义 (1.4-3) 式, 并考虑到相邻体积共面部分的面积分互相抵消, 容易得到证明。

例 1.4-4 求 $\nabla^2 \frac{1}{R}$ 。

解 由例 1.3-1 中可知

$$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

因此

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = \nabla \cdot \nabla \frac{1}{R} = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

根据 (1.4-7c) 式得

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{R}}{R^3} - 3\mathbf{R} \cdot \frac{\nabla R}{R^4}$$

式中

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \frac{\partial}{\partial x}(x-x') + \frac{\partial}{\partial y}(y-y') + \frac{\partial}{\partial z}(z-z') = 3$$

$$\nabla R = \hat{x} \frac{\partial R}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial R}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

代入, 在 $r \neq r'$, 即 $R \neq 0$ 处

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = \frac{3}{R^3} - \frac{3}{R^3} = 0$$

但由上式不能确定 $\nabla^2 \frac{1}{R}$ 在 $r = r'$ 点, 即 $R = 0$ 点的值。为此, 计算体积分

$\iiint_V \nabla^2 \frac{1}{R} dV$ 。如果此体积 V 中不包含 r' 点, 则在体积分体积中 $R \neq 0$, 体积分的被积函数为 0, 积分也为 0; 如果体积 V 中包含 r' 点, 可将体积 V 分为中心在 $R = 0$ 点、以 a 为半径的球 V_a 和其余的 V' 。由于在 V' 中被积函数为零, 体积分也为零, 因此有

$$\iiint_V \nabla^2 \frac{1}{R} dV = \iiint_{V_a} \nabla^2 \frac{1}{R} dV$$

利用高斯定理, 上式体积分可转化为封闭面积分

$$\iiint_V \nabla^2 \frac{1}{R} dV = \iiint_{V_a} \nabla^2 \frac{1}{R} dV = \iiint_{V_a} \nabla \cdot \nabla \frac{1}{R} dV = - \iiint_{V_a} \nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV = - \oint_{S_a} \frac{\mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}}{R^3}$$

式中 S_a 是半径为 a 的球面, 在该球面上 \mathbf{R} 的方向与球面 S_a 的法线方向相同, 因此

$$\iiint_V \nabla^2 \frac{1}{R} dV = - \oint_{S_a} \frac{\mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}}{R^3} = - \oint_{S_a} \frac{dS}{a^2} = - \frac{1}{a^2} \oint_{S_a} dS = -4\pi$$

也就是

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{R} \right) dV &= \begin{cases} 1, & r' \in V \\ 0, & r' \notin V \end{cases} \\ -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{R} &= 0, \quad R \neq 0 \end{aligned}$$

对于三维 δ 函数 $\delta(R) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$

$$\delta(R) = 0, \quad R \neq 0$$

$$\iiint_V \delta(R) dV = \begin{cases} 1, & r' \in V \\ 0, & r' \notin V \end{cases}$$

比较可知

$$-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{R} = \delta(R) \quad \text{即} \quad \nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi\delta(R) \quad (1.4-12)$$

思考题

1. 通量和散度的意义各是什么？
2. 高斯定理的意义是什么？其积分面的方向是如何规定的？
3. 如果矢量场对于某区域封闭面 S 的通量为 0, 那么矢量场在该区域中的散度处处为 0 吗？为什么？
4. 在一常矢量场中, 任取一封闭面 S , 其通量一定为 0 吗？为什么？

1.5 矢量场的旋度

1. 环量

矢量场除了有散度源外, 还有另一种源——旋度源。

在水的流速场中, 施加作用力可使水中出现旋涡, 形成环流。水中环流的大小和方向与施加的力的大小和方向有关。如果水流沿一条闭合回路有环流, 则水流速沿该回路的线积分不为 0。环流越强, 回路线积分值越大; 环流越弱, 回路线积分值越小。如无环流, 则线积分为 0。环流的概念可以推广到任何矢量场, 定义矢量场 \mathbf{A} 沿闭合回路 l 的环量为

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.5-1)$$

若在闭合回路 l 上, 矢量场 \mathbf{A} 的方向处处与回路方向一致, 则环量大于 0; 否则, 若两者处处相反, 则环量小于 0。显然, 环量可用来表示矢量场的涡旋特性。由于矢量场的涡旋现象是由产生涡旋的力或者说是涡旋源引起的, 因此, 一闭合回路的环量还应和穿过以该回路为界的曲面的涡旋源的大小有关。例如在真空中, 磁感应强度沿一闭合回路的线积分 (磁感应强度的环量) 与该回路中包围的电流强度成正比, 而电流正是产生磁场的源。

2. 环量强度

设 \mathbf{r} 为矢量场 \mathbf{A} 中的一点, 以 \mathbf{r} 为中心取一个法线方向为 \hat{n} 的微小曲面 ΔS , 以此曲面的边界 l 为闭合回路, 其回路的方向与 \hat{n} 构成右手螺旋关系, 如图 1.5-1 所示, 则当曲面面积趋向于 0 时, 矢量场 \mathbf{A} 在该回路的环量与面积之比的极限

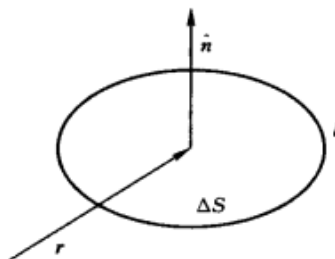


图 1.5-1

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}$$

称为矢量场 \mathbf{A} 在点 r 处沿 \hat{n} 方向的环量强度。

3. 旋度

由于闭合回路的环量可表示穿过以该回路为界的曲面的涡旋源的大小,因此矢量场在某一点处沿 \hat{n} 方向的环量强度就是该点处 \hat{n} 方向的涡旋源密度,也就是该点处的涡旋源密度在 \hat{n} 方向的分量。可以看出,环量强度是与方向有关的,就像标量场的方向导数与方向有关一样。在标量场中定义了梯度,在给定点处,梯度的方向表示最大方向导数的方向,其模为最大方向导数的数值,而它在任一方向的投影就是该方向的方向导数。对矢量场 \mathbf{A} ,也可以对应定义这样一种矢量,称为矢量场 \mathbf{A} 的旋度,记为 $\text{curl} \mathbf{A}$,矢量场 \mathbf{A} 在某点的旋度的大小是矢量场 \mathbf{A} 在该点的最大环量强度,其方向是在该点取最大环量强度的方向 \hat{n}_{\max} ,即

$$\text{curl} \mathbf{A} = \hat{n}_{\max} \left\{ \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \right\}_{\max} \quad (1.5-2)$$

