Quiz1

2022年10月18日 星期二 11:41

(a) 问题: $X \sim P(x|\theta)$, 已知样本 $X_{1:n}$ iid X

当 新来一个 $X_{n+1} = t$ 服从总体X, 求其出现的概率。

后续问题均为(a)题特例

解: Training: $P(\theta|X_{1:n}) = \eta P(X_{1:n}|\theta) P(\theta)$ ① 可由训练求出,

Prediction: $P(t|X_{1:n}) = \int P(t|X_{1:n}, \theta) P(\theta|X_{1:n}) d\theta$

② 当θ已知时, $X_{1:n}$对求$P(t)$无帮助,

$\therefore P(t|X_{1:n}, \theta) = P(t|\theta)$ 可以求出,

(b) $X \sim Bern(\mu)$, 即 $P(X=H)=\mu$, $P(X=T)=1-\mu$

而参数 $\mu \sim Beta(\mu|a_0, b_0)$, $a_0=50$, $b_0=50$

样本 $X_{1:5} = [H, H, T, T, T]$ iid X

解: ① μ的后验分布为 $P(\mu|X_{1:5}) = Beta(\mu|52, 53)$

② $\therefore$ 对X而言 $\mu_{ML} = \frac{52}{52+53} = \frac{52}{105}$

即 新来一个 $X_6 = t$, $P(t=H) = \mu_{ML}$

(c) $\overset{\text{总体}}{X} \sim N(\underbrace{\mu, \Sigma}_{\text{两个参数}})$, 参数$\mu$有先验分布 $\mu \sim N(\mu_0, \Sigma_0)$

[illegible] 参数M的先验 $M \sim N(M_0, \Sigma_0)$

现在观测到 $X_{1:n}$ iid X。

① 求 $P(M \mid X_{1:n})$ ② 求 $P(X=t \mid X_{1:n})$

① Training: $P(M \mid X_{1:n}) = \eta P(X_{1:n} \mid M) P(M)$

由于高斯分布的特性，此式可简化为

$$\begin{cases} \Sigma_{MAP}^{-1} = \Sigma_0^{-1} + \Sigma_{1:n}^{-1} \\ \Sigma_{MAP}^{-1} M_{MAP} = \Sigma_0^{-1} M_0 + \Sigma_{1:n}^{-1} M_{1:n} \end{cases}$$

其中 $P(M \mid X_{1:n}) \sim N(M \mid M_{MAP}, \Sigma_{MAP})$

$P(X_{1:n} \mid M) \sim N(M \mid M_{1:n}, \Sigma_{1:n})$

② $P(X=t \mid X_{1:n}) \sim N(t \mid M_{MAP}, \Sigma_{MAP} + n\Sigma)$

(d) $Y = AX + n$, $n \sim N(0, Q)$ 已定，X 有先验分布 $X \sim N(m_0, \Sigma_0)$

现有观测 $Y_{1:n}$, $n=1$。

① 求 $P(X \mid Y_{1:n})$ 这一后验分布 ② 求 $P(Y \mid Y_{1:n})$

与极大化似然分布

① 由 $Y = AX + n$ 可设 $X = HY + V$, $V \in N(0, L)$

$P(x|y) = P(y|x)\,P(x)$ 〗

给定X，$P(Y|X) \sim N(y|AX, Q)$，而又已知 $X \sim N(m_0, \Sigma_0)$

有 $\begin{cases} \Sigma_{MAP}^{-1} = Q^{-1} + \Sigma_0^{-1} \\ \Sigma_{MAP}^{-1} m_{MAP} = Q^{-1} AX + \Sigma_0^{-1} m_0 \end{cases}$

而取 $\Sigma_0^{-1} = 0$

可得 ML：$\begin{cases} L = (A^T Q^{-1} A)^{-1} = \Sigma_{ML} \\ Hy = (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1} Y = m_{ML} \end{cases}$

② $Y = Ax + n$ ∴

$P(Y | Y_{1:n}) = N(Y \mid A m_x, A \Sigma_x A^T + Q)$

其中 $m_x, \Sigma_x = m_{MAP}, \Sigma_{MAP}$