1 概率论

1 随机变量及其概率分布

1.1 随机变量

- 抛硬币：可能出现正面或反面；
- 从一批产品中任取10件，抽到的废品数可能是0,1,2,…,10中的一个数；
- 掷骰子：可能出现1,2,3,4,5,6点

1.2 离散型随机变量及其分布律

如果随机变量X只能取有限个或可列无穷多个数值，则称X为离散型随机变量。

定义 设X为一个离散型随机变量，它所有可能取的值为$x_k(k=1,2,\ldots)$，而p_k $(k=1,2,\ldots)$是X取值x_k时相应的概率，即

$$P\{X = x_k\} = p_k \quad (k = 1,2,\cdots)$$

或写成

X	x_1	x_2	…	x_k	…
P	p_1	p_2	…	p_k	…

则称上式或表格表示的函数为离散型随机变量X的概率分布，或称为X的分布律。

1.3 连续型随机变量

对于可以在某一区间内任意取值的随机变量，它的值不是集中在有限个或可列无穷个点上，这就是连续型随机变量。

1.4 概率分布函数

定义　设**X**是一随机变量，**x**是任意实数，函数

$$F(x)=P\{X\le x\}\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

称为**X**的概率分布函数,简称为分布函数。（对连续和离散随机变量都适用）

根据分布函数的定义，可得下面的基本性质：

性质1：满足

$$0 \le F(x) \le 1$$

性质2：F(x)是单调非减函数，即当

$$x_1 < x_2$$

则有

$$F(x_1) \le F(x_2)$$

性质3：

$$P\{X > x\} = 1 - F(x)$$

性质4：随机变量X在区间

$$x_1 < X \leq x_2$$

上取值的概率为

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

性质5:

$$F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$$

性质6：F(x)右连续，即

$$F(x^{+}) = F(x)$$

对于离散随机变量的分布函数，除满足以上性质外，还具有阶梯形式，即

$$F(x)=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i\}U(x-x_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}p_iU(x-x_i)$$

1.5 概率密度函数

概率密度函数定义为概率分布函数F(x)对x的导数，即

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

有时简称为密度函数。

对于离散随机变量，其概率密度函数为

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\sum_i p_i\delta(x-x_i)$$

根据概率分布函数的性质，可得到概率密度的性质：

性质1：概率密度函数非负

$$f(x) \geq 0$$

性质2：概率密度函数在(x_1,x_2)区间积分，得到该区间的取值概率

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

性质3：概率密度函数在整个取值区间积分为1，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

1.6 随机变量的独立性

定义　设X、Y为两个随机变量，如果对任意实数x和y，事件 $\{X \le x\}$ 和 $\{Y \le y\}$ 相互独立，即

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\}$$

则称X和Y相互独立。

1.7 n维随机变量及其分布

定义 n维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的n维（联合）分布函数为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) =$$

$$P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

定义 设 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为n维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的n维分布函数，如果它的n阶混合偏导数存在，那么定义

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}$$

为n维随机变量的n维概率密度。

n维随机变量相互统计独立的充要条件为：对于所有的（$X_1, X_2, \cdots, X_n$）满足

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)$$