旋度在某方向的投影等于 \mathbf{A} 在该方向的环量强度,即

$$(\text{curl} \mathbf{A}) \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad (1.5-3)$$

式中 ΔS 的法线方向为 \hat{n} 。由矢量场的旋度与环量强度的关系以及环量强度的意义可以看出,矢量场在某一点的旋度就是该点的涡旋源密度,因此矢量场的涡旋源也称为旋度源。显然,矢量场的旋度源密度与散度源密度是完全不同的,旋度源密度是矢量,而散度源密度是标量。

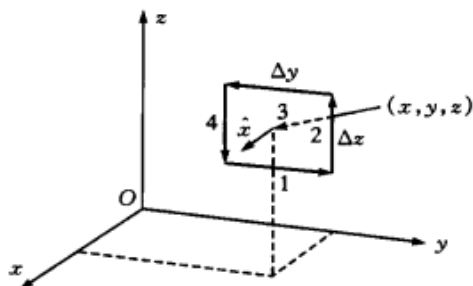
下面分析在直角坐标系中矢量 \mathbf{A} 的旋度与 \mathbf{A} 的 3 个坐标分量的关系。在直角坐标系中,矢量 \mathbf{A} 的旋度可以分解为 3 个直角坐标分量,即

$$\text{curl} \mathbf{A} = [(\text{curl} \mathbf{A}) \cdot \hat{x}] \hat{x} + [(\text{curl} \mathbf{A}) \cdot \hat{y}] \hat{y} + [(\text{curl} \mathbf{A}) \cdot \hat{z}] \hat{z} \quad (1.5-4)$$

根据旋度和环量强度的关系(1.5-3)式,矢量 \mathbf{A} 的旋度的 3 个坐标分量就是对应坐标方向的环量强度。为了计算矢量场在 x 方向的环量强度,即上式中第一项,取中心在 (x, y, z) ,法线方向为 \hat{x} ,面积为 $\Delta y \Delta z$ 的矩形微面元,如图 1.5-2 所示。沿着矩形微面元 4 个边的环量为

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_1 A_y \cdot dy + \int_2 A_z \cdot dz - \int_3 A_y \cdot dy - \int_4 A_z \cdot dz \quad (1.5-5)$$

由于矩形回路每个边都是微元,每个边上的场可看成不变,为对应边中心的值,因

图 1.5-2 法向为 \hat{x} 方向的矩形面元

此上式的环量为

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \left(A_y - \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta y + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta z - \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta y - \\ &\quad \left(A_z - \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta z \\ &= \left(-\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \Delta y \Delta z\end{aligned}$$

将上式和 $\Delta S = \Delta y \Delta z$ 代入(1.5-3)式,就得到 x 方向的环量强度,也就是旋度的 x 分量为

$$(\text{curl} \mathbf{A}) \cdot \hat{x} = -\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \quad (1.5-6)$$

用类似的方法可求得旋度的 y 分量和 z 分量,合成后得到矢量 \mathbf{A} 的旋度与 \mathbf{A} 的 3 个坐标分量的关系为

$$\text{curl} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z} \quad (1.5-7)$$

上式表明,矢量场的旋度可以通过对矢量的微分运算得到。上式这种对矢量 \mathbf{A} 的微分运算可以用运算符号 ∇ 表示为 $\nabla \times \mathbf{A}$,并可以写成行列式

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (1.5-8)$$

可以证明,在圆柱坐标系和圆球坐标系中,矢量场的旋度分别为

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \quad (1.5-9)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} \quad (1.5-10)$$

可见,矢量场的旋度不仅是矢量场的涡旋源密度,也是对矢量场的微分运算,这种微分运算表示矢量场的某种空间变化率。换句话说,矢量场的旋度就是矢量场的旋度源引起矢量场在空间的某种变化。求矢量场旋度的微分运算简称为求旋度。由以上求旋度的公式可见,旋度运算是求导运算的组合,因此,其运算规则与微分运算规则相似,例如

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \quad (1.5-11a)$$

$$\nabla \times (C\mathbf{A}) = C\nabla \times \mathbf{A} \quad (C \text{ 为常数}) \quad (1.5-11b)$$

$$\nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = \Phi\nabla \times \mathbf{A} + \nabla\Phi \times \mathbf{A} \quad (1.5-11c)$$

4. 斯托克斯定理

对于空间任一以一条闭合曲线 l 为界的曲面 S ,如果将其划分为两部分,其周界分别为 l_1 和 l_2 ,如图 1.5-3 所示。由于 l_1 和 l_2 的重合部分方向相反,因此,矢量场 \mathbf{A} 对 l_1 和 l_2 的环量之和等于对闭合曲线 l 的环量,即

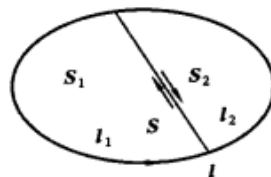


图 1.5-3

$$\oint_{l_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{l_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

由此推知,如果将闭合曲线 l 包围的曲面 S 划分为许多个微面元,那么矢量场 \mathbf{A} 对闭合曲线 l 的环量就等于矢量场 \mathbf{A} 对每个微面元边界的环量之和,而每个微面元边界的环量又等于该微面元上的旋度通过该微面元的通量(即该微面元上的环量强度乘以微面元的面积),结果为

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.5-12)$$

这就是斯托克斯(Stokes)定理,它给出了闭合线积分与面积分的关系,反映了曲面边界上的矢量场与曲面中旋度源的关系。

例 1.5-1 求例 1.4-3 中两种场的旋度。

解 (a) 将 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = f(r)\hat{r}$ 代入(1.5-10)式得

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ f(r) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(b) 将 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = g(\rho)\hat{\varphi}$ 代入(1.5-9)式得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho g(\rho) & 0 \end{vmatrix} = \hat{z} \left[g'(\rho) + \frac{g(\rho)}{\rho} \right]$$

当 $g(\rho) = \rho$ 时, $\nabla \times \mathbf{B} = 2\hat{z}$; 当 $g(\rho) = \frac{1}{\rho}$ 时, $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ 。

例 1.5-2 计算 $\nabla \times \nabla \Phi$

$$\begin{aligned} \text{解 } \nabla \times \nabla \Phi &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \hat{x} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \Phi - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \Phi \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \Phi - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \Phi \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Phi - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \Phi \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

例 1.5-3 计算 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \text{解 } \nabla \times \mathbf{A} &= \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} A_z - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} A_z + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} A_y - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} A_y + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} A_x - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} A_x \\ &= 0 \end{aligned}$$

思考题

1. 矢量场的环量、环量强度及旋度各有什么意义?
2. 环量与环量强度以及环量强度与旋度之间各有什么关系?
3. 斯托克斯定理中如果闭合线积分给定,那么积分面是唯一的吗?为什么?
4. 矢量场旋度的方向和使场涡旋的方向有什么关系?

1.6 无旋场与无散场

由前两节知,矢量场有两种不同性质的源,一种是散度源,是标量,产生的矢量场在包围源的封闭面上的通量等于(或正比于)该封闭面内所包围的源的总和,源

在一给定点的(体)密度等于(或正比于)矢量场在该点的散度;另一种是旋度源,是矢量,产生的矢量场具有涡旋性质,穿过一曲面的旋度源等于(或正比于)沿此曲面边界的闭合回路环量,在给定点上,这种源的(面)密度等于(或正比于)矢量场在该点的旋度。

任一矢量场,可能是由两种源中的一种产生的,也可能是由两种源共同产生的。例如:静电场只是由电荷这种散度源产生的;恒定磁场只是由电流这种旋度源产生的;而时变电磁场既有散度源也有旋度源。

如果矢量场仅由散度源产生,没有旋度源,那么该矢量场的旋度在空间处处为0,这种矢量场称为有散无旋场,或无旋场。对于无旋场,在整个空间无旋度源,矢量场对空间任何闭合曲线的环量都为0,即

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

换句话说,无旋场的线积分与路径无关,这样的矢量场又称为保守场。由于无旋场的旋度在空间处处为0,而标量场梯度的旋度在空间也处处为0,即

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0$$

那么无旋场就可以表示为标量场的梯度,即如果矢量场 \mathbf{F} 是无旋场, $\nabla \times \mathbf{F} \equiv 0$, 则矢量场 \mathbf{F} 可表示为标量场 Φ 的梯度

$$\mathbf{F} = -\nabla \Phi \quad (1.6-1)$$

如果矢量场 \mathbf{F} 仅由旋度源产生,没有散度源,那么,该矢量场对任一封闭面的通量为0,即

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

并且,该矢量场的散度在空间处处为0,即 $\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv 0$, 这种矢量场称为有旋无散场,或无散场。由于任一矢量场旋度的散度也是恒等于零,因此,无散场 \mathbf{F} 可用另一矢量场 \mathbf{A} 表示为

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.6-2)$$

无旋场与无散场可以看成是两种基本的矢量场,任一矢量场都可以分解为无旋场部分与无散场部分之和,也就是说,任一矢量场都可以表示为一标量场的梯度与另一矢量场的旋度之和。

亥姆霍兹(Helmholtz)定理 若矢量场 \mathbf{F} 在无界空间中处处单值,且其导数连续有界,源分布在有限区域中,则当矢量场的散度及旋度给定后,该矢量场可表示为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1.6-3)$$

式中

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (1.6-4)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (1.6-5)$$

证 根据 δ 函数的性质有

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \iiint_V \mathbf{F}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dV' \quad (1.6-6)$$

将 $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ 代入上式得

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{F}(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

考虑到上式中微分运算与积分运算的变量不同,因此得

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \iiint_V \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

利用矢量恒等式, $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$, 上式可进一步写为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) + \nabla \times \nabla \times \left(\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) \quad (1.6-7)$$

即

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi + \nabla \times \mathbf{A}$$

式中

$$\Phi(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) \quad (1.6-8)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) \quad (1.6-9)$$

(1.6-3)式得证。将(1.6-8)和(1.6-9)式中的微分与积分运算交换次序,分别得

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right) dV' \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \left(\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) \end{aligned} \quad (1.6-10)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \nabla \times \left(\frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dV' \\
&= -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{F}(\mathbf{r}) \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \\
&= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{F}(\mathbf{r}) \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \\
&= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \right) dV' \\
&= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{S}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (1.6-11)
\end{aligned}$$

(1.6-10)式和(1.6-11)式的体积分是无限空间区域,封闭面积分是包围无限大空间区域的无限大的曲面。当源分布在有限区域时,在远处, $|\mathbf{F}(\mathbf{r})| \propto \frac{1}{R^{1+\epsilon}}$ ($\epsilon > 0$), R 为场点到源的距离,可见,封闭面积分的被积函数随封闭面半径的增大按 $\frac{1}{R^{2+\epsilon}}$ 趋于 0,因此,上式中无限大的面积分为 0,得

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \\
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'
\end{aligned}$$

证毕。

亥姆霍兹定理说明,任一矢量场都可以分解为用一标量场的梯度表示的无旋场部分与用另一矢量场的旋度表示的无散场部分之和。在无限空间中,当矢量场连续,且其散度与旋度给定后,可通过对散度源的积分(1.6-4)式计算出空间任一点的矢量场的无旋场部分,通过对旋度源的积分(1.6-5)式计算出空间任一点的矢量场的无散场部分。也就是说,在无限空间中,矢量场可以由其旋度和散度确定。而在有界空间中,矢量场不仅取决于该空间区域的旋度和散度,还受该空间区域边界上场的影响,这可以从(1.6-10)及(1.6-11)式中存在对有界空间边界的封闭面积分看出,即对有界空间有

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (1.6-12)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{S}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (1.6-13)$$

上两式说明,对于有界空间,要用上两式分别计算矢量场的无旋场部分和无散场部分,不但要给出区域中矢量场的散度和旋度,还要给出区域封闭面上矢量场的法向分量和切向分量。

在有界空间区域中,矢量场可以根据该区域中是否有散度源和旋度源进行分类。

第Ⅰ类是在有界空间区域中既无散度源也无旋度源的矢量场。对于这类场,在该空间区域中,不但有 $\nabla \cdot \mathbf{F}=0$,而且有 $\nabla \times \mathbf{F}=0$ 。由于 $\nabla \times \mathbf{F}=0$,可定义标量场 Φ ,使 $\mathbf{F}=-\nabla\Phi$,代入 $\nabla \cdot \mathbf{F}=0$ 中,得

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

此方程称为拉普拉斯方程(Laplace's equation)。可见,对于这类场,只要在该区域中求解出拉普拉斯方程的解,再对此解求梯度就得到要求的矢量场。静电场中,无电荷区域的电场,以及恒定磁场中,无电流区域的磁场都是第Ⅰ类矢量场的例子。

第Ⅱ类是在有界空间区域中有散度源但无旋度源的矢量场。对于这类场,在该空间区域中,有 $\nabla \times \mathbf{F}=0$,但 $\nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0$,设 $\nabla \cdot \mathbf{F}=\rho$,同样由于 $\nabla \times \mathbf{F}=0$,可定义标量场 Φ ,使 $\mathbf{F}=-\nabla\Phi$,代入 $\nabla \cdot \mathbf{F}=\rho$ 中,得

$$\nabla^2 \Phi = -\rho$$

此方程称为泊松方程(Poisson's equation)。对于这类场,类似地,只要在该区域中求解出泊松方程的解,再对此解求梯度,就得到要求的矢量场。静电场中电荷分布区域的电场就是第Ⅱ类矢量场。

第Ⅲ类是在有界空间区域中无散度源但有旋度源的矢量场。在这种场区, $\nabla \times \mathbf{F} \neq 0$,记为 $\nabla \times \mathbf{F}=\mathbf{J}$,而 $\nabla \cdot \mathbf{F}=0$,因此又可表示为另一个矢量场 \mathbf{A} 的旋度,即 $\mathbf{F}=\nabla \times \mathbf{A}$,将此式代入 $\nabla \times \mathbf{F}=\mathbf{J}$ 得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}$$

利用矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$,上式重写为

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{J}$$

根据亥姆霍兹定理,如果要确定 \mathbf{A} ,不但要给出其旋度,还应给出其散度。因此在此不妨令 $\nabla \cdot \mathbf{A}=0$,使上式简化为

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J}$$

此方程是矢量泊松方程。只要解此方程求出 \mathbf{A} ,再对 \mathbf{A} 求旋度,就可得到要求的矢量场 \mathbf{F} 。恒定磁场中电流分布区域的磁场都是第Ⅲ类矢量场。

第Ⅳ类是在有界空间区域中既有散度源又有旋度源的矢量场。这类场可分解为无旋和无散两部分,然后按同前面几类场类似的方法得到对应的偏微分方程,再解方程求出对应的矢量场。有源区的时变电磁场就是第Ⅳ类矢量场。

从前面的分析可以看出,对于有界空间区域中的矢量场,它们满足与其散度和旋度有关的特定的偏微分方程,因此求解某有界区域的矢量场的问题,就可归结为求解该有界区域的偏微分方程的问题。

例 1.6-1 设在无界空间区域中,某一矢量场 \mathbf{E} 是无旋场,散度源分布在坐

标原点附近的很小的区域 V 内, 该区域中总散度源为 $\iiint_V \nabla' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') dV = q$, 求远离散度源区域处的矢量场 \mathbf{E} , 在远离散度源区域处, $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$, 可近似认为 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r$ 。

解 由亥姆霍兹定理, 因为 \mathbf{E} 是无旋场, 则

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$$

而

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

根据题意, 散度源分布在坐标原点附近的很小的区域 V 内, 且在远离散度源区域处, $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$, 可近似认为 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r$, 则

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r} \iiint_V \nabla' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') dV' = \frac{q}{4\pi r}$$

因此在远离散度源区域处 $\mathbf{E} = -\nabla\Phi = \frac{q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}$ 。

思考题

1. 什么是无旋场? 什么是无散场? 它们各有什么特点?
2. 在无界空间中矢量场由什么确定?
3. 简述亥姆霍兹定理的意义。
4. 如果一矢量场在某有界区域内仅有散度源, 而无旋度源, 那么该矢量场是无旋场吗? 为什么?
5. 如果一矢量场在某有界区域内仅有旋度源, 而无散度源, 那么该矢量场是无散场吗? 为什么?
6. 在有界区域内, 有哪几类矢量场? 它们各有什么特点?
7. 在有界区域内, 矢量场是否可由其散度和旋度确定? 为什么?

1.7 格林定理

格林(Green)定理给出了一有界空间区域中的场与该区域边界上场的关系。它是电磁场中常用到的一个重要定理。

1. 标量格林定理

若任意两个标量场 Φ, Ψ 在有界空间区域 V 中具有连续的二阶偏导数, 在包围区域 V 的封闭面 S 上, 具有连续的一阶偏导数, 则标量场 Φ 及 Ψ 满足下列等式

$$\iiint_V (\nabla \Psi \cdot \nabla \Phi + \Psi \nabla^2 \Phi) dV = \oint_S \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \quad (1.7-1)$$

$$\iiint_V (\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi) dV = \oint_S \left(\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) dS \quad (1.7-2)$$

式中 n 的方向为封闭面 S 的正法线方向, 指向区域 V 外。(1.7-1) 式称为第一标量格林公式, 也称为第一标量格林定理。(1.7-2) 式称为第二标量格林公式, 也称为第二标量格林定理。为了证明标量格林定理, 由标量场 Φ, Ψ 构成矢量场 $\Psi \nabla \Phi$, 利用高斯定理, 得

$$\iiint_V \nabla \cdot (\Psi \nabla \Phi) dV = \oint_S \Psi \nabla \Phi \cdot dS$$

根据散度的运算规则, 将上式中体积分的被积函数展开为

$$\nabla \cdot (\Psi \nabla \Phi) = \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi + \Psi \nabla^2 \Phi$$

代入就可得(1.7-1)式。交换 Φ 及 Ψ 的位置, (1.7-1) 式又可写为

$$\iiint_V (\nabla \Psi \cdot \nabla \Phi + \Phi \nabla^2 \Psi) dV = \oint_S \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS$$

上式与(1.7-1)式相减, 即可得(1.7-2)式。

2. 矢量格林定理

若任意两个矢量场 P, Q 在有界空间区域 V 中具有连续的二阶偏导数, 在包围区域 V 的封闭面 S 上具有连续的一阶偏导数, 则矢量场 P 及 Q 满足下列等式

$$\iiint_V ((\nabla \times P) \cdot (\nabla \times Q) - P \cdot \nabla \times \nabla \times Q) dV = \oint_S (P \times \nabla \times Q) \cdot dS \quad (1.7-3)$$

$$\iiint_V (Q \cdot \nabla \times \nabla \times P - P \cdot \nabla \times \nabla \times Q) dV = \oint_S (P \times \nabla \times Q - Q \times \nabla \times P) \cdot dS \quad (1.7-4)$$

(1.7-3) 及 (1.7-4) 式分别称为第一、二矢量格林公式, 也称为矢量格林定理。矢量格林定理可利用矢量场 P, Q 构成矢量场 $P \times \nabla \times Q$ 及 $Q \times \nabla \times P$, 将其代入高斯定理中, 并应用矢量恒等式

$$\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot \nabla \times A - A \cdot \nabla \times B$$

用类似于证明标量格林定理的方法很容易得到证明。

从格林定理可以看出, 它与高斯定理类似, 反映了两个场的体积分和面积分的关系, 从而表示区域内的场与区域边界上场之间的关系。利用格林定理, 可由一种已知的场通过积分求另一种未知场。

例 1.7-1 在区域 V 中

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

在区域 V 的封闭边界面 S 上 Φ 及 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ 已知。求区域 V 中任一点的 $\Phi(r)$ 。

解 令 $G = \frac{1}{4\pi R} = \frac{1}{4\pi |r-r'|}$ (1.7-5)

在封闭面 S 区域中,取包围点 r' 、半径为 a 的圆球面 S_a ,如图 1.7-1 所示。在曲面 S 和曲面 S_a 所围的区域 V 中

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1.7-6)$$

$$\nabla^2 G = 0 \quad (1.7-7)$$

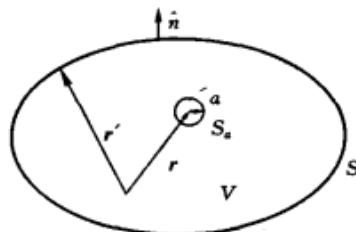


图 1.7-1 格林定理

标量场 Φ 与 G 满足标量第二格林定理

$$\iiint_V (G \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 G) dV = \oint_S (G \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial G}{\partial n}) dS + \oint_{S_a} (G \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial G}{\partial n}) dS$$

将(1.7-6)和(1.7-7)式代入上式左端的体积分中,体积分为零,那么右端面积分也为零,即

$$\oint_S (G \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial G}{\partial n}) dS + \oint_{S_a} (G \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial G}{\partial n}) dS = 0 \quad (1.7-8)$$

在上式第二项面积分中

$$\oint_{S_a} G \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = G(a) \oint_{S_a} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = G(a) \iiint_{V_a} \nabla^2 \Phi dV = 0 \quad (1.7-9)$$

$$\oint_{S_a} \Phi \frac{\partial G}{\partial n} dS = \oint_{S_a} \Phi \left(\frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{4\pi R} \right) dS = -\frac{1}{4\pi a^2} \oint_{S_a} \Phi dS \quad (1.7-10)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi a^2} \oint_{S_a} \Phi dS = \Phi(r') \quad (1.7-11)$$

将(1.7-9)、(1.7-10)和(1.7-11)式代入(1.7-8)式得

$$\Phi(r') = \oint_S (G \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial G}{\partial n}) dS \quad (1.7-12)$$

上式表示,在区域 V 中 r' 点处的标量场 Φ 可表示为对区域 V 的封闭边界面 S 上 Φ 及 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ 的积分。

思考题

1. 两个标量场满足格林公式的条件是什么?
2. 格林公式的面积分中, $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ 的意义是什么? n 与 S 有什么关系?

1.8 矢量场的唯一性定理

由前面的分析我们知道,在无限空间中,矢量场可以由其旋度和散度确定。而在有界空间中,仅由该区域中场的旋度和散度不能完全确定矢量场,该空间区域边界上的场对矢量场也有贡献。那么,满足什么条件时,有界空间区域中的矢量场才能唯一确定呢?

矢量场的唯一性定理指出:在空间某一有界区域 V 中的矢量场,当其在该区域 V 中的散度、旋度以及边界面 S 上的切向分量或法向分量给定后,则该区域中的矢量场被唯一地确定。

证 用反证法。设有界区域 V 中满足唯一性定理条件的矢量场不唯一,那么至少有两个矢量场,设为 F_1 及 F_2 ,其散度、旋度以及边界上的切向分量或法向分量给定,则有
在区域 V 中

$$\nabla \cdot F_1 = \nabla \cdot F_2 \quad (1.8-1)$$

$$\nabla \times F_1 = \nabla \times F_2 \quad (1.8-2)$$

在区域边界面 S 上

$$F_1 \cdot \hat{n} = F_2 \cdot \hat{n} \quad (1.8-3)$$

或

$$F_1 \times \hat{n} = F_2 \times \hat{n} \quad (1.8-4)$$

\hat{n} 为区域边界面上的法线单位矢量。令 $\delta F = F_1 - F_2$,则由 (1.8-1)~(1.8-4) 式,得

在区域 V 中

$$\nabla \cdot \delta F = 0 \quad (1.8-5)$$

$$\nabla \times \delta F = 0 \quad (1.8-6)$$

在区域边界面 S 上

$$\delta F \cdot \hat{n} = 0 \quad (1.8-7)$$

$$\delta F \times \hat{n} = 0 \quad (1.8-8)$$

由 (1.8-6) 式, δF 可表示为标量场的梯度,即

$$\delta F = \nabla \Phi \quad (1.8-9)$$

代入 (1.8-5) 式,得

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1.8-10)$$

利用标量第一格林定理,取 $\Phi = \Psi$,得

$$\iiint_V (|\nabla \Phi|^2 + \Phi \nabla^2 \Phi) dV = \oint_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \quad (1.8-11)$$

将(1.8-10)式代入得

$$\iiint_V |\nabla\Phi|^2 dV = \oint_S \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS \quad (1.8-12)$$

如果在区域 V 的边界面 S 上场的切向分量给定, 将(1.8-9)式代入(1.8-8)式得

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla\Phi = 0$$

因此(1.8-12)式的右边面积分为0。如果在区域 V 的边界面 S 上场的切向分量给定, 将(1.8-9)式代入(1.8-8)式得

$$\left| \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right| = |\hat{t} \cdot \nabla\Phi| = |\hat{n} \times \nabla\Phi| = 0$$

式中 \hat{t} 为区域 V 的边界面 S 上的切向单位矢量。由上式可见, 在区域 V 的边界面 S 上标量位 Φ 沿边界不变化为常数, 记为 Φ_s , 因此(1.8-12)式的右边面积分为

$$\oint_S \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS = \Phi_s \oint_S \nabla\Phi \cdot dS = \Phi_s \iiint_V \nabla^2\Phi dV = 0$$

上式中应用了高斯定理。以上结论说明, 不论边界上矢量场的法向分量给定还是切向分量给定, (1.8-12)式右边的面积分均为0, 从而左边的体积分也为0。又由于(1.8-12)式左边的被积函数为正数, 因此, 其被积函数 $|\nabla\Phi|^2$ 为0, 从而

$$\nabla\Phi = 0$$

即

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$$

异同之处,为什么两者有差异?

3. 如果在某有界空间区域中,一矢量场的散度和旋度处处为 0,那么该矢量场一定为 0 吗? 为什么?

本章小结

1. 三种常用坐标系中的矢量场

三种常用坐标系的坐标分别为 (x, y, z) 、 (ρ, φ, z) 、 (r, θ, φ)

直角坐标系的坐标轴单位矢量为 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

圆柱坐标系的坐标轴单位矢量为 $\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$

圆球坐标系的坐标轴单位矢量为 $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$

位置矢量 $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} = r\hat{r}$

矢量场的坐标分量

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_\rho(\mathbf{r})\hat{\rho} + A_\varphi(\mathbf{r})\hat{\varphi} + A_z(\mathbf{r})\hat{z}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_r(\mathbf{r})\hat{r} + A_\theta(\mathbf{r})\hat{\theta} + A_\varphi(\mathbf{r})\hat{\varphi}$$

2. 梯度

$$\nabla\Phi = \hat{x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l} = \hat{l} \cdot \nabla\Phi$$

3. 散度

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$$

4. 旋度

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

5. 无旋场与无散场

亥姆霍兹定理:若矢量场 F 在无限空间中处处单值, 且其导数连续有界, 源分布在有限区域中, 则当矢量场的散度及旋度给定后, 该矢量场可表示为

$$F(r) = -\nabla\Phi(r) + \nabla \times A(r)$$

式中

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla' \cdot F(r')}{|r-r'|} dV'$$

$$A(r) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla' \times F(r')}{|r-r'|} dV'$$

无界空间中, 矢量场由其散度及旋度确定, 可分为无旋场和无散场; 有界空间中, 根据区域中矢量场散度及旋度是否为 0, 矢量场可分为 4 类。

6. 格林定理

若任意两个标量场 Φ 及 Ψ 在有界空间区域 V 中具有连续的二阶偏导数, 在包围区域 V 的封闭面 S 上, 具有连续的一阶偏导数, 则标量场 Φ 及 Ψ 满足下列等式

$$\iiint_V (\nabla\Psi \cdot \nabla\Phi + \Psi\nabla^2\Phi) dV = \oint_S \Psi \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS$$

$$\iiint_V (\Psi\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Psi) dV = \oint_S (\Psi \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial\Psi}{\partial n}) dS$$

7. 矢量场的唯一性定理

矢量场的唯一性定理:在空间某一有界区域 V 中的矢量场, 当其在该区域 V 中的散度、旋度以及边界面 S 上的切向分量或法向分量给定后, 则该区域中的矢量场被唯一地确定。

习 题 1

1.1 已知 $A=2\hat{x}+3\hat{y}-\hat{z}$, $B=\hat{x}+\hat{y}-2\hat{z}$ 。求: (a) A 和 B 的大小; (b) A 和 B 的单位矢量; (c) $A \cdot B$; (d) $A \times B$; (e) A 和 B 之间的夹角; (f) A 在 B 上的投影。

1.2 如果矢量 A 、 B 和 C 在同一平面, 证明 $A \cdot (B \times C) = 0$ 。

1.3 已知 $A=\hat{x}\cos\alpha+\hat{y}\sin\alpha$, $B=\hat{x}\cos\beta-\hat{y}\sin\beta$, $C=\hat{x}\cos\beta+\hat{y}\sin\beta$, 证明这 3 个矢量都是单位矢量, 且 3 个矢量是共面的。

1.4 $A=\hat{x}+2\hat{y}-\hat{z}$, $B=\alpha\hat{x}+\hat{y}-3\hat{z}$ 。当 $A \perp B$ 时, 求 α 。

1.5 证明 3 个矢量 $A=5\hat{x}-5\hat{y}$, $B=3\hat{x}-7\hat{y}-\hat{z}$ 和 $C=-2\hat{x}-2\hat{y}-\hat{z}$ 形成一个三角形的 3 条边, 并利用矢积求此三角形的面积。

1.6 P 点和 Q 点的位置矢量分别为 $5\hat{x}+12\hat{y}+\hat{z}$ 和 $2\hat{x}-3\hat{y}+\hat{z}$, 求从 P 点到 Q 点的距离矢量及其长度。

1.7 求与两矢量 $\mathbf{A}=4\hat{x}-3\hat{y}+\hat{z}$ 和 $\mathbf{B}=2\hat{x}+\hat{y}-\hat{z}$ 都正交的单位矢量。

1.8 将直角坐标系中的矢量场 $\mathbf{F}_1(x, y, z)=\hat{x}$, $\mathbf{F}_2(x, y, z)=\hat{y}$ 分别用圆柱和圆球坐标系中的坐标分量表示。

1.9 将圆柱坐标系中的矢量场 $\mathbf{F}_1(\rho, \varphi, z)=2\hat{\rho}$, $\mathbf{F}_2(\rho, \varphi, z)=3\hat{\varphi}$ 用直角坐标系中的坐标分量表示。

1.10 将圆球坐标系中的矢量场 $\mathbf{F}_1(r, \theta, \varphi)=5\hat{r}$, $\mathbf{F}_2(r, \theta, \varphi)=\hat{\theta}$ 用直角坐标系中的坐标分量表示。

1.11 计算在圆柱坐标系中两点 $P(5, \frac{\pi}{6}, 5)$ 和 $Q(2, \frac{\pi}{3}, 4)$ 之间的距离。

1.12 空间中同一点上有两个矢量, 取圆柱坐标系, $\mathbf{A}=3\hat{\rho}+5\hat{\varphi}-4\hat{z}$, $\mathbf{B}=2\hat{\rho}+4\hat{\varphi}+3\hat{z}$, 求: (a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$; (b) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$; (c) \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的单位矢量; (d) \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 之间的夹角; (e) \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的大小; (f) \mathbf{A} 在 \mathbf{B} 上的投影。

1.13 矢量场中, 取圆柱坐标系, 已知在点 $P(1, \frac{\pi}{2}, 2)$ 矢量为 $\mathbf{A}=2\hat{\rho}+3\hat{\varphi}$, 在点 $Q(2, \pi, 3)$ 矢量为 $\mathbf{B}=-3\hat{\rho}+10\hat{z}$ 。求: (a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$; (b) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$; (c) \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 之间的夹角。

1.14 计算在圆球坐标系中两点 $P(10, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ 和 $Q(2, \frac{\pi}{2}, \pi)$ 之间的距离及从 P 点到 Q 点的距离矢量。

1.15 空间中的同一点上有两个矢量, 取圆球坐标系, $\mathbf{A}=3\hat{r}+\hat{\theta}+5\hat{\varphi}$, $\mathbf{B}=2\hat{r}-\hat{\theta}+4\hat{\varphi}$, 求: (a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$; (b) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$; (c) \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的单位矢量; (d) \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 之间的夹角; (e) \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的大小; (f) \mathbf{A} 在 \mathbf{B} 上的投影。

1.16 求 $f(x, y, z)=x^3y^2z$ 的梯度。

1.17 求标量场 $f(x, y, z)=xy+2z^2$ 在点 $(1, 1, 1)$ 沿 $\mathbf{l}=x\hat{x}-2\hat{y}+\hat{z}$ 方向的变化率。

1.18 由 $\nabla\Phi=\hat{x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$, 利用圆柱坐标和直角坐标的关系, 推导 $\nabla\Phi=\hat{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}+\hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}+\hat{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ 。

1.19 求 $f(\rho, \varphi, z)=\rho\cos\varphi$ 的梯度。

1.20 由 $\nabla\Phi=\hat{x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$, 利用圆球坐标和直角坐标的关系, 推导 $\nabla\Phi=\hat{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}+\hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$ 。

- 1.21 求 $f(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta \cos \varphi$ 的梯度。
 1.22 求梯度 $\nabla \rho, \nabla r, \nabla e^k$, 其中 k 为常数。
 1.23 在圆球坐标系中, 矢量场 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{k}{r^2} \hat{r}$, 其中 k 为常数, 证明矢量场 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$

对任意闭合曲线 l 的环量积分为 0, 即 $\oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。

- 1.24 证明(1.3-8e)式、(1.3-8f)式。
 1.25 由(1.4-3)式推导(1.4-4)式。
 1.26 由(1.4-4)式推导(1.4-5)式及(1.4-6)式。
 1.27 计算下列矢量场的散度
 (a) $\mathbf{F} = yz\hat{x} + zy\hat{y} + xz\hat{z}$
 (b) $\mathbf{F} = \hat{\rho} + \rho\hat{\varphi}$
 (c) $\mathbf{F} = 2\hat{r} + r\cos\theta\hat{\theta} + r\hat{\varphi}$
 1.28 计算散度 $\nabla \cdot (\rho\hat{\rho}), \nabla \cdot \mathbf{r}$ 和 $\nabla \cdot (ke^{k \cdot r})$, 其中 k 为常矢量。
 1.29 由 $\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ 推导 $\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$ 。
 1.30 已知
 (a) $f(\mathbf{r}) = x^2 z$
 (b) $f(\mathbf{r}) = \rho$
 (c) $f(\mathbf{r}) = r$

求 $\nabla^2 f$ 。

1.31 求矢量场 $\mathbf{F} = \rho\hat{\rho} + \hat{\varphi} + z\hat{z}$ 穿过由 $\rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq z \leq 1$ 所确定区域的封闭面的通量。

- 1.32 由(1.5-2)式推导(1.5-3)式。
 1.33 计算矢量场 $\mathbf{F} = xy\hat{x} + 2yz\hat{y} - \hat{z}$ 的旋度。
 1.34 计算 $\nabla \times \hat{\rho}, \nabla \times \mathbf{r}, \nabla \times (z\hat{\rho}), \nabla \times \hat{\varphi}$ 。
 1.35 已知 $\mathbf{A} = y\hat{x} - x\hat{y}$, 计算 $\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ 。
 1.36 证明矢量场 $\mathbf{E} = yz\hat{x} + xz\hat{y} + xy\hat{z}$ 既是无散场, 又是无旋场。
 1.37 已知 $\mathbf{E} = E_0 \cos \theta \hat{r} - E_0 \sin \theta \hat{\theta}$, 求 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 和 $\nabla \times \mathbf{E}$ 。
 1.38 证明 $\nabla \times (\Phi \mathbf{A}) = \Phi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \Phi \times \mathbf{A}$ 。
 1.39 已知 $\nabla \cdot \mathbf{F} = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \nabla \times \mathbf{F} = 0$, 计算 \mathbf{F} 。
 1.40 已知 $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \nabla \times \mathbf{F} = \hat{z}\delta(x)\delta(y)\delta(z)$, 计算 \mathbf{F} 。

第 2 章 静电场

静电场是由相对静止的、不随时间变化的电荷产生的,对电荷有作用力的一种矢量场。空间区域中静电场的分布与变化取决于电荷的分布以及周围物质环境。本章以库仑定律为基础,分析静电场的性质和它所满足的数学方程;分析电介质和导体两种媒质与电场的相互作用;介绍几种最基本的计算静电场的方法。

2.1 电场强度

1. 电荷密度

电场是由电荷产生的。在自然界中,目前人们所知的电荷的最小量度是单个电子的电量,用 e 表示, $e=1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。在微观上,电荷是一个个带电小微粒,以离散的形式分布在空间中。但在本书中我们要讨论的是宏观上的电场,是大量的带电粒子共同作用下的统计平均效应,它不反映物质微观结构上的细节和不连续性。因此,在宏观电磁理论中,不考虑电荷在微观尺度的离散性,而将电荷看成在空间是连续分布的。当考察空间某区域中电荷的分布情况时,连续分布的电荷用电荷密度表示。电荷分布区域中某点 r 处的电荷密度 $\rho(r)$ 定义为,以 r 为中心取一足够小的体积元 ΔV , ΔV 内包含大量的带电粒子,总电量为 Δq , 则

$$\rho(r) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad (2.1-1)$$

电荷密度是空间坐标变量的函数,单位为 C/m^3 。由于这样定义的电荷密度的意义是指单位体积中的电量,因此也称为电荷体密度。根据电荷密度的定义,如果已知某空间区域 V 中的电荷体密度 $\rho(r)$, 则区域 V 中的总电量 q 为

$$q = \iiint_V \rho(r) dV \quad (2.1-2)$$

在有些情况下,电荷分布在薄层里。例如在导体的表面或两种不同物质的分界面上,电荷就可能分布在界面附近的薄层里。对于这种情况,当仅考虑薄层外距薄层的距离比薄层的厚度大得多处的电场,而不分析和计算该薄层内的电场时,可将该薄层的厚度忽略,认为电荷是面分布。面分布的电荷可用电荷面密度表示。在电荷所在的面 S 上点 r 处的电荷面密度 $\rho_s(r)$ 定义为,以 r 为中心取一足够小的

面积元 ΔS , ΔS 内(面积为 ΔS 的薄层体积内)包含大量的带电粒子,总电量为 Δq , 则

$$\rho_s(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad (2.1-3)$$

电荷面密度 $\rho_s(\mathbf{r})$ 是曲面上坐标变量的函数,单位为 C/m^2 ,表示单位面积上的电量。如果已知某空间曲面 S 上的电荷面密度 $\rho_s(\mathbf{r})$,则该曲面上的总电量 q 为

$$q = \iint_S \rho_s(\mathbf{r}) dS \quad (2.1-4)$$

在电荷分布在细线上的情况下,当仅考虑细线外距细线的距离比细线的直径大得多处的电场,而不分析和计算线内的电场时,可将线的直径忽略,认为电荷是线分布。线分布的电荷可用电荷线密度表示。在电荷所在的线上某一点 \mathbf{r} 取一足够小的线元 Δl , Δl 上(长度为 Δl 的细线内)包含大量的带电粒子,总电量为 Δq ,则线上点 \mathbf{r} 的电荷线密度 $\rho_l(\mathbf{r})$ 定义为

$$\rho_l(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad (2.1-5)$$

电荷线密度 $\rho_l(\mathbf{r})$ 是线上坐标变量的函数,单位为 C/m ,表示单位长度上的电量。如果已知某空间曲线 l 上的电荷线密度 $\rho_l(\mathbf{r})$,则该曲线上的总电量 q 为

$$q = \int_l \rho_l(\mathbf{r}) dl \quad (2.1-6)$$

对于总电量为 q 的电荷集中在很小区域 V 的情况,当不分析和计算该电荷所在的小区域中的电场,而仅需要分析和计算电场的区域又距离电荷区很远,即场点距源点的距离远大于电荷所在的源区的线度时,小体积 V 中的电荷可看作位于该区域中心、电量为 q 的点电荷。位于 \mathbf{r}' 点电量为 q 的点电荷的电荷密度可用 δ 函数表示

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.1-7)$$

2. 库仑定律

1785 年,法国物理学家库仑(Charles-Augustin de Coulomb, 1736—1806)发表了关于两个点电荷之间相互作用力规律的实验结果——库仑定律。库仑定律指出,在真空中,两个相对静止的点电荷之间相互作用力的大小与它们电量的乘积成正比,与它们之间的距离平方成反比,其方向在它们的连线上。设点电荷 Q 与 q 分别位于 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' ,如图 2.1-1 所示, Q 所受的力为

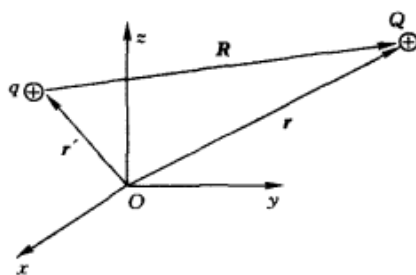


图 2.1-1 真空中两个点电荷之间的作用力

$$\mathbf{F} = k \frac{qQ}{R^2} \hat{\mathbf{R}} \quad (2.1-8)$$

式中

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad \hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (2.1-9)$$

(2.1-8)式中系数 k 的值与所选取的单位制有关,当采用国际单位制(SI)时, $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 称为真空中的介电常数。

如果点电荷 Q 位于 \mathbf{r} 处,同时受到分别位于 $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_i, \dots, \mathbf{r}'_n$ 的 n 个点电荷 $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ 的作用,实验表明,点电荷 Q 所受到的总力等于各个点电荷 q_i ($i=1, 2, \dots, n$)单独存在时对 Q 的作用力 \mathbf{F}_i 的矢量和,即

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_i}{R_i^2} \hat{\mathbf{R}}_i \quad (2.1-10)$$

式中

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_i, \quad R_i = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|, \quad \hat{\mathbf{R}}_i = \frac{\mathbf{R}_i}{R_i} \quad (2.1-11)$$

(2.1-10)式表明电场力具有可叠加性。

3. 电场强度

由库仑定律知道,当一点电荷放在另一点电荷的周围时,该点电荷要受到力的作用,这种力在空间各点的值都是确定的,因此,我们说在电荷周围存在矢量场。这种矢量场表现为对电荷有作用力,故称之为电场。电场的大小与方向用电场强度表示。电场中某一点 \mathbf{r} 处的电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 定义为单位试验电荷在该点所受的力,即

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q_0} \quad (2.1-12)$$

试验电荷 q_0 是这样的电荷,其体积足够小以致于可看作为点电荷,其电量也足够小,以使它的引入不影响电场分布。电场强度的单位为 V/m (或 N/C)。

将(2.1-8)式代入(2.1-12)式,可得到真空中位于点 \mathbf{r}' 的点电荷 q 的电场在点 \mathbf{r} 的电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q\hat{\mathbf{R}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (2.1-13)$$

式中 R 为源点 \mathbf{r}' 到场点 \mathbf{r} 的距离

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (2.1-14)$$

$\hat{\mathbf{R}}$ 为从源点 \mathbf{r}' 到场点 \mathbf{r} 方向的单位矢量

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.1-15)$